Периодические десятичные дроби

А. Е. Ерошин

Всем хорошо известны десятичные (а также m-ичные) дроби. Периодические m-ичные дроби могут быть представлены в виде обыкновенных и наоборот. Если знаменатель q правильной несократимой дроби p/q ($p < q$) взаимно прост с m, то m-ичная запись такой дроби будет *чисто периодической*, т. е. иметь вид $0,(\alpha_1 \dots \alpha_n)$, где $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ — период дроби; если же q не взаимно просто с p, то может наблюдаться и *предпериод* $\beta_1 \dots \beta_s$:

$$p/q = 0,\beta_1 \dots \beta_s(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

В этом случае говорят, что дробь *условно периодическая*. Иррациональные числа не разлагаются в периодические дроби. Про их разложение почти ничего не известно. Например, неизвестно, бесконечное ли число «девяток» содержится в десятичном разложении $\sqrt{2}$.

То немногое, что известно о свойствах периодических дробей, связано с вращением (циклической перестановкой) цифр периода. Этому и посвящена настоящая статья. Мы покажем, что в десятичном разложении числа

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}, \quad \text{где } a_1 = 1 \text{ и } a_{k+1} = 9^{a_k},$$

встретится любая комбинация цифр.[1)]

Нас интересуют прежде всего *десятичные дроби* и, если не оговорено обратное, то подразумевается система счисления с основанием 10. Записи $\overline{a_1 \dots a_n}$, $\overline{X}$, где $a_1 \dots a_n$, X — последовательности цифр, обозначают числа, задаваемые этими последовательностями.

Автор приносит благодарность своему руководителю Алексею Яковлевичу Канелю–Белову за постановку задачи, полезные обсуждения и участие в редактировании. Данная работа докладывалась на научной конференции школьников Junior-98, организованной корпорацией INTEL в городе Fort Worth, и получила вторую премию.

[1)] Задача 3.10 из задачника «Математического просвещения», №3, с. 233.

1. Вращение цифр в периоде. Основная идея

Начнем с простейшего примера.

Задача 1. Требуется найти такое шестизначное число A, произведения которого на $2, 3, 4, 5, 6$ записываются циклическими перестановками его цифр.

Решение. Заметим, что последняя цифра числа A однозначно определяет последнюю цифру чисел $2A$, $3A$, $4A$, $5A$ и $6A$. Отсюда с помощью несложного перебора можно получить, что $A = 142857$.

Заметим, что $1/7 = 0{,}(142857)$. При этом

$$\begin{aligned}&2/7 = 0{,}(285714), \quad 3/7 = 0{,}(428571), \quad 4/7 = 0{,}(571428),\\&5/7 = 0{,}(714285), \quad 6/7 = 0{,}(857142).\end{aligned}$$

Таким образом, дроби вида $m/7$, где $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, получаются из дроби $1/7$ путем вращения цифр в периоде.

Задача 2. Последняя цифра числа двойка и ее перенесли в начало. В результате число удвоилось. Найти такое число.

Решение 1. Пусть искомое число записывается последовательностью цифр X. Последняя цифра числа $2\overline{X}$ четверка, поэтому X имеет вид $\ldots 42$ и число $2\overline{X}$ записывается как $\ldots 84$. Следовательно, X имеет вид $\ldots 842$, а $2\overline{X}$ записывается как $\ldots 684$, далее $X = \ldots 6842$, откуда $2\overline{X} = \ldots 3684$ и $X = \ldots 36842$ и т. д. Последовательность цифр строится однозначно, в итоге имеем:

$$X = 105263157894736842.$$

Последовательность $X = 105263157894736842$ можно продолжать дальше. Аналогично рассуждая, можно показать, что множество всех чисел, удовлетворяющих условию задачи, имеет вид $\overline{XX\ldots X}$.

Однако на эту задачу можно посмотреть и с несколько неожиданной точки зрения.

Решение 2. Пусть $X = Y2$. Тогда $\overline{Z} = 2\overline{X} = \overline{2Y}$. Рассмотрим бесконечную периодическую дробь $x = 0{,}(X)$. Тогда

$$(x + 2)/10 = 0{,}2(X) = 0{,}2Y2Y2Y\ldots = 0{,}ZZZ\ldots = 0{,}(Z) = 2x.$$

Откуда x удовлетворяет уравнению $(x + 2)/10 = 2x$ и $x = 2/19$. Таким образом, X есть период дроби $2/19$, и в результате вращения цифр в периоде этой дроби получаются дроби вида $1/19, 2/19, \ldots, 18/19$.

Задача на исследование. Исследуйте числа, которые при переносе последней цифры в начало увеличиваются в α раз.

Вращение цифр в периоде имеет интересный арифметический смысл, причем получаются дроби с тем же знаменателем.

Теорема 1. *Циклические перестановки периода дроби* p/q, *где* $0 < p < q$, *а* q *взаимно просто с* 10 *и с* p, *есть числа вида* k/q.

Доказательство. Поскольку q взаимно просто с 10, дробь p/q чисто периодическая. Пусть $p/q = 0{,}(a_1a_2\dots a_ka_{k+1}\dots a_n)$ и пусть $\alpha = 0{,}(a_{k+1}\dots a_na_1a_2\dots a_k)$ — результат циклической перестановки цифр периода. Тогда $10^kp/q = \overline{a_1a_2\dots a_k} + 0{,}(a_{k+1}\dots a_na_1a_2\dots a_k) = N + \alpha$, где $N = \overline{a_1a_2\dots a_k}$ — целое число. Поскольку q взаимно просто с 10 и с p, после приведения $\alpha = (10^kp - Nq)/q$ к виду обыкновенной дроби ее знаменателем будет q.

В качестве иллюстрации к вышесказанному рассмотрим циклические перестановки дроби $1/13 = 0{,}(076923)$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&0{,}(076923) = 1/13; \quad 0{,}(230769) = 3/13; \quad 0{,}(307692) = 4/13;\\
&0{,}(692307) = 9/13; \quad 0{,}(769230) = 10/13; \quad 0{,}(923076) = 12/13.
\end{aligned}
$$

2. Вспомогательные сведения

Нам понадобятся несколько фактов и конструкций, которые очень полезны при решении теоретико-числовых задач. $\varphi(n)$ означает *функцию Эйлера*, то есть $\varphi(n)$ есть количество всех чисел, меньших n и взаимно простых с n, и $\varphi(1) = 1$. Если число n — простое, то $\varphi(n) = n - 1$. Известно, что если $n = n_1n_2$ и числа n_1 и n_2 взаимно просты, то $\varphi(n) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$. Поэтому, разлагая число n в произведение степеней различных простых чисел $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$, получаем представление для $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1-1)p_2^{k_2-1}(p_2-1)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s-1}(p_s-1).$$

Имеет место следующая

Теорема Эйлера. *Пусть числа* x *и* n *взаимно просты. Тогда*

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Частным случаем теоремы Эйлера является

Малая теорема Ферма. *Пусть* p *— простое число и* x *не делится на* p, *тогда*

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Из малой теоремы Ферма следует, что наименьшее k такое, что $x^k \equiv 1 \pmod{p}$ делит $p - 1$. Теорема о существовании первообразного корня (см. ниже) показывает, что при подходящем выборе x, такое k *в точности равно* $p - 1$.

Предложение 1. *Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Тогда длина наименьшего периода дроби p/q в 10-ичном разложении равна такому минимальному k, что $10^k - 1$ делится на q.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $p < q$. Пусть $p/q = 0,(a_1 \ldots a_n)$, $a = \overline{a_1 \ldots a_n}$. Тогда
$$\frac{p}{q} = \frac{a}{10^n - 1}$$
и q делит $10^n - 1$ в силу взаимной простоты p и q. И наоборот, если q делит $10^n - 1$, то n — период дроби p/q.

(Все рассуждения непосредственно переносятся на произвольные системы счисления.)

Из предложения 1 и теоремы Эйлера выводится следующее утверждение, нужное для дальнейшего:

Следствие 1. *Пусть число q взаимно просто с 10 и с p. Тогда длина наименьшего периода дроби p/q есть делитель числа $\varphi(q)$.*

Доказательство. Обозначим длину наименьшего периода дроби p/q через n. Разделим $\varphi(q)$ на n с остатком: $\varphi(q) = ns + r$, $0 \leqslant r < n$. Тогда
$$10^r \equiv 10^{ns+r} \equiv 10^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod q.$$
И, следовательно, $r = 0$.

Кроме того, нам понадобится

Теорема о существовании первообразного корня. *Существует такое x, что $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, а из сравнения $x^a \equiv 1 \pmod p$ следует, что a делит $p - 1$.*

Замечание. Из предложения 1 и теоремы о существовании первообразного корня вытекает любопытное следствие. Для любого простого q найдется такое m, что m-ичное разложение дроби p/q имеет длину периода, *в точности равную* $q - 1$. Однако из этого не следует, что таким числом m непременно должно быть 10. Более того, неизвестно, конечно ли множество таких p, что 10^q не сравнимо с 1 по модулю p при $q < p - 1$. И, соответственно, минимальный период дроби k/p имеет длину $p - 1$.

Хотя поведение периодов дробей с простым знаменателем p при различных p чрезвычайно сложное, остатки по модулю степеней фиксированного простого p поддаются изучению. И в этом помогает следующая

Лемма Гензеля[2]. *Пусть p — простое число.*

a) *Пусть* $x \equiv 1 \pmod{p^k}$, $x \not\equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$. *И, кроме того, либо* $p > 2$, *либо* $k > 1$. *Тогда для всякого натурального* r

$$x^{p^r} \equiv 1 \pmod{p^{k+r}}, \qquad x^{p^r} \not\equiv 1 \pmod{p^{k+r+1}}.$$

b) *Пусть, кроме того,* p^s *делит* m, *но* p^{s+1} *не делит* m. *Тогда*

$$x^m \equiv 1 \pmod{p^{k+r}}, \qquad x^m \not\equiv 1 \pmod{p^{k+r+1}}.$$

(Отметим, что если одновременно $p = 2$ и $k = 1$ утверждение п. a) места не имеет.)

Из леммы Гензеля вытекает такое

Следствие 2. *Пусть числа* x *и* k *удовлетворяют условиям леммы Гензеля. Тогда остатки от деления степеней* x^r *на* p^q $(q \geqslant k)$ *имеют вид* $p^k s + 1$.

Суммируя вышесказанное, имеем следующую лемму, удобную для дальнейшего:

Лемма 1.

a) $10^m \equiv 1 \pmod{3^q}$ *тогда и только тогда, когда* $m \equiv 0 \pmod{3^{q-2}}$.

b) *Длина периода дроби* $p/3^n$, *где* $n > 1$ *и* p *не делится на* 3, *равна* 3^{n-2}.

c) *Остатки от деления чисел вида* 10^r *на* 3^s *имеют вид* $9m + 1$.

Доказательство. П. a) вытекает из леммы Гензеля, п. c) есть частный случай предыдущего следствия, п. b) вытекает из п. a) и предложения 1.

3. Доказательство основного утверждения

Наша цель — доказать основную теорему:

Теорема. *Пусть последовательность* $\{a_k\}$ *задана рекуррентно*: $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$ *и пусть*

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}\,.$$

Тогда в десятичном разложении числа X *встретится любая комбинация цифр.*

Замечание. Имеет место теорема Лиувилля: *Пусть* t *— иррациональный корень уравнения* $a_0 x^n + \cdots + a_n = 0$, $a_0, \ldots, a_n$ *— целые числа.*

[2] А. Я. Канель–Белов. Устное сообщение.

Тогда при некотором N неравенство $|t-p/q| < 1/Nq^n$ не имеет решений в целых числах p и q.

Из этой теоремы следует, что число X трансцендентно, т. е. не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, так как приближается рациональными лучше, чем алгебраическое число любой фиксированной степени.

Нам понадобится

Лемма 2. *а) Пусть $p = 9k + 1 < 3^s$. Рассмотрим дробь $p/3^s$ и все дроби, которые из нее получаются путем циклической перестановки цифр периода. Тогда множество всех таких дробей суть $\{(9h+1)/3^s \mid 9h+1 < 3^s\}$.*

б) В общем случае, если p взаимно просто с 3, то множество указанных дробей суть $\{h/3^s | h \equiv p \pmod 9$ и $h < 3^s\}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что дробная часть числа $p10^m/3^s$ есть циклическая перестановка периода дроби $p/3^s$. Рассмотрим множество дробных частей чисел вида $p10^m/3^s, m = 0, \ldots, 3^{s-2} - 1$. По лемме 1 это множество суть множество $\{p(9h+1)/3^s\}_{h=0}^{3^{s-2}-1}$, что и составляет утверждение леммы.

П. б) доказывается аналогично.

Следующее утверждение, которое нам потребуется при доказательстве основной теоремы, представляет самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть числа p и 3 взаимно просты. Тогда в десятичном разложении числа $x = p/3^s$ встретится любая последовательность из $[(s-2)\lg 3]$ цифр.*

Доказательство. Положим $N = [(s-2)\lg 3]$. Рассмотрим какую-нибудь последовательность цифр α длины N. Достаточно показать, что *некоторая циклическая перестановка цифр числа x может начинаться с α.*

Пусть $\alpha = a_1 \ldots a_N$. Множество вещественных чисел, у которых десятичная запись начинается с α, есть полуинтервал

$$\Delta = [0{,}a_1 \ldots a_N;\ 0{,}a_1 \ldots a_N + 10^{-N}).$$

Его длина равна 10^{-N}.

Рассмотрим множество дробей, получающихся путем вращения цифр в периоде исходной дроби. В силу леммы 2 это система точек отрезка $[0, 1]$, идущих с шагом $1/3^{s-2}$:

$$\left\{\frac{1}{3^s}, \frac{10}{3^s}, \ldots, \frac{3^s-8}{3^s}\right\}.$$

И в любом подотрезке отрезка $[0,1]$ длины бо́льшей, чем $1/3^{s-2}$, находится дробь указанного вида.

Поскольку $N < (s-2)\lg 3$, то $|\Delta| = 10^{-N} > 3^{-(s-2)}$ и в отрезке Δ встретится нужная нам дробь, десятичное разложение которой начинается с участка α. Предложение доказано.

Доказательство основной теоремы. Обозначим через X_n частичную сумму ряда $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i$. Это чисто периодическая дробь и t_n — ее период. В силу предложения 2 число X_n содержит все последовательности цифр длины ме́ньшей или равной $N_n = [a_n \lg 3/9]$.

Более того, в любом участке десятичной записи числа X_n, длина которого больше $N_n + t_n$, встретится каждая такая последовательность.

Нам надо показать, что остаточный член $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/a_k$ не испортит ситуацию. Прежде всего, период не может состоять из одних девяток, и если $0 < \varepsilon < 10^{-3t_n}$, то первые $2t_n$ знаков десятичного разложения чисел X_n и $X_n + \varepsilon$ совпадают (перенос разряда может происходить только на девятке и он остановится где-то внутри третьего периода дроби X_n). Поэтому любой участок длины N_n также встречается в десятичном разложении числа $X_n + \varepsilon$.

В силу леммы 1 длина периода t_n десятичного разложения числа X_n равна $t_n = a_n/9$. Легко получить оценку: $R_n < 2/a_{n+1} < 10^{-3t_n}$. Из этой оценки, в силу только что сказанного, вытекает, что в десятичном разложении числа $X = X_n + R_n$ встречается любая комбинация из N_n подряд идущих цифр.

А так как
$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log_{10} 3}{9} a_n\right) = \infty,$$
параметр N с ростом n стремится к бесконечности и любая наперед заданная комбинация цифр встретится в десятичном разложении числа X.

Замечание. Назовем *частотой* появления последовательности ν в X величину: $W(X,\nu) = \lim_{p\to\infty} m/p$, где m — количество последовательностей ν в начальном куске X длины p. Из доказательства основной теоремы можно извлечь следующий результат: $W(X,\nu) = 10^{-l}$. Это означает, что все комбинации цифр в числе X равновероятны. Такие числа называются *нормальными*. Содержательных примеров нормальных чисел не так много.