Обобщение перестановочного неравенства и монгольское неравенство

Л. В. Радзивиловский

После прочтения этой статьи вам станут очевидными доказательства многих неравенств. Все они будут вытекать в одну-две строчки из одного простого принципа, который объясняется в этой статье. Вот примеры того, что станет очевидным:

1. $x^5+y^5+z^5 \geqslant x^3y^2+y^3x^2+z^3x^2$ (здесь и далее числа положительны).
2. $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2} \leqslant \dfrac{x}{1+y^2}+\dfrac{y}{1+z^2}+\dfrac{z}{1+x^2}$.
3. $(a_1+a_2+\dots+a_n)\Bigl(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dots+\dfrac{1}{a_n}\Bigr) \geqslant n^2$.
4. $(a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3)(a_1+a_2+\dots+a_n) \leqslant n(a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4)$.
5. $\left(1+\dfrac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)$. (16-й Турнир Городов, осень, основной вариант, старшие классы, задача №4, Л. Д. Курляндчик).
6. $\sqrt{x+2^x}+\sqrt{y+2^y}+\sqrt{z+2^z} \leqslant \sqrt{y+2^x}+\sqrt{z+2^y}+\sqrt{x+2^z}$.
7. Дана таблица $n\times n$, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-й строке и j-м столбце таблицы, записано число $(i+j-1)-1$. В таблице зачеркнули n чисел таким образом, что никакие два зачеркнутых числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма зачеркнутых чисел не меньше 1. (13й Турнир Городов, весна, основной вариант, старшие классы, задача №3, С. Иванов)

Кроме того, мы докажем монгольское неравенство. Это уже займет не одну строчку, но всё равно будет довольно прозрачно. Об истории монгольского неравенства и о двух его сложных доказательствах написано в статье А. И. Храброва [4].

Я намеренно не формулирую факты кратчайшим способом, а предпочитаю «повозиться» и рассказать всё в том порядке, в котором я это осознавал. Мы начнем с частных случаев и перейдем к общим теоремам, а не наоборот. Конечно, жаль бумагу, байты и леса, но именно «возня» способствует развитию интуиции. Чтоб не отнимать у читателей удовольствия «повозиться», я опустил много деталей. Поэтому, чтобы понять этот текст, вам понадобится ручка и бумажка.

Перестановочное неравенство

Перестановкой (из n элементов) мы называем биективную функцию из множества чисел $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ в себя. Слово «биективная» означает, что во всякое число под действием этой функции переходит ровно одно число. Обозначать перестановку я буду греческой буквой σ (сигма). Числа $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, …, $\sigma(n)$ — это те же числа 1, 2, …, n, но переставленные в другом порядке.

Рассмотрим два набора чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Будем говорить, что наборы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ упорядочены «одинаково», если наибольшему числу в первом наборе соответствует наибольшее во втором (т. е. индексы у них одинаковые), второму по величине числу в первом наборе соответствует второе по величине, и т. д., а наименьшему соответствует наименьшее. Например, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, то наборы одинаково упорядочены. Другой пример: наборы a, b, c и a^3, b^3, c^3 одинаково упорядочены. Будем говорить, что наборы обратно упорядочены, если наибольшему числу в первом наборе соответствует наименьшее во втором, второму по величине в первом наборе соответствует второе с конца во втором и т. д., а наименьшему соответствует наибольшее. Например, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, то наборы обратно упорядочены. Наборы a, b, c и $1/a, 1/b, 1/c$ также обратно упорядочены.

Для любых двух наборов $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ существует такая «самая правильная» перестановка σ, что наборы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots b_{\sigma(n)}$ одинаково упорядочены. Аналогично, для любых двух наборов можно найти и «самую неправильную» перестановку σ, при которой наборы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots b_{\sigma(n)}$ обратно упорядочены.

Какое отношение имеет всё это к доказательству неравенств? А вот какое:

Теорема 1 (перестановочное неравенство). Рассмотрим все возможные перестановки из n элементов. Тогда значение выражения

$$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)}$$

будет самым большим, когда числа упорядочены одинаково, и самым маленьким, когда числа обратно упорядочены.

Иначе говоря, значения, полученные при остальных перестановках, не больше значения, полученного при «самой правильной», и не меньше значения, полученного при «самой неправильной» перестановке.

Например, из теоремы следует, что $a/b + b/c + c/a \geqslant 3$: ведь a, b, c и $1/a, 1/b, 1/c$ обратно упорядочены, а значит, правая часть $a/a + b/b + c/c$ получена при самой неправильной перестановке и потому дает наименьшее значение.

Другие примеры дают неравенства 1 и 2 из списка в начале статьи. Конечно, подобные неравенства можно доказать и другими методами. Но перестановочное неравенство позволяет единообразно доказывать много неравенств.

Это неравенство очень впечатлило меня в первый же раз, когда я с ним столкнулся, своей мощью и общностью. Узнал я его в 11-м классе школы Шевах-Мофет (Тель-Авив) на очень интересном уроке по неравенствам. Проводил этот урок Михаил Розенберг (учитель этой же школы).

Перестановочное неравенство справедливо для любых действительных чисел (нет ограничения положительности).

Интуитивно легко почувствовать правильность перестановочного неравенства: если вы хотите получить число побольше, то приставьте к бо́льшим числам бо́льшие коэффициенты при суммировании. Это выгодней, чем тратить большие коэффициенты на маленькие числа.

Строго доказать перестановочное неравенство также несложно.

Лемма. Пусть $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$. Тогда $a_1b_1 + a_2b_2 > a_1b_2 + a_2b_1$.

Доказательство. Перенесем всё в левую часть:

$$a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 > 0,$$
$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0.$$

Но произведение двух положительных чисел положительно, и полученное неравенство равносильно исходному.

Доказательство перестановочного неравенства. Возьмем два набора чисел. Если есть такая пара индексов i, k, что порядок неправильный (например, $a_i > a_k$, $b_k > b_i$), то мы поменяем их местами. При этом сумма возрастет (согласно лемме). Будем повторять такие операции, пока это возможно (в «компьютерной науке» этот процесс называется «сортировка»). Если это уже невозможно (сортировка закончилась), то легко понять, что порядок стал правильным. Но мы начинали с произвольного порядка и несколько раз увеличивали наше число! Значит, правильный порядок соответствует самому большому значению.

Аналогично доказывается обратное направление перестановочного неравенства. Просто надо запустить сортировку наоборот: каждый раз, если есть хоть одна правильная пара индексов, нужно сделать из нее неправильную. Согласно лемме число будет постоянно убывать. В конце мы получим самый неправильный порядок и значение будет меньше. А ведь мы начинали с произвольного порядка.

Упражнение. Проследите доказательство внимательно и поймите, когда в перестановочном неравенстве достигается равенство.

Упражнение. В неравенствах 1 и 2 в начале статьи мы потребовали, чтобы числа были положительными. Действительно ли это нужно? Где «сломается» доказательство, если мы «запустим» в него произвольные действительные числа?

Теорема 2 (неравенство Чебышёва). Пусть наборы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ упорядочены одинаково. Тогда

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n).$$

Если же они обратно упорядочены, то выполняется неравенство с противоположным знаком.

Вообще-то неравенством Чебышёва правильнее называть более общее неравенство (см. [3]), но это название уже прижилось (см., скажем, [2]).

Доказательство. В первом случае

$$\begin{gathered}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,\\
\cdots\\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}.
\end{gathered}$$

Суммируя всё это, получаем искомый результат. Если же наборы обратно упорядочены, то знаки неравенства перевернутся во всех слагаемых и в сумме.

В качестве немедленных следствий получаем неравенства 3 и 4 из списка в начале статьи и многие другие.

Поменяем сложение на умножение

Рассмотрим неравенство 5 из списка в начале статьи:

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n).$$

Как уже говорилось, эта задача предлагалась на 16-м Турнире Городов, в котором я участвовал. Мне показалось естественным умножить обе части на произведение всех чисел. Получим:

$$(a_2 + a_1^2) \cdot (a_3 + a_2^2) \cdot \ldots \cdot (a_1 + a_n^2) \geqslant (a_1 + a_1^2) \cdot (a_2 + a_2^2) \cdot \ldots \cdot (a_n + a_n^2).$$

Хотя я не смог тогда доказать это неравенство, у меня возникло ощущение, что «это всегда так». К тому времени я еще не знал перестановочного неравенства. Некоторые читатели уже, наверное, догадались, как его применить в этой задаче.

Теорема 3. Рассмотрим два набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и все возможные перестановки чисел второго набора. Значение выражения

$$\prod \left(a_i + b_{\sigma(i)}\right)$$

будет самым большим, когда наборы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)}$ обратно упорядочены, а самым маленьким — когда эти наборы одинаково упорядочены.

Замечание. Вместо условия положительности чисел достаточно потребовать, чтобы для всяких двух индексов i, k число $a_i + b_k$ было положительно.

Обратите также внимание, что знаки неравенства в теореме 3 по сравнению с перестановочным неравенством перевернуты. Объяснение этому будет дано ниже.

Теорема следует из леммы, которая есть ее частный случай для $n = 2$:

Лемма. Пусть $a_1 > a_2 > 0$, $b_1 > b_2 > 0$. Тогда $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) < < (a_1 + b_2)(a_2 + b_1)$.

Упражнение. Доказать лемму и теорему по аналогии с перестановочным неравенством.

Упражнение. Вывести отсюда неравенство

$$(a_2 + a_1^2) \cdot (a_3 + a_2^2) \cdot \ldots \cdot (a_1 + a_n^2) \geqslant (a_1 + a_1^2) \cdot (a_2 + a_2^2) \cdot \ldots \cdot (a_n + a_n^2).$$

Я подозреваю, что автор задачи 5 имел в виду другое ее решение, быть может, использующее неравенство $1 + \dfrac{a^2}{b} \geqslant \dfrac{(1+a)^2}{1+b}$. Пусть, скажем, нас попросили доказать

$$\left(1 + \frac{a_1^5}{a_2^3}\right) \cdot \left(1 + \frac{a_2^5}{a_3^3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a_n^5}{a_1^3}\right) \geqslant (1 + a_1^2) \cdot (1 + a_2^2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n^2).$$

Упражнение. (а) Докажите это неравенство через перестановочное неравенство.

(б) А теперь через обобщение неравенства $1 + \dfrac{a^2}{b} \geqslant \dfrac{(1+a)^2}{1+b}$. Какое обобщение? Сами догадайтесь!

Разумеется, пункт (а) проще и требует меньше изобретательности. Но мы можем написать и более сложное неравенство, которое из теоремы 3 очевидно, а доказать его напрямую совсем тяжело.

Теперь возьмемся за задачку 7 из списка в начале статьи. Зачеркнуть числа так, как сказано в условии задачи, — это то же самое, что расставить на доске n ладей, которые не бьют друг друга. Но расставить ладьи — это ведь, по сути дела, выбрать перестановку. А какая перестановка даст самое маленькое число? Самая неправильная.

Итак:

Теорема 4. Рассмотрим два набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и все возможные перестановки чисел второго набора. Значение выражения

$$\sum \frac{1}{a_i + b_{\sigma(i)}}$$

будет самым большим, когда наборы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2)}, \ldots, b_{\sigma(n)}$ одинаково упорядочены, а самым маленьким — когда эти наборы обратно упорядочены.

И теорема, и задача о таблице легко следуют из следующей леммы.

Лемма. $\dfrac{1}{k+x} + \dfrac{1}{m+x} \geqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{k+m+x}$.

Все детали доказательства леммы, теоремы и задачи про таблицу предоставляются читателю. Они не содержат новых нетривиальных идей.

Есть еще один способ решить задачу про таблицу, воспользовавшись известным неравенством

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Оно следует из теоремы 2. Но его можно доказать и через неравенство Коши-Буняковского, и с помощью двух неравенств Коши, и другими способами. Впрочем, мы отвлеклись от основной идеи.

Основная идея же, как наверняка уже сообразили самые догадливые из читателей, состоит в том, что хотя теоремы 1, 3, 4 и выглядят очень общими, но все они являются узкими частными случаями чего-то гораздо более общего. И у этого «гораздо более общего» масса таких частных случаев. Но для того чтобы сформулировать это «гораздо более общее», необходимо знать, что такое выпуклая функция.

Некоторые читатели, наверное, знакомы с выпуклыми функциями, но на всякий случай мы напомним определение и основные свойства.

Выпуклые и вогнутые функции

Надграфик функции $f(x)$ — это множество таких точек (x, y), для которых $y \geqslant f(x)$ (т. е. они находятся «над графиком»).

Выпуклая функция — это такая функция, у которой надграфик — выпуклое множество. Иначе говоря, если соединить две точки на графике или над графиком отрезком, то весь отрезок будет лежать в надграфике.

Достаточно потребовать этого для точек, принадлежащих графику. Иными словами, функция должна лежать под «хордой». Можно записать это алгебраически: если $0 < t < 1$, то

$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geqslant f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2).$$

Вогнутая функция — это такая функция, что, наоборот, подграфик (который определяется аналогично надграфику) является выпуклым множеством, т. е.

$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \leqslant f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2).$$

Функция может быть выпуклой или вогнутой как на всей прямой, так и на каком-то отрезке или луче.

Слова «выпуклая» и «вогнутая» очень похожи. Чтобы не запутаться, какая функция выпуклая, а какая вогнутая, можно думать о веселых и грустных функциях и вспоминать рот у нужного смайлика (см. рис. 1).

Примеры выпуклых функций: e^x, a^x, $|x|$, x^2, x^{2k} (k — целое положительное) на всей прямой, $\operatorname{tg}(x)$ на промежутке $[0; \pi/2)$, $1/x$ и x^n (n — целое) на положительных числах.

Примеры вогнутых функций: $\ln(x)$ и $\log_a(x)$ на положительных числах, $\sin(x)$ на отрезке $[0; \pi]$, $\cos(x)$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$, $\operatorname{arctg}(x)$ на положительных числах.

Вообще, функция x^α на положительных числах является вогнутой, если α лежит между 0 и 1, и выпуклой в противном случае.

Перечислим основные свойства выпуклых функций, начиная с определения. (Всё, что можно сказать о выпуклых функциях, можно сказать и о вогнутых. При этом нужно перевернуть знак неравенства.)

1. Надграфик — выпуклое множество.

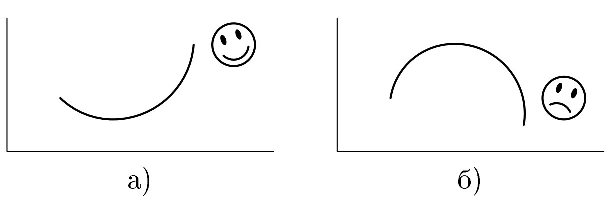


Рис. 1. *а) веселая (выпуклая) и б) грустная (вогнутая) функции*

2. Функция лежит под хордой: если $0 < t < 1$, то
$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \geqslant f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2).$$

3. Функция лежит над продолжением хорды, а именно, если $t < 0$ или $1 < t$, то
$$t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2) \leqslant f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2).$$

4. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geqslant f\Big(\dfrac{x_1+x_2}{2}\Big)$. Для непрерывной функции этого достаточно, чтобы функция была выпуклой, а в общем случае — нет. Но для любой выпуклой функции это свойство выполняется — достаточно подставить $t = 1/2$.

5. $\dfrac{k \cdot f(x_1) + m \cdot f(x_2)}{k+m} \geqslant f\Big(\dfrac{k \cdot x_1 + m \cdot x_2}{k+m}\Big)$. Здесь k, m — натуральные числа. Обобщение пункта 4 и частный случай пункта 2. На самом деле это свойство выводится (но сложным способом) из пункта 4.

6. $\dfrac{n \cdot f(x_1) - m \cdot f(x_2)}{n-m} \leqslant f\Big(\dfrac{n \cdot x_1 - m \cdot x_2}{n-m}\Big)$. Здесь $n > m$ — натуральные числа. Частный случай пункта 3.

7. Если у выпуклой функции есть производная, то функция лежит над касательной, т. е.
$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

8. Если у функции есть вторая производная, то она неотрицательна. Значит, если есть вторая производная и она отрицательна (хотя бы в одной точке), то функция уже не является выпуклой. С помощью этого свойства проще всего проверять выпуклость.

9. Неравенство Йенсена:
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n} \geqslant f\Big(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\Big).$$
Центр тяжести многоугольника, вершины которого лежат на графике функции, находится над графиком. А куда ему деться? Надграфик же выпуклый.

10. Неравенство Йенсена с положительными весами:
$$\frac{w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_n f(x_n)}{w_1+w_2+\dots+w_n} \geqslant f\Big(\frac{w_1x_1+w_2x_2+\dots+w_nx_n}{w_1+w_2+\dots+w_n}\Big).$$

11. $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \geqslant \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a} \geqslant f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$.

Чтобы было интересней, нужно самостоятельно проверить, какие функции являются выпуклыми, а какие — вогнутыми (а не верить автору на слово), и что вытекает из этого и из перечисленных выше свойств.

К примеру, неравенство Йенсена для экспоненты или логарифма становится неравенством Коши (среднее арифметическое не меньше, чем среднее геометрическое). Из всех n-угольников, вписанных в окружность, наибольшие площадь и периметр — у правильного (это следует из неравенства Йенсена для синуса). А из всех n-угольников, описанных вокруг данной окружности, наименьшие площадь и периметр — у правильного (это следует из неравенства Йенсена для тангенса).

Из пункта 7 следует, что $e^x \geqslant x + 1$, или, например, что $e^x \geqslant ex$. Отсюда можно понять, что больше: e^π или π^e. Ведь $e^{\pi/e-1} \geqslant \pi/e$.

Интересно также подставить x^n или e^x в пункт 11. Вообще, мы знаем много выпуклых и вогнутых функций, а у них много интересных свойств, и отсюда можно получить много замечательных неравенств.

Доказательства всех свойств, их формулировку и доказательство для вогнутых функций, множество частных случаев для конкретных функций и различные следствия из них читатель может получить сам в качестве упражнения. Чем больше времени вы потратите на это упражнение, тем больше оно доставит вам радости.

Кроме того, читатель должен сам понять, когда в неравенствах достигается равенство и чем отличается строго выпуклая функция (такая, как x^2) от нестрого выпуклой (такой, как $|x|$).

Общее неравенство

Итак, мы готовы сформулировать и доказать обобщение теорем 1, 3 и 4.

Теорема 5. Пусть f — непрерывная функция. Следующие условия эквивалентны.

(а) Значение выражения $f(a_1 + b_{\sigma(1)}) + f(a_2 + b_{\sigma(2)}) + \dots + f(a_n + b_{\sigma(n)})$ будет самым большим, когда числа упорядочены одинаково.

(б) Значение выражения $f(a_1 + b_{\sigma(1)}) + f(a_2 + b_{\sigma(2)}) + \dots + f(a_n + b_{\sigma(n)})$ будет самым маленьким, когда числа обратно упорядочены.

(в) Если $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, то $f(a_1+b_1)+f(a_2+b_2) \geqslant f(a_1+b_2)+f(a_2+b_1)$.

(г) f выпукла.

Ну и конечно, то же самое с обратным знаком.

Теорема 5$'$. Пусть f — непрерывная функция. Следующие условия эквивалентны.

(а) Значение выражения $f(a_1 + b_{\sigma(1)}) + f(a_2 + b_{\sigma(2)}) + \dots + f(a_n + b_{\sigma(n)})$ будет самым большим, когда числа обратно упорядочены.

(б) Значение выражения $f(a_1+b_{\sigma(1)})+f(a_2+b_{\sigma(2)})+\cdots+f(a_n+b_{\sigma(n)})$ будет самым маленьким, когда числа упорядочены одинаково.

(в) Если $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, то $f(a_1+b_1)+f(a_2+b_2) \leqslant f(a_1+b_2)+f(a_2+b_1)$.

(г) f вогнута.

Если функция выпукла/вогнута только на каком-то промежутке, а не на всей прямой, нужно потребовать во всех пунктах предыдущих теорем, чтобы для всяких двух индексов i, k величина a_i+b_k принадлежала промежутку, на котором функция выпукла/вогнута.

Доказательство. Пункт (в) является частным случаем пункта (а) и частным случаем пункта (б) при $n=2$.

Но и обратно: из пункта (в) выводятся пункты (а) и (б) при помощи сортировки. Это мы уже делали.

Осталось установить эквивалентность пунктов (в) и (г).

Обозначим $x=a_2+b_2$, $k=a_1-a_2$, $m=b_1-b_2$. Тогда формула (в) приобретает вид $f(x+k+m)+f(x) \geqslant f(x+k)+f(x+m)$.

Подставим $k=m$ и получим одно из свойств выпуклой функции (номер 4 в нашем списке). Оно вообще-то слабее выпуклости, но для непрерывных функций эти два свойства равносильны. Значит, из (в) следует (г).

Чтобы из (г) вывести (в), нам понадобится взглянуть на картинку (рис. 2).

На графике отмечено 4 точки:

$$(x, f(x)), \quad (x+k, f(x+k)), \quad (x+m, f(x+m)), \quad (x+k+m, f(x+k+m)).$$

Две средние точки лежат под хордой, соединяющей две крайние точки $(x, f(x))$ и $(x+k+m, f(x+k+m))$ — ведь функция лежит под хордой. Значит, середина отрезка, соединяющего две средние точки — а она имеет координаты $\left(\frac{x+k+x+m}{2}, \frac{f(x+k)+f(x+m)}{2}\right)$, — лежит под отрезком, соединяющим две крайние точки. Середина верхнего отрезка

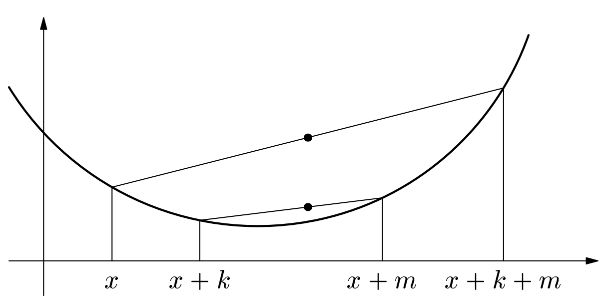


Рис. 2.

$\left(\frac{x+k+x+m}{2}, \frac{f(x+k+m)+f(x)}{2}\right)$ имеет такую же абсциссу. Но она выше, чем середина нижнего отрезка! Значит,

$$\frac{f(x+k+m)+f(x)}{2} \geqslant \frac{f(x+k)+f(x+m)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Полностью аналогично доказывается теорема $5'$.

Упражнение. Подставьте выпуклую функцию e^x в теорему 5 и получите частный случай теоремы 1, когда числа в наборах положительны. Выведите общий случай из этого частного.

Упражнение. Подставьте вогнутую функцию $\ln(x)$ в теорему 5 и получите теорему 3.

Вот почему знаки неравенств в теоремах 1 и 3 разные: экспонента «веселая», а логарифм «грустный».

Упражнение. Подставьте $1/x$ в теорему 5 и получите теорему 4.

Упражнение. Подставьте функцию $\sqrt{x}$ (она грустная) в теорему 5 и получите новую теорему.

Упражнение. Поиграйте с другими функциями и получите еще много разных неравенств.

Монгольское неравенство

Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Тогда

$$\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_2+a_3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n+a_1}{2} \leqslant \\ \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \cdot \frac{a_2+a_3+a_4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}+a_n+a_1}{3} \cdot \frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

Условие $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ нельзя отбросить. Например, последовательность 100, 1, 100, 1, 100, 1, … не удовлетворяет этому неравенству.

В упоминавшейся выше статье [4] рассказана история этого неравенства и даны два сложных доказательства. Одно из них фактически доказывает обобщение монгольского неравенства.

Возьмем логарифм от обеих частей:

$$\ln\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) + \ln\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right) \leqslant \\ \leqslant \ln\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right) + \ln\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right) + \cdots \\ \cdots + \ln\left(\frac{a_{n-1}+a_n+a_1}{3}\right) + \ln\left(\frac{a_n+a_1+a_2}{3}\right).$$

Мы утверждаем, что это правильно не только для логарифма, но и для любой грустной функции. А для любой веселой функции правильно такое же неравенство, но с противоположным знаком.

Так вот, в статье Храброва это доказывается через неравенство Караматы, которое является общим неравенством для выпуклых функций. У нас есть свое, не менее общее, неравенство для выпуклых функций, а именно теорема 5. Значит, можно попробовать вывести обобщение монгольского неравенства из теоремы 5.

Это примерно то же самое, что и вывести само монгольское неравенство из теоремы 3.

Мы для наглядности разберем частный случай (вывод монгольского неравенства из теоремы 3), а общий случай делается точно так же.

Доказательство монгольского неравенства. Пусть

$$x_1 = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{6}\,,\ x_2 = \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{6}\,,\ \ldots,\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{3} + \frac{a_n}{6}\,,\ x_n = \frac{a_n}{3} + \frac{a_1}{6}\,,$$
$$y_1 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{3}\,,\ y_2 = \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{3}\,,\ \ldots,\ y_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{6} + \frac{a_n}{3}\,,\ y_n = \frac{a_n}{6} + \frac{a_1}{3}\,.$$

Тогда монгольское неравенство приобретает вид

$$(x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2)\cdot\ldots\cdot(x_n+y_n) \leqslant (x_1+y_2)\cdot(x_2+y_3)\cdot\ldots\cdot(x_n+y_1)$$

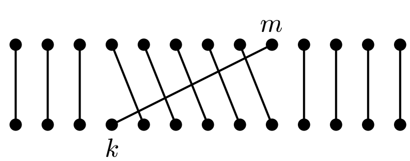
Заметим, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots \geqslant x_{n-1}$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant \cdots \geqslant y_{n-1}$.

Но, к сожалению, мы не можем сказать, что $x_{n-1} \geqslant x_n$ или $y_{n-1} \geqslant y_n$, — это просто неверно. Мы можем только сказать, что $x_1 \geqslant x_n$, а $y_{n-1} \leqslant y_n$.

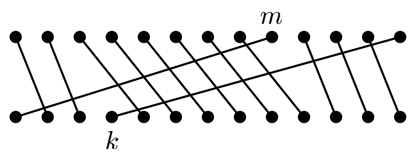
Если мы отсортируем наборы чисел по убыванию, то число x_n займет в списке иксов место m (не первое), а число y_n займет в списке игреков место k (не последнее).

Заметим, что $x_i \geqslant y_i$ при $i \leqslant n-1$, но $x_n \leqslant y_n$. Значит, место x_n в списке иксов не ближе к началу, чем место y_n в списке игреков, т. е. $k \leqslant m$.

Перестановка, представляющая левую часть, будет выглядеть так:



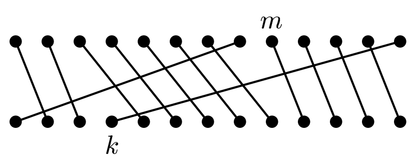
(самый большой с самым большим, второй со вторым и т. д., но номер m с номером k). А перестановка из правой части выглядит вот так (проверьте):



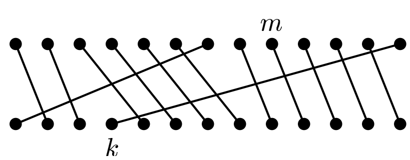
И ни одна из этих перестановок не является самой правильной или самой неправильной. Значит, монгольское неравенство не следует из теоремы 3. Увы. Мы похвастались, что из наших общих теорем следует монгольское неравенство, а оно из них не следует.

Но мы не сдадимся. Вспомним не формулировку, а доказательство теоремы 3, которое, как отмечено выше, аналогично доказательству теоремы 1. Там мы «улучшали» перестановку, и значение менялось монотонно.

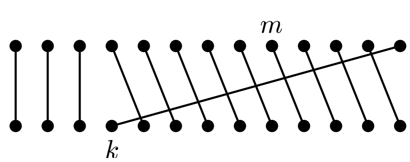
Во второй перестановке верхнее m связано с нижним 1, а верхнее $m-1$ связано с нижним $m+1$. Это «неправильно». Давайте поменяем их местами.



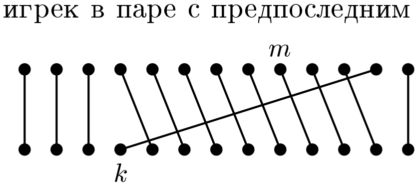
Теперь верхнее $m-1$ связано с нижним 1, а верхнее $m-2$ связано с нижним m. Это опять «неправильно». Давайте поменяем и их местами.



И так далее, пока самый большой игрек не окажется в паре с самым большим иксом.



Теперь k-й по величине игрек оказывается в паре с самым маленьким иксом. А последний игрек в паре с предпоследним иксом. Улучшим это.



Сейчас k-й игрек оказывается в паре с $(n-1)$-м иксом, а $(n-1)$-й игрек в паре с $(n-2)$-м иксом. Улучшим и это. Так за несколько шагов придем к первой перестановке.

Итак, хотя первая перестановка и не «самая правильная», а вторая не «самая неправильная», но первая перестановка «правильнее», чем вторая. А логарифм — функция грустная, значит, левая часть неравенства меньше правой. Что и требовалось доказать.

(Мораль такова: нужно знать не только формулировки теорем, но и их доказательства).

Функция $\ln(1+e^x)$

Вспомним неравенство номер 5 из списка в начале статьи:

$$\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geqslant(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n).$$

Перед тем как его доказывать, мы умножили его на знаменатель. Но, как заметил Илья Гринглаз, его можно доказать и напрямую. А именно, $\prod\left(1+b_{\sigma(i)}/a_i\right)$ достигает минимума при самой правильной, а максимума при самой неправильной перестановке. Это тоже обобщение нашего неравенства, и оно эквивалентно теореме 3. Обозначая $c_i=1/a_i$, приходим к выводу, что $\prod\left(1+c_i\cdot b_{\sigma(i)}\right)$ достигает максимума при одинаковом, а минимума — при обратном порядке.

Этот факт, в свою очередь, эквивалентен выпуклости функции $\ln(1+e^x)$.

Выпуклость функции $\ln(1+e^x)$ эквивалентна неравенству Йенсена для этой функции, т. е.

$$\ln\left(1+e^{\sum x_i/n}\right)\leqslant\frac{\sum\ln(1+e^{x_i})}{n}.$$

Применим экспоненту и получим $1+\sqrt[n]{\prod a_i}\leqslant\sqrt[n]{\prod(1+a_i)}$, где $a_i=e^{x_i}$. А это — неравенство Гюйгенса (о неравенстве Гюйгенса см. [1]). Его легко доказать напрямую. Если возвести неравенство в n-ю степень, то оно легко разобьется в сумму неравенств, которые следуют из неравенства Коши.

Так неожиданно оказывается, что теорема 3 эквивалентна неравенству Гюйгенса. Мы не станем доказывать утверждения этого параграфа, а оставим их читателям в качестве упражнений.

Список литературы

[1] Балк М. Б., Паравян Н. А. *Неравенства Гюйгенса и их применение* // Математика в школе, 1974. №2. С. 70–74.

[2] Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения*. М.: Мир, 1983.

[3] Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. *Неравенства*. М.: ИЛ, 1948.

[4] Храбров А. И. *Вокруг монгольского неравенства* // Математическое просвещение, сер. 3, 2003. Вып. 7. С. 149–162.

Л. В. Радзивиловский, алгоритмист, Aspectus, Petah-Tikva, Israel.

E-mail: `levr78@hotmail.com`
ICQ: 129069668