Нам пишут

Более короткие решения задач из задачника «Математического просвещения»

И. И. Богданов

Задача 1.6б). (Автор решения — А. Бадзян.)

Предположим противное. Пусть z_0 — корень $P(x)$ аргумента α. Тогда $\operatorname{Arg} z_0^n \in (0,\pi)$ при любом $0 < n < \pi/\alpha$, т. е. $\operatorname{Im} z_0^n > 0$. Так как $Q(x)$ — неконстантный многочлен степени, меньшей π/α с неотрицательными коэффициентами, то $\operatorname{Im} Q(z_0) > 0$, т. е. $Q(z_0) \neq 0$ и $Q(x)$ не делится на $P(x)$. Противоречие.

Задача 7.3. (Автор решения — И. Богданов.)

Пусть $P(x)$ — минимальный многочлен матрицы AA^T, тогда

$$A^T P(AA^T)A = Q(A^T A) = 0,$$

где $Q(x) = xP(x)$. Таким образом, если λ — ненулевое собственное значение $A^T A$, то $Q(\lambda) = 0$, а, следовательно, и $P(\lambda) = 0$, т. е. λ — собственное значение AA^T. Обратное доказывается аналогично.

* * * * * *

От редколлегии

Напомним условие задачи 1.6: а) Дан многочлен $P(X)$. Для любого $X > 0$: $P(X) > 0$. Доказать, что что $P = Q/T$, где Q и T — многочлены с неотрицательными коэффициентами. б)* пусть P — квадратный трехчлен, α — аргумент его комплексного корня. Тогда степень Q не меньше $2\pi/\alpha$.

Решение А. Бадзяна оказалось для нас неожиданностью: ранее опубликованное решение задачи 1.6.б) занимает свыше двух страниц.

Мы призываем читателей присылать свои решения: ясные, понятные, с красивыми идеями и, по возможности, краткие (плохие решения мы и сами напишем).

Если Вы решили не буквально ту задачу, которая была опубликована в «Задачнике», а близкую к ней, то всё равно присылайте решение. Это может быть интересно само по себе, а кроме того, в условиях задач встречались ошибки.