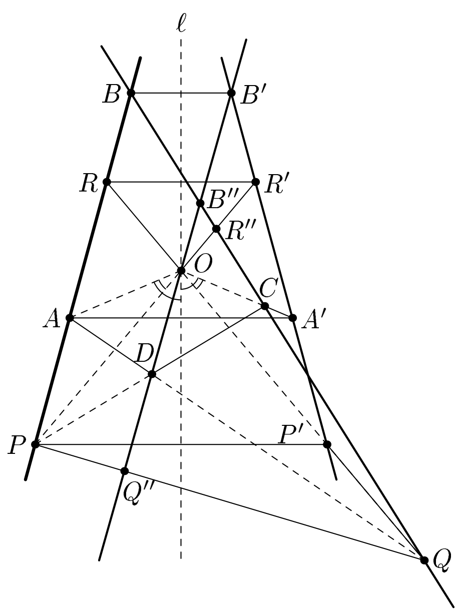
Решения задач из предыдущих выпусков

2.10. Условие. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята такая точка O, что $\angle AOP = \angle COQ$, где P и Q — точки пересечения лучей BA, CD и BC, AD соответственно. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны друг другу.

Решение. Обозначим биссектрису угла AOC через ℓ, точку пересечения прямых PB и OQ через R. Пусть, как показано на рисунке, точки B', P' и R' симметричны относительно ℓ точкам B, P и R соответственно. Еще нам потребуются точки B'' и Q'', которые являются точками пересечения прямой OB' с прямыми BQ и PQ соответственно.

Рассмотрим отображение $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, где f_1 — отражение относительно ℓ; f_2 — проекция из точки O на прямую BQ; f_3 — проекция из точки P на прямую OB'; f_4 — проекция из точки Q на прямую PB.

Из определения ясно, что f — проективное отображение прямой PB на себя. Докажем, что это отображение тождественное. Для этого укажем три его неподвижные точки:



$$P \xrightarrow{f_1} P' \xrightarrow{f_2} Q \xrightarrow{f_3} Q'' \xrightarrow{f_4} P$$

$$B \xrightarrow{f_1} B' \xrightarrow{f_2} B'' \xrightarrow{f_3} B'' \xrightarrow{f_4} B$$

$$R \xrightarrow{f_1} R' \xrightarrow{f_2} R'' \xrightarrow{f_3} O \xrightarrow{f_4} R$$

Отсюда следует, что
$$D = f_3 \circ f_2 \circ f_1(A) \in (OB').$$
Осталось заметить, что точки B и D лежат по одну сторону от биссектрисы угла AOC. (*М. Вялый*)

4.11. Условие. На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки пустые. Назовем расстановку *почти полной*, если найдется такое число C, что можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое) так, чтобы пустых клеток не осталось. Назовем расстановку *не слишком пустой*, если найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP, где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые.

Решение. Нам будет удобнее переформулировать определение не слишком пустой расстановки: мы считаем, что найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DN, где N — сторона квадрата. Эквивалентность определений очевидна. Заметим еще, что мы можем предполагать C и D натуральными.

Пусть расстановка почти полная. Рассмотрим любой квадрат со стороной N. Тогда, если все фишки передвинуть на расстояние не большее, чем N, то в этом квадрате могут появиться только фишки, которые изначально стояли в квадрате $(N + 2C) \times (N + 2C)$, имеющем тот же центр. Таким образом, в исходном квадрате пустых клеток было не больше, чем количество клеток в «бордюре» ширины C вокруг него, т. е. $(N+2C)^2 - N^2 = 4CN + 4C^2 \leqslant N(4C + 4C^2)$. Таким образом, мы можем положить $D = 4C + 4C^2$.

Остаток решения посвящен доказательству обратного. Мы докажем, что можно положить $C = 4D$. Сформулируем сначала две известных леммы.

Лемма 1 (лемма Кёнига). Дано корневое дерево. Известно, что степень каждой вершины конечна, а количество вершин бесконечно. Тогда в нем найдется бесконечный путь.

Лемма 2 (теорема Менгера, вершинная форма). Дан конечный граф с выделенными вершинами B и E, несоединенными друг с другом. Известно, что при выкидывании любых $k - 1$ вершин, отличных от B и E, в оставшемся графе существует путь от B до E. Тогда существует k путей от B до E, не имеющих общих вершин, отличных от B и E.

Сведем задачу к конечной. Покажем, что достаточно доказать следующий факт: *Для любого квадрата* $2N \times 2N$ *можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не большее* C *так, что все клетки центрального квадрата* $(2N-2C)\times(2N-2C)$ (далее мы его будем называть просто центральным квадратом) *будут заполнены.*

Пусть факт доказан. Построим следующий граф. Любая его вершина есть *квадрат* $2N \times 2N$ *с центром в начале координат* вместе со *способом передвижения фишек этого квадрата на расстояние, не превосходящее* C так, что все клетки центрального квадрата заполнены; ребро же будет соединять вершину, соответствующую квадрату $2N \times 2N$, с вершиной, соответствующей квадрату $(2N+2)\times(2N+2)$, если фишки, принадлежащие меньшему квадрату, двигаются одинаково. Корнем этого дерева будет вершина, обозначающая квадрат 0×0. Очевидно, что к этому графу применима лемма Кёнига; однако бесконечный путь в этом графе есть способ передвижения *всех* фишек так, что *все* клетки оказываются заполненными.

Докажем теперь наш факт. Для этого снова построим граф. Его вершинами будут являться клетки нашего квадрата $2N \times 2N$ и еще две вершины: «начальная» вершина B и «конечная» вершина E. Каждую клетку соединим со всеми клетками, находящимися от нее на расстоянии не большем, чем C. Кроме того, соединим B со всеми пустыми клетками, а любую клетку, находящуюся вне центрального квадрата $(2N-2C)\times(2N-2C)$ соединим с E. Пусть в нашем квадрате $P \leqslant 2DN$ пустых клеток. Мы хотим, применив теорему Менгера, построить P непересекающихся путей из B в E. Ясно, что эти пути пройдут через все пустые вершины, так как их вершины, следующие за B, различны. Тогда, если $BA_0A_1A_2\ldots A_nE$ — один из таких путей (A_0 — пустая), то можно провести такое передвижение: $A_1 \to A_0$, $A_2 \to A_1$, $\ldots$, $A_n \to A_{n-1}$; при этом пустой окажется клетка A_n, находящаяся вне центрального квадрата, и такие цепочки, построенные для разных путей, не будут пересекаться; поэтому требуемое будет выполнено.

Осталось проверить выполнение условия теоремы Менгера. Именно, нужно доказать следующее: если выбросить менее P вершин, то найдется путь из B в E. Предположим противное. Пусть выброшены $P-1$ вершина, из которых $P-x$ соответствуют пустым клеткам. Тогда вершина B осталась соединенной с x пустыми. Покрасим красным все вершины оставшегося графа, до которых теперь можно добраться из B, и синим — все выброшенные непустые вершины (их количество равно $x-1$). Тогда любая красная вершина в исходном графе была соединена только с красными, синими и пустыми вершинами.

Рассмотрим индуцированный граф на красных вершинах. После выкидывания вершины B он распадается на несколько компонент связности

$S_1, \ldots, S_\ell$. Рассмотрим одну из них, скажем, S_j. Она полностью лежит в центральном квадрате, ибо иначе она связана с E. Пусть минимальный прямоугольник, в которых ее можно заключить, имеет размеры $U \times V$ (для определенности $U \geqslant V$); тогда в S_j не более UD пустых клеток. Отметим все некрасные клетки, удаленные от какой-то из клеток S_j не более, чем на $C/2$. Заметим, что все отмеченные клетки были синими или пустыми. Покажем, что синих среди них не меньше, чем $U(C-D)/2$.

Рассмотрим строчки прямоугольника $(U+C)\times(V+C)$, в центре которого лежит наш прямоугольник $U\times V$. Назовем строчку i-строчкой, если ближайшая к ней строчка, содержащая клетку из S_j, находится на расстоянии не больше i от нее. (В частности, 0-строчка содержит клетку из S_j.) Заметим, что в i-строчке находится не меньше, чем $2\,(C/2-i)$ отмеченных клеток.

0-строчки идут не реже, чем через C друг от друга, ибо S_j связна; поэтому их не меньше, чем $(U+C/2)\,/C$ (здесь учтено, что первые и последние $C/2$ строчек пустые). Аналогично, i-клетки расположены «блоками» хотя бы по $2i+1$ строчек, расстояния между которыми не больше, чем $C-2i-1$, поэтому их не меньше, чем $(U+C/2)\,(2i+1)/C$. Пусть s_i — количество i-строчек. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\frac{C}{2}-1} s_i \geqslant \left(U+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{3}{C}+\ldots+\frac{2C-1}{2C}\right)=\left(U+\frac{C}{2}\right)\frac{C}{4}\,.$$

С другой стороны, если строчка посчитана в этой сумме j раз, то она является $(C/2-1)$-строчкой, ..., $(C/2-j)$-строчкой, поэтому в ней хотя бы $2j$ отмеченных клеток; отсюда количество отмеченных клеток не меньше, чем $(2U+C)C/4$.

Заметим, что все эти клетки лежат в квадрате $(U+C)\times(U+C)$, поэтому среди них не более $D(U+C)$ пустых. Поэтому *синих* среди наших отмеченных не меньше, чем

$$\frac{C(2U+C)-D(U+C)}{4} > U\frac{C-D}{2}\,,$$

что и требовалось.

Таким образом, если S_j содержит k пустых клеток, то $U \geqslant k/D$, и синих отмеченных клеток не меньше, чем $k(C-D)/(2D)$. Заметим, что отмеченные клетки *для разных компонент связности* различны. Действительно, если клетка A является отмеченной для S_i и S_j, т. е. удалена от каких-то клеток X_i и X_j не более, чем на $C/2$, то $X_iX_j \leqslant C$, и компоненты S_i и S_j связаны — противоречие. Таким образом, всего синих клеток не меньше, чем $x(C-D)/(2D) \geqslant x$, но мы предполагали, что их $x-1$. Противоречие, доказывающее задачу.

Замечание. Немного точнее проведя рассуждения, можно показать, например, что при $D=1$ мы можем положить $C=1$.

(*И. Богданов, Г. Челноков*)

5.5. Условие. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр.

Решение. Как известно, в додекаэдр можно вписать куб, вершины которого лежат в вершинах додекаэдра. У куба 12 ребер, а у додекаэдра 12 граней, каждое ребро куба лежит на своей грани, являясь ее диагональю.

Поскольку у каждой грани 5 диагоналей, имеется 5 различных кубов, вписанных в додекаэдр, к каждой вершине примыкают два куба (ибо сходятся 3 грани додекаэдра и 6 диагоналей граней — по две от каждой).

Любое движение додекаэдра переставляет эти кубы, а центральная симметрия — переставляет тождественно. Поскольку любую грань додекаэдра можно перевести в любую, а путем поворота вдоль оси, перпендикулярной паре противоположных граней, любая диагональ грани переводится в любую другую, все диагонали всех граней друг в друга переводятся. Поэтому любой куб можно перевести в любой другой. (Можно показать, что группа симметрий додекаэдра первого рода — т. е. сохраняющих ориентацию — изоморфна группе A_5 или группе четных перестановок пятиэлементного множества: этих кубов.)

В свою очередь, в куб с ребром a можно двумя способами вписать тетраэдр с ребром $a\sqrt{2}$, вершины которого лежат в вершинах куба, а ребра — диагонали граней. При центральной симметрии куба эти два тетраэдра переходят друг в друга, а их пересечение есть октаэдр — тело, двойственное к кубу. Утверждение задачи 5.5 есть аналог этого факта для додекаэдра с икосаэдром.

Итого имеются 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр. Все они содержат его центр и каждая грань тела B, являющегося их пересечением, образована плоскостью граней одного из этих тетраэдров. Тетраэдры разбиваются на пары центрально симметричных тетраэдров, вписанных в один куб, и центральная симметрия додекаэдра меняет местами тетраэдры в парах. Пересечение каждой пары есть октаэдр и утверждение о том, что пересечение 5 октаэдров есть икосаэдр, является двойственным аналогом утверждения о пяти кубах, вписанных в додекаэдр.

Поскольку любой куб можно перевести в любой, из этого следует, что любой тетраэдр можно перевести в любой движением додекаэдра.

Более того. Поворот на $2\pi/3$ относительно главной диагонали куба (которая совпадает с главной диагональю додекаэдра) переводит в себя додекаэдр, этот куб и каждый тетраэдр, вписанный в последний. При этом одна из граней тетраэдра переходит в себя, а три других переходят друг в друга по циклу. Поскольку плоскость грани B лежит в плоскости грани одного из тетраэдров, из этого также следует, что количество сторон у любой грани B делится на 3.

Суммируя сказанное, получаем, что любая грань любого тетраэдра переводится в любую грань любого тетраэдра движением додекаэдра. Соответственно, любая грань тела B также переводится в любую другую грань и все грани B имеют равное число сторон, делящееся на 3.

Поскольку одна из граней выпуклого многогранника обязана иметь менее 6 сторон (это легко выводится из формулы Эйлера), то все грани B — треугольники. А раз для каждой грани есть поворот относительно некоторой оси, переводящий ее в себя, то все эти треугольники правильные.

Вершину каждой грани B можно перевести движением B в любую другую вершину той же грани, а каждую грань B — в любую другую грань. Из этого следует, что и любая вершина B переводится в любую другую вершину. Поэтому B — правильный многогранник.

Исходный додекаэдр (а значит, и B) переходит в себя при повороте относительно некоторой оси (серединного перпендикуляра к паре противоположных граней). Поскольку все грани B — треугольники, при таком повороте ни одна из граней B в себя не переходит и потому количество граней B делится на 5.

Правильными многогранниками являются: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Куб и додекаэдр не подходят, потому что их грани не треугольники, а у тетраэдра и октаэдра количество граней не делится на 5. Поэтому B икосаэдр. Задача решена.

Замечание. Грани икосаэдра можно раскрасить (двумя способами) в 5 цветов так, чтобы одноцветные грани не имели бы общей вершины. Тогда продолжения граней одного цвета образуют правильный тетраэдр. Двум способам раскраски граней отвечает две пятерки правильных тетраэдров, описанных около икосаэдра. Все 10 вписаны в додекаэдр и образуют одну из звездчатых форм икосаэдра. Другая звездчатая форма есть объединение 5 октаэдров, каждый из которых образован пересечением пары тетраэдров из этих десяти.

Сечение додекаэдра плоскостью грани наших тетраэдров есть неправильный центрально симметричный шестиугольник, вершины которого образованы вершинами двух правильных треугольников, повернутых на некоторый угол относительно общего центра. Это множество вершин додекаэдра, которые можно соединить с данной вершиной путем из двух ребер. Длины сторон этого шестиугольника чередуются и равны стороне додекаэдра и диагонали его грани соответственно. Если провести все такие сечения, то получится многогранник, также являющейся звездчатой формой икосаэдра.

(*А. Я. Канель*)

5.10. Условие. Случайные величины X, Y, Z равномерно распределены на единичном отрезке. Докажите, что величина $(XY)^Z$ также равномерно распределена.

Решение. Введем новые переменные $U = X, V = XY$. Совместное распределение переменных U, V имеет плотность $dUdV/U$, поскольку якобиан перехода равен $1/U$. При этом $P(V \leqslant U) = P(XY \leqslant X) = 1$ (поскольку $Y \leqslant 1$); если $0 \leqslant w \leqslant 1$, то

$$P(V \leqslant w) = P(V \leqslant w, U \geqslant V) = P(XY \leqslant w) = \\ = \int_0^w dV \int_V^1 \frac{dU}{U} = \int_0^w (-\ln V) dV,$$

и плотность распределения величины V равна $f_V(w) = -\ln w$. Положим $\eta = -\ln V$. Тогда

$$P(\eta \leqslant w) = P(V \geqslant e^{-w}) = \int_{e^{-w}}^1 (-\ln V) dV.$$

Продифференцируем левую и правую часть по w:

$$f_\eta(w) = -(-\ln(e^{-w}))\frac{de^{-w}}{dw} = we^{-w}, \quad 0 < w < \infty.$$

Далее,

$$P(V^Z \leqslant t) = P(Z\eta \geqslant -\ln t) = P\left(-\frac{\ln t}{\eta} \leqslant Z\right),$$

причем $Z \leqslant 1$. Таким образом, при данном t переменное η пробегает значения от $-\ln t$ до бесконечности, и при каждом его значении Z равномерно распределено на отрезке $[-\ln t/\eta, 1]$. Следовательно,

$$P\left(-\frac{\ln t}{\eta} \leqslant Z\right) = \int_{-\ln t}^\infty we^{-w}\left(\int_{-\frac{\ln t}{w}}^1 dZ\right) dw = \\ = \int_{-\ln t}^\infty we^{-w}\left(1 + \frac{\ln t}{w}\right) dw = \int_{-\ln t}^\infty we^{-w} dw + \\ + \ln t \int_{-\ln t}^\infty e^{-w} dw = -t\ln t + t + t\ln t = t.$$

Значит, $P(V^Z \leqslant t) = t \quad (0 < t \leqslant 1)$, а это означает, что величина $(XY)^Z$ распределена равномерно.

(*М. Кельберт, переведено и отредактировано Б. Р. Френкиным*)

6.1. Условие. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдется один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдется цепочка из 12 вложенных людоедов.

Решение. Назовем людоеда *добрым*, если он никого не ел. Назовем людоеда *добрым первой степени*, если он никого не ел, кроме как добрых людоедов. Назовем людоеда *добрым второй степени*, если он никого не ел, кроме как добрых людоедов и людоедов первой степени доброты и т. д.

Из условия задачи следует, что для каждой степени доброты найдется не более 9 людоедов, а так как людоедов 100, то степеней доброты не менее 12.

Людоед 12 степени доброты обязательно съел людоеда 11 степени, тот — 10 степени и т. д. Мы получили цепочку вложенных людоедов.

Задача допускает двойственное решение (назовем людоеда *живым*, если его никто не съел, назовем людоеда *живым первой степени*, если его ели только живые людоеды...).

Замечание. Общий факт формулируется так. Имеется частично упорядоченное множество из $mn+1$ элемента. Тогда в нем найдется либо цепь из $n+1$ элемента, либо антицепь из $m+1$ элемента (*цепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, в котором любые два элемента сравнимы, а *антицепью* — подмножество, в котором любые два элемента несравнимы). Подумайте над такой известной олимпиадной задачей. В ряду стоят $mn+1$ различное число. Тогда можно выбрать либо $n+1$ число, идущее в порядке возрастания, либо $m+1$ число в порядке убывания.

(*А. Я. Белов*)

6.6. Условие. t_k — бесконечная последовательность положительных чисел. Докажите, что ряд $\sum(1+t_{k+1})/(kt_k)$ расходится.

Решение. Пусть $S_k = \frac{1}{kt_k}$. Нужно доказать, что два ряда $\sum_k S_k$ и $\sum_k \frac{S_k}{(k+1)S_{k+1}}$ не могут сходиться одновременно. Ясно, что сходимость ряда $\sum_k \frac{S_k}{(k+1)S_{k+1}}$ равносильна сходимости ряда $\sum_k \frac{S_k}{kS_{k+1}}$, поскольку $1 < \frac{k+1}{k} \leqslant 2$ при $k = 1, \ldots, \infty$.

Предположим, что $\sum_k S_k < \infty$. Тогда $\lim_{k\to\infty} S_k = 0$. Покажем, что для любого n при всех достаточно больших m, $m > 2n$, выполнено

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{kS_{k+1}} > \frac{1}{2}\,.$$

Тогда остаточный член $R_k = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{S_k}{kS_{k+1}}$ не будет стремиться к нулю, что обеспечит расходимость ряда $\sum_k \frac{S_k}{kS_{k+1}}$.

Поскольку $\lim_{k\to\infty} S_k = 0$, найдется такое $m > 2n$, что $\frac{S_{m+1}}{S_n} < 1$. Но тогда

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{kS_{k+1}} > \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{m-n+1}{m} \cdot \frac{1}{m-n+1} \sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} > \frac{1}{2}\,,$$

ибо $\frac{m-n+1}{m} > \frac{1}{2}$, а поскольку $\prod_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{S_n}{S_{m+1}} > 1$, то

$$\frac{1}{m-n+1} \sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} > \sqrt[m-n+1]{\prod_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}}} > 1$$

в силу неравенства Коши.

Замечание. Эта задача была предложена на Всесоюзной олимпиаде по математике «Студент и научно-технический прогресс» для désинститутов в 1982 г. (г. Чернигов), в которой автор решения принял личное участие.

(*А. Я. Белов*)

6.8. Условие. Аналитическая функция (т. е. которая разлагается в каждой точке во всюду сходящийся ряд Тейлора) принимает в рациональных точках рациональные значения. Верно ли, что она — многочлен?

Решение. Ответ на вопрос: вообще говоря, нет.

Множество рациональных чисел счетно, занумеруем их и обозначим i-е в этой нумерации рациональное число через x_i.

Рассмотрим сумму

$$\alpha_0(x-x_0)+\alpha_1(x-x_0)(x-x_1)+\dots+\alpha_k(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)+\ldots, \quad (1)$$

где α_i — некоторые рациональные коэффициенты, значения которых будут подобраны ниже.

Если $x \in \mathbb{Q}$, то $x = x_i$ при некотором i и данная сумма оборвется; в силу рациональности коэффициентов α_i ее значение будет рационально.

Многочлен, принимающий во всех рациональных точках рациональные значения, имеет рациональные коэффициенты. Поэтому множество таких многочленов счетно. Осталось показать, что есть континуум последовательностей $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых написанный выше ряд сходится к аналитической функции. Для этого докажем лемму.

Лемма 1. Для любой последовательности многочленов $R_k(x)$, для которых $\deg R_k(x) = k+1$, существует такая последовательность неотрицательных чисел r_k, что для любой последовательности α_k, удовлетворяющей неравенствам $0 \leqslant \alpha_k < r_k$, ряд $\sum_k \alpha_k R_k(x)$ сходится к аналитической функции.

Доказательство. Обозначим через M_n максимум $|R_k^{(j)}(x)|$ при условиях $|x| \leqslant n, k \leqslant n$, здесь $f^{(j)}(x)$ обозначает j-ю производную. Этот максимум существует, ибо $R^{(j)}(x) = 0$ при $j > k + 1$.

Возьмем последовательность $r_k = M_{n+1}^{-1}/(n+1)!$ и рассмотрим любую последовательность α_k такую, что $0 \leqslant \alpha_k < r_k$. Легко видеть, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(j)}(x)$ равномерно сходятся на ограниченных множествах. Поэтому сумма

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k(x)$$

есть бесконечно дифференцируемая функция и ее j-я производная равна

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(j)}(x)$$

в силу стандартной теоремы из курса матанализа.

Докажем, что ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке (это и есть аналитичность). Запишем остаточный член в форме Лагранжа:

$$\varphi_m(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \quad |\xi| \leqslant |x|.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $m \to \infty$ поскольку, в силу выбора α_k имеем равномерную сходимость $f^{(m)}(x)$ к нулю при $m \to \infty$ на любом ограниченном множестве. □

Применяя лемму, можно выбрать континуум различных последовательностей α_k рациональных чисел, для которых ряд (1) сходится к аналитической функции.

Комментарий. Аналогичным способом можно построить континуум различных аналитических функций, принимающих в алгебраических точках алгебраические значения вместе со всеми производными (а также в рациональных точках рациональные значения и т. д.).

Можно также обеспечить, чтобы функция осуществляла биекцию множества рациональных (алгебраических) чисел на себя. Кроме того, можно строить функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, аналитические относительно нескольких переменных, которые не являются многочленами, но все их ограничения, получаемые подстановкой $x_i = a$, $a \in \mathbb{Q}$, — многочлены.

(*А. Я. Белов*)

6.12. Условие. Докажите, что $\inf\limits_{x_i>0} S_n(2) = 6$, где

$$S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}+x_{i+2}}{x_i+x_{i+3}}\,;\ x_i > 0;\ x_{i+n} = x_i;\ n \geqslant 6.$$

Решение. Возьмем набор чисел $x_k = a^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$ и $x_{n-1} = x_n = 1$, где a — положительное число, меньшее 1. В этом случае $S_n(2) < 6 + 2(n-3)a$, ибо каждое из первых $(n-4)$-ех слагаемых меньше $2a$, а из оставшихся четырех два меньше 2 и два меньше $1 + a$. Устремив a к нулю получим, что $S_n(2) \leqslant 6$.

Покажем теперь, что $S_n(2) \geqslant 6$. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$X = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+3}} \geqslant 3.$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для наборов чисел

$$\frac{x_2}{x_1+x_4}, \quad \frac{x_3}{x_2+x_5}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{x_{n-1}+x_2}, \quad \frac{x_1}{x_n+x_3} \quad \text{и}$$
$$x_2(x_1+x_4), \quad x_3(x_2+x_5), \quad \ldots, \quad x_n(x_{n-1}+x_2), \quad x_1(x_n+x_3),$$

получим

$$X \geqslant \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1)+(x_1x_3+x_2x_4+\ldots+x_nx_2)}\,.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$S^2 \geqslant 3(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1)+3(x_1x_3+x_2x_4+\ldots+x_nx_2) = 3Y,$$

где $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Положим для краткости $A_0 = x_3 + x_6 + \ldots$, $A_1 = x_1 + x_4 + \ldots$ и $A_2 = x_2 + x_5 + \ldots$. Тогда $S = A_0 + A_1 + A_2$ и $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 \geqslant S^2/3$. Передвинув, если нужно, числа по циклу, можно добиться того, чтобы $x_3 \geqslant x_1$ и $x_3 \geqslant x_2$. Заметим, что

$$S^2 \geqslant \frac{3}{2}(S^2 - A_0^2 - A_1^2 - A_2^2) = 3 \sum_{i-k \not\,\vdots\, 3} x_i x_k = 3Z.$$

Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то все слагаемые из суммы Y содержатся и в сумме Z. Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то в сумме Y недостает слагаемого x_nx_1, которое не превосходит содержащегося в ней слагаемого x_nx_3. Если же $n \equiv 2 \pmod 3$, то в сумме Y недостает слагаемых $x_{n-1}x_1$ и x_nx_2, которые не превосходят соответственно слагаемых $x_{n-1}x_3$ и x_nx_3. Стало быть, $S^2 \geqslant 3Y \geqslant 3Z$ и исходное неравенство доказано.

Замечание. Использование неравенства Коши – Буняковского часто помогает при доказательстве подобных неравенств. С его помощью можно получить неравенство Шапиро (Shapiro H. S., Amer. Math. Monthly, **61**, 1954, P. 571–572, Problem 4603)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{2}$$

при $n = 3$, 4, 5, и 6 или неравенство (А. Прокопьев, Квант, №6, 1982, задача М749)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k+x_{k+2}} \geqslant 2.$$

Многочисленные примеры использования неравенства Коши – Буняковского в подобных случаях приведены в статье *Храбров А. И.* Доказательство неравенств при помощи квазилинеаризации // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 1999 год. Изд-во СПбГУ, 1999, С. 81–87.

(*А. И. Храбров*)

7.2. Условие. Допустим, что любую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда произвольную карту на плоскости также можно правильно раскрасить в 4 цвета. (Страны можно считать многоугольниками. Раскраска называется *правильной*, если любые две страны с общим участком границы раскрашены в разные цвета.)

Первое решение. Назовем правильную раскраску P множества стран S *неограниченно продолжаемой*, если для любого конечного множества S' она продолжается на $S \cup S'$. Если P не является неограниченно продолжаемой, то существует конечное *множество непродолжаемости* S' такое, что P не продолжается на $S \cup S'$.

Если P есть неограниченно продолжаемая раскраска множества S, C — страна, то существует неограниченно продолжаемая раскраска P' множества $S' = S \cup \{C\}$, продолжающая P. Действительно, существует не более 4 правильных раскрасок S', продолжающих P, и если они непродолжаемы, то объединение соответствующих множеств непродолжаемости есть множество непродолжаемости для P.

Множество стран счетно. Занумеруем страны $C_1, \ldots, C_n, \ldots$. По условию, раскраска пустого множества неограниченно продолжаема и она последовательно продолжается до неограничено продолжаемой раскраски первых n стран для любого n. Объединение всех таких раскрасок даст искомую раскраску всех стран.

Замечание. С помощью леммы Цорна можно доказать следующее обобщение задачи: допустим, каждый конечный подграф графа G

можно правильно раскрасить в k цветов. Тогда весь граф G также можно правильно раскрасить в k цветов.

(*А. Я. Белов*)

Второе решение. Занумеруем страны натуральными числами. Занумеруем цвета числами $1, 2, 3, 4$. Сопоставим раскраске первых n стран десятичную дробь $0{,}a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, где a_i — номер цвета i-й страны. Поскольку первые n стран можно правильно раскрасить, существует последовательность чисел $\{x_n\} \subset [0, 1]$ такая, что член x_n кодирует правильную раскраску первых n стран.

Из любой последовательности точек отрезка можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть X — предельная точка $\{x_n\}$, т. е. предел некоторой подпоследовательности. Легко видеть, что десятичное разложение числа X кодирует правильную раскраску всех стран.

(*Б. Шойхет*)