Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра

А. А. Заславский

Постановка задачи

Эта статья посвящена задаче, которая была предложена школьникам на XV летней конференции Турнира Городов в августе 2003 года. Постановка задачи является совершенно естественной. Действительно, большая часть планиметрии состоит в изучении свойств треугольника. Трехмерным аналогом треугольника является тетраэдр, поэтому вполне логично поставить вопрос, для каких свойств треугольника существуют трехмерные аналоги. Впрочем, в полном объеме эта задача абсолютно неподъемна. Достаточно сказать, что в электронной энциклопедии [1] число связанных с произвольным треугольником замечательных точек приближается уже к 2000. Здесь мы рассмотрим вопросы, связанные примерно с десятком этих точек, которые будут перечислены ниже.

1. *Центр тяжести* M — точка пересечения медиан треугольника.

2. *Центр описанной окружности* O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

3. *Центр вписанной окружности* I — точка пересечения его биссектрис. Напомним, что для любого треугольника существуют еще три вневписанные окружности, каждая из которых касается одной из его сторон и продолжений двух других.

4. *Ортоцентр* H — точка пересечения высот треугольника. Отметим, что точки O, M и H лежат на одной прямой (прямая Эйлера) и $HM = 2MO$. Кроме того, точки O и H изогонально сопряжены[1)].

5. *Точка Жергонна* G — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности.

6. *Точка Нагеля* N — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с соответ-

[1)]Если даны треугольник ABC и точка P, то прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис соответствующих углов ABC, пересекаются в одной точке P', которая называется *изогонально сопряженной* P относительно ABC.

ствующей вневписанной окружностью. При этом точки N, M, I лежат на одной прямой и $NM = 2MI$. Отметим также, что точки G и N изотомически сопряжены[2)] друг другу, а изогонально сопряженные им точки являются центрами гомотетии описанной и вписанной окружностей.

7. *Точка Лемуана* L — изогонально сопряженная точке M. Точка L обладает также тем свойством, что сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника меньше, чем для любой другой точки плоскости.

8. *Точки Торричелли* — точки пересечения прямых AA', BB' и CC', где ABC', BCA', CAB' — правильные треугольники, построенные на сторонах треугольника ABC. При этом, если треугольники строятся во внешнюю сторону, получается первая точка Торричелли T_1, а если во внутреннюю, — вторая точка Торричелли T_2. Если все углы треугольника меньше $120°$, то точка T_1 лежит внутри треугольника и из нее все стороны треугольника видны под углами $120°$. В этом случае она обладает еще одним важным свойством: сумма расстояний от вершин треугольника до точки T_1 меньше, чем до любой другой точки плоскости.

9. *Точки Аполлония* — точки пересечения трех окружностей, каждая из которых проходит через одну вершину треугольника и точки пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов при этой вершине с противоположной стороной. Точки Аполлония обладают тем свойством, что расстояния от них до вершин треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам, а их проекции на стороны треугольника образуют правильные треугольники. Кроме того, точки Аполлония изогонально сопряжены точкам Торричелли, поэтому мы будем обозначать их как T_1', T_2'.

Мы будем исследовать вопрос, существуют ли аналогичные точки в произвольном тетраэдре, и, если нет, то как описать соответствующие классы тетраэдров, а также существуют ли между трехмерными замечательными точками такие же связи, как между их плоскими аналогами. Приведем сначала результаты, которые можно считать широко известными.

Известные факты геометрии тетраэдра

1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке — центре тяжести тетраэдра M. Они делят друг друга в отношении $3:1$.

[2)]Если прямые AP, BP, CP пересекают противоположные стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1, а точки A_2, B_2, C_2 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно середин соответствующих сторон, то прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке P', которая называется *изотомически сопряженной* P относительно ABC.

2. Вокруг любого тетраэдра можно описать сферу. Ее центр — точка O пересечения перпендикуляров к граням тетраэдра, проходящих через центры описанных около них окружностей.

3. В любой тетраэдр можно вписать сферу. Ее центром I будет точка пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов. Сложнее выяснить, сколько существует сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра. Прежде всего отметим, что их не может быть больше 8. Действительно, так как центр такой сферы равноудален от плоскостей ABC и ABD, он лежит в биссекторной плоскости одного из двух смежных двугранных углов между этими плоскостями. Аналогичны условия равноудаленности от плоскостей ABC и ACD; ABC и BCD. Так как каждую плоскость можно выбрать 2 способами, для трех плоскостей имеем 8 возможностей. В каждом из этих 8 случаев плоскости имеют не более одной общей точки (в противном случае, например, биссекторная плоскость угла при ребре AB проходила бы через точку C, что невозможно), которая однозначно определяет сферу.

Осталось понять, действительно ли эти 8 сфер существуют. Для этого посмотрим, на какие части разбивают пространство плоскости граней тетраэдра. Очевидно, что этих частей 15:

а) внутренность тетраэдра,

б) 4 трехгранных угла с вершинами в вершинах тетраэдра,

в) 4 части, примыкающих к граням тетраэдра,

г) 6 «корытец», примыкающих к ребрам тетраэдра.

Очевидно, что в части типа б) сфера вписана быть не может, так как каждая из таких частей не пересекается плоскостью четвертой грани. Докажем, что для части типа в) вневписанная сфера существует всегда. Для этого построим вписанную в тетраэдр сферу и проведем к ней касательную плоскость, например, параллельную плоскости ABC. Она отсекает от тетраэдра гомотетичный (с центром гомотетии D) тетраэдр $A'B'C'D$. Соответствующая гомотетия переводит вписанную сферу в искомую вневписанную.

Наконец, исследуем части типа г). Пусть в такую часть, прилежащую к ребру CD, можно поместить сферу, касающуюся плоскостей всех граней, с центром K и радиусом r. Тогда

$$V_{ABCD} = V_{ABCK} + V_{ABDK} - V_{ACDK} - V_{BCDK} = \\ = \frac{r}{3}(S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}).$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования искомой сферы будет неравенство $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$. Для доказательства его достаточности заметим, что для любой точки рассматриваемого «корытца» ее расстояния a, b, c, d до плоскостей BCD, CDA, DAB, ABC

удовлетворяют соотношению

$$dS_{ABC} + cS_{ABD} - bS_{ACD} - aS_{BCD} = 3V.$$

Поэтому, для точки K с $a = b = c = r = \dfrac{3V}{S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}}$ выполняется $d = r$.

Таким образом, если $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, вписать сферу нельзя, а если $S_{ABC} + S_{ABD} \neq S_{ACD} + S_{BCD}$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытец». Соответственно, в зависимости от того, сколько из равенств $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} - S_{BCD}$, $S_{ABC} + S_{BCD} = S_{ACD} + S_{ABD}$ выполняются, количество сфер, касающихся всех плоскостей граней тетраэдра, может быть от 5 до 8. Нетрудно построить примеры тетраэдров, реализующих указанные возможности.

Краснодарский школьник И. Шнурников нашел другое условие для определения числа вневписанных сфер.

Утверждение 1. Если $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAD + \angle CBD$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу, а если $\angle ADB + \angle ACB \neq \angle CAD + \angle CBD$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытец».

Лемма 1. Пусть дан четырехгранный угол $OABCD$ и сфера, касающаяся изнутри его граней OAB, OBC и OCD. Тогда

– если $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD также касается сферы;

– если $\angle AOB + \angle COD > \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD не пересекает сферы;

– если $\angle AOB + \angle COD < \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD пересекает сферу.

Доказательство леммы 1 полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения об описанном четырехугольнике.

Доказательство утверждения 1. Найдем теперь необходимое и достаточное условие существования сферы, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD. Пусть лучи DP и DQ противоположны соответственно DA и DB, а лучи DR и DS параллельны лучам BC и AC (рис. 1). Рассмотрим любую сферу, касающуюся всех граней угла $DPQRS$, кроме, возможно, DRS. Если плоскость DRS пересекает сферу, то меняя ее радиус, можно добиться искомого касания с плоскостью ABC, а если нет — то нельзя. По лемме 1 соответствующее условие имеет вид

$$\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD.$$

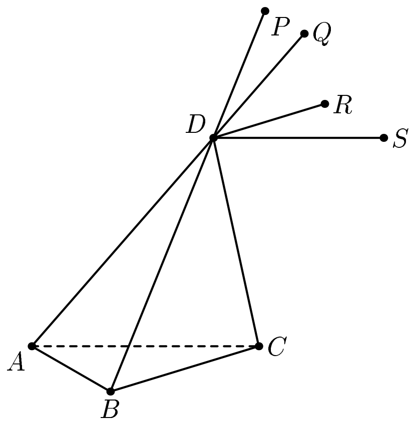

Рис. 1.

Аналогично, для ребра AB необходимым и достаточным условием будет противоположное неравенство.

Впрочем, убедиться в равносильности условий $\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD$ и $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$ можно непосредственно, разрезав тетраэдр по ребрам AC, BC, AD и BD на два четырехугольника с равными сторонами, но разными углами и сравнив их площади.

Отметим также следующий важный факт. Пусть I — центр вписанной сферы тетраэдра, X, Y — его проекции на ребра AC, BC, D' — точка касания сферы с гранью ABC (рис. 2). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D'X = r \operatorname{ctg} \frac{AC}{2}$, $D'Y = r \operatorname{ctg} \frac{BC}{2}$.

Таким образом, расстояния от точки касания до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих

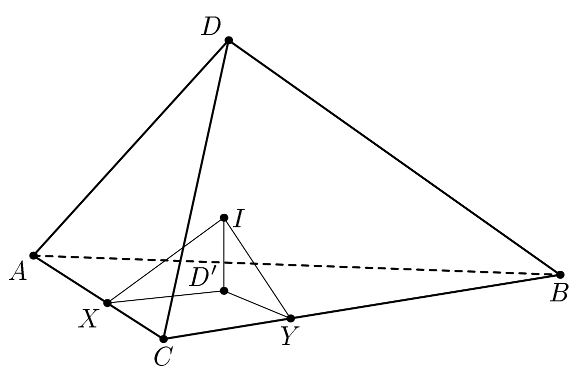

Рис. 2.

ребрах. Аналогично, если рассмотреть вневписанную сферу, касающуюся грани ABC и продолжений остальных граней, то расстояния от точки D'' ее касания с ABC до ребер основания относятся как тангенсы тех же углов. Отсюда следует, что

$$\angle D'CA = \angle D''CB, \quad \angle D'AC = \angle D''AB, \quad \angle D'BC = \angle D''BA,$$

т. е. доказано

Утверждение 2. Точки касания вписанной и вневписанной сфер изогонально сопряжены относительно соответствующей грани.

Рассмотрим теперь точку касания плоскости ABC с вневписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней. Расстояния от этой точки до BC, CA и AB относятся как $\operatorname{ctg}\frac{BC}{2} : \operatorname{ctg}\frac{AC}{2} : \operatorname{tg}\frac{AB}{2}$. Следовательно, для изогонально сопряженной точки отношение этих расстояний равно $\operatorname{tg}\frac{BC}{2} : \operatorname{tg}\frac{AC}{2} : \operatorname{ctg}\frac{AB}{2}$. Именно такое отношение получается для точки касания ABC со сферой, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD (или AB). Таким образом, 8 точек касания плоскости ABC со сферами, касающимися плоскостей всех граней тетраэдра, разбиваются на 4 пары изогонально сопряженных.

Пойдем дальше. Как известно, если $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу. Это связано с тем, что точки касания сферы с плоскостями граней уходят в бесконечность. Но тогда изогонально сопряженные им точки лежат на описанных окружностях граней. Отсюда и из ранее доказанных утверждений следует

Теорема 1. Следующие условия равносильны.

а) Ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу.

б) $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$.

в) $\angle ACB + \angle ADB = \angle CAD + \angle CBD$.

г) Точка касания плоскости ABC с вневписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABC.

д) Точка касания плоскости ABD с вневписанной сферой, касающейся грани ABC и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABD.

е) Точка касания плоскости ACD с вневписанной сферой, касающейся грани BCD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ACD.

ж) Точка касания плоскости BCD с вневписанной сферой, касающейся грани ACD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около BCD.

з) Центр вписанной сферы лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AC, BC, AD, BD.

Последнее условие найдено С. Л. Берловым. Его равносильность условию б) следует из того, что центр вписанной сферы является выпуклой линейной комбинацией вершин тетраэдра с коэффициентами, пропорциональными площадям противоположных граней.

Из теоремы 1 можно получить множество красивых следствий. Вот одно из них.

Если точки касания одной из вневписанных сфер с плоскостями трех граней тетраэдра лежат на описанных окружностях этих граней, то то же верно для трех других вневписанных сфер (соответствующий тетраэдр называется *равногранным*, так как все его грани — равные треугольники. О равногранных тетраэдрах можно прочесть в статье [2]).

Может возникнуть вопрос: почему в качестве аналога вписанной окружности треугольника мы решили взять сферу, касающуюся всех граней тетраэдра, а не всех его ребер. Дело в том, что последняя сфера существует не всегда. Действительно, пусть сфера касается ребер тетраэдра в точках X, Y, Z, U, V, W (рис. 3). Тогда $AX = AU = AW = a$, как касательные, проведенные к сфере из одной точки. Аналогично, $BY = BU = BV = b$, $CZ = CV = CW = c$, $DX = DY = DZ = d$. Следовательно, $AB + CD = AC + BD = AD + BC = a + b + c + d$, т. е. необходимым условием существования искомой сферы является равенство сумм

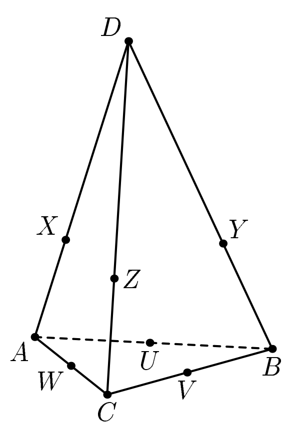

Рис. 3.

противоположных ребер тетраэдра. Как показано в [2], это условие будет и достаточным.

Тетраэдры, для которых существует сфера, касающаяся всех его ребер, называются *каркасными*. В [2] приводится следующий перечень равносильных каркасности свойств:

а) тетраэдр является каркасным;

б) суммы противоположных ребер равны;

в) суммы противоположных двугранных углов равны;

г) окружности, вписанные в грани, попарно касаются;

д) любой четырехугольник, образованный на развертке тетраэдра двумя его гранями, описанный;

е) перпендикуляры к граням, восставленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Ниже будет показано, что этот список можно дополнить.

4. Высоты пересекаются в одной точке не для всех тетраэдров, а лишь для некоторого специального класса — *ортоцентрических* тетраэдров. В [3] доказываются следующие условия, эквивалентные ортоцентричности:

а) противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны;

б) суммы квадратов противоположных ребер равны;

в) основание любой высоты тетраэдра совпадает с ортоцентром противоположной грани.

Отметим также, что для ортоцентрических тетраэдров существует аналог прямой Эйлера: точка пересечения высот H, центр тяжести M и центр описанной сферы O лежат на одной прямой и $OM = OH$.

В [3] описан еще один класс тетраэдров. Тетраэдр называется *инцентрическим*, если отрезки, соединяющие его вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней, пересекаются в одной точке. Для этого необходимо и достаточно, чтобы произведения противоположных ребер были равны.

Новые факты

Выясним теперь, в каких тетраэдрах существуют аналоги точек Жергонна и Нагеля. Для этого будет полезной следующая

Лемма 2. Пусть точка C' лежит в грани ABD тетраэдра $ABCD$, а точка D' — в грани ABC. Отрезки CC' и DD' пересекаются тогда и только тогда, когда $S_{ACD'}S_{BDC'} = S_{BCD'}S_{ADC'}$.

Доказательство. Для того, чтобы CC' и DD' пересекались, необходимо и достаточно, чтобы точки C, D, C' и D' лежали в одной плоскости.

Пусть X — точка пересечения этой плоскости с отрезком AB. Тогда отрезки CD' и DC' пересекаются в точке X, и значит

$$\frac{S_{ACD'}}{S_{BCD'}} = \frac{S_{ACX} - S_{AD'X}}{S_{BCX} - S_{BD'X}} = \frac{AX}{BX} = \frac{S_{ADC'}}{S_{BDC'}}\,,$$

что равносильно утверждению леммы.

Теперь определим условия пересечения двух отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, например отрезков CC' и DD'. Из рис. 2 видно, что $S_{ACD'} = AC \times D'X = AC \times r/\operatorname{tg}\frac{\widehat{AC}}{2}$. Выписав аналогичные соотношения для площадей треугольников BCD', ADC', BDC' и применив лемму 2, получим условие пересечения.

$$AC \times BD/\operatorname{tg}\frac{\widehat{AC}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{BD}}{2} = AD \times BC/\operatorname{tg}\frac{\widehat{AD}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{BC}}{2}\,.$$

Это условие можно упростить, воспользовавшись тем, что в трехгранном угле синусы плоских углов относятся так же, как синусы противолежащих им двугранных. Соответственно, имеем

$$\frac{AC \times BD}{AD \times BC} = \frac{\sin\widehat{ABC}\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{BAC}\sin\widehat{ABD}} = \frac{\sin\widehat{AC}\sin\widehat{BD}}{\sin\widehat{BC}\sin\widehat{AD}}\,,$$

и после преобразований условие пересечения принимает вид

$$\cos\frac{\widehat{AC}}{2}\cos\frac{\widehat{BD}}{2} = \cos\frac{\widehat{AD}}{2}\cos\frac{\widehat{BC}}{2}\,.$$

Отсюда, очевидно, следуют два утверждения.

Утверждение 3. Пусть вписанная сфера касается граней тетраэдра в точках A', B', C', D'. Если отрезки AA' и BB' пересекаются, то отрезки CC' и DD' также пересекаются.

Назовем тетраэдр *жергонновым*, если отрезки, соединяющие его вершины тетраэдра с точками касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке.

Утверждение 4. Тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда произведения косинусов половин его противоположных двугранных углов равны.

Рассуждая аналогично, найдем условия, при которых выполнен аналог свойства 6. Такие тетраэдры будем называть тетраэдрами Нагеля.

Утверждение 5. Пусть вневписанные сферы касаются граней тетраэдра в точках A', B', C', D'. Если отрезки AA' и BB' пересекаются, то отрезки CC' и DD' также пересекаются.

Утверждение 6. Тетраэдр является нагелевым тогда и только тогда, когда произведения синусов половин его противоположных двугранных углов равны.

Утверждения 3–6 были доказаны учеником автора, школьником московской гимназии 1543 Д. Косовым. На XV Летней конференции турнира городов школьники М. Исаев (Барнаул) и В. Филимонов (Екатеринбург) обнаружили еще одно свойство тетраэдров Жергонна.

Утверждение 7. Тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда любое его ребро видно из точки касания вписанной сферы с содержащей это ребро гранью под углом 120°. Таким образом, в жергонновом тетраэдре точки Торричелли всех граней совпадают с точками касания граней и вписанной сферы.

Доказательство. Докажем сначала, что если для одной грани тетраэдра точка ее касания с вписанной сферой совпадает с точкой Торричелли, то это верно и для остальных граней. Пусть A', B', C', D' — точки касания вписанной сферы с гранями BCD, CDA, DAB, ABC, и $\angle AD'B = \angle BD'C = \angle CD'A = 120°$. Так как касательные к сфере из одной точки равны, $AD' = AC'$, $BD' = BC'$, то треугольники ABD' и ABC' равны и $\angle AC'B = \angle AD'B = 120°$. Аналогично, $\angle BA'C = \angle CB'A = 120°$. Далее, $\angle AB'D = \angle AC'D$, $\angle BC'D = \angle BA'D$, $\angle CA'D = \angle CB'D$ и $\angle AB'D + \angle CB'D = \angle BC'D + \angle AC'D = \angle CA'D + \angle BA'D = 240°$, откуда следует, что все эти углы равны 120°.

Пусть теперь точки касания C' и D' — точки Торричелли соответствующих граней. Так как прямые CD' и DC' являются биссектрисами углов $AD'B$ и $AC'B$, они пересекают ребро AB в точке X, такой что $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{AC'}{BC'} = \dfrac{AD'}{BD'}$. Следовательно, точки C, D, C', D' лежат в плоскости CDX, и отрезки CC' и DD' пересекаются. Любые другие два отрезка также пересекаются, а так как четыре отрезка не лежат в одной плоскости, точка пересечения одна и та же. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Очевидно, утверждение 7 можно переформулировать следующим образом: тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие вершины с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке. Все приведенные выше результаты объединяет следующая

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

а) Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке.

б) Произведения косинусов половин противоположных двугранных углов равны.

в) Точка касания одной из граней тетраэдра с вписанной сферой является точкой Торричелли этой грани.

г) Точки касания всех граней тетраэдра с вписанной сферой являются точками Торричелли этих граней.

д) Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке.

е) Проекции центра вневписанной сферы на ребра соответствующей грани образуют равносторонний треугольник.

ж) Тетраэдр, образованный точками касания вписанной сферы с гранями, инцентрический.

Равносильность условий е) и г) следует из того, что точки касания грани с вписанной и вневписанной сферами сопряжены, а точка Торричелли изогонально сопряжена с точкой Аполлония; условий б) и ж) — из того, что, например, $A'B' = 2r\cos\dfrac{CD}{2}$.

Выясним теперь, чем является точка Жергонна тетраэдра $ABCD$ для тетраэдра $A'B'C'D'$. Поскольку отрезки CC' и DD' пересекаются, прямые CD и $C'D'$ лежат в одной плоскости. Рассмотрим плоскость $A'B'C'$. Она пересекает вписанную сферу $ABCD$ по окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, плоскости BCD и ACD — по прямым, касающимся этой окружности в точках A' и B' и пересекающимся в некоторой точке Q, а плоскость $CDC'D'$ — по прямой $C'Q$. Нетрудно доказать, что тогда прямая CQ будет симедианой треугольника $A'B'C'$ (т. е. прямой, симметричной медиане, проведенной из вершины C', относительно биссектрисы, проведенной из той же вершины). Следовательно, прямая DD' пересекает грань $A'B'C'$ в точке, лежащей на симедиане. Аналогично точка пересечения лежит на двух других симедианах, т. е. является точкой Лемуана треугольника $A'B'C'$. Точно так же доказывается, что прямые AA', BB', CC' проходят через точки Лемуана граней $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$. Отметим, что по лемме 2 прямые, соединяющие вершины тетраэдра и точки Лемуана противоположных граней, пересекаются тогда и только тогда, когда тетраэдр является инцентрическим. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если тетраэдр $ABCD$ жергоннов, то тетраэдр $A'B'C'D'$, образованный точками касания его граней с вписанной сферой, инцентрический, и точка Жергонна $ABCD$ совпадает с точкой пересечения прямых, соединяющих вершины $A'B'C'D'$ с точками Лемуана противоположных граней.*

Теорема 3 является аналогом планиметрического утверждения о совпадении точки Жергонна треугольника и точки Лемуана треугольника, образованного точками касания его сторон с вписанной окружностью.

Для тетраэдров Нагеля пока не найдено никаких условий, отличных от задаваемых утверждением 6. Неизвестно также, лежит ли точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки касания его граней с вневписанными сферами, на прямой, проходящей через центр тяжести тетраэдра и центр его вписанной сферы. Возможно, впрочем, что какой-то аналог этого свойства выполняется для другого класса тетраэдров.

В заключение отметим следующее. Может показаться, что еще один класс тетраэдров задает условие пересечения в одной точке отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки Жергонна противоположных граней. Однако, применив лемму 2, нетрудно убедиться, что это условие задает каркасные тетраэдры. Действительно, в этом случае, например, $\frac{S_{ACD'}}{S_{BCD'}} = \frac{AB + AC - BC}{AB + BC - AC}$. Подставив это и аналогичные выражения в лемму, после преобразований получим $AC+BD = AD+BC$. То же получится и при замене точек Жергонна точками Нагеля.

Прежде чем пытаться строить трехмерные точки Лемуана, Торричелли и Аполлония, определим для тетраэдров аналоги изотомического и изогонального сопряжения. Для изотомического сопряжения сделать это несложно.

Утверждение 8. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P. A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения прямых AP, BP, CP, DP с противоположными гранями тетраэдра, A_2, B_2, C_2, D_2 — точки, изотомически сопряженные A_1, B_1, C_1, D_1 относительно граней. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 пересекаются в одной точке.

Это утверждение сразу следует из леммы 2. Полученную точку естественно назвать *изотомически сопряженной* к P. Впрочем, изотомическое сопряжение даже на плоскости не обладает особо интересными свойствами, так что и в пространстве трудно ожидать получения каких-либо ценных результатов.

Определим теперь изогональное сопряжение в пространстве относительно тетраэдра $ABCD$. Прежде всего отметим следующий факт.

Утверждение 9. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P. Тогда 6 плоскостей, симметричных плоскостям ABP, ACP, BCP, ADP, BDP, CDP относительно биссекторных плоскостей соответствующих двугранных углов, пересекаются в одной точке.

Для доказательства достаточно заметить, что если расстояния от P до граней тетраэдра относятся как $a : b : c : d$, то каждая из рассматриваемых плоскостей проходит через точку, расстояния от которой до тех же граней относятся как $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$.

Определенную таким образом точку P' назовем *изогонально сопряженной* P относительно $ABCD$. Покажем теперь, что, как и в плоском случае, существует другой способ ее определения.

Утверждение 10. Пусть A', B', C', D' — проекции точки P на плоскости BCD, CDA, DAB, ABC. Тогда перпендикуляры, опущенные из A на $B'C'D'$, из B на $C'D'A'$, из C на $D'A'B'$, из D' на $A'B'C'$ пересекаются в изогонально сопряженной P точке P'.

Прежде всего докажем следующий, имеющий самостоятельную ценность факт.

Лемма 3. Пусть даны два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Перпендикуляры, опущенные из A' на BCD, из B' на CDA, из C' на DAB, из D' на ABC пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда «антисоответственные» ребра этих тетраэдров (например, $A'B'$ и CD) перпендикулярны.

Доказательство. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров. Так как $PA' \perp BCD$ и $PB' \perp CDA$, то $PA' \perp CD$ и $PB' \perp CD$. Следовательно, $CD \perp PA'B'$ и $CD \perp A'B'$.

Обратно, пусть «антисоответственные» ребра перпендикулярны. Тогда перпендикуляры из A' на BCD и из B' на ACD лежат в плоскости, проходящей через $A'B'$ и перпендикулярной CD, и, значит, пересекаются. Аналогично пересекаются два любых других перпендикуляра, и так как четыре перпендикуляра не лежат в одной плоскости, все они проходят через одну точку.

Доказательство утверждения 10. Из леммы 3 сразу следует, что если перпендикуляры из вершин одного тетраэдра на грани другого пересекаются, то и перпендикуляры из вершин второго на грани первого тоже пересекаются. Поэтому осталось доказать, что в условиях утверждения точкой пересечения будет именно P'.

Плоскость $PC'D'$ перпендикулярна ребру AB. Поэтому, если она пересекает AB в точке Q, то $C'QD'$ — линейный угол угла AB. Перпендикуляр, опущенный из A на $B'C'D'$, перпендикулярен $C'D'$, значит, линия пересечения плоскости π, проходящей через этот перпендикуляр и AB, с $C'D'X$ также перпендикулярна $C'D'$ по теореме о трех перпендикулярах. Отсюда и из свойства 1 плоского изогонального сопряжения, следует, что π проходит через P'. Утверждение доказано.

Исследуем теперь свойства изогонального сопряжения. Очевидно, что как и на плоскости, центры вписанной и вневписанных сфер сопряжены сами себе. Не представляет также труда доказать, что центр тяжести M изогонально сопряжен точке L, для которой сумма квадратов расстояний до граней тетраэдра минимальна. Эту точку можно считать точкой Лемуана тетраэдра. С другой стороны, точки, изогонально сопряженные бесконечно удаленным, лежат не на описанной сфере, а на некоторой поверхности третьего порядка. Вопрос об изогональной сопряженности точек O и H, очевидно, имеет смысл ставить лишь для ортоцентрических тетраэдров. Впрочем, с помощью утверждения 10 легко доказывается, что даже для них ответ будет положителен, только если тетраэдр правильный. Какими свойствами обладает точка, изогонально сопряженная O, в общем случае, непонятно.

Наконец, попробуем разобраться с точками Торричелли и Аполлония. Судя по всему, единственный перспективный путь — найти точку, минимизирующую сумму расстояний до вершин тетраэдра. Для этого проведем механическое рассуждение, аналогичное плоскому.

Пропустим через вершины тетраэдра четыре веревки, свяжем их внутренние концы в узел, а за внешние будем тянуть в одном направлении с равными силами. Если узел не проскочит через одну из вершин, то остановится в искомой точке T, причем сумма действующих на него сил будет равна нулю. Исследуем свойства этой точки.

Пусть $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_4}$ — единичные векторы, направленные из T в направлении A, B, C, D. Имеем

$$\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3}=-\boldsymbol{e_4}$$
$$(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3})=\boldsymbol{1}$$
$$(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})+(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})+(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})=-\boldsymbol{1},$$

т. е. для любых трех векторов $\boldsymbol{e_i}$ сумма косинусов углов между ними равна -1. Далее

$$(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_4})=-(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3})=-\boldsymbol{1}-(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})-(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})=(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}).$$

Это означает, что из точки T противоположные ребра тетраэдра видны под равными углами. Отсюда следует, что трехгранные углы $TABC$, $TCDA$, $TBAD$ и $TDCB$ равны. Так как их объединение совпадает со всем пространством, каждый из них высекает на единичной сфере с центром T область площади π, и, значит, сумма его двугранных углов равна 2π. Соответственно, для того чтобы узел не провалился в вершину тетраэдра, нужно чтобы сумма двугранных углов в любой вершине была меньше 2π (или сумма косинусов плоских углов больше -1). Подведем итог нашим рассуждениям.

Теорема 4. Если в любой вершине тетраэдра $ABCD$ сумма двугранных углов меньше 2π, то внутри тетраэдра существует точка T, из которой противоположные ребра тетраэдра видны под равными углами. При этом сумма расстояний от вершин тетраэдра до точки T меньше, чем до любой другой точки пространства.

Найденную точку T можно считать трехмерным аналогом первой точки Торричелли. Аналогично плоскому случаю доказывается, что проекции изогонально сопряженной ей точки T' на грани тетраэдра образуют равногранный тетраэдр. Поэтому точку T' можно считать аналогом точки Аполлония. Невыясненными остаются следующие вопросы.

1. Как определить точку Торричелли для тетраэдра, сумма двугранных углов при одной из вершин которого больше 2π?

2. Сколько существует точек, проекции которых на грани тетраэдра образуют равногранный тетраэдр, и какими свойствами обладают сопряженные к ним? (Эти точки задаются системой трех уравнений второй степени, следовательно, их не более 8. Но не исключено, что число действительных и конечных среди них всегда меньше.)

3. Обладают ли точки Аполлония еще какими-либо свойствами, аналогичными плоским?

Возможно, ответы на эти вопросы удастся найти читателям.

Список литературы

[1] C. Kimberling. *Encyclopedia of Triangle Centers.* `http://cedar.evansville.edu/~ck6/encyclopedia/`

[2] Матизен В. *Равногранные и каркасные тетраэдры* // Квант №7, 1983.

[3] Матизен В., Дубровский В. *Из геометрии тетраэдра* // Квант №9, 1988.