Формула для объема пересечения куба с полупространством

А. Я. Белов

В свое время я исследовал разбиение массива горных пород системами трещин. Каждая такая система моделировалась системой параллельных равноотстоящих плоскостей. Случай трех систем тривиален — получается разбиение пространства на равные параллелепипеды. К сожалению разбиения пространства бо́льшим числом систем (мне кажется) почти не рассматривались (хотя такие разбиения должны иметь отношения к квазикристаллам). На практике наблюдался случай четырех систем прямых. Меня интересовало распределение блоков по объемам. С точностью до аффинного преобразования можно считать, что первые три системы разбивают пространство на единичные кубы, четвертая система их доразбивает. Так я пришел к формуле объема пересечения куба с полупространством, которая имеет красивое n-мерное обобщение.

Рассмотрим единичный куб K: $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$ и полупространство P_d, задаваемое неравенством

$$\sum a_i x_i \leqslant d.$$

Выберем направления осей координат так, чтобы все коэффициенты a_i стали неотрицательными. Для этого поступим так.

Если только один коэффициент a_i отрицательный, то сделаем замену $x_i \to 1 - x_i$; при этом a_i заменится на $-a_i$, куб K перейдет в себя, а свободный член d станет равным $d + a_i$. Если же отрицательных коэффициентов a_i больше одного, поступим аналогично: для множества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ индексов i, заданных условием $a_i < 0$, сделаем ту же подстановку $x_i \to 1 - x_i$, оставив все остальные координаты x_i без изменений. Как и раньше, куб K перейдет в себя, а полупространство P_d — в полупространство $P'_d = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum_{i \in I} a'_i x_i \leqslant d'\}$. После такого преобразования объемы пересечений $K \cap P_d$ и $K \cap P'_d$ будут одинаковыми, $d' = d + \sum_{i \in I} a_i$, а все коэффициенты $a'_i = |a_i|$ станут неотрицательными, чего мы и добивались.

Далее, если $a_i = 0$ для некоторого i, то полупространство P_d параллельно i-й оси координат и n-мерный объем $K \cap P_d$ равен $(n-1)$-мерному объему пересечения P_d с соответствующей гранью куба, так что ситуация сводится к меньшей размерности. В дальнейшем считаем поэтому, что $a_i > 0$ при всех $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Разделив обе части неравенства $\sum_{i\in I} a_i x_i \leqslant d$ на $\sqrt{\sum_{i\in I} a_i^2}$, приходим к случаю, когда $\sqrt{\sum_{i\in I} a_i^2} = 1$. В этом случае $V_n(d)$ — объем пересечения $K \cap P_d$ — задается равенством:

$$V_n(d) = \frac{1}{n!\prod_{i=1}^n a_i}\Biggl(\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}\Bigl(d - \sum_{i\in I} a_i\Bigr)_+^n\Biggr). \tag{1}$$

Здесь все a_i положительны, $x_+ = \max(x, 0)$, а $|I|$ — число элементов множества I; если $I = \varnothing$, то полагаем $|I| = 0$ и $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

В частности, если $d \leqslant 0$, то $V_n(d) = 0$, а если $d \geqslant \sum_{i=1}^n a_i$, то $V_n(d) = 1$.

В размерностях $n = 1$, 2 и 3 формулы для объема превращаются в такие.

Если $n = 1$, то длина пересечения единичного отрезка и луча $x \leqslant d$ равна

$$V_1(d) = d_+ - (d-1)_+.$$

В двумерном и трехмерном случаях правая часть принимает вид:

$$V_2(d) = \frac{1}{2}(a_1 a_2)\cdot\Bigl(d_+^2 - (d-a_1)_+^2 - (d-a_2)_+^2 + (d-a_1-a_2)_+^2\Bigr)$$

и

$$\begin{aligned} V_3(d) = \frac{1}{6}(a_1a_2a_3)^{-1}\cdot\Bigl(&d_+^3 - (d-a_1)_+^3 - (d-a_2)_+^3 - (d-a_3)_+^3 + \\ &+ (d-a_1-a_2)_+^3 \ + \ (d-a_2-a_3)_+^3 \ + \ (d-a_3-a_1)_+^3 \ + \\ &- (d-a_1-a_2-a_3)_+^3\Bigr), \end{aligned}$$

соответственно.

Из формулы (1) можно получить формулу для площади сечения куба границей полупространства P_d. Для этого заметим, что число d есть расстояние от начала координат O до границы полупространства P_d, а разность объемов $V(d+\Delta d) - V(d) = S(d)\Delta d + o(\Delta)$, где $S(d)$ — искомая площадь сечения куба. Продифференцировав равенство (1) по параметру d, получаем следующую формулу для площади сечения:

$$S(d) = \frac{1}{(n-1)!\prod_{i=1}^n a_i}\left(\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}\Bigl(d - \sum_{i\in I} a_i\Bigr)_+^{n-1}\right). \tag{2}$$

Равенство нулю $S(d)$ при $d \geqslant \sum a_i$ (т.е. когда граница ∂P_d полупространства не пересекает куба K) означает забавное комбинаторное тождество:

$$\sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}\Bigl(d - \sum_{i\in I} a_i\Bigr)^{n-1} \equiv 0. \tag{3}$$

(Нижние значки «+» сняты, ибо все члены положительны, поэтому левая часть — многочлен от переменных d и a_i, где $i = 1, \ldots, n$. Равенство нулю многочлена в открытой области влечет тождественное равенство нулю).

Доказательство формулы (1)

Отметим, что выражение $\frac{1}{n!}\Big(\prod_{i=1}^n a_i\Big)^{-1} \cdot d_+^n$ характеризует объем пересечения P_d с положительным ортантом

$$Q = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant 0\}.$$

Величина

$$\frac{1}{n!}\Big(\prod_{i=1}^n a_i\Big)^{-1}\left(d - \sum_{i=1}^n a_i f_i\right)_+^n$$

равна объему пересечения P_d со сдвигом $Q^{\vec{f}}$ положительного ортанта Q на вектор $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ (т. е. с областью $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant f_i\}$). Пусть V_I^d — объем пересечения P_d с областью

$$U_I = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geqslant 0,\ i \notin I,\ x_i \geqslant 1,\ i \in I\}.$$

В частности, $U_\varnothing = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \geqslant 0\}$. Тогда формула (1) примет вид:

$$V_n(d) = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} V_I^d.$$

Пусть $Q_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \geqslant 0,\ j \neq i,\ x_i \geqslant 1\}$. Тогда $U_I = \cap_{i\in I} Q_i$ и формула (1) окажется частным случаем (когда $\Phi = P_d$) формулы

$$\mathrm{Vol}(K \cap \Phi) = \mathrm{Vol}(\Phi \cap U_\varnothing) + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n,\\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}} (-1)^k \cdot \mathrm{Vol}(\Phi \cap Q_{i_1} \cap \ldots \cap Q_{i_k}). \quad (4)$$

Здесь $\mathrm{Vol}(M)$ — объем множества M, Φ — произвольная фигура, пересечение которой с любым сдвигом положительного ортанта ограничено.

Докажем равенство (4). Единичный куб K дополняется до Q объединением множеств Q_i. То же верно и для пересечения соответствующих множеств с Φ. Пусть $\Phi_j = \Phi \cap Q_j$. Тогда $\Phi \cap Q_{i_1} \cap \ldots \cap Q_{i_k} = \Phi_{i_1} \cap \ldots \cap \Phi_{i_k}$, и достаточно проверить, что величина

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathrm{Vol}(\Phi_{i_1} \cap \ldots \cap \Phi_{i_k}).$$

есть объем объединения $\cup_j \Phi_j$. Но это есть частный случай формулы включения–исключения.

Напомним эту формулу. Пусть U_i – семейство множеств, $|U|$ означает объем множества U. Тогда

$$|\cup U_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} |U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}|.$$

(В дискретном случае обычно полагают в качестве $|U|$ число элементов. Тогда получается формула из обычной комбинаторики (см. [1].))

Смысл этой формулы таков: чтобы подсчитать число элементов (объем) объединения, надо просуммировать количества элементов (объемы) множеств. Но тогда попарные пересечения окажутся добавленными лишний раз. Их надо вычесть. Но тогда надо сделать поправку на тройные пересечения, и т. д.

Замечания.

1. С каждым множеством U можно связать *характеристическую функцию* ξ_U: $\xi_U(x) = 1$ при $x \in U$, $\xi_U(x) = 0$ при $x \notin U$. Объем множества U равен $\int \xi_U$. Пусть Δ_i: $g(x) \to g - T_{\vec{e}_i}(g)$, где $T_{\vec{f}}(g)(x) = g(x+\vec{f})$. Если $L = [0,1]$, $R = [0,\infty)$ то $\xi_L = \Delta_1(\xi_R)$. Характеристическая функция куба ξ_K получается из характеристической функции положительного ортанта Q применением оператора $\prod_{i=1}^n \Delta_i$. Но

$$\prod_{i=1}^{n} \Delta_i(\xi_Q) = (1-T_{\vec{e}_1})\cdot\ldots\cdot(1-T_{\vec{e}_n})(\xi_Q) =$$
$$= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n,\\ 1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n}} (-1)^k T_{\vec{e}_{i_1}}(\xi_Q) \cap \ldots \cap T_{\vec{e}_{i_k}}(\xi_Q).$$

   Отсюда также следует формула (4).

2. Аналогичным образом с помощью включения–исключения доказывается поляризационная формула:

$$(x_1+\dots+x_n)^n - \sum_i (x_1+\dots+\widehat{x_i}+\dots+x_n)^n + \dots +$$
$$+ (-1)^k \sum_{i_1<\dots<i_k} (x_1+\dots+\widehat{x_{i_1}}+\dots+\widehat{x_{i_k}}+\dots+x_n)^n +$$
$$+ \dots + (-1)^n \sum x_i^n = \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot x_{\sigma(n)}.$$

   Если переменные x_i коммутируют, то правая часть в этой формуле равна $n!\bigl(x_1\cdot\ldots\cdot x_n\bigr)$.

3. В школе нас приучают избегать крупных формул. Однако правильно организованая формула (своего рода иероглиф) оказывается красивой! А красота служит проверке правильности.

Автор признателен Г. А. Гальперину, побудившему его написать данную заметку и обратившему внимание на задачу о площади сечения.

Список литературы

[1] Виленкин Н. Я. *Комбинаторика*. М.: Наука, 1967.

[2] Белов А. Я. *Статистическая геометрия и равновесие блочных массивов*. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ. мат. наук. М.: МГИ, 1991.

А. Я. Белов, МИОО
E-mail: kanel@mccme.ru