Периодические последовательности

М. Ш. Цаленко

Остатки от деления членов последовательностей, определяемых рекуррентными соотношениями, на данное число k образуют периодические последовательности. Примерами могут служить арифметические и геометрические прогрессии, степенные выражения n^m, в которых n пробегает значения $0, 1, 2, \ldots$, а m является фиксированным положительным целым числом, числа Фибоначчи и многие другие последовательности. Нахождение периодов некоторых последовательностей является основной темой этой статьи.

Материал этой статьи может быть использован в математических кружках. Он также полезен и доступен учащимся старших классов, интересующимся математикой и принимающим участие в математических соревнованиях.

1. Рекуррентные последовательности

Мы будем рассматривать последовательности целых чисел или, другими словами, функции неотрицательного целого аргумента, принимающие целые значения. По традиции значение такой функции a на числе n (n-й элемент последовательности) обозначается a_n.

Последовательность называется *рекуррентной*, если она задается формулой

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_0,$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — фиксированные числа.

Проиллюстрируем это определение на нескольких примерах. Простейший пример — арифметическая прогрессия, которая задается соотношением $a_{n+1} = a_n + d$. Ее можно задать и по-другому, исключив d: $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$. Аналогичную формулу можно написать и для последовательности квадратов $a_n = n^2$: $a_{n+3} - 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$.

Задача. Докажите, что для любого k последовательность $a_n = n^k$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_{n+i} = 0.$$

Рекуррентными являются и многие другие хорошо известные виды последовательностей, скажем, геометрические прогрессии $a_{n+1} = qa_n$ или числа Фибоначчи $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Некоторые рекуррентные последовательности периодичны, например, последовательность

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 2,\ a_1 = 1$$

периодична с периодом 6 (проверьте!).

Упражнение. Проверьте, что остатки, образуемые числами Фибоначчи при делении на 2, 3, 4 соответственно образуют периодические последовательности с периодами 3, 8, 12.

2. Сравнения по модулю

Говорят, что целые числа a и b *сравнимы по модулю* $n > 1$, если при делении на n они дают одинаковый остаток (обозначение $a \equiv b \pmod{n}$). Отношение сравнимости по любому модулю является отношением эквивалентности. Более того, сумма остатков сравнима с остатком от суммы и произведение остатков сравнимо с остатком от произведения. Классы эквивалентности по модулю n называются классами вычетов или просто вычетами по модулю n. Вычеты можно складывать и умножать по следующим правилам

$$[a] + [b] = [a + b], \qquad [a] \cdot [b] = [ab].$$

Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ и множества вычетов $\mathbf{Z}_n$ называются в алгебре кольцами, а сопоставление числу a класса вычетов $[a]$, которому принадлежит остаток от деления a на n, является гомоморфизмом кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ на кольцо вычетов $\mathbf{Z}_n$.

Вычет $[a]$ называется *делителем нуля* в $\mathbf{Z}_n$, если существует такой вычет $[b]$, что $[a] \cdot [b] = [0]$. Вычет $[a]$ называется *обратимым* в $\mathbf{Z}_n$, если существует такой вычет $[b]$, что $[a] \cdot [b] = [1]$. Можно проверить, что каждый вычет либо является делителем нуля, либо обратим. Обратимыми являются в точности те вычеты $[a]$, для которых a взаимно просто с n. В доказательстве этого факта полезно использовать следующее свойство наибольшего общего делителя (a, b) чисел a и b: *(a, b) является наименьшим положительным числом, которое можно представить в виде целочисленной линейной комбинации $ua + vb$ чисел a и b.*

3. Периодические последовательности

Назовем последовательность $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ *периодической*, если существует такое целое число $T > 0$, что

$$a_{n+T} = a_n \text{ для всех } n \text{ бóльших некоторого } n_0. \tag{1}$$

Наименьшее возможное число T, для которого выполняется (1), назовем *периодом* последовательности a_n.

Используя свойство наибольшего общего делителя, упомянутое выше, и определение периодической последовательности, нетрудно доказать следующий факт:

Теорема 1. *Если для последовательности a_n существуют два положительных числа T_1 и T_2, для которых выполняется* (1), *то для $D = (T_1, T_2)$ также выполняется* (1).

Поэтому все числа T, для которых выполняется (1), кратны периоду последовательности.

Теорема 2. *Пусть последовательность a_n задается рекуррентным соотношением $a_{n+t} = c_1 a_{n+t-1} + c_2 a_{n+t-2} + \dots + c_t a_0$, в котором все коэффициенты $c_1, \dots, c_t$ — целые числа. Если $a_0, a_1, \dots, a_{t-1}$ — целые числа, то все члены последовательности являются целыми числами, остатки от деления которых на любое целое число образуют периодическую последовательность.*

Прежде чем доказывать теорему 2, разберем случай геометрической прогрессии a^n. Рассмотрим остатки степеней a по модулю k. Последовательность $[a]^n = [a^n]$ обязательно содержит одинаковые члены (так как вычетов по модулю k конечное число). Значит, выполняется равенство

$$[a]^{m_1} = [a]^{m_2} \tag{2}$$

при $m_1 \neq m_2$. Без ограничения общности считаем, что $T = m_1 - m_2 > 0$. Умножая равенство (2) на $[a]^{n-m_2}$, убеждаемся, что $[a]^{n+T} = [a]^n$ при $n \geqslant m_2$. Поэтому последовательности остатков от деления a^n на k периодическая. Подробнее эти последовательности и их периоды обсуждаются ниже в разделе 5.

Пример последовательности $1, 2, 2^2, \dots$ и модуля 4 показывает, что в общем случае периодическое повторение не обязано начинаться с самого начала последовательности: в данном случае последовательность остатков есть $1, 2, 0, 0, \dots$

Доказательство теоремы 2. Оно обобщает приведенное выше рассуждение об остатках членов геометрической прогрессии.

Для остатков членов рекуррентной последовательности также выполняется рекуррентное соотношение

$$[a_{n+t}] = [c_1] \cdot [a_{n+t-1}] + [c_2] \cdot [a_{n+t-2}] + \dots + [c_t] \cdot [a_0],$$

поэтому любые t последовательных элементов рекуррентной последовательности однозначно определяют следующее число в последовательности. Но наборов из t остатков (кортежей длины t) от деления на k

конечное число — k^t. Значит, какой-то набор встретится дважды, после чего элементы последовательности станут периодически повторяться.

4. Степенны́е последовательности

Последовательности $a_n = n^m$ являются рекуррентными, так что последовательности остатков $r_n = n^m \pmod k$ периодичны в силу теоремы 2.

Лемма 1. *a) Период T последовательности $r_n = n^m \pmod k$ является делителем k.*

b) Множество простых делителей периода T совпадает с множеством простых делителей k.

c) Сумма $mT + \binom{m}{2}T^2 + \dots + \binom{m}{m-1}T^{m-1}$ делится на k.

Доказательство. a) Для любого $i = 0, 1, 2, \dots$ имеем:

$$(i+k)^m = i^m + \binom{m}{1}i^{m-1}k + \binom{m}{2}i^{m-2}k^2 + \dots + k^m \equiv i^m \pmod k.$$

По следствию теоремы 1 период T является делителем k. Поэтому из написанного выше сравнения следует, что $(i+T)^m \equiv i^m \pmod k$ для всех $i \geqslant 0$.

b) Если T является периодом, то, в частности, при $i = 0$ имеем:

$$0^m = 0 \equiv (0+T)^m = T^m \pmod k.$$

Следовательно, число T^m делится на k и поэтому среди простых делителей T должны находиться все простые делители k. Из a) видно, что верно и обратное утверждение. Поэтому множества простых делителей k и T совпадают.

c) Если T — период, то при $i = 1$ имеем:

$$1 = 1^m \equiv (1+T)^m = 1+mT++\binom{m}{2}T^2+\dots+\binom{m}{m-1}T^{m-1}+T^m \pmod k.$$

Сокращая 1 в обеих частях этого сравнения и $T^m \equiv 0 \pmod k$ в правой части, получаем нужное сравнение.

Теорема 3. *Остатки от деления членов последовательности полных квадратов на целое число $k > 1$ образуют последовательность, период T которой равен k, если k не делится на 4, и равен $k/2$, если k делится на 4.*

Доказательство. В силу утверждения a) леммы 1 период T является делителем k. Если $T < k$, то $T \leqslant k/2$. Поэтому $2T \leqslant k$. В силу утверждения c) леммы 1 $2T \geqslant k$, т. е. $2T = k$. Следовательно, число k четно. В силу

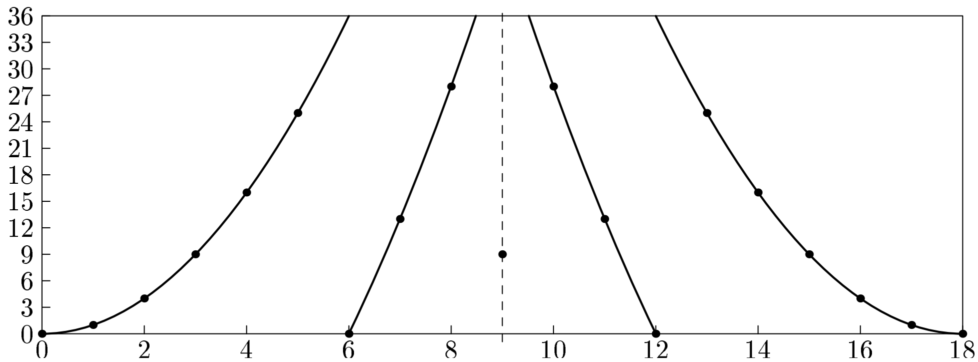

Рис. 1. $x^2 \pmod{18}$

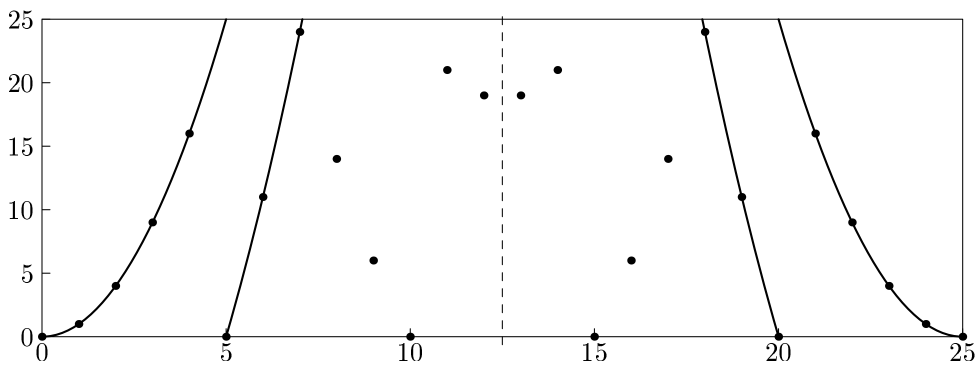

Рис. 2. $x^2 \pmod{25}$

утверждения b) леммы 1 период тоже является четным числом. Поэтому k делится на 4, а период T равен $k/2$. Во всех остальных случаях $T = k$.

Задача. Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(1) = 2$. Докажите, что $P(7)$ не является полным квадратом.

Перейдем теперь к общему случаю последовательности $a_n = n^m$, $m > 2$. Как уже отмечалось, всякая последовательность a_n является функцией аргумента, принимающего неотрицательные целые значения. График такой функции состоит из дискретного множества точек. Как видно из сравнений $n^{2m} \equiv (-n)^{2m} \equiv (T-n)^{2m} \pmod{k}$, в случае степенны́х последовательностей с четным показателем часть графика, соответствующая периоду (от 0 до T) симметрична относительно прямой $x = T/2$. На рис. 1 и 2 можно увидеть эту симметрию (куски парабол добавлены «для красоты»).

Теперь построим *наименьшее* число T, множество простых делителей которого совпадает с множеством простых делителей числа k и mT делится на k.

Пусть $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, а показатели степеней $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ больше нуля. Представим m в виде $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s} m_1$, допуская для показателей степеней $\beta_1, \ldots, \beta_s$ значение 0. Положим

$$T(k,m) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\gamma_s}, \text{ где } \gamma_i = \alpha_i - \beta_i, \text{ если } \alpha_i > \beta_i, \text{ и } \gamma_i = 1, \text{ если } \alpha_i \leqslant \beta_i.$$

Ясно, что число $T(k,m)$ является наименьшим делителем k, обладающим указанными выше свойствами. Обозначим $d(k,m) = k/T(k,m)$. Легко видеть, что m делится на $d(k,m)$ и

$$d(k,m) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\delta_s}, \text{ где } \delta_i = \beta_i, \text{ если } \alpha_i > \beta_i, \text{ и } \delta_i = \alpha_i - 1, \text{ если } \alpha_i \leqslant \beta_i,$$

Теорема 4. *Период последовательности $r_n = n^m \pmod{k}$ является делителем числа $T(k,m)$.*

Доказательство. Для упрощения записи вместо $T(k,m)$ и $d(k,m)$ будем писать T и d. В силу следствия теоремы 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого целого неотрицательного i выполняется $(i+T)^m \equiv i^m \pmod{k}$. Так как

$$(i+T)^m = i^m + \binom{m}{1} T i^{m-1} + \cdots + \binom{m}{l} T^l i^{m-l} + \cdots + T^m,$$

то достаточно доказать, что все числа $\binom{m}{l} T^l$ делятся на $k = dT$ при $1 \leqslant l \leqslant m$.

Вначале рассмотрим случай $l < m$. Обозначим $q = m/d$. Так как

$$\binom{m}{l} T^l = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-l+1)}{l \cdot (l-1)!} T^l = (dT) \binom{m-1}{l-1} \cdot \frac{q}{l} T^{l-1},$$

достаточно доказать, что $A = \binom{m-1}{l-1} \cdot \frac{q}{l} T^{l-1}$ — целое. Как показывает разложение

$$\binom{m}{l} = d \cdot \binom{m-1}{l-1} \cdot \frac{q}{l},$$

в знаменатель представления A в виде несократимой дроби могут входить только делители k (если p не является делителем k, то p также не является делителем d). Но если k делится на p, то T^{l-1} делится по крайней мере на p^{l-1}. С другой стороны, p может входить в разложение l на простые множители не более, чем $\lfloor \log_p l \rfloor$ раз (здесь $\lfloor\ \rfloor$ обозначает целую часть числа). Из неравенства $\log_p l \leqslant \log_2 l \leqslant l-1$ следует, что число A — целое.

Остается показать, что T^m делится на k. Если p — простой делитель k, на который m не делится, то p входит в T в той же степени, что и в k. Если же p — общий простой делитель k и m, то p входит в T по крайней мере один раз.

Если $\alpha \leqslant \beta$ (для упрощения записи индексы опущены), то p входит в T в первой степени. Тогда p входит в T^m по крайней мере p^β раз. Так как $p \geqslant 2$ и $\beta \geqslant \alpha$, то $p^\beta \geqslant 2^\beta > \beta \geqslant \alpha$, и T^m делится на p^α.

Если $\alpha > \beta$, то p входит в T по крайней мере $(\alpha-\beta)p^\beta$ раз. Покажем, что $(\alpha-\beta)p^\beta \geqslant \alpha$. Так как $\beta \leqslant p^\beta - 1$, то $1/\beta \geqslant 1/(p^\beta-1)$. Учитывая, что $\alpha - \beta \geqslant 1$, получаем

$$1 + \frac{\alpha-\beta}{\beta} \geqslant 1 + \frac{1}{p^\beta - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} \geqslant \frac{p^\beta}{p^\beta-1} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha-\beta)p^\beta \geqslant \alpha.$$

Тем самым доказано, что T^m делится на k.

Следствие 1. *Если $k = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые множители, то при любом m период последовательности $a_n = n^m \pmod k$ равен k.*

Следствие 2. *Если k и m взаимно просты, то период последовательности $a_n = n^m \pmod k$ равен k.*

Доказательство. Предположим, что период T меньше k. Множество простых делителей у T такое же, как у k (лемма 1b). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $k = p^2 q$ и T является делителем $T_1 = pq$. Тогда $i^m \equiv (i+T_1)^m \pmod k$, а так как T_1^2 делится на k, то

$$1^m \equiv (1+T_1)^m = 1 + mT_1 + \binom{m}{2} T_1^2 + \cdots + T_1^m \equiv 1 + mT_1 \pmod k.$$

Значит, mT_1 делится на k. Поскольку k и m взаимно просты, то и T_1 делится на k. Приходим к противоречию, так как $T_1 < k$.

В том случае, когда m и k имеют общие множители, период может оказаться меньше $T(k,m)$, как показывает следующий пример. Если $k = 32 = 2^5$ и $m = 8 = 2^3$, то $T(32,8) = 4$. Однако период $T = 2$, как показывают вычисления:

n	0	1	2	3	4
r_n	0	1	0	1	0

Единственное неочевидное равенство в этой таблице: $3^8 \equiv 1 \pmod{32}$. Оно легко усматривается из разложения

$$3^8 - 1 = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1).$$

Все множители в правой части четны, а $3+1$ делится на 4.

Следствие 3. *Если* $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\beta_s}$, $\beta_i \geqslant \alpha_i - 1$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, s$, *то период последовательности* $a_n = n^m \pmod k$ *равен* $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$.

5. Геометрические прогрессии

Из рассмотрения степенны́х функций может показаться, что период всегда связан с модулем k. Однако уже для случая показательных функций (или геометрических прогрессий) $a_n = m^n$, $m > 1$, период не имеет очевидной связи с модулем.

Поскольку следующий член геометрической прогрессии однозначно определяется предыдущим, периодом a_n будет такое наименьшее $T > 0$, что

$$m^i(m^T - 1) \equiv 0 \pmod k \tag{3}$$

при всех достаточно больших i.

Вначале рассмотрим случай, когда m взаимно просто с k. В этом случае T совпадает с *порядком* $[m]$ в кольце $\mathbf{Z}_k$, т. е. наименьшим положительным числом r, для которого $[m]^r = [1]$. Напомним, что порядок является делителем количества чисел, меньших k и взаимно простых с k. Это последнее число обозначается $\varphi(k)$ и называется *функцией Эйлера*. Функция Эйлера обладает свойством *мультипликативности*: для взаимно простых x, y выполняется $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Из свойства мультипликативности легко вывести *формулу Эйлера*

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1}),$$

где p_i — различные простые числа.

Поскольку T делит $\varphi(k)$, то выполняется сравнение $m^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod k$, которое называется *теоремой Эйлера*. Если k — простое, то $\varphi(k) = k - 1$ и теорема Эйлера превращается в *малую теорему Ферма*: $m^{k-1} \equiv 1 \pmod k$.

Все приведенные выше факты хорошо известны, и их можно найти во многих книгах по теории чисел, скажем, в книге Н. Б. Алтуфовой, А. В. Устинова «Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.», М.: МЦНМО, 2002.

Общий случай легко сводится к уже рассмотренному. Для любого целого $k > 1$ положим $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s} k_1$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все общие простые делители m и k, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — наибольшие степени, в которых эти делители входят в разложение k на простые множители. В дальнейшем произведение $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ будет обозначаться через $b(m, k)$ или просто через b. Число k_1 равно $k/b(m, k)$.

Теорема 5. *Период последовательности остатков $r_n = m^n \pmod k$, где m и k — фиксированные целые числа, большие 1, равен порядку $[m]$ в $\mathbf{Z}_{k_1}$.*

Доказательство. Поскольку $b(m,k)$ является произведением степеней простых чисел, входящих в m, все достаточно большие степени m делятся на $b(m,k)$. Но тогда из сравнения (3) заключаем, что $m^T - 1 \equiv 0 \pmod{k_1}$.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 5 на следующем примере. Пусть $k = 12$. Если $m = 2$, то $k_1 = 4$ и $b = 4$. Тогда период последовательности остатков, получающихся при делении чисел 2^n на 12, равен 2, так как вычет $[2]$ имеет порядок 2 в $\mathbf{Z}_3$. Если $m = 3$, то $k_1 = 4$ и $b = 3$, и тогда период последовательности $3^n \pmod{12}$ также равен 2, так как вычет $[3]$ имеет порядок 2 в $\mathbf{Z}_4$.

Отметим, что теорема 5 объясняет, в частности, тот факт, что критерии делимости на разные числа k имеют разную сложность: сложность критерия определяется величиной порядка вычета $[10]$ в $\mathbf{Z}_{k_1}$. Например, $[10]$ имеет порядок 2 в $\mathbf{Z}_{11}$ и порядок 6 в $\mathbf{Z}_7$.

6. Числа Фибоначчи

Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

и начальными условиями $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. В силу теоремы 2 для любого k остатки образуют периодическую последовательность. Заметим, что остатки чисел Фибоначчи удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению по любому модулю. Это позволяет упростить вычисление членов последовательности остатков. Кроме того, любые два соседних члена последовательности чисел Фибоначчи полностью определяют всю последовательность: если известны члены a_m, a_{m+1} то, используя рекуррентное соотношение, можно найти не только a_{m+2}, a_{m+3}, ..., но и a_{m-1}, a_{m-2}, ..., поскольку из $a_{m+1} = a_m + a_{m-1}$ следует $a_{m-1} = a_{m+1} - a_m$.

Из последнего замечания сразу следуют два важных вывода:

а) *остатки образуют периодическую последовательность, первый период которой начинается с членов a_0 и a_1;*

б) *существует бесконечно много чисел Фибоначчи, которые делятся на любое заданное k.*

Последнее утверждение отмечено также в книге Н. Н. Воробьёва «Числа Фибоначчи».

Заметим, что *любые два соседних члена последовательности чисел Фибоначчи взаимно просты*. Это утверждение устанавливается с помощью метода математической индукции.

Обозначим через m номер второго числа Фибоначчи, которое делится на k (первым является число $a_0 = 0$). Число a_{m-1} взаимно просто с a_m в силу сказанного выше и тем самым взаимно просто с k, так как a_m согласно нашему выбору делится на k. Значит, вычет $[a_{m-1}]$ обратим в $\mathbf{Z}_k$, обозначим через p его порядок.

Теорема 6. *В обозначениях, введенных выше, период последовательности остатков, получающихся при делении чисел Фибоначчи на $k > 1$, равен pm.*

Доказательство. Первый период начинается числами 0, 1 и должен кончаться числом 1, так как $1 + 0 = 1$. Обозначим через r остаток от деления a_{m-1} на k. Тогда члены с номерами $m-1$, m, $m+1$, $m+2$ в последовательности остатков выглядят следующим образом:

$$r,\ 0,\ r,\ r,\ 2r \pmod{k}.$$

Значит, остаток с номером $m+i$, $0 \leqslant i < m$ получается из остатка с номером i умножением на r и последующим взятием остатка по модулю k. Поэтому перед третьим нулем в последовательности остатков появится остаток от деления r^2 на k. Продолжая дальше, можно заметить, что после третьего нуля начальный отрезок последовательности умножается на r^2 (с последующим взятием остатка по модулю k) и т. д. Следовательно, 1 появится первый раз перед нулем в последовательности остатков, когда перед нулем окажется $[r^p]$. Так как второму нулю предшествуют m чисел и эти числа умножаются последовательно на r, r^2, $\ldots r^{p-1}$, то общее число чисел в периоде равно mp, что и утверждалось.

Покажем на примерах, как вычисляется период последовательности остатков чисел Фибоначчи, получающихся при делении на число k.

Пусть $k = 3$. Второй член в последовательности чисел Фибоначчи, который делится на 3, имеет номер 4. Предыдущий член равен 2. Так как $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то порядок этого члена равен 2. Следовательно, по теореме 6 период равен $4 \cdot 2 = 8$.

Для вычисления периода необязательно знать второе число a_m, которое делится на k. Достаточно знать только остаток r_{m-1} от деления a_{m-1} на k, поскольку остатки связаны тем же рекуррентным соотношением, что и сами числа Фибоначчи. Продемонстрируем сказанное для числа $k = 10$. Вычисляем последовательность остатков:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
r_i	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4	5	9	4	3	7	0

Следовательно, $m = 15$ и осталось найти порядок $[7]$ в кольце $\mathbf{Z}_{10}$. Так как 7^2 заканчивается на 9, 7^3 — на 3, 7^4 — на 1, порядок равен 4. Поэтому период равен $15 \cdot 4 = 60$.

Приведем таблицу значений периода для $k = 2, \dots, 15$. В этой таблице, как и выше, — m означает номер второго члена в последовательности Фибоначчи, который делится на заданное k, a_m — соответствующее число Фибоначчи, p — порядок $[a_{m-1}]$ в $\mathbf{Z}_k$, $T(k)$ — период.

k	m	a_m	p	$T(k) = mp$
2	3	2	1	$3 \cdot 1 = 3$
3	4	3	2	$4 \cdot 2 = 3$
4	6	8	2	$6 \cdot 2 = 12$
5	5	5	4	$5 \cdot 4 = 20$
6	12	144	2	$12 \cdot 2 = 24$
7	8	21	2	$8 \cdot 2 = 16$
8	6	8	2	$6 \cdot 2 = 12$
9	12	144	2	$12 \cdot 2 = 24$
10	15	610	4	$15 \cdot 4 = 60$
11	10	55	1	$10 \cdot 1 = 10$
12	12	144	2	$12 \cdot 2 = 24$
13	7	13	4	$7 \cdot 4 = 28$
14	24	46368	2	$24 \cdot 2 = 48$
15	20	6765	2	$20 \cdot 2 = 40$

Автор глубоко благодарен Г. А. Гальперину, тщательно прочитавшему первоначальный вариант рукописи и сделавшему многочисленные замечания, которые были учтены при доработке текста статьи.

Michael Tsalenko
E-mail: `mtsalenko@sbcglobal.net`