

Экстремальные расположения правильных многогранников

А. Скопенков*

А. Таламбуца

*He looked at the snail. Can it see me? he wondered.
Then he felt, how little I know,
and how little it is possible to know; and with this
thought he experienced a moment of joy.*

I. Murdoch, The Flight From the Enchanter

ВВЕДЕНИЕ

Один из наиболее активно развивающихся разделов комбинаторной геометрии связан с задачами об *оптимальных упаковках*. В этих задачах требуется расположить в данной фигуре одного типа наибольшую возможную фигуру второго типа (или наибольшее количество фигур второго типа данного размера). Настоящая статья посвящена некоторым чрезвычайно красивым расположениям одних правильных многогранников в других и доказательству экстремальности этих расположений (в смысле, четко сформулированном ниже). Основные идеи иллюстрируются на примере правильного тетраэдра, куба и правильного октаэдра (рис. 1 и 1'). Другие правильные многогранники (правильные додекаэдр и икосаэдр) упоминаются только в конце статьи, где и приводится их определение. В этой статье правильный тетраэдр и правильный октаэдр сокращенно называются тетраэдром и октаэдром.

Приводимые расположения известны специалистам (но, к сожалению, не широкой публике). Доказать оптимальность некоторых из них предлагалось ранее на олимпиадах. Настоящая статья написана на основе цикла задач [3], предлагавшегося на 13-й летней конференции Турнира Городов,

*Работа А. Скопенкова поддержана грантами РФФИ №02-01-00014 и №01-01-00583, грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ-1988.2003.1, стипендией МГУ для молодых преподавателей и ученых и программой РАН «Современные проблемы теоретической математики».

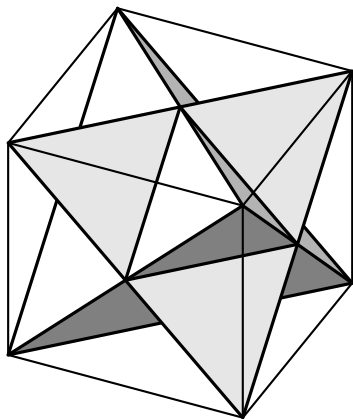


Рис. 1.

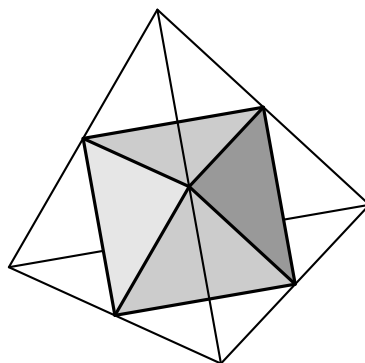


Рис. 1'.

проходившей в августе 2000 г. под г. Малоярославцем Калужской области. В данной статье мы предлагаем для исследования несколько задач, решения которых нам неизвестны.

Многие приводимые результаты двойственны друг другу. Мы используем в нумерации штрих для указания двойственного утверждения, но не обсуждаем двойственность подробно, отсылая читателя к [1, §9.2].

ОПИСАНИЕ ИНТЕРЕСНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ ТЕТРАЭДРА, КУБА И ОКТАЭДРА

На рисунке 1 показано, как выбрать четыре вершины куба так, чтобы они были вершинами тетраэдра. Раскрасим вершины куба с ребром 1 в черный и белый цвета в «шахматном» порядке (т. е. так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета). Тогда вершины одного цвета задают тетраэдр с ребром $\sqrt{2}$.

Заметим, что пересечение тетраэдров с черными и белыми вершинами есть октаэдр, вершины которого являются серединами ребер этих тетраэдров.

На рисунке 1' легко видеть и непосредственно, что середины ребер тетраэдра с ребром 1 являются вершинами октаэдра с ребром $1/2$. Из этого вытекает также, что можно выбрать четыре плоскости граней октаэдра так, чтобы они были плоскостями граней тетраэдра.

На рисунках 2а, 2б показано, как выбрать на ребрах октаэдра восемь точек, являющихся вершинами куба. Вершины октаэдра с ребром 1 обозначим через A, B, C, D, S_1, S_2 , чтобы выделить «основание» $ABCD$ и «вершины» S_1 и S_2 . На восьми ребрах, соединяющих вершины основания с точками S_1 и S_2 , возьмем восемь «красных» точек $A_i B_i C_i D_i$, делящих

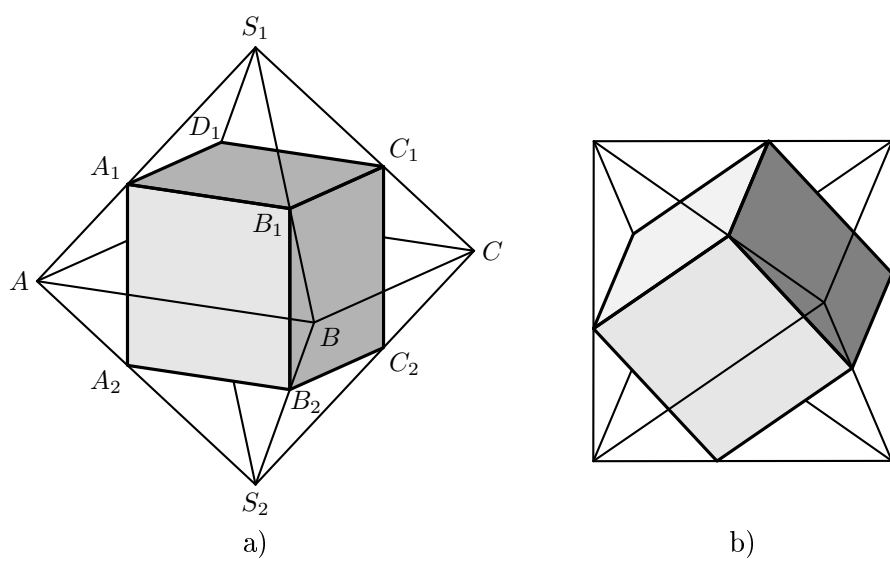


Рис. 2.

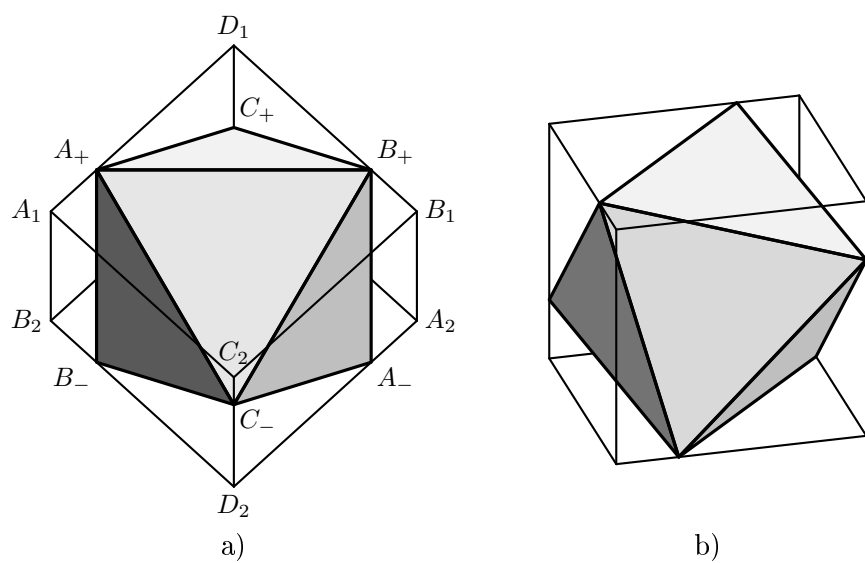


Рис. 2'.

соответствующие ребра в одинаковых отношениях. Легко видеть, что «красные» точки являются вершинами прямоугольного параллелепипеда. Его грани, параллельные основанию, являются квадратами. «Красный» прямоугольный параллелепипед является кубом тогда и только тогда, когда $A_1A_2 : A_1B_1 = AA_1\sqrt{2} : SA_1 = 1$. Сторона «красного» куба равна при этом $A_1B_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.

На рисунках 2'a,b показано, как выбрать на ребрах куба шесть точек, являющихся вершинами октаэдра. Вершины куба с ребром 1 обозначены нестандартно, но именно такое обозначение удобно для нашего построения. Четыре вершины трех ребер куба, имеющих общую точку, обозначены четырьмя разными буквами с некоторыми индексами. На трех ребрах D_1A_1 , D_1B_1 и D_1C_1 , выходящих из вершины D_1 , взяты три точки A_+ , B_+ , C_+ , делящие эти ребра в одинаковых отношениях 3 : 1 (к общей вершине D_1 примыкает *бóльший* отрезок деления). Рассмотрим также точки A_- , B_- , C_- , симметричные им относительно центра куба. Имеем

$$A_+B_- = \sqrt{A_+A_1^2 + A_1B_2^2 + B_2B_-^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}A_+D_1 = A_+B_+.$$

Аналогично получаем, что все восемь треугольников $A_{\pm}B_{\pm}C_{\pm}$ — правильные с ребром $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Таким образом, $P = A_+B_+C_+A_-B_-C_-$ — правильный октаэдр с ребром $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Обычно приводятся расположения на рисунках 2a и 2'b, из которых не совсем понятно, что они двойственны друг другу.

Закончим этот параграф интересным замечанием В. Дольникова. Вопрос о том, когда среди вершин n -мерного куба можно выбрать точки, являющиеся вершинами правильного n -мерного симплекса, очень интересен, но не решен более 100 лет. Не все знают, хотя за последние 70 лет это неоднократно переоткрывалось, что это можно сделать тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $n+1$. (*Матрицей Адамара* называется ортогональная матрица, состоящая из единиц и минус единиц.) До сих пор не доказана гипотеза о том, что при $n \geq 4$ матрица Адамара существует в точности тогда, когда n делится на 4.

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРИВЕДЕННЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ

Сформулируем проблему, при решении которой появляются указанные красивые расположения.

ПРОБЛЕМА (P, Q). Даны два выпуклых многогранника P и Q . При каком наибольшем $p = p(P, Q)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q , можно поместить многогранник с ребром p , гомотетичный P ?

Проблема (P, Q) в случае правильных многогранников P и Q будет в дальнейшем обозначаться с использованием пиктограмм для правильных многогранников. См., например, формулировку следующих теорем.

ТЕОРЕМЫ: 1. $p(\diamond, \square) = \sqrt{2}$.

1'. $p(\diamond, \diamond) = 1/2$.

Оптимальные расположения для теорем 1 и 1' уже построены (рис. 1 и 1'). Доказательство их оптимальности несложно и красиво. Оно основано на следующих общеизвестных фактах.

– Сфера, описанная около тетраэдра, имеет минимальный радиус среди всех сфер, в которые его можно поместить.

– Вписанная в выпуклый многогранник сфера имеет максимальный радиус среди всех сфер, которые можно поместить в данный многогранник.

Заметим, что первый из этих фактов неверен для произвольных тетраэдров.

Итак, докажем, что в кубе Q с ребром 1 невозможно расположить тетраэдр с ребром, большим $\sqrt{2}$. Пусть в Q расположен тетраэдр P . Тогда P содержится в сфере S , описанной вокруг Q . По первому из сформулированных фактов, ребро тетраэдра P не превосходит ребра тетраэдра, вписанного в S . Как раз такой тетраэдр изображен на рис. 1а, и его ребро равно $\sqrt{2}$.

Теперь докажем, что в тетраэдре Q с ребром 1 невозможно расположить октаэдр с ребром, большим $1/2$. Пусть в Q расположен октаэдр P . Тогда Q содержит сферу S_P , вписанную в P . По второму из сформулированных фактов, радиус сферы S_P не превосходит радиуса сферы S_Q , вписанной в Q . Значит, ребро октаэдра P не превосходит ребра октаэдра, описанного вокруг S_Q . Как раз такой октаэдр изображен на рис. 1б, и его ребро равно $1/2$.

ТЕОРЕМЫ: 2. $p(\square, \diamond) = 2 - \sqrt{2}$.

2'. $p(\diamond, \square) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Оптимальные расположения для теорем 2 и 2' уже построены (рис. 2 и 2'). Доказательство их оптимальности также несложно и красиво. Оно основано на следующей лемме.

ЛЕММА О ЦЕНТРАХ СИММЕТРИИ. Если выпуклый центрально-симметричный многогранник P можно расположить внутри другого выпуклого центрально-симметричного многогранника Q , то это можно сделать и таким образом, чтобы центры симметрии многогранников совпали.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что куб P на рисунке 2 имеет наибольшее ребро среди всевозможных кубов, помещающихся в единичном октаэдре. Предположим, напротив, что в октаэдре

существует куб P' бóльшего размера, чем P . По лемме о центрах симметрии можно считать, что центр куба P' совпадает с центром O октаэдра. Тогда все вершины куба P' лежат вне сферы с центром O , описанной около куба P . Пусть K и L — точки пересечения этой сферы с ребрами AB и AD , соответственно, ближайšie к A . Рассмотрим пирамиду $AKLA_1A_2$ и пять аналогичных пирамид, соответствующих остальным вершинам октаэдра. Если некоторая точка лежит в октаэдре, но не содержится ни в одной из этих шести пирамид, то она лежит внутри рассматриваемой сферы. Таким образом, вершины куба P' расположены в объединении построенных шести пирамид. По принципу Дирихле хотя бы две вершины куба P' должны лежать в одной пирамиде. Однако диаметр каждой пирамиды (т. е. наибольшее расстояние между точками пирамиды) равен A_1A_2 , что равно ребру куба P и по нашему предположению меньше ребра куба P' . Полученное противоречие завершает доказательство.

Для доказательства теоремы 2' достаточно показать, что октаэдр P на рисунке 2' имеет наибольшее ребро среди всевозможных октаэдров, помещающихся в единичном кубе. Предположим, напротив, что в кубе существует октаэдр P' , бóльший, чем P . По лемме о центрах симметрии можно считать, что центр октаэдра P' совпадает с центром O куба. Тогда все вершины октаэдра P' лежат вне сферы с центром O , описанной около октаэдра P . Эта сфера пересекает ребра куба в точках на расстоянии $1/4$ от его вершин. Рассмотрим 8 четырехугольных пирамид, каждая из которых образована вершинами куба и тремя ближайшими к ней точками пересечения сферы с ребрами куба (лежащими на выходящих из этой вершины ребрах). Если точка лежит в кубе, но вне объединения этих 8 пирамид, то она лежит внутри рассматриваемой сферы. Таким образом, вершины октаэдра P' расположены в объединении 8 данных пирамид. Это означает, что две из вершин октаэдра P' должны принадлежать либо одной пирамиде, либо лежать в двух пирамидах, отвечающих двум соседним вершинам куба. Однако расстояние между двумя точками объединения пирамид, относящихся к соседним вершинам, не превосходит $\sqrt{1^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, что равно ребру октаэдра P и меньше ребра октаэдра P' . Полученное противоречие завершает доказательство. Немного другое доказательство теоремы 2', а также близкие интересные факты приведены в [2, задача 415].

Осталось доказать лемму о центрах симметрии. Мы будем использовать формулу для композиции центральных симметрий: $Z_A \circ Z_B = T_{2\overline{BA}}$. Пусть O_Q и O_P — центры симметрии многогранников Q и P . Многогранник $Z_{O_Q}(P)$ также содержится в Q . Имеем: $S_{O_Q}(P) = S_{O_Q}(S_{O_P}(P)) = T_{2\overline{O_P O_Q}}(P)$ (см. рис. 3, на котором изображен плоский аналог). Тогда

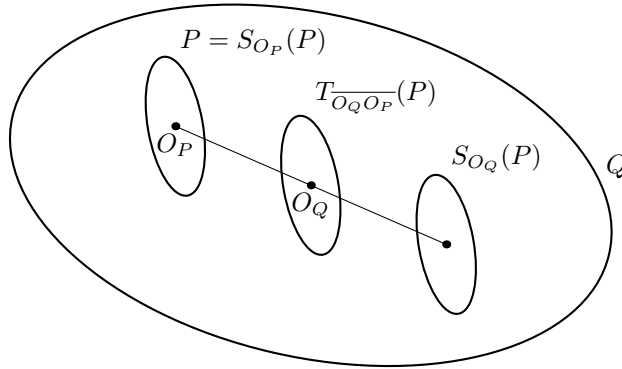


Рис. 3.

многогранник $P' = T_{O_P O_Q}(P)$ равен P , имеет центр симметрии в точке O_Q и содержится внутри Q . Последнее следует из выпуклости многогранника Q , поскольку каждая точка $x \in P'$ лежит на отрезке, соединяющем точки $T_{O_P O_Q}(x)$ и $T_{O_Q O_P}(x)$.

Мы предлагаем заинтересовавшемуся читателю решить проблемы (\diamond, \diamond) и (\square, \diamond) или хотя бы получить оценки для соответствующих $p(P, Q)$ (видимо, эти проблемы являются нерешенными). Например, рассматривая рисунок 1', можно доказать, что $p(\diamond, \diamond) \geq 1$ (поскольку тетраэдр, симметричный «верхнему» тетраэдру относительно «нижней» грани последнего, лежит в октаэдре).

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ТЕТРАЭДРОВ

ПРОБЛЕМА (Q, n) . Дан выпуклый многогранник Q . При каком наибольшем $p = p(Q, n)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q , можно поместить n непересекающихся тетраэдров с ребром p ?

ТЕОРЕМА 3. $p(\square, 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $p(\diamond, 2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Построим оптимальные расположения для теоремы 3 (рис. 4а). Рассмотрим две противоположные вершины S_1 и S_2 куба. Рассечем куб плоскостью, равноудаленной от S_1 и S_2 . В сечении получим правильный шестиугольник со стороной $1/\sqrt{2}$. В это сечение можно поместить правильный треугольник со стороной $p < \sqrt{3}/\sqrt{2}$ так, что центр треугольника совпадет с центром сечения. Тетраэдры с вершинами S_1 и S_2 , основаниями которых служат указанные треугольники, — искомые. Высоты построенных тетраэдров равны радиусу $R = \sqrt{3}/2$ описанной около куба

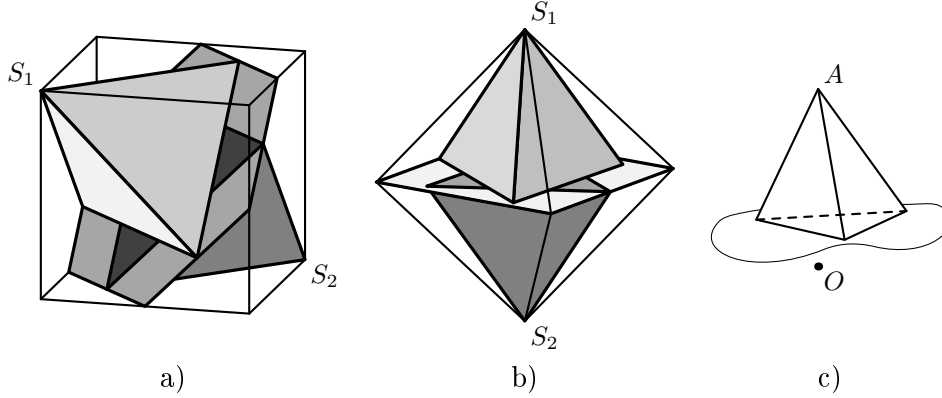


Рис. 4.

сферы. Так как $R = p\sqrt{2/3}$, то эти тетраэдры правильные. Оптимальность построенных расположений вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА О ДВУХ ТЕТРАЭДРАХ. Если многогранник Q находится в сфере диаметра d , то $p(Q, 2) \leq d \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Эта лемма доказывается очень просто. Если в многограннике Q расположены два тетраэдра с ребром $p = p(Q, 2)$, не имеющие общих внутренних точек, то центр сферы O не лежит в одном из них. Проведем через грани этого тетраэдра плоскости. Одной из них можно отделить O от вершины A тетраэдра, не лежащей в этой плоскости (рис. 4с). Тогда $d/2 \geq AO \geq h = p\sqrt{2}/\sqrt{3}$, где h — длина высоты тетраэдра.

Рассматривая теперь (рис. 4b) две противоположные вершины S_1 и S_2 октаэдра и рассекая октаэдр равноудаленной от этих вершин плоскостью, получим в сечении квадрат со стороной 1. Впишем в него окружность радиуса $1/2$, а в нее — правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}/2$. Тетраэдры с вершинами S_1 и S_2 , основаниями которых служат указанные треугольники, — искомые. Доказательство аналогично случаю куба.

Мы предлагаем заинтересовавшемуся читателю получить оценки числа $p(Q, n)$ для оставшихся пар (Q, n) . На рисунке 5 представлено замечательное расположение, показывающее, что $p(\text{куб}, 3) \geq 1$.

РАЗБИЕНИЕ ТЕТРАЭДРА НА ТЕТРАЭДРЫ И ОКТАЭДРЫ

Из рисунка 1' и неравенства $p(\text{тетраэдр}, \text{тетраэдр}) \geq 1$ вытекает, что $p(\text{тетраэдр}, 5) \geq 1/2$. Приведем красивое классическое расположение, обобщающее расположение на рисунке 1' и дающее оценку $p(\text{тетраэдр}, \frac{n^3 + n}{2}) \geq \frac{1}{n}$ (аналогичное

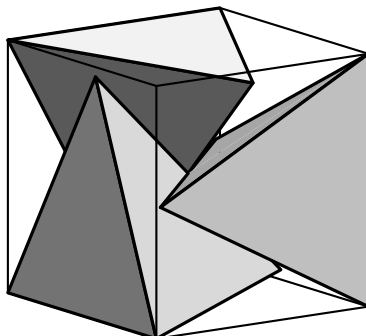


Рис. 5.

построение можно провести и для октаэдра). См. рис. 1' для $n = 2$ и рис. 6 для $n = 3$.

ТЕОРЕМА 4. Для каждой высоты тетраэдра с ребром 1 проведем $n - 1$ перпендикулярных ей плоскостей, делящих ее на n равных частей. Тогда проведенные плоскости разбивают тетраэдр на $\frac{n^3 + 2n}{3}$ тетраэдров и $\frac{n^3 - n}{6}$ октаэдров с ребром $\frac{1}{n}$.

Теорему 4 легко доказать по индукции. База $n = 2$ следует из рисунка 1'. Докажем шаг индукции сначала для $n = 3$. Проведенные плоскости разбивают тетраэдр на куски. Среди проведенных плоскостей рассмотрим те четыре плоскости, каждая из которых отсекает от исходного тетраэдра *малый* тетраэдр с ребром $2/3$. Куски в малых тетраэдрах являются тетраэдрами и октаэдрами по предположению индукции. Казалось бы, исходный тетраэдр является объединением малых тетраэдров.

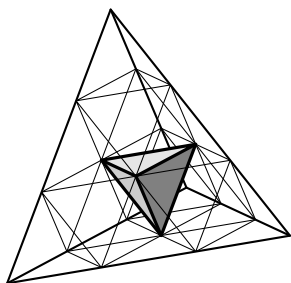


Рис. 6.

В действительности, это не так: центр исходного тетраэдра не лежит в этом объединении! (См. рис. 6.) Это следует из того, что центр исходного тетраэдра делит высоту в отношении $1 : 3$, а каждая из четырех выбранных плоскостей — $1 : 2$. Но в объединении малых тетраэдров не лежит лишь один кусок. Он ограничен четырьмя гранями малых тетраэдров, не совпадающими с гранями исходного тетраэдра, и поэтому является тетраэдром с ребром $1/3$ (его вершинами являются центры граней

исходного «большого» тетраэдра). Значит, по предположению индукции все куски являются тетраэдрами и октаэдрами с ребром $1/3$. Поскольку

малых тетраэдров четыре, то ровно четыре куса являются октаэдрами. Пусть T кусков являются тетраэдрами. Для нахождения T воспользуемся соображениями подобия. Объем тетраэдра с ребром $1/3$ в $3^3 = 27$ раз меньше объема исходного тетраэдра и в 4 раза меньше объема октаэдра со стороной $1/3$. Следовательно, $4 \cdot 4 + T = 27$, откуда $T = 11$.

Докажем теперь, что теорема 4 верна для произвольного $n > 3$. Среди проведенных плоскостей рассмотрим те четыре плоскости, каждая из которых отсекает от исходного тетраэдра *малый* тетраэдр с ребром $1 - 1/n$. Так как $n > 3$, то объединение четырех малых тетраэдров уже является исходным тетраэдром. Значит, по предположению индукции все куски являются тетраэдрами и октаэдрами с ребром $1/n$. Подсчитаем теперь количества T_n тетраэдров и O_n октаэдров в разбиении. Объединение двух малых тетраэдров является исходным тетраэдром, из которого вырезаны куски, прилежащие к одному из ребер. Среди этих кусков n октаэдров с ребром $1/n$. Пересечением двух малых тетраэдров является тетраэдр с ребром $1 - 2/n$. Поэтому $O_{n+1} = n + 2O_n - O_{n-1}$ при $n \geq 3$. Используя $O_2 = 1$ и $O_3 = 4$, по индукции легко показать, что $O_n = \frac{n^3 - n}{6}$. Далее, из соображений подобия получим, что $4O_n + T_n = n^3$, откуда $T_n = \frac{n^3 + 2n}{3}$.

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ С УЧАСТИЕМ ДОДЕКАЭДРА И ИКОСАЭДРА

Приведем аналогичные результаты для других правильных многогранников — додекаэдра и икосаэдра. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани — одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны. Далее все многогранники подразумеваются правильными. Используя рис. 7, можно доказать [1, §9.1], что действительно существует

- *правильный додекаэдр, т. е. многогранник, каждая грань которого — пятиугольник;*
- *правильный икосаэдр, т. е. многогранник, в каждой вершине которого сходится 5 ребер.*

Не существует других типов правильных многогранников, кроме пяти построенных [1, §9]. Этот факт не используется в данной статье.

$$\text{ТЕОРЕМА 5. } p(\text{куб}, \text{додекаэдр}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad p(\text{тетраэдр}, \text{икосаэдр}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{ТЕОРЕМА 5'}. \quad p(\text{октаэдр}, \text{тетраэдр}) = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{2\sqrt{2}}, \quad p(\text{октаэдр}, \text{куб}) = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4\sqrt{2}}.$$

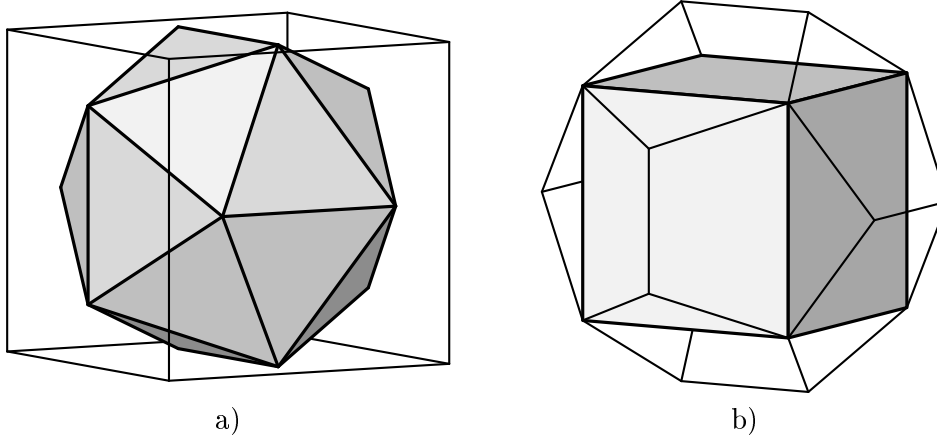


Рис. 7.

Оптимальные расположения для теорем 5 и 5' представлены на рис. 7b и 8. Их оптимальность доказывается аналогично теоремам 1 и 1'. В доказательстве используется, что для додекаэдра и икосаэдра существует:

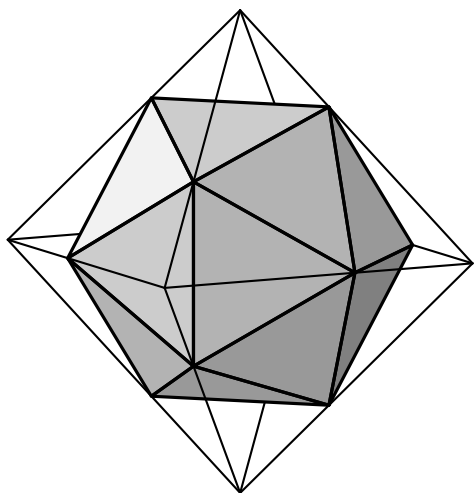
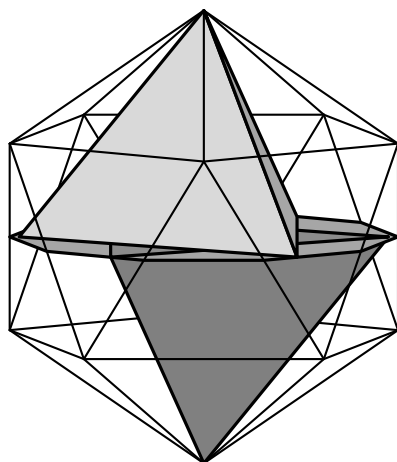
- сфера, проходящая через все его вершины (описанная сфера);
- сфера, касающаяся всех его граней (вписанная сфера).

Мы предлагаем заинтересовавшемуся читателю решить оставшиеся проблемы (P, Q) или хотя бы получить оценки для соответствующих $p(P, Q)$. Приведем имеющиеся у нас верхние оценки:

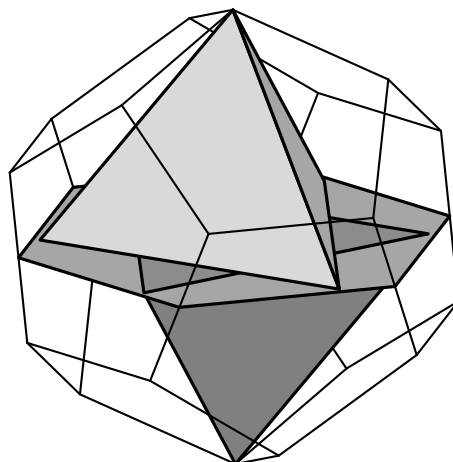
- $p(\text{икосаэдр}, \text{куб}) \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (рис. 7a);
- $p(\text{додекаэдр}, \text{куб})$ можно оценить из рис. 7b: додекаэдр, гомотетичный данному с центром в центре куба, содержится в кубе;
- $p(\text{куб}, \text{икосаэдр}) \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$, рис. 7a: середины ребер икосаэдра, лежащие на гранях куба, являются вершинами октаэдра;
- $p(\text{куб}, \text{додекаэдр})$ можно оценить из рис. 7a: середины ребер додекаэдра, лежащие над гранями куба, являются вершинами октаэдра;
- $p(\text{куб}, \text{октаэдр})$ можно оценить из рис. 8: центры граней октаэдра являются вершинами куба;
- $p(\text{додекаэдр}, \text{октаэдр})$ можно оценить из рис. 8: центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра.

$$\text{ТЕОРЕМА 6. } p(\text{додекаэдр}, 2) = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{2}} \text{ и } p(\text{икосаэдр}, 2) = \frac{\sqrt{3(5+\sqrt{5})}}{4}.$$

Оптимальные расположения для теоремы 6 изображены на рис. 9. Доказательство их оптимальности аналогично доказательству теоремы 3.

*Рис. 8.*

a)



b)

Рис. 9.

Необходимы следующие вычисления. Для додекаэдра построенное аналогично доказательству теоремы 3 сечение есть правильный шестиугольник со стороной $\frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ и радиусом вписанной окружности

$$r = \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{8} > \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4\sqrt{2}}.$$

Для икосаэдра построенное сечение есть правильный десятиугольник со стороной $1/2$ и радиусом вписанной окружности

$$r = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} > \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 5}}{4}.$$

Мы благодарим М. Вялого, В. Дольникова, М. Евдокимова и И. Ф. Шарыгина за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии*. М.: Наука, 1989.
- [2] Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии*. М.: Наука, 1989.
- [3] Скопенков А., Таламбца А. *Упаковки правильных многогранников* // Математическое образование, 2000. №3(14), с. 52–53.