

Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского

Г. А. Гальперин

1. О «БИЛЬЯРДНОЙ» ФОРМУЛЕ И БИЛЬЯРДНОЙ ЗАДАЧЕ

Целью настоящей статьи является простая формула для измерения расстояний в пространстве Лобачевского, использующая бильярдный шар (формула (2) на с. 107). Поэтому автор назвал эту формулу «бильярдной». О чем эта формула, мы расскажем позже, после формулировки и обсуждения задачи о бильярдном отражении, к решению которой бильярдная формула будет применена. К своему удивлению, автор обнаружил, что бильярдная формула неизвестна даже специалистам-геометрам, хотя им и известны другие, ей эквивалентные, но не столь простые формулы для длин отрезков в геометрии Лобачевского. Соответственно, и доказательства этих эквивалентных, но «не простых» формул, не совсем просты (все они использует элементы комплексного анализа). Приводимое в настоящей статье доказательство бильярдной формулы не будет выходить за рамки элементарной школьной математики; только один раз нам понадобится — и то исключительно по необходимости и для полноты изложения! — формула, использующая интеграл, которую читатель при первом чтении может пропустить.

Бильярдная формула возникла у автора так.

При исследовании автором специальной динамической системы у него сама собой появилась геометрическая задача, которая никак не поддавалась (и не поддавалась до самого конца!) решению в рамках евклидовой геометрии. Эта задача приведена в части 3 этой статьи, и читатель сможет сам оценить ее трудность, попытавшись решить ее самостоятельно.

В результате долгого обдумывания автор вдруг совершенно неожиданно увидел всю геометрическую картину в абсолютно новом свете, после чего решение задачи пришло к нему практически мгновенно. Одним из ключей к ее решению оказалась упомянутая выше бильярдная формула для измерения расстояний в пространстве Лобачевского.

Другим, и, по мнению автора, более важным, ключом к решению оказалась полная смена точки зрения на исходный геометрический объект. Именно она и сыграла решающую роль.

В результате продумывания эффекта «смены точки зрения» автору показалось уместным предварить обсуждение основной темы статьи небольшим лирическим отступлением, в котором на нескольких примерах коротких, но необычных и ярких (а кому-то, возможно, и хорошо известных) задач показано, как одна только смена точки зрения сразу приводит к их решению. Читатели, которым хочется поскорее познакомиться с основной задачей статьи и бильярдной формулой, могут безо всякого для себя ущерба перепрыгнуть сразу в часть 3 статьи.

2. ЛИРИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ: О ПОЛЬЗЕ СМЕНЫ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

В науке часто случается так (а к математике это относится, пожалуй, в бóльшей степени), что одна только смена точки зрения на предмет позволяет полностью решить трудную задачу или даже изменить лицо этой (а, возможно, и смежной) науки. Достаточно упомянуть создание таблицы Менделеева (математические свойства которой отражают многочисленные химические законы); три стадии прохождения классической механики (ньютонова, лагранжева и гамильтонова); смену классической механики на релятивистскую (после обнаружения постоянства скорости света во всех инерциальных системах отсчета); почти дословный перенос принципов классической механики на оптику; создание генетики (введением вероятностных законов в биологию); возникновение квантовой механики (после того как оказалось, что матричное описание физических процессов на атомном уровне совпадает с волновым описанием); и многое другое.

В этом отступлении мне хотелось бы подтвердить тезис о пользе и плодотворности смены точки зрения на нескольких простых и ярких примерах решения задач из элементарной математики (все они взяты из олимпиадного фольклора), которым и посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

ПРИМЕР 1. *Фиксируем в произвольном выпуклом многоугольнике какую-нибудь внутреннюю точку P и опустим из нее перпендикуляры на прямые, содержащие стороны многоугольника. Доказать, что основание хотя бы одного из перпендикуляров попадет на сторону, а не на ее продолжение. Аналогичный вопрос про выпуклый многогранник (произвольной размерности).*

Если посмотреть на многоугольник (или, в общем случае, на многогранник) как на физический объект, заполненный веществом таким

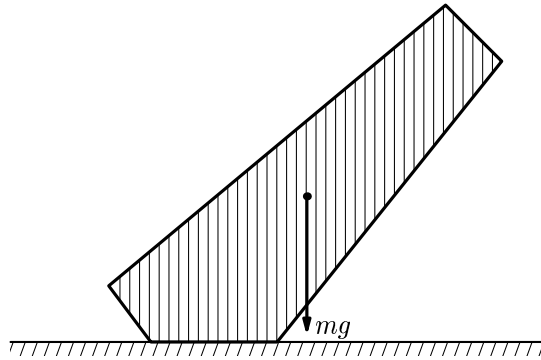


Рис. 1.

образом, что центр тяжести этого вещества находится в зафиксированной точке P , то с ним можно провести следующий эксперимент: поставить его на горизонтальный стол в поле тяжести и посмотреть, что получится. Предположим, что справедливо утверждение, противоположное доказываемому. Тогда перпендикуляр, опущенный из P на любую сторону многоугольника, выходит за пределы многоугольника. Следовательно, многоугольник на столе перекатится под действием силы тяжести на смежную сторону. Но перпендикуляр, опущенный на новую сторону, также выходит за ее пределы, поэтому многоугольник перекатится еще раз. Такое перекачивание будет происходить вновь и вновь — до бесконечности, и мы получаем вечный двигатель, которого, согласно физике, не существует (см. рис. 1). Полученное противоречие и дает доказательство утверждения.

Возможно, вам не понравилось приведенное физическое рассуждение. (Откуда, собственно, известно, что не существует вечного двигателя? Из многовекового опыта человечества? А вдруг завтра такой двигатель появится? Сошлемся здесь на то, что существование вечного двигателя противоречит закону сохранения энергии — это можно доказать чисто математически.) Приведенное доказательство можно модернизировать: если многоугольник перекатился на соседнюю сторону, то центр тяжести понизился (потому что была совершена работа силы тяжести по перекачиванию). А вечно понижаться центр тяжести не может, число понижений не может превосходить числа сторон многоугольника, уменьшенного на единицу: многоугольник остановится, когда центр тяжести окажется в наинизшем положении. (Вспомните, как падает кирпич, стоящий на своей самой маленькой грани: если вы его толкнете, он упадет на другую грань и окажется в более устойчивом положении. Если же его можно толкнуть еще раз, то в этот последний раз он упадет на свою грань наибольшей

площади и больше падать не сможет. В устойчивом положении центр тяжести кирпича наинизший возможный.)

Еще одно маленькое усилие, и приведенное «физическое» рассуждение становится чисто математическим: забыв о центре тяжести, рассмотрим ту сторону многоугольника, расстояние до которой от точки P наименьшее. Тогда перпендикуляр, опущенный из P на эту сторону, попадает именно на нее, а не на ее продолжение! Потому что в противном случае легко увидеть из рисунка, что точка P была бы ближе к соседней, смежной с ней стороне многоугольника, и отмеченная сторона оказалась бы не ближайшей к P .

Приведенное довольно длинное рассуждение, опуская детали, можно выразить одной фразой: если допустить противное, то из многоугольника можно было бы получить вечный двигатель, что дает противоречие. Простая смена точки зрения: «многоугольник — это физический объект в поле тяжести», сразу приводит к прозрачному видению всей картины и к очевидному доказательству, по своей структуре напоминающему древнегреческое «Смотри!» (Замена слова «многоугольник» на «многогранник» решения не меняет.)

ПРИМЕР 2. Доказать, что у любого выпуклого трехмерного многогранника всегда найдутся две грани с равным числом сторон.

Большинство известных мне решателей этой задачи мгновенно привлекало формулу Эйлера для многогранника: $V - E + F = 2$, и далее... ничего не происходило. Оказывается, приведенная задача вовсе не по геометрии, а по арифметике! (См. рис. 2).

Как только поймешь это, решение приходит тотчас же. Действительно, забыв о геометрии, допустим, что все грани имеют разное число сторон и что n — наибольшее возможное число сторон у грани. К этой грани примыкает n других граней многогранника, у любых двух из которых числа сторон различные (по предположению), причем все они строго меньше n (по тому же самому предположению). Однако количество натуральных

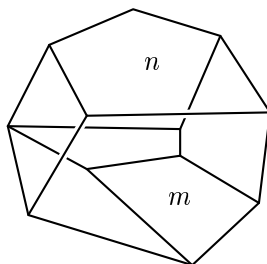


Рис. 2.

чисел, меньших n , строго меньше n , и мы получаем противоречие. (На самом деле наименьшим возможным натуральным числом в данной ситуации является 3 (треугольник), а не 1, и противоречие еще более усугубляется).

ПРИМЕР 3. Доказать, что если среди следующих шести чисел: $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ нет нулевых, то по крайней мере одно из них положительно.

Здесь, наоборот, точку зрения следует сменить с алгебраической на геометрическую. Для этого надо «увидеть», что шесть указанных чисел — это всевозможные скалярные произведения четырех двумерных векторов $\mathbf{v}_1 = (a, b)$, $\mathbf{v}_2 = (c, d)$, $\mathbf{v}_3 = (e, f)$ и $\mathbf{v}_4 = (g, h)$. Пусть эти вектора расположены на плоскости, как показано на рис. 3.

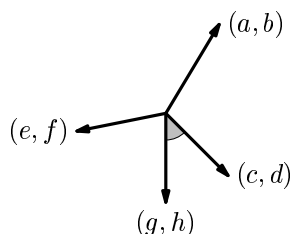


Рис. 3.

Все шесть скалярных произведений не могут быть отрицательными числами — это обстоятельство соответствовало бы четырем тупым углам между соседними векторами, а тогда сумма этих четырех углов превосходила бы 360° (хотя она равна в точности 360°), и мы получили бы противоречие. Следовательно, между какими-то векторами угол острый, поэтому его косинус положительный, и, стало быть, скалярное произведение этих векторов — одно из заданных чисел — положительно.

ПРИМЕР 4. Имеется некоторое (заранее неизвестное) количество мешков с неограниченным запасом золотых монет в каждом. В каких-то мешках все монеты настоящие и весят по 6 грамм, а в остальных мешках все монеты фальшивые и весят по 5 грамм. Заранее неизвестно, в каких мешках находятся настоящие монеты, а в каких фальшивые (рис. 4). Разрешается взять произвольное число монет из одного или из нескольких мешков и найти их общий вес на весах со стрелкой. Какое минимальное число взвешиваний следует сделать, чтобы определить все мешки с фальшивыми монетами?

Простейшая процедура по выявлению всех фальшивых мешков такова: взвешиваем одну монету из первого мешка, потом одну монету из второго



Рис. 4.

мешка, и так далее, вплоть до последнего мешка, определяя на каждом шаге, с каким мешком мы имеем дело — с настоящим или фальшивым. И на первый взгляд кажется, что минимальное число взвешиваний равно числу мешков.

Однако ответ в этой задаче совершенно неожиданный: минимальное число взвешиваний не зависит от числа мешков и равно единице! Как же всего за одно взвешивание определить сразу все фальшивые мешки? И что это за взвешивание, в которое, очевидно, должны быть вовлечены сразу все имеющиеся мешки?

Широко известна аналогичная задача, в которой условие из примера 4 ослаблено: известно, что только *один* мешок содержит фальшивые монеты. В этой задаче единственное взвешивание осуществляется так: нумеруем все мешки от первого до последнего, затем из каждого мешка достаём столько монет, каков номер этого мешка, после чего взвешиваем все выбранные монеты на весах. Если бы фальшивых монет не было вовсе, весы показали бы (численно, в граммах) в 6 раз бóльший вес, чем число выложенных на весы монет; однако какие-то k монет (из мешка с номером k) фальшивые и весят $5k$ грамм вместо $6k$ грамм, так что весы на самом деле показывают на k грамм меньше. Итак, номер k мешка с фальшивыми монетами тут же становится известным как разность двух чисел: того веса, который должен был бы быть, и реального, показываемого стрелкой весов.

Однако такой трюк не проходит, если число «фальшивых» мешков два или больше: указанная выше разность двух чисел равна сумме номеров всех фальшивых мешков и не даёт возможности определить каждый мешок по-отдельности. Похоже, что одним взвешиванием тут не обойтись. Тем не менее, одного взвешивания, как и раньше, оказывается достаточно!

Идея решения становится почти очевидной, если сменить точку зрения и вспомнить о системах счисления. Поскольку каждое натуральное число записывается однозначно в системе счисления с данным основанием b , надо занумеровать мешки от 0 до $n - 1$ (где n число мешков, пока что тоже неизвестное) и выбрать b^k монет из мешка с номером k . Легко сообразить (проще всего для десятичной системы счисления, $b = 10$), что вместо стандартного веса $P = 6 \cdot (1 + b + \dots + b^n)$ стрелка весов остано-

вится на весе, разность которого с P в b -ичной системе счисления будет выражаться числом, целиком состоящим из нулей и единиц. Места, на которых стоят единицы, как раз и соответствуют номерам фальшивых мешков!

ПРИМЕР 5. На прямой расположено 500 одинаковых бильярдных шаров: 200 из них катятся слева направо с одной и той же скоростью v , а 300 остальных — справа налево с той же скоростью v (рис. 5). Между шарами начинают происходить упругие столкновения, после ка-

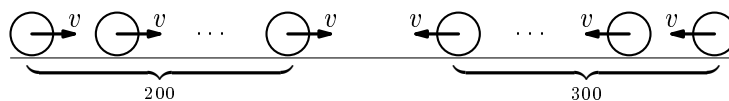


Рис. 5.

ждого из которых столкнувшиеся шары меняют направления своих движений на противоположные, но не меняют своих скоростей. (Расстояния между соседними шарами могут быть произвольными, так что порядок столкновения шаров заранее неизвестен.) Конечно или бесконечно число столкновений в этой системе? Если конечно, то каким оно может быть?

Занумеруем все шары слева направо от 1 до 500. Следить за последовательностью столкновений шаров практически нереально: даже фиксируя все соседние расстояния, будет трудно уследить порядок, в котором эти столкновения происходят. Лучше сменить точку зрения: вместо того, чтобы следить за парой столкнувшихся и затем разлетевшихся шаров, будем считать, что эти два шара просто проникли друг сквозь друга как бесплотные тела, обменявшись своими номерами. От такой смены точки зрения картина движения шаров не изменится (а номера шаров нас интересуют постольку-поскольку), однако изменится наше отношение к этой картине и мы сможем ответить на оба поставленных вопроса одновременно. Мы видим, что с новой точки зрения достаточно найти число проникновений шаров друг сквозь друга. Таких проникновений, очевидно, будет $200 \times 300 = 60000$, поскольку каждый правый шар прошел сквозь каждый левый (при этом по отдельности шары как в левой группе, так и в правой не взаимодействуют между собой). Итак, число столкновений в системе шаров всегда *конечно* и равно 60000, независимо от первоначальных расстояний между ними и от последовательности их столкновений.

Указанную систему из движущихся одинаковых бильярдных шаров можно рассматривать, после приведенного рассуждения, как примитивный калькулятор, производящий умножение двух натуральных чисел: числа шаров, движущихся влево, на число шаров, движущихся вправо.

ПРИМЕР 6. *Предположим, ваш друг задумал несколько произвольных натуральных чисел (среди которых могут быть и повторяющиеся), а вы хотите все их угадать (заодно определив и их количество), причем именно в том порядке, в каком он эти числа задумал (т. е. угадать весь вектор целых чисел). Вам разрешается попросить друга сделать произвольное вычисление, связанное с его числами, например, попросить его найти произведение или сумму некоторых из них, или же более сложную комбинацию. Каждое такое вычисление, когда на выходе получается натуральное число, будем называть «ходом». (Другой вариант задачи: на каждом ходе результатом вычисления должно оказываться нецелое число). За какое наименьшее число ходов вы сможете наверняка определить задуманный вектор?*

И в этой задаче (как и в чем-то похожей на нее задаче из примера 4 о фальшивых мешках) ответ: *всего за один ход!* Сначала разберем первую постановку задачи, когда результат вычисления на каждом ходе — целое число. Если посмотреть на эту задачу глазами логика, знающего о гёделевской нумерации всех формально-логических формул вывода в арифметике (такая нумерация возникает при доказательстве теоремы Гёделя о неполноте арифметики), то ответ «за один ход» очевиден: если задуман вектор чисел $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, где k — количество задуманных чисел, то следует попросить друга вычислить число $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, где $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_k$ — первые k последовательных простых чисел. (Естественно, что, поскольку количество задуманных чисел неизвестно, следует попросить друга сделать указанную операцию словесно: «Возьми подряд столько простых чисел, сколько чисел ты задумал, возведи каждое простое число в степень, равную соответствующему задуманному тобой числу, перемножь полученные результаты и сообщи мне ответ.») Известно, что разложение любого натурального числа на простые множители однозначно и единственно (этот факт — основная теорема арифметики), поэтому представление N в указанном выше виде дает единственную возможность для нахождения координат вектора \mathbf{n} .

Если же ограничиваться только нецелыми результатами вычислений, то достаточно вместо числа N попросить вычислить, скажем, его обратное N^{-1} : тогда определится вектор $(-\mathbf{n})$, а с ним и искомый вектор \mathbf{n} . Или же, можно попросить друга вычислить число N/p_{k+1} (где p_{k+1} — это непосредственно идущее простое число за уже выбранными простыми p_1, p_2, \dots, p_k), и по нему однозначно найти вектор \mathbf{n} . Прямо или косвенно все такие вычисления основаны на идее гёделевской нумерации.

Однако человеку, не знакомому с гёделевской нумерацией, стоит сменить точку зрения по-другому: вспомнить о цепных дробях и попросить

друга вычислить цепную дробь

$$\alpha = m_1 + \frac{1}{m_2 + \frac{1}{m_3 + \dots + \frac{1}{m_k}}},$$

где каждое $m_i = n_i + 1$. (Опять же, вычисление цепной дроби надо сформулировать словесно, аналогично словесной формулировке гёделевского номера вектора \mathbf{n} .)

Знаменатели m_1, m_2, \dots, m_k цепной дроби восстанавливаются по числу α однозначно: m_1 — это целая часть α ; m_2 — это целая часть $\beta = 1/(\alpha - m_1)$; m_3 — это целая часть $1/(\beta - m_2)$; и т. д. Неопределенность в определении набора $\{m_i\}$ могла бы случиться только на последнем шаге, когда мы определили последнее целое число, равное, скажем, M , и не знаем, какой вывод из этого сделать: то ли $m_k = M$, то ли $m_{k-1} = M - 1$ и $m_k = 1$. К счастью, никакой неопределенности здесь нет: мы для того-то и прибавили вначале ко всем задуманным $\{n_i\}$ по единичке, чтобы получить числа $m_i \geq 2$, а тогда вторая возможность в указанной дихотомии не может реализоваться. Итак, вектор $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)$, а вместе с ним и искомый вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k) = (m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_k - 1)$, а заодно и количество координат k каждого из них определяются описанным вычислением однозначно.

Этим необычным способом мы вторично находим весь вектор \mathbf{n} .

ПРИМЕР 7. *Найти все целочисленные решения диофантова уравнения*

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})^{2004} + (a_2 + b_2\sqrt{2})^{2004} + \dots + (a_{100} + b_{100}\sqrt{2})^{2004} = 5000 + 4000\sqrt{2}.$$

Раскроем все скобки слева и соберем отдельно все целые числа и отдельно все целые, умноженные на $\sqrt{2}$. Первая сумма будет равна 5000, вторая 4000. Казалось бы, у нас есть много свободы в выборе целых чисел a_i и b_i , однако первая же попытка определить их к успеху не приводит. Сменим точку зрения: воспользуемся симметрией и заменим в каждой скобке слева знак «+» на «−». Очевидно, что в правой части появится число $5000 - 4000\sqrt{2}$ (поскольку все собранные после раскрытия скобок целые числа останутся без изменения, а все целые, умноженные на $\sqrt{2}$, поменяют знак). Итак,

$$(a_1 - b_1\sqrt{2})^{2004} + (a_2 - b_2\sqrt{2})^{2004} + \dots + (a_{100} - b_{100}\sqrt{2})^{2004} = 5000 - 4000\sqrt{2}.$$

Казалось бы, мы не узнали ничего нового. Но обратим внимание на то, что $5000 - 4000\sqrt{2} < 0$. Мы тут же получаем невозможное соотношение: слева в последнем равенстве стоит сумма неотрицательных чисел (из-за

четности показателя 2004), а справа — отрицательное число. Следовательно, целочисленных решений исходное уравнение не имеет вовсе!

Идея, которую мы использовали в решении этой задачи, состоит в наличии скрытой симметрии: посмотрев в «зеркало» (изменив знаки «+» на «-»), мы не увидели изображения; стало быть, и исходного объекта не существует.

На этом мы закончим демонстрацию примеров коротких задач и перейдем к основной задаче статьи, которая также будет решена на основе смены точки зрения.

3. ЗАДАЧА О БИЛЬЯРДНОМ ОТРАЖЕНИИ В \mathbb{R}^d

Пусть в пространстве \mathbb{R}^d расположена $(d-1)$ -мерная плоскость Π , которую будем рассматривать как горизонтальное зеркало. Сверху от зеркала Π , в каких-то точках A_1, A_2, \dots, A_n пространства находятся маленькие кусочки плоских зеркал, от которых, а также и от зеркала Π отражается световой луч, образуя замкнутую периодическую траекторию $\gamma = A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_{n-1} B_{n-1} A_n B_n A_1$ (рис. 6). Траекторию γ будем называть по естественным причинам «бильярдной»: точечный бильярдный шар, выпущенный из точки A_1 в точку B_1 , будет двигаться по траектории γ , поскольку после каждого отражения от каждого зеркала угол его отражения будет равен углу его падения, как и для исходного светового луча. Несоседние отрезки траектории γ в пространстве размерности $d \geq 3$ будут, вообще говоря, непересекающимися, как на рис. 6а, а в случае, когда все точки A_1, A_2, \dots, A_n и точки отражения $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ расположены в одной плоскости ($d = 2$), периодическая траектория γ выглядит, как на рис. 6б.

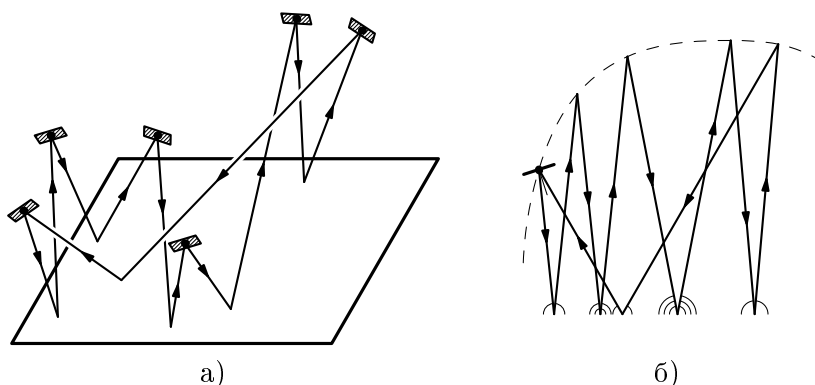


Рис. 6. Задача о бильярдном отражении в пространстве и на плоскости

Рассмотрим треугольники $\Delta_k = \triangle A_k B_k A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и $\Delta_n = \triangle A_1 B_n A_n$, которые назовем *бильярдными треугольниками*. Для каждого из первых $n-1$ бильярдных треугольников определим его *избыток*

$$\delta_k = A_k B_k + B_k A_{k+1} - A_k A_{k+1},$$

и его *периметр*

$$p_k = A_k B_k + B_k A_{k+1} + A_k A_{k+1}.$$

Точно так же определим избыток и периметр последнего, n -го, треугольника $\Delta_n = \triangle A_1 B_n A_n$:

$$\delta_n = A_1 B_n + B_n A_n - A_1 A_n,$$

$$p_n = A_1 B_n + B_n A_n + A_1 A_n.$$

Сравним два числа: отношение избытков $\delta_1 \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_{n-1} / \delta_n$ и отношение периметров $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1} / p_n$.

ЗАДАЧА. Можно ли утверждать, что одно из сравниваемых двух чисел всегда, независимо от бильярдной траектории γ , не превосходит другое? Возможно ли равенство этих чисел, и если да, то для каких траекторий γ ?

Оказывается, ответы на оба вопроса положительны, а равенство отношений избытков и периметров накладывает необычное ограничение на расположение точек $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ в пространстве \mathbb{R}^d . Решение задачи дается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1.

(А). Для произвольной бильярдной траектории γ справедливо неравенство

$$\frac{\delta_1 \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_{n-1}}{\delta_n} \leq \frac{p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1}}{p_n}. \quad (1)$$

(В). Неравенство (1) превращается в равенство тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие три условия на расположение точек $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ в пространстве \mathbb{R}^d :

(b1) все A -точки $\{A_k\}$ и все B -точки $\{B_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) расположены в одной и той же двумерной плоскости \mathbb{R}^2 ;

(b2) все B -точки расположены на одной прямой $\ell \in \mathbb{R}^2 \cap \Pi$, причем первые $n-1$ B -точек расположены в порядке B_1, B_2, \dots, B_{n-1} на прямой ℓ , а последняя точка B_n лежит внутри открытого интервала $(B_1, B_{n-1}) \in \ell$;

(b3) все A -точки лежат на одной окружности $s \in \mathbb{R}^2$, центр которой расположен в некоторой точке O прямой ℓ , причем на окружности s они идут в порядке A_1, A_2, \dots, A_n .

Теорема 1 становится почти очевидной, если сменить точку зрения и посмотреть на всю задачу с позиции геометрии Лобачевского. Смена точки зрения и доказательство теоремы 1 приводится в части 5, а пока что перейдем к простейшим фактам геометрии Лобачевского и бильярдной формуле.

4. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И БИЛЬЯРДНАЯ ФОРМУЛА

Напомним некоторые факты геометрии Лобачевского, или гиперболической геометрии. Нам здесь важна самая употребительная модель этой геометрии, а именно, модель Пуанкаре в верхней полуплоскости, если речь идет о двумерной геометрии, и в верхнем полупространстве, если речь идет о размерности три и выше.

Начнем с двумерной плоскости Лобачевского H^2 . Ее моделью Пуанкаре является открытая верхняя полуплоскость евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 : все точки евклидовой плоскости выше оси абсцисс Ox являются точками плоскости H^2 , а все точки на оси Ox считаются бесконечно удаленными точками гиперболической плоскости. Ось абсцисс Ox называется также *абсолютом* плоскости Лобачевского. Прямые на плоскости H^2 (к ним прилагается эпитет «гиперболические», для того, чтобы не путать их с евклидовыми прямыми) бывают двух типов: к первому относятся вертикальные евклидовы лучи, ортогональные оси Ox , а ко второму — евклидовы полуокружности с центрами на абсолюте Ox . (Эпитет «евклидов» для евклидовых объектов — точек, прямых, отрезков, окружностей, кривых и т. д. — мы часто будем опускать; любой геометрический объект с отсутствием этого эпитета считается автоматически евклидовым. Эпитет «гиперболический» мы, наоборот, будем каждый раз скрупулезно приписывать к соответствующему объекту геометрии Лобачевского.) Для любых двух точек A и B на верхней полуплоскости мы всегда можем определить, какому из двух типов принадлежит гиперболическая прямая AB : если прямая AB ортогональна оси Ox , то к первому, а если AB не ортогональна Ox , то ко второму. Во втором случае понятно, как построить гиперболическую прямую AB циркулем и линейкой: для этого надо провести перпендикуляр к середине отрезка AB , найти точку O пересечения его с осью абсцисс и, наконец, провести окружность с центром O , — ее верхняя открытая (без концов, принадлежащих абсолюту) полуокружность и будет искомой гиперболической прямой (рис. 7а). Если гиперболическая точка P лежит вне гиперболической прямой ℓ , то через P можно провести целый пучок гиперболических прямых, «параллельных» (т. е. не имеющих общих точек с) гиперболической прямой ℓ (рис. 7б): пятый постулат Евклида о единственности прямой, параллельной данной, в геометрии Лобачевского нарушается.

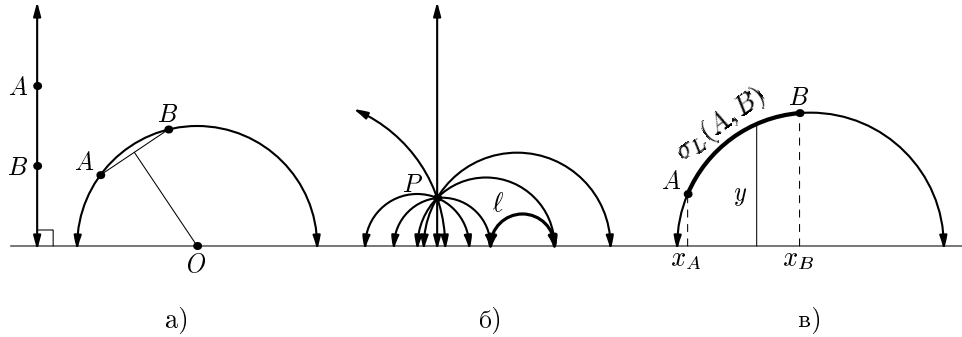


Рис. 7.

Пусть A и B — две гиперболические точки, соединенные какой-либо кривой σ . Тогда ее гиперболическая длина $\sigma_L(A, B)$ определяется по формуле

$$\sigma_L(A, B) = \int_A^B \frac{ds}{y},$$

где ds — элемент евклидовой длины: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, а y — ордината текущей точки кривой σ (рис. 7в). Если y есть функция от x , $y = y(x)$, то легко найти длину кривой σ по формуле

$$\sigma_L(A, B) = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{y} dx.$$

Кривой между точками A и B может быть, в частности, дуга евклидовой окружности с концами в точках A и B , или, иными словами, гиперболический отрезок $\smile AB$ (если точки A и B лежат на вертикальной прямой, то им будет евклидов отрезок AB); его гиперболическая длина вычисляется по той же самой формуле. Несложно показать (мы этого здесь делать не будем), что гиперболическая длина гиперболического отрезка всегда короче гиперболической длины любой кривой с теми же концами, поэтому гиперболический отрезок является геодезическим (т. е. «кратчайшим») отрезком на плоскости Лобачевского H^2 . В частности, выполняется неравенство треугольника, а в общем случае — неравенство многоугольника: длина любой стороны многоугольника не превышает сумму длин всех его остальных сторон. Равенство возникает, когда объединение всех остальных сторон совпадает с исходной стороной многоугольника.

Все приведенные рассуждения дословно переносятся с плоскости Лобачевского H^2 на пространство Лобачевского H^d (гиперболическое

пространство). А именно, в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d выбирается горизонтальная гиперплоскость $\Pi = \Pi^{d-1}$, и верхнее открытое полупространство с границей Π объявляется моделью (Пуанкаре) гиперболического пространства H^d (т. е. евклидовы точки верхнего полупространства являются теперь одновременно и гиперболическими точками), а сама гиперплоскость Π — абсолютом (множеством бесконечно удаленных точек) этого гиперболического пространства. Чтобы определить расстояние между двумя гиперболическими точками A и B , надо сначала опустить из них перпендикуляры на гиперплоскость Π , провести двумерную плоскость \mathbb{R}^2 через эти перпендикуляры (она определится однозначно, если только точки A и B не лежат на одной вертикальной прямой), и в этой плоскости взять верхнюю полуплоскость (над прямой, являющейся пересечением плоскости \mathbb{R}^2 и гиперплоскости Π), которая и будет плоскостью Лобачевского. А к ней уже затем применить все построения, рассмотренные выше: провести через A и B окружность и вычислить по указанной выше интегральной формуле гиперболическую длину гиперболического отрезка $\smile AB$.

После этих общих рассмотрений мы покажем, как просто находить гиперболическую длину гиперболического отрезка $\smile AB$.

Поместим в точку A бильярдный шар и запустим его в пространстве \mathbb{R}^d в сторону гиперплоскости Π так, чтобы он после отражения в точке $C \in \Pi$ попал в точку B . Как найти точку отражения C в плоскости Π , показывает рисунок 8: для этого надо отразить точку A относительно гиперплоскости Π (причем построение отражения следует делать в дву-

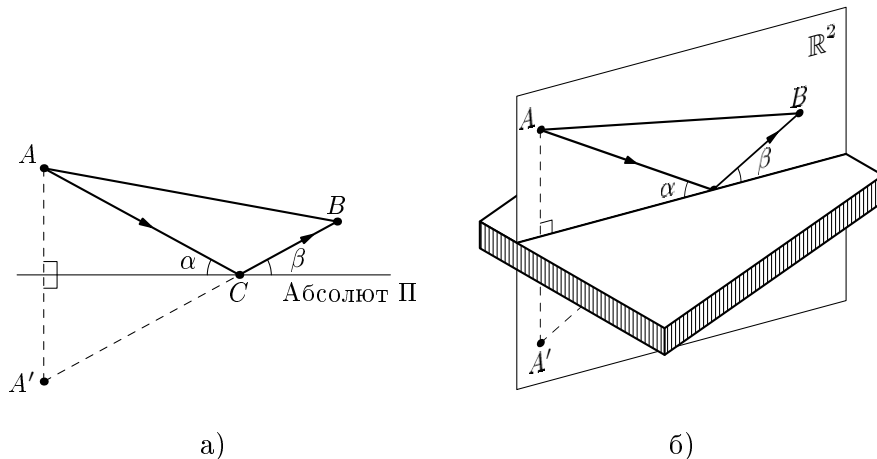


Рис. 8. Бильярдная формула для гиперболического расстояния на плоскости и в пространстве Лобачевского

мерной плоскости \mathbb{R}^2 , ортогональной Π), и полученный образ, точку A' , соединить с точкой B . Точка пересечения отрезка $A'B$ с гиперплоскостью \mathbb{R}^2 и будет искомой: $C = A'B \cap \Pi$. Действительно, из рассмотрения треугольников легко видеть, что $\alpha = \beta$, т. е. угол отражения равен углу падения (рис. 8), так что, действительно, траектория $A \rightarrow C \rightarrow B$ — бильярдная.

Итак, возник бильярдный треугольник ABC . У него есть периметр $p = AC + CB + AB = d_B + d_E$, где $d_B = AC + CB$ — бильярдное расстояние между точками A и B (отсюда и индекс B у обозначения расстояния), а d_E — евклидово расстояние между теми же точками; и есть эксцесс — величина $\delta = AC + CB - AB = d_B - d_E$. Обозначим гиперболическое расстояние между точками A и B через d_L . Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2 (БИЛЬЯРДНАЯ ФОРМУЛА).

$$d_L = \ln \frac{p}{\delta} = \ln \frac{d_B + d_E}{d_B - d_E}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\triangle ABC$ вырожден, т. е. точки A и B лежат на одном вертикальном евклидовом луче CAB , то формула (2) дает хорошо известную из учебников формулу $d_L = \ln \left| \frac{AC}{BC} \right|$, с которой мы и начнем наше доказательство формулы (2) в части 6 этой статьи.

Доказательство теоремы 2 будет дано в части 6, но сначала, основываясь на бильярдной формуле, докажем теорему 1.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БИЛЬЯРДНОМ ОТРАЖЕНИИ

Сменим точку зрения и посмотрим на имеющийся евклидов геометрический объект в верхнем полупространстве $(\mathbb{R}^d)^+$ — зеркало Π и бильярдную траекторию $\gamma = A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_{n-1} B_{n-1} A_n B_n A_1$ — как на некую конструкцию в d -мерном пространстве Лобачевского H^d . А именно, будем мыслить верхнее полупространство $(\mathbb{R}^d)^+$ как модель Пуанкаре геометрии Лобачевского с абсолют Π ; тогда точки отражения $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ превратятся в гиперболические точки, а точки $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n$ отражения от зеркала Π — в бесконечно удаленные точки пространства H^d . Для полноты картины нам не хватает только соединить гиперболические точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ в указанном порядке друг с другом гиперболическими отрезками (а в конце — гиперболическим отрезком точку A_n с точкой A_1), что мы и сделаем. В результате получим гиперболический многоугольник $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$, гиперболические стороны $\overset{\sim}{A_k A_{k+1}}$ которого — это дуги евклидовых полуокружностей с центрами на зеркале Π . По неравенству

многоугольника, гиперболическая длина стороны $\smile A_1 A_n$ не превосходит суммы гиперболических длин остальных его сторон:

$$d_L(\smile A_1 A_n) \leq d_L(\smile A_1 A_2) + d_L(\smile A_2 A_3) + \dots + d_L(\smile A_{n-1} A_n), \quad (3)$$

причем равенство выполняется, когда точки A_2, \dots, A_{n-1} лежат на дуге евклидовой окружности $\smile A_1 A_n$, и именно в этом порядке (от A_2 до A_{n-1}).

Мы сейчас покажем, что неравенство (3) в точности эквивалентно неравенству (1), которое мы как раз и хотим доказать; этим мы завершим доказательство части (А) теоремы 1. Часть (В) теоремы 1 (причем сразу все пункты) будет следовать из условия превращения неравенства (3) в равенство (см. последнее предложение предыдущего абзаца). Итак, простая смена точки зрения действительно даст нам доказательство теоремы!

Перепишем неравенство (1) так:

$$\frac{p_1}{\delta_1} \cdot \frac{p_2}{\delta_2} \cdot \dots \cdot \frac{p_{n-1}}{\delta_{n-1}} \geq \frac{p_n}{\delta_n}. \quad (1.1)$$

Возьмем логарифм от обеих частей:

$$\ln \frac{p_1}{\delta_1} + \ln \frac{p_2}{\delta_2} + \dots + \ln \frac{p_{n-1}}{\delta_{n-1}} \geq \ln \frac{p_n}{\delta_n}. \quad (1.2)$$

Согласно бильярдной формуле (2), каждое слагаемое в левой части неравенства (1.2), $\ln \frac{p_k}{\delta_k}$ ($1 \leq k \leq n-1$), есть просто гиперболическая длина гиперболического отрезка $\smile A_k A_{k+1}$, а выражение $\ln \frac{p_n}{\delta_n}$ в правой части — это гиперболическая длина гиперболического отрезка $\smile A_1 A_n$. Эквивалентность (1) \Leftrightarrow (3), а с ней и первая часть теоремы 1 доказана.

Неравенство (1) превращается в равенство тогда и только тогда, когда эквивалентные ей неравенства (1.1), (1.2) и (3) становятся равенствами. Неравенство (3) будет равенством при попадании, как уже говорилось, всех точек от A_2 до A_{n-1} на гиперболический отрезок $\smile A_1 A_n$. По определению гиперболического отрезка, это означает, что евклидовы дуги окружностей $\smile A_2 A_3$, $\smile A_3 A_4$, \dots , $\smile A_{n-2} A_{n-1}$ лежат на дуге окружности $\smile A_1 A_n$. Следовательно, точки A_2, A_3, \dots, A_{n-1} , именно в этом порядке, лежат на дуге окружности $\smile A_1 A_n$ (рис. 9). Это доказывает наиболее трудный пункт (b3) второй части теоремы 1. (Интересно отметить, что наиболее трудную часть теоремы 1 нам удалось доказать сразу — с другими пунктами надо еще повозиться! — и всего лишь за счет одной только смены точки зрения!)

Кроме того, из приведенного рассуждения следует также, что точки A_1, A_2, \dots, A_n вместе с точками B_1, B_2, \dots, B_n отражения от зеркала Π лежат в одной евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , поскольку все двумерные плоскости соответствующих бильярдных треугольников $\triangle A_k B_k A_{k+1}$

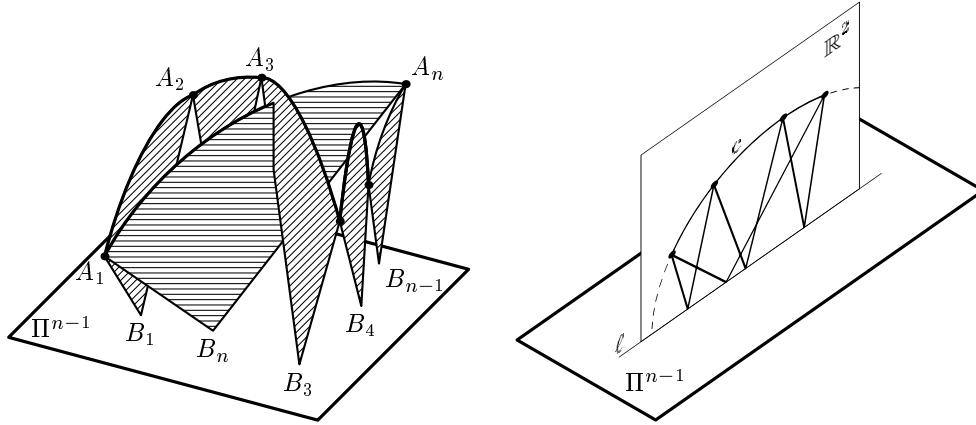


Рис. 9. Решение задачи о бильярдном отражении в \mathbb{R}^n

($2 \leq k \leq n-1$) и $\triangle A_1 B_n A_n$ обязаны совпасть. Тем самым мы получаем утверждение пункта (b1) теоремы 1.

Наконец, докажем пункт (b2). Прежде всего, точки отражения бильярдной траектории γ от зеркала Π («B-точки») обязаны принадлежать прямой $\ell = \mathbb{R}^2 \cap \Pi$, так как они принадлежат как гиперплоскости Π (по определению точек отражения), так и перпендикулярной ей двумерной плоскости \mathbb{R}^2 (в силу установленного выше). Вдобавок, каждая точка B_k , $k = 1, \dots, n-1$, расположена на прямой ℓ между ортогональными проекциями $\text{pr}(A_k)$ и $\text{pr}(A_{k+1})$ точек A_k и A_{k+1} на прямую ℓ : отрезок $[A'_k A_{k+1}]$, где A'_k — образ точки A_k при отражении относительно гиперплоскости Π , пересекает отрезок $[\text{pr}(A_k) \text{pr}(A_{k+1})]$ в его внутренней точке B_k (мы не рассматриваем очевидный вырожденный случай, когда точки A_k и A_{k+1} лежат на вертикальной евклидовой прямой). Последняя точка отражения траектории γ на зеркале Π , B_n , является, очевидно, внутренней точкой отрезка $[\text{pr}(A_1) \text{pr}(A_n)]$. К тому же, поскольку отрезок $[A'_1 A_2]$ лежит в плоскости \mathbb{R}^2 внутри угла $\angle A_1 A'_1 A_n$ (поскольку точка A_2 лежит внутри дуги окружности $\overset{\circ}{A_1 A_n}$), он пересекает отрезок $[\text{pr}(A_1) B_n]$ в его внутренней точке B_1 . Точно так же, начиная рассуждать теперь с точки A_n , мы видим, что отрезок $A'_n A_{n-1}$ принадлежит плоскости \mathbb{R}^2 внутри угла $\angle A_n A'_n A_1$. Это означает, что точка B_{n-1} является внутренней точкой отрезка $[B_n \text{pr}(A_n)]$. Исходя из принадлежности $B_1 \in [\text{pr}(A_1) B_n]$ и $B_{n-1} \in [B_n \text{pr}(A_n)]$, заключаем, что $B_n \in [B_1 B_{n-1}]$. Но точка B_n не может совпасть ни с концом B_1 , ни с концом B_{n-1} отрезка $[B_1 B_{n-1}]$; следовательно, B_n принадлежит открытому интервалу (B_1, B_{n-1}) . Утверждение пункта (b2) теоремы 1 доказано, и доказательство теоремы 1, тем самым, завершено.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БИЛЬЯРДНОЙ ФОРМУЛЫ

Обозначим через A' образ точки A при ее отражении относительно прямой ℓ . (Напомним, что ℓ — это горизонтальное зеркало, от которого отражается бильярдный шар, запущенный из точки A в точку B , и одновременно абсолют геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре.) Тогда $AC = A'C$ и формулу (2) можно переписать в виде

$$d_L(A, B) = \ln \frac{A'B + AB}{A'B - AB}. \quad (2.1)$$

В случае вырожденного $\triangle ABC$, формула (2.1) вытекает немедленно из определения гиперболического расстояния d_L : в этом случае $x_A = x_B$, поэтому $dx = 0$ и, стало быть,

$$\begin{aligned} d_L(A, B) &= \int_A^B \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{y} = \\ &= (\ln y) \Big|_{y_A}^{y_B} = \ln \left(\frac{y_B}{y_A} \right) = \ln \left(\frac{2y_B}{2y_A} \right) = \\ &= \ln \frac{(y_B + y_A) + (y_B - y_A)}{(y_B + y_A) - (y_B - y_A)} = \ln \frac{A'B + AB}{A'B - AB}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь невырожденный случай $\triangle ABC$. Тогда гиперболическая прямая в модели Пуанкаре H^2 будет (евклидовой) полуокружностью с центром O на абсолют ℓ , проходящей через точки A и B . Сначала мы установим три промежуточные формулы для гиперболического расстояния $d_L(A, B)$.

Введем следующие обозначения: $YX \in \ell$ — диаметр полуокружности s , $\angle AOX = \varphi$ и $\angle BOX = \psi$, $\angle AYX = \alpha$ и $\angle BYX = \beta$ (см. верхнюю половину рис. 10). Введем также стандартное обозначение $[AB, XY]$ для двойного отношения четырех точек A, B, X, Y :

$$[AB, XY] := \frac{AX/AY}{BX/BY}.$$

ЛЕММА. *Справедливы следующие формулы для гиперболического расстояния между точками A и B :*

$$d_L(A, B) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right|; \quad (2.2)$$

$$d_L(A, B) = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right) \right|; \quad (2.3)$$

$$d_L(A, B) = \left| \ln [AB, XY] \right|. \quad (2.4)$$

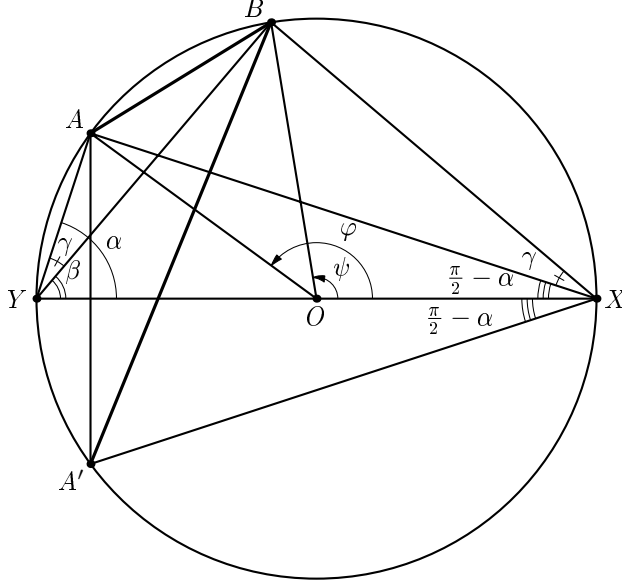


Рис. 10. Доказательство бильярдной формулы

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полярных координатах $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = r d\theta$ (поскольку $dr = 0$ на окружности); следовательно,

$$d_L(A, B) = \int_{\psi}^{\varphi} \frac{ds}{y} = \int_{\psi}^{\varphi} \frac{r d\theta}{r \sin \theta} = \left| \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| \right|_{\psi}^{\varphi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right|,$$

и формула (2.2) доказана.

Далее, поскольку $\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABX) = \alpha$ и $\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}(\sphericalangle BXY) = \beta$, находим из (2.2):

$$\left| \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\psi}{2} \right)} \right| = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right) \right|,$$

и формула (2.3) доказана.

Заметим теперь, что треугольники $\triangle YAX$ и $\triangle YBX$ прямоугольные. Выразим $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ через отношения AX/AY и BX/BY , соответственно:

$$\left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right) \right| = \left| \ln \frac{AX/AY}{BX/BY} \right|.$$

Формула (2.4), а с ней и лемма, доказана. \square

Теперь мы готовы к завершению доказательства теоремы 2.

Продлим полуокружность, проходящую через точки A и B , с верхней полуплоскости на нижнюю — получим полную окружность s с диаметром $XY \in \ell$ и центром $O \in \ell$. Пусть R ее радиус. Точка A' , зеркальный образ точки A , лежит на окружности s ниже диаметра YX . Соединим точку A' с точкой B и обозначим (дополнительно к уже введенным обозначениям $\angle AYX = \alpha$ и $\angle BYX = \beta$) $\angle AYB = \angle AXB = \gamma$, $\angle AXY = \angle A'XY = \pi/2 - \alpha$ (рис. 10).

Применим (евклидову) теорему синусов к треугольникам $\triangle ABX$ и $\triangle A'BX$:

$$AB = 2R \sin \gamma = 2R \sin(\alpha - \beta) \text{ и } A'B = 2R \cdot \sin(\angle BXA') = 2R \sin(\alpha + \beta).$$

Подставим найденные выражения в дробь, стоящую в правой части формулы (2):

$$\begin{aligned} \frac{A'B + AB}{A'B - AB} &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

Применяя к найденному выражению формулу (2.3) из доказанной выше леммы, получаем

$$d_L(A, B) = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right) \right| = \ln \frac{A'B + AB}{A'B - AB} = \ln \left(\frac{p}{\delta} \right),$$

т. е. формулу (2). Бильярдная формула доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] James W. Andersen. *Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, 1999.
- [2] C. I. Delman, G. Galperin. *A tale of three circles* // Mathematics Magazine, February 2003. V. 76, No.1. P. 15–32.