

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

ВЫПУСК 14

Москва  
Издательство МЦНМО  
2010

УДК 51.009  
ББК 22.1  
М34

## Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Винберг Э. Б.	Вялый М. Н.
Гальперин Г. А.	Глейзер Г. Д.	Гусейн-Заде С. М.
Дориченко С. А.	Егоров А. А.	Ильяшенко Ю. С.
Канель-Белов А. Я.	Константинов Н. Н.	Прасолов В. В.
Розов Н. Х.	Сосинский А. Б.	Тихомиров В. М.
Френкин Б. Р.	Яценко И. В.	

Главный редактор: Э. Б. Винберг      Отв. секретарь: М. Н. Вялый

### Адрес редакции:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 301

(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: [matpros@mccme.ru](mailto:matpros@mccme.ru)      WEB-PAGE: [www.mccme.ru/free-books](http://www.mccme.ru/free-books)

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 14. —

М.: МЦНМО, 2010. — 288 с.

ISBN 978-5-94057-597-9

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, заметки по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-597-9

© МЦНМО, 2010.

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математический мир

- И. М. Гельфанд (2.09.1913 – 5.10.2009) . . . . . 5  
А. Пападопулос  
*О гиперболической геометрии и истории её признания* . . . . . 10

### Тема номера: многогранники Ньютона

- В. А. Гиморин, А. Г. Хованский  
*Многогранники и уравнения* . . . . . 30

### Наш семинар: математические сюжеты

- А. В. Боровик, О. М. Худавердян  
*Проекция Меркатора, логарифм и мореплавание* . . . . . 58  
И. Х. Сабитов  
*Решение циклических многоугольников* . . . . . 83  
В. О. Мантуров  
*Экскурс в теорию кос* . . . . . 107  
А. Б. Скопенков  
*Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта* . . . . . 143  
Е. И. Алексеева  
*Гиперболические треугольники максимальной площади с двумя заданными сторонами* . . . . . 175  
Ф. В. Петров, С. Е. Рукшин  
*О реализации расстояний* . . . . . 184  
Н. Николов  
*Теорема Лиувилля для субгармонических функций на  $\mathbb{Z}^2$*  . . . . . 192  
А. Ф. Гришин, О. Ф. Крижановский  
*Экстремальная задача для матриц и теорема Безиковича о покрытии* . . 196

### Конкурсы и олимпиады

- К. А. Кноп, Л. Э. Медников  
*Тест Клепцына: с компьютером и без него* . . . . . 204  
М. В. Балашов, И. И. Богданов, Р. Н. Карасев  
*Студенческие математические олимпиады МФТИ* . . . . . 214  
И. В. Аржанцев, В. И. Богачёв, А. А. Заславский, В. Ю. Протасов,  
А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков  
*Студенческие олимпиады мехмата МГУ* . . . . . 225  
А. Домошницкий, В. О. Бугаенко, А. Я. Канель-Белов  
*Математическая интернет-олимпиада для студентов* . . . . . 235  
*Московская математическая конференция школьников* . . . . . 239

**По мотивам задачника «Математического просвещения»**

И. И. Богданов  
*Нетранзитивные рулетки* . . . . . 240

Н. И. Белухов  
*О некоторых парах перспективных треугольников* . . . . . 256

А. А. Заславский  
*О вычислении объёма  $n$ -мерного шара* . . . . . 270

**Задачный раздел**

*Условия задач* . . . . . 272

*Решения задач из предыдущих выпусков* . . . . . 275

**Издательство МЦНМО: новинки** . . . . . 282

---

---

# Математический мир

---

---

И. М. ГЕЛЬФАНД (2.09.1913 – 5.10.2009)



Не стало Израиля Моисеевича Гельфанда, одного из самых выдающихся математиков прошедшего века. Математический мир осиротел. Умерла эпоха.

И. М. Гельфанд был воспитанником московской математической школы. Он был учеником Андрея Николаевича Колмогорова. Ему суждено было замкнуть список учеников Лузина и первого поколения его выдающихся «внуков».

О тех, кто оказал на него наибольшее влияние в начальные годы его творчества, Гельфанд сказал так: «Одним из наиболее важных моих учителей был Шнирельман — математический гений, умерший молодым. Затем были Колмогоров, Лаврентьев, Плеснер, Петровский, Понтрягин, Виноградов, Люстерник».

\* \* \* \* \*

В начале жизни Гельфанда было много необычного. Он родился 20 августа (2 сентября по новому стилю) 1913 года в небольшом местечке Красные Окна (ныне в Одесской области на Украине). В трудные двадцатые годы ему не довелось закончить школу. Он не получил и высшего образования. Он приехал в Москву шестнадцати с половиной лет. Это случилось, как он сказал в одном интервью, «в результате некоторых трудностей, возникших в моей семье». Некоторое время в Москве Гельфанд был безработным, потом был одним из служащих в Ленинской библиотеке. С девятнадцати лет он стал посещать семинары Московского университета и поступил в аспирантуру к Андрею Николаевичу Колмогорову. Кандидатскую диссертацию он защитил в 1935 году и стал работать на механико-математическом факультете МГУ. В 1940 году он защитил докторскую диссертацию, в которой были заложены начала теории нормированных колец (ныне их называют банаховыми алгебрами). Создание этой теории сразу выдвинуло Гельфанда в число ведущих математиков своего времени.

Гельфанд прочитал на механико-математическом факультете множество курсов: линейной алгебры, теории уравнений с частными производными, вариационного исчисления, интегральных уравнений. Он был блистательным лектором — многие называют его лучшим лектором среди тех, кого им доводилось слышать. Его перу принадлежит множество книг, по которым учились и продолжают учиться математики всего мира — это учебник по линейной алгебре и написанные в соавторстве с коллегами монография по нормированным кольцам, учебник по вариационному исчислению, серия монографий по теории обобщённых функций, монография «Дискриминанты, результаты и многомерные детерминанты».

В течение полувека действовал знаменитый семинар Гельфанда, посвящённый «всей математике», один из самых плодотворных семинаров в истории науки.

Долгое время Гельфанд работал в Отделении прикладной математики при Математическом институте им. В. А. Стеклова, где выполнял работы большой государственной важности: он возглавлял группу учёных, которые проводили расчёты, связанные с созданием водородной бомбы. В шестидесятые годы Иван Георгиевич Петровский открыл для Гельфанда лабораторию при Московском университете, где основное внимание уделялось проблемам медицины и биологии. Гельфанд был основателем и в течение многих лет главным редактором замечательного журнала «Функциональный анализ и его приложения». В годы, когда И. М. Гельфанд был президентом Московского математического общества, это общество достигло высшей степени своего развития.

К особенностям творчества Гельфанда следует отнести его поразительную разносторонность. Нелегко назвать какую-либо из фундаментальных

отраслей математики, в которых Гельфанд не имел бы основополагающих результатов. Он был всемирно признанным мировым лидером в функциональном анализе, теории групп Ли и теории представлений, и невозможно не отметить его вклада в алгебру, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, теорию дифференциальных уравнений, математическую физику, численный анализ, приложения к нефизическим наукам. Среди секций математических конгрессов лишь по математической логике у Гельфанда нет исследований, которые могли бы дать ему право на доклад на математическом конгрессе.

Ещё одна особенность гельфандовской судьбы — беспрецедентная длительность творчества на уровне высших достижений. Как правило, творческий потенциал учёного подходит к концу, когда ему исполняется 60 лет, а интенсивная творческая деятельность длится два, три, редко четыре десятилетия. Научная биография Гельфанда длилась свыше семидесяти лет! Он начал свои исследования на пороге своего двадцатилетия. В 2003 году в США состоялась конференция “The Unity of Mathematics”, приуроченная к девяностолетию И. М. Гельфанда. На конференции выступили с докладами Д. Каждан, Р. Дийкграаф, А. Бейлинсон, В. Дринфельд, Г. Люстиг, М. Атья, К. Вафа, А. Конн, А. Шварц, Т. Сейберг, С. – Т. Яо, Д. МакДафф, Н. Некрасов, Л. Фаддеев, М. Хопкинс, М. Концевич, С. Новиков, И. Зингер, П. Сарнак, Б. Костант, Д. Гейтсгори, А. Вершик, И. Бернштейн. На этой конференции 2 сентября, в день своего девяностолетия, выступил с докладом и сам юбиляр. Его доклад назывался “Mathematics as an adequate language”. Вот план этого доклада: 0. Introduction. 1. Noncommutative Multiplication. 2. Addition and Multiplication. 3. Geometry. 4. Fourier Transform, Analytic Functionals, and Hypergeometric Functions. 5. Applied Mathematics, Blow-up and PDE's. (Таким образом, в докладе отражены современные разделы алгебры, теории чисел, геометрии, анализа, уравнений с частными производными и прикладной математики.) В начале доклада Израиль Моисеевич произнёс такие слова: «Я не ощущаю себя пророком. Я лишь ученик (I do not consider myself a prophet. I am simply a student.) Всю жизнь я учился у великих математиков, таких как Эйлер или Гаусс, у моих старших и младших коллег, у моих друзей и сотрудников, но более всего у моих учеников».

Метод работы Гельфанда — диалогический. Он почти никогда не работал в одиночестве, а со своими студентами, сотрудниками и коллегами. Вот неполный список его соавторов (сохраняя примерный временной порядок): Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, М. А. Наймарк, А. М. Яглом, С. В. Фомин, Б. М. Левитан, З. Я. Шапиро завершили своё образование до Второй мировой войны; М. И. Граев, М. Л. Цетлин, В. Б. Лидский, Л. А. Диккий, О. В. Локуциевский — в военные и первые послевоенные годы; Ф. А. Березин, И. И. Пятацкий-Шапиро, Р. А. Минлос, А. Г. Костюченко,

Н. Н. Ченцов, А. М. Вершик, А. А. Кириллов, Ю. И. Манин, С. Г. Гиндикин, Д. Б. Фукс учились в сороковые и пятидесятые годы; И. Н. Бернштейн, Д. А. Каждан, А. М. Габриэлов, С. Ретах — в шестидесятые; В. А. Васильев, А. Н. Варченко, А. Б. Гончаров, И. Я. Дорфман, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов, В. В. Серганова, Б. Л. Фейгин — в семидесятые и восьмидесятые годы. Гельфанд, утверждая важность диалога в поисках истины, ссылаясь на диалоги древних и на современного философа Мартина Бубера, написавшего книгу «Я и Ты».

Существует две основных творческих манеры у выдающихся математиков: одни принадлежат к числу «решателей», другие относятся к числу «теоретиков». Гельфанд тяготел к созданию теорий. Его творческий путь подразделяется на этапы, когда он со своими соавторами концентрировался на создании отдельных больших глав математики. Вот примерный список изучаемых тем: в тридцатые годы это был функциональный анализ, в сороковые — теория представлений, в пятидесятые — обобщённые функции, в шестидесятые — интегральная геометрия, в семидесятые — когомологии векторных полей, в восьмидесятые и девяностые — гипергеометрические функции и некоммутативная теория.

\* \* \* \* \*

Израиль Моисеевич имеет очень большие заслуги в области математического просвещения в нашей стране. Он был среди основателей школьных математических кружков при Московском университете; он принимал активнейшее участие в проведении первых Московских математических олимпиад; он основал Заочную математическую школу; он был инициатором и основным соавтором многих замечательных брошюр, обращённых к школьникам; он был среди основоположников московской математической школы №2.

В полувековой юбилей этой школы, в 2006 году, Гельфанд обратился к школьникам с приветствием, в котором выразил некоторые свои сокровенные мысли. Там есть такие слова: «Я сам многому научился, работая с ребятами во Второй школе. Работая со школьниками, я лучше понял, что нельзя интересоваться одной математикой и что математика это не спорт. [...] Математик — тот, кто понимает. Надо не просто уметь решать трудные задачи, а понимать математику. [...] Я хочу отметить четыре важнейшие черты, общие для математики, музыки и других наук и искусств: первое — красота, второе — простота, третье — точность и четвёртое — безумные идеи.»

Гельфанд обладал редчайшим даром активного интереса к людям, особенно к детям. Вот пример. Лена Васильева, выпускница второй школы, ныне Елена Юрьевна Васильева, выдающийся врач, профессор кафедры кардиологии, вспоминает. «Мне повезло — поскольку родители дружили



с И. М., он много занимался со мной математикой. Пока это были отдельные устные задачи — про взвешивание монет и т. п., всё шло нормально. Но как-то, когда я была во втором классе, И. М. решил заглянуть в мои школьные тетради и пришёл в ужас: «Мы не будем решать задачи, пока ты не научишься красиво писать!» И тут же, отложив всё, более важные дела, он стал вместе со мною писать ряды единиц, двоек, троек. . . »

И ещё об одном нельзя не сказать: очень многим Израиль Моисеевич оказывал существеннейшую помощь в трудные минуты их жизни. Если речь в даже не очень большой компании заходит о Гельфанде, найдётся человек, который расскажет, как Израиль Моисеевич по первому известию о том, что над чьей-то жизнью нависла угроза, немедленно, отложив всё, бросался организовывать для него самую квалифицированную врачебную помощь. Число людей, которые обязаны ему спасением своей жизни, очень велико.

Когда Гельфанду было уже за сорок, судьба наградила его сыном, очаровательным мальчиком. Гельфанд безумно любил своего сына. Однако жизнь маленького Саши очень рано оборвалась от страшной неизлечимой болезни. Со смертью Саши для Гельфанда осиротело все человечество, и он стал, наряду с математическими проблемами, решать проблемы медицины и биологии. Общеизвестно, что его медицинские и биологические семинары сыграли выдающуюся роль в развитии этих наук.

Для меня нет сомнения в том, что имя великого учёного — И. М. Гельфанда — не будет забыто, доколь в подлунном мире жив будет хоть один человек, кому дороги красота, простота, точность и безумные идеи.

*В. М. Тихомиров*

# О гиперболической геометрии и истории её признания

А. Пападопулос

В 2010 г. в серии “Heritage of European Mathematics”, издаваемой Европейским математическим обществом, опубликован английский перевод последней работы Н. И. Лобачевского «Пангеометрия»<sup>1)</sup> с обширными комментариями переводчика проф. А. Пападопулоса (Страсбург). С любезного разрешения автора и издателя мы публикуем выполненный Б. Р. Френкиным русский перевод помещённой в этом издании статьи А. Пападопулоса “On hyperbolic geometry and its reception”. Читатель узнает из неё много интересных подробностей об истории неевклидовой геометрии и её признания. В частности, автор приводит документированные свидетельства того, что и в начале XX в., когда неевклидова геометрия получила впечатляющие приложения в теории автоморфных функций и теории чисел, находились математики, отказывавшиеся её признавать. Это весьма поучительно как пример непризнания научной теории людьми, не понимающими её смысла (или даже не желающими его понять). Так, в наше время есть люди, не признающие теории относительности или эволюционной теории Дарвина.

Э.Б. Винберг

Создание неевклидовой геометрии можно считать важнейшим достижением геометрии девятнадцатого века.<sup>2)</sup>

Ниже я напомним некоторые факты, относящиеся к этому событию и его последствиям, уделив особое внимание тому, как воспринималась неевклидова геометрия в первые годы после смерти Лобачевского.

---

A. Papadopoulos. On hyperbolic geometry and its reception. В кн.: Nikolai I. Lobachevsky. Pangeometry. Ed. by A. Papadopoulos. (Н. И. Лобачевский. Пангеометрия. Под ред. А. Пападопулоса.) Herit. Eur. Math., Eur. Math. Soc., Zürich, 2010. P. 90–115. Перевод Б. Р. Френкина.

<sup>1)</sup>Русское издание «Пангеометрии» Н. И. Лобачевского, как и других его работ, см. в [2]. — Прим. перев.

<sup>2)</sup>Напомним суждение Давида Гильберта: «Обратимся к основам анализа и геометрии. Наиболее значительными и важными событиями последнего столетия в этой области являются, как мне кажется, арифметическое овладение понятием континуума в работах Коши, Больцано, Кантора и открытие *неевклидовой* геометрии Гауссом, Бойяи и Лобачевским.» [8, с. 23].

Как известно, путь к гиперболической геометрии был извилист, причём огромное количество энергии было потрачено на попытки доказать ошибочное утверждение, а именно что постулат Евклида о параллельных следует из других аксиом. Доказательство этого ложного утверждения было главной заботой многих первоклассных геометров в течение почти двадцати веков. Некоторые из этих геометров опубликовали свои «доказательства», а затем отвергли их, другие же от них не отказались. Многие примеры хорошо известны. Не столь известный пример относится к Эйлеру, попытавшемуся дать два «доказательства» постулата о параллельных. О них сообщает его доверенный ученик и родственник Николай Фусс. Тексты, написанные рукой Фусса, который был также помощником Эйлера и постоянным секретарём Санкт-Петербургской академии наук в течение многих лет, обнаружены в 1961 г. Они анализируются в книге Пона «L'Aventure des parallèles» («Приключения параллельных») [32, с. 281–282]. Первая попытка Эйлера основана на допущении, что геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой, есть прямая (точнее, объединение двух прямых), а вторая — на существовании подобных треугольников. Как известно, оба утверждения равносильны постулату Евклида о параллельных. Упомянем также эпизод с Лагранжем, который в конце жизни представил во Французскую академию наук мемуар с «доказательством» постулата о параллельных, но в последний момент прервал чтение и забрал рукопись со словами «Il faut que j'y songe encore» («Я должен подумать ещё»). Об этой истории сообщает Барбарен в «Géométrie non-Euclidienne» («Неевклидовой геометрии») [12, с. 15], а также Бонола в «Non-Euclidean Geometry» («Неевклидовой геометрии») [18, с. 52] со ссылкой на де Моргана. О том же событии подробнее говорит Пон в «L'Aventure des parallèles» [32, с. 231–234], где анализируется и рукопись Лагранжа.

Известно также, что все три создателя неевклидовой геометрии, а именно Лобачевский, Бойяи и Гаусс, в некоторый период своей жизни потратили несколько лет в попытках доказать постулат о параллельных.

П. Штэкель и Ф. Энгель в своей статье о Гауссе и Бойяи [33] цитируют отрывок из автобиографии Яноша Бойяи, где он говорит, что до 1820 года искал доказательство постулата о параллельных. А. Шатле в [20, с. 136] утверждает, что Я. Бойяи через несколько лет после того, как его знаменитая «Наука о пространстве»<sup>3)</sup> вышла из печати, вернулся к попыткам доказать постулат Евклида о параллельных и даже считал некоторое время, что ему удалось найти доказательство.

Что касается Гаусса, можно процитировать его письмо к Фаркашу Бойяи в 1799 г.:

---

<sup>3)</sup>Русский перевод: Я. Больаи. Аппендикс. Перевод В. Ф. Кагана [4, с. 71–100]. — Прим. перев.

«Правда, я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство [V постулата], но это не доказывает в моих глазах ровно *ничего*». <sup>4)</sup>

Дж. Б. Холстед, который перевёл «Науку о пространстве» Бойяи на английский, пишет (см. [18]) на с. IX своего предисловия к этому переводу, процитировав выдержки из переписки Гаусса:

«Из этого письма мы ясно видим, что в 1799 г. Гаусс ещё пытался доказать, что евклидова система геометрии — единственная непротиворечивая и что именно эта система царит во внешнем пространстве нашего физического опыта. Первое ложно, второе никогда не удастся доказать.»

Розенфельд заключает из переписки Гаусса, что последний вплоть до 1816 г. всё ещё пытался доказать постулат о параллельных и лишь в 1817 г. пришёл к убеждению в недоказуемости этой аксиомы (см. [7, с. 197]).

Теперь обратимся к Лобачевскому.

Представляется, что во время обучения и по крайней мере до 1820 г. Лобачевский работал над доказательством постулата о параллельных (см. Энгель [21, с. 381]).

А. Васильев опубликовал в 1909 г. сборник учебных записей, сделанных студентом Казанского университета М. Темниковым на занятиях по геометрии, которые вёл Лобачевский в 1815–1816 и 1816–1817 учебных годах. Эти записи содержат принадлежащее Лобачевскому «доказательство» постулата о параллельных. Б. Л. Лаптев сообщает об этих же записях в своей «Теории параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского» [6]. В 1951 г. Лаптев опубликовал издание этих записей со своими комментариями. «Доказательство» постулата о параллельных, принадлежащее Лобачевскому, анализируется также Поном в его «L’Aventure des parallèles» [32].

Момент, когда Лобачевский прекратил свои попытки доказать постулат о параллельных и начал работать над новой геометрией, в которой он не выполняется, — это важная дата, но, к сожалению, она известна лишь приблизительно. В [39] на с. 415 и в [38] на с. 472 Вуцинич пишет следующее: «Б. Л. Лаптев на основании нового документального материала показывает, что уже в 1822 г. Лобачевский убедился в тщетности всех попыток получить доказательство постулата о параллельных и что, скорее всего, к 1824 г. он был поглощён построением новой геометрии». Хозел в [28] также цитирует Лаптева [6], согласно которому Лобачевский в 1823 г. прочёл курс геометрии, где заявил: «Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле

<sup>4)</sup>[7, с. 196]; в подлиннике см. [25, с. 159–160].

Математическими доказательствами».<sup>5)</sup> Хоузел отсюда делает вывод, что в тот момент Лобачевский ещё работал над доказательством постулата Евклида о параллельных. Лаптев в своей книге 1976 г. [5] утверждает, однако, что Лобачевский уже в 1817 г. оставил все попытки вывести постулат о параллельных из других постулатов.

На заседании Физико-математического общества при Казанском университете в 1826 г. Лобачевский представил статью на французском языке, озаглавленную “Exposition succincte des principes de la géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles” («Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»). В нашей книге<sup>6)</sup> воспроизведён относящийся сюда документ. Статья не сохранилась, и хотя её заглавие побуждает заключить, что она содержит новое «доказательство» постулата о параллельных, обычно предполагают иное. Розенфельд в своей «Истории неевклидовой геометрии» [7, с. 191] высказывает мнение, что во второй половине заглавия Лобачевский скорее подразумевал «строгое доказательство» «начал обыкновенной геометрии».

Таким образом, эта история непроста. Но в любом случае есть основания считать, что примерно в 1822–1823 гг. Лобачевский по крайней мере допускал существование геометрии, в которой евклидов постулат о параллельных не выполнен, а остальные постулаты верны.

Рассказы — вроде приведённых выше — о первоклассных математиках, в том числе создателях гиперболической геометрии, пишущих «доказательства» постулата о параллельных, могут вызвать улыбку, но в истории неевклидовой геометрии есть и невесёлая сторона. Она состоит в том, что для признания первых результатов, определивших основы теории, потребовался невероятно долгий срок, а их авторам пришлось испытать гораздо больше печали, чем радости. Три создателя теории, а именно Гаусс, Бойяи и Лобачевский, так и не получили при жизни должного признания за свои работы в этой области (а они прожили довольно долго после того, как сделали свои открытия). Разумеется, Гаусс был велик и при жизни обычно считался самым знаменитым из математиков того времени. Но неевклидова геометрия не могла ничего добавить к его славе, и в его первых биографиях работа в области гиперболической геометрии едва упоминается. По существу Гаусс никогда и не стремился к признанию своих результатов по гиперболической геометрии, и главная причина (по крайней мере, именно её он указывал в переписке с некоторыми своими друзьями) заключалась просто в том, что он хотел избежать полемики. Бойяи практически

---

<sup>5)</sup>[6, с. 203]. Источники цитаты: Н. И. Лобачевский. Геометрия. Казань, 1909; [2, т. II, с. 3–134]. — Прим. перев.

<sup>6)</sup>См. сноску в начале статьи. — Прим. перев.

перестал публиковаться как математик — с горьким чувством, что Гаусс украл его работу, — сразу после того, как работа Бойяи по неевклидовой геометрии появилась в виде 28-страничного приложения к работе его отца “*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentialiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici*” («Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики, элементарной и высшей, приспособленным для этого наглядным методом»). Он оставил несколько тысяч страниц рукописных заметок, которые были обнаружены и изучены после его смерти. Они содержат результаты (новые для своего времени) в самых разных областях, включая теорию чисел, аксиоматизацию математики и применение комплексных чисел в геометрии. Бойяи ныне считается гением. Но это признание стало посмертным. Точно так же и жизнь Лобачевского была трудной, а полное признание его достижений пришло лишь через несколько лет после его смерти.

Мемуар Лобачевского «О началах геометрии», который он представил на рецензию в Санкт-Петербургскую академию наук в 1832 г., получил отрицательный отзыв М. В. Остроградского, влиятельного члена академии. Жизнь Остроградского очень отличалась от жизни Лобачевского. Он был избран действительным членом Санкт-Петербургской академии наук в 1831 г. в возрасте 30 лет. До этого он уже получил известность в возрасте 24 лет, когда Коши высоко оценил его работу в своём “*Mémoire sur les Intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*” («Мемуар об определённых интегралах, взятых между мнимыми пределами»), Paris, 1825.<sup>7)</sup>

«Указав на то, что из двух определённых интегралов, на вычисление которых при помощи своего нового метода претендует г. Лобачевский, один уже известен и легко выводится при помощи интегрального исчисления, а другой неверен,<sup>8)</sup>

<sup>7)</sup>На с. 2 этого мемуара Коши пишет: «Молодой русский, наделённый большой проницаемостью и весьма искусный в анализе бесконечно малых — г. Остроградский, — занимающийся также применением этих интегралов и их преобразованием в обыкновенные интегралы, дал новое доказательство формул, которые я напомнил выше, и обобщил другие формулы, которые я привёл в девятнадцатой тетради *Journal de l’Ecole Royale Polytechnique*». Читая мемуар Лобачевского, Остроградский, который был специалистом по интегральному исчислению, не обратил внимания на геометрическое содержание статьи и в своей оценке учёл лишь два определённых интеграла, вычисленных Лобачевским. В «Истории неевклидовой геометрии» Розенфельда ([7, с. 191]) мы находим следующее изложение рецензии Остроградского, извлечённое из архивов Санкт-Петербургской академии:

<sup>8)</sup>Как отмечает Б. А. Розенфельд ([7, с. 192]), это «интеграл, зависящий от параметра, при различных значениях которого он принимает различные значения». Видимо, этим и объясняется замечание Остроградского. — Прим. перев.

г-н Остроградский замечает, кроме того, что работа выполнена с таким малым старанием, что большая часть её непонятна. Поэтому он полагает, что этот труд г-на Лобачевского не заслуживает внимания Академии».

Вуцинич в [39, с. 314] пишет, что после этой рецензии Остроградский и в дальнейшем продолжал жёстко критиковать эту работу Лобачевского.

После отрицательной рецензии Остроградского работа Лобачевского была опубликована в местном журнале «Казанский вестник» [3] и оставалась незамеченной в течение ряда лет. Розенфельд сообщает в [7, с. 201] о единственном русском математике — это был профессор Казанского университета П. И. Котельников, — который осознал значение работ Лобачевского и воздал ему должное при жизни. Розенфельд приводит следующую выдержку из актов речи под названием «О предубеждении против математики», произнесённой Котельниковым в Казанском университете в 1842 г.:

«При этом случае не могу умолчать о том, что тысячелетние тщетные попытки доказать со всей математической строгостью одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудили достопочтенного заслуженного профессора нашего университета г-на Лобачевского предпринять изумительный труд построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых — труд, который рано или поздно найдёт своих ценителей.»

Поддержка Котельниковым Лобачевского — это, действительно, «исключение, которое подтверждает правило».

Э. Б. Винберг пишет в своей заметке о Лобачевском [37], что геометрические работы Лобачевского подвергались осмеянию и воспринимались как странности уважаемого профессора и ректора университета.

Тем не менее Лобачевский продолжал работать и публиковаться по вопросам геометрии. По мнению В. Ф. Кагана, огромная преподавательская нагрузка и полная погружённость в административные дела, вероятно, предохранили Лобачевского от глубокой духовной депрессии, случившейся с Я. Бойяи и Ф. А. Тауринусом<sup>9)</sup> скорее всего потому, что их работы по неевклидовой геометрии не нашли признания при их жизни.

После враждебности, пренебрежения и даже насмешек, с которыми его математические работы были восприняты в России, Лобачевский решил писать статьи по-французски и по-немецки и послал свои рукописи в

---

<sup>9)</sup> Франц-Адольф Тауринус (1794–1874) — немецкий математик. В 1825 и 1826 гг. опубликовал две работы, содержавшие элементы неевклидовой геометрии.

западноевропейские журналы, ища признания на Западе. Довольно странно, что эти работы оставались незамеченными в течение нескольких лет после публикации. Было, однако, одно важное исключение: Гаусс заметил статью Лобачевского, опубликованную по-немецки, и впечатление было столь сильно, что он решил прочитать работы Лобачевского, написанные по-русски.<sup>10)</sup>

Теперь посмотрим, как развивались события спустя десяток лет после смерти Лобачевского.

Публикация в период 1860–1865 гг. переписки Гаусса с Шумахером, бесспорно, стала первым важным фактором, который привлек внимание мирового математического сообщества к работам Лобачевского или по крайней мере к его имени.

В 1865 г. А. Кэли опубликовал “Note on Lobatchewsky’s imaginary geometry” («Заметку о воображаемой геометрии Лобачевского») [19], где он рассматривает тригонометрические формулы Лобачевского, используемые в гиперболической геометрии, и проводит сравнение между этими формулами и тригонометрическими формулами сферической геометрии. Хотя, как обычно считают, Кэли не понял главных идей Лобачевского, заметка показывает, что работы Лобачевского уже становились известны математическому сообществу.

В 1872 г. В. В. Буняковский (1804–1889), член Санкт-Петербургской академии наук, написал статью по-французски, озаглавленную “Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non euclidienne” («Замечания о некоторых особенностях, присущих построениям неевклидовой геометрии»), в которой, как он утверждал, установлено противоречие между геометрией Лобачевского и наглядными представлениями о пространстве. Как сформулировал Розенфельд в [7, с. 192], хотя в статье Буняковского содержится критика работ Лобачевского, её отличие от прежних отзывов, написанных Остроградским и его учениками, состоит в том, что Буняковский с уважением говорит о таланте Лобачевского.

<sup>10)</sup>См. письмо Гаусса к Й. Ф. Энке в феврале 1841 г., опубликованное в его собрании сочинений [25, том 8, с.232]. Русский перевод [4, с. 117]: «Я начинаю довольно успешно читать по-русски и нахожу в этом большое удовольствие. Г. Кнорре прислал мне небольшой мемуар Лобачевского (в Казани), написанный по-русски, и как этот мемуар, так и небольшая книжка о параллельных линиях на немецком языке (о ней появилась весьма нелепая заметка в “Repertorium’e” Герсдорфа) возбудили во мне желание узнать больше об этом остроумном математике.» Вуцинич в своей книге “Science in Russian Culture” («Наука в русской культуре») [39] на с. 309 упоминает, что Гаусс выучил русский, читая книгу Буняковского «Основания математической теории вероятностей», «очень хорошо написанную работу». Г. Уолдо Даннингтон [40] утверждает, что причиной, по которой Гаусс изучал русский язык, было его желание прочитать работу Лобачевского по неевклидовой геометрии в подлиннике.



Полное признание работ Лобачевского и открытой им неевклидовой геометрии пришло в статье Дж. Батталлини “Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky” («О воображаемой геометрии Лобачевского») [13] (1867), в известной статье Э. Бельтрами “Saggio di Interpretazione della geometria non-Euclidea” («Опыт интерпретации неевклидовой геометрии») [14] (1868) и в работе Ф. Клейна “Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie” («О так называемой неевклидовой геометрии») [29] (1871). На статью Бельтрами обычно ссылаются в связи с тем, что в ней установлена непротиворечивость неевклидовой геометрии относительно евклидовой. Уэль перевёл её на французский, и в том же году она была опубликована в журнале “Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure”. Клейн узнал о работах Лобачевского на семинаре Вейерштрасса в Берлинском университете в 1870 г.

Во введении к статье Бельтрами “Saggio di Interpretazione della geometria non-Euclidea” автор пишет, объясняя её цель (цит. по [4, с. 180–181]):

«Мы старались, насколько позволяли наши силы, дать себе отчёт о результатах, к которым приводит учение Лобачевского, и затем, следуя приёму, вполне, по нашему мнению, согласному с хорошими традициями научного исследования, мы попытались отыскать реальное основание для этого учения, прежде чем признать для него<sup>11)</sup> необходимость нового порядка вещей и идей. Думаем, что это удалось нам для планиметрической части этого учения, но нам кажется невозможным сделать то же для остальной части.»

Во французском переводе статьи Батталлини, принадлежащем Уэлю (и одобренном Бельтрами), сказанное в последней цитированной фразе уточнено; в нём говорится следующее:

«Считаем, что достигли нашей цели в отношении планиметрической части, однако нам представляется невозможным достичь её в случае трёх измерений.»

На следующий год Бельтрами опубликовал другую статью на ту же тему под заглавием “Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante” («Основы теории пространств постоянной кривизны») [16]. Там он пишет (цит. по [4, с. 360]):

«Можно убедиться в том, что теория Лобачевского совпадает, за исключением терминов, с геометрией пространства трёх измерений постоянной отрицательной кривизны.»

---

<sup>11)</sup>Здесь исправлена имевшаяся в переводе неточность, за что мы благодарны А. Пападопулосу и его коллегам. — Прим. перев.

Б. Риман в своей вступительной лекции 1854 г. «О гипотезах, лежащих в основании геометрии»,<sup>12)</sup> где он подробно рассматривает три вида геометрий на поверхностях постоянной кривизны, ни разу не упоминает имени Лобачевского, хотя его наставник Гаусс знал о работах Лобачевского. Это может выглядеть удивительным, особенно если заметить, что Риман упоминает Лежандра и его безуспешные попытки доказать евклидов постулат о параллельных в качестве примера «мрака», по его выражению, которым геометрия была окутана со времён Евклида. Но тут следует вспомнить, что отождествление неевклидовой плоскости Лобачевского с поверхностью постоянной отрицательной кривизны было проведено лишь позже, а именно в работах Бельтрами [16] и Клейна [29], упомянутых выше. Лекция Римана была опубликована лишь в 1868 г., после его смерти.

Упомянем также в нашем рассказе статью Бельтрами “Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche” («О поверхностях вращения, которые служат образцом всех псевдосферических поверхностей») [15], в которой автор описывает так называемую *псевдосферу* — поверхность отрицательной постоянной кривизны, которая локально моделирует геометрию Лобачевского. Псевдосфера является поверхностью вращения в евклидовом трёхмерном пространстве, меридианом которой служит трактриса. Локальное поведение геодезических на псевдосфере, как установил Бельтрами, таково же, как у прямых на кусочке гиперболической плоскости. Это открытие было очень важным шагом в истории неевклидовой геометрии, поскольку доставило первый конкретный пример поверхности, которая вкладывается в евклидово пространство и локально изометрична гиперболической плоскости. Её универсальным накрытием является орицикл (поверхность, ограниченная орициклом) на гиперболической плоскости, и он не изометричен гиперболической плоскости. Вопрос существования поверхности в евклидовом пространстве, внутренняя геометрия которой такая же, как у гиперболической плоскости в целом, оставался открытым ряд лет и был в 1901 г., т. е. уже после смерти Бельтрами, окончательно решён Давидом Гильбертом, который показал, что не существует аналитической поверхности без особенностей, которая вкладывается в евклидово трёхмерное пространство и имеет такую же внутреннюю геометрию, как гиперболическая плоскость.<sup>13)</sup>

Что касается дальнейшего развития неевклидовой геометрии, следу-

<sup>12)</sup> Рус. перевод: В. Л. Гончаров [4, с. 309–341]. — Прим. перев.

<sup>13)</sup> Необязательность условия аналитичности вскоре была показана Г. Люткемейером в его гёттингенской диссертации “Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen” (1902). В действительности не существует  $C^2$ -дифференцируемого вложения гиперболической плоскости в  $R^3$ . Н. Кайпер показал в 1955 г., что существует  $C^1$ -вложение гиперболической плоскости в  $R^3$ . Отметим также, что

ет отметить другую работу, видимо не привлёкшую должного внимания. Она принадлежит Жозефу-Мари де Тилли (1834–1906), члену Королевской академии Бельгии и одновременно армейскому генералу. Де Тилли ввёл понятие расстояния как исходное в трёх геометриях: гиперболической, евклидовой и сферической. Он развивал аксиоматический подход к этим геометриям, основанный на метрических понятиях, — см., например, его “*Essai sur les Principes Fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*” («Очерк основных принципов геометрии и механики») [34] и “*Essai de Géométrie analytique*” («Очерк общей аналитической геометрии») [35].

Важно также отметить, что после первого периода увлечения гиперболической геометрией (около 1870 г.) сложилось мнение, что некоторые прежние попытки доказать постулат Евклида о параллельных (авторами их были, например, Валлис, Саккери, Ламберт, Лежандр) содержат ценные математические результаты. Несколько таких попыток строилось от противного, т. е. их авторы искали противоречие в следствиях из отрицания постулата Евклида о параллельных. Позже обнаружилось, что некоторые из этих следствий, найденных предшественниками гиперболической геометрии, вошли в число результатов, доказанных Лобачевским, Бойяи и Гауссом. Например, Бельтрами написал статью “*Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski*” («Итальянский предшественник Лежандра и Лобачевского») [17], которая реабилитировала “*Euclides ab omni naevo vindicatus*” («Евклид, очищённый от всех пятен») Саккери и включала выдержки из этой книги, содержащие различные теоремы, авторами которых ранее считались Лежандр, Лобачевский и Бойяи. В 1887 г. Джини Лория опубликовал статью, озаглавленную “*Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*” («Прошлое и настоящее основных геометрических теорий») [30], которая была опубликована по-немецки в 1888 г. в переводе Ф. Шутте. Лория в итоге расширил свою статью до 476-страничной книги с тем же названием, содержащей обзор развития геометрии с древности до первых лет двадцатого века. Большое значение имели также компилятивные труды Энгеля и Штэккеля “*Die Theorie der Parallelinien von Euklid bis auf Gauss*” («Теория параллельных прямых от Евклида до Гаусса») [22] и Бонолы “*Geometria non-euclidea, Esposizione storico-critica del suo sviluppo*” («Неевклидова геометрия. Историко-критический обзор её развития») [18].

Несмотря на весь прогресс, описанный выше и продолжавшийся до конца девятнадцатого века, неевклидова геометрия всё ещё оставалась сомнительной областью. Некоторые геометры не понимали её основных

---

существуют  $C^\infty$ -вложения гиперболической плоскости в  $R^5$  (этот результат получил Д. Блануча также в 1955 г.).

идей, а другие подвергали сомнению основания теории. Например, некоторым математикам трудно было воспринять тот факт, что площадь треугольника ограничена, а также что существуют треугольники с произвольно малой суммой углов, прямые без общих точек, не имеющие общего перпендикуляра, и так далее. Типичный математик рассматривал гиперболическую геометрию просто как логический курьёз, но были у неё и суровые противники. Приведём несколько примеров.

Ж. Барбарен в своей статье “La correspondance entre Houël et de Tilly” («Переписка между Уэлем и Тилли») [11, с. 50–61,] сообщает, что около 1870 г. Французская академия наук была буквально затоплена попытками доказать евклидов постулат и эти попытки были столь многочисленны, что для их рассмотрения академия учредила специальную “Commission des parallèles” («Комиссию по параллельным»). Вскоре в академии произошёл открытый конфликт между сторонниками и противниками неевклидовой геометрии, и после этого конфликта все обращения в академию по этому вопросу систематически возвращались их авторам [41]. Прошло несколько лет, прежде чем конфликт закончился. В своей книге “La science et l’hypothèse” («Наука и гипотеза») Пуанкаре отмечает, что во времена написания книги (1902 г.) Французская академия получала «не более» одного-двух новых доказательств [постулата о параллельных] в год ([9, с. 39]).

Дискуссия между сторонниками и противниками неевклидовой геометрии имела ответвления в физике, использовались также этические и философские аргументы. Мораль была поколеблена, поскольку принципы, веками считавшиеся неопровержимыми (это были математические принципы!), объявлялись устаревшими.

Математик Жюль Андраде рассказывает в статье, опубликованной в 1900 г. в “l’Enseignement mathématique” [10], что на одном важном собрании (о котором он не сообщает подробнее) он слышал следующее утверждение:

«Сама мораль заинтересована в доказательстве евклидова постулата, так как если достоверность покидает даже математиков, то, увы, что станет с моральными ценностями!»

Приведём также отрывок из романа Достоевского «Братья Карамазовы» (1880 г.), где существование неевклидовой геометрии ставит теологические проблемы:

(Иван говорит своему брату Алёше [1, с. 363]) «... Объявляю, что принимаю Бога прямо и просто. Но вот, однако, что надо отметить: если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он её по эвклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трёх измерениях пространства. Между тем находились и находятся

даже и теперь геометры и философы и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная, или ещё обширнее, — всё бытие было создано лишь по эвклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две параллельные линии, которые по Эвклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть, и сошлись бы где-нибудь в бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно сознаюсь, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум эвклидовский, земной, а потому где нам решать о том, что не от мира сего.»

Когда же закончился конфликт между сторонниками и противниками неевклидовой геометрии? Ответ не вполне ясен. В своей биографической заметке 1895 г. о Лобачевском [27] Дж. Б. Холстед пишет следующее:

«День испытания [неевклидовой геометрии] благополучно прошёл, и можно с большим успехом искать квадратуру круга и изобретать вечный двигатель, чем делать малейшие возражения против неевклидовой геометрии.»

К этому утверждению надо относиться с осторожностью, поскольку в то время, когда Холстед писал это, ещё существовали яростные противники гиперболической геометрии.

В первых пяти томах журнала “American Mathematical Monthly” (основан в 1894 г.) Холстед частями публиковал статью, озаглавленную “Non-Euclidean geometry: Historical and expository”. («Неевклидова геометрия: история и обзор»). Статья в основном состоит из его перевода книги Саккери “Euclides ab omni paevo vindicatus”. Эти же выпуски содержат несколько статей, цель которых — указать противоречия в неевклидовой геометрии. Например, в томе 1 (1894 г.) этого журнала, в короткой заметке под названием “Easy corollaries in non-Euclidean geometry” («Простые следствия неевклидовой геометрии») [26] Холстед писал, что «в геометрии Лобачевского возможен треугольник, сумма углов которого отличается от развёрнутого угла меньше чем на любой данный сколь угодно малый угол». В более позднем выпуске в том же году (с. 247–248) Дж. Н. Лайл опубликовал заметку, которая начинается с фразы Холстеда в качестве предположения, а далее автор рассуждает на дюжине строк и завершает следующими словами: «Поскольку заключение абсурдно, предположение, из которого оно выведено, также должно быть абсурдно». Тот же автор в другой статье того же тома (с. 426–427) пишет, что «Лобачевский в своей „Теории параллельных“ делает выводы из ложных посылок с таким правдоподобием и утончённой софистикой, что склоняет многих принять и посылки, и выводы в качестве серьёзной геометрии».

Легко привести другие выдержки такого рода из статей противников неевклидовой геометрии, опубликованных в серьёзных математических журналах. Такая ситуация сохранялась до конца первого десятилетия двадцатого века.

Мишель Фролов, математик и одновременно генерал французской армии, автор книги “La théorie des parallèles démontrée rigoureusement, Essai sur le livre I des éléments d’Euclide” («Теория параллельных в строгом изложении, очерк книги I „Начал“ Евклида»), (Базель, 1893 г.; второе издание, 1899 г.) написал несколько статей против сторонников неевклидовой геометрии в журнале “l’Enseignement Mathématique”. Приведу здесь большую выдержку из одной такой статьи, поскольку она вполне даёт представление о том, как значительная часть математиков относилась к гиперболической геометрии в начале двадцатого века.

«Неевклидова геометрия, созданная Гауссом и его коллегами Лобачевским и Бойяи и, согласно известному математику М. Ж. Бертрону, тридцать лет назад не имевшая всерьёз убеждённых последователей, в наши дни весьма в моде. Среди её сторонников можно найти членов Академий наук, преподавателей университетов и колледжей. Она применяется для интегрирования дифференциальных уравнений; существует также надежда решить с её помощью проблему трёх тел. Её последователями с целью развития и пропаганды этого воззрения опубликованы сотни статей, самая характерная черта которых — полнейшая путаница между прямыми и кривыми линиями,<sup>14)</sup> вследствие чего полностью исчезает понятие прямой линии, без которого изучение Геометрии становится призрачным. Это всё равно что учиться музыке, не имея ушей. Но это не всё: создаётся геометрия существ без ширины и обитателей пустых сфер.<sup>15)</sup> Представляются диссертации по этой теории. Присуждаются поощрительные премии и почётные звания за работы по усовершенствованию этой теории.<sup>16)</sup> Наконец, ей придают *большое философское значение, поскольку, согласно её последователям, показав несостоятельность кантовских представлений*

<sup>14)</sup>Замечание Фролова в некотором смысле оправданно, но такова участь гиперболической геометрии; изображая гиперболические прямые на (евклидовом) листе бумаги, мы чертим их как кривые линии, так как иначе либо расстояние между ними постоянно, либо эти прямые выглядят пересекающимися.

<sup>15)</sup>Здесь имеются в виду известные слова Пуанкаре из его статьи “Les géométries non euclidiennes” («Неевклидовы геометрии») [31], повторенные в книге “La science et l’hypothèse” («Наука и гипотеза») [9, с. 40].

<sup>16)</sup>Вероятно, имеются в виду премия Лобачевского и три сопровождающих её «похвальных отзыва», учреждённые в 1897 г.

о пространстве, эта теория до основания разрушила критическую метафизику (цитата из книги P. Mansion “Métageométrie” («Метагеометрия»), Mathesis, октябрь 1896 г., с. 41).

Налицо весьма тревожные симптомы, заставляющие опасаться, что эта теория не замедлит завоевать место в преподавании, так же как она уже проникла в некоторые трактаты по геометрии. Что проку утверждать, что нео-геометры не имеют другой цели, кроме тренировки в анализе различных гипотез. Представляется, что гипотезы в математике никогда не следует признавать и что специализированные журналы, посвящённые преподаванию математики, должны не откладывая обратиться к важному вопросу, который можно выразить в очевидной альтернативе: верна или ложна неевклидова геометрия?

[. . .] Неевклидова геометрия — лишь гипотетическое воззрение, основанное на отрицании аксиомы XI или постулата Евклида, который более двадцати веков обоснованно считался очевидной истиной, подтверждённой всеми физическими фактами. Эта гипотеза, которую ничто не подтверждает, немедленно привела к цепи сплошных парадоксов, которые, как казалось их открывателям, не содержат противоречия. Они думали, что создали чудесную теорию, призванную изменить лицо Математики и пролить на неё потоки обильного света.

Её приверженцы тут же постарались сделать её неуязвимой, находя всё новые доказательства недоказуемости евклидова постулата. Напротив, профессиональные математики ничего не сделали, чтобы защитить Геометрию Евклида и Архимеда от вторжения этой разрушительной доктрины, которая переворачивает все геометрические факты физического мира.»

Статья, откуда взяты все эти цитаты, опубликована в томе 2 (1900 г.) журнала “l’Enseignement mathématique” [24]. Отметим, что журнал, основанный незадолго до того (в 1899 г.), имел престижный список учредителей, включавший таких математиков, как Аппель, Кремона, Клейн, Миттаг-Леффлер, Пикар и Пуанкаре. В этом журнале имеются и другие статьи того же автора, в которых он приводит то, что называет «противоречиями» в неевклидовой геометрии. Ответы других математиков на эти статьи публиковались в течение первого десятилетия двадцатого века в “l’Enseignement mathématique” и других журналах. В томе 4 (1902) “l’Enseignement mathématique”, с. 330, имеется следующий комментарий редакции:

«Напоминаем нашим читателям, что “l’Enseignement mathématique” находится в распоряжении сторонников как евклидовой, так и неевклидовой геометрии. Не беря сторону тех или

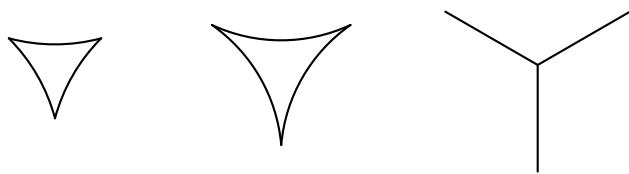


Рис. 1. Здесь изображена фигура из письма Гаусса Шумахеру. Это треножник, возникающий (по Гауссу) как предел гиперболических треугольников

других, наш журнал является трибуной, открытой для всех математиков.»

Обосновывая своё утверждение, что в неевклидовой геометрии царит путаница, Фролов привёл следующий интересный пример. Он основан на письме Гаусса Шумахеру от 12 июля 1831 г.,<sup>17)</sup> в котором Гаусс утверждает, что если мы берём равносторонний треугольник с центром  $O$  на гиперболической плоскости и одновременно устремляем три вершины этого треугольника к бесконечно удалённым точкам  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то мы получим в качестве предельной фигуры бесконечный треножник, образованный лучами  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$  (см. рис. 1). Фролов пишет по этому поводу:

«Последователи Гаусса, более смелые, если не более разумные, чем он, объяснили, что мэтр заблуждался и что равносторонний треугольник в пределе переходит не в свои биссектрисы, а в три прямые  $QR$ ,  $ST$ ,  $UV$ ,<sup>18)</sup> являющиеся взаимными асимптотами. Эта поправка была необходима, поскольку было странно, что стороны треугольника ломаются. Но такое объяснение предполагает тайную силу, которая вдруг отделяет стороны треугольника друг от друга, так как хотя легко вообразить непересекающиеся прямые, но трудно понять, что помешает соединить между собой три точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , взятые на биссектрисах треугольника сколь угодно далеко от центра  $O$ . Концепция Гаусса представляется более ясной, чем у его последователей. Но вместо того, чтобы распутывать это бессмысленное недоразумение, лучше было бы признать, что при увеличении треугольника его углы не меняются и их сумма остаётся постоянной, что означает отвергнуть гипотезу и принять постулат Евклида.»

<sup>17)</sup>[25, с. 216].

<sup>18)</sup>Эти прямые образуют фигуру, ныне называемую *идеальным треугольником*.



Следует признать, что, строго говоря, Фролов прав, указывая на то, что можно считать ошибкой Гаусса: предел треугольников, при обычном понимании слова «предел», не есть треножник. Но современный геометр заметит, что интуиция Гаусса в данном случае хорошо вписывается в контекст «грубой геометрии» (*coarse geometry*), которая развивалась М. Громовым в течение последних двух десятилетий двадцатого века.

Затем Фролов объясняет, что именно он считает противоречиями в работах Лобачевского, и после этой и других подобных атак на неевклидову геометрию заключает свою статью следующими словами:

«Мы вправе пожелать, чтобы эта парадоксальная и противоречивая теория не проникла в преподавание, где она может испортить ум учащихся.»

Математик К. Видадь следующим образом завершает статью, также появившуюся в “*l’Enseignement mathématique*” (1902 г.) [36]:

«Из всех предыдущих обсуждений, как нам кажется, следует по меньшей мере вынести впечатление, что неевклидова теория не столь прочна, как предпочитают говорить. И, возможно, недалёк день, когда её приверженцы не осмелятся более имитировать перед лицом своих оппонентов уверенность и дух примирения, всегда не лишённые некоторой иронии. С другой стороны, понятно, что некоторым геометрам, обманутым искусными софизмами и глубоко вовлечённым в неевклидову авантюру, трудно отказаться от своих заблуждений. Но, хотя они или нет, они будут, как мы полагаем, побеждены логикой.»

В обзоре по аксиоме о параллельных, опубликованном в *Mathematical Gazette* в 1913 г. [23], У. Б. Фрэнкленд пишет:

«Теперь я хочу перейти к последней половине восемнадцатого века, когда Бертран из Женевы доказал аксиому о параллельных полностью и окончательно.»<sup>19)</sup>

И далее в той же статье:

«Это действительное доказательство, как представляется мне после более чем десятилетних размышлений, [...] исключает гипотезу Лобачевского.»

Всё это показывает, что хотя сегодня для нас гиперболическая геометрия не только столь же естественна, как евклидова, но и является источником самых актуальных и перспективных тем исследований, её рождение было, вероятно, самым трудным среди математических теорий, а процесс её признания — чрезвычайно длительным.

---

<sup>19)</sup> Автор имеет в виду швейцарского математика Луи Бертрана (1731–1812), ученика Эйлера, который также опубликовал «доказательство» постулата о параллельных.

Добавим, что во всей этой истории есть нечто парадоксальное. С одной стороны, абсолютное господство евклидовой геометрии закончилось с открытиями Лобачевского, Бойяи и Гаусса. Но, с другой стороны, эти три автора показали, что Евклид был прав, рассматривая постулат о параллельных как постулат, а не как теорему, и в этом смысле их работы подтвердили точку зрения Евклида, остававшуюся спорной в течение двух тысячелетий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. М. Достоевский. *Собрание сочинений в девяти томах*. М.: АСТ, 2006. Том седьмой. Братья Карамазовы, части I-III.
- [2] Н. И. Лобачевский. *Полное собрание сочинений*. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, А. П. Нордена, В. В. Степанова, Н. Г. Чеботарёва, П. А. Широкова. М.-Л.: ГИТТЛ, 1946–1951.
- [3] Н. И. Лобачевский. *О началах геометрии* // Казанский вестник. Вып. 25: февраль-март 1829, с. 178–187; апрель 1829, с. 228–241. Вып. 27: ноябрь-декабрь 1829, с. 227–243. Вып. 28: март-апрель 1830, с. 251–283; июль-август 1830, с. 571–683. Англ. перевод: F. Engel [21, с. 1–66].
- [4] *Об основаниях геометрии*. Под ред. А. П. Нордена. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [5] Б. Л. Лаптев. *Геометрия Лобачевского, её история и значение*. М.: Знание, 1976.
- [6] Б. Л. Лаптев. *Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского* // Историко-математические исследования. Т. 4, 1951. С. 201–229.
- [7] Б. А. Розенфельд. *История неевклидовой геометрии*. М.: Наука, 1976.
- [8] *Проблемы Гильберта*. М.: Наука, 1969.
- [9] А. Пуанкаре. *Наука и гипотеза*. В кн.: А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1990. Первоначальное издание: H. Poincaré, *La science et l’Hypothèse*, Paris, 1902.
- [10] J. Andrade. *Euclidien et non-euclidien* // L’Enseignement mathématique. Vol. 2, 1900. P. 298–300.
- [11] P. Barbarin. *La correspondance entre Hoüel et de Tilly* // Bulletin des Sciences Mathématiques. Tome L, 1926. P. 50–61.

- [12] P. Barbarin. *La Géométrie non Euclidienne* (suivie de Notes Sur la Géométrie non Euclidienne dans ses Rapports avec la Physique Mathématique par A. Buhl). Paris: Gauthier-Villars, третье издание, 1928. (Первое издание 1902, репринт третьего издания: Paris: Jacques Gabay, 1990.)
- [13] G. Battaglini. *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky* // *Giornale di Matematiche*. Anno V, 1867. P. 217–231.
- [14] E. Beltrami. *Saggio di Interpretazione della geometria non-Euclidea* // *Giornale di Matematiche*. Vol. VI, 1868; *Beltrami's Works*. Vol. I. P. 374–405. Французский перевод: G.J. Hoüel // *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Sér. 1. Tome VI, 1869. P. 251–288. Английский перевод: J. Stillwell. *Sources of Hyperbolic geometry*. *History of Mathematics*, Vol. 10, AMS-LMS, 1996. Русский перевод: П. П. Мей [4, с. 180–212].
- [15] E. Beltrami. *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche* // *Giornale di matematiche* Vol. 10, 1872. P. 147–159; *Beltrami's Works*. Vol. II. P. 394–409.
- [16] E. Beltrami. *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* // *Annali di matematica pura et applicata*. Serie II. Tomo II, 1868–69. P. 232–255; *Beltrami's Works* Vol. I. P. 406–429. Французский перевод: G.J. Hoüel // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Sér. 1. Tome VI, 1869. P. 347–375. Английский перевод: J. Stillwell. *Sources of Hyperbolic geometry*, *History of Mathematics* Vol. 10, AMS-LMS, 1996. Русский перевод: П. П. Мей [4, с. 342–365].
- [17] E. Beltrami. *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski* // *Atti della Reale Accademia dei Lincei Roma*. V. 5 (4), 1889. P. 441–448.
- [18] R. Bonola. *La geometria non-euclidea, Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. Первое издание, Ditta Nicola Zanichelli editore, Bologna, 1906. Немецкий перевод: M. Liebmann. В серии *Wissenschaft und Hypothese*, Teubner, Leipzig, 1908. Англ. перевод: H. S. Carslaw. *Non-Euclidean Geometry, A critical and historical study of its development*. First edition, 1912. Reprinted by Dover, 1955.
- [19] A. Cayley. *Note on Lobatchewsky's imaginary geometry* // *Phil. Mag.* London. Vol. 29, 1865. P. 231–233. *Coll. Papers*, V, No. 326. P. 471–472.
- [20] A. Châtelet. *Reviews on hyperbolic geometry* // *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 2e série, tome XXXVII, 1913. P. 134–144.
- [21] F. Engel. *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij, Zwei Geometrische Abhandlungen aus dem Russischen Übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers*. Leipzig, Teubner, Leipzig, 1898.

- [22] F. Engel, P. Stäckel. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. Leipzig, B. G. Teubner, 1895.
- [23] W. B. Frankland. *Notes on the Parallell-Axiom* // *Mathematical Gazette*. Vol. 7, 1913. P. 136–139.
- [24] M. Frolov. *Considérations sur la géométrie non-Euclidienne* // *L'Enseignement Mathématique*. Volume 2, 1900. P. 179–187.
- [25] C. F. Gauss. *Collected Works*. Vol. VIII. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1900.
- [26] G. B. Halsted. *Easy corollaries on non-Euclidean geometry* // *American Mathematical Monthly*. Vol I, 1894. P. 42.
- [27] G. B. Halsted. *Lobachevsky* // *American Mathematical Monthly*. Vol. II, 1895. P. 136–139.
- [28] C. Houzel. *The birth of non-Euclidean geometry // 1830-1930: a century of geometry*. *Lecture Notes in Physics*. Springer, Berlin-Heidelberg, 1992. P. 3–21.
- [29] F. Klein. *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (erster Aufsatz)* // *Mathematische Annalen*. Vol. IV, 1871. P. 573-625. Французский перевод: L. Laugel. *Sur la géométrie non Euclidienne* // *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*. 1<sup>ère</sup> Série. Tome 11, no. 4, 1897. P. G1–G72. Английский перевод: J. Stillwell. *Sources of Hyperbolic geometry* // *History of Mathematics*. Vol. 10, AMS-LMS, 1996. Сокращённый вариант статьи: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1871. P. 244–253. Французский перевод: G.J. Houël // *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 1<sup>ère</sup> Série. Tome II, 1871. P. 341-351. Русский перевод: А.П. Широков // [4, с. 253–303].
- [30] G. Loria. *Il Passato e il presente delle principali teorie geometriche* // *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*. S. 2. V. 38, 1887. P. 327–376.
- [31] H. Poincaré. *Les géométries non euclidiennes* // *Revue générale des sciences pures et appliquées*. Vol. 2, 1891. P. 769–774.
- [32] J.-C. Pont. *L'Aventure des parallèles Histoire de la géométrie non euclidienne: Précurseurs et attardés*. Peter Lang ed. 1986.
- [33] P. Stäckel, F. Engel, Gauss, *die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie* // *Math. Annalen*. T. XLIX (2), 1897. P. 149–205.
- [34] J.-M. de Tilly. *Essai sur les Principes Fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*. Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 1880.

- [35] J.-M. de Tilly. *Essai de Géométrie analytique générale*. Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, 1892.
- [36] C. Vidal. *Sur quelques arguments non-euclidiens* // L'Enseignement Mathématique. Volume 4, 1902. P. 330–346.
- [37] E. B. Vinberg. *Nikolaj Lobachevskij – On the occasion of his 200th anniversary* // European Mathematical Society Newsletter. Vol. 6, 1992. P. 8–9.
- [38] A. Vucinich. *Nikolai Ivanovich Lobachevskii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry* // Isis. Vol. 5. No. 4. Dec. 1962. P. 465–481.
- [39] A. Vucinich. *Science in Russian Culture, A History to 1960*. Stanford University Press, 1963.
- [40] G. Waldo Dunnington. *The Sesquicentennial of the Birth of Gauss* // The Scientific Monthly. Vol. XXIV. May, 1927. P. 402–414.
- [41] S. Walter. *La vérité en géométrie: sur le rejet de la doctrine conventionnaliste* // Philosophia Scientiae. Vol. 2, 1997. P. 103–135.

---

---

# Тема номера: многогранники Ньютона

---

---

## Многогранники и уравнения

В. А. Тиморин      А. Г. Хованский

### ВВЕДЕНИЕ

В этой статье обсуждается связь между геометрией выпуклых многогранников с целыми вершинами и числом решений систем алгебраических уравнений. Эта тема очень активно разрабатывается в настоящее время. Однако большинство научных статей предполагают от читателя владение хорошей алгебро-геометрической техникой. Здесь мы хотим обсудить, пользуясь по возможности более элементарным языком, то, с чего эта теория начиналась.

Наше изложение основано на работах [1, 2]. Кроме того, мы приводим некоторые элементарные примеры, связанные с фундаментальными принципами выпуклой геометрии и алгебраической геометрии. Надеемся, что эти примеры дадут мотивировку для дальнейшего изучения предмета.

### 1. МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА

Каждому многочлену от двух переменных можно сопоставить набор точек на плоскости. Эти точки будут иметь целочисленные координаты, то есть принадлежать решётке  $\mathbb{Z}^2$ . А именно, моному  $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}$  от переменных  $u_1, u_2$  сопоставляется точка  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Многочлену сопоставляется набор точек, соответствующих всем мономам, которые входят в данный многочлен с ненулевыми коэффициентами. Например, многочлену  $2 + u_1 - u_1^2 u_2$  соответствует набор из трёх точек  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(2, 1)$ . Набор целочисленных точек, соответствующий данному многочлену  $f$ , называется *носителем* многочлена  $f$ .

Что происходит с носителями при умножении многочленов? Начнём со случая, когда оба многочлена — мономы. Очевидно, если умножить моном  $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}$  на моном  $u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2}$ , то получится моном  $u_1^{\gamma_1} u_2^{\gamma_2}$ , где  $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$  и  $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$ . Другими словами, точка  $c = (\gamma_1, \gamma_2)$ , соответствующая произведению мономов, является суммой точек  $a = (\alpha_1, \alpha_2)$  и  $b = (\beta_1, \beta_2)$ . Точки мы складываем по координатам: каждая координата суммы является суммой соответствующих координат точек-слагаемых.

Пусть теперь мы перемножаем два многочлена, не являющихся мономами. Легко проверить следующую формулу: если  $A_1$  и  $A_2$  — носители многочленов  $f_1$  и  $f_2$ , соответственно, то носитель  $A$  многочлена  $f_1 f_2$  удовлетворяет включению

$$A \subseteq A_1 + A_2.$$

Здесь в правой части стоит сумма двух множеств. Сумма  $A_1 + A_2$  определяется как множество всех точек, представимых в виде  $a_1 + a_2$ , где  $a_1 \in A_1$ , и  $a_2 \in A_2$  (эта операция называется *суммой множеств по Минковскому*). Всякий моном  $m$ , входящий в многочлен  $f_1 f_2$  с ненулевым коэффициентом, можно записать в виде произведения  $m_1 m_2$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — мономы, входящие с ненулевыми коэффициентами в разложения многочленов  $f_1$  и  $f_2$  соответственно. Поскольку умножению мономов соответствует сложение точек в  $\mathbb{Z}^2$ , отсюда вытекает выписанная формула для носителей.

Заметим, однако, что равенство  $A = A_1 + A_2$  справедливо не для всех многочленов, как показывает следующий пример. Пусть  $f_1(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ ,  $f_2(u_1, u_2) = u_1 - u_2$ . Тогда множества  $A_1$  и  $A_2$  совпадают и состоят из двух точек  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ . Сумма  $A_1 + A_2$  состоит из трёх точек  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  и  $(0, 2)$ . Однако носитель многочлена  $f_1 f_2(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2^2$  содержит только две из них. Точка  $(1, 1)$  выпадает по следующей причине: её можно представить двумя способами в виде суммы  $a_1 + a_2$ , где  $a_1 \in A_1$ ,  $a_2 \in A_2$ ; соответствующие коэффициенты взаимно уничтожаются.

Если же точку  $a$  можно только одним способом представить в виде  $a_1 + a_2$ , где  $a_1 \in A_1$ ,  $a_2 \in A_2$ , то точка  $a$  обязательно входит в  $A$ . Например, все вершины многоугольника, натянутого на  $A_1 + A_2$ , удовлетворяют этому условию (докажите это геометрическое утверждение!). Это одна из причин, по которой удобнее рассматривать не носитель многочлена, а его выпуклую оболочку (то есть минимальный многоугольник, содержащий все точки носителя). Выпуклая оболочка носителя называется *многоугольником Ньютона*. При перемножении многочленов их многоугольники Ньютона складываются: если  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — многоугольники Ньютона многочленов  $f_1$  и  $f_2$ , соответственно, то многоугольник Ньютона  $\Delta$  многочлена  $f_1 f_2$  равен

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Для многочленов многих переменных можно аналогичным образом определить *многогранник Ньютона*. Многогранник Ньютона многочлена всегда является выпуклым многогранником с целочисленными вершинами. При перемножении многочленов их многогранники Ньютона складываются.

Многогранник Ньютона носит имя И. Ньютона неспроста. Ньютон разработал способ представления аналитических функций, заданных неявно (например, как решения алгебраических или дифференциальных уравнений), в виде локальных степенных рядов по дробным степеням независимой переменной. Такие ряды называются степенными рядами Пьюзо. Метод Ньютона удобно применять, пользуясь многогранником Ньютона (хотя сам Ньютон никаких многогранников не рассматривал). Долгое время многогранники Ньютона в основном использовались для изучения локальной структуры аналитических функций в окрестностях особых точек. Ситуация изменилась в 1970-е годы, когда были обнаружены глобальные геометрические структуры, связанные с многогранниками Ньютона.

Многогранник Ньютона полезен по следующей причине. Мы ограничимся пока только очень неформальным объяснением. Пусть  $f$  — фиксированный многочлен с многогранником Ньютона  $\Delta$ . Выберем точку  $x \in \mathbb{C}^n$  с очень большими или очень маленькими по абсолютной величине координатами. Посчитаем значения всех мономов, входящих в многочлен  $f$ , в точке  $x$ . Тогда, с вероятностью, близкой к единице, один из мономов во много раз (скажем, в 1000) больше, чем остальные. Назовём такой моном *главным*. Нетрудно видеть, что главные мономы соответствуют вершинам многогранника  $\Delta$ . Таким образом, вершины играют самую важную роль при изучении асимптотических свойств многочлена  $f$ . С некоторой вероятностью (впрочем, близкой к нулю), может оказаться так, что доминируют несколько мономов. Однако все эти мономы будут лежать на границе многогранника  $\Delta$ .

### Задачи

1. Пусть  $\Delta$  — выпуклый многоугольник на плоскости с координатами  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , а  $l(\alpha_1, \alpha_2) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$  — линейная функция. Всегда найдётся такая вершина  $v$  многоугольника  $\Delta$ , что

$$l(v) = \max_{a \in \Delta} l(a).$$

2. Пусть  $f$  — многочлен от двух комплексных переменных  $u_1$  и  $u_2$  с многоугольником Ньютона  $\Delta$ . Тогда существует такая константа  $C$ , что если  $|\log |u_1||$  или  $|\log |u_2||$  больше, чем  $C$ , то для некоторой стороны  $\Gamma$  многоугольника  $\Delta$  и для любых точек  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma$ ,  $(\beta_1, \beta_2) \notin \Gamma$ , имеет место неравенство

$$|u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}| > 100 |u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2}|.$$



3. Докажите, что если векторы  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  линейно независимы, то существует такая константа  $C > 0$ , что для всякого вектора  $b \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \langle a_i, b \rangle \geq C|b|.$$

Здесь  $\langle a, b \rangle$  означает скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ , а  $|b|$  — длину вектора  $b$ .

4. Пусть  $A$  — конечное множество точек в  $\mathbb{R}^n$ . Существует константа  $C > 0$ , обладающая следующим свойством: для всякого вектора  $b \in \mathbb{R}^n$  найдётся такое аффинное подпространство  $\Lambda$ , что для всех  $a \in A \cap \Lambda$  и для всех  $a' \in A - \Lambda$  выполнено неравенство  $\langle b, a' \rangle \leq \langle b, a \rangle - C|b|$ . Кроме того, можно считать, что аффинное пространство  $\Lambda$  порождается своим пересечением с множеством  $A$ .

5. Пусть  $f$  — многочлен от комплексных переменных  $(u_1, \dots, u_n)$  с многогранником Ньютона  $\Delta$ . Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдётся константа  $C$  со следующим свойством: если для комплексного вектора  $(u_1, \dots, u_n)$  длина вектора  $(\log |u_1|, \dots, \log |u_n|)$  больше, чем  $C$ , то найдётся такая грань  $\Gamma$  многогранника  $\Delta$ , что

$$|u_1^{\beta_1} \dots u_n^{\beta_n}| < \varepsilon |u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}|$$

для всякой точки  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Gamma$  и всякой точки  $(\beta_1, \dots, \beta_n) \notin \Gamma$ .

## 2. СУММЫ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Для любых двух множеств в  $\mathbb{R}^n$  определена их сумма Минковского: определение, данное в предыдущем разделе, дословно переносится на случай произвольной размерности. Эта операция важна не только при изучении многочленов. В качестве «случайного» примера рассмотрим такой: распространение света в однородной, но неизотропной среде. Пусть источник света помещён в начало координат, а  $A_t$  — световое пятно, образованное за время  $t$ , то есть множество тех точек, в которые свет успел добраться за время  $t$ . Если среда однородна (то есть её свойства не меняются при параллельном переносе), то источник, помещённый в точку  $x \in \mathbb{R}^n$ , осветит за время  $t$  множество  $x + A_t$ . Согласно принципу Гюйгенса, множество  $A_{t+s}$  может быть получено следующим образом. В каждой точке множества  $A_t$  помещается воображаемый «вторичный источник света». Множество  $A_{t+s}$  есть объединение световых пятен за время  $s$ , полученных от всех вторичных источников. Вспоминая определение суммы по Минковскому, получаем, что

$$A_{t+s} = A_t + A_s.$$

Обсудим некоторые свойства операции суммирования по Минковскому. Сумма множеств не зависит ни от порядка слагаемых, то есть  $A + B = B + A$ , ни от того, в какой последовательности производится суммирование, то есть  $A + (B + C) = (A + B) + C$ . Это вытекает из аналогичных

свойств операции сложения точек. Кроме того, если, несколько злоупотребляя обозначениями, обозначить через  $0$  множество, состоящее только из начала координат (то есть из точки, все координаты которой нулевые), то  $A + 0 = 0 + A$  для любого множества  $A$  в  $\mathbb{R}^n$ . Если  $A$  — множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\lambda$  — действительное число, то множество  $\lambda A$  определяется как множество всех точек вида

$$\lambda a = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n),$$

где точка  $a = (a_1, \dots, a_n)$  пробегает все множество  $A$ . Выполняются обычные распределительные законы

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Есть, однако, и существенные различия между операциями над точками и операциями над множествами.

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $A$  — подмножество в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что  $2A \subseteq A + A$ . Приведите пример, когда включение строгое.
2. Если множество  $A$  выпукло, то  $A + A = 2A$ .
3. Пусть  $A$  — отрезок в  $\mathbb{R}$ , а  $B$  — множество его концов. Докажите, что  $A + B = A + A = 2A$ .
4. Пусть  $A$  — треугольник в  $\mathbb{R}^2$ , а  $B$  — множество его вершин. Докажите, что  $2A + B = 2A + A = 3A$ .
5. Пусть  $A$  — выпуклый многоугольник в  $\mathbb{R}^2$ , а  $B$  — множество его вершин. Докажите, что  $2A + B = 2A + A = 3A$ . *Указание:* всякий выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники.
6. Пусть  $A$  — симплекс в  $\mathbb{R}^n$  (то есть выпуклая оболочка множества из  $n + 1$  точек, не связанных никакими аффинными соотношениями), а  $B$  — множество его вершин. Докажите, что  $nA + B = nA + A = (n + 1)A$ .

Мы видим, что, вообще говоря, сумма множеств не удовлетворяет свойству сокращения, то есть из  $A + C = B + C$  не следует  $A = B$ . Однако верно следующее.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** *Предположим, что  $A$  и  $B$  — произвольные компактные (т. е. замкнутые и ограниченные) подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$ . Если  $A + C = B + C$  для некоторого компактного множества  $C$ , то выпуклые оболочки множеств  $A$  и  $B$  совпадают.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Определим функцию  $H_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом:

$$H_A(x) = \max_{y \in A} \langle x, y \rangle,$$

где  $\langle x, y \rangle$  обозначает евклидово скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ . Функция  $H_A$  называется *опорной функцией* множества  $A$ . Нетрудно проверить, что выпуклая оболочка множества  $A$  совпадает с множеством всех  $y \in \mathbb{R}^n$  таких, что  $\langle x, y \rangle \leq H_A(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  (докажите это свойство, исходя из определения выпуклой оболочки как минимального выпуклого множества, содержащего  $A$ ). Отсюда, в частности, следует, что если опорные функции двух множеств равны, то совпадают и выпуклые оболочки этих множеств. Кроме того, пользуясь простейшими свойствами максимума, нетрудно показать, что  $H_{A+C} = H_A + H_C$ . Точно так же,  $H_{B+C} = H_B + H_C$ . Отсюда получаем, что  $H_A = H_B$ , следовательно, выпуклые оболочки множеств  $A$  и  $B$  совпадают.  $\square$

### 3. ГРУППЫ ГРОТЕНДИКА

В теории представлений и алгебраической геометрии очень полезна следующая конструкция. Пусть  $E$  — некоторое множество, элементы которого можно складывать, причём сложение коммутативно, ассоциативно, и обладает нейтральным элементом, а вот вычитание не определено. Такие множества называются коммутативными полугруппами. Например, множество всех (скажем, конечных) подмножеств решётки  $\mathbb{Z}^n$  со сложением по Минковскому образует коммутативную полугруппу. Все ненулевые многочлены от  $n$  переменных образуют коммутативную полугруппу по умножению. (Как мы уже видели, имеется тесная связь между этими двумя полугруппами). Мы хотим превратить полугруппу  $E$  в группу, то есть сделать так, чтобы там было определено вычитание. Можно рассмотреть множество формальных разностей  $a - b$ ,  $a, b \in E$ . Здесь  $a - b$  означает не результат какой-либо операции, проделанной над элементами  $a$  и  $b$ , а просто некоторый абстрактный объект, сопоставляемый каждой паре  $(a, b)$ . На множестве формальных разностей можно определить вычитание: а именно,  $a - b$  минус  $c - d$  равно  $(a + d) - (b + c)$ , то есть формальной разности элементов  $a + d$  и  $b + c$  полугруппы  $E$ . Однако, некоторые формальные разности следует считать совпадающими, чтобы выполнялись обычные групповые законы, а именно  $a - b$  равно  $c - d$ , если  $a + d = b + c$ . В частности, все формальные разности вида  $a - a$  отождествляются с  $0 - 0$ , где  $0$  — нейтральный элемент полугруппы  $E$ . Полученное множество формальных разностей (с указанным отождествлением) называется *группой Гротендика* полугруппы  $E$ . Сама полугруппа отображается в свою группу Гротендика: элемент  $a$  переходит в формальную разность  $a - 0$ . Заметим, однако, что это отображение не всегда инъективно.

Найдём, например, группу Гротендика для полугруппы всех конечных подмножеств решётки  $\mathbb{Z}^n$  с операцией сложения по Минковскому. Точнее, нас интересует не вся группа Гротендика, а только образ полугруппы в

группе Гротендика. Для того, чтобы описать этот образ, нам нужно ответить на такой вопрос: в каком случае два конечных подмножества  $A$  и  $B$  решётки  $\mathbb{Z}^n$  представляют один и тот же элемент группы Гротендика? Другими словами, в каком случае  $A + C = B + C$  для некоторого конечного подмножества  $C \subset \mathbb{Z}^n$ ? Ответ: если и только если выпуклые оболочки множеств  $A$  и  $B$  совпадают. Следовательно, группа Гротендика носителей многочленов совпадает с группой Гротендика их многогранников Ньютона. Оказывается, многие алгебраические свойства многочленов зависят не от их носителя, а только от элемента носителя в группе Гротендика, а значит, только от многогранника Ньютона.

Доказательство сформулированного утверждения опирается на предложение 1. Из этого предложения следует, что если конечные подмножества  $A$  и  $B$  решётки  $\mathbb{Z}^n$  представляют один и тот же элемент группы Гротендика, то их выпуклые оболочки совпадают. Осталось доказать, что если  $A$  и  $B$  имеют одинаковые выпуклые оболочки, то найдётся такое конечное подмножество  $C \subset \mathbb{Z}^n$ , что  $A + C = B + C$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть  $\Delta$  — выпуклый многогранник размерности  $n$  в  $\mathbb{R}^n$ , а  $V$  — множество всех вершин многогранника  $\Delta$ . Тогда  $(M+1)\Delta = M\Delta + V$  для любого действительного числа  $M \geq n$  (здесь знак суммы обозначает сумму по Минковскому, а  $M\Delta$  — это многогранник, полученный из  $\Delta$  гомотетией с коэффициентом  $M$  и центром в начале координат).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $\Delta$  — это симплекс, то, согласно задаче 6 из раздела 2, имеем  $(n+1)\Delta = n\Delta + V$ . Следовательно, для любого  $M \geq n$ ,

$$M\Delta + V = (n\Delta + V) + (M-n)\Delta = (n+1)\Delta + (M-n)\Delta = (M+1)\Delta.$$

Таким образом, утверждение доказано для случая симплекса.

В случае произвольного выпуклого многогранника  $\Delta$  мы воспользуемся следующим фактом: многогранник  $\Delta$  можно представить в виде объединения симплексов, вершины которых являются вершинами многогранника  $\Delta$ . Это утверждение нетрудно доказать по индукции. Если каждая грань многогранника  $\Delta$  размерности  $n-1$  уже представлена в виде объединения  $(n-1)$ -мерных симплексов (вершины которых являются вершинами многогранника  $\Delta$ ), то можно выбрать произвольную вершину многогранника  $\Delta$  и соединить её  $n$ -мерными симплексами с  $(n-1)$ -мерными симплексами на гранях многогранника  $\Delta$ , не проходящих через выбранную вершину.

Пусть  $\Delta$  является объединением  $n$ -мерных симплексов  $A_1, \dots, A_k$ , причём множество вершин  $V_i$  симплекса  $A_i$  является подмножеством множества  $V$ . Заметим, что

$$(A_1 \cup \dots \cup A_k) + V = (A_1 + V) \cup \dots \cup (A_k + V).$$

(В этом смысле, операции  $\cup$  и  $+$  на подмножествах в  $\mathbb{R}^n$  ведут себя так же по отношению друг к другу, как операции  $+$  и  $\times$  на действительных числах). Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} M\Delta + V &\supseteq (MA_1 + V_1) \cup \dots \cup (MA_k + V_k) = \\ &= (M+1)A_1 \cup \dots \cup (M+1)A_k = (M+1)\Delta. \end{aligned}$$

Противоположное включение очевидно.  $\square$

Доказанное предложение имеет такое следствие. Пусть  $A$  и  $B$  — конечные подмножества в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что выпуклые оболочки множеств  $A$  и  $B$  совпадают (и равны  $\Delta$ ). Тогда существует выпуклый многогранник  $\tilde{C} \subset \mathbb{R}^n$ , такой, что  $A + \tilde{C} = B + \tilde{C}$ . А именно, можно взять  $\tilde{C} = M\Delta$ , где  $M$  — достаточно большое положительное число. Поскольку как  $A$ , так и  $B$ , содержат все вершины многогранника  $\Delta$ , мы получаем  $A + M\Delta = B + M\Delta = (M+1)\Delta$  по доказанному предложению. В самом деле, если  $V$  — множество всех вершин многогранника  $\Delta$ , то

$$(M+1)\Delta = V + M\Delta \subseteq A + M\Delta \subseteq \Delta + M\Delta = (M+1)\Delta$$

и аналогично для  $B$ .

Вернемся к доказательству интересующего нас утверждения: если выпуклые оболочки конечных множеств  $A, B \subset \mathbb{Z}^n$  совпадают (и равны  $\Delta$ ), то найдётся такое конечное множество  $C \subset \mathbb{Z}^n$ , что  $A + C = B + C$ . Мы знаем, что  $A + M\Delta = B + M\Delta$  для достаточно большого  $M > 0$ , но  $M\Delta$  не конечное множество, а многогранник. Пусть  $C$  — множество всех целых точек многогранника  $M\Delta$ . Тогда  $A + C = B + C$ . В самом деле, если  $c \in C$ , то, в частности,  $c \in M\Delta$  и, значит, для всякого  $a \in A$ , сумма  $a + c$  представляется в виде  $b + c'$ , где  $b \in B$ ,  $c' \in M\Delta$ . Однако, поскольку точки  $a, b$  и  $c$  целые, точка  $c' = a + c - b$  тоже целая. Мы доказали, что  $A + C \subseteq B + C$ . Противоположное включение доказывается точно так же.

Мы доказали, что группа Гротендика конечных подмножеств решетки  $\mathbb{Z}^n$  совпадает с группой Гротендика многогранников Ньютона.

### Задачи

1. Опишите группы Гротендика следующих полугрупп:

- а) конечные подмножества в  $\mathbb{R}^n$  с операцией сложения по Минковскому,
- б) натуральные числа с операцией произведения,
- в) классы изоморфизма конечномерных векторных пространств над  $\mathbb{C}$  с операцией прямой суммы.

2. Докажите, что группа Гротендика компактных (т. е. замкнутых и ограниченных) подмножеств в  $\mathbb{R}^n$  изоморфна группе всех непрерывных функций на  $S^{n-1}$  с операцией сложения. *Указание:* рассмотрите опорные функции множеств.

#### 4. ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ В ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ

Рассмотрим выпуклый многогранник  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$ . Какова связь между  $\Delta$  и множеством всех целых точек в многограннике  $\Delta$ ? Мы обсудим несколько утверждений, устанавливающих эту связь. Простое, но очень важное наблюдение состоит в следующем:

**ТЕОРЕМА 3.** *При  $k \rightarrow \infty$ , объём многогранника  $k\Delta$  асимптотически равен числу целых точек в многограннике  $k\Delta$ .*

Напомним, что для две последовательности  $a_k$  и  $b_k$  действительных чисел *асимптотически равны*, если  $a_k/b_k$  стремится к 1 при  $k \rightarrow \infty$ .

Теорема 3 верна по следующей причине. Рассмотрим стандартный  $n$ -мерный куб  $I$ , состоящий из всех точек  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  таких, что

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

С каждой целой точкой  $a \in \mathbb{Z}^n$  можно связать сдвинутый куб  $a + I$ . Пусть  $\Delta_k$  — объединение кубов  $a + I$  по всем целым точкам  $a$  многогранника  $k\Delta$ . Множества  $\Delta_k$  и  $k\Delta$  отличаются не очень сильно: различие наблюдается только среди точек, расстояние от которых до границы многогранника  $k\Delta$  не превышает  $\sqrt{n}$ , то есть в  $\sqrt{n}$ -окрестности границы многогранника  $k\Delta$ . Заметим, что  $n$ -мерный объём  $R$ -окрестности границы многогранника  $k\Delta$  растёт как  $(n-1)$ -мерный объём границы, то есть как  $k^{n-1}$ . Следовательно, объёмы множеств  $k\Delta$  и  $\Delta_k$  могут отличаться не более чем на  $O(k^{n-1})$ . Однако сами эти объёмы растут как  $k^n$  (сформулируйте и докажите более точное утверждение!). Значит, они асимптотически равны. Осталось заметить, что объём множества  $\Delta_k$  равен числу целых точек в многограннике  $k\Delta$ .

Допустим, что все вершины многогранника  $\Delta$  — целые точки. В этом случае  $\Delta$  называется *целочисленным многогранником*. Например, многогранник Ньютона любого многочлена — целочисленный многогранник. Обозначим через  $A$  множество всех целых точек в многограннике  $\Delta$ . Определим множество  $k * A$  как сумму Минковского  $k$  копий множества  $A$ . Заметим, что, вообще говоря,  $kA \neq k * A$ . Это видно даже на одномерном примере  $\Delta = [0, 1]$ ,  $A = \{0, 1\}$ . В этом примере  $2 * A = A + A = \{0, 1, 2\}$ , а  $2A = \{0, 2\}$ . С другой стороны, множество  $k * A$ , очевидно, лежит в многограннике  $k\Delta$ . К сожалению, неверно также и то, что множество  $k * A$  совпадает с множеством всех целых точек в многограннике  $k\Delta$ . Рассмотрим, например, многогранник (тетраэдр)  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^3$  с вершинами  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  и  $(1, 1, 0)$ . Можно показать, что точка  $(1, 1, 1)$  принадлежит многограннику  $2\Delta$ , но не принадлежит множеству  $2 * A$ , где  $A = \mathbb{Z}^3 \cap \Delta$  (см. также задачу 3 в разделе 8). Вообще, никакая точка из  $\mathbb{Z}^3$ , сумма координат которой нечётна, не может лежать во множестве  $k * A$ . Однако имеет место следующая теорема:

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $\Delta$  — целочисленный многогранник в  $\mathbb{R}^n$ , а  $A$  — некоторое множество целых точек в многограннике  $\Delta$ , порождающее решётку  $\mathbb{Z}^n$  как группу по сложению и содержащее все вершины многогранника  $\Delta$ . Существует константа  $\rho > 0$ , обладающая следующим свойством: при любом целом  $k > 0$  каждая целая точка многогранника  $k\Delta$ , отстоящая от границы этого многогранника на расстояние  $\geq \rho$ , принадлежит множеству  $k * A$ .

Утверждение этой теоремы является многомерным обобщением старой задачи про трёх- и пятирублёвые купюры: доказать, что любую целую сумму рублей, начиная с 8, можно набрать, используя исключительно купюры достоинством 3 и 5 рублей. В настоящее время такая формулировка потеряла актуальность.

### ЗАДАЧИ

1. Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — положительные целые числа, не имеющие нетривиальных общих делителей. Тогда найдётся целое положительное число  $m$  такое, что всякое целое число  $a \geq m$  представляется в виде

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$$

для некоторых целых неотрицательных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . *Указание:* Пусть  $s = a_1 + \dots + a_n$ . Всякое целое число в отрезке  $[-s, s]$  представляется в виде линейной комбинации чисел  $a_1, \dots, a_n$  с целыми коэффициентами. Обозначим через  $M$  положительное целое число, превосходящее модули всех этих коэффициентов. Тогда можно взять  $m = Ms$ .

2. Приведите пример трёхмерного многогранника  $\Delta$  со следующими свойствами: множество  $A$  всех целых точек многогранника  $\Delta$  порождает решётку  $\mathbb{Z}^3$  как группу по сложению, но не все целые точки в многограннике  $2\Delta$  принадлежат множеству  $2 * A$ . *Указание:* рассмотрите тетраэдр  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^3$  с вершинами  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 2)$ ,  $(2, 1, 2)$  и  $(2, 2, 1)$ . Этот тетраэдр задаётся такой системой линейных неравенств на координаты  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 5, \quad 3\alpha_i \leq 2(\alpha_j + \alpha_k) \text{ при } i \neq j \neq k.$$

Все целые точки многогранника  $\Delta$  получаются из точек  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$  и  $(1, 2, 2)$  перестановками координат (таким образом, всего многогранник  $\Delta$  содержит 5 целых точек). Пусть  $A = \mathbb{Z}^3 \cap \Delta$ . Множество  $A$  порождает решётку  $\mathbb{Z}^3$  как группу по сложению. Точка  $(3, 3, 3)$  принадлежит многограннику  $2\Delta$ , но не содержится во множестве  $2 * A$ .

3. Пусть  $A$  — конечное подмножество в  $\mathbb{Z}^n$ , которое порождает решётку  $\mathbb{Z}^n$  как группу относительно сложения. Существует константа  $C > 0$ , обладающая следующим свойством: для всякой линейной комбинации

$$b = \sum_{a \in A} \lambda_a a$$

элементов множества  $A$  с действительными коэффициентами  $\lambda_a \in \mathbb{R}$ , которая оказывается целочисленным вектором, существует линейная комбинация

$$\sum_{a \in A} n_a a$$

с целыми коэффициентами  $n_a \in \mathbb{Z}$ , равная  $b$  и такая, что  $|\lambda_a - n_a| < C$  для всех  $a \in A$ . *Указание:* рассмотрим выпуклую оболочку  $\Pi$  множества  $\{0\} \cup A$ . Всякую целую точку из  $\Pi$  можно представить в виде целочисленной линейной комбинации элементов множества  $A$ . С другой стороны, вектор  $b$  можно перевести в многогранник  $\Pi$ , вычитая подходящую целочисленную линейную комбинацию элементов множества  $A$ .

4. Пусть  $A$  — конечное подмножество в  $\mathbb{Z}^n$ , содержащее начало координат и порождающее решётку  $\mathbb{Z}^n$  как группу по сложению. Обозначим через  $\Delta$  выпуклую оболочку множества  $A$ . Пусть  $C$  — константа, фигурирующая в задаче 3, а  $k > 2C$  — целое число. Определим  $\Delta(k, C)$  как множество всех линейных комбинаций

$$\sum_{a \in A} \lambda_a a,$$

таких, что  $C \leq \lambda_a \leq k - C$  для всех  $a \in A$ . Тогда  $\Delta(k, C)$  — выпуклый многогранник, содержащийся в многограннике  $k\Delta$ . Докажите, что всякая целая точка многогранника  $\Delta(k, C)$  лежит в  $k * A$ .

Приведенные выше задачи доказывают теорему 4. Теперь из теорем 4 и 3 вытекает следующий результат.

**ТЕОРЕМА 5.** *Пусть  $\Delta$  и  $A$  — такие же, как в теореме 4. Тогда число точек во множестве  $k * A$  асимптотически равно объёму многогранника  $k\Delta$  при  $k \rightarrow \infty$ .*

## 5. ОБЩЕЕ ПОЛОЖЕНИЕ И ДИСКРИМИНАНТ

В этом разделе мы обсудим смысл следующего выражения: «некоторое условие выполняется для точки  $z \in \mathbb{C}^n$  общего положения». Начнём с элементарных примеров. Рассмотрим квадратное уравнение от одной комплексной переменной  $t$ :

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Коэффициенты  $a, b, c$  этого уравнения рассматриваются как параметры. Вообще говоря, это уравнение имеет ровно два комплексных корня. Однако имеются исключения. А именно, встречаются уравнения, у которых только один корень. Например, уравнение  $t^2 - 2t + 1 = 0$  имеет единственный корень  $t = 1$ , так же, как и уравнение  $t - 1 = 0$ , в котором  $a = 0$ . Если же все коэффициенты равны нулю, то корней бесконечно много — все комплексные числа являются корнями.



Посмотрим, в каких случаях выписанное уравнение имеет неправильное, то есть отличное от 2, число корней. Это происходит, когда  $a = 0$  (то есть уравнение оказывается линейным), а также когда  $b^2 = 4ac$  (то есть левая часть уравнения оказывается полным квадратом). Эти два условия выражаются равенствами. Понятно, что, например, при случайном выборе коэффициентов  $a, b, c$ , вероятность выполнения этих равенств нулевая. В этом смысле, мы говорим, что при *общем выборе коэффициентов*, или, что то же самое, если точка  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  находится в *общем положении*, рассматриваемое уравнение имеет ровно два корня.

Ещё один пример доставляет система из двух линейных уравнений от двух неизвестных, коэффициенты которой рассматриваются как параметры. В большинстве случаев такая система имеет ровно одно решение. Но если, скажем, все коэффициенты одного из уравнений нулевые, то решений бесконечно много. Допустим, что оба уравнения ненулевые. Тогда каждое из них описывает прямую на плоскости  $\mathbb{C}^2$ . Может так случиться, что соответствующие две прямые параллельны, и тогда система не имеет решений. Однако параллельность прямых выражается некоторым алгебраическим равенством на коэффициенты, и мы опять можем сказать, что в случае общего положения, рассматриваемая система имеет ровно одно решение.

Вообще-то, математики не любят исключений и пытаются формулировать утверждения так, чтобы исключений не было. Например, считается, что уравнение  $(t - 1)^2 = 0$  имеет не один корень, а два совпадающих; а если коэффициент  $a$  в уравнении  $at^2 + bt + c = 0$  обращается в нуль, то говорят, что один из корней уходит на бесконечность. Аналогично, если прямые параллельны, то они пересекаются на бесконечности. Подобный подход требует уточнения понятия «число корней», а также расширение того множества, к которому могут принадлежать корни. Но это другая история.

В общем случае, мы будем говорить, что некоторое свойство выполнено для точек  $z \in \mathbb{C}^n$  общего положения, если существует ненулевой многочлен  $D$  на  $\mathbb{C}^n$  такой, что все точки  $z$ , для которых свойство не выполняется, удовлетворяют равенству  $D(z) = 0$ . Например, все точки  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ , для которых неверно, что уравнение  $at^2 + bt + c = 0$  имеет ровно два корня, удовлетворяют равенству

$$a(b^2 - 4ac) = 0.$$

Многочлен  $D$ , обращающийся в нуль во всех исключительных точках, обычно называется *дискриминантом*. Таким образом, для всякого утверждения, справедливого в общем положении, имеется свой дискриминант. Заметим, что мы не требуем, чтобы множество исключительных точек

совпадало с множеством нулей дискриминанта. Требуется только, чтобы первое множество было подмножеством второго.

Приведём следующий результат, устанавливающий существование дискриминанта в некотором частном случае:

**ТЕОРЕМА 6.** *Рассмотрим произвольное число  $m$  многочленов  $P_1, \dots, P_m$  от  $n$  комплексных переменных, коэффициенты которых зависят полиномиально от конечного числа комплексных параметров  $c_1, \dots, c_k$ . Тогда существуют два многочлена  $D$  и  $D_*$  от  $c_1, \dots, c_k$  со следующими свойствами. Если система уравнений*

$$\begin{cases} P_1 = 0, \\ \dots, \\ P_m = 0 \end{cases}$$

*совместна в  $(\mathbb{C} - 0)^n$  (то есть имеет хотя бы одно решение, ни одна координата которого не обращается в нуль), то  $D(c_1, \dots, c_k) = 0$ . Если же  $D(c_1, \dots, c_k) = 0$ , но  $D_*(c_1, \dots, c_k) \neq 0$ , то выписанная система уравнений совместна в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ . Наконец, существует набор комплексных чисел  $c_1, \dots, c_k$ , на котором многочлен  $D$  обращается в нуль, а многочлен  $D_*$  — нет.*

Многочлен  $D$  называется *результантом* системы  $P_1 = \dots = P_m = 0$ . Теорема утверждает, грубо говоря, что все точки в пространстве параметров, для которых система совместна в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ , удовлетворяют равенству  $D = 0$ , а почти все точки, для которых  $D = 0$ , задают совместные в  $(\mathbb{C} - 0)^n$  системы. Заметим, что многочлен  $D$  может быть тождественно равен нулю.

Мы не будем доказывать теорему 6, хотя существуют вполне элементарные её доказательства, основанные на операции деления многочленов с остатком. Просто доказательство заняло бы достаточно много места и отвлекло бы нас от основной сюжетной линии. Но мы проиллюстрируем эту теорему на простейших примерах. Рассмотрим квадратное уравнение  $t^2 = c$  (или, что эквивалентно,  $t^2 - c = 0$ ). Оно имеет решения при любом  $c$ . Однако, при  $c = 0$  единственное решение равно нулю. Таким образом, мы можем взять  $D(c) = 0$ ,  $D_*(c) = c$ . Рассмотрим теперь систему из двух уравнений от одной неизвестной:

$$t^2 = c_1, \quad t^3 = c_2.$$

Мы тоже могли бы легко переписать эту систему так, что в правой части стояли бы нули. Эта система имеет решение (и притом только одно), если  $c_2^2 = c_1^3$ . Однако, если  $c_1 = c_2 = 0$ , то решение равно нулю. Таким образом, мы можем взять  $D(c_1, c_2) = c_2^2 - c_1^3$ ,  $D_*(c_1, c_2) = c_1$ .

## 6. ТЕОРЕМА КУШНИРЕНКО

Одно из замечательных глобальных свойств многогранника Ньютона содержится в следующей теореме:

**ТЕОРЕМА 7** (КУШНИРЕНКО [3]). *Рассмотрим систему полиномиальных уравнений с комплексными коэффициентами*

$$\varphi_1(u_1, \dots, u_n) = 0, \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

*Предположим, что все многочлены  $\varphi_i$  имеют одинаковые многогранники Ньютона  $\Delta$ , и их коэффициенты находятся в общем положении. Тогда система имеет ровно  $n! \text{Vol}(\Delta)$  решений в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ , т. е. комплексных решений  $(u_1, \dots, u_n)$ , удовлетворяющих условию  $u_1, \dots, u_n \neq 0$ . Здесь  $\text{Vol}(\Delta)$  обозначает  $n$ -мерный объём многогранника  $\Delta$ .*

То, что коэффициенты системы находятся в общем положении, говорит вот о чем. Мы фиксируем целочисленный многогранник  $\Delta$ . Любой многочлен, многогранник Ньютона которого совпадает с  $\Delta$ , имеет вид

$$\sum_{a \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_a x^a,$$

где  $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  пробегает все целые точки в многограннике  $\Delta$ , а  $x^a$  — это моном  $u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n}$  (мы обозначаем через  $x$  точку из  $\mathbb{C}^n$  с координатами  $u_1, \dots, u_n$ ). Таким образом, многочлен с многогранником Ньютона  $\Delta$  однозначно задаётся набором коэффициентов  $\lambda_a$ . Многочлен общего положения с фиксированным многогранником Ньютона  $\Delta$  — это многочлен, набор коэффициентов  $\lambda_a$  которого находится в общем положении. Теорема Кушниренко, таким образом, выполнена для всех систем уравнений с многогранником Ньютона  $\Delta$ , если только коэффициенты этих уравнений не удовлетворяют некоторому нетривиальному алгебраическому соотношению.

Заметим, что условие  $u_1, \dots, u_n \neq 0$  существенно. Дело в том, что для многих многогранников  $\Delta$ , как бы мы ни выбирали коэффициенты многочленов  $\varphi_i$  с многогранником  $\Delta$ , всегда будут неизолированные корни в объединении координатных плоскостей. Более того, очень часто все точки пространства  $\mathbb{C}^n$ , у которых хотя бы одна координата обращается в нуль, служат решениями рассматриваемой системы (определите, каким условиям должен удовлетворять многогранник Ньютона, чтобы это было так). Впрочем, если начало координат содержится в многограннике  $\Delta$ , требование  $u_1, \dots, u_n \neq 0$  можно убрать. Есть, однако, ещё одна, чуть более концептуальная, причина, по которой требование  $u_1, \dots, u_n \neq 0$  является естественным. Дело в том, что при таком требовании, параллельный перенос многогранника Ньютона не меняет числа корней.

В теореме Кушниренко можно рассматривать не только многочлены, но и *многочлены Лорана*, то есть линейные комбинации мономов вида  $u_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot u_n^{\alpha_n}$ , в которых  $\alpha_i$  — целые числа, но не обязательно положительные. Многогранник Ньютона многочлена Лорана определяется точно так же, как и многогранник Ньютона многочлена. Конечно, теорема Кушниренко для многочленов Лорана является формальным следствием теоремы Кушниренко для многочленов. Однако, для дальнейшего не имеет смысла ограничиваться только многочленами, поскольку все, что мы собираемся сказать, в той же степени справедливо и для многочленов Лорана.

В этой статье мы наметим одно из доказательств теоремы Кушниренко (в настоящее время имеется пара десятков простых доказательств, использующих различные идеи; однако, когда теорема была впервые доказана, она была сложным передовым результатом).

**ЗАДАЧИ** Постройте явные примеры систем уравнений с многогранником Ньютона  $\Delta$ , имеющих ровно  $n! \text{Vol}(\Delta)$  корней в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ , где в качестве  $\Delta$  взяты следующие многогранники размерности  $n$ :

1. Координатный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ , заданный как множество точек  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m.$$

Здесь  $m$  — положительное целое число.

2. Координатный куб в  $\mathbb{R}^n$ , заданный как множество точек  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \alpha_i \leq m, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $m$  — положительное целое число.

3. Параллелограмм в  $\mathbb{R}^2$  с вершиной в нуле, натянутый на целочисленные векторы  $(a, b)$  и  $(c, d)$  (вершины этого параллелограмма — точки с координатами  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  и  $(a + c, b + d)$ ). Здесь  $n = 2$ .

4. Треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$  и  $(c, d)$ .

5. Восьмиугольник в  $\mathbb{R}^2$  с вершинами  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(0, 1)$ .

Заметим, что из теоремы Кушниренко вытекает, в частности, следующее качественное утверждение. Существует целое неотрицательное число  $d$  такое, что любая система общего положения с многогранником Ньютона  $\Delta$  имеет ровно  $d$  корней. Это утверждение является отражением общего принципа — одного из самых основных неформальных принципов комплексной алгебраической геометрии — «принципа сохранения числа».

## 7. НЕВЫРОЖДЕННЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему уравнений  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ , где  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — многочлены Лорана. Допустим, что точка  $x \in \mathbb{C}^n$  с координатами  $(u_1, \dots, u_n)$  является корнем этой системы. Корень  $x \in (\mathbb{C} - 0)^n$  называется *невырожденным*, если дифференциалы функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно независимы в точке  $x$ , другими словами, определитель  $J(x) = J(u_1, \dots, u_n)$  матрицы Якоби, общий член которой равен  $\partial\varphi_i/\partial u_j$ , отличен от нуля в точке  $x$ . Если корень  $x$  невырожден, то, по теореме об обратной функции, отображение  $\Phi: (\mathbb{C} - 0)^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , заданное формулой

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторой окрестностью точки  $x$  и некоторой окрестностью начала координат в  $\mathbb{C}^n$ . Система уравнений  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  называется *невырожденной* (в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ ), если все её корни невырождены в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ . В дальнейшем, мы будем всюду понимать невырожденность именно как невырожденность в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ .

Нам понадобится теорема, устанавливающая существование дискриминанта для следующего утверждения: общая система уравнений  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  в  $(\mathbb{C} - 0)^n$  невырожденна.

ТЕОРЕМА 8. *Рассмотрим систему уравнений Лорана*

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$$

*от  $n$  комплексных неизвестных, коэффициенты которой являются многочленами от параметров  $c_1, \dots, c_k$ . Предположим, что в число параметров входят свободные члены всех многочленов  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Если для хотя бы одного набора значений параметров рассматриваемая система имеет невырожденное решение, то существует ненулевой многочлен  $D$  от  $c_1, \dots, c_k$  такой, что  $D(c_1, \dots, c_k) = 0$  для всякой вырожденной системы.*

Идея доказательства этого утверждения состоит в следующем. Заметим, что  $J$  является многочленом Лорана. Поскольку  $J$  не равен тождественно нулю при некотором наборе значений параметров, множество точек в  $(\mathbb{C} - 0)^n$ , заданное уравнением  $J = 0$  при этих значениях параметров, мало. Другими словами, для почти всех точек из  $(\mathbb{C} - 0)^n$  якобиан  $J$  отличен от нуля. Можно по-разному придать точный смысл этому утверждению. Например, можно сказать, что множество нулей якобиана имеет меру нуль, или что оно нигде не плотно (см. задачи ниже).

Рассмотрим отображение  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , введённое выше, при том конкретном наборе значений параметров, при котором система имеет невырожденное решение. Образ множества нулей якобиана при отображении  $\Phi$  тоже должен быть мал. Это означает, что для почти любой

точки  $z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  в  $\mathbb{C}^n$  якобиан  $J(x)$  отличен от нуля во всех точках  $x \in (\mathbb{C} - 0)^n$  таких, что  $\Phi(x) = z$ . Другими словами, почти все значения  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  правых частей соответствуют невырожденным системам вида

$$\varphi_1 - \zeta_1 = 0, \dots, \varphi_n - \zeta_n = 0.$$

Поскольку свободные члены многочленов  $\varphi_i$  входят в число параметров, это означает, что в нашем семействе полиномиальных систем найдутся невырожденные системы. Более того, почти все (в некотором смысле) системы невырождены.

Условие вырожденности системы  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  переписывается как условие совместности переопределённой системы  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = J = 0$ . По теореме 6 существуют такие многочлены  $D$  и  $D_*$  от  $c_1, \dots, c_k$ , что вырожденность рассматриваемой системы уравнений влечёт равенство  $D(z) = 0$ , а само это равенство при условии  $D_*(z) \neq 0$  влечёт вырожденность системы. При этом многочлен  $D_*$  отличен от нуля в некоторых точках, в которых  $D$  равен нулю.

Если бы многочлен  $D$  был равен нулю, то отсюда бы следовало, что система вырождена для почти всех значений параметров  $c_1, \dots, c_k$ . Но мы знаем, что она невырождена для почти всех значений параметров. Значит, многочлен  $D$  отличен от нуля, что и требовалось доказать.

#### ЗАДАЧИ

1. Рассмотрим подмножество  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Мы говорим, что множество  $A$  имеет меру нуль, если для любого  $\varepsilon > 0$  его можно покрыть не более чем счётным числом шаров, сумма объёмов которых меньше, чем  $\varepsilon$ . Докажите, что любое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль, и что объединение не более чем счётного числа множеств меры нуль имеет меру нуль.
2. Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкое отображение, причём  $n \leq m$ . Докажите, что для любого множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  меры нуль множество  $F(A)$  тоже имеет меру нуль. *Указание:* рассмотрите сначала случай, когда множество  $A$  лежит в некотором шаре. Для каждого шара  $B$  в  $\mathbb{R}^n$  существует такая константа  $C > 0$ , что ограничение отображения  $F$  на шар  $B$  увеличивает объёмы шаров не более, чем в  $C$  раз.
3. Всё пространство  $\mathbb{R}^n$  нельзя представить в виде объединения двух множеств меры нуль.
4. Пусть  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  — отличный от нуля многочлен. Заметим, что пространство  $\mathbb{C}^n$  можно рассматривать как вещественное пространство  $\mathbb{R}^{2n}$ . В частности, имеет смысл говорить о множествах меры нуль в  $\mathbb{C}^n$ . Докажите, что множество всех точек, в которых  $f = 0$ , имеет меру нуль. *Указание:* одну из координат можно выразить как многозначную функцию остальных координат, пользуясь соотношением  $f = 0$ .
5. Рассмотрим множество  $A \subset \mathbb{C}^n$  меры нуль. Предположим, что заданы два многочлена  $D$  и  $D_*$  на  $\mathbb{C}^n$  со следующими свойствами. Множество точек, в которых  $D = 0$ , не является подмножеством множества точек, в которых  $D_* = 0$ .

Кроме того, всякая точка множества  $A$  удовлетворяет уравнению  $D = 0$ , а всякая точка, в которой  $D = 0$  и  $D_* \neq 0$ , принадлежит множеству  $A$ . Тогда многочлен  $D$  отличен от нуля.

## 8. ТЕОРЕМА ГИЛЬБЕРТА

Теорема Гильберта устанавливает связь между числом корней общей системы уравнений на некотором множестве и размерностью пространств функций на этом множестве. Теорема может быть сформулирована в очень общей ситуации, но мы сформулируем только частный случай, который требует меньше всего специальной терминологии.

Пусть  $L$  — некоторое конечномерное пространство рациональных функций на  $\mathbb{C}^n$ . Напомним, что *рациональная функция* определяется как отношение двух многочленов и, вопреки терминологии, не является функцией на всем  $\mathbb{C}^n$ , а определена, вообще говоря, только в тех точках, где знаменатель отличен от нуля. Так как  $L$  — конечномерное пространство, существует ненулевой многочлен  $Q$ , служащий общим знаменателем для всех функций из  $L$ . Достаточно рассмотреть любую конечную систему образующих пространства  $L$ , и взять в качестве  $Q$  общий знаменатель этих образующих. Определим множество  $X$  как множество точек  $x \in \mathbb{C}^n$  таких, что  $Q(x) \neq 0$ . Тогда всякий элемент пространства  $L$  представляет собой функцию на  $X$ . Можно даже с самого начала считать, что пространство  $L$  состоит из функций на  $X$ .

Дадим теперь два общих определения, относящихся к любому множеству  $X$  и векторному пространству  $L$  функций на  $X$  со значениями, скажем, в поле комплексных чисел. Мы будем говорить, что  $L$  *содержит константы*, если функция на  $X$ , тождественно равная 1, принадлежит пространству  $L$ . Тогда, для всякого комплексного числа  $\lambda$ , функция на  $X$ , тождественно равная  $\lambda$ , также принадлежит пространству  $L$ . Скажем, что  $L$  *разделяет точки множества  $X$* , если для любых двух различных точек  $x, y \in X$  найдётся такая функция  $f \in L$ , что  $f(x) \neq f(y)$ . Обозначим через  $L^k$  векторное пространство функций на  $X$ , порождённое всевозможными  $k$ -кратными произведениями функций из  $L$ . Функция  $h_L(k) = \dim L^k$  называется *функцией Гильберта* пространства  $L$ .

**ТЕОРЕМА 9 (ГИЛЬБЕРТ).** Пусть  $L$  — конечномерное векторное пространство рациональных функций на  $\mathbb{C}^n$ , а  $X$  — дополнение в  $\mathbb{C}^n$  до множества нулей общего знаменателя пространства  $L$ . Предположим, что пространство  $L$  содержит константы и разделяет точки множества  $X$ . Если функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L$  находятся в общем положении, то система уравнений

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$$

имеет ровно  $d$  корней в  $X$ , где

$$d = n! \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_L(k)}{k^n}.$$

Рассмотрим прямое произведение  $L^{\times n}$  (=прямую сумму)  $n$  копий пространства  $L$ . Пространство  $L^{\times n}$  является конечномерным комплексным векторным пространством относительно покомпонентных операций сложения и умножения на комплексные числа. Всякая точка пространства  $L^{\times n}$  кодирует систему уравнений. А именно, если  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , то мы будем писать  $\Phi = 0$  для обозначения системы  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$ . Здесь элемент  $\Phi$  следует интерпретировать как отображение из  $X$  в  $\mathbb{C}^n$ , переводящее элемент  $x \in X$  в вектор  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ . Набор функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  общего положения — это такой набор функций, что соответствующая точка в  $L^{\times n}$  находится в общем положении.

Наметим теперь, как, используя теорему Гильберта, доказать теорему Кушниренко. Рассмотрим целочисленный многогранник  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$ . Мы хотим найти число корней в  $X = (\mathbb{C} - 0)^n$  у общей системы уравнений вида

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0,$$

где  $\varphi_k$  — многочлены с многогранником Ньютона  $\Delta$ . Обозначим через  $L(\Delta)$  пространство всех многочленов Лорана, многогранники Ньютона которых лежат в  $\Delta$ . Предположим (хотя это не всегда так), что пространство  $L(\Delta)$  содержит константы и разделяет точки. В этом случае, мы можем воспользоваться теоремой Гильберта — число корней общей системы с многогранником Ньютона  $\Delta$  равно

$$d = n! \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_{L(\Delta)}(k)}{k^n}.$$

Пусть  $A$  — множество всех целых точек в многограннике  $\Delta$ . Тогда  $h_{L(\Delta)}(k)$  равно числу точек в множестве  $k * A$ . В самом деле, поскольку пространство  $L(\Delta)$  порождается мономами  $x^a$ , где  $a \in A$ , пространство  $L(\Delta)^k$  порождается всевозможными  $k$ -кратными произведениями таких мономов, то есть мономами вида  $x^b$ , где  $b \in k * A$ . Разные мономы вида  $x^b$ , очевидно, линейно независимы. Согласно теореме 5, число точек в множестве  $k * A$  асимптотически равно объёму многогранника  $k\Delta$ , который, в свою очередь, равен  $k^n \text{Vol}(\Delta)$ . Следовательно,  $d = n! \text{Vol}(\Delta)$ , что и утверждает теорема Кушниренко.

### Задачи

1. Докажите, что пространство  $L(\Delta)$  содержит константы тогда и только тогда, когда многогранник  $\Delta$  содержит начало координат.
2. Если все уравнения системы  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  умножить на один и тот же моном, то число корней в  $(\mathbb{C} - 0)^n$  от этого не изменится (и даже сами корни



останутся теми же). Поэтому любая система уравнений, левые части которой принадлежат  $L(\Delta)$ , эквивалентна системе уравнений, левые части которой принадлежат  $L(\Delta - a)$ , где  $a \in \mathbb{Z}^n$  — произвольная точка. Выбирая  $a$  в многограннике  $\Delta$ , мы сведём теорему Кушниренко к случаю, когда многогранник  $\Delta$  содержит начало координат.

3. К сожалению, пространство  $L(\Delta)$  не всегда разделяет точки множества  $(\mathbb{C} - 0)^n$ . Приведите пример такого многогранника  $\Delta$ . *Указание:* Рассмотрите тетраэдр  $\Delta$  с вершинами в точках  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  и  $(1, 1, 0)$ . Многогранник  $\Delta$  не содержит никаких других целых точек, кроме вершин. В самом деле, всякая точка многогранника  $\Delta$  имеет вид

$$(\beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta) = \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — неотрицательные действительные числа, связанные соотношением  $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ . Если этот вектор имеет хотя бы одну нулевую координату (скажем,  $\beta + \gamma = 0$ ), то по меньшей мере два из трёх чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  равны нулю (в нашем случае,  $\beta = \gamma = 0$ ). Если вектор целый, то оставшееся число (в нашем случае,  $\alpha$ ) равно нулю или единице, значит, вектор совпадает с одной из вершин многогранника  $\Delta$ . Пусть все три числа  $\alpha, \beta, \gamma$  положительны. Тогда

$$\beta + \gamma \geq 1, \quad \alpha + \gamma \geq 1, \quad \alpha + \beta \geq 1.$$

Складывая эти равенства, получаем  $2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 3$ , противоречие с условием  $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ . Таким образом, для многогранника  $\Delta$  из нашего примера пространство  $L(\Delta)$  порождено мономами  $1, u_2u_3, u_1u_3, u_1u_2$ . Все эти мономы принимают одинаковые значения в точках  $(1, 1, 1)$  и  $(-1, -1, -1)$ .

4. Пространство  $L(\Delta)$  разделяет точки множества  $(\mathbb{C} - 0)^n$  тогда и только тогда, когда подгруппа группы  $\mathbb{Z}^n$  по сложению, порождённая всеми целыми точками многогранника  $\Delta$ , совпадает с  $\mathbb{Z}^n$ . *Указание:* воспользуйтесь следующим алгебраическим фактом: для любой подгруппы  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ , существует базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $\mathbb{Z}^n$  и целые числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , такие, что векторы  $\lambda_1e_1, \dots, \lambda_ne_n$  образуют базис в решётке  $\Lambda$ .

5. Пусть  $\Delta$  — целочисленный многогранник в  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n$ , а  $k$  — достаточно большое натуральное число. Тогда пространство  $L(k\Delta)$  разделяет точки множества  $(\mathbb{C} - 0)^n$ .

Теорема Гильберта также включает в себя качественное утверждение, являющееся одним из выражений принципа сохранения числа. А именно, пусть  $L$  — конечномерное пространство рациональных функций на  $\mathbb{C}^n$ , а  $X$  — дополнение в  $\mathbb{C}^n$  до множества нулей общего знаменателя пространства  $L$ . Из теоремы Гильберта следует (по крайней мере, если  $L$  содержит константы и разделяет точки), что существует такое целое неотрицательное число  $d$ , что система общего положения

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0,$$

где  $\varphi_i \in L$ , имеет ровно  $d$  корней в  $X$ .

9. ПРОСТРАНСТВО  $L(\Delta)$ 

Рассмотрим целочисленный многогранник  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$ . В следующих двух разделах мы докажем теорему Гильберта для пространства  $L(\Delta)$ , а заодно уточним, что значит «система общего положения», то есть выясним, как выглядит соответствующий дискриминант. Всякую функцию  $\varphi \in L(\Delta)$  можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{a \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_a x^a, \quad \lambda_a \in \mathbb{C}.$$

Пусть  $\Gamma$  — грань многогранника  $\Delta$ . Обозначим через  $\varphi_\Gamma$  функцию

$$\varphi_\Gamma(x) = \sum_{a \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_a x^a.$$

Функция  $\varphi_\Gamma$ , называемая *сужением функции  $\varphi$  на грань  $\Gamma$* , состоит из тех членов многочлена  $\varphi$ , которые соответствуют точкам грани  $\Gamma$ . Заметим, что некоторой заменой переменных можно привести функцию  $\varphi_\Gamma$  к многочлену Лорана от меньшего числа комплексных переменных (количество существенных переменных равно размерности грани  $\Gamma$ ).

Рассмотрим элемент  $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$ . Если  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , то элемент  $\Phi_\Gamma$  определяется как  $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ , где  $\psi_i$  — сужение функции  $\varphi_i$  на грань  $\Gamma$ . Поскольку все функции  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , по существу, зависят от меньшего числа переменных, система  $\Phi_\Gamma = 0$  переопределена. Отсюда нетрудно вывести, что при достаточно общем выборе  $\Phi$ , эта система не имеет корней. Выражаясь точнее, на пространстве  $L(\Delta)^{\times n}$  определён ненулевой многочлен (зависящий от  $\Gamma$ ) со следующим свойством: если этот многочлен не обращается в нуль, то система  $\Phi_\Gamma = 0$  не имеет корней. Рассматривая произведение таких многочленов по всем собственным граням  $\Gamma$  многогранника  $\Delta$ , мы можем заключить, что система  $\Phi_\Gamma = 0$  не имеет корней ни для одной собственной грани  $\Gamma$ , если  $\Phi$  выбрана общим образом.

**ТЕОРЕМА 10.** Пусть  $X = (\mathbb{C} - 0)^n$ . Предположим, что  $L(\Delta)$  содержит константы и разделяет точки множества  $X$ . Рассмотрим элемент  $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$  такой, что система  $\Phi = 0$  невырождена, а системы  $\Phi_\Gamma = 0$  не имеют корней для всех собственных граней  $\Gamma$  многогранника  $\Delta$ . Тогда функция Гильберта  $h_{L(\Delta)}(k)$  асимптотически равна  $n! d k^n$ , где  $d$  — число корней системы  $\Phi = 0$ .

Заметим, что приведённое условие на элемент  $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$  действительно является условием общего положения. Про условия на сужения мы это уже обсудили. Нужно только убедиться в том, что система  $\Phi = 0$  невырождена, если  $\Phi$  находится в общем положении. Но это вытекает из теоремы 8, учитывая, что пространство  $L(\Delta)$  содержит константы и что можно привести пример такой системы с многогранником Ньютона,

лежащим в  $\Delta$ , которая имеет по крайней мере один невырожденный корень (приведите такой пример!).

Как мы видели, из этого варианта теоремы Гильберта вытекает теорема Кушниренко — в предположении, что пространство  $L(\Delta)$  содержит константы и разделяет точки. С другой стороны, как мы знаем, всегда можно предполагать, что пространство  $L(\Delta)$  содержит константы (этого можно добиться, помножив пространство  $L(\Delta)$  на подходящий моном). Но что делать, если  $L(\Delta)$  не разделяет точки? Как мы видели (см. задачи в разделе 8), это означает, что целые точки в многограннике  $\Delta$  не порождают решётку  $\mathbb{Z}^n$  как группу по сложению.

Рассмотрим систему уравнений  $\Phi = 0$  с многогранником Ньютона  $\Delta$ , удовлетворяющую всем условиям теоремы 10 (за исключением того, что  $L(\Delta)$  разделяет точки — имеются в виду именно условия на систему  $\Phi = 0$ , а не условия на многогранник Ньютона). Теперь подставим вместо  $x$  набор координат  $(u_1^k, \dots, u_n^k)$ , где  $k$  — целое положительное число. Получится новая система с переменными  $u_1, \dots, u_n$ . Как легко видеть, многогранник Ньютона новой системы равен  $k\Delta$ . Кроме того, нетрудно проверить, что новая система тоже будет удовлетворять всем условиям теоремы 10, и что всякому корню старой системы соответствует ровно  $k^n$  корней новой системы (получающихся за счёт неоднозначности извлечения корня  $k$ -й степени из комплексного числа). При достаточно большом  $k$  пространство  $L(k\Delta)$  будет разделять точки, и мы можем воспользоваться теоремой Кушниренко для многогранника  $k\Delta$ . Согласно этой теореме, новая система имеет ровно

$$n! \text{Vol}(k\Delta) = k^n n! \text{Vol}(\Delta)$$

корней. С другой стороны, число корней новой системы ровно в  $k^n$  раз больше числа корней старой системы. Значит, старая система имела ровно  $n! \text{Vol}(\Delta)$  корней, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 10 будет состоять из двух явных оценок на функцию Гильберта пространства  $L(\Delta)$  в терминах числа  $d$ .

### Задачи

1. Пусть  $W$  — некоторое векторное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , порождённое целочисленными векторами. Тогда найдётся система векторов  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}^n$  такая, что любой вектор  $a$  из  $W \cap \mathbb{Z}^n$  единственным образом записывается в виде

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r,$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ . Здесь число  $r$  совпадает с размерностью пространства  $W$ . Система векторов  $a_1, \dots, a_r$  с указанным свойством называется *базисом решётки*  $W \cap \mathbb{Z}^n$ .

2. Предположим, что многогранник Ньютона  $\Delta$  многочлена Лорана  $f$  лежит в аффинном подпространстве пространства  $\mathbb{R}^n$ , проходящем через точку  $a \in \mathbb{Z}^n$

и параллельном векторному подпространству  $W \subset \mathbb{R}^n$ . Обозначим через  $a_1, \dots, a_r$  базис решётки  $W \cap \mathbb{Z}^n$ . Докажите, что многочлен Лорана  $x^{-a}f$  может быть записан как многочлен Лорана от  $x^{a_1}, \dots, x^{a_r}$ .

## 10. ОЦЕНКА СНИЗУ

В этом разделе мы докажем, что функция Гильберта пространства  $L(\Delta)$  растёт не слишком медленно. Нам понадобится следующая версия интерполяционной теоремы Лагранжа.

**ТЕОРЕМА 11.** *Рассмотрим множество  $Y$  из  $d < \infty$  точек, а также некоторое пространство  $L$  комплекснозначных функций на  $Y$ . Предположим, что  $L$  содержит константы и разделяет точки. Тогда для всякого целого числа  $k \geq d-1$ , пространство  $L^k$  совпадает с пространством всех функций на  $Y$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для каждого элемента  $x \in Y$ , определим функцию  $\delta_x$ , которая равна единице в точке  $x$  и нулю во всех остальных точках множества  $Y$ . Покажем, что  $\delta_x \in L^{d-1}$ . Для каждого элемента  $y \in Y$ , отличного от  $x$ , выберем функцию  $f_y \in L$  такую, что  $f_y(x) \neq f_y(y)$ . Такая функция существует, поскольку  $L$  разделяет точки. Теперь заметим, что

$$\delta_x = \prod_{y \neq x} \frac{f_y - f_y(y)}{f_y(x) - f_y(y)}.$$

Поскольку правая часть является произведением  $d-1$  функции из  $L$ , мы получаем, что  $\delta_x \in L^{d-1}$  (мы здесь воспользовались тем, что константы  $f_y(x), f_y(y)$  принадлежат пространству  $L$ ). Как легко видеть, любую функцию  $f$  на  $Y$  можно представить как линейную комбинацию функций  $\delta_x$ :

$$f = \sum_{x \in Y} f(x) \delta_x.$$

Следовательно, пространство  $L^{d-1}$  совпадает с пространством всех функций на  $Y$ . Для всех  $k \geq d-1$  пространство  $L^k$  тоже совпадает с пространством всех функций на  $Y$ , так как  $L$  содержит 1.  $\square$

Теперь мы можем доказать оценку снизу на рост функции Гильберта пространства  $L(\Delta)$ . При наших предположениях на многогранник  $\Delta$ , пространство  $L(\Delta)$  содержит константы и разделяет точки.

**ТЕОРЕМА 12.** *Допустим, что пространство  $L$  комплексных функций на некотором множестве  $X$  содержит константы и разделяет точки. Предположим также, что в  $X$  найдутся непересекающиеся подмножества  $U_1, \dots, U_d$  и функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L$  такие, что отображения*

$\Phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ , заданные формулами

$$\Phi_i(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

представляют взаимно однозначные соответствия между  $U_i$  и некоторыми открытыми подмножествами  $V_i$  в  $\mathbb{C}^n$ , содержащими 0. Наконец, потребуем, чтобы для всякой функции  $f \in L$  функции  $f \circ \Phi_i^{-1}$  были бесконечно дифференцируемыми в 0 в смысле комплексного анализа. Тогда имеет место оценка  $h_L(k + d - 1) \geq d \binom{n+k}{n}$ .

Заметим, что в условии теоремы поле  $\mathbb{C}$  можно заменить полем  $\mathbb{R}$  действительных чисел. Доказательство не изменится.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Начнём с элементарного вычисления. Нетрудно посчитать число мономов от  $n$  переменных степени  $\leq k$ . Оно в точности равно  $\binom{n+k}{n}$ . (Если читатель не знаком с этим вычислением, то рекомендуется его проделать; идея состоит в том, что всякий такой моном можно закодировать последовательностью из  $k$  нулей и  $n$  единиц, в которой нули кодируют переменные или константу 1, а единицы отделяют различные переменные друг от друга, а также переменные от константы 1).

Рассмотрим теперь векторное пространство  $\mathcal{P}_k$  над полем комплексных чисел, состоящее из наборов  $(p_1, \dots, p_d)$  многочленов  $p_i$  на  $\mathbb{C}^n$  степени не выше  $k$ . Размерность пространства  $\mathcal{P}_k$  равна  $d \binom{n+k}{n}$ , согласно упомянутому вычислению. Операции сложения векторов и умножения векторов на комплексные числа в пространстве  $\mathcal{P}_k$  выполняются покомпонентно. Определим линейное отображение  $\pi_k: L^{k+d-1} \rightarrow \mathcal{P}_k$  следующим образом: функция  $f \in L^{k+d-1}$  переходит в набор  $(p_1, \dots, p_d)$ , в котором многочлен  $p_i$  представляет члены порядка  $\leq k$  в степенном разложении функции  $f \circ \Phi_i^{-1}$  в начале координат.

Мы хотим доказать, что образ пространства  $L^{k+d-1}$  при отображении  $\pi_k$  совпадает с  $\mathcal{P}_k$ . Другими словами, для всякого набора многочленов  $p_1, \dots, p_d$ , можно найти функцию  $f \in L^{k+d-1}$  такую, что степенное разложение функции  $f \circ \Phi_i^{-1}$  в окрестности начала координат начинается в точности с многочлена  $p_i$ . Достаточно предположить, что один многочлен  $p_i$  является мономом степени  $k$ , а остальные многочлены равны нулю. Если мы докажем утверждение для этого частного случая, то, пользуясь отображениями  $\pi_k$  при различных  $k$  и свойством линейности этих отображений, можно получить и общее утверждение. Итак, допустим, что

$$p_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \zeta_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \zeta_n^{a_n}.$$

Рассмотрим функцию  $f_0 = \varphi_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \varphi_n^{a_n}$ . Ясно, что  $\pi_k(f_0)$  имеет вид  $(p_i, \dots, p_i)$  (на всех местах стоит один и тот же моном  $p_i$ ). Это вытекает из того, что функция  $\varphi_j \circ \Phi_l^{-1}$  совпадает с  $\zeta_j$  для каждого  $l = 1, \dots, d$ . Пусть  $x_i = \Phi_i^{-1}(0)$ . Тогда функция  $f = \delta_{x_i} f_0$  удовлетворяет условию

$\pi_k(f) = (0, \dots, p_i, \dots, 0)$  (на  $i$ -м месте стоит  $p_i$ , на остальных местах нули). Кроме того, как нетрудно видеть,  $f \in L^{k+d-1}$ .  $\square$

Мы можем применить эту теорему к пространствам  $X = (\mathbb{C} - 0)^n$  и  $L = L(\Delta)$ . Если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L(\Delta)$ , и система уравнений  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  невырождена, то, по теореме об обратной функции, найдутся такие непересекающиеся окрестности  $U_1, \dots, U_d$  корней этой системы, что отображение  $\Phi: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ , заданное формулой

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $U_i$  и некоторыми окрестностями начала координат в  $\mathbb{C}^n$ . Обозначим через  $\Phi_i$  ограничение отображения  $\Phi$  на  $U_i$ . Легко видеть, что все условия теоремы 12 выполнены. Мы можем заключить, что функция Гильберта пространства  $L(\Delta)$  удовлетворяет неравенству

$$\dim L(\Delta)^k \geq d \binom{n+k}{n}.$$

## 11. ОЦЕНКА СВЕРХУ

Наконец, нам нужно построить оценку сверху на рост функции Гильберта пространства  $L(\Delta)$ . Первый шаг такой.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.** Пусть система  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in L(\Delta)^{\times n}$  удовлетворяет всем условиям теоремы 10. Тогда для всякой функции  $f \in L(\Delta)$  найдётся такая константа  $C > 0$ , что

$$|f| \leq C(|\varphi_1| + \dots + |\varphi_n| + 1).$$

Последнее неравенство (оценка сверху для  $|f|$ ) означает, что, неформально говоря, у системы  $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$  нет корней на бесконечности. Доказательство этого предложения будет разбито на задачи. При этом используются задачи 3 и 4 из раздела 1.

### Задачи

1. Рассмотрим систему функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L(\Delta)$  и некоторую точку  $a \in \Delta$ . Предположим, что для всякого  $\varepsilon > 0$  найдётся точка  $x \in X = (\mathbb{C} - 0)^n$  такая, что

$$|\varphi_1(x)| + \dots + |\varphi_n(x)| < \varepsilon|x^a|,$$

и при этом  $|x^a|$  сколь угодно велико. Тогда найдётся собственная грань  $\Gamma$  многогранника  $\Delta$  со следующим свойством: для всякого  $\varepsilon > 0$  найдётся точка  $x \in X$  такая, что

$$|\varphi_{1,\Gamma}(x)| + \dots + |\varphi_{n,\Gamma}(x)| < \varepsilon|x^b|,$$

где  $b$  — некоторая целая точка грани  $\Gamma$ . Здесь  $\varphi_{i,\Gamma}$  обозначает сужение функции  $\varphi_i$  на грань  $\Gamma$ .

2. Предположим, что система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L(\Delta)$  обладает следующим свойством: для всякой собственной грани  $\Gamma$  многогранника  $\Delta$ , функции  $\varphi_{i,\Gamma}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , не обращаются одновременно в нуль на  $X$ . Тогда для всякой функции  $f \in L(\Delta)$  найдётся такая константа  $C > 0$ , что  $|f| \leq C(|\varphi_1| + \dots + |\varphi_n| + 1)$ .

Рассмотрим систему  $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$ , удовлетворяющую всем условиям теоремы 10. Напомним, что  $\Phi$  можно рассматривать как функцию из  $X = (\mathbb{C} - 0)^n$  в  $\mathbb{C}^n$ . Существует ненулевой многочлен  $D$  от  $n$  переменных, такой, что при  $D(z) \neq 0$ , система уравнений  $\Phi(x) = z$  имеет ровно  $d$  корней. Это вытекает из теоремы 8. Заметим, что  $\Phi - z \in L(\Delta)^{\times n}$ , поскольку пространство  $L(\Delta)$  содержит константы. Пусть  $f \in L(\Delta)^k$  (напомним, что пространство  $L(\Delta)^k$  порождается всевозможными  $k$ -кратными произведениями элементов пространства  $L(\Delta)$ ). Определим такую функцию:

$$S_f(z) = \sum_{\Phi(x)=z} f(x),$$

где сумма берётся по всем корням  $x \in X$  системы уравнений  $\Phi(x) = z$ . Эта функция определена для всех значений  $z$ , для которых  $D(z) \neq 0$ . Нам понадобится следующее утверждение

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.** *Если  $f \in L(\Delta)^k$ , то функция  $S_f$  однозначно продолжается до некоторого многочлена степени  $\leq k$ .*

Доказательство этого утверждения будет представлено в виде ряда задач. Но сначала, пользуясь этим утверждением, мы докажем верхнюю оценку на размерность пространства  $L(\Delta)^k$ .

**ТЕОРЕМА 15.** *В предположениях теоремы 10, функция Гильберта пространства  $L(\Delta)$  оценивается сверху следующим образом:*

$$\dim L^k(\Delta) \leq d \binom{n+k+d-1}{n}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $x_1^0, \dots, x_d^0$  — все корни невырожденной системы  $\Phi(x) = 0$ . Рассмотрим такие функции  $g_1, \dots, g_d \in L^{d-1}(\Delta)$ , что  $g_i$  равна единице в точке  $x_i^0$  и нулю во всех точках  $x_j^0$ ,  $j \neq i$ . Тогда, для всякого  $z \in \mathbb{C}^n$  достаточно близкого к нулю, векторы  $(g_i(x_1), \dots, g_i(x_d))$  (где  $x_1, \dots, x_d$  — все корни системы  $\Phi(x) = z$ ) линейно независимы. Согласно предложению 14, функции  $S_{fg_i}$  однозначно продолжаются до некоторых многочленов степени  $k+d-1$  на  $\mathbb{C}^n$ .

Пусть  $p_1, \dots, p_d$  — многочлены степени  $k+d-1$  на  $\mathbb{C}^n$ . Допустим, мы знаем, что  $S_{fg_i} = p_i$  при всех  $i = 1, \dots, d$ . Из этого условия функция  $f$  восстанавливается однозначно. В самом деле, для того, чтобы найти значения функции  $f$  во всех корнях  $x$  системы уравнений  $\Phi(x) = z$ , нужно

решить линейную систему

$$\begin{aligned} g_1(x_1)f(x_1) + \cdots + g_1(x_d)f(x_d) &= p_1(z), \\ &\cdots \\ g_d(x_d)f(x_d) + \cdots + g_d(x_d)f(x_d) &= p_d(z) \end{aligned}$$

относительно неизвестных  $f(x_1), \dots, f(x_d)$ . Согласно нашему выбору функций  $g_i$ , эта система имеет единственное решение при достаточно малых  $z$ . Таким образом, функция  $f$  полностью восстанавливается, по крайней мере, для таких точек  $x \in X$ , что  $\Phi(x)$  лежит в малой окрестности начала координат. Однако, будучи многочленом Лорана, функция  $f$  уже полностью определяется этими значениями (мы пользуемся таким простым фактом: если два многочлена Лорана совпадают на открытом множестве, то они совпадают везде).

Теперь, чтобы оценить сверху размерность пространства функций  $f \in L^k(\Delta)$ , достаточно посчитать размерность пространства  $\mathcal{P}_{k+d-1}$  всех наборов  $(p_1, \dots, p_d)$  из многочленов степени  $\leq k+d-1$  на  $\mathbb{C}^n$ . Размерность последнего пространства мы уже вычисляли, она равна

$$d \binom{n+k+d-1}{n}.$$

Тем самым желаемая оценка доказана.  $\square$

Мы теперь получили как верхнюю, так и нижнюю оценку для функции Гильберта пространства  $L(\Delta)$ . Заметим, что обе оценки асимптотически равны  $\frac{d}{n!}k^n$ . Это завершает доказательство теоремы 10.

Нам осталось только доказать предложение 14: для  $f \in L^k(\Delta)$  функция  $S_f$  однозначно продолжается до полинома на  $\mathbb{C}^n$ , степень которого не превосходит  $k$ . Это доказательство разбито на задачи, некоторые из которых требуют знакомства с одномерным комплексным анализом (а именно, с простейшими свойствами голоморфных функций от одной переменной).

**ЗАДАЧИ.** Напомним, что функция  $S_f$  определена на дополнении в  $\mathbb{C}^n$  ко множеству  $D = 0$ , где  $D$  — некоторый ненулевой многочлен.

1. Докажите, что существует такая константа  $C' > 0$ , что

$$|S_f(z)| \leq C'(|z_1| + \cdots + |z_n| + 1)^k.$$

*Указание:* это вытекает из имеющейся оценки на функцию  $f$ :

$$|f| \leq C(|\varphi_1| + \cdots + |\varphi_n| + 1).$$

2. Пусть  $\Lambda$  — такая прямая в  $\mathbb{C}^n$ , что ограничение многочлена  $D$  на  $\Lambda$  не равно тождественно нулю. Тогда, по основной теореме алгебры, ограничение многочлена  $D$  на  $\Lambda$  обращается в нуль только в конечном числе точек. Рассмотрим ограничение функции  $S_f$  на прямую  $\Lambda$ . Докажите, что это ограничение однозначно



продолжается до многочлена на  $\Lambda$  степени  $\leq k$ . *Указание:* воспользуйтесь следующим фактом, вытекающим из теоремы об устранимой особенности и теоремы Лиувилля: если голоморфная функция  $h$  от одной комплексной переменной определена на всем  $\mathbb{C}$ , за исключением конечного числа точек, ограничена в некоторых проколотых окрестностях этих точек, и удовлетворяет неравенству  $|h(u)| \leq C(|u| + 1)^k$  во всей области определения для некоторых  $C, k > 0$ , то  $h$  однозначно продолжается до многочлена на  $\mathbb{C}$ , степень которого не превышает  $k$ .

3. Предположим, что функция  $F$  определена на  $\mathbb{C}^2$ , и что ограничение этой функции на всякую прямую в  $\mathbb{C}^2$  является многочленом степени не выше  $k$ . Тогда и сама функция  $F$  является многочленом степени не выше  $k$ . *Указание:* рассмотрим набор из  $k + 1$  параллельных прямых. Введём координаты  $(u, v)$  на  $\mathbb{C}^2$ , такие, что выбранные параллельные прямые задаются уравнениями  $v = v_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ . По предположению, функции  $F_i(u) = F(u, v_i)$  являются многочленами от  $u$ . Определим многочлен  $G$  по формуле

$$G(u, v) = \sum_{i=0}^k F_i(u) \frac{\prod_{j \neq i} (v - v_j)}{\prod_{j \neq i} (v_i - v_j)}.$$

Тогда  $G$  совпадает с  $F$  на каждой прямой, пересекающей  $k + 1$  выбранных прямых. Следовательно,  $G = F$  всюду.

4. Докажите, что функция  $S_f$ , определённая выше, однозначно продолжается до многочлена на  $\mathbb{C}^n$ , степень которого не превосходит  $k$ . *Указание:* воспользуйтесь результатом задачи 2, и обобщите рассуждения из задачи 3.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.Г. Хованский. *Многогранник Ньютона, полином Гильберта и суммы конечных множеств* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 26, вып. 4, 1992. С. 57–63.
- [2] А.Г. Хованский. *Суммы конечных множеств, орбиты коммутативных полугрупп и функции Гильберта* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 29, вып. 2, 1995. С. 36–50.
- [3] A.G. Kouchnirenko. *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor* // Invent. Math. Vol. 32, no. 1, 1976. P. 1–31.

---

Владлен Анатольевич Тиморин, факультет математики, Высшая Школа Экономики.

Email: vtimorin@hse.ru

Аскольд Георгиевич Хованский, Институт Системных Исследований РАН, отделение математики, университет Торонто, Канада

Email: askold@math.toronto.edu

---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

---

## Проекция Меркатора, логарифм и мореплавание

А. В. Боровик      О. М. Худавердян

Для нетерпеливого и грамотного читателя сразу оговоримся, что основное математическое содержание этого этюда сводится к классическому предложению:

*цилиндр — униформизирующая поверхность для логарифма.*

Тем не менее думается, что содержание нашей заметки — интерпретация проекции Меркатора как логарифма в комплексной области — в той или иной степени должно входить в любой курс комплексного анализа — но почему-то мы там этого не нашли.<sup>1)</sup>

### 1. ИСТОРИЧЕСКОЕ ПРЕДИСЛОВИЕ

Если корабль должен из точки А приплыть в точку В, как ему проложить маршрут? Конечно, кратчайшее расстояние — это дуга большого круга. Но чтобы проложить такой маршрут, нужно уметь определять местоположение корабля в любой точке пути. А представьте, что на корабле есть только компас и скорость корабля точному измерению не поддаётся. Тогда можно выбрать маршрут — траекторию, которая проходит через точки А и В и составляет постоянный угол с меридианами — локсодрому. Если этот угол известен, то с помощью компаса курс фиксируется.

---

<sup>1)</sup>Наш систематический (и все ещё продолжающийся) поиск в литературе привёл пока что только к одной современной книге, касающейся нашей главной темы. Эта книга — популярная история тригонометрии, написанная Эли Маором [11]. Тем не менее интерпретация проекции Меркатора как логарифма в комплексной области приводилась в старых учебниках комплексного анализа [6].

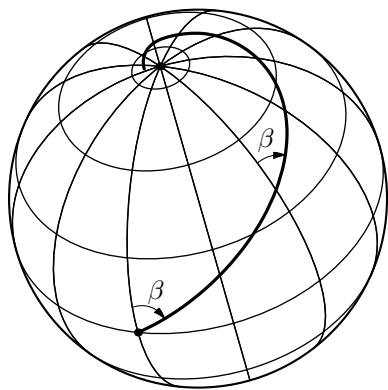


Рис. 1. Локсодрома

При этом, даже если скорость корабля не контролируется — что и было в парусную эпоху, то он всё равно не сбивается с курса! (Мы пренебрегаем сносом и течением). Мы видим как жизненно важна локсодрома и определение угла, который составляет локсодрома с меридианами.

Конечно, меридианы и параллели — локсодромы. Если точки А и Б имеют одинаковую долготу (широту), то надо держать курс на Север или на Юг (на Восток или на Запад). Как же быть если точки А и Б имеют разную долготу и разную широту?

А что если б можно было построить карту Земли в которой *все* локсодромы, не только меридианы и широты, были бы прямыми линиями?



Рис. 2. Корабельный компас в кардановой подвеске

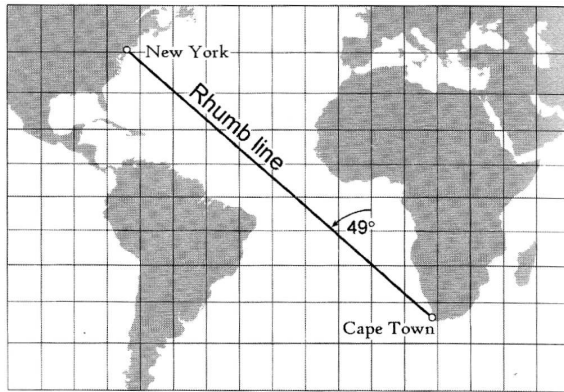


Рис. 3. Линия постоянного курса

Имея такую карту, капитан корабля с линейкой в руках одним движением карандаша, соединив точки А и В отрезком прямой, определял бы угол и соответственно фиксировал бы курс корабля.

Сразу же отметим, что многие карты мира, которые мы знаем с детства, этим свойством обладают. Это заслуга Меркатора.

Давайте попробуем повторить изобретение Меркатора. Мы, вооружённые знанием некоторых формул математики XX века, построим за Меркатора, то что он сделал в XVI веке (видимо, не применяя математики, а только следуя интуитивному пониманию, какие преобразования карты сохраняют углы). И сделав это, он на самом деле заложил основание этих формул.

Почти как у Мандельштама:

*Быть может, прежде губ уже родился шепот  
И в бездревесности кружились листы ...*

## 2. ЛОКСОДРОМЫ НА СФЕРЕ – ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ – ПРЯМЫЕ ЛИНИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

### 2.1. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Пусть  $\theta, \varphi$  – стандартные сферические координаты на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

тогда  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = R \cos \theta$  (рис. 4).

Если  $\alpha(t) = (\theta(t), \varphi(t))$  – кривая на сфере, то касательный вектор  $(x_t, y_t, z_t)$  к ней в точке  $(\theta, \varphi)$  равен

$$R(\cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \theta_t - \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \varphi_t, \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \theta_t + \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \varphi_t, -\sin \theta \cdot \theta_t),$$

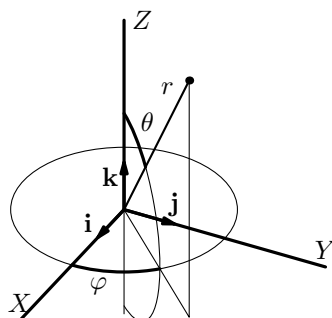


Рис. 4. Сферические координаты

а касательный вектор к меридиану  $\theta = t, \varphi = \text{const}$  в той же точке равен

$$R(\cos \theta \cdot \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta).$$

Поэтому косинус угла наклона  $\alpha(t)$  кривой к меридиану сразу находится из формулы для скалярного произведения и равен

$$\cos \alpha(t) = \frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2 \theta(t) \varphi_t^2(t)}}. \quad (1)$$

Кривая  $(\theta(t), \varphi(t))$  — локсодрома, если

$$\frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2 \theta(t) \varphi_t^2(t)}} = \text{const}, \quad \frac{\theta_t}{\varphi_t} = \pm \frac{c}{1 - c^2} \sin \theta. \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение локсодромы. Перейдя к параметру  $t = \varphi, \theta = \theta(\varphi)$  мы видим, что

$$\varphi(\theta) = k \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = k \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \varphi_0. \quad (3)$$

В случае когда  $\cos \alpha = 0, \theta_t \equiv 0$ , локсодрома — параллель  $\theta = \theta_0$ .

## 2.2. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Функция  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  напоминает нам о стереографической проекции. И это верное наблюдение.

При стереографической проекции сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

на плоскость  $z = 0$  каждая точка

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta$$

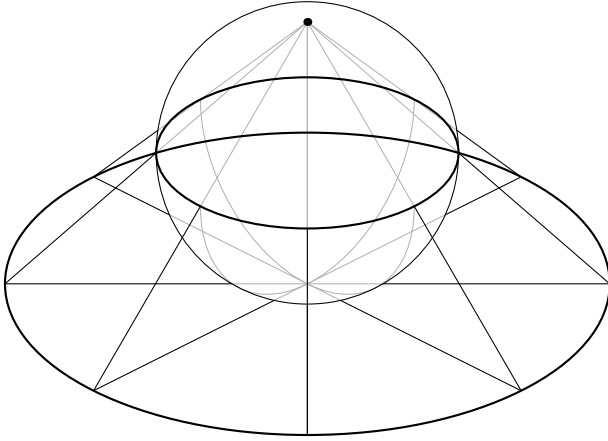


Рис. 5. Стереографическая проекция

сферы переходит в точку  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = 0$  такую, что эти две точки лежат на одной прямой с Северным полюсом, точкой  $(0, 0, 1)$ .

Следовательно, точка с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  на сфере переходит в такую точку с декартовыми координатами  $(u, v)$  на плоскости, что

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{1-z}{1},$$

то есть

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+u^2+v^2}, \\ y = \frac{v}{1+u^2+v^2}, \\ z = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u = \frac{x}{1-z}, \\ v = \frac{y}{1-z}. \end{cases} \quad (4)$$

### 2.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

Стереографическая проекция (4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между сферой (без северного полюса) и точками плоскости  $z = 0$ . Если  $r, \varphi$  — полярные координаты на плоскости  $z = 0$ ,  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{u}{v}$ , то получаем, что

$$\frac{r}{R \sin \theta} = \frac{R}{R(1 - \cos \theta)}, \quad R = r \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

(то же самое видно на рис. 6).

При стереографической проекции точка с сферическими координатами  $(\theta, \varphi)$  на сфере переходит в точку с плоскости  $z = 0$  с полярными

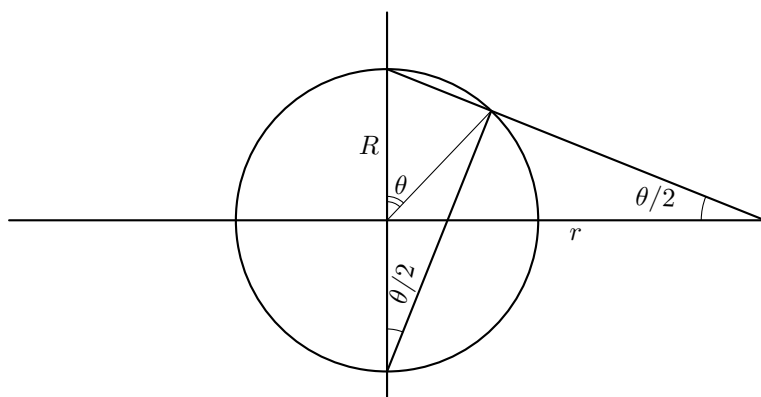


Рис. 6. Стереографическая проекция: формула (5)

координатами  $(R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \varphi)$ . Значит, образом локсодромы (3) в стереографической проекции будет кривая на плоскости  $z = 0$ , задаваемая уравнением

$$\varphi = k \log \frac{r}{R} + \varphi_0. \tag{6}$$

Это логарифмическая спираль (рис. 7). Немного позже мы объясним это явление качественно, используя азы конформной геометрии.

Заметим, что логарифмическая спираль характеризуется тем, что пересекает все выходящие из начала координат радиальные линии под постоянным углом. Насекомые летят на свечку по логарифмической спирали — у них есть инстинкт лететь под постоянным углом к источнику света.

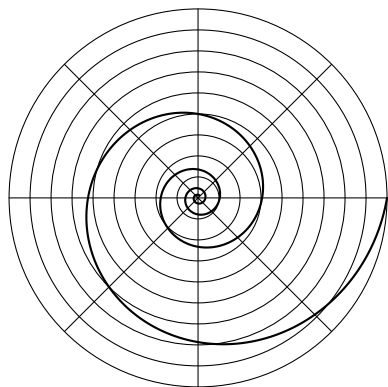


Рис. 7. Логарифмическая спираль

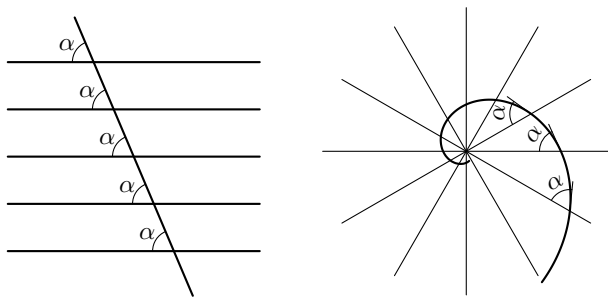


Рис. 8. Полет насекомого — по прямой и по спирали. Источник: Христо Бояджиев [5].

В природе источник света — солнце или луна, и их метод навигации обеспечивает насекомым полет по прямой линии — локсодроме их насекомого мира (рис. 8).

Интересно, что причина на то — инструментальная, точно как зависимость мореплавателя от компаса. У насекомых глаза фасеточные и состоят из многих узко направленных *омматидиев*, индивидуальных световых рецепторов (рис. 9). Луч света стимулирует небольшую группу омматидиев (их оптические оси расходятся под углами  $1^\circ$ – $6^\circ$ , см. [1]), тем самым задавая угол на источник света. Когда лучи параллельны и насекомые хотят лететь по прямой линии, они летят по такой линии, чтобы все время активировалась одна группа омматидиев [5, 7].

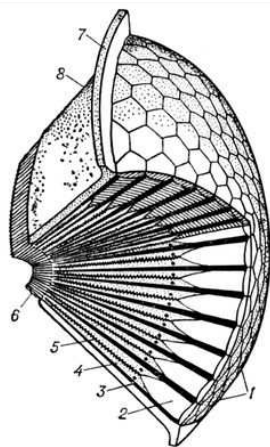


Рис. 9. Фасеточный глаз в разрезе





Рис. 10. Паутина. Паук сначала натягивает радиальные нити, а потом разматывает спираль, от центра к краю. Невольно кажется, что его проект основан на принципе постоянства углов между спиральными и радиальными нитями. Обратите внимание, что спираль много плотнее в центре, как и положено логарифмической спирали. Источник: [4]

#### 2.4. ПРОЕКЦИЯ МЕРКАТОРА

А теперь ровно один шаг до проекции Меркатора. Рассмотрим отображение  $W = \log \frac{Z}{R}$  комплексной плоскости  $Z = u + iv$  в комплексную плоскость  $W = s + it$ : если  $Z = u + iv = \rho e^{i\varphi}$ , то

$$W = \log \frac{Z}{R} = \log \frac{\rho}{R} + i\varphi, \text{ т. е. } s = \log \frac{\rho}{R}, t = \varphi. \quad (7)$$

Очевидно, что это отображение переводит образ локсодромы (6) в прямую. Композиция стереографической проекции и функции  $W = \log \frac{Z}{R}$

$$(\theta, \varphi) \mapsto R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \mapsto \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i\varphi \quad (8)$$

отображает локсодрому  $\varphi = k \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  на сфере в прямую  $t = ks$ . В частности меридианы  $\varphi = \varphi_0$  переходят в прямые  $t = \varphi_0$  и параллели  $\theta = \theta_0$  переходят в отрезки прямых  $s = \log \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}$ .

Конечно, для того чтобы функция  $W = \operatorname{Log} Z$  была определена на всей комплексной плоскости, нужно, например, отождествить в образе точки  $\pm i\pi t$ , то есть нужно полагать, что функция (7) принимает значения на цилиндре.

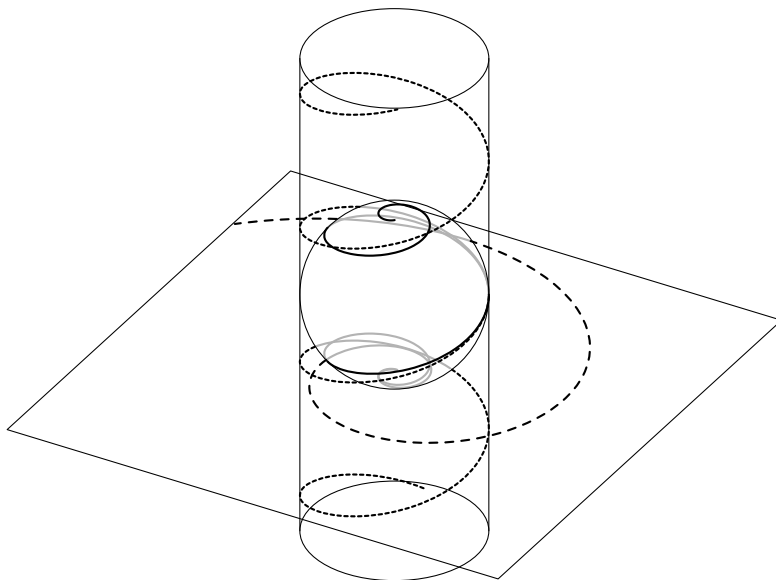


Рис. 11. Локсодрома на сфере, логарифмическая спираль на плоскости и винтовая линия на цилиндре

Подытожим наши вычисления. Мы показали, что отображение (8) отображает сферу с выколотыми полюсами на полосу

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi/2$$

с отождествлёнными краями (цилиндрическую поверхность); при этом все локсодромы, в том числе и меридианы, и параллели переходят в прямые линии (винтовые линии). Это и есть карта Земли по Меркатору (без Арктики и Антарктики).

Теперь попробуем уяснить смысл этих вычислений.

### 3. ПРОЕКЦИЯ МЕРКАТОРА КАК КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

#### 3.1. КОНФОРМНОСТЬ ПРОЕКЦИИ МЕРКАТОРА

В предыдущем разделе мы прямыми вычислениями, решив соответствующее дифференциальное уравнение, нашли локсодромы на сфере и увидели, что при стереографической проекции они превращаются в логарифмические спирали. Затем мы показали, что функция  $\text{Log } z$ , отображая сферу на прямоугольную полосу плоскости (более точно — сферу без полюсов на цилиндрическую поверхность). Обсудим это явление качественно.

При проекции Меркатора сохраняются углы локсодром с меридианами, значит и сохраняются углы между локсодромами. Отсюда следует, что проекция Меркатора — это конформное отображение: отображение сохраняет угол между любыми двумя векторами касательными к данной точке сферы.

### 3.2. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Стереографическая проекция сферы на плоскость — это тоже конформное отображение<sup>2)</sup>, при котором параллели переходят в концентрические окружности и меридианы переходят в лучи, исходящие из центра. Значит, каждая локсодрома в стереографической проекции должна пересекать все лучи, исходящие из начала координат, под одним и тем же углом. Это условие как раз и определяет логарифмическую спираль. Конформное отображение

$$Z \mapsto \text{Log } Z$$

отображает лучи, исходящие из начала координат, в прямые, параллельные вещественной прямой, и локсодромы, составляющие угол  $\alpha$  с меридианами, в прямые (винтовые линии), составляющие угол  $\alpha$  с вещественной прямой.

### 3.3. ПАРА ВЕЛИКИХ ИМЁН

И тут становится незаменимой великая идея Бернхарда Римана: при помощи стереографической проекции отождествить комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  со сферой, добавив к плоскости точку  $\infty$  на бесконечности, приравняв её к северному полюсу сферы; неудивительно, что эта конструкция называется *римановой сферой*. Идея рассматривать цилиндр как естественную область значений комплексного логарифма  $\text{Log } Z$  (тем самым избавляясь от всех проблем, порождаемых его многозначностью) тоже восходит к Риману; этот трюк называется *униформизацией*. Геометрия цилиндра, бесконечного в длину и периодического поперёк себя, воплощает в себе фундаментальный принцип периодичности экспоненциальной функции

$$z \mapsto e^z,$$

что происходит, конечно, потому что

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z,$$

---

<sup>2)</sup> Действительно, метрика сферы в стереографических координатах имеет вид  $\frac{du^2 + dv^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$  и потому отличается от стандартной евклидовой метрики  $du^2 + dv^2$  на плоскости только скалярным множителем. Следовательно, локально это гомотетия и потому сохраняет углы.

где в вычислении прячется великое тождество Эйлера<sup>3)</sup>

$$e^{\pi i} = -1.$$

Логарифм — обратная функция к экспоненте, и периодичность экспоненты делает логарифм многозначной функцией. При униформизации мы приравниваем точки с одинаковыми экспонентами, то есть отождествляем комплексные числа  $z$  и  $z + 2k\pi i$  для всех целых значений  $k$ ; но это и означает свернуть плоскость в цилиндр.<sup>4)</sup>

После этих отождествлений проекция Меркатора становится ничем иным, как самим логарифмом

$$Z \mapsto \text{Log } Z.$$

Вернёмся на секунду к насекомым, тем самым, которые летят под постоянным углом к источнику света. В природе источник света — солнце или луна — находится на бесконечности, что обеспечивает насекомым полет по прямой линии. Если же свет исходит из обманной свечки в начале координат  $Z = 0$ , то чешуекрылые навигаторы оказываются на логарифмической спирали, накручивающейся на свечку [5].<sup>5)</sup> Взятие логарифма посылает свечку в бесконечность и развёртывает спираль в спасительную прямую.

### 3.4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Очевидно, что отображение

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto az \end{aligned}$$

— конформное отображение, так как оно поворачивает каждый вектор  $z$  на угол  $\arg a$  и растягивает его в  $|a|$  раз. Но конформность — свойство, которому достаточно выполняться в «бесконечно малом» масштабе вокруг

<sup>3)</sup> Википедия утверждает, что знаменитая формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

была открыта в 1714 году Роджером Коутсом, причём в логарифмической форме:

$$\log(\cos x + i \sin x) = ix.$$

<sup>4)</sup> Поскольку  $z \mapsto \text{Log } z$  отображает комплексную плоскость на цилиндр, одна из конструкций логарифмической линейки для умножения комплексных чисел основана на этом принципе и соответственно имеет форму цилиндра, см. [3] (источник подсказан Рональдом Дорфлером).

<sup>5)</sup> Полезно помнить одно трагическое свойство логарифмической спирали: длина её накручивающейся части всегда конечна — несмотря на то, что она успевает сделать бесконечное число оборотов. Мы оставляем проверку этого классического факта как упражнение для читателя. Кстати, а остаётся ли свойство конечности длины верным применительно к локсодроме на сфере?

каждой точки. Поэтому если функция  $w = F(z)$  из некоторой области  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$  дифференцируема, то она в каждой точке этой области приближается линейной функцией,

$$\Delta w \approx F'(z)\Delta z,$$

и потому является конформным отображением. В частности, каждая аналитическая функция

$$z \mapsto a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

дифференцируема в своей области абсолютной сходимости и поему определяет конформное отображение. Верно и обратное — конформное отображение из открытой области вещественной плоскости  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , сохраняющее ориентацию — аналитическая функция. Действительно, условие конформности означает, что якобиан функции  $(x, y) \mapsto (u, v)$  положителен (сохранение ориентации) и матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

является произведением скалярной матрицы и матрицы ортогональной, что в точности и означает выполнение уравнений Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Остальное — классическая теория функций комплексной переменной. Заметим при этом, что взаимно однозначные конформные отображения римановой сферы с выколотыми полосами на цилиндр являются композициями логарифма и линейных функций. Мы оставляем проверку этого факта читателю.

### 3.5. ОБРАТНО К МАНДЕЛЬШТАМУ

А теперь немного общих рассуждений. Мы тут всё красиво объяснили, используя функцию комплексной переменной  $\text{Log } Z$ . Логарифм уже присутствовал, в скрытом виде, в самом принципе меркаторовой проекции как проекции, сохраняющей углы!

Трудно удержаться и не привести гениальное стихотворение Мандельштама полностью:

*И Шуберт на воде, и Моцарт в птичьей гаме,  
И Гете, свищущий на вьющейся тропе,  
И Гамлет, мысливший пугливыми шагами,  
Считали пульс толпы и верили толпе.  
Быть может, прежде губ уже родился шепот,*

*И в бездревесности кружились листы,  
И те, кому мы посвящаем опыт,  
До опыта приобрели черты.*

#### 4. НАЗАД В ИСТОРИЮ: КАК ЭТО ВСЁ НА САМОМ ДЕЛЕ БЫЛО

##### 4.1. МАТЕМАТИКА *без* МАТЕМАТИКИ или МАТЕМАТИКА *до* МАТЕМАТИКИ?

Меркатор так никогда и не объяснил, как он получил свою знаменитую карту. Но он жёстко настаивал, что она передаёт локсодромы прямыми линиями. Его главное достижение было в том, что он сформулировал понятие конформной карты как карты, правильно передающей углы.

Возможно, что Меркатор и действовал без математики, на голой интуиции. Она у него могла быть. Он был мастер изготовления точных и высоко художественных глобусов. Глобус делался из плоских бумажных долек (рис. 12), которые наклеивались на деревянный шар. Так как изометрично отобразить ни плоскость, ни её кусок на фрагмент сферы нельзя, необходима ручная подгонка — бумагу намачивали и растягивали, чтобы она плотно, без щелей и морщин легла на шар. Возможно, Меркатор чувствовал геометрию сферы кончиками пальцев.

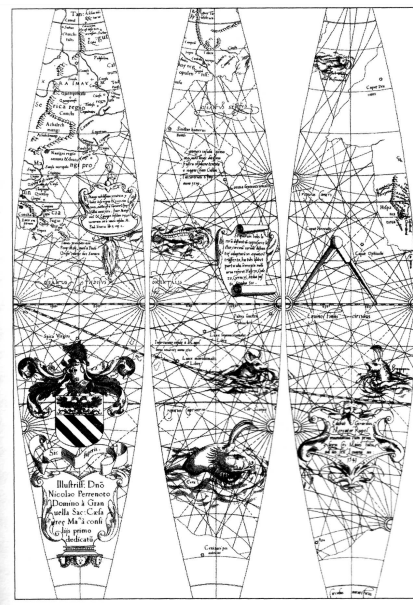


Рис. 12. Сегменты глобуса 1541 года

А ещё Меркатор был первым, кто предложил идею атласа, составленного из карт в одном масштабе и перекрывавшихся по краям — и ввёл само слово «атлас» в употребление. Математикам это тоже должно что-то такое напоминать . . .

#### 4.2. ЭДВАРД РАЙТ И СУММИРОВАНИЕ ИСКАЖЕНИЙ

По стандартам математики, Эдвард Райт (1561–1615) прожил колоритную жизнь. После изучения математики в Кембридже и нескольких лет преподавания, он был избран членом Кейз Колледжа в 1587 году. Завоевав репутацию эксперта по математическим методам навигации, в 1589 году он по приказу королевы Елизаветы был приписан в качестве навигатора к известной пиратской экспедиции Эрла Кумберлендского, охотившейся вокруг Азорских островов за испанскими золотыми галеонами. Протоколы колледжа деликатно упоминают, что Райту был предоставлен академический отпуск «по Высочайшему Указу».

В 1600 году он окончательно покинул Кембридж и переехал в Лондон, где принял пост советника по навигации Ост-Индской Компании. К тому времени он уже опубликовал свою знаменитую книгу.

Анализируя метод Меркатора, Райт начал искать формулы, которые описывали бы растяжение сегмента глобуса (вроде того, что изображён на рис. 12) в прямоугольную полоску. Принципиальное наблюдение Райта состоит в том, что длина дуги, зажатой между двумя меридианами на широте  $\varphi$  меняется обратно пропорционально  $\cos \varphi$  (рис. 13):

$$\frac{c}{c'} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi.$$

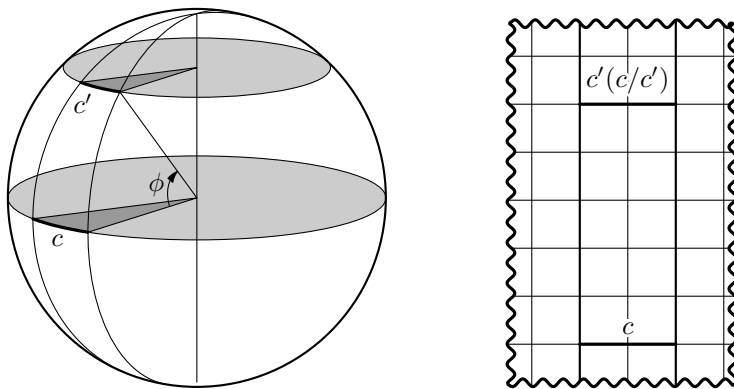


Рис. 13. Метод Райта: откуда берутся секансы

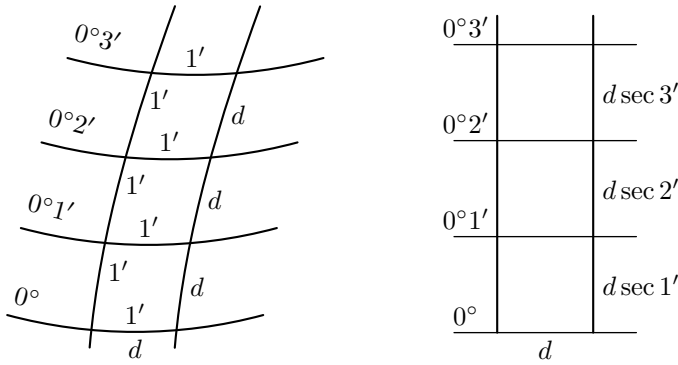


Рис. 14. Метод Райта: накапливающаяся поправка

Заметим, что широта  $\varphi$  отсчитывается от экватора, а не от южного полюса, как  $\theta$ , и потому

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 14 показано, как дольки сегментиков глобуса, образованные меридианами и параллелями, отстоящими на одну угловую минуту  $1'$  друг от друга, растягиваются в прямоугольники с одним и тем же основанием  $d$  (длина дуги одной минуты на экваторе). Мы ничего не делаем с самой нижней долькой, на экваторе: она практически квадратная. Но основание следующей дольки надо растягивать в  $\sec 1'$  раз, следующей — в  $\sec 2'$  раз, и так далее. Чтобы растяжение дольки было пропорциональным (то есть, сохраняло углы), дольки надо растягивать вдоль меридиана, в высоту, в той же пропорции. Поэтому высоты долек становятся

$$d \sec 1', d \sec 2', d \sec 3', \dots$$

Поэтому высота  $Y(\varphi)$  над экватором точки на широте  $\varphi$  равняется сумме высот минутных долек от экватора до широты  $\varphi$  минут:

$$Y(\varphi) = d(\sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \dots + \sec \varphi).$$

Далее Райт не мудрил: он просто взял таблицу значений секанса (а детальные таблицы тригонометрических функций существовали, по причине мореплавания) и просуммировал их значения через каждую угловую минуту. Это и стало его знаменитой таблицей.

Конечно, его вычисление в современных обозначениях не более чем численное интегрирование функции  $\sec t$ , и при этом самым простым методом прямоугольников:

$$Y(\varphi) = \int_0^\varphi \sec t \, dt.$$



Возможно, Меркатор в работе над своей карте просто перечерчивал дольки глобуса как прямоугольники (рис. 14), но чисто геометрическими методами, без вычислений.

#### 4.3. Надувающийся пузырь

К нашему изумлению, часто встречающееся в литературе сравнение проекции Меркатора с отпечатком на внутренней поверхности цилиндра надувающегося внутри пузыря, сначала сферического, а потом деформирующегося в колбаску [10], принадлежит самому Эдварду Райту:

“Suppose a sphericall superficies with meridians, paralels, rumbes, and the whole hydrographically description drawne thereupon to bee inscribed into a concave cylinder, their axes agreeing in one. Let this sphericall superficies swell like a bladder, (whiles it is in blowing) equally alwayes in euerie part thereof (that is as much in longitude as in latitude) till it apply, and ioynе it selfe (round about, and all alongst also towards either pole) vnto the concave superficies of the cylinder: each paralel vpon this sphericall superficies increasing successively from the equinoctiall towards eyther pole, vntil it come to bee of equall diameter with the cylinder, and consequently the meridians stil widening them selves, til they come to be so far distant euery where ech from other as they are at the Equinoctiall. Thus it may most easily be vnderstoode, how a sphericall superficies may (by extension) be made a cylindrical, and consequently a plaine parallelogramme [sic] superficies; because the superficies of a cylinder is nothing else but a plaine parallelogramme wown'd about two equall aequidistant circles that have one common axtree perpendicular vpon the centers of them both, and the peripheties of each of them equall to the length of the parallelogramme as the distance betwixt those circles, or height of the cylinder is equall to the breadth thereof.”

([16], цитируется по [13]).

Увы, картинка рис. 15, как и многие картинки из Интернета, физически неадекватна (мы оставляем объяснение этого читателю в качестве

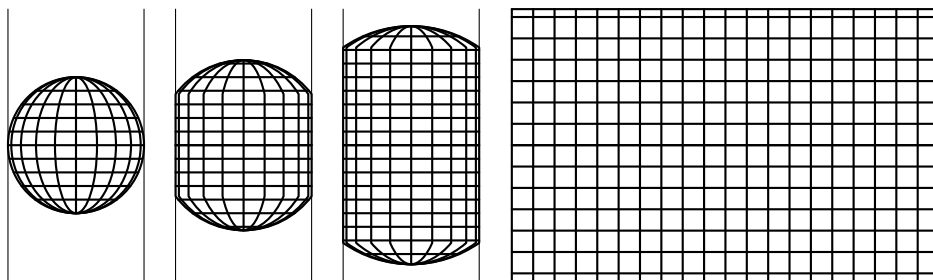


Рис. 15. Эдвард Райт: проекция Меркатора как отпечаток надувающегося пузыря. Источник: R. Israel [10]

упражнения). Досаднее, что надувание пузыря не совпадает с проекцией Меркатора. Наш коллега Стивен Хаггетт предоставил нам очень простое объяснение.<sup>6)</sup>

Положим радиус пузыря и цилиндра равным 1 и обозначим широту на нём через  $\varphi$ .

Предположим, что пузырь надут ровно настолько, что точки широты  $\varphi$  пришли в контакт с цилиндром, а точки с большей широтой — нет.

Проблема состоит в том, чтобы найти высоту  $h$  последнего круга контакта на цилиндре как функцию от  $\varphi$ .

Точки пузыря с широтами больше чем  $\varphi$  будут растянуты однородным образом, чтобы образовать полусферу радиуса 1. Экватор этой полусферы — наш круг последнего контакта. Обозначим широту на полусфере через  $\theta$ .

Рассмотрим меридиан. Его длина на пузыре от широты  $\varphi$  до северного полюса равна  $\pi/2 - \varphi$ , а на полусфере он раздувается до  $\pi/2$ . Поэтому при бесконечно малом поддувании в пузырь

$$\frac{d\psi}{\pi/2} = \frac{d\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Но, с точностью до первого порядка величин, это бесконечно малое надувание также даёт

$$d\psi = dh.$$

Поэтому

$$\frac{dh}{\pi/2} = \frac{d\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

и потому

$$h = \frac{\pi}{2} \log \left( \frac{\pi/2}{\pi/2 - \varphi} \right),$$

что, к сожалению, не совпадает с проекцией Меркатора. . .

Нам здесь важно другое — приходится признать, что Райт пытался найти интуитивное описание конформных отображений сферы на цилиндр. В конце концов, это делал человек, участвовавший в пиратских походах, что, как читатель легко согласится, вряд ли было лучшей обстановкой для упражнений в чистой математике. Но зато его книга считается образцом простоты и ясности изложения — Райт знал, для кого он писал. Это лучшее доказательство, что математику можно объяснять даже пиратам.<sup>7)</sup>

<sup>6)</sup> Личное сообщение, 1 февраля 2009 г.

<sup>7)</sup> Вспоминается известное высказывание Израиля Моисеевича Гельфанда, что о математике можно разговаривать даже с алкашами — если тех спросить, что лучше, две бутылки на троих или три на четверых, то они сразу дадут правильный ответ.

#### 4.4. ДЖОН НЕПЕР И ЕГО ЛОГАРИФМЫ

В 1614 году Джон Непер (1550–1617) опубликовал книгу *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, в которой он построил логарифмы (в современной терминологии, он вычислял по основанию  $1/e$ , хотя осовременивание терминологии огрубляет его подход). Спустя два года книга была переведена с латыни на английский язык, и ни кем иным, как Эдвардом Райтом. Но Райт не заметил, что его собственная работа над проекцией Меркатора имеет какое-то отношение к логарифмам.

Но, что важно, почти сразу после первых работ Непера начали появляться — и широко использоваться — таблицы логарифмов тригонометрических функций. Более того, если верить статье в MacTutor [2], Непер с самого начала думал о манипуляциях с числами вида  $100 \sin x$ , и делал вычисления с точностью до семи десятичных знаков, потому что такова была точность лучших таблиц синусов. Предисловие к его книге (цитируемое здесь в переводе Райта) сразу делает ясным, что Непер думал о технических вычислениях, а не сложных процентах в бухгалтерских расчётах:

Seeing there is nothing (right well-beloved Students of the Mathematics) that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers, which besides the tedious expense of time are for the most part subject to many slippery errors, I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances. And having thought upon many things to this purpose, I found at length some excellent brief rules to be treated of (perhaps) hereafter. But amongst all, none more profitable than this which together with the hard and tedious multiplications, divisions, and extractions of roots, doth also cast away from the work itself even the very numbers themselves that are to be multiplied, divided and resolved into roots, and putteth other numbers in their place which perform as much as they can do, only by addition and subtraction, division by two or division by three.

#### 4.5. ЭДМУНД ГЮНТЕР, ИЛИ О ПОЛЬЗЕ ВНЕДРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Мы склонны недооценивать роль медленного технического развития приложений математики для роста математики в целом. Эдмунд Гюнтер (1581–1626) был архетипичный прикладник, положивший жизнь на внедрение логарифмов в практику навигации. Он создал, в частности, ранний прототип логарифмической линейки, реально использовавшейся мореплавателями и даже так и прозванной «гюнтером». В 1620 году он опубликовал семизначные таблицы логарифмов синуса и тангенса, опять же в целях облегчения тригонометрических вычислений в задачах навигации. Мы скоро увидим, что эти таблицы сыграли, без преувеличения, историческую роль.

А ещё Гюнтер ввёл в употребление общепринятое теперь обозначение  $\log$  и термины «косинус» и «котангенс».

#### 4.6. Генри Бонд, или о пользе чтения логарифмических таблиц

Примерно в 1640 году Генри Бонд, учитель математики и навигации, заметил совпадение (с точностью до линейной замены переменной, что сделало его наблюдение крайне нетривиальным) двух таблиц: таблицы Райта для  $Y(\varphi)$  и таблицы Гюнтера логарифма тангенса:

$$Y(\varphi) = \log(\operatorname{tg}(\varphi/2 + \pi/4))$$

(что то же самое что  $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  в обозначениях раздела 2).

Он опубликовал своё наблюдение в 1645 году в качестве гипотезы, и оно стало одной из самых знаменитых проблем математики XVII века. Конечно, в современной терминологии это не более чем равенство

$$\int_0^\varphi \sec(t) dt = \log \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

где интеграл слева понимается в смысле интегральной суммы. Но это и классический пример того, как опасно говорить о математике прошлого в современных терминах — ведь у нас в голове сидит формула Ньютона-Лейбница, которая применительно к конкретной задаче выглядит как

$$\frac{d}{d\varphi} \int_0^\varphi \sec(t) dt = \sec \varphi,$$

но была тогда неизвестна — Лейбниц начал печатать свои работы по дифференциальному исчислению в 1684, а Ньютон — в 1693 году.

Проблему Бонда пытались решать лучшие математики того времени, например, Уильям Оутред (William Oughtred, 1574–1660), изобретатель логарифмической линейки.<sup>8)</sup> Николаус Меркатор (о нём ниже) даже предложил денежный приз за доказательство гипотезы Бонда. Он написал в своей статье (в самом первом выпуске *Философских Трудов Королевского Общества* за 1666 год [12] — как уже жизнь науки начинала походить на современную!), что он

“willing to lay a *Wager* against any one or more persons that have a mind to engage... *Whether the Artificial* [logarithmic] *Tangent-line be the true Meridian-line, yea or no?*”

<sup>8)</sup> Оутред также ввёл в употребление символ  $\times$  для умножения, и, что более существенно для нашего повествования, символы  $\sin$  и  $\cos$  для синуса и косинуса.

## 4.7. ДЖЕЙМС ГРЕГОРИ И ИСААК БАРРОУ

Проблема Бонда была решена в 1668 году Джеймсом Грегори, но, как утверждается, очень сложным образом; детали могут быть найдены в [15].<sup>9)</sup> Наконец, в 1670 году Исаак Барроу опубликовал приемлемое доказательство; в современных обозначениях, оно приведено в [14]. По-видимому, в истории анализа это было первое применение разложения рациональной функции в сумму простых дробей, ныне стандартного приёма интегрирования.

Конечно, сегодня было бы достаточно проверить начальное условие при  $\varphi = 0$  и продифференцировать:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \log \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sec^2 \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{1}{\sin \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\cos(\varphi)} = \sec(\varphi) \end{aligned}$$

А ещё лучше посоветовать читателю сделать такое упражнение: возьмите интеграл

$$\int \sec(x) dx$$

при помощи универсальной тригонометрической замены

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

а потом предайтесь медитации на тему: почему эти формулы — почти в точности формулы для стереографической проекции оси абсцисс на единичный круг:

$$(t, 0) \mapsto \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right).$$

(Мы позаимствовали часть материала этого подраздела из статьи Роберта Израэла [10].)

<sup>9)</sup>Статья в английской Википедии (по состоянию на 13 декабря 2009 года) про Джеймса Грегори никак не упоминает его работу над гипотезой Бонда, но зато приписывает ему возможное открытие — и в то же самое время — основной теоремы анализа (формулы Ньютона — Лейбница). Это сомнительно — почему тогда он не мог найти короткого решения проблемы Бонда?

#### 4.8. НИКОЛАУС МЕРКАТОР (1620–1687; НЕ РОДСТВЕННИК И ДАЖЕ НЕ ОДНОФАМИЛЕЦ)

Действительно, оба Меркатора — псевдонимы. Настоящее имя одного было Герард де Кремер или Геерт Кремер, второго Никлаус Кауффман. Имя “Mercator” образовано от латинского слова «купец».

Николаус Меркатор был первым, кто опубликовал ряд для логарифма (в 1668 году),

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

и тем самым окончательно утвердил его как аналитическую функцию, почти замкнув круг в нашем качественном анализе (раздел 3).

А ещё Николаус Меркатор печатал книги с характерными названиями вроде *Trigonometria sphaericorum logarithmica*. Это он ввёл в массовую практику использование логарифмов для решения треугольников и тем самым нёс ответственность за мучения русских гимназистов и школьников XIX и XX веков, которых заставляли решать тригонометрические уравнения, и не просто так, а чтобы ответ был в «форме, удобной для логарифмирования». Мы (авторы этой статьи) принадлежим к первому поколению, с которым этого не делали. А может, и напрасно.

### 5. ПОЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Недостатком проекции Меркатора считается то, что она искажает площади. Это в большей степени политическая проблема, чем математическая (рис. 16). Мы не удивимся, если с ростом озабоченности по поводу глобального потепления и таяния полярных ледников преувеличенные размеры Гренландии и Антарктиды перестанут считаться недостатками карт мира.

А древняя проекция Меркатора как раз очень хорошо выражает этот новый взгляд на мир (рис. 17).

Есть серьёзные причины, почему метеорологи предпочитают для своих карт погоды проекцию Меркатора — или, для полярных районов, стереографическую проекцию. Но мы про это напишем как-нибудь в другой раз.

### 6. НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Конформные отображения одной поверхности на другую играют все возрастающую роль в современных компьютерных методах обработки изображений — они позволяют упрощать поверхность, сохраняя её текстуру. Рис. 18 взят из совместной работы медиков и информатиков [8]. На смену конформной картографии идёт конформная колоноскопия [9], и медики смело используют слово «навигация»:



Рис. 16. Карта мира в проекции Меркатора. Видимо, напечатана в Америке, раз Америка помещена в центре мира



Рис. 17. Поверхность Земли в проекции Меркатора

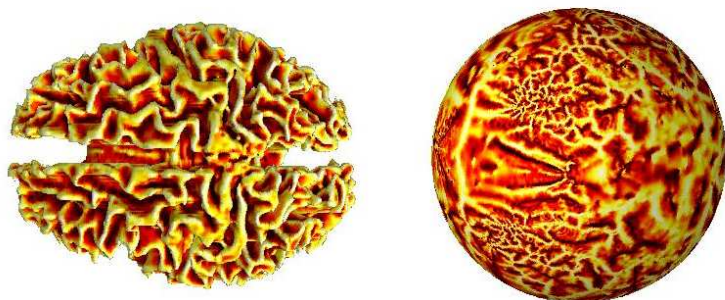


Рис. 18. Конформное отображение поверхности человеческого мозга на сферу [8].

Virtual colonoscopy has some fundamental problems, which it shares with conventional colonoscopy. The most important one is that the navigation using inner views is very challenging and it happens frequently that sizable areas are not inspected at all, leading to incomplete examinations. An alternative approach for the inspection of the entire surface of the colon is to simulate the approach favored by pathologists, which involves cutting open the tube represented by the colon, and laying it out flat for a comprehensive inspection. In some recent work [...], a visualization technique is proposed using cylindrical and planar map projections. It is well-known that such projections can cause distortions in shape [...]

In this paper, we take another approach. We present a method for mapping the colon onto a flat surface in a conformal manner. A conformal mapping is a one-to-one mapping between surfaces which preserves angles, and thus preserves the local geometry as well. Our approach to flattening such a surface is based on a certain mathematical technique from Riemann surface theory, which allows us to map any highly undulating tubular surface without handles or self-intersections onto a planar rectangle in a conformal manner. [9, p. 359]

## 7. ВМЕСТО ПОСЛЕСЛОВИЯ: О РАЗНООБРАЗИИ ГЕОМЕТРИЙ

Одна из причин, почему геометрия недооценивается в современном образовании — мы забыли, что нас окружают много разных геометрий, и мы должны выбирать ту, которая лучше всего соответствует нашему способу измерять или смотреть на мир. Мореплаватель, державший курс по компасу под переменчивым ветром, жил в конформной геометрии на римановой сфере. Астроном, меривший угловые расстояния между звёздами, пользовался сферической геометрией. Мир теории относительности — это геометрия Лобачевского.



Мы часто недооцениваем, до какой степени непосредственно нам может быть дана в наших ощущениях непривычная — или, скажем точнее, не упоминаемая в школе — геометрия. Конформная геометрия мореплавателей — ещё не самый крайний случай, потому что она опосредована приборами — компасом и проч. Например, если просто смотреть на мир одним глазом, без всяких приборов, просто закрыв рукой другой глаз, то увидишь действительную проективную плоскость  $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ .

Но проективная геометрия заслуживает отдельного рассказа, и снова с большим количеством картинок. Мы его когда-нибудь напишем.

### ПРИЗНАТЕЛЬНОСТИ

Мы выражаем нашу признательность коллегам, которые помогли нам советами: Otus Persapiens, Мише Гавриловичу, Рональду Дорфлеру (Ronald W. Doerfler), Александру Звонкину, Габору Медьеши, Сергею Утюжникову, Стивену Хаггетту (Stephen Huggett).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Мазохин-Поршняков. *Зрение насекомых*. М.: Наука, 1965. См. также <http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/115/404.htm>
- [2] *John Napier*. The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Napier.html>
- [3] *Rod Lovett's Slide Rules*. <http://sliderules.lovett.com/stanleycomplex/stanleycomplexpics.htm>
- [4] *Spider Web*. <http://www.pestproducts.com/spider-webs.htm>
- [5] K. N. Boyadzhiev. *Spirals and Conchospirals in the Flight of Insects* // The College Mathematics J. Vol. 30, no. 1, 1999. P. 23–31; doi:10.2307/2687199.
- [6] H. F. K. L. Burkhardt. *Theory of Functions of a Complex Variable* (S. E. Razor, transl.). Boston: D. C. Heath, 1913. Эл. версия <http://www.archive.org/details/theoryfunctions00rasorich>
- [7] G. Fraenkel, D. Gunn. *The Orientation of Animals*. Clarendon Press, 1940. Reprinted Dover, 1961.
- [8] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis, G. Sapiro, M. Halle. *Conformal Surface Parameterization for Texture Mapping* // IEEE Transactions of Visualization and Computer Graphics. Vol. 6, no. 2, 2000. P. 181–189. Эл. версия <http://www.ima.umn.edu/preprints/apr99/1611.pdf>

- [9] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis. *Non-distorting Flattening for Virtual Colonoscopy* // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1935, 2000. P. 358–366. DOI 10.1007/b12345.
- [10] R. Israel. *Mercator's Projection*.  
<http://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html>
- [11] E. Maor. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, 2002.
- [12] N. Mercator. *Certain problems touching some points of navigation* // Philos. Trans. Roy. Soc., London. Vol. 1, 1666. P. 215–218.
- [13] E. J. S. Parsons, W. F. Morris. *Edward Wright and His Work* // Imago Mundi. Vol. 3, 1939. P. 61–71.
- [14] V. F. Rickey, P. Tuchinsky. *An application of geography to mathematics: History of the integral of the secant* // Mathematics Magazine. Vol. 53, no. 3, 1980. P. 162–166.
- [15] H. W. Turnbull. *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*. London: G. Bell & Sons, 1939. P. 463–464.
- [16] E. Wright. *Certain Errors in Navigation, Arising either of the ordinaire erroneous making or using of the sea Chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of declination of the Sunne, and fixed Starres detected and corrected*. London: Valentine Sims, 1599.

---

А. В. Боровик, School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Street, Manchester M13 9PL, United Kingdom  
email: borovik@manchester.ac.uk

О. М. Худавердян, School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Street, Manchester M13 9PL, United Kingdom  
email: khudian@manchester.ac.uk

## Решение циклических многоугольников

И. Х. Сабитов\*

**§1.** В последние годы появилось довольно много работ, посвящённых вписанным в окружность многоугольникам, которые для краткости называются *циклическими многоугольниками*. Основным содержанием этих работ является получение и исследование аналога формулы Герона, дающего возможность вычисления площадей таких многоугольников через длины их сторон. Для меня история появления исследований по этой тематике состоит из двух параллельно развивавшихся частей, которые впоследствии слились вместе в 2003–2004 годах, и с этого времени она уже имеет в математическом мире единое течение.

Первая часть истории, к которой я сам имею некоторое отношение, началась на рубеже 20-го и 21-го веков. Точно не помню, но где-то в 2000–2001 годах ко мне подошёл незнакомый человек, который представился как Варфоломеев Виталий Викторович, и сказал, что он хотел бы, чтобы я послушал его соображения об обобщении формулы Герона на случай площадей многоугольников. Оказалось, он был на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, на котором я делал доклад о вычислении объёма многогранника как корня некоторого многочлена, зависящего только от комбинаторного строения многогранника и длин его рёбер. Доклад навёл его на мысль о попытке нахождения такого же многочлена для площадей многоугольников, но при некоторых дополнительных условиях, так как очевидно, например, что ромбы с одинаковой длиной сторон, но с разными углами имеют непрерывно изменяющиеся значения площадей, так что не может быть формулы, дающей значения площади в зависимости только от длин сторон. Вот с момента этой встречи я и помню, как В. В. Варфоломеев постепенно получал новые результаты в этом направлении, несколько раз рассказывал о них на семинаре по геометрии в целом, и завершил первый круг своих исследований статьёй [1], где он показал, что все метрические характеристики вписанных в окружность  $n$ -угольников — квадрат площади, квадрат радиуса окружности, квадраты длин диагоналей — являются корнями некоторых полиномиальных уравнений, коэффициенты которых зависят только от  $n$  и

---

\*Работа частично поддержана грантами РФФИ №09–01–00179 и Минобразования РФ №РНП 2.1.1.3704

квадратов длин сторон многоугольника. Можно сказать, что появилась новая область геометрии, которую по аналогии с термином «решение треугольников» можно назвать *решением многоугольников*.

Вторая параллельно развивающаяся часть истории исследований о вписанных в окружность  $n$ -угольников началась несколько раньше с работ [12] и [13], в которых их автор Д. Роббинс, во-первых, сформулировал саму постановку задачи (в частности, вместо длинного оборота «вписанные в окружность многоугольники» он ввёл широко используемый ныне термин «циклические многоугольники»), во-вторых, нашёл для площадей 5- и 6-угольников нормированное полиномиальное уравнение<sup>1)</sup>, зависящее только от длин сторон многоугольника, и высказал гипотезу о степени таких многочленов для произвольных  $n$ . Начиная с весны 2004 года, когда ныне работающий в США выпускник мехмата МГУ Игорь Пак приехал в Москву с докладами о своих результатах, исторические пути двух направлений исследований циклических многоугольников пересеклись, и с тех пор специалисты в этой области геометрии уже работают, зная о результатах своих коллег из других стран.

К сожалению, судьба зачинателей обоих направлений сложилась трагически: оба они рано ушли после тяжёлой практически неизлечимой болезни, имея большие планы на будущее и работая до последних дней жизни. Д. Роббинс умер в августе 2003 г., и статья [8], опубликованная в газете “Wall Street Journal”, привлекла внимание широкой математической общественности к его работам. В. В. Варфоломеев скончался в январе 2005 г., работая перед смертью над статьей о бесконечномерных алгебрах Ли, которые он связывал с бесконечно малыми деформациями циклических многоугольников вдоль описанных окружностей и которые он хотел использовать для описания особенностей алгебраических функций, порождённых обобщёнными многочленами Герона.

Из работ о циклических многоугольниках, появившихся после публикаций Роббинса и Варфоломеева, можно назвать следующие: [6], [7], [9], [10], [11], [14], [15].

**§2.** Поскольку речь будет идти и о многоугольниках с самопересечениями, для начала нужно ввести понятие площади многоугольника, пригодное для всех многоугольников. Делается это так. Пусть дан плоский треугольник (т. е. область плоскости, ограниченная «проволочным» треугольником<sup>2)</sup>), тогда его границу можно обходить в двух направлениях,

<sup>1)</sup>Многочлен называется *нормированным*, если его старший коэффициент равен единице; следуя англоязычной терминологии такой многочлен называют также *мономиальным*.

<sup>2)</sup>Между прочим, это постоянная проблема практически во всех языках — как точно отличить по термину, идёт ли речь о многоугольнике (многограннике) как о двумерном

при одном из них внутренность области по ходу обхода остаётся слева, при другом она остаётся справа. Первое направление обхода называется положительным и соответственно треугольник называется *положительно ориентированным*, второе направление обхода называется отрицательным и соответственно треугольник называется *ориентированным отрицательно*. Ориентированная или алгебраическая площадь треугольника — это его обычная «геометрическая» площадь, взятая со знаком «+» или «-», соответственно его положительной или отрицательной ориентированности. Аналитически ориентированная площадь  $S$  даётся значением определителя

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  — координаты вершин треугольника в какой-нибудь прямоугольной декартовой системе, пронумерованных в порядке его обхода. Соответственно тому, положительно или отрицательно направление обхода по маршруту  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ , формула (1) даст значение площади треугольника с данными вершинами и соответствующим знаком.

Пусть теперь нам дан «проволочный»  $n$ -угольник  $P$  (возможно, с самопересечениями и даже с самоналожениями) с некоторым указанным направлением его обхода и пусть его вершины пронумерованы последовательно в порядке обхода (выбор первой точки не имеет значения) как точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и  $M_{n+1} = M_1$  соответственно с координатами  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$ . Выберем на плоскости произвольную точку  $M_0(x_0, y_0)$  и на сторонах  $M_i M_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , многоугольника как на основаниях построим треугольники  $\Delta_i$  с общей вершиной  $M_0$ . На каждом из треугольников появится ориентация, наведённая направлением обхода его стороны  $M_i M_{i+1}$ . Так вот, *ориентированной* или *алгебраической* площадью, ограниченной ориентированным многоугольником  $P$ , называется сумма ориентированных площадей построенных выше плоских треугольников  $\Delta_i$ .

Имеет место следующее простое, но важное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Значение ориентированной площади не зависит от выбора точки  $M_0$ .*

Приведём два доказательства этого утверждения. Первое доказательство основано на простых геометрических рассуждениях. Пусть площадь вычислена как сумма ориентированных площадей  $S_1, \dots, S_n$  плоских треугольников с общей вершиной  $O$ . Пусть точка  $O'$  — новая общая вершина

---

(трёхмерном) множестве или как об одномерном (двумерном) объекте? Такое отличие обеспечивается лишь в парах «окружность — круг» и «сфера — шар», в остальных же случаях надо или специально оговаривать, что имеется в виду, или читатель сам должен по смыслу догадываться, о каком объекте идёт речь.

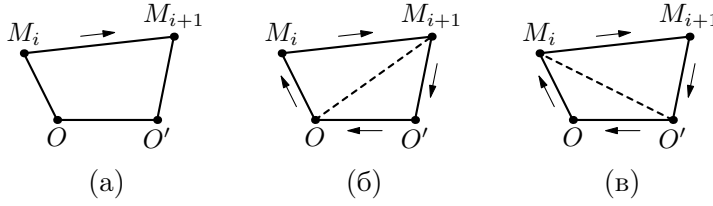


Рис. 1.

и  $S'_1, \dots, S'_n$  — ориентированные площади новых треугольников. Рассмотрим сторону с номером  $i$  и с концевыми точками  $M_iM_{i+1}$ . Соединив точки  $O$  и  $O'$ , получим «проволочный» 4-угольник  $OM_iM_{i+1}O'$  с ориентацией, определённой ориентацией стороны  $M_iM_{i+1}$  многоугольника (рис. 1а и 2а). Вычислим ориентированную площадь этого 4-угольника двумя способами: при выборе  $O$  и  $O'$  как общей вершины треугольников. Для 4-угольника на рис. 1а выбор точки  $O$  даёт два треугольника  $OM_iM_{i+1}$ ,  $M_{i+1}O'O$  (рис. 1б), оба с отрицательной ориентацией, и поэтому ориентированная площадь 4-угольника равна «обычной» его площади со знаком «-». При выборе точки  $O'$  как общей вершины получаем два треугольника  $O'OM_i$  и  $M_iM_{i+1}O'$  тоже с отрицательной ориентацией (рис. 1в), и поэтому ориентированная площадь 4-угольника снова равна «обычной» его площади со знаком «-», т.е. значение ориентированной площади 4-угольника в данном случае не зависит от выбора точки  $O$  или  $O'$  как общей вершины.

Теперь рассмотрим более сложный случай на рис. 2. При выборе точки  $O$  имеем треугольник  $OM_iM_{i+1}$  с положительной ориентацией и треугольник  $M_{i+1}O'O$  с отрицательной ориентацией (рис. 2б). Треугольник  $OBM_{i+1}$ , являясь их общей частью, в каждом из них имеет площади разных знаков, поэтому

$$S_{\Delta OM_iM_{i+1}} + S_{\Delta M_{i+1}O'O} = |S_{\Delta B M_iM_{i+1}}| - |S_{\Delta BOO'}|. \quad (2)$$

Пусть треугольники имеют общую вершину  $O'$  (рис. 2б). Тогда треугольники  $O'OM_i$  и  $M_iM_{i+1}O'$  имеют соответственно отрицательную и

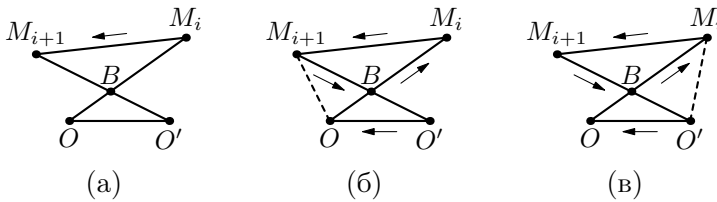


Рис. 2.

положительную ориентацию, а их общая часть — треугольник  $OBM_i$  — встречается дважды с противоположным знаком площади. Поэтому снова имеем

$$S_{\Delta O'OM_i} + S_{\Delta M_iM_{i+1}O'} = |S_{\Delta B M_i M_{i+1}}| - |S_{\Delta O B O'}|,$$

т. е. такое же значение, что и в (2).

Такие же рассуждения можно провести и при других случаях взаимного расположения точек  $O$ ,  $O'$  и отрезка  $M_iM_{i+1}$ , поэтому считаем доказанным, что ориентированная площадь 4-угольника  $OM_iM_{i+1}O'$  одинакова при любом из двух возможных разбиений его на треугольники с общей вершиной  $O$  или  $O'$ . Значит, имеем равенство

$$S_i + S_{\Delta OM_{i+1}O'} = S'_i + S_{\Delta O'OM_i}.$$

Если теперь рассмотреть аналогичным образом площадь 4-угольника  $OM_{i-1}M_iO'$ , получим равенство

$$S_{i-1} + S_{\Delta OM_iO'} = S'_{i-1} + S_{\Delta O'OM_{i-1}}.$$

При сложении этих двух равенств имеем

$$S_{i-1} + S_i + S_{\Delta OM_{i+1}O'} = S'_{i-1} + S'_i + S_{\Delta O'OM_{i-1}},$$

т. е. искусственно прибавляемая площадь треугольника  $OM_iO'$  с основанием  $O'O$  исчезает за счёт взаимного уничтожения равных слагаемых в правой и левой частях равенства. Аналогичные рассуждения с другими сторонами приводят к уничтожению всех таких искусственно вводимых площадей, и мы в итоге получим равенство

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n,$$

что и утверждалось.

Второе — алгебраическое — доказательство получается применением формулы (1) для каждого треугольника  $\Delta_i$ . По сравнению с геометрическим способом оно теряет в наглядности, но преимущество его в том, что нам теперь не нужно будет перебирать все возможные случаи взаимного расположения точек  $O$ ,  $O'$  и ориентированного отрезка  $M_iM_{i+1}$ . Рассмотрим три последовательно идущие стороны с номерами  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$  с соответствующими вершинами  $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$  и  $M_{i+2}(x_{i+2}, y_{i+2})$ . Пусть точка  $O$ , выбранная как общая вершина треугольников с основаниями на ориентированных сторонах многоугольника, имеет координаты  $(x_0, y_0)$ . Вычисляя по соответствующей формуле (1) площади  $S_{i-1}$ ,  $S_i$ ,  $S_{i+1}$  (каждый раз в этой формуле в качестве  $x_1, y_1$  выбираем  $x_0, y_0$ ), получаем

$$S_{i-1} + S_i + S_{i+1} = \frac{1}{2}x_0(y_{i-1} - y_{i+2}) - \frac{1}{2}y_0(x_{i-1} - y_{i+2}) + f(x_{i-1}, \dots, y_{i+2}),$$

где  $f$  есть некоторая явно выписываемая квадратичная функция указанных при ней аргументов, не включающих  $x_0$  и  $y_0$ . Мы видим, что координаты концевых точек стороны  $M_i M_{i+1}$  не встречаются ни в каких операциях с участием  $x_0$  или  $y_0$ , следовательно, на вклад стороны  $M_i M_{i+1}$  в величину площади многоугольника значения  $x_0$  и  $y_0$  не влияют. Это заключение верно для каждой стороны, что и доказывает рассматриваемое утверждение.

Заметим, что мы не говорим о площади *области, ограниченной многоугольником*, так как в случае самопересечения неясно, о какой области идёт речь. Однако, если многоугольник не имеет самопересечений, тогда он ограничивает некоторую область плоскости, являющуюся плоским многоугольником, и нетрудно доказать следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** *Если многоугольник не имеет самопересечений, тогда абсолютная величина его ориентированной или алгебраической площади равна «обычной» площади области, ограниченной этим многоугольником. В частности, положительное значение ориентированной площади соответствует случаю, когда обход многоугольника по ходу нумерации его вершин оставляет область внутри многоугольника слева<sup>3)</sup>.*

Для доказательства утверждения достаточно заметить, что любой плоский многоугольник можно разбить на треугольники, а для треугольников мы уже знаем справедливость высказанного утверждения.

Ниже мы всегда будем говорить об алгебраических площадях вписанных в окружность многоугольников, поэтому, предполагая, что начало координат расположено в центре окружности и что точка  $M_0(x_0, y_0)$  для формулы (1) выбрана в начале координат, мы для алгебраической площади  $S$  циклического  $n$ -угольника имеем формулу

$$2S = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где  $x_k = R \cos \varphi_k$ ,  $y_k = R \sin \varphi_k$ , а  $R$  — радиус окружности, а для длин  $l_k$  сторон многоугольника имеем равенства

$$l_k^2 = (x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2. \quad (4)$$

Если нам даны  $n$  положительных чисел  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , каждое из которых меньше полусуммы всех чисел (или, что то же самое, каждое меньше суммы остальных или, короче, максимальное меньше суммы остальных),

<sup>3)</sup>Широко распространённый способ описания положительного обхода многоугольника как обхода против часовой стрелки не является вполне корректным — нарисуйте невыпуклую область с достаточно сильной «выпуклостью» и вы увидите, что на её границе есть участки, где направление обхода идёт против часовой стрелки, так есть и участки, где оно идёт по направлению часовой стрелки.



то мы всегда можем построить циклический  $n$ -угольник со сторонами, длины которых последовательно равны именно этим  $l_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Для этого достаточно взять окружность диаметра большего, чем сумма всех  $l_i$ , отложить на ней, начиная с некоторой её точки, в обе стороны (т. е. по и против хода часовой стрелки) дуги, стягивающие хорды самой большой длины из числа длин  $l_i$ , затем из обеих полученных точек откладывать в одном и том же направлении, скажем, против часовой стрелки, последовательно в циклическом порядке, считая от уже отложенной, дуги с длинами хорд, равными оставшимся длинам сторон. Одна из конечных точек полученных при этом ломаных при непрерывном уменьшении радиуса окружности первой совпадёт с начальной точкой, завершая в итоге построение замкнутого циклического многоугольника<sup>4)</sup>, так что задача нахождения площади циклического  $n$ -угольника не является пустой (кстати, в ту же окружность можно вписать и другие многоугольники с теми же длинами сторон, но взятыми в любом другом порядке). Построенный таким образом многоугольник будет выпуклым, но для тех же длин могут существовать невыпуклые (и тогда обязательно самопересекающиеся) многоугольники, тоже вписанные в некоторую окружность. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе, что вписанный в окружность  $n$ -угольник получен по описанному выше построению из сторон некоторого уже существующего самопересекающегося  $n$ -угольника с вершинами на данной окружности, см. рис. 3 и рис. 4. Вот имея в виду такие многоугольники, мы и будем говорить про алгебраическую площадь многоугольников.

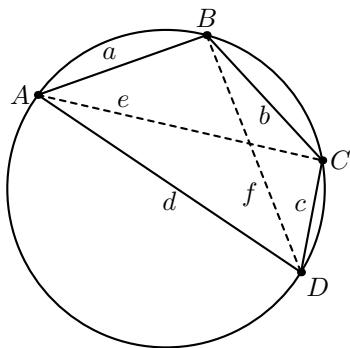


Рис. 3.

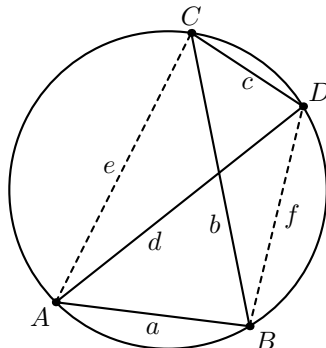


Рис. 4.

Ориентированную площадь циклического многоугольника можно представить и другой формулой. Для этого вычислим ориентированную площадь  $S_k$  каждого треугольника с основанием на стороне  $M_k M_{k+1}$  многоугольника и с вершиной в центре описанной окружности, считая

<sup>4)</sup> Подробное доказательство возможности такого построения см. в [3].

известным радиус окружности и соответствующий центральный угол  $\varphi_k$ . Получим

$$2S = R^2 \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k, \quad (5)$$

где ориентированные углы  $\varphi_k$  должны удовлетворять равенству<sup>5)</sup>

$$\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Длины сторон многоугольника связаны с введёнными углами соотношениями

$$l_k^2 = 2R^2(1 - \cos \varphi_k). \quad (7)$$

**§3.** Приступим к исследованию связи между площадью и длинами сторон циклического многоугольника. Для начала представим формулу Герона для площади треугольника в следующей форме

$$(4S)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c) = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4, \quad (8)$$

где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника,  $p$  — его полупериметр, а  $S$  — площадь<sup>6)</sup>.

Индийский математик 7-го (!) века Брахмагупта нашёл для площади вписанного в окружность выпуклого четырёхугольника со сторонами  $a, b, c, d$  формулу, аналогичную формуле Герона:

$$\begin{aligned} (4S)^2 &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = \\ &= 4[a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2] - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 8abcd = \\ &= (a-b+c+d)(b-a+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d). \quad (9) \end{aligned}$$

<sup>5)</sup>Эти углы можно определять с выполнением условия  $-\pi \leq \varphi_k \leq \pi$ , причём равенство  $|\varphi_k| = \pi$  означает, что длина соответствующей стороны многоугольника равна диаметру окружности, и в этом случае для  $\varphi_k$  можно брать любое значение  $\pi$  или  $-\pi$ , на справедливости равенств (5) и (6) это не отразится.

<sup>6)</sup>Между прочим, В. В. Варфоломеев предлагал такой «эвристическо-алгебраический» метод доказательства формулы Герона: площадь треугольника равняется нулю тогда и только тогда, когда одна его сторона равна сумме двух его сторон. Значит, предполагая алгебраическую зависимость площади от длин сторон и учитывая равноправие сторон, получаем, что простейшее алгебраическое выражение для площади должно иметь вид  $S^2 = k(p-a)(p-b)(p-c)$ , где коэффициент  $k$  нужно подобрать так, чтобы, во-первых, получалась нужная для  $S^2$  размерность, во-вторых, при равенстве всех сторон получалось известное значение  $S^2 = \frac{3a^4}{16} = k\frac{a^3}{8}$ , что даёт  $k = \frac{3a}{2} = \frac{a+a+a}{2} = p$  опять же ввиду равноправия сторон. Конечно, всякий легко найдёт логические изъяны этого «доказательства», но оно показывает «естественность» формулы Герона — другого выражения для площади треугольника и не надо было ожидать. Но вот для объёма тетраэдра это эвристическое рассуждение уже не проходит.

Доказательство можно оставить читателю, как приятное, но довольно хлопотливое упражнение по элементарной геометрии, или найти его, например, в [4, задача 4.46]. Для дальнейшего изложения нам будет нужен ещё ряд формул. Приведём их без доказательства. Пусть дан циклический выпуклый четырёхугольник, изображённый на рис. 3 с приведёнными там же обозначениями сторон (пусть эти же буквы обозначают длины соответствующих сторон). Пусть диагональ, разделяющая пару сторон  $(a, b)$  от пары  $(c, d)$ , обозначена как  $e$ , а другую диагональ обозначим  $f$ . Пусть  $R$  — радиус описанной окружности,  $S$  — площадь четырёхугольника. Тогда имеют место следующие формулы (доказательства см., например, в [4, задачи 6.37–6.38] или в [15]):

$$1) \quad ef = ac + bd \quad (\text{формула Птолемея});$$

$$2) \quad e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}, \quad f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}; \quad (10)$$

$$3) \quad 4SR = (ab + cd)e;$$

$$4) \quad (4SR)^2 = (ab + cd)(ac + bd)(ad + bc); \quad (11)$$

$$5) \quad R^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{4(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2} \quad (12)$$

(при  $d = 0$  все эти формулы переходят в известные формулы для треугольников). Рассмотрим теперь случай невыпуклого циклического четырёхугольника (рис. 4) с теми же длинами сторон. Проведём диагонали  $AC$  и  $BD$  и обозначим их длины соответственно через  $e_2$  и  $f_2$ . Четырёхугольник  $ADBC$  — выпуклый и циклический, значит, для него верны предыдущие формулы. Поэтому имеем

$$1) \quad bd = ac + e_2f_2;$$

$$2) \quad d^2 = \frac{(ae_2 + cf_2)(ac + e_2f_2)}{af_2 + ce_2}, \quad b^2 = \frac{(af_2 + ce_2)(ac + f_2e_2)}{ae_2 + cf_2};$$

$$4) \quad R^2 = \frac{(af_2 + ce_2)(ac + f_2e_2)(ae_2 + cf_2)}{4(ac + f_2e_2)^2 - (a^2 - f_2^2 + c^2 - e_2^2)^2}$$

(формулы с участием площади не пишем, так как нет простой зависимости между ориентированными площадями 4-угольников  $ABCD$  и  $ADBC$ ).

Из этих формул находим значения  $e_2$ ,  $f_2$ ,  $R^2$  и ориентированной площади  $S$  (ниже через  $\beta$  обозначен  $\angle ABC$ ):

$$e_2f_2 = bd - ac, \quad e_2^2 = \frac{(bd - ac)(ad - bc)}{ab - cd}, \quad f_2^2 = \frac{(bd - ac)(ab - cd)}{ad - bc}, \quad (13)$$

$$R^2 = \frac{(ab - cd)(bd - ac)(ad - bc)}{4(bd - ac)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
S^2 &= |S_{CAB} + S_{CDA}|^2 = (|S_{CAB}| - |S_{CDA}|)^2 = \\
&= \frac{1}{4}(ab - cd)^2 \sin^2 \beta = \frac{1}{4}(ab - cd)^2 \left(1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4a^2b^2}\right) = \\
&= \frac{1}{16}[4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 8abcd],
\end{aligned} \tag{15}$$

$$(4SR)^2 = (ab - cd)(bd - ac)(ad - bc). \tag{16}$$

Если мы перемножим уравнения, дающие значения  $S^2$  для двух циклических четырёхугольников с одинаковыми длинами сторон, то получим уравнение

$$(16S^2)^2 - 2A(16S^2) + B - 64a^2b^2c^2d^2 = 0, \tag{17}$$

где  $A = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ ,  $B = A^2$ . Мы видим, что оба возможных значения алгебраических площадей циклических четырёхугольников с одинаковым набором длин сторон могут быть вычислены через корни одного и того же квадратного уравнения, коэффициенты которого являются симметрическими функциями от квадратов длин сторон с некоторыми числовыми коэффициентами, не зависящими от конкретного вида циклического четырёхугольника. Поэтому уравнение (17) вполне естественно назвать *обобщённой формулой Герона* для четырёхугольников.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Из формулы (15) для  $S^2$  видно, что при некоторых значениях длин сторон четырёхугольника правая часть формулы будет отрицательной (например, это так при значениях  $a = 1/2$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ). Это значит, что не при всяком наборе четырёх длин можно найти два четырёхугольника, оба вписанные в свою окружность.

Теперь заметим, что мы в состоянии вычислить через длины сторон и другие геометрические характеристики циклических четырёхугольников. Именно, из формул (10) и (13) для диагоналей получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
(a^2b^2 - c^2d^2)D^4 - 2(a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2 - a^2c^2d^2 - b^2c^2d^2)D^2 + \\
+ (a^2d^2 - b^2c^2)(b^2d^2 - a^2c^2) = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где через  $D$  обозначена длина диагонали, разделяющей пару сторон  $(a, b)$  от пары  $(c, d)$ . Аналогичное уравнение можно выписать и для второй диагонали. Снова получаем, что для любых циклических четырёхугольников существует одно уравнение, решение которого даёт длины диагоналей четырёхугольника, как только известны длины его сторон. Таким же образом можно находить и радиус описанной окружности. Поэтому мы можем говорить о *решении циклических четырёхугольников* в том же смысле,

что и для треугольников, т. е. мы знаем связи между всеми геометрическими характеристиками таких четырёхугольников. Но, вообще говоря, здесь есть некоторые исключения. Дело в том, что в уравнении (18) коэффициент при старшей степени при некоторых значениях длин четырёхугольника может обратиться в нуль. Тогда мы или не сможем найти величину диагонали, если все коэффициенты уравнения равны нулю (так бывает, например, если четырёхугольник состоит из боковых сторон и диагоналей равнобочной трапеции: такой четырёхугольник может непрерывно деформироваться, сохраняя длины сторон и оставаясь вписанным в окружности переменного радиуса), или же для данного набора длин не существует невыпуклого циклического четырёхугольника (например, для длин  $a = 1/2$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $d = 1$ ). Но обратим внимание, что в многочлене для площади старший коэффициент всегда равен 1, поэтому даже если четырёхугольник непрерывно деформируется с сохранением длин сторон<sup>7)</sup>, его площадь может принимать только конечное число значений. Например, в случае описанного выше изгибаемого циклического четырёхугольника площадь остаётся равной нулю, хотя и диагонали, и радиус окружности изменяются непрерывно.

Выясним алгебраический смысл полученных уравнений. В формулах (3) и (4) даны выражения площади и длин сторон многоугольника через координаты его вершин. Общность уравнения (17) (т. е. то утверждение, что оно выполнено для площадей и длин сторон *всех* циклических 4-угольников) выражается в том, что если для циклического 4-угольника в уравнение (17) вместо  $S$  и длин сторон подставить их значения через координаты, то слева получим *тождественный* нуль при всех значениях координат  $(x_1, \dots, y_4)$ , удовлетворяющих равенствам

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = x_4^2 + y_4^2,$$

выражающим то условие, что вершины 4-угольника расположены на одной окружности. Другая интерпретация получается применением представления площади и длин сторон циклического многоугольника через его центральные углы  $\varphi_k$ . Из равенства (6) имеем, что

$$\begin{aligned} \sin \varphi_n &= -\sin(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}), \\ \cos \varphi_n &= \cos(\varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда, подставляя в уравнение (17) вместо  $S$  и длин  $a, b, c, d$  их выражения (5) и (7), с учётом равенства (19), мы получим тождественный относительно  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  нуль. Для трёх- и четырёхугольников этот факт можно проверить даже «вручную».

<sup>7)</sup>Такая деформация называется *изгибанием*.

**§4.** Для полноты изложения мы в этом пункте напомним, что такое *результант* двух многочленов, потому что результат и его свойства играют основную роль в применяемом дальше математическом аппарате исследования. Пусть даны два многочлена

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m, \quad Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n, \quad (20)$$

где  $a_i, 1 \leq i \leq m$  и  $b_j, 1 \leq j \leq n$  — некоторые коэффициенты, числа или функции от каких-то переменных. Составим из коэффициентов этих многочленов следующий определитель порядка  $m+n$ :

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_m & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

В теории результантов утверждается, что для того, чтобы два уравнения  $P(x) = 0$  и  $Q(x) = 0$  имели общее решение, необходимо, чтобы результат этих многочленов был равен нулю; обратно, если результат двух многочленов равен нулю, то либо эти многочлены имеют общее решение, либо оба старших коэффициента равны нулю (следовательно, если хотя бы один из старших коэффициентов не равен нулю, то существует общее решение). Таким образом, сведение решения системы уравнений  $P(x) = 0, Q(x) = 0$  к решению или проверке равенства  $R(P, Q) = 0$  можно назвать исключением неизвестного  $x$ .

**§5.** Переходим к исследованию циклических многочленов с произвольным числом сторон. Сначала, следуя [1], установим алгебраическую зависимость площади, радиуса окружности и длин диагоналей циклического многоугольника от квадратов длин его сторон.

**ТЕОРЕМА 1.** *Квадрат длины любой диагонали циклического многоугольника является алгебраической функцией квадратов длин многоугольника.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** получается индукцией по числу вершин. Для числа вершин  $n = 4$  утверждение верно в силу выполнения уравнения (18) для диагоналей. Пусть утверждение верно для  $(n-1)$ -угольников. Рассмотрим произвольный циклический  $n$ -угольник (рис. 5 и рис. 6). Построим в нем диагонали  $A_1A_3$  и  $A_1A_4$  и рассмотрим два циклических многоугольника  $A_1A_2A_3A_4$  и  $A_1A_3A_4 \dots A_n$  с общим радиусом описанной окружности.

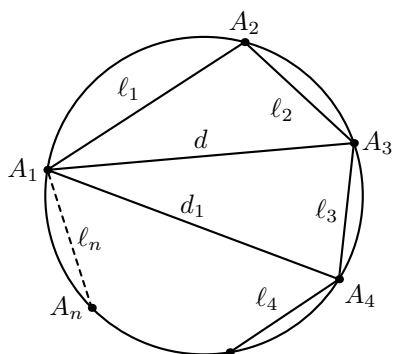


Рис. 5.

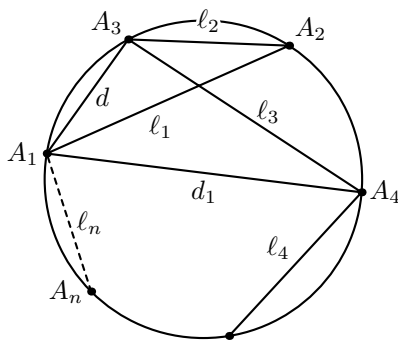


Рис. 6.

По индукционному предположению, для квадрата длины  $d_1$  диагонали  $A_1A_4$  второго многоугольника существует алгебраическое уравнение вида

$$a_0(d^2, l_3^2, \dots, l_n^2)(d_1^2)^N + a_1(d^2, l_3^2, \dots, l_n^2)(d_1^2)^{N-1} + \dots + a_N(d^2, l_3^2, \dots, l_n^2) = 0. \quad (21)$$

Возьмём уравнение (18) для квадрата длины  $d$  диагонали  $A_1A_3$  четырёхугольника  $A_1A_2A_3A_4$  и перепишем его, заменив в нем  $D$  на  $d$  и  $d$  на  $d_1$  и представив его по степеням  $d_1$ :

$$l_1^2 l_2^2 (d_1^2)^2 + b_1(d^2, l_1^2, l_2^2, l_3^2) d_1^2 + b_2(d^2, l_1^2, l_2^2, l_3^2) = 0. \quad (22)$$

Теперь исключаем  $d_1^2$  из этого уравнения и уравнения (21), приравняв нулю их результат. Получим уравнение, которое можно представить как полиномиальное уравнение некоторой степени  $L$  относительно  $d^2 = |A_1A_3|^2$ :

$$D_0(l_1^2, \dots, l_n^2)(d^2)^L + D_1(l_1^2, \dots, l_n^2)(d^2)^{L-1} + \dots + D_L(l_1^2, \dots, l_n^2) = 0 \quad (23)$$

(для случая 5-угольника  $L = 7$  и получится уравнение 7-й степени относительно  $d^2$  со старшим коэффициентом  $l_3^6 l_4^2 l_5^2$ ).

Полученное уравнение (23) пригоден для нахождения так называемых «малых» диагоналей, которые соединяют концы двух сторон, имеющих общую вершину. С использованием этого уравнения мы можем найти полиномиальное уравнение и для квадрата длин остальных диагоналей, так как каждую из них можно рассматривать как малую диагональ для некоторого многоугольника с меньшим числом сторон, вписанного в ту же окружность и полученного из исходного многоугольника последовательным отсечением из него областей, ограниченных частью его сторон и постепенно вычисляемыми малыми диагоналями. Например, чтобы получить уравнение для  $d_1^2$  — квадрата длины диагонали  $A_1A_4$ , надо исключить  $d^2$  из уравнений (23) и (22). Теорема доказана.  $\square$

Аналогичная теорема верна и для радиуса описанной окружности:

**ТЕОРЕМА 2.** *Квадрат радиуса описанной окружности для циклического  $n$ -угольника является алгебраической функцией квадратов длин его сторон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует уже известное полиномиальное уравнение для  $d = |A_1A_3|$ . Именно, искомый радиус  $R$  является радиусом описанной окружности и для треугольника  $A_1A_2A_3$  с длинами сторон  $l_1, l_2$  и  $d$ . А для треугольника формула для радиуса нам известна:

$$16S_{\Delta}^2 R^2 = l_1^2 l_2^2 d^2,$$

где площадь  $S_{\Delta}$  треугольника выражается по формуле (8) через  $l_1^2, l_2^2, d^2$ . Из полученной формулы и из (23) исключим переменную  $d^2$  и получим для  $R^2$  некоторое полиномиальное уравнение (например, для 5-угольника получится уравнение 7-й степени для  $R^2$  со старшим коэффициентом, равным свободному члену в уравнении (23) для  $d^2$ ).  $\square$

Наконец, для площади  $S$  циклического многоугольника тоже есть алгебраическая зависимость от длин его сторон.

**ТЕОРЕМА 3.** *Квадрат ориентированной площади циклического многоугольника является алгебраической функцией квадратов длин его сторон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведём индукцией по числу сторон по схеме, которая в принципе одновременно позволит найти этот многочлен. Пусть для циклических  $(n-1)$ -угольников квадрат их ориентированной площади  $S_{n-1}$  является корнем некоторого многочлена:

$$a_0(l_1^2, \dots, l_{n-1}^2)(S_{n-1}^2)^N + a_1(l_1^2, \dots, l_{n-1}^2)(S_{n-1}^2)^{N-1} + \dots + a_N(l_1^2, \dots, l_{n-1}^2) = 0. \quad (24)$$

Пусть теперь нам дан циклический  $n$ -угольник  $P_n$  с вершинами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Диагональю  $A_1A_3$  длины  $d$  отсечём от него треугольник  $\Delta = A_1A_2A_3$  с площадью  $S_{\Delta}$ . Останется некоторый циклический  $(n-1)$ -угольник  $P_{n-1}$  со сторонами  $d, l_3, \dots, l_n$ . Ориентированная площадь  $S_n$  многоугольника  $P_n$  связана с площадью  $S_{n-1}$  многоугольника  $P_{n-1}$  соотношением

$$S_n = S_{n-1} + \varepsilon S_{\Delta},$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ , так как в общем случае неизвестно, надо ли прибавить или отнять площадь отсечённого треугольника. Подставим в (24) значение  $S_{n-1} = S_n + \varepsilon S_{\Delta}$  и вынесем в одну часть все мономы, содержащие сомножитель  $\varepsilon S_n S_{\Delta}$ . После возведения в квадрат останется полиномиальное уравнение, содержащие чётные степени  $S_n, S_{\Delta}$  и чётные степени длин сторон  $l_3, \dots, l_n$  многоугольника  $P_n$ . Подставляя всюду вместо выражения  $16S_{\Delta}^2$  его значение по формуле (8), получим многочлен относительно  $d^2$ .



Остаётся исключить  $d^2$  из этого уравнения и уравнения (23) и получить многочлен вида

$$b_0(l_1^2, \dots, l_n^2)(S_n^2)^K + b_1(l_1^2, \dots, l_n^2)(S_n^2)^{K-1} + \dots + b_K(l_1^2, \dots, l_n^2) = 0. \quad \square$$

Выполним подробно в случае циклического 4-угольника описанную выше процедуру получения многочлена для площади. Пусть дан циклический 4-угольник, который может иметь одну из форм, изображённых на рис. 3 или 4. Проведём диагональ  $A_1A_3$  и ориентированную площадь 4-угольника будем рассматривать как сумму ориентированных площадей  $S_1$  и  $S_2$  треугольников  $\Delta_1 = A_1A_3A_4$  и  $\Delta_2 = A_1A_2A_3$ . Обход треугольников проводится в соответствии с обходом входящих в них сторон 4-угольника (на рис. 3 оба треугольника имеют одинаковую ориентацию, так что их площади должны сложиться, а на рис. 4 их ориентации противоположны, и поэтому площадь 4-угольника получится вычитанием площадей треугольников). Площадь  $S_1$  треугольника  $\Delta_1$  удовлетворяет многочлену

$$16S_1^2 - (2d^2(l_3^2 + l_4^2) + 2l_3^2l_4^2 - d^4 - l_3^4 - l_4^4) = 0 \quad (25)$$

Для общей площади  $S$  четырёхугольника имеем соотношение  $S = S_1 + \varepsilon S_2$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ . Подставим в (25) значение  $S_1 = S - \varepsilon S_2$ . Получим

$$16S^2 + 16S_2^2 - (2d^2(l_3^2 + l_4^2) + 2l_3^2l_4^2 - d^4 - l_3^4 - l_4^4) = 32\varepsilon S S_2.$$

Заменим здесь  $16S_2^2$  по формуле (8) выражением  $2(l_1^2 + l_2^2)d^2 - d^4 - (l_1^2 - l_2^2)^2$  и после приведения подобных возведём обе части в квадрат. Приходим к уравнению, разложенному по степеням  $d^2$ :

$$\begin{aligned} &4[(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2)^2 + x]d^4 - \\ &- 4[x(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2) - ((l_3^2 - l_4^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2)(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2)]d^2 + \\ &+ x^2 + 2[(l_1^2 - l_2^2)^2 + (l_3^2 - l_4^2)^2]x + [(l_3^2 - l_4^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2]^2 = 0, \end{aligned}$$

где положено  $x = 16S^2$ . Теперь перепишем уравнение (18) для диагонали 4-угольника с заменой в нем  $a$  на  $l_1$ ,  $b$  на  $l_2$ ,  $c$  на  $l_3$  и  $d$  на  $l_4$ :

$$(l_1^2l_2^2 - l_3^2l_4^2)d^4 - 2(l_1^2l_2^2l_4^2 + l_1^2l_2^2l_3^2 - l_1^2l_3^2l_4^2 - l_2^2l_3^2l_4^2)d^2 + (l_1^2l_4^2 - l_2^2l_3^2)(l_2^2l_4^2 - l_1^2l_3^2) = 0$$

и исключение  $d^2$  из двух найденных многочленов с использованием результата  $R(x)$  приведёт к уравнению для  $x$ . Получим уравнение вида

$$R(x) = (l_1^2l_2^2 - l_3^2l_4^2)^2x^4 + A_1x^2 + A_2 = 0. \quad (26)$$

Мы видим, что для  $x = 16S^2$  получилось уравнение 4-й степени, а ранее полученное уравнение (17) было степени 2 и оно имело ровно два корня, соответствующие двум возможным значениям модуля ориентированной площади. Получение уравнения степени выше реальной — общий недостаток применения метода исключения с использованием результата. Выход

состоит в том, что полученный многочлен (26) является приводимым и он разлагается на два множителя 2-й степени (по отношению к  $16S^2$ ), только один из которых удовлетворяет описанному в конце §3 алгебраическому свойству искомым многочленам — обращаться в тождественный нуль при подстановке вместо площади и длин их координатные представления. В нашем случае вычисления<sup>8)</sup> дают для результата (26) разложение вида

$$R(x) = [(l_1^2 l_2^2 - l_3^2 l_4^2)^2 x^2 + (12l_1^2 l_2^2 l_3^2 l_4^2 (l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 + l_4^4 + 3l_1^2 l_2^2 + 3l_3^2 l_4^2 - 2l_1^2 l_3^2 - 2l_1^2 l_4^2 - 2l_2^2 l_4^2 - 2l_2^2 l_3^2) + 4((l_3^6 l_4^6 - l_1^6 l_2^6) - (l_1^2 + l_2^2)(l_3^2 + l_4^2)(l_1^4 l_2^4 + l_3^4 l_4^4)) + 2(l_1^4 l_2^4 + l_3^4 l_4^4)(l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 + l_4^4))x + C](x^2 - 2Ax + B - 6Al_1^2 l_2^2 l_3^2 l_4^2),$$

где выделенный жирным шрифтом множитель как раз совпадает с приведённым в (17) многочленом для  $x = 16S^2$  (а коэффициент  $C$  мы не приводим в явном виде, так как его запись заняла бы более 15 строк).

Такая проблема возникает и в общем случае, и в работе [1] утверждается, что и в общем случае полученный после исключения диагонали результат допускает разложение на множители, у одного из которых старший коэффициент является числом, а не функцией от длин многоугольника, и именно он и будет искомым многочленом для площади. К сожалению, это рассуждение автором не раскрыто подробно, а проведено «скороговоркой». Но существование многочлена с целочисленными коэффициентами подробно доказано в работе [6] с использованием другого алгебраического аппарата, а именно, теории мест, но этот метод доказательства не является конструктивным, он даёт только существование некоторого требуемого нормированного многочлена без указания способа его нахождения. Следовательно, метод работы [1] даёт конструктивный способ построения искомого многочлена — по описанной выше процедуре находим ненормированный многочлен большой степени и среди его делителей должен быть искомым нормированный многочлен наименьшей возможной степени.

**§6.** Окончательный ответ о многочлене для площади циклического многоугольника, полученный усилиями нескольких математиков (см. работы [12], [13], [1], [6], [7], [9], [10]), можно сформулировать в виде следующей теоремы

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть рассматриваются циклические  $n$ -угольники с известными длинами сторон  $l_1, \dots, l_n$ . Тогда для любого  $n \geq 3$  существует единственный нормированный многочлен

$$Q = x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N, \quad (27)$$

<sup>8)</sup>Эти вычисления проведены А. Словесновым, которому я, пользуясь случаем, хочу выразить свою благодарность.

такой, что для ориентированной площади  $S$  каждого из этих многоугольников величина  $K^2 = 16S^2$  является корнем многочлена  $Q$ . Коэффициенты  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , многочлена  $Q$  суть некоторые симметрические многочлены от квадратов длин сторон многоугольника с целочисленными коэффициентами, зависящими только от  $n$ . Все мономы в многочлене (27) имеют одинаковую размерность, считая размерность сторон многоугольника равной единице длины, а размерность переменной  $x$  равной 4. Степень  $N$  многочлена  $Q$  при нечётном  $n = 2m + 1$  равна

$$\Delta_m = \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) C_{2m+1}^k = \frac{1}{2} [(2m+1)C_{2m}^m - 2^{2m}], \quad (28)$$

а при чётном  $n = 2m + 2$  степень  $N$  равна  $2\Delta_m$ . Кроме того, можно утверждать, что существуют значения длин сторон, для которых каждый корень  $K^2$  многочлена  $Q$  реализуется как площадь  $S = K/4$  некоторого циклического многоугольника с соответствующими длинами сторон<sup>9)</sup>.

В теореме есть три части, которые доказаны у разных авторов с разной степенью строгости и ясности изложения. Первая часть теоремы — существование такого многочлена, вторая часть — определение его порядка, третья часть относится к алгоритму нахождения этого многочлена.

Сначала приведём эвристические рассуждения самого Роббинса из [12] и [13] о значении степени многочлена. Речь идёт о построениях в общем положении, т. е. длины  $l_1, \dots, l_n$  можно считать не связанными никакими алгебраическими зависимостями. Посмотрим, как можно «прикинуть» количество циклических  $n$ -угольников, которые можно построить исходя из данных длин их сторон. Пусть рассматриваются многоугольники с нечётным числом вершин  $n = 2m + 1$  и с примерно равными длинами сторон. Как было объяснено в §2, для любого  $n \geq 3$  и любого набора длин  $l_1, \dots, l_n$  можно построить выпуклый циклический  $n$ -многоугольник, последовательно откладывая хорды длиной  $l_i$ , скажем, против хода часовой стрелки на окружности подходящим образом подобранного радиуса  $R$ . В наших предположениях это будет примерно значение радиуса описанной окружности для правильного  $n$ -угольника со стороной длины  $l$ , равной среднему арифметическому заданных длин  $l_1, \dots, l_n$ . После этого построения мы уменьшим радиус окружности, тогда при последовательном откладывании хорд последняя отложенная вершина на окружности окажется уже на втором витке окружности и поэтому мы уменьшим радиус ещё больше, чтобы эта вершина совпала с первой вершиной после двукратного обхода окружности. У этой окружности радиус будет примерно равен

<sup>9)</sup> Это последнее утверждение означает, что степень многочлена не может быть понижена.

радиусу окружности, описанной вокруг правильного  $m$ - или  $(m+1)$ -угольника. Такую операцию мы можем повторить и дальше. Сколько раз это можно сделать? При нашем способе откладывания хорд все центральные углы  $\varphi_k$  положительны, а их сумма по формуле (6) кратна  $2\pi$ . Каждый угол не больше  $\pi$ , следовательно, для натурального числа  $p$  кратности обхода имеем соотношение

$$2\pi p = \varphi_1 + \dots + \varphi_n < n\pi \leq (2m+1)\pi,$$

откуда получаем  $p \leq m + 1/2$ , т. е.  $p \leq m$ . Следовательно, последний раз окружность будет обходиться  $m$  раз. Итак, пока получили  $m$  разных циклических  $n$ -угольников и им соответствует слагаемое при  $k = 0$  в первом выражении для  $\Delta_m$  в формуле (28).

В указанных построениях откладывание хорд проводилось все время в одном направлении, скажем, против часовой стрелки<sup>10)</sup>. Теперь мы можем в процессе откладывания хорд, равных по длине данным сторонам, какую-либо одну хорду  $l_i$  отложить в обратном направлении, тогда следующая отложенная хорда вернёт нас приблизительно в положение, где была начальная точка хорды длины  $l_i$ , т. е. использование двух хорд нас оставляет приблизительно в том же положении, в котором мы были до их откладывания. Значит, при таком способе откладывания хорд результат будет такой же, как будто мы работаем с  $2m - 1$  сторонами, следовательно, описанный в предыдущем абзаце процесс даст нам  $m - 1$  циклических  $n$ -угольников. Так как в качестве откладываемой назад хорды  $l_i$  мы можем выбрать любую из  $2m + 1$  сторон, в сумме мы получаем второе слагаемое (соответствующее значению  $k = 1$ ) в первом выражении для  $\Delta_m$ . Далее мы можем откладывать в обратном направлении 2, 3, и т. д., до  $m - 1$  хорд и получим, что в общем случае существует ровно  $\Delta_m$  комбинаторных типов циклических  $(2m + 1)$ -угольников, каждый из которых вписан в окружности с  $\Delta_m$  разными радиусами  $R_1, \dots, R_{\Delta_m}$ . Так как алгебраический смысл многочлена (27) точно такой же, как мы описали его в конце предыдущего параграфа для многочлена в случае циклического четырёхугольника, то в этом уравнении  $Q = 0$  среди его корней должны встречаться площади всех циклических  $n$ -угольников с данными длинами сторон, поэтому степень многочлена  $Q$  при нечётных  $n = 2m + 1$  должна быть не меньше чем  $\Delta_m$  (из соображений общего положения считается, что существуют наборы длин, для которых все построенные многоугольники имеют разные площади — это утверждение представляется очевидным при использовании формулы (5) для площади).

<sup>10)</sup>В приведённом в §2 (и в [3] тоже) описании построения выпуклого циклического многоугольника предлагалось начать откладывание в разные стороны, но при приближении к равным длинам сторон цели можно достичь откладыванием хорд в любую одну сторону.

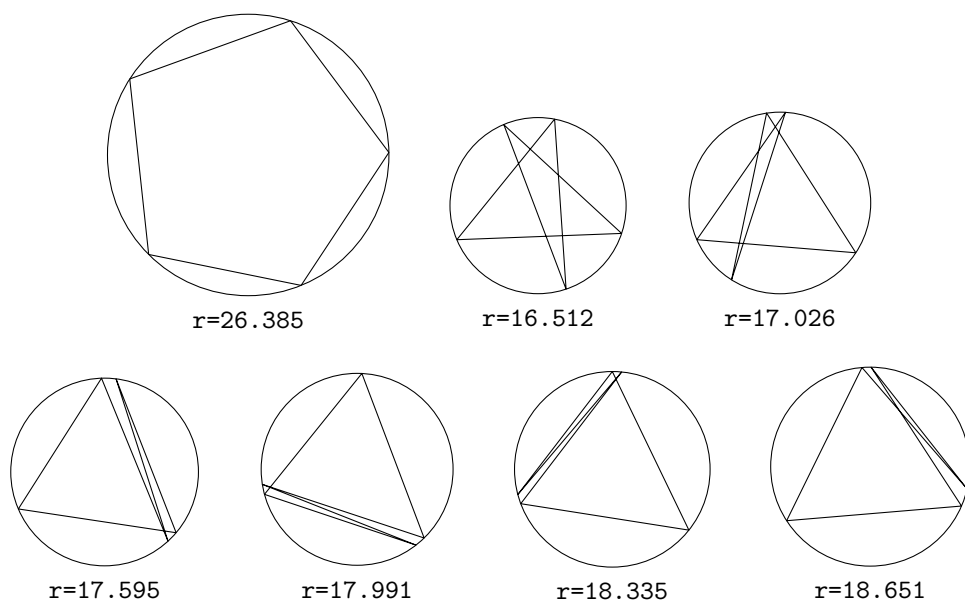


Рис. 7. Семь циклических пятиугольников со сторонами 29, 30, 31, 32, 33

На рис. 7, взятом из [13], изображены  $\Delta_2 = 7$  циклических пятиугольников со сторонами 29, 30, 31, 32, 33.

При чётных  $n = 2m + 2$  предположим, что одна сторона очень маленькая. Тогда при откладывании этой стороны в положительном направлении мы получим приблизительно те же  $\Delta_m$  многоугольники, что и в описанном выше построении для случая  $n = 2m + 1$ , а при откладывании этой стороны в обратном направлении получим ещё такое же количество  $\Delta_m$  других циклических  $(2m + 2)$ -угольников. Следовательно, и в случае чётных  $n = 2m + 2$  максимальное количество возможных описанных окружностей известно: существует ровно  $2\Delta_m$  различных комбинаторных типов циклических  $(2m + 2)$ -угольников, вписанных в окружности с различными радиусами.

Каждая реализация данного набора длин как циклического многоугольника даёт новое значение ориентированной площади многоугольника. Поэтому многочлен для площади должен иметь степень не меньше, чем число различных радиусов. При доказательстве теореме 2 указан общий способ построения полиномиального уравнения для  $R^2$ , но он не даёт никакой информации о степени этого многочлена. Однако указанный в [7] остроумный способ построения многочлена для  $R^2$  приводит к многочлену точно нужной степени  $\Delta_m$  или  $2\Delta_m$  соответственно для  $n = 2m + 1$  и  $n = 2m + 2$ .

Нетрудно показать, что при данном пронумерованном наборе длин для данного комбинаторного типа (т. е. когда известно, какие по номеру стороны отложены по, а какие — против часовой стрелки) и известного радиуса описанной окружности может существовать только один соответствующий циклический многоугольник (с точностью до вращения вдоль окружности), поэтому в общем случае количество значений квадрата ориентированной площади многоугольников равно количеству значений радиусов, причём это верно даже если мы будем рассматривать многоугольники с произвольным распределением длин из данного набора их значений по сторонам многоугольника<sup>11)</sup> (это свойство связано с симметричностью коэффициентов многочлена (27) относительно квадратов длин сторон многоугольника). Следовательно, степень многочлена для квадрата площади не меньше степени многочлена для  $R^2$ . Однако для получения точного значения степени этого многочлена есть два препятствия. Во-первых, этот многочлен может иметь большую степень, имея дополнительно к значениям площадей отрицательные или комплекснозначные корни  $S^2$  или неотрицательные корни, не являющиеся значениями площади (впрочем, нам неизвестны примеры существования таких «корней-паразитов»). Во-вторых, как мы знаем из §2, бывают такие наборы длин и комбинаторные типы, для которых существует многоугольники с непрерывным семейством описанных окружностей. Значит, нужно убедиться, что многочлен для площади не может вырождаться. Эта часть — существование для площади нормированного полиномиального уравнения — как мы уже говорили выше, доказана в [1] и [6]. А совпадение степени  $\nu(n)$  этого многочлена с  $\Delta_m$  или  $2\Delta_m$  соответственно для  $n = 2m + 1$  и  $2m + 2$  доказано в [7] с привлечением довольно сложного для элементарного изложения алгебраического аппарата и, что самое интересное, с использованием связей изучаемого вопроса с многогранниками, называемыми подвесками. Напомним, что *подвески*, или *бипирамиды*, устроены следующим образом. В пространстве есть многоугольник (который может быть плоским или пространственным), называемый *экватором*, и две точки  $A$  и  $B$ , называемые *полюсами*, которые соединены со всеми вершинами экватора. Получаются боковые поверхности двух пирамид, склеенные вдоль экватора, что даёт гомеоморфный сфере многогранник. Диагональ, соединяющая два полюса, называется *главной*.

<sup>11)</sup>Это значит, что если мы поменяем порядок расположения произвольных двух сторон с данными длинами, но с сохранением направления их откладывания на той же окружности, тогда, хотя и получим новый многоугольник, но площадь его не изменится. Символически это можно записать так: пусть откладываемые против часовой стрелки стороны записаны в списке длин со знаком «+», а откладываемые по часовой стрелке стороны записаны в этом списке со знаком «-», и пусть, например, имеем запись « $+l_1, +l_2, -l_3, \dots$ ». Тогда список « $+l_1, -l_3, +l_2, \dots$ » даст новый многоугольник, но с той же площадью.

Пусть рассматривается подвеска с экватором в виде плоского циклического многоугольника, с полюсами над центром описанной вокруг экватора окружности и с боковыми рёбрами равной длины. Устанавливается, что главная диагональ является алгебраической функцией от квадратов длин сторон экватора и квадрата длины бокового ребра. Затем, используя информацию о точном числе возможных значений радиуса окружности экватора, делается вывод, что при данных длинах рёбер подвеска в общем случае имеет ровно  $\nu(n)$  реализаций. На основании этого делается вывод, что алгебраическая функция — ориентированная площадь экватора, принимающая  $\nu(n)$  значений, должна быть корнем уравнения  $\nu(n)$ -й степени (вот для этого заключения нужно использовать тот алгебраический аппарат, о котором упоминалось выше). Нам кажется, что интересно было бы найти более простое доказательство равенства степени многочлена (27) числу  $\nu(n)$ .

Что касается третьей части теоремы — алгоритма нахождения многочленов из теорем 1, 2 и 3, то общая, но недостаточно эффективная, процедура их нахождения была объяснена при доказательстве теоремы 3. Есть несколько работ ([12], [13], [9]), в которых предлагается вводить различные вспомогательные функции и операции, через которые искомые полиномы пишутся в более компактном виде. В [9] таким образом некоторым единым методом получены многочлены для площади  $n$ -угольников при  $n \leq 7$  и изучены некоторые их свойства. Отметим, что в работе [2] доказано, что полиномиальное уравнение для площади 5-угольника неразрешимо в радикалах.

**§7.** В заключение формулируем ряд нерешённых задач этой теории.

1) Как было отмечено, есть наборы длин и комбинаторные типы, для которых радиусы описанной окружности допускают непрерывное семейство значений. Так как многочлен для площади нормированный (т. е. его старший коэффициент равен 1), он может иметь только конечное число корней, следовательно, при изменении радиуса окружности вписанный в неё многоугольник, изгибаясь нетривиально, с изменением диагоналей, сохраняет постоянную площадь. В связи с этим можно предполагать, что верна следующая

*ГИПОТЕЗА. Произведение  $16S^2R^2$  для циклического  $n$ -угольника является корнем некоторого нормированного многочлена, коэффициенты которого зависят только от квадратов длин сторон многоугольника.*

Для значений  $n = 3$  и  $n = 4$  это предположение верно: при  $n = 3$  имеем соответственно уравнения  $(4SR)^2 = a^2b^2c^2$ , а для 4-угольника можно составить уравнение со старшим членом  $(16S^2R^2)^2$  исходя из уравнений (11) и (16). Для 5-угольников это тоже верно, соответствующее уравнение

найден в [14] (оно 7-й степени для  $16S^2R^2$ , а в [15] есть уравнение 7-й степени для  $4SR$ , но только для выпуклых многоугольников); кстати, в [14] есть уравнение 7-й степени и для  $R^2$ . Если сформулированная гипотеза верна, тогда получим, что *в случае непрерывного изменения радиуса описанной окружности соответствующий многоугольник изгибается, имея постоянную нулевую площадь.*

2) Рассмотренную сейчас ситуацию можно обобщить как задачу нахождения изгибаний многоугольника, сохраняющих его площадь. Вариантов постановки задачи несколько: а) многоугольник циклический и изгибания происходят в классе циклических многоугольников; б) многоугольник циклический, но изгибания происходят не обязательно в классе циклических; в) наконец, общий случай — и изгибаемый многоугольник, и его изгибания происходят в классе общих многоугольников.

3) В работе [1] приводятся много результатов о многочленах для квадрата малой диагонали, но нет утверждения о порядке этих уравнений, т. е. задача состоит в нахождении минимальной степени многочленов для квадратов длин малых диагоналей. Есть основания полагать, что эта степень такая же, как и уже известная степень для квадрата радиуса описанной окружности. К этому вопросу можно добавить вопрос о многочлене для произведения или отношения малой диагонали и радиуса.

4) Существуют наборы длин  $l_1, \dots, l_n$ , для которых можно построить  $\nu(n)$  циклических многоугольников, однако есть наборы длин, когда таких многоугольников меньше. Как определить по набору длин, сколько многоугольников он определяет? В частности, бывают ли для любого  $n > 4$  наборы, определяющие только один циклический многоугольник? Какие наборы определяют только локально выпуклые многоугольники (т. е. их внутренние углы при вершинах, остающиеся по определению по левую сторону при обходе, все или меньше, или больше  $\pi$ , в зависимости от направления обхода)? В алгебраическом плане получается следующее: в задаче о нахождении циклического  $n$ -угольника заданные длины сторон искомого многоугольника алгебраически независимы, так как по крайней мере один такой многоугольник существует при *любом* наборе длин, но существование двух или более таких многоугольников уже находится под вопросом. Их существование определяется выполнением некоторого алгебраического уравнения на длины или неравенства на них?

5) При любом наборе длин степень многочлена для  $S^2$  (квадрата площади) одна и та же, а число многоугольников может быть меньше степени многочлена. Какой смысл имеют те корни многочлена, которые не соответствуют площадям реально существующих многоугольников? В частности, бывают ли положительные корни  $S^2$ , нереализуемые как площади? Какой смысл имеют отрицательные или комплексные корни многочлена?



6) Какой алгебраический или геометрический смысл имеют кратные корни какого-либо многочлена — для площади или для диагонали или для радиуса?

7) В устном разговоре с одним математиком автору была предложена идея рассмотреть вопрос о нахождении радиуса или площади циклического многоугольника через использование многочленов для объёмов многогранников с треугольными гранями, см. [5], построив для этого над многоугольником пирамиду с известной высотой  $h$  и равными боковыми рёбрами. В этой постановке на нахождение многочлена может оказать влияние наличие нового параметра — высоты  $h$ , но самая главная проблема заключается в том, что построенная пирамида ещё не является многогранником нужного класса, так как нет граней, составляющих её основание (например, даже в случае выпуклого циклического многоугольника для получения «дна» в виде совокупности треугольных граней многоугольник надо разбить на треугольники некоторой системой диагоналей, длины которых, однако, не даны). Поэтому лучше поступить, как у других авторов — рассмотреть регулярную подвеску, и попытаться, во-первых, получить для неё явное выражение для многочлена объёма, во-вторых, искать способ его применения к задаче о площади. Пока в вычислительной части есть работы противоположной направленности — искать объёмы подвесок, опираясь на знание площади полигональных экваторов, см., например, [15].

8) По-видимому, можно поставить более общую задачу о нахождении многочленов для площади или других характеристик многоугольника, вписанного в какую-нибудь данную алгебраическую кривую, для начала, скажем, в кривую второго порядка.

9) Изученную в работах [14] и [15] задачу определения площади многоугольника через площади прилегающих к его вершинам треугольников (обобщение формулы Гаусса, выражающей площадь 5-угольника через площади таких треугольников) можно переформулировать в терминах длин следующим образом: у многоугольника известны длины всех сторон и всех его малых диагоналей. Существует ли полиномиальное уравнение для его площади?

10) Известно, что теорема о существовании для многогранников нормированного многочлена для объёма верна в евклидовом пространстве и неверна в сферическом пространстве, а в пространстве Лобачевского этот вопрос остаётся открытым. Насколько нам известно, для циклических многоугольников вопрос о существовании полиномиального уравнения для их площади в случае неевклидовых пространств постоянной кривизны пока не исследовался.

11) Наконец, как этот круг вопросов может быть распространён на многоугольники в пространстве?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Варфоломеев В.В. *Вписанные многоугольники и полиномы Герона* // Матем. сборник. Т. 194, №3, 2003. С. 3–24.
- [2] Варфоломеев В.В. *Группы Галуа полиномов Герона – Сабитова для пятиугольников, вписанных в окружность* // Матем. сборник. Т. 195, №2, 2004. С. 149–162.
- [3] Крыжановский Д.А. *Изопериметры*. М.: Физматгиз, 1959.
- [4] Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии*. М.: МЦНМО, 2007.
- [5] Сабитов И.Х. *Объемы многогранников*. М.: МЦНМО, 2002. 2-е изд., 2009.
- [6] Connelly R. *Comments on generalized Heron polynomials and Robbins' conjectures*. Preprint, Cornell University, 2004.
- [7] Fedorchuk M., Pak I. *Rigidity and polynomial invariants of convex polytopes* // Duke Math. J. V. 129, 2005. P. 371–404.
- [8] Landers P. *Dying Mathematician Spends Last Days on Area of Polygon* // WSJ. July 29, 2003. P. 1.
- [9] Maley M.F., Robbins D.P., Roskies J. *On the area of cyclic and semicyclic polygons*. arXiv:math.MG/040/300v1 16Jul2004.
- [10] Pak I. *The area of cyclic polygons: recent progress on Robbins' Conjecture* // Adv. Applied Math. V. 34, 2005. P. 690–696. Эл. версия arXiv:math.MG/0408104
- [11] Pak I. *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*. Cambridge University Press, 2009.
- [12] Robbins D. *Areas of polygons inscribed in a circle* // Discrete and Comput. Geometry. V. 12, №2, 1994. P. 223–236.
- [13] Robbins D. *Areas of polygons inscribed in a circle* // Amer. Math. Monthly. V. 102, №6, 1995. P. 523–530.
- [14] Svrtan D., Veljan D., Volenec V. *Geometry of pentagons: from Gauss to Robbins*. arXiv:math.MG/0403503 v1 29 Mar 2004.
- [15] Veljan D. *Geometry of pentagons and volumes of fullerenes*. Препринт, доступен по: <http://crosbi.znanstvenici.hr/index.html?lang=EN>

---

Сабитов Идждад Хакович, 119992 ГСП-2 Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет  
E-mail: [isabitov@mail.ru](mailto:isabitov@mail.ru)

## Экскурс в теорию кос

В. О. Мантуров\*

В настоящей статье мы расскажем о теории кос — замечательной теории, связывающей воедино перестановки и запутывание узлов, многочлены без кратных корней и многое другое. Эта теория находится на стыке алгебры, геометрии и топологии, являясь вместе с тем красивой и наглядной. Кроме того, посредством знаменитых *уравнений Янга – Бакстера* косы связаны с физикой, а в последние годы — с новым направлением, лежащим на стыке нескольких наук, — квантовыми компьютерами. Теория узлов, тесно связанная с теорией кос, за последние пару десятилетий претерпела существенные изменения, и теперь узлы занимают умы не только математиков, но и представителей других точных и естественных наук. Многие красивые и сильные результаты в теории кос, в том числе и связанные с распутыванием узлов, формулируются достаточно просто. Мы расскажем о некоторых из них.

Более детально познакомиться с современным состоянием теории узлов и кос и найти, в частности, полные доказательства приведённых в настоящей статье теорем, можно, например, в [1]. Завершается настоящая статья геометрическим доказательством точности представления Бурау группы кос из трёх нитей и построением точного представления Лоуренс – Крамера – Бигелю.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В различных математических вопросах большую роль играет понятие перестановки.

Попытаемся представить процесс перестановки  $n$  элементов как непрерывный. Рассмотрим два набора точек на плоскости  $z = 1$  в трёхмерном пространстве с координатами  $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$  и  $(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$  и будем двигать верхние точки вниз так, чтобы координаты  $z$  строго убывали. Потребуем также, чтобы траектории движения точек не пересекались, а в конце движения все точки заняли положения нижних точек  $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$ . В этом случае описанные траектории

---

\* Автор поддержан грантом РФФИ №07-01-00648

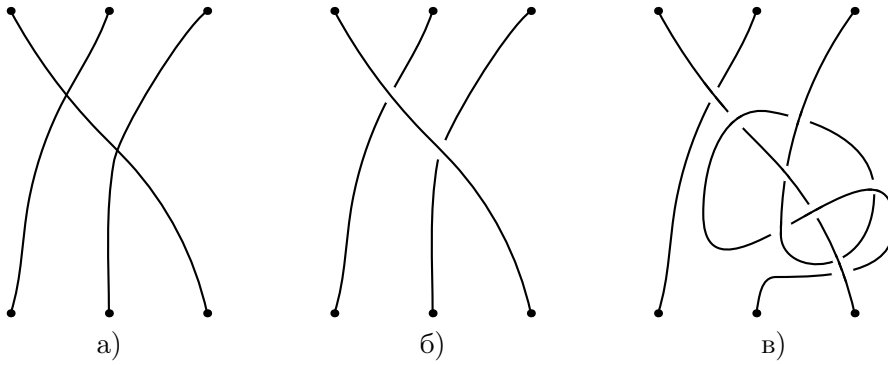


Рис. 1. а) Перестановка  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ; б) плоская диаграмма косы; в) тангл

будут задавать линии, строго идущие вниз и соединяющие точки из первого набора с точками из второго набора.

Спроектируем эти пути на плоскость  $Oxz$ . Если исходная перестановка не является единичной, то линии будут пересекаться. Укажем в каждой точке пересечения, у какой ветви координата  $y$  больше, а у какой — меньше. В результате мы получим объект, который называется *плоской диаграммой косы* (см. рис. 1б). Это название достаточно естественно: можно считать, что, располагая нити в пространстве в малой окрестности нашей плоскости  $Oxz$ , мы заплетаем из этих нитей косу. Точки на плоскости, в которых пересекаются проекции нитей косы, мы будем называть *перекрёстками*. Коса, построенная по плоской диаграмме, лежит уже не на плоскости  $Oxz$ , а в трёхмерном пространстве.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Картинка, изображённая на рис. 1в, плоской диаграммой косы не является, так как одна из трёх нитей на этой диаграмме не является строго нисходящей (она идёт то вверх, то вниз).

Объекты, подобные тому, который нарисован на рис. 1в, называются *танглами* (от англ. *tangle*). Иногда в русскоязычной литературе их называют также *связками* или *плетениями*. Танглы играют важную роль в теории кос и узлов, являясь обобщениями одновременно как узлов, так и кос. С танглами и косами связаны несколько замечательнейших конструкций в теории узлов — интеграл Концевича, ассоциатор Дринфельда, алгебра Книжника — Замолодчикова, квантовые инварианты.

Вернёмся к косам. Назовём *изотопными* такие косы, которые могут быть непрерывно (без разрывов и склеек) продеформированы в трёхмерном пространстве одна в другую так, что в процессе деформации все нити косы идут строго вниз (т.е. коса остаётся косой на протяжении всей деформации). В частности это означает, что концы нитей остаются

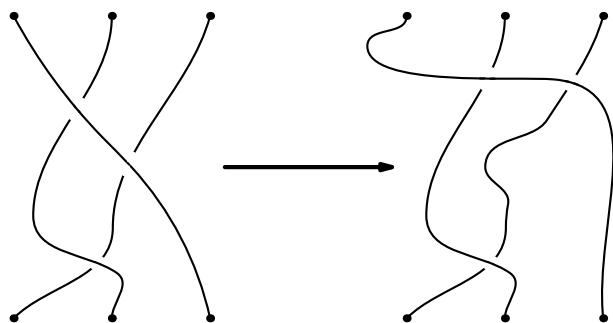


Рис. 2. Одинаковые (изотопные) косы

неподвижными, так как они с одной стороны должны двигаться непрерывно, а с другой стороны могут занимать лишь дискретное множество положений (с абсциссой  $1, 2, \dots, n$  и ординатой 1 или 0). Определённая таким образом изотопия представляет собой отношение эквивалентности. Класс изотопных кос называется *изотопическим типом косы*. В каждом изотопическом типе содержатся все косы, изотопные некоторой фиксированной косе и только они. Очевидно, что *при изотопии косы не меняется соответствующая ей перестановка*.

Как могут изменяться при изотопиях плоские диаграммы кос?

Очевидно, что если мы пошевелим диаграмму косы так, чтобы не изменилось взаиморасположение её дуг и перекрёстков (см. рис. 2), то коса останется изотопной самой себе. Такими деформациями не исчерпываются изотопные преобразования кос. Существуют также и другие виды преобразований плоских диаграмм кос, меняющие взаиморасположение перекрёстков косы, но не меняющие её изотопический тип. О таких преобразованиях мы поговорим чуть позже.

## 2. ГРУППА КОС

### 2.1. ОБРАЗУЮЩИЕ ГРУППЫ КОС

Как и перестановки, косы из фиксированного числа нитей, рассматриваемые с точностью до изотопии, обладают естественной структурой группы. Действительно, предположим, что у нас есть две косы  $A$  и  $B$  из  $n$  нитей каждая. Определим произведение кос  $AB$  как косу, получаемую сжиманием кос  $A$  и  $B$  по вертикали и расположением косы  $A$  над косой  $B$ , см. рис. 3а.

Очевидно, что определённое таким образом умножение кос ассоциативно.

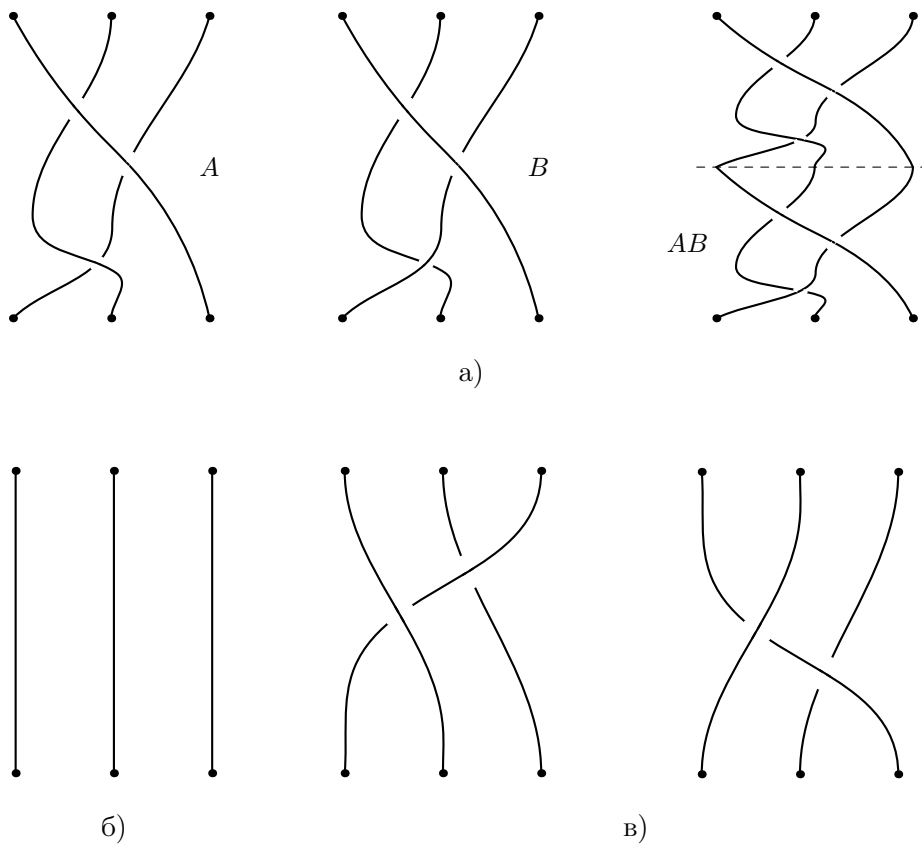


Рис. 3. Косы образуют группу: а) умножение; б) единичная коса; в) взятие обратного

При умножении кос, очевидно, перемножаются и соответствующие им перестановки. В качестве единичной косы можно взять косу, состоящую из вертикальных параллельных нитей, рис. 3б.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что в качестве косы, обратной заданной, можно рассмотреть зеркальное отражение относительно горизонтальной прямой, см. рис. 3в. Иными словами, произведение косы  $A$  и её зеркального отражения  $A'$  изотопно тривиальной (единичной) косе.

Это зеркальное отражение, очевидно, обращает перестановку, соответствующую косе, т. е. взятию обратной для некоторой косы соответствует взятие обратной для её перестановки.

Обе операции (умножение и взятие обратного) инвариантны относительно изотопии, т. е. если коса  $A_1$  изотопна косе  $A_2$ , а коса  $B_1$  — косе  $B_2$ ,

то произведение кос  $A_1 \cdot B_1$  изотопно произведению кос  $A_2 \cdot B_2$ , а обратная коса  $A_1^{-1}$  — обратной косе  $A_2^{-1}$ .

Итак, для каждого натурального числа  $n$  мы построили группу кос (точнее, изотопических классов кос) из  $n$  нитей, которую мы обозначим через  $Br(n)$  (от английского слова *braid* — коса). В этой группе изотопные косы считаются одинаковыми.

Опишем теперь некоторый набор образующих группы кос. Как и в случае с перестановками, где в качестве образующих можно взять транспозиции соседних элементов, в качестве образующих группы кос можно взять такие косы, которые переставляют два соседних элемента  $j, j + 1$ , где  $j$  — натуральное число от 1 до  $n - 1$ . При этом в отличие от группы перестановок нити можно переставить двумя разными способами (выбирая, какая нить идёт ближе, а какая — дальше). В одном случае (см. рис. 4а) эта перестановка обозначается через  $\sigma_i$ . Для другого случая, изображённого на рис. 4б, никакого специального обозначения вводить не надо, так как эта коса является обратной к косе  $\sigma_i$ , и её следует обозначать через  $\sigma_i^{-1}$ .

Легко видеть, что немного пошевелив плоскую диаграмму любой косы, мы можем привести её *в общем положении*, т. е. добиться того, чтобы все её перекрёстки были двойными (пересечениями ровно двух нитей косы) и лежали на разных уровнях. Тогда эту диаграмму косы можно легко разложить по образующим. Для этого мы просто идём сверху вниз и, встречая перекрёсток, пишем соответствующую ему букву  $\sigma_i$  или  $\sigma_i^{-1}$ , при этом буквы  $\sigma_i$  или  $\sigma_i^{-1}$  выбираются согласно рис. 4. Легко видеть, что верно и обратное утверждение: по записи косы в виде слова из образующих можно построить плоскую диаграмму этой косы однозначно с точностью до изотопии кос.

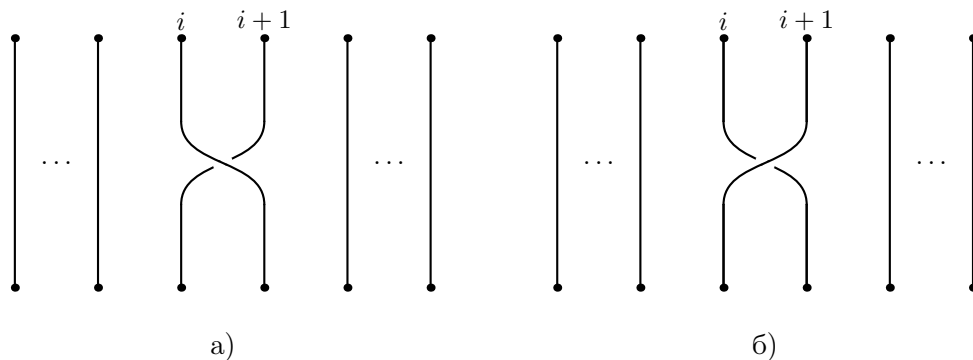


Рис. 4. а) Образующие  $\sigma_i$ ; б) обратные элементы  $\sigma_i^{-1}$

## 2.2. Соотношения в группе кос

Как можно изменять запись кос по образующим, не меняя изотопического класса косы?

Во-первых, если есть два перекрестка, находящиеся далеко друг от друга по горизонтали и близко по вертикали (т.е. нет ни одного перекрестка, находящегося выше одного из них, но ниже другого), то их можно поменять местами по вертикали, см. рис. 5 сверху. Ясно, что при таком преобразовании изотопический тип косы не изменится, однако изменится ее запись по образующим: порядок образующих  $\sigma_i, \sigma_j$ , соответствующих этим двум перекресткам, изменится на порядок  $\sigma_j, \sigma_i$ . Как уже сказано, числа  $i, j$  должны быть достаточно далеки друг от друга: модуль их разности должен быть не меньше двух.

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| \geq 2 \quad (1)$$

Это соотношение в группе кос называется *дальней коммутативностью*.

Есть и другие соотношения в группе кос. Представим себе, что на некоторой косе рядом находятся три точки попарных пересечений трёх различных нитей косы, при этом одна нить косы проходит выше (или ниже) двух других. Тогда эту нить можно «протянуть» над (под) двумя остальными,

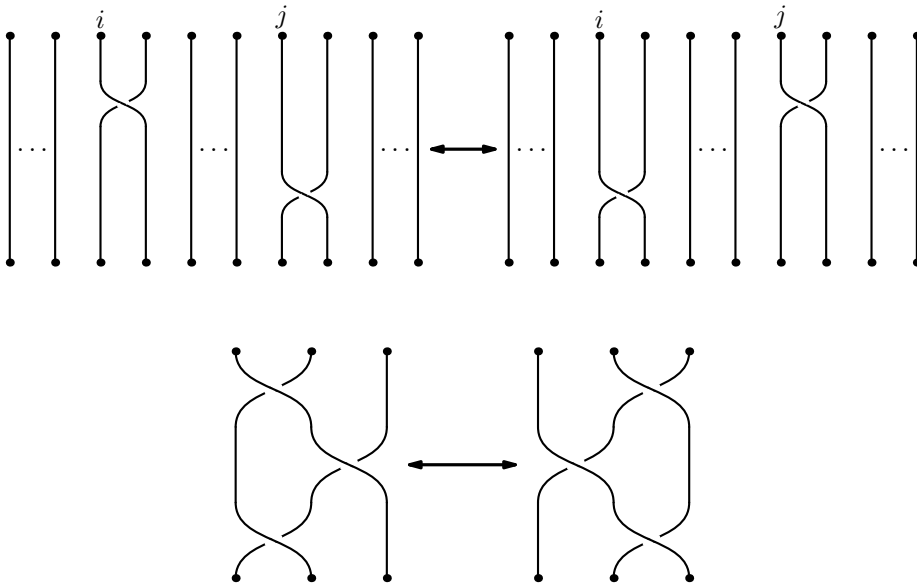


Рис. 5. Соотношения в группе кос



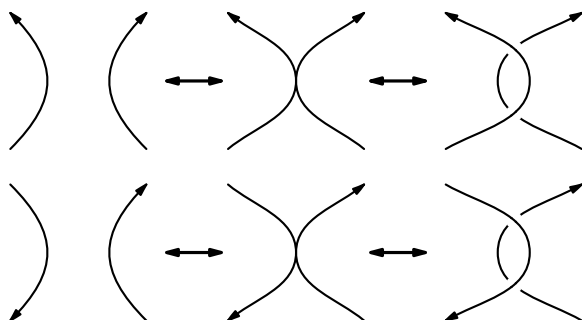


Рис. 6. Второе движение Рейдемейстера — сонаправленная и противоположная версии

см. рис. 5 снизу. Очевидно, что полученная таким образом коса будет изотопна изначальной, хотя запись косы по образующим изменится. В случае, показанном на рисунке 5 снизу, это изменение будет записываться в виде соотношения

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ при } 1 \leq i \leq n - 2. \tag{2}$$

Такое движение в теории узлов называется *третьим движением Рейдемейстера*.

Наконец, при изотопии может произойти следующее. Пусть две нити косы находятся на близком расстоянии друг к другу и не пересекаются. Тогда одну из этих нитей можно «наложить» на другую, т.е. провести сверху от другой см. рис. 6, верхняя часть. После этого к диаграмме косы добавятся два перекрёстка, но коса останется изотопной самой себе. Получившееся соотношение записывается в виде

$$\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = e, \tag{3}$$

где  $e$  обозначает тривиальную косу. Это соотношение выполняется в любой группе, так что его не нужно включать в список соотношений, определяющих группу кос.

Движение (3) в теории узлов также имеет своё название. Оно называется *вторым движением Рейдемейстера*.

Нижняя часть рисунка 6 также описывает второе движение Рейдемейстера — его противоположную версию. Эта версия в теории кос не встречается, так как ветви косы все направлены «в одну сторону».

В теории узлов встречается также *первое движение Рейдемейстера*, которое состоит в добавлении/удалении малой петли. При непрерывной изотопии узла в трёхмерном пространстве петля на его проекции возникает следующим образом: фрагмент проекции диаграммы узла в некоторый

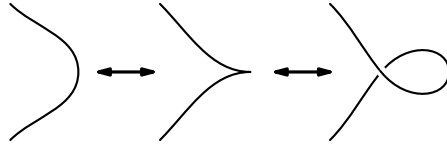


Рис. 7. Первое движение Рейдемейстера

момент перестаёт быть гладким, возникает клюв, который затем выпрямляется и даёт петлю, см. рис. 7.

Это движение также не возникает при изотопиях кос.

Итак, мы выписали два набора соотношений (1) и (2), которые по простым геометрическим соображениям, приведённым выше, выполняются в группе кос. При этом можно доказать, что этими соотношениями все и исчерпывается.

**ТЕОРЕМА 1 (АРТИН).** *Две косы  $A$  и  $B$ , заданные своими записями по образующим, являются изотопными тогда и только тогда, когда коса  $A$  переводится в косу  $B$  посредством последовательного применения преобразований кос (1), (2) и (3).*

Доказательство теоремы Артина требует определённой техники, и мы его приводить не будем, см., например, [1].

**ПРИМЕР.** Пусть  $A = \sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ ,  $B = \sigma_3\sigma_2\sigma_3$ . Косы  $A$  и  $B$  являются изотопными, так как одна переводится в другую следующей последовательностью преобразований (1) и (2):

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}(\sigma_3\sigma_1)\sigma_2\sigma_3 &\xrightarrow{\sigma_1\sigma_3=\sigma_3\sigma_1} (\sigma_1^{-1}\sigma_1)\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_3 = \\ &= \sigma_1(\sigma_3\sigma_2\sigma_3) \xrightarrow{\sigma_3\sigma_2\sigma_3=\sigma_2\sigma_3\sigma_2} \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Хотя мы и имеем достаточный набор определяющих соотношений в группе кос, это не даёт нам алгоритма, распознающего изотопность кос. Действительно, если даны две косы, мы можем сколь угодно долго применять соотношения (1) и (2) как к одной из них, так и к другой, и при этом не зная, можно ли остановиться и с уверенностью сказать: «Косы не являются изотопными» или же нужно ещё продолжать в надежде на то, что все же удастся доказать, что две косы являются изотопными.

Для того, чтобы понять, изотопны косы  $A$  и  $B$  из одинакового числа  $n$  нитей или нет, можно сделать небольшое упрощение. Мы знаем, что косы из  $n$  нитей для каждого натурального числа  $n$  образуют группу. Это значит, что косы можно перемножать, а у каждой косы есть обратная коса. Таким образом, косы  $A$  и  $B$  изотопны тогда и только тогда, когда коса

$AB^{-1}$  изотопна тривиальной. Следовательно, *распознавание кос сводится к распознаванию тривиальной косы.*

Стартуя с некоторой косы и применяя к ней соотношения (1) и (2) в надежде получить тривиальную косу, мы можем сколь угодно долго блуждать без должного результата и не знать, нужно ли остановиться или все ещё стоит продолжать поиски.

Косы были впервые рассмотрены Э. Артином в [3]. В своей оригинальной работе он сразу привёл алгоритм распознавания кос: по двум косам, заданным диаграммами, определяется, изотопны (эквивалентны) они или нет. Интересующегося читателя мы отсылаем к [3].

### 2.3. КРАШЕННЫЕ КОСЫ

Как мы знаем, при изотопии кос сохраняется неизменной перестановка, соответствующая косе. Это значит, что при распознавании тривиальной косы мы должны заведомо отбросить косы, которым соответствует неединичная перестановка, сказав: «Нет! Такие косы никак не могут быть тривиальными.»

Останутся лишь косы, которым соответствует тривиальная перестановка. Такие косы называются *крашеными* косами. Они называются так, потому что каждую их нить можно покрасить в свой цвет таким образом, чтобы точки сверху и снизу, имеющие одинаковую абсциссу, соединялись (одной и той же) нитью одного цвета.

Как и все косы, крашенные косы также образуют группу относительно той же самой операции умножения (приставления одной косы снизу от другой). Очевидно, что при умножении крашенных кос мы снова получаем крашеную косу, так как при умножении кос умножаются и перестановки, а у крашенных кос они единичные. Обратная к крашенной косе будет крашенной косой, так как при обращении кос соответствующие перестановки также обращаются.

Следовательно, для каждого натурального числа  $n$  мы получаем группу  $CB(n)$  *крашенных кос из  $n$  нитей*, которая является *подгруппой* группы кос из  $n$  нитей.

**УПРАЖНЕНИЕ.** Покажите, что подгруппа крашенных кос является нормальной в группе кос из  $n$  нитей и что факторгруппа по этой группе изоморфна группе перестановок из  $n$  элементов.

### 2.4. ЦЕНТР ГРУППЫ КОС. ГРУППА КОС ИЗ ТРЁХ НИТЕЙ

Как мы знаем из теории перестановок, единственная перестановка, которая коммутирует со всеми перестановками, — тривиальная. Поскольку отображение кос в перестановки является гомоморфизмом, любая коса,

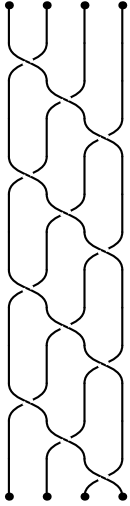


Рис. 8. Центральный элемент  $\Sigma$  группы кос

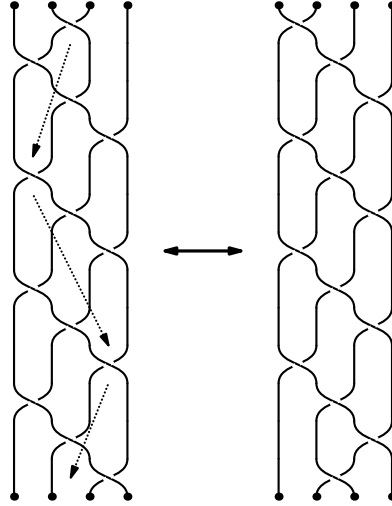


Рис. 9. Элемент  $\Sigma$  коммутирует с образующими группы кос

лежащая в центре группы кос, должна быть крашеной косой. Рассмотрим крашеную косу из  $n$  нитей, заданную образующими по формуле  $\Sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$ . Эта коса представляет собой «полный поворот всех нитей на  $2\pi$ », см. рис. 8.

Легко проверяется, что эта коса коммутирует со всеми косами  $u$ , следовательно, лежит в центре группы  $Br(n)$ . Действительно, достаточно проверить, что она коммутирует с образующими группы кос, что продемонстрировано на рис. 9.

УПРАЖНЕНИЕ. Покажите, что при  $n > 2$  центр группы кос из  $n$  нитей состоит из косы  $\Sigma$  и её степеней.

Указание. Используйте индукцию по количеству нитей.

В случае трёх нитей соответствующий элемент  $\Sigma$  имеет вид

$$\Sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2.$$

Введём другое представление для группы кос из трёх нитей: пусть  $b = \sigma_1 \sigma_2$ ,  $a = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ . Тогда, очевидно, имеет место соотношение  $a^2 = b^3$ . Легко проверяется, что это определяющее соотношение — единственное, и группа кос может быть записана в виде  $\langle a, b : a^2 = b^3 \rangle$ , ибо образующие  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  легко выражаются через  $a, b$ .

В такой записи очевидно, что элемент  $a^2 = b^3$  и только он лежит в центре: он коммутирует с обеими образующими.

### 3. КОСЫ И УЗЛЫ

Одной из наиболее ярких и быстро развивающихся в последние годы топологических теорий является теория узлов. *Узлом* называют как гладкое вложение окружности в трёхмерное пространство, так и образ этого вложения. Говорят, что узел *ориентирован*, если на окружности выбрана одна из двух возможных ориентаций. Как и косы, узлы интересно рассматривать с точностью до изотопии (для ориентированных узлов требуют, чтобы изотопия сохраняла ориентацию), т. е. до сохраняющих ориентацию деформаций пространства на себя. При таких деформациях окружность может растягиваться, но не может разрываться и склеиваться (самопересекаться). Как и в случае кос, такие движения называются *изотопиями*. Можно спроектировать узел на некоторую плоскость и в хорошем случае, которого можно добиться малым шевелением, проекция узла будет представлять собой плоскую кривую, все точки самопересечения которой являются двойными, причём в каждой точке самопересечения указано, где узел идёт выше, а где — ниже (*переход и проход*). При этом понятия «выше» и «ниже» определяются следующим образом. Без ограничения общности можно считать, что плоскостью проекции является плоскость *Оху* со стандартной ориентацией. В этом случае мы будем говорить, что нить проходит «выше», если она имеет большую координату  $z$  в прообразе точки пересечения и ниже в противном случае. Такая диаграмма называется *плоской диаграммой узла*. Аналогично узлам можно рассматривать зацепления, которые представляют собой набор непересекающихся несамопересекающихся окружностей в трёхмерном пространстве. Каждая из этих окружностей представляет собой узел, который называется *компонентой зацепления*. Для зацеплений также можно рассматривать плоские диаграммы с проходами и переходами. Каждое зацепление можно ориентировать, задав направление обхода каждой его компоненты. В таком случае говорят об *ориентированных зацеплениях (узлах)*.

*Тривиальным узлом* назовём узел в трёхмерном пространстве, изотопный узлу, допускающему плоскую диаграмму без перекрёстков.

*Тривиальное зацепление* из  $n$  компонент — это зацепление, каждая компонента которого является тривиальным узлом, причём трёхмерное пространство можно разделить на непересекающиеся между собой области, так чтобы каждая компонента лежала в своей области. Тривиальное зацепление изотопно зацеплению, имеющему плоскую диаграмму без перекрёстков, состоящую из непересекающихся окружностей.

Естественно искать связи между теорией кос и теорией узлов в связи с похожестью способов их изображения. И такая связь есть.

Рассмотрим некоторую плоскую диаграмму  $B$  некоторой косы из  $n$  нитей. У этой диаграммы помимо проходов и переходов есть ещё свободные

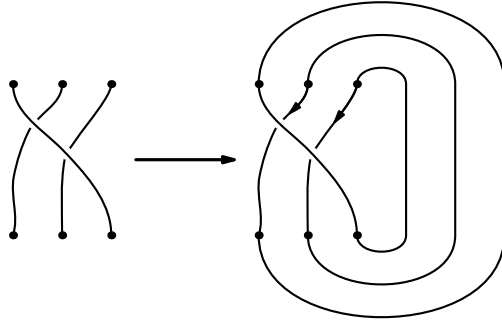


Рис. 10. Коса и её замыкание

концы — по  $n$  штук сверху и снизу. Эти концы можно замкнуть, соединяя каждый конец сверху с нижним концом косы, имеющим ту же абсциссу, при этом не создавая лишних перекрёстков, см. рис. 10.

Очевидно, что мы таким образом получим диаграмму узла или зацепления. Назовём получившееся зацепление *замыканием косы  $B$*  и обозначим его  $Cl(B)$ . Это зацепление естественным образом ориентированно: мы ориентируем все нити косы сверху вниз и далее продолжаем ориентацию на замыкание.

Понятно, что если две косы являются изотопными, то и соответствующие им зацепления также являются изотопными. Более того, изотопия, которой одно такое зацепление переводится в другое, затрагивает лишь нити косы, но не их замыкания. Обратное утверждение неверно, ибо легко можно построить косу из любого числа нитей, замыкание которой задаёт тривиальный узел.

Следовательно, появляются два важных вопроса:

1. Какие узлы и зацепления могут быть получены замыканием кос?
2. В каком случае два узла (зацепления), соответствующие неизотопным косам, являются изотопными?

### 3.1. ТРЮК АЛЕКСАНДЕРА

Начнём с ответа на первый вопрос. Попытаемся разобраться, какой должна быть плоская диаграмма зацепления, чтобы она могла быть получена замыканием некоторой косы.

Рассмотрим некоторую косу  $B$  и её замыкание  $Cl(B)$ . Все нити этой косы и их замыкания можно ориентировать, т. е. задать направление обхода, следующим образом. Внутри косы  $B$  будем считать, что нити идут от верхних точек к нижним, а на остальных участках замыкания ориентация зацепления направлена от нижних точек косы к верхним точкам.

Выберем точку  $A$ , расположенную между диаграммой косы и набором линий, замыкающих её, см. рис. 11а.

Если смотреть на замыкание косы  $Cl(B)$  из точки  $A$ , то мы видим круговое вращение косы против часовой стрелки, т. е. точка, двигаясь по замыканию косы вдоль ориентации, всегда оборачивается в одну сторону относительно точки  $A$ . В этом случае говорят, что зацепление  $Cl(B)$  *обвивается как коса* вокруг точки  $A$ .

Верно и обратное утверждение. Если ориентированное зацепление  $L$  обвивается как коса вокруг некоторой точки  $A$ , то  $L$  (точнее, зацепление, изотопное зацеплению  $L$ ) можно представить как замыкание косы. Для этого нужно выпустить из точки  $A$  два близких луча-радиуса. Если эти радиусы настолько близки, что образуемый ими угол не содержит перекрёстков зацепления  $L$ , то внутри угла, образованного радиусами, зацепление  $L$  представляет собой набор из  $n$  криволинейных отрезков, ориентированных в одинаковом направлении. Легко видеть, что если выкинуть эти отрезки, а затем распрямить получившееся, мы в точности получим косу, замыкание которой и есть зацепление  $L$ , см. рис. 11б.

Следовательно, для того, чтобы у зацепления была диаграмма, задаваемая замыканием косы, нужно, чтобы эта диаграмма обвивалась вокруг некоторой точки как коса. Оказывается, что для любого зацепления (точнее, у любого изотопического класса зацепления) существует такая плоская диаграмма. Этот факт носит название *теоремы Александра* в честь знаменитого американского тополога первой половины двадцатого века Дж. Александра и может быть доказан с помощью так называемого *трюка Александра*. Расскажем об этом более подробно.

Рассмотрим некоторую диаграмму  $L$  зацепления и ориентируем её произвольным образом. Выберем некоторую точку  $A$  на плоскости  $P$  диаграммы  $L$ , не принадлежащую проекции зацепления. Из этой точки можно «рассматривать» зацепление  $L$  и видеть, в каком месте оно оборачивается по часовой стрелке вокруг точки  $A$ , а в каком — против. Разобьём наше зацепление на очень маленькие кусочки (можно считать их прямолинейными) так, чтобы каждый кусочек содержал не более одного перекрёстка, при этом проекция каждого кусочка поворачивалась либо по часовой стрелке вокруг  $A$ , либо против, см. рис. 12 слева.

В интересующем нас случае все кусочки должны быть ориентированы против часовой стрелки. Предположим, что это не так, и какой-то кусочек вращается по часовой стрелке относительно точки  $A$ . Предположим, что этот кусочек начинается в точке  $B$  и кончается в точке  $C$ . Рассмотрим такую точку  $D$ , что криволинейный треугольник  $BCD$ , у которого кривой является лишь сторона  $BC$ , содержит точку  $A$  внутри (см. рис. 12 справа).

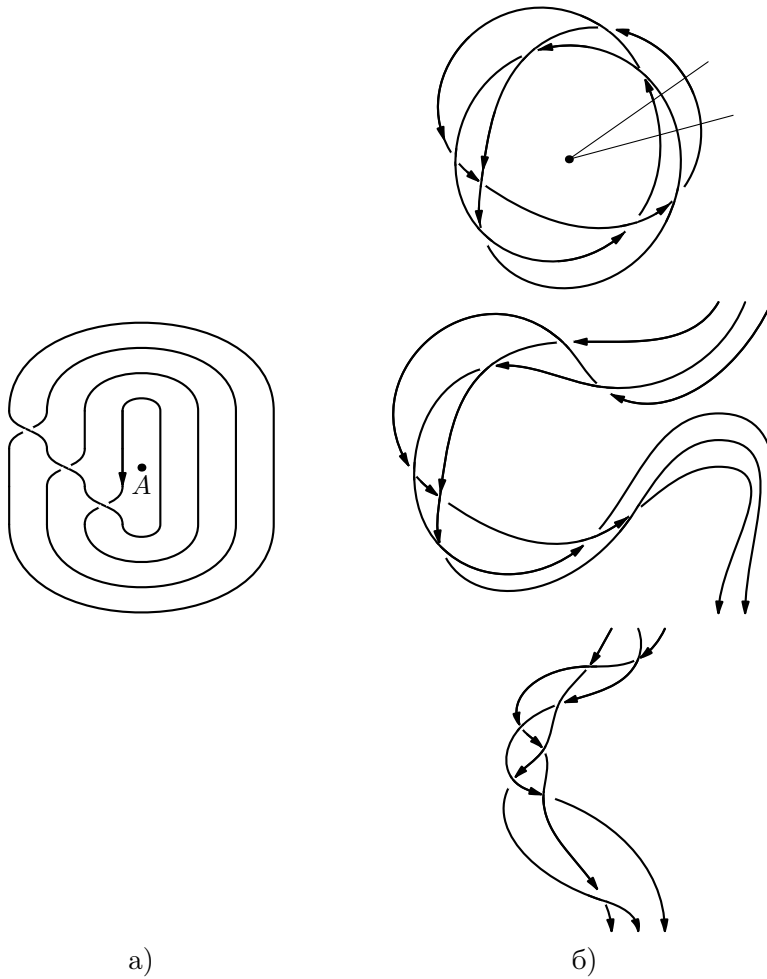


Рис. 11. а) Замыкание косы; б) построение косы по зацеплению

Легко видеть, что стороны этого треугольника  $BD$  и  $DC$  оборачиваются вокруг точки  $A$  уже против часовой стрелки.

Заметим теперь, что дугу  $BC$  можно заменить на две дуги  $BD$  и  $DC$ . При этом если на дуге  $BC$  был единственный перекрёсток, и она проходила его сверху, то и её перебрасывание через точку  $A$  можно проводить сверху, а если единственный перекрёсток она проходила снизу, то перебрасывание следует проводить снизу. Если же на этой дуге вообще не было перекрёстков диаграммы  $L$ , то перебрасывание можно проводить как сверху, так и снизу. Каждое такое перебрасывание будет представлять собой изотопию в трёхмерном пространстве. В итоге после всех таких изотопий мы



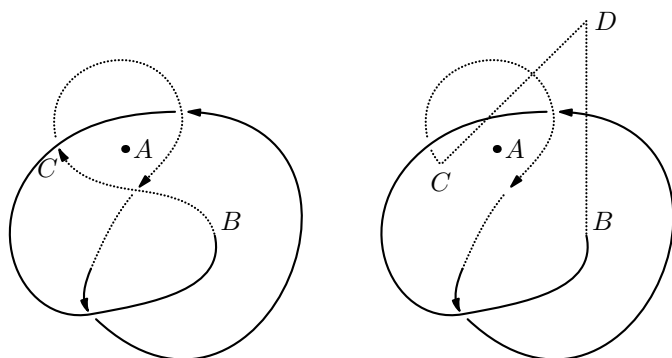


Рис. 12. Трюк Александра

получим диаграмму  $L'$  зацепления, изотопного изначальному, в котором количество рёбер, ориентированных «плохо», станет на единицу меньше.

Описанная выше операция и называется *трюком Александра*.

Если у диаграммы зацепления  $L'$  остались кусочки, ориентированные по часовой стрелке, мы опять применим трюк Александра, и т. д. В итоге получим плоскую диаграмму зацепления, изотопного изначальному, которая будет обвиваться вокруг точки  $A$  как коса. Значит, наше зацепление (точнее, некоторое, изотопное ему) представимо замыканием косы.

### 3.2. ТЕОРЕМА МАРКОВА

Попытаемся теперь ответить на вопрос о том, когда замыкания двух кос задают изотопные зацепления.

Начнём с двух примеров.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим косу  $a$  из  $n$  нитей и косу  $c$  из того же количества нитей, полученную из косы  $a$  сопряжением:  $c = bab^{-1}$ . Тогда замыкание косы  $c$  задаёт тот же изотопический класс зацепления, что и замыкание косы  $a$ .

Действительно, рассмотрим зацепление  $Cl(c)$ , получающееся замыканием косы  $c$ . Выделим ту часть, которая соответствует косе  $b^{-1}$  снизу и протащим её наверх вдоль линий замыкания, см. рис. 13, верхняя часть. Получим замыкание косы  $b^{-1}ba$ , которое, очевидно, изотопно зацеплению  $Cl(a)$ , так как изотопными являются сами косы  $a$  и  $b^{-1}ba$ .

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим косу  $a$  из  $n$  нитей. К ней справа можно добавить ещё одну  $(n + 1)$ -ю нить и перекрёсток между  $n$ -й и  $(n + 1)$ -й нитями (при этом нам неважно, какая нить идёт сверху, а какая снизу

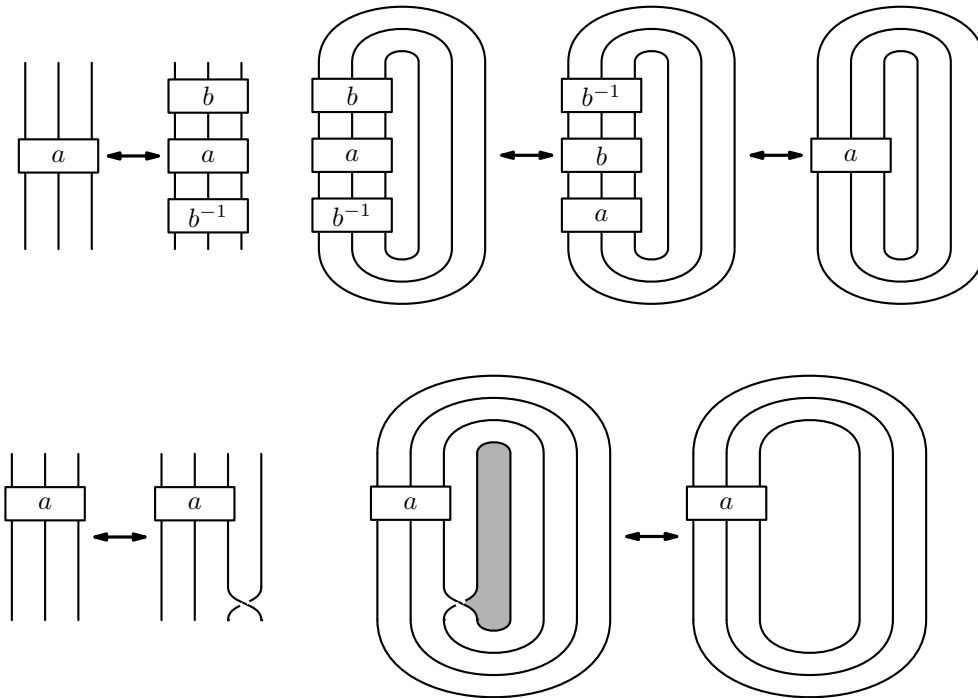


Рис. 13. Изотопные замыкания кос

в добавленном перекрёстке). Получим косу  $a'$ . Тогда замыкание косы  $a$  изотопно замыканию косы  $a'' = a \cdot \sigma_n^{\pm 1}$  из  $(n + 1)$  нити.

Действительно, замыкание косы  $a''$  отличается от замыкания косы  $a$  наличием петли, см. рис. 13 снизу (на рисунке петля выделена). Очевидно, что добавление или удаление такой петли переводит зацепление в изотопное ему зацепление.

В теории узлов добавление (удаление) петли называется *первым движением Рейдемейстера*. Отметим, что первое движение Рейдемейстера меняет число нитей косы, замыкание которой представляет данный узел.

Движения, описанные в примерах 1 и 2, носят название *движений Маркова*.

**ТЕОРЕМА 2 (МАРКОВ).** *Любые две косы (из произвольного числа нитей), задающие изотопные зацепления, переводятся одна в другую последовательностью движений, каждое из которых есть либо изотопия кос, либо первое движение Маркова (сопряжение), либо второе движение Маркова, либо движение, обратное второму движению Маркова.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве этой теоремы, опубликованном Марковым, были пробелы. Строгое доказательство этого замечательного факта достаточно сложно и было получено лишь в 60-е годы двадцатого века Дж. Бирман [5].

Отметим, что, как и в случае распознавания изотопности кос, наличие таких движений не даёт алгоритма проверки изотопности двух зацеплений, задаваемых замыканиями кос.

## 4. КОСЫ, МНОГОЧЛЕНЫ И ПУТИ НА ПЛОСКОСТИ

### 4.1. ЗАМКНУТЫЕ ПУТИ НА ПЛОСКОСТИ

Напомним, что коса соединяет точки с координатами  $(k, 0, 1)$  и  $(k, 0, 0)$ . На каждой плоскости  $\{z = t\}$  коса оставляет свой след — неупорядоченный набор из  $n$  различных точек. Параметр движения  $t$  (вместо него обычно берут возрастающий при движении  $t$  от единицы к нулю параметр  $u = 1 - t$ ) можно считать *временем*.

Таким образом, каждую косу из  $n$  нитей можно трактовать как одновременное движение по плоскости *неупорядоченного* набора из  $n$  точек, такое, что ни в какой момент времени эти точки не совпадают, а в начальный и конечный момент времени они имеют координаты  $x = 1, 2, \dots, n$ ,  $y = 0$ . Здесь неупорядоченность означает, что нам неважно, в каком порядке точки вернутся на свои места. В случае, когда каждая точка, выйдя из своего начального расположения, вернётся в него же (будет иметь ту же абсциссу), мы получим крашеную косу.

Можно проделать и обратную операцию: по одновременному движению  $n$  точек на плоскости с начальными и конечными положениями  $x = 1, 2, \dots, n$ ,  $y = 0$ , построить косу из  $n$  нитей.

При этом изотопия кос легко описывается в терминах путей на плоскости. Две косы  $A$  и  $B$  из  $n$  нитей являются изотопными тогда и только тогда, когда одновременный маршрут всех  $n$  точек, соответствующий косе  $A$ , можно непрерывно продеформировать в маршрут, соответствующий косе  $B$ , таким образом, чтобы в каждый момент деформации каждые два маршрута были непересекающимися.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В топологии говорят, что такие маршруты задают путь в конфигурационном пространстве наборов из  $n$  различных неупорядоченных точек на плоскости, причём две косы, задаваемые таким образом, изотопны в том и только том случае, когда соответствующие этим косам пути гомотопны.

## 4.2. МНОГОЧЛЕНЫ БЕЗ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

Представим теперь, что плоскость, по которой движутся точки, — это плоскость комплексных чисел. Тогда каждая точка на этой плоскости — просто комплексное число. А набор из  $n$  различных точек с координатами  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  — это набор различных комплексных чисел  $z_j = x_j + iy_j$ , где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Эти различные числа можно считать корнями многочлена степени  $n$  от переменной  $z$ , задаваемого по формуле:

$$P = \prod_{j=1}^n (z - z_j). \quad (5)$$

Многочлен  $P$  не имеет кратных корней, поскольку числа  $z_j$  различны. Старший коэффициент этого многочлена равен единице.

Согласно основной теореме алгебры, любой многочлен степени  $n$  над комплексными числами имеет  $n$  корней с учётом кратностей. Если старший коэффициент многочлена равен единице, то многочлен разлагается на  $n$  сомножителей первой степени вида  $(z - z_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Если у многочлена нет кратных корней, то все эти сомножители различны. При этом, естественно, нельзя сказать, какой корень является первым, какой — вторым, и т. д. Это и означает неупорядоченность корней многочлена. Поэтому для фиксированного натурального числа  $n$  множество наборов различных  $n$  точек на плоскости находится в однозначном соответствии с множеством многочленов степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным единице, и без кратных корней.

Понятно, что если два набора точек близки друг к другу, то и соответствующие им многочлены также близки. Следовательно, можно говорить о пространстве многочленов степени  $n$  со старшим коэффициентом единица без кратных корней и о топологии на этом пространстве. Как раз это пространство и будет совпадать с конфигурационным пространством неупорядоченных наборов точек на плоскости.

Таким образом, мы можем трактовать каждую косу как непрерывное изменение многочлена в классе многочленов без кратных корней, при котором в начальный и в конечный моменты многочлен равен  $\prod_{i=1}^n (z - z_i)$ .

Так, например, простейшая коса из двух нитей может быть записана как следующая деформация многочлена:

$$P_t = z^2 - 3z + 2.25 - 0.25(\cos 2\pi t + i \sin(2\pi t)). \quad (6)$$

Этот многочлен, очевидно, имеет корни, равные  $1.5 + 0.5(\cos \pi t + i \sin \pi t)$  и  $1.5 - 0.5(\cos \pi t + i \sin \pi t)$ . Таким образом, при пробегании переменной  $t$  значений от 0 до 1, пара корней многочлена будет вращаться по окружности с центром в точке 1.5 радиуса 0.5, при этом в начальный и в конечный моменты эти корни будут равны 1 и 2. В итоге мы получаем косу  $\sigma_1^{-1}$  из двух нитей.

## 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ КОС

Представлением группы  $G$  называется гомоморфное отображение группы в группу матриц: каждому элементу группы  $G$  сопоставляется некоторая матрица  $n \times n$ , при этом умножение в матрицах соответствует умножению в  $G$ . Представление называется *точным*, если оно не имеет ядра.

На рубеже 20–21 веков было найдено точное представление группы кос из произвольного числа нитей (Лоуренс [8], Крамер, Бигелу). Это *точное* представление задаёт *полный* инвариант группы кос: так как ни для какой нетривиальной косы представляющая её матрица не равна единичной матрице, а косы образуют группу, матрицы, представляющие различные косы, различны, следовательно матрица (набор её элементов) задаёт полный инвариант кос.

Мы опишем два подхода к построению точных представлений групп кос — формальный алгебраический (где мы ищем такие матрицы, соответствующие образующим, чтобы выполнялись соотношения группы кос) и геометрический.

При этом для доказательства точности мы будем использовать лишь геометрический подход. Мы начнём с представления Бурау [6], появившегося в 30-х годах 20-го века.

### 5.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ И ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ КОС НА ПЛОСКОСТИ С ВЫКОЛОТЫМИ ТОЧКАМИ

Наиболее естественным путём для поиска представлений группы кос является следующий. Можно попытаться представить косы из  $n$  нитей матрицами размера  $n \times n$ . Более точно, можно связать с элементом  $\sigma_i$  блочно-диагональную матрицу с блоком  $2 \times 2$ , расположенным в двух строках  $(i, i + 1)$  и двух столбцах  $(i, i + 1)$ , и остальными блоками размера  $(1 \times 1)$ , равными 1 и расположенными на главной диагонали. Очевидно, что для такой матрицы должны выполняться некоторые соотношения коммутирования между образами  $\sigma_i, \sigma_j$ , где  $|i - j| \geq 2$ . Если взять матрицы, соответствующие  $\sigma_i$  с одинаковыми  $(2 \times 2)$ -блоками (но на разных местах), то останется только проверить соотношения  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$  для матриц размера  $3 \times 3$ . Если матрицу размера  $2 \times 2$ , соответствующую образующей  $\sigma$ , обозначить через  $A$ , то соотношение для матриц  $3 \times 3$  будет выглядеть (для блочно-диагональных матриц) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad (7)$$

На этом пути получается представление, в котором блок матриц размера  $2 \times 2$  выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Это представление называется представлением *Бурау* группы кос. Оно было предложено Бурау в [6].

Точность (т. е. мономорфность) этого представления была открытым вопросом на протяжении долгого времени. Джоан Бирман [5] впервые доказала точность этого представления для группы кос из трёх нитей.

В 1991 году Муди построил первый пример нетривиального элемента из ядра представления Бурау (группы кос с большим, чем три, количеством нитей).

К настоящему времени проблема точности представления Бурау решена положительно для  $n \leq 3$  и отрицательно для  $n \geq 5$  (Бигелу). Случай  $n = 4$  до сих пор открыт.

Мы приведём доказательство точности представления Бурау при  $n = 3$  геометрическими методами, а затем покажем, как можно развить эту геометрическую технику для построения точного представления группы кос из произвольного числа нитей.

## 5.2. ПРИВЕДЁННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ

Заметим, что представление Бурау *приводимо*: все образы кос в этом представлении имеют общий собственный вектор  $(1, \dots, 1)$  с собственным значением 0. Таким образом, существенным является *приведённое* представление Бурау, которое отображает группу кос из  $n$  нитей в матрицы размера  $(n-1) \times (n-1)$ . Дальнейшая геометрическая интерпретация относится именно к *приведённому представлению Бурау*.

Приведённое представление Бурау выглядит следующим образом. Рассмотрим исходный базис пространства, в котором действует неприведённое представление Бурау:  $x_1, \dots, x_n$ . Как мы заметили, вектор  $x_1 + \dots + x_n$  является собственным вектором относительно всех матриц представления Бурау. Опишем дополнительное собственное пространство к этому вектору. Пусть  $y_i = tx_i - x_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-2$ . Тогда мы имеем:

$$y_i = tx_i - x_{i+1} \xrightarrow{\sigma_i} -t^2x_i + tx_{i+1} = -ty_i.$$

Аналогично:

$$y_{i-1} = tx_{i-1} - x_i \xrightarrow{\sigma_i} tx_{i-1} - (1-t)x_i - x_{i+1} = y_{i-1} + y_i;$$

$$y_{i+1} = tx_{i+1} - x_{i+2} \xrightarrow{\sigma_i} t^2x_i - x_{i+2} = ty_i + y_{i+1}.$$

При  $j < i-1$  или  $j > i+2$  имеем  $\sigma_i y_j = y_j$ . Таким образом, матрицы  $\sigma_i$  имеют вид блочно-диагональных с почти всеми единицами на диагонали.

В случае, когда  $i > 1$  и  $i < n$  матрица  $\sigma_i$  имеет один блок размера  $3 \times 3$ , который выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В случае трёх нитей представление будет двумерным и действовать на векторах  $y_1$  и  $y_2$ . В этом базисе косы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будут представлены матрицами:

$$\sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} -t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Легко проверяется, что матрица  $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$  будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -t^2 \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а её квадрат будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} t^3 & 0 \\ 0 & t^3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Последняя матрица является образом центрального элемента  $\Sigma$ . Отметим, что никакая степень этой матрицы не является единичной.

### 5.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУРАУ

Говоря, что группа кос  $B_n$  представима матрицами  $n \times n$ , мы тем самым утверждаем, что группа кос *действует* на столбцах длины  $n$ : каждая матрица  $B(\alpha)$ , соответствующая косе  $\alpha$  посредством какого-либо представления  $B$ , действует на векторах посредством умножения слева:  $B(\alpha): x \mapsto B(\alpha) \cdot x$ .

Верно и обратное: если группа  $G$  *линейно действует* на некотором линейном пространстве  $V$ , т. е. каждый элемент группы задаёт линейное преобразование на  $V$ , при этом единичный элемент действует тождественно и выполнено естественное свойство ассоциативности,  $(g_1g_2)v = g_1(g_2v)$ ,  $g_1, g_2 \in G$ ,  $v \in V$ , то это действие задаёт линейное представление группы  $G$ . При этом пространство  $V$  может иметь произвольную природу.

Рассмотрим следующую геометрическую интерпретацию группы кос и представления Бурау.

Обозначим через  $D_n$  единичный круг на комплексной плоскости с  $n$  отмеченными точками (проколами)  $x_1, \dots, x_n$  в нём, расположенными подряд на вещественной оси.

На этом проколоте диске можно рассмотреть линейное пространство  $V_n$  *гомологических классов ориентированных замкнутых петель*, не задевающих проколы: у каждой петли можно посчитать, сколько раз она

обходит вокруг первого прокола (обходы по часовой стрелке считаются со знаком плюс), обходы вокруг второго прокола и т. д.

Таким образом, каждой ориентированной петле мы сопоставляем набор её «координат»:  $x_1, \dots, x_n$ . Петли можно умножать (или, правильнее сказать, складывать, так как речь идёт о линейном пространстве): можно пройти одну петлю, а затем после неё вторую петлю. Естественно, что при этом координаты петель будут складываться.

Это подводит к понятию *первой группы гомологий для диска с проколотыми точками*  $H_1(D_n) = V_n$ : данное линейное пространство  $V_n$  (скажем, над полем  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел) представляет собой первую группу гомологий диска с проколотыми точками. Эта группа изоморфна группе  $\mathbb{Q}^n$ , где образующие соответствуют петлям, обходящим вокруг проколов.

Оказывается, что косы *естественно действуют на  $D_n$  и, следовательно, на линейном пространстве  $V_n$* . Опишем это действие более подробно. Каждая коса  $b$  из  $n$  нитей представляет собой движение набора точек в трёхмерном пространстве, при котором в начальный и в конечный моменты точки занимают одно и то же положение. Без ограничения общности можно считать, что это положение — это набор  $x_1, \dots, x_n$  и что за все время движения точки не выходят за пределы единичного круга.

Теперь можно представить, что вместе с набором точек  $x_1, \dots, x_n$  видоизменяется (движется по себе) весь диск  $D_n$ , при этом его граница остаётся на месте: представляя, что диск сделан из гибкого материала, жёстко закреплённого на крае, с проколами в точках  $x_1, \dots, x_n$ , можно начать двигать проколотые точки согласно некоторой косе  $\beta$ , пока они в конце не встанут на свои места (в порядке, согласованном с косой  $\beta$ ). Естественно, что *изотопные косы задают изотопные движения диска*: то есть, если деформировать косу непрерывно, то непрерывно будет меняться и вся история преобразования диска. Если же рассмотреть единичную косу, то есть держать все время проколотые точки на своих местах, то мы можем деформировать диск, но эта деформация будет оставаться *изотопной тождественной*. Это означает, что *множество всех автоморфизмов проколотого диска с точностью до изотопии* изоморфно группе кос  $Br(n)$ .

Отметим, что *изотопия кривой не меняет её класса гомологий*: количество раз, сколько кривая обходит вокруг того или иного прокола, не меняется при малом шевелении кривой, которое не задевает проколов.

Следовательно, косы *действуют на  $H_1(D_n) = V_n$* . Это действие устроено очень просто: коса  $\sigma_i$  переставляет местами точки  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , следовательно, она переставляет  $i$ -ю и  $(i+1)$ -ю координаты. Тем самым мы видим, что *представление группы кос на  $V_n$  получается из представления группы перестановок*: от косы остаётся лишь информация, как она переставляет точки, и соответствующая матрица состоит из единиц, переставленных в соответствующем порядке. При этом группа крашенных кос, разумеется,



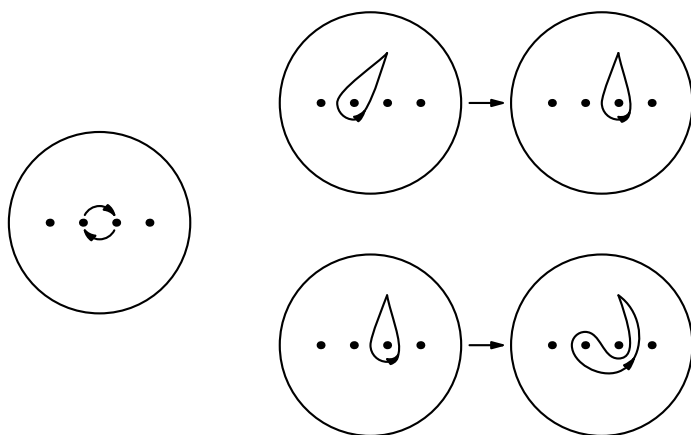


Рис. 14. Действие образующей  $\sigma_2$  на петли

переходит в единичную матрицу и образует ядро представления. Так что данное представление не точно.

Попробуем извлечь больше информации из действия группы кос на  $D_n$ . Переходя к гомологиям, мы сильно упростили задачу: в пространстве  $V_n$  мы от петель оставляем лишь информацию о том, сколько раз они обходят вокруг проколов, но совершенно игнорируем то, в каком порядке они обходят вокруг проколов. Так, например, две петли, изображённые на рис. 15, задают одинаковые элементы из  $V_n$ , но они не гомотопны в  $D_n$ : одну из них нельзя перетянуть в другую, не задев проколов.

На самом деле можно рассматривать все возможные гомотопические классы петель с отмеченной точкой — их будет счётное множество, и на них построить точное действие группы кос и, следовательно, точное представление группы кос. Но это представление будет бесконечномерным, а мы ищем конечномерные представления групп кос.

Рассмотрим произвольную петлю  $\gamma \subset D_n$ . Пусть  $\text{ind}(\gamma)$  обозначает суммарное количество раз, которое коса  $\gamma$  обходит вокруг проколов.

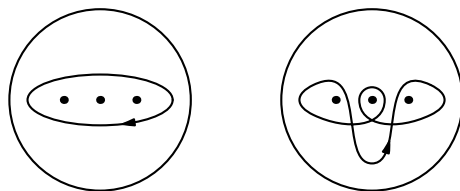


Рис. 15. Две не гомотопные, но гомологичные петли

Сосчитаем сумму координат петли  $\gamma$  в  $V_n$ : это будет общее количество оборотов вокруг всех точек.

Нетрудно заметить, что если подействовать любой косой  $b$  на  $D_n$ , то это общее число оборотов не изменится:  $\text{ind}(\gamma) = \text{ind}(b(\gamma))$ . Действительно, каждая образующая группы кос переставляет образующие группы  $V_n$ , так что сумма координат вектора из  $V_n$  не меняется при действии группы кос.

Таким образом, у каждой петли  $\gamma$  имеется *целочисленный инвариант действия группы кос*  $\text{ind}(b(\gamma))$ . Это приводит к тому, что имеется *естественное накрытие*  $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$  со структурной группой  $\mathbb{Z}$ , на котором действует группа кос из  $n$  нитей.

*Накрытие* одного пространства другим — это отображение, которое локально является гомеоморфизмом, т. е. каждую малую окрестность прообраза оно взаимно однозначно отображает на соответствующую малую окрестность образа. Разумеется, накрытие не является *глобально однозначным отображением*: над каждой точкой  $z$  в образе может «висеть» несколько точек из прообраза  $y_1, \dots, y_k$ , в неё переходящих, при этом прообразом малой окрестности  $U(z)$  является набор окрестностей  $\bigcup U_i(y_i)$ . При этом накрытие  $f: A \rightarrow B$  имеет *структурную группу*  $\mathbb{Z}$ , если имеется естественное действие группы  $\mathbb{Z}$  на всем пространстве  $A$  (обозначаемое  $p: z \rightarrow t^p z$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in A$ ) такое, что  $f(z) = f(t^p z)$  для любого  $p$ . Иными словами, на полном прообразе каждой точки из  $B$  можно делать сдвиги вверх (умножать на  $t^p$  при  $p$  положительном) и вниз (умножать на  $t^{-p}$ ), при этом правило сдвига непрерывно зависит от точки.

Построим накрытие  $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$  с действием группы  $\mathbb{Z}$  на  $\tilde{D}_n$ . Соединим в диске  $D_n$  каждый прокол с краем диска отрезком, идущим вниз от прокола. Если диск  $D_n$  разрезать вдоль таких отрезков, то он станет *односвязным*, т. е. любая петля в нем будет стягиваться в точку, а петли на  $D_n$ , обходящие вокруг проколов, будут пересекать разрезы. Представим себе, что у нас имеется счётный набор плоскостей  $\{z = c \in \mathbb{Z}\}$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , и на каждой плоскости мы имеем по одному экземпляру разрезанного диска  $D_n$ . Рассмотрим замкнутые петли на  $D_n$ . Мы хотим, чтобы каждая петля, имеющая индекс  $k$ , соответствовала поднятию на  $k$  этажей вверх. Поэтому будем считать, что при пересечении разреза справа налево путь поднимается на этаж вверх, а при пересечении слева направо — опускается на этаж вниз. Чтобы завершить конструкцию  $\tilde{D}_n$ , склеим вдоль разрезов каждый правый отворот с соответствующим левым, находящимся на один уровень выше, см. рис. 16.

Отображение накрытия  $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$  определим как проекцию вдоль оси  $z$ .

Рассмотрим множество замкнутых петель на  $\tilde{D}_n$ . Среди них имеются замкнутые петли, начинающиеся и заканчивающиеся на нулевом этаже: они соответствуют петлям  $\gamma$  на  $D_n$  с нулевым индексом. Подпространство

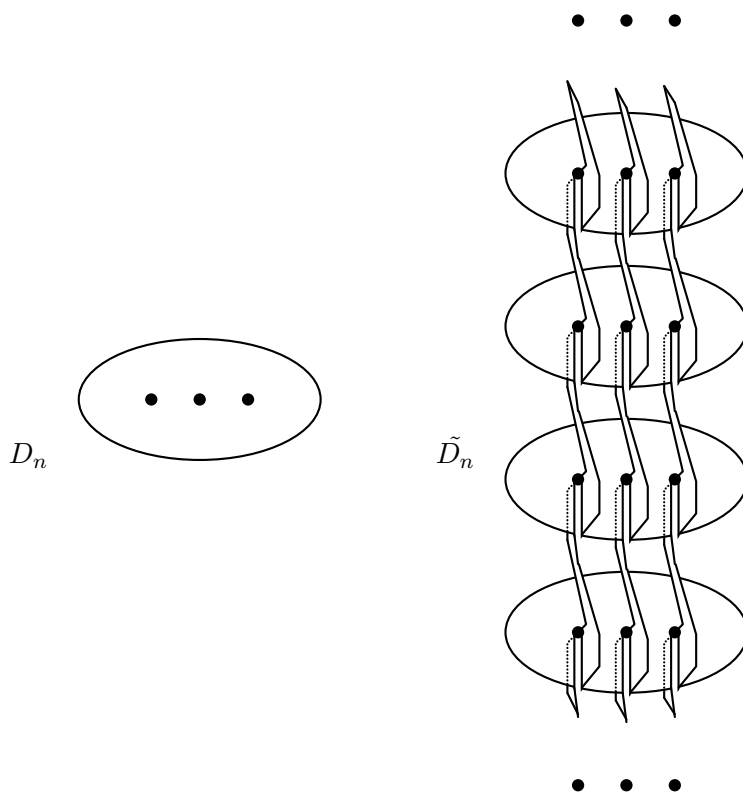


Рис. 16. Накрытие  $\tilde{D}_n \rightarrow D_n$

пространства  $V_n$ , порождающее такие петли, будет  $(n - 1)$ -мерным пространством  $V'_n$ : от пространства  $V_n$  нужно оставить лишь подпространство, соответствующее нулевой сумме координат. Таким образом, *бесконечномерное линейное пространство всех петель на  $\tilde{D}_n$ , рассматриваемых с гомологической точки зрения, можно представить как конечномерный модуль<sup>1)</sup> над  $\mathbb{Q}[t]$* . Здесь мы говорим *модуль* вместо линейного пространства, так как  $\mathbb{Q}[t]$  является не полем, а лишь кольцом: скажем, мы не можем делить на элемент  $(1 - t) \in \mathbb{Q}[t]$ . Эти элементы по-прежнему считают обходы вокруг проколотых точек, только точки на нулевом уровне соответствуют обычным координатам  $x_1, \dots, x_n$ , а точки на  $k$ -м уровне — координатам  $t^k x_1, \dots, t^k x_n$ . Таким образом, мы видим, что *первая группа гомологий  $H_1(\tilde{D}_n)$  представляет собой  $(n - 1)$ -мерный модуль над  $\mathbb{Q}[t]$*

<sup>1)</sup>Модулем называется пространство, элементы которого можно складывать (как векторы) и умножать на элементы кольца: например, множество целочисленных точек на плоскости представляет собой двумерный модуль над  $\mathbb{Z}$ .

(одну образующую мы потеряли за счёт того, что мы потребовали равенство нулю индекса петли).

Кроме рассмотренных, имеются ещё петли, получаемые из петель  $V'_n$  сдвигами вверх и вниз. Разумеется, мы получаем бесконечномерное пространство: на каждом этаже имеется свой базис. Но мы можем ввести удобное обозначение: пусть петля  $\gamma$  лежит на нулевом этаже. Тогда петля, получаемая поднятием  $\gamma$  на  $k$  этажей будет обозначаться через  $t^k\gamma$ .

Здесь нужно сделать одну оговорку. Очевидно, что если мы сначала обойдём прокол с номером  $i$  по часовой стрелке, а затем обойдём тот же прокол против часовой стрелки, то мы сначала поднимемся на этаж вверх (скажем, с нулевого на первый), а затем спустимся на этаж вниз. Путь, пройденный нами, будет тривиальным, т.е. должен записываться как 0. Таким образом, если мы записываем первую часть пути как  $x_i$ , вторая часть пути должна записываться как  $-x_i$ , т.е. любой путь  $-x_j$  спускается с первого этажа на нулевой (а не с нулевого на минус первый).

Поэтому при записи того или иного пути по образующим и определении степени переменной  $t$  нужно пути с положительным знаком отсчитывать от нулевого уровня, а пути с отрицательным знаком — от первого уровня. Соответственно, путь, начинающийся на нулевом уровне обходом вокруг точки  $i$  против часовой стрелки, будет в своей записи иметь  $-t^{-1}x_i$ .

На рис. 17 изображена следующая образующая  $z_i$ . Петля сначала идёт против часовой стрелки вокруг прокола с номером  $i + 1$  с первого уровня на нулевой, а затем — по часовой стрелке вокруг прохода с номером  $i$  с нулевого уровня на первый, т.е. суммарно мы имеем  $x_i - x_{i+1}$  и её поднятие, которое также будет записываться в виде  $x_i - x_{i+1}$ . Они будут образовывать базис в  $V'_n$ .

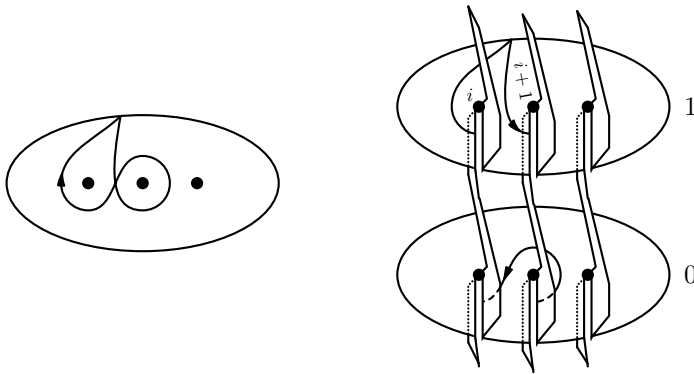


Рис. 17. Образующая  $z_i = x_i - x_{i+1}$  и её поднятие на  $\tilde{D}_n$

Так как действие кос на  $D_n$  сохраняет индекс петель, оно *продолжается на  $\tilde{D}_n$* : замкнутые петли на  $\tilde{D}_n$  переходят в замкнутые. Более того, это действие согласовано с умножением на  $t$ : если умножить петлю  $\gamma$  на  $t$ , а затем подействовать на эту петлю косой  $b$ , получится тот же результат, что и в результате умножения на  $t$  результата действия косы  $b$  на  $\gamma$ .

Действие кос на образующие из  $V'_n$  можно записать в виде матрицы  $(n-1) \times (n-1)$ . Отметим, что представление Бурау, взятое при  $t=1$ , задаёт как раз представление кос перестановками, переход от петель на  $D_n$  к петлям на  $\tilde{D}_n$  соответствует потере одной образующей (у которой все координаты равны между собой и которая является собственным вектором неприведённого представления Бурау), а дальнейшее введение переменной  $t$  соответствует переходу от  $D_n$  к  $\tilde{D}_n$ .

Покажем, что это геометрическое представление совпадает с приведённым представлением, заданным на матрицах (где фигурируют переменные  $y_j$  вместо «геометрических» переменных  $z_j$ ). Геометрически это показано на рис. 18 для образующих  $z_i$ : образующая  $\sigma_i$  меняет местами проколы  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , вращая их оба вокруг их центра против часовой стрелки. Все образующие  $y_j$  при  $j < i-1$  или  $j > i+2$ , очевидно, остаются на месте. Действие на  $z_{i-1}, z_i, z_{i+1}$  изображено на рисунке.

Образующая  $z_{i-1}$  переходит в петлю, разбивающуюся в сумму двух петель: сначала мы обходим вокруг  $(i+1)$ -го прокола отрицательно, а вокруг  $i$ -го — положительно, а после — отрицательно вокруг  $i$ -го прокола и положительно вокруг  $(i-1)$ -го прокола. В итоге мы получаем сумму  $z_i + z_{i-1}$ .

Далее, на среднем рисунке изображено действие на образующую  $z_i$ : обход вокруг  $(i+1)$ -го прокола в положительном направлении записывается как  $tx_{i+1}$ , после чего мы находимся на первом уровне; далее обход в отрицательном направлении вокруг  $i$ -го прокола записывается как  $-tx_i$ , т. е. в целом мы получаем элемент  $-ty_i$ .

Наконец, образ элемента  $z_{i+2}$  выглядит так: обходим вокруг прокола  $i+2$  отрицательно, получаем  $-tx_{i+2}$ , далее обходим (стартуя с первого уровня) вокруг прокола номер  $i+1$  положительно, получаем  $tx_{i+1}$ , далее положительно обходим вокруг прокола номер  $i$ , получаем  $x_i$  и, наконец, обходим отрицательно вокруг обхода номер  $i+1$ , получая  $-x_{i+1}$ . В итоге мы имеем  $t(x_{i+1} - x_{i+2}) + (x_i - x_{i+1}) = tz_{i+1} - z_i$  и получаем в точности матрицу из формулы (9).

#### 5.4. ТОЧНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУРАУ ДЛЯ ТРЁХ НИТЕЙ

Как оказывается, представление Бурау точно для трёх нитей. У этого факта есть много доказательств, но мы приведём геометрическое доказательство, впервые полученное Бигелу. Это доказательство *основывается на арифметических свойствах числа три*, и заведомо не проходит для

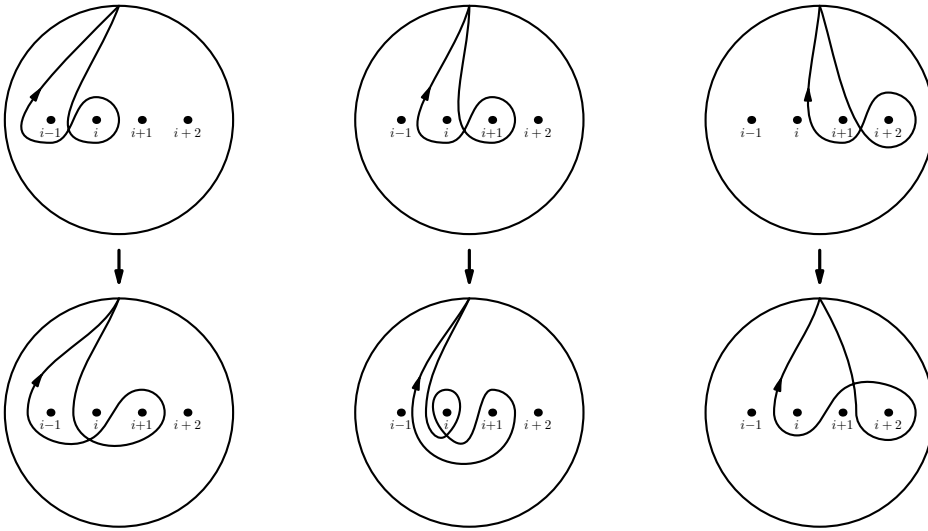


Рис. 18. Действие  $\sigma_i$  на образующие в приведённом представлении Бурау

большого числа нитей: для пяти и более нитей представление Бурау вообще не точно. Однако два геометрических утверждения (*ключевая лемма* и *основная лемма*) позволяют модифицировать конструкцию представления, чтобы получить точное представление группы кос из произвольного числа нитей (Бигелу).

Нам нужно показать, что любая нетривиальная коса из трёх нитей в представлении Бурау даёт матрицу, отличную от единичной. Это можно переформулировать так: для отображения  $D_n$  на себя, неподвижного на крае и не гомотопного тождественному, найдётся элемент из  $H_1(\tilde{D}_n)$ , который переходит в другой элемент из  $H_1(\tilde{D}_n)$ .

Для доказательства точности представления Бурау нам понадобятся два вспомогательных понятия: *вилки* и *стебля*, см. рис. 19.

Выберем в качестве отмеченной точки на крае  $\partial D_n$  проколотого диска  $D_n$  нижнюю точку  $-i$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** *Вилкой*  $F$  назовём вложение графа с четырьмя вершинами  $d_0, p_i, p_j, z$  в единичный круг  $D$  такое, что:

1. Вилка  $F$  не содержит проколов, кроме  $p_i, p_j$ .
2.  $F$  пересекается с краем диска  $D_n$  только в точке  $d_0$ .
3. Все три ребра дерева  $F$  имеют  $z$  в качестве вершины.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Ребро дерева  $F$ , содержащее  $d_0$ , называется *ручкой*  $H$  вилки  $F$ . Объединение оставшихся двух рёбер можно считать одним

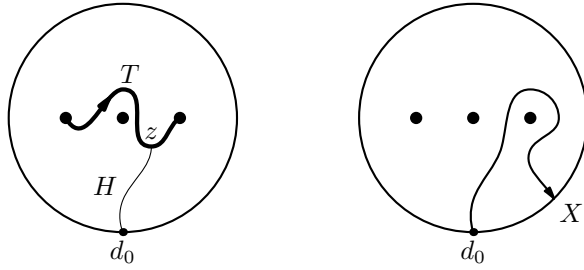


Рис. 19. Вилка и стебель

ребром; назовём его *зубцом* вилки  $F$  и обозначим его через  $T(F)$ . Ориентируем зубец  $T(F)$  таким образом, чтобы ручка вилки  $F$  располагалась справа от зубца  $T(F)$ .

На рис. 19 зубец  $T$  изображён жирной линией, а ручка  $H$  — тонкой.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.** *Стеблем* назовём ориентированный отрезок  $N$  в  $D_n$  такой, что:

1. Стебель  $N$  ориентирован от  $d_0$  к некоторой другой точке  $X$  из  $\partial D_n$ .
2.  $N \cap \partial D_n = \{d_0, X\}$ .
3. Одна из двух связных компонент множества  $D_n \setminus N$  содержит ровно одну отмеченную точку.

Дальнейшее доказательство опирается на понятие *спаривания*. Под *спариванием* ориентированных кривых на двумерной поверхности понимается способ сопоставления парам таких кривых целых чисел посредством подсчёта алгебраического числа их точек пересечения. Знак точки пересечения двух ориентированных кривых  $\gamma$  и  $\delta$ , трансверсально пересекающихся в точке  $X$ , определяется как  $+1$ , если в этой точке базис  $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$  положителен и как  $-1$ , если он отрицателен. При *гомотопии* кривых точки трансверсального пересечения могут появляться и исчезать парами, при этом знаки пересечений у двух появляющихся (исчезающих) точек одинаковые, см. рис. 20.

Спаривание, которое мы собираемся ввести, помимо знаков будет содержать переменную  $t$ , т. е. каждый перекрёсток будет вносить вклад  $\pm t^k$ , где знак определяется стандартным образом, а степень переменной  $t$  будет зависеть от тех уровней на  $\tilde{D}_n$ , на которые поднимаются две ветви, пересекающиеся на  $\tilde{D}_n$ .

У вилки и зубца можно посчитать число точек пересечения (со знаками и с учётом степеней  $t$ , см. ниже). Любая коса, действуя на  $D_n$ , переводит

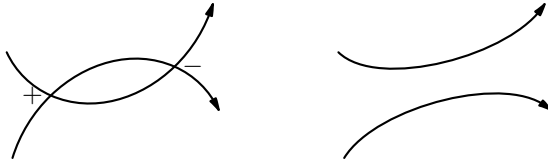


Рис. 20. Сокращение знаков у пары перекрёстков

вилку в вилку, а стебель — в стебель. Оказывается, что если коса действует простым образом, сохраняя форму пересечения, то она должна быть тривиальна.

Пусть  $F$  и  $N$  — вилка и стебель соответственно. Определим спаривание  $\langle N, F \rangle \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$  следующим образом. Без ограничения общности можно считать, что  $T(F)$  пересекает стебель  $N$  трансверсально (т.е. в каждой точке их пересечения касательные векторы не коллинеарны). Пусть  $z_1, \dots, z_k$  — точки пересечения  $T(F)$  и  $N$  (порядок нумерации несущественен). Для каждого  $i = 1, \dots, k$  обозначим через  $\gamma_i$  дугу в  $D_n$ , которая идёт от  $d_0$  к  $z_i$  вдоль  $F$  и затем обратно к  $d_0$  вдоль  $N$ . Эта дуга на диске  $D_n$  замкнута, а её поднятие на  $\tilde{D}^n$  поднимается (опускается) на несколько этажей вверх (вниз). Обозначим через  $a_i$  это число этажей (взятое с соответствующим знаком), а через  $\varepsilon_i$  — знак пересечения стебля  $N$  и вилки  $F$  в точке  $z_i$ . Положим

$$\langle N, F \rangle = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i t^{a_i}. \quad (13)$$

Попросту говоря, мы считаем точки пересечения в  $D_n$  со знаками, а степени переменной  $t$  считают, насколько этажей отстоят друг от друга «поднятия» точек пересечения на  $N$  и на  $F$ : если начать рисовать две кривые на  $D_n$ , исходящие из одной точки и одновременно рисовать такие же кривые на  $\tilde{D}_n$ , то те точки, в которых эти кривые пересекаются повторно на  $D_n$ , на  $\tilde{D}_n$  могут лежать на разных этажах.

Можно легко проверить, что введённое отношение не зависит от предварительной изотопии (которая позволяла считать пересечение зубца  $T(F)$  и стебля  $N$  трансверсальным): если мы непрерывно изменяем  $N$  или  $T(F)$ , оставляя концы фиксированными, то точки пересечения могут возникать или исчезать лишь парами: положительная и отрицательная, при этом соответствующие пересечения будут лежать на одном и том же этаже.

Доказательство точности представления Бурау следует из двух лемм.

**ЛЕММА 1 (ОСНОВНАЯ ЛЕММА).** Пусть коса  $\beta: D_n \rightarrow D_n$  лежит в ядре представления Бурау. Тогда  $\langle N, F \rangle = \langle N, \beta(F) \rangle$  для любого стебля  $N$  и вилки  $F$ .



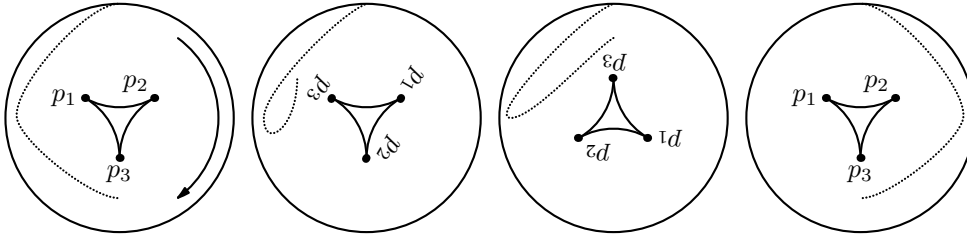


Рис. 21. Полный оборот оставляет на месте треугольник  $p_1p_2p_3$

Смысл этой леммы — в том, что представление Бурау полностью определяет, с какими коэффициентами (из  $\mathbb{Q}[t]$ ) пересекаются кривые (в частности — вилки и стебли).

**ЛЕММА 2 (КЛЮЧЕВАЯ ЛЕММА).** *В случае  $n = 3$  равенство  $\langle N, F \rangle = 0$  имеет место в том и только в том случае, если зубец  $T(F)$  изотопен дуге, не пересекающей  $N$ .*

Выведем теперь точность представления Бурау для кос из трёх нитей из этих двух лемм. Предположим, что коса  $\beta$  лежит в ядре представления Бурау. Покажем, что  $\beta$  — тривиальная коса.

Пусть  $N$  — стебель. Без ограничения общности можно выбрать  $N$  горизонтальной линией в  $D_n$  такой, что выколотые точки  $p_1$  и  $p_2$  лежат выше  $N$ , а  $p_3$  лежит ниже  $N$ . Пусть  $F$  — вилка, такая что  $T(F)$  представляет собой отрезок прямой от  $p_1$  до  $p_2$ , не пересекающий стебля  $N$ . Тогда  $\langle N, F \rangle = 0$ . По основной лемме мы имеем  $\langle N, \beta(F) \rangle = 0$ . Согласно ключевой лемме дуга  $\beta(T(F))$  изотопна некоторой дуге, не пересекающей  $N$ . Применяя изотопию к  $\beta$ , можно считать, что  $\beta(T(F)) = T(F)$ .

Аналогичным образом можно доказать, что каждое из трёх рёбер треугольника с вершинами  $p_1, p_2, p_3$  сохраняется под действием  $\beta$ . Таким образом, если  $\beta$  нетривиальна, то она представляет собой некоторое количество полных оборотов диска  $D$ , см. рис. 21. Однако как мы видели такие косы (представляющие собой центр группы кос из трёх нитей) не лежат в ядре представления Бурау (соответствующие матрицы являются диагональными, но не единичными). Таким образом, представление Бурау для кос из трёх нитей точно.

Перейдём к самой красивой и важной части доказательства точности представления Бурау для кос из трёх нитей — ключевой лемме.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КЛЮЧЕВОЙ ЛЕММЫ.** Основной идеей является нахождение вилки, изотопной данной, зубец которой пересекает  $N$  в минимальном (ненулевом) количестве точек. Мы покажем, что это невозможно, если соответствующее спаривание нулевое.

Напомним, что, согласно определению (13), мы имеем  $\langle N, F \rangle = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i t^{a_i}$ .

Применяя при необходимости гомеоморфизм проколотого диска  $D_3$  на себя, можно считать, что  $N$  — это горизонтальный отрезок прямой, лежащий в  $D_3$ , с двумя выколотыми точками с верхней стороны и одной выколотой точкой с нижней стороны. Здесь мы немного отошли от прежней договорённости считать, что выколотые точки лежат на действительной оси, продеформировав слегка наше множество  $D_3 \subset D$ . Пусть  $D_3^+$ ,  $D_3^-$  обозначают верхнюю и нижнюю части множества  $D_3 \setminus N$  соответственно. Перенумеруем выколотые точки таким образом, чтобы  $D_3^+$  содержало точки  $p_1, p_2$ , а множество  $D_3^-$  содержало точку  $p_3$ . Рассмотрим теперь пересечение  $T(F)$  с  $D_3^-$ . Оно состоит из несвязного набора дуг с концами в  $N$  (возможно, что у одной дуги одна конечная точка совпадает с  $p_3$ ). Дуга  $T(F) \cap D_3^-$ , у которой оба конца лежат в  $N$ , должна отделять (вместе с частью горизонтального диаметра, расположенной между концами дуги) точку  $p_3$ ; в противном случае её можно удалить вместе с парой точек пересечения (что противоречит предположению о минимальности). Таким образом, множество  $T(F) \cap D_3^-$  должно состоять из набора «параллельных» дуг, отделяющих точку  $p_3$ , и, возможно, одной дуги, имеющей конец в точке  $p_3$ .

Аналогичным образом, всякая дуга в  $T(F) \cap D_3^+$  либо отделяет одну из точек  $p_1, p_2$ , либо имеет конец в одной из точек  $p_1$  или  $p_2$ . Не может быть дуги в  $T(F) \cap D_3^+$ , отделяющей обе точки: в этом случае самая внешняя такая дуга вместе с самой внешней дугой в нижней части образовывали бы замкнутую петлю, т. е. «зубец» имел бы циклическую связную компоненту.

Посчитаем аккуратно число пересечения и убедимся, что все слагаемые, взятые при  $t = -1$ , имеют один и тот же знак.

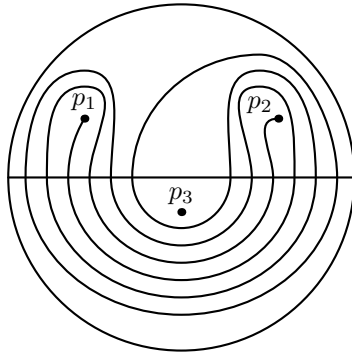


Рис. 22. Зубцы вилки и стебель в  $D_3$

Действительно, пусть  $z_i$  и  $z_j$  — две точки пересечения между  $T(F)$  и  $N$ , соединенные дугой в  $T(F) \cap D_3^+$  или в  $T(F) \cap D_3^-$ . Эта дуга вместе с частью дуги  $N$  ограничивает область, содержащую выколотую точку. Таким образом,  $a_j = a_i \pm 1$ . Кроме того, два знака точек пересечения противоположны:  $\varepsilon_j = -\varepsilon_i$ . Следовательно,  $\varepsilon_j(-1)^{a_j} = \varepsilon_i(-1)^{a_i}$ . Рассуждая также и впредь, мы заключаем, что все слагаемые для  $\langle N, F \rangle$ , взятые при  $t = -1$ , имеют один и тот же знак. Следовательно,  $\langle N, F \rangle$  не равно нулю.

## 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КРАМЕРА – БИГЕЛОУ

Поиск точного линейного представления группы кос из произвольного числа нитей был важной алгебраической задачей, которая была решена лишь к концу двадцатого века. Точное представление даёт явный полный инвариант группы кос. В развитие той идеи, что представление Бурау происходит из некоторого накрытия, Стивен Бигелоу предложил более изопрённое накрытие, которое порождает другое представление. Бигелоу доказывает точность этого представления, используя технику «вилки и стебля». Мы начнём с формального определения, следуя работе Даана Крамера [7]. После этого мы (не вдаваясь в подробности) скажем о геометрическом смысле представления (Бигелоу [4]) и о причинах его точности.

### 6.1. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЛОУРЕНС – КРАМЕРА

Пусть  $n$  — натуральное число, а  $R$  — коммутативное кольцо с единицей над  $\mathbb{R}$ , порождённое элементами  $q, t \in R$ . Пусть  $V$  — линейное пространство над кольцом  $R$  размерности  $\frac{n(n-1)}{2}$ , порождённое некоторыми элементами  $x_{i,j}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ .

Определим действие группы кос  $Br(n)$  на пространстве  $V$  по следующему правилу:

$$\sigma_k(x_{i,j}) = \begin{cases} x_{i,j} & k < i - 1 \text{ или } k > j; \\ x_{i-1,j} + (1 - q)x_{i,j} & k = i - 1; \\ tq(q - 1)x_{i,i+1} + qx_{i+1,j} & k = i < j - 1; \\ tq^2x_{i,j} & k = i = j - 1; \\ x_{i,j} + tq^{k-i}(q - 1)^2x_{k,k+1} & i < k < j - 1; \\ x_{i,j-1} + tq^{j-i}(q - 1)x_{j-1,j} & i < k = j - 1; \\ (1 - q)x_{i,j} + qx_{i,j+1} & k = j; \end{cases} \quad (14)$$

где  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, (n - 1)$ , суть образующие группы кос. Непосредственно проверяется, что указанные формулы действительно задают представление группы кос.

Обозначим пространство представления Лоуренс – Крамера – Бигелю группы кос  $Br(n)$  через  $L_n$ . Поскольку базис пространства  $L_n$  является частью базиса пространства  $L_{n+1}$ , мы имеем  $L_n \subset L_{n+1}$ . Из формул (14) следует, что  $L_n$  является инвариантным пространством относительно действия представления (14) группы  $Br(n+1)$  в пространстве  $L_{n+1}$ .

Из формул (14) следует, что представление группы  $Br(n+1)$ , применённое к косам из  $Br(n)$ , совпадает с прямой суммой представления группы  $Br(n)$ , задаваемого по формулам (14), и тривиальным представлением, действующим на дополнительные образующие, относящиеся к  $(n+1)$ -й нити. Таким образом, можно говорить о бесконечномерном линейном представлении стабильной группы кос.

Мы не будем доказывать точность этого представления, поскольку такое доказательство требует рассмотрения многих причудливых конструкций. Детали см. в оригинальной работе Крамера [7].

## 6.2. КОНСТРУКЦИЯ БИГЕЛОУ И ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Представление Буржуа кос из  $n$  нитей является  $(n-1)$ -мерным. Это связано с тем, что мы рассматриваем пространство  $D_n$ , его накрытие  $\tilde{D}_n$  и группу гомологий последнего, которая представляет собой  $(n-1)$ -мерный модуль.

Конструкция Бигелю приводит к  $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерному представлению группы кос из  $n$  нитей, упомянутому в предыдущем разделе. Идея построения этого представления такова. Вместо  $D_n$  мы рассматриваем *конфигурационное пространство неупорядоченных пар точек на  $D_n$* . Так как группа кос действует на  $D_n$ , то она действует и на множестве  $B_2(D_n)$  пар точек из  $D_n$ .

Это пространство — четырёхмерное, и нужно рассматривать его *двумерные гомологии*. Не давая точного определения двумерных гомологий в общем случае, скажем, что эти гомологии соответствуют *парам петель, обходящих вокруг различных проколотых точек*. Так как мы имеем  $n$  точек, число пар точек равно  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ , следовательно, пространство действия группы кос будет  $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерным. Разумеется, оно будет сводиться лишь к *действию группы перестановок*: каждая коса, переставляя точки, переставляет и пары точек.

Далее Бигелю переходит к накрытию данного пространства  $B_2(D_n)$  другим пространством  $\tilde{B}_n$ . Это накрытие связано уже с двумя инвариантами. Один из них получается из индекса петель, а второй связан с вращением двух точек из  $D_n$  друг вокруг друга.

В итоге возникает  $\frac{n(n-1)}{2}$ -мерное пространство группы кос из  $n$  нитей уже с двумя параметрами  $t$  и  $q$ .

Доказательство Бигелоу точности представления основано на тех же идеях, которые использовались при доказательстве точности представления Бурау для группы кос из трёх нитей. Именно, оно разделяется на три шага.

1. Основная лемма.
2. Ключевая лемма.
3. Вывод точности представления из этих двух лемм.

Вывод точности представления из двух лемм повторяет вывод точности представления Бурау для кос из 3 нитей. Вводится спаривание вилок и стеблей (на этот раз уже с двумя параметрами), после чего основная лемма (с аналогичной формулировкой) следует из тех же соображений, что и основная лемма для доказательства точности представления Бурау.

Наконец, ключевая лемма вытекает из геометрических соображений. Её доказательство технически довольно сложно. Как и в случае представления Бурау для трёх нитей доказываемся, что в случае нулевого индекса пересечения вилку и стебель можно «развести»: предполагая, что их развести нельзя и рассматривая минимальное количество точек пересечения, мы приходим к противоречию: оказывается, что для такого минимального геометрического пересечения индекс ненулевой. Только в случае представления Бурау это следует из арифметических свойств числа три, а в случае представления Лоуренс – Крамера – Бигелоу — из дополнительной «степени свободы», доставляемой второй переменной: многочлен двух переменных «реже» равен нулю, чем многочлен одной переменной.

Заинтересованного читателя мы отсылаем к оригинальным работам, книге [1] или замечательному обзору В. Г. Тураева [9].

Таким образом мы построили точное представление группы кос, коэффициентами матриц которого являются полиномы от двух переменных. Из классических теорем теории чисел следует, что существует пара вещественных чисел, при подстановке которых вместо переменных мы получим точное представление с *вещественными коэффициентами*. Следовательно, все группы кос  $Bv(n)$  линейны.

Выражаю благодарность М. Н. Вялому за полезные замечания, способствовавшие улучшению стиля изложения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.О. Мантуров. *Теория узлов*. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая Динамика, 2005. 512 с.
- [2] В.О. Мантуров. *Экскурс в теорию узлов* // Соросовский образовательный журнал. Т. 8, №1, 2004. С. 122–127.

- [3] E. Artin. *Theorie der Zöpfe* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Bd. 4, 1925. S. 27–72.  
(Англ.: E. Artin. *Theory of braids* // Annals of Mathematics. Vol. 48, no 2, 1947. P. 101–126.)
- [4] S. Bigelow. *Braid groups are linear* // J. Amer. Math. Soc. Vol. 14, 2001. P. 471–486.
- [5] J.S. Birman. *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1974.
- [6] W. Burau. *Über Zopfgruppen und gleichzeitig verdrillte Verkettungen* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. Bd. 11, 1936. S. 179–186.
- [7] D. Krammer. *Braid groups are linear* // Annals of Mathematics. Vol. 155, no 1, 2002. P. 131–156.
- [8] R. Lawrence. *Homological Representations of the Hecke Algebra* // Commun. Math. Phys. Vol. 135, (1990. P. 141–191.
- [9] V.G. Turaev. *Faithful linear representations of the braid group* // Séminaire Bourbaki. Vol. 42, 1999-2000, n. 878.

## Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта\*

А. Б. Скопенков

В этой статье рассказано, как при решении 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях непрерывных функций появилось понятие базисного подмножества и базисного вложения. Приводятся красивые результаты об этих понятиях, большая часть которых доступна старшекласснику. Три части статьи можно читать независимо друг от друга (в небольшом количестве мест, в которых одна часть использует другую, приведены точные ссылки).

В первой части приводится элементарное изложение идеи решения 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом (по мотивам [1]). При этом показывается, как естественно появилось понятие базисного вложения, и остаётся без доказательства важнейшее место (лемма Колмогорова о деревьях).

Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  называется *базисным*, если для любой непрерывной функции  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  существуют такие непрерывные функции  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для каждой точки  $(x, y) \in K$ .

Во второй части приводится характеристика графов, которые можно вложить в плоскость в качестве базисных подмножеств [17, 18] (решение проблемы Штернфельда), а также её обобщения [7, 8, 13, 17, 18].

Третья часть наиболее элементарна (см., например, задачи 1b и 4a). Приводится характеристика базисных подмножеств плоскости (решение проблемы Арнольда) [2, 14, 15, 18], а также её обобщения [4, 5, 16, 18].

В тексте много задач, к большинству которых приводятся решения (в конце соответствующего пункта). Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать. Трудные задачи отмечены звёздочкой, а нерешённые — двумя.

---

\*Обновляемая версия: <http://arxiv.org/abs/1001.4011>. Отдельные части работы представлялись на летних конференциях Турнира Городов 1997 и 2006 годов (В. А. Горинным, В. А. Курлиным, И. Н. Шнурниковым и автором), на семинарах мехмата МГУ и на семинаре по геометрии в МЦНМО. Некоторые задачи о гладкой базисности представлялись А. А. Бараном на международной конференции школьников Intel ISEF в 2003 году. Ссылки даются по возможности не на оригинальные работы, а на обзоры.

Если некоторое замечание в сноске или условие задачи вам непонятно, то его нужно просто игнорировать. Это не приведёт к непониманию дальнейшего материала.

Благодарю В. И. Арнольда, Ю. М. Бурмана, С. М. Воронина, М. Н. Вялого, А. Р. Сафина и И. Н. Шнурникова за полезные обсуждения, а также М. Н. Вялого за подготовку рисунков.

## 1. О РЕШЕНИИ 13-Й ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

### 13-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Пусть дано некоторое множество функций  $F = \{f_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha})\}_{\alpha \in A}$  (не обязательно конечное). Определим *суперпозицию* функций из  $F$  (или *формулу* над  $F$ ) индуктивно:

(1) сами функции  $f_\alpha$  и все переменные  $x_j$  являются суперпозициями функций из  $F$ .

(2) если функции  $f(x_1, \dots, x_n), g_1(\dots), \dots, g_n(\dots)$  являются суперпозициями функций из  $F$  (не обязательно различными), то и функция  $f(g_1(\dots), \dots, g_n(\dots))$  является суперпозицией функций из  $F$ .

Здесь в качестве аргументов функций  $g_i$  можно подставлять любые наборы переменных (эти переменные могут идти в любом порядке, а некоторые из переменных могут совпадать).<sup>1)</sup>

Например, полином  $\sum a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$  есть суперпозиция функций  $f(x, y) = x + y$ ,  $g(x, y) = xy$  и констант. Причём если можно использовать функции одной переменной, то для  $x, y > 0$  произведение можно и не использовать, так как  $xy = 2^{\log_2 x + \log_2 y}$ .

Рассмотрим следующие вопросы.

1. *Можно ли каждую функцию нескольких аргументов записать в виде суперпозиции функций не более чем двух аргументов?*

2. *Можно ли каждую функцию двух аргументов записать как суперпозицию функций одного аргумента и простейшей функции двух аргументов (например, сложения)?*<sup>2)</sup>

Поскольку плоскость и прямая равномогны, то любую функцию трёх и более переменных можно выразить в виде суперпозиции (вообще говоря, *разрывных*) функций двух переменных (см. детали в [1]). Поэтому указанные вопросы интересны только для *непрерывных* функций.

<sup>1)</sup>Определение суперпозиции можно также сформулировать графически, на языке схем.

<sup>2)</sup>Для функций алгебры логики ответы на оба вопроса положительны (поскольку любую функцию алгебры логики можно выразить через «и» и «не»). Аппроксимационная теорема Вейерштрасса показывает, что функция нескольких аргументов может быть *равномерно приближена* на компактном множестве полиномами, т. е. суперпозициями констант, сложения и умножения.



Через

$$|x, y| = |(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

обозначается обычное расстояние между точками  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $K$  — подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$ . Функция  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  называется *непрерывной*, если для любых точки  $x_0 \in K$  и числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любой точки  $x \in K$  с условием  $|x, x_0| < \delta$  выполнено  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Например, функция  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  является непрерывной на плоскости, а функция  $f(x_1, x_2)$ , равная целой части от  $x_1 + x_2$ , — нет. В дальнейшем все функции предполагаются непрерывными, если явно не оговорено противное.

Ясно, что любая элементарная функция представляется в виде суперпозиции функций двух переменных. Простейшие неэлементарные функции — корни алгебраических уравнений. К 1900 году было известно, что любое алгебраическое уравнение  $n$ -й степени сводится (при помощи радикалов, сложения, вычитания, умножения и деления) к такому, у которого коэффициенты при  $x^n$  и  $x^0$  равны 1, а при  $x^{n-1}$ ,  $x^{n-2}$  и  $x^{n-3}$  равны 0. Таким образом, остаётся  $n - 4$  переменных коэффициента. Поэтому «простейшей» функцией, для которой не было известно выражение через функции двух переменных, была функция  $x(a, b, c)$ , выражающая решение уравнения  $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$  седьмой степени. Поэтому Гильберт сформулировал свою 13-ю проблему так:

*Доказать, что уравнение седьмой степени  $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$  неразрешимо без использования функций трёх переменных.*

Гильберту удалось показать, что некоторые *аналитические* функции трёх переменных не являются суперпозициями аналитических же функций двух переменных [1]. В 1954 г. Витушкин доказал, что некоторые  $r$  раз непрерывно дифференцируемые функции не являются суперпозициями  $r$  раз непрерывно дифференцируемых функций двух переменных [1, 3]. Для *непрерывных* же функций гипотеза Гильберта была опровергнута в 1957 году Колмогоровым и Арнольдом.

**ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА – АРНОЛЬДА.** *Любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одного и двух аргументов.*

#### ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА: К СУПЕРПОЗИЦИЯМ ФУНКЦИЙ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сначала в 1956 г. Колмогорову удалось доказать, что *произвольная непрерывная функция более чем трёх переменных является суперпозицией непрерывных функций трёх переменных*. Он использовал следующее

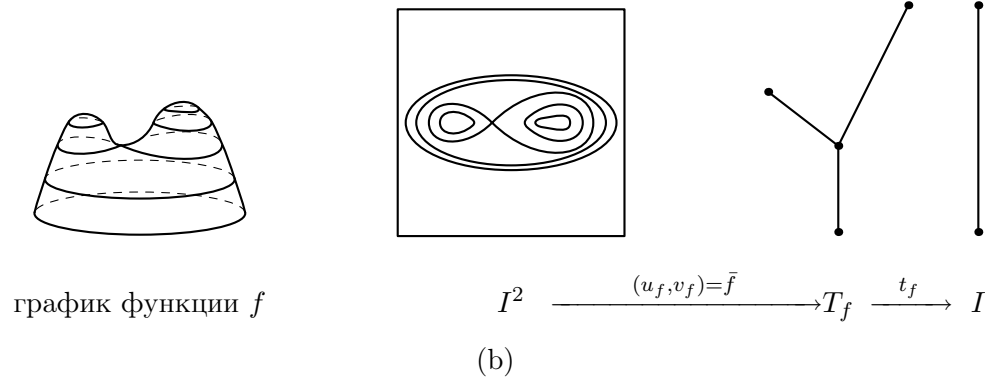
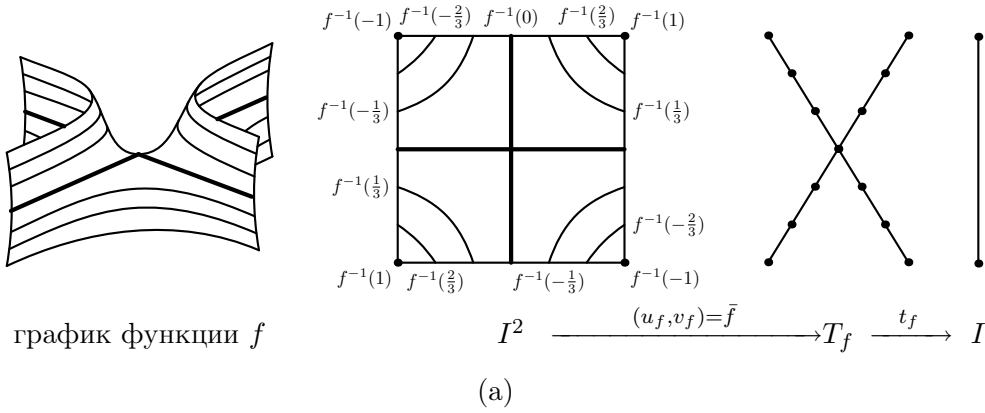


Рис. 1. Примеры деревьев компонент множеств уровня и разложений Кропперда

понятие. (Если это понятие или последующий текст до леммы Колмогорова об универсальных функциях покажутся вам сложными, вы можете сразу перейти к этой лемме. Другой вариант — прочитать этот текст для  $n = 2$ , а в этой лемме снова вернуться к произвольному  $n$ .)

Обозначим  $I = [-1; 1]$ . Деревом  $T_f$  компонент множеств уровня функции  $f: I^n \rightarrow I$  называется метрическое пространство, точками которого являются компоненты связности множеств  $f^{-1}(c)$ ,  $c \in I$ , а метрика определена в [http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff\\_distance](http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_distance).

Например, дерево компонент множеств уровня функции  $f: I^2 \rightarrow I$ ,  $f(x, y) = xy$ , гомеоморфно букве X. Другие примеры приведены на рис. 1 (см. детали в [1]).

Очевидно, что любая функция  $f: I^n \rightarrow I$  от  $n$  переменных представляется в виде композиции  $I^n \xrightarrow{t_f} T_f \xrightarrow{\bar{f}} I$  для некоторых отображений  $\bar{f}$

и  $t_f$ . Пространство  $T_f$  можно считать лежащим без самопересечений в квадрате  $I^2$ .<sup>3)</sup> Поэтому  $t_f$  можно считать парой функций  $u_f, v_f: I^n \rightarrow I$ . Функцию  $\bar{f}$  можно продолжить на весь квадрат  $I^2$  (по теореме Урысона о продолжении), т. е. считать функцией двух переменных. Итак, имеем (рис. 1) разложение Кронрода

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(u_f(x_1, \dots, x_n), v_f(x_1, \dots, x_n)).$$

**ЛЕММА КОЛМОГОРОВА ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЯХ.** *Для любого  $n \geq 2$  существуют такие деревья  $T_1, \dots, T_{n+1}$  и функции  $t_i: I^n \rightarrow T_i$ , что для любой непрерывной функции  $f: I^n \rightarrow I$  от  $n$  переменных существуют непрерывные функции  $g_1, \dots, g_{n+1}: I^n \rightarrow I$  от  $n$  переменных, для которых*

$$T_{g_i} = T_i, \quad t_{g_i} = t_i \quad \text{и} \quad f = g_1 + \dots + g_{n+1}.$$

Важно, что деревья  $T_{g_i}$  компонент множеств уровня функций  $g_i$  (и соответствующие отображения  $t_{g_i}$ ) не зависят от  $f$ , хотя сами функции  $g_i$  могут зависеть от  $f$ .

По-видимому, лемма верна и для  $n = 1$  (но это нетривиально).

Доказательства мы не приводим. Хотя оно является важным шагом в доказательстве теоремы Колмогорова – Арнольда, но наша цель — осветить именно те шаги, в которых появилось понятие базисного вложения. Кроме того, проблему Гильберта можно решить намного проще: см. ниже суперпозиционную теорему Колмогорова и её доказательство в [1].

Из леммы Колмогорова об универсальных деревьях и разложения Кронрода вытекает следующий результат (докажите!).

**ЛЕММА КОЛМОГОРОВА ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ.** *Для любого  $n \geq 3$  существует такой набор из  $2n + 2$  непрерывных функций  $u_i, v_i: I^n \rightarrow I$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ) от  $n$  переменных, что для любой непрерывной функции  $f: I^n \rightarrow I$  от  $n$  переменных существуют непрерывные функции  $f_i: I^2 \rightarrow I$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ) двух переменных, для которых*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(u_i(x_1, \dots, x_n), v_i(x_1, \dots, x_n)).$$

Важно, что функции  $u_i, v_i$  не зависят от  $f$  (при фиксированном  $n$ ), хотя функции  $f_i$  могут зависеть от  $f$ .

Эта лемма тривиальна для  $n = 1$  и  $n = 2$  (подумайте, почему).

<sup>3)</sup>Для доказательства нужно показать, что  $T_f$  является деревом, т. е. одномерным стягиваемым локально связным компактом. Примеры деревьев находятся на рис 3, 4, 5 ниже. Любое дерево планарно [6].

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ КОЛМОГОРОВА О ВЫРАЗИМОСТИ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ ТРЁХ ПЕРЕМЕННЫХ. Для функции  $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$  четырёх переменных имеем

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{x_4}(x_1, x_2, x_3) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^4 f_{x_4,i}(u_i(x_1, x_2, x_3), v_i(x_1, x_2, x_3)) = \\ = \sum_{i=1}^4 F_i(u_i(x_1, x_2, x_3), v_i(x_1, x_2, x_3), x_4), \quad \text{где } F_i(a, b, c) = f_{c,i}(a, b).$$

Функция  $f_{x_4}$  непрерывно зависит от параметра  $x_4$ . Равенство (\*) получается применением леммы Колмогорова об универсальных функциях. Мы используем усиленный вариант этой леммы, утверждающий, что каждая из  $n + 1$  функций  $f_i$  непрерывно зависит от исходной функции  $f$ . Из этого варианта вытекает непрерывная зависимость функций  $f_{x_4,i}$  от параметра  $x_4$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). А это влечёт непрерывность функций  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Для функции большего количества переменных рассуждение аналогично.  $\square$

**ЗАДАЧА 1.** За одну копейку автомат выдаёт значение заданной вами непрерывной функции трёх переменных на заданной вами тройке чисел. За какую сумму вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию  $n$  переменных (при условии наличия у вас неограниченной памяти)?

#### ТЕОРЕМА АРНОЛЬДА: К СУПЕРПОЗИЦИЯМ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для доказательства теоремы Колмогорова – Арнольда осталось произвольную непрерывную функцию трёх переменных выразить через суперпозицию непрерывных функций двух переменных. Для этого полезно следующее понятие.

Подмножество  $T \subset I^3$  назовём *базисным*, если любая непрерывная функция на  $T$  может быть разложена в сумму трёх функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Или, формально, если для любой непрерывной функции  $f: T \rightarrow I$  существуют такие непрерывные функции  $f_1, f_2, f_3: I \rightarrow I$ , что

$$f(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) \quad \text{для } (x, y, z) \in T.$$

**ЛЕММА АРНОЛЬДА О ДЕРЕВЬЯХ.** Любое дерево реализуется как базисное подмножество в  $I^3$  (т. е. топологически эквивалентно некоторому базисному подмножеству в  $I^3$ ).<sup>4)</sup>

<sup>4)</sup>Доказательство леммы Арнольда использует теорему Менгера о существовании

Идея доказательства видна на примере доказательства либо базисной вложимости в плоскость конечного дерева, из каждой вершины которого выходит либо одно, либо три ребра [1], либо более сильного утверждения (с) в предпоследнем пункте второй части.

**ЛЕММА АРНОЛЬДА ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ.** *Существует такой набор из девяти непрерывных функций  $u_i: I^2 \rightarrow I$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) двух переменных, что для любой непрерывной функции  $f: I^2 \rightarrow I$  двух переменных существуют непрерывные функции  $f_i: I \rightarrow I$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) одной переменной, для которых  $f(x, y) = f_1(u_1(x, y)) + \dots + f_9(u_9(x, y))$ .*

Важно, что функции  $u_i$  не зависят от  $f$ , хотя функции  $f_i$  могут зависеть от  $f$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмём деревья  $T_1, T_2, T_3$  из леммы Колмогорова об универсальных деревьях для  $n = 2$ . По лемме Арнольда о деревьях существуют базисные вложения  $(u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}): T_i \rightarrow I^3$ . Положим  $u_{3(i-1)+j} := u_{ij}$ . Возьмём функции  $g_1, g_2, g_3: I^2 \rightarrow I$  (зависящие от  $f$ ) из леммы Колмогорова об универсальных деревьях для  $n = 2$ . Применяя аналог разложения Кронрода и определение базисности, получаем

$$g_i(x, y) = \bar{g}_i(u_{i1}(x, y), u_{i2}(x, y), u_{i3}(x, y)) = \\ = g_{i1}(u_{i1}(x, y)) + g_{i2}(u_{i2}(x, y)) + g_{i3}(u_{i3}(x, y)).$$

Остаётся положить  $f_{3(i-1)+j} := g_{ij}$ .  $\square$

Теперь теорема Колмогорова – Арнольда вытекает из

$$f(x, y, z) = f_z(x, y) = \sum_{i=1}^9 f_{i,z}(u_i(x, y)) = \sum_{i=1}^9 F_i(u_i(x, y), z),$$

где  $F_i(t, z) := f_{i,z}(t)$ . Непрерывность функций  $F_i$  доказывается аналогично предыдущему пункту (с использованием соответствующего усиления леммы Арнольда об универсальных функциях).

**ЗАДАЧА 2.** За одну копейку автомат выдаёт значение заданной вами непрерывной функции двух переменных на заданной Вами паре чисел. За какую сумму вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию  $n$  переменных (при наличии неограниченной памяти)?

---

универсального дерева. На самом деле, Арнольд доказал эту лемму для деревьев с точками ветвления третьего порядка. Этого было достаточно для решения проблемы Гильберта. Общий случай леммы доказан Острандом в 1965 г. [18].

ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА: К ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И  
СЛОЖЕНИЮ

В том же 1957 году Колмогоров доказал ещё более сильный результат, из которого также вытекает решение проблемы Гильберта.

**СУПЕРПОЗИЦИОННАЯ ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА.** *Любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции сложения и непрерывных функций одной переменной.*

Более точно, для каждого  $n > 1$  существует набор  $n(2n + 1)$  таких непрерывных функций  $u_{ij}: I \rightarrow I$  ( $i = 1, \dots, 2n + 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) одной переменной, что для любой непрерывной функции  $f: I^n \rightarrow I$  от  $n$  переменных существуют непрерывные функции  $f_1, \dots, f_{2n+1}: I \rightarrow I$  одной переменной, для которых

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} f_i \left( \sum_{j=1}^n u_{ij}(x_j) \right).$$

Здесь важно, что функции  $u_{ij}$  не зависят от  $f$ , хотя функции  $f_i$  могут зависеть от  $f$ . Элементарное изложение доказательства приведённой теоремы можно найти в [1].

**ЗАДАЧА 3.** За одну копейку автомат либо складывает два заданных вами числа, либо выдаёт значение заданной вами непрерывной функции одной переменной в заданной вами точке. За какую сумму вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию  $n$  переменных (при наличии неограниченной памяти)?

Об аналитических проблемах, связанных с этим выдающимся результатом Колмогорова, см. [3, 18]. О топологических проблемах написано далее.

БАЗИСНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА<sup>5)</sup>

Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^n$  называется *базисным*, если для любой непрерывной функции  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  существуют такие непрерывные функции  $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \quad \text{для } (x_1, \dots, x_n) \in K.$$

Пространство  $K$  называется *базисно вложимым* в  $\mathbb{R}^n$ , если существует вложение  $K \rightarrow \mathbb{R}^n$ , образ которого базисный.

<sup>5)</sup>Этот пункт неэлементарен, формально не используется в дальнейшем и может быть опущен читателем. Однако мы приводим его, поскольку он даёт чёткую картину для разных размерностей.

Функции на произвольном  $n$ -мерном компакте уже нельзя представлять себе как функции  $n$  переменных. Однако понятие базисной вложимости доставляет аналог разложимости функций на компактах в суперпозицию фиксированных функций и сложения.

Из суперпозиционной теоремы Колмогорова следует, что  $n$ -мерный куб базисно вложим в  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Действительно, функции  $u_i = \sum_{j=1}^n u_{ij}$  ( $i = 1, \dots, 2n + 1$ ) из теоремы Колмогорова определяют базисное вложение  $I^n \rightarrow I^{2n+1}$ . Остранд заметил в 1965 г., что этот факт можно обобщить.

**ТЕОРЕМА ОСТРАНДА.** *Любой  $n$ -мерный компакт базисно вложим в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  [18].*

Эта теорема усиливает теорему Неблинга – Менгера – Понтрягина о вложимости любого  $n$ -мерного компакта в  $\mathbb{R}^{2n+1}$  [6].

На самом деле Остранд доказал следующий более сильный результат, обобщающий суперпозиционную теорему Колмогорова (а не только её следствие).

*Пусть  $X_1, \dots, X_m$  – конечномерные метрические пространства. Положим  $n = \dim X_1 + \dots + \dim X_m$  и  $X = X_1 \times \dots \times X_m$ . Тогда существуют такие непрерывные функции  $u_{ij}: X_j \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $i = 1, \dots, 2n + 1$ ,  $j = 1, \dots, m$ ), что для функций  $u_i(x_1, \dots, x_m) = u_{i1}(x_1) + \dots + u_{im}(x_m)$  и любой непрерывной функции  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  существуют непрерывные функции  $f_1, \dots, f_{2n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых*

$$f(x_1, \dots, x_m) = f_1(u_1(x_1, \dots, x_m)) + \dots + f_{2n+1}(u_{2n+1}(x_1, \dots, x_m)).$$

Имеются  $n$ -мерные полиэдры, не вложимые в  $\mathbb{R}^{2n}$  [9], [12].

**ТЕОРЕМА ШТЕРНФЕЛЬДА.** *Для любого  $n \geq 2$  любой  $n$ -мерный компакт (например,  $n$ -мерный куб) не вложим базисно в  $\mathbb{R}^{2n}$  [18].*

Интересно, что теорема Штернфельда редуцируется к комбинаторно-геометрическому утверждению при помощи многомерного аналога критерия базисности, приведённого в третьей части настоящей статьи.

Очевидно, что  $K$  базисно вложим в  $\mathbb{R}$  тогда и только тогда, когда  $K$  топологически вложим в  $\mathbb{R}$ . Из теорем Остранда и Штернфельда следует, что для  $m > 2$  компакт  $K$  базисно вложим в  $\mathbb{R}^m$  тогда и только тогда, когда  $\dim K < m/2$ . Таким образом, в 1989 г. оставалось неизвестным лишь описание компактов, базисно вложимых в плоскость.

## 2. БАЗИСНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТЬ

### БАЗИСНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ В ПЛОСКОСТЬ

Граф (или компакт)  $K$  называется *базисно вложимым* в плоскость, если существует такое вложение  $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ , что для любой непрерывной функции  $f: \varphi(K) \rightarrow \mathbb{R}$  существуют такие непрерывные функции  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для любой точки  $(x, y) \in \varphi(K)$ . (Определение непрерывной функции напомнено в начале части 1.)

Проблема описания графов (и компактов), базисно вложимых в плоскость, поставлена Штернфельдом [18]. Критерий базисной вложимости линейно-связных компактов в плоскость получен в [17]. Для конечных графов он формулируется особенно просто.

КРИТЕРИЙ БАЗИСНОЙ ВЛОЖИМОСТИ ГРАФОВ ([17], ср. [11]). *Конечный граф  $K$  базисно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:*

(S)  $K$  не содержит подграфов, гомеоморфных окружности  $S^1$ , пентодеду  $T_5 = C_1$  или кресту с разветвлёнными концами  $C = C_2$  (рис. 2);

(U)  $K$  содержится в одном из графов  $R_n$  (рис. 3).

*Определение графов  $F_n$  и  $R_n$*  (рис. 3). Пусть  $F_1$  — триод, и для любого  $n$  граф  $F_{n+1}$  получен из  $F_n$  разветвлением каждого висячего ребра графа  $F_n$ . Граф  $R_n$  получается из графа  $F_n$  добавлением висячего ребра к каждой точке ветвления графа  $F_n$ .

Доказательство приводится в следующем пункте.

Приведём без доказательства решение проблемы Штернфельда для более общего случая (его можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего). Неспециалисту покажется удивительным, что общий случай намного сложнее случая графов, а специалисту покажется удивительным, что в общем случае вообще хоть что-то удаётся доказать.

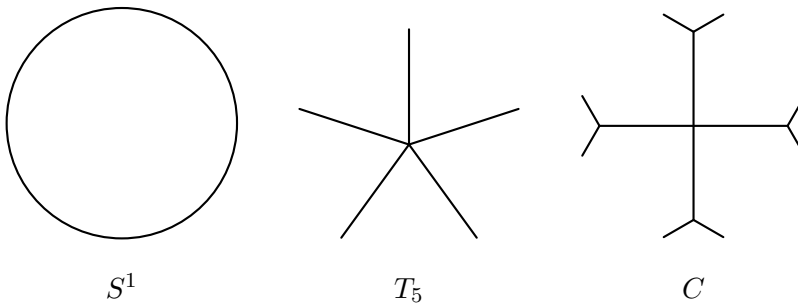


Рис. 2.



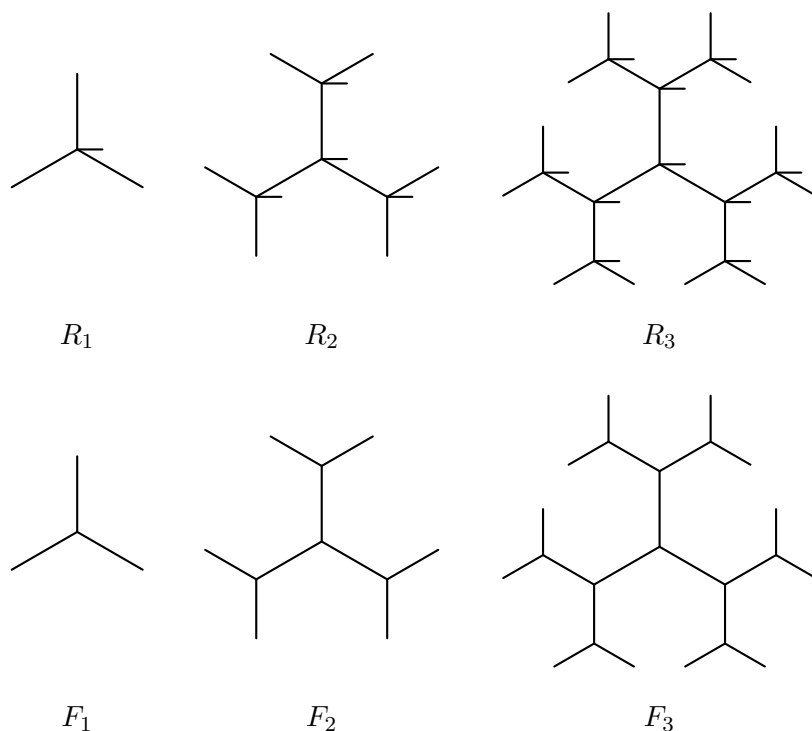


Рис. 3.

КРИТЕРИЙ БАЗИСНОЙ ВЛОЖИМОСТИ ЛИНЕЙНО-СВЯЗНЫХ КОМПАКТОВ ([17], СР. [11]) *Линейно-связный компакт  $K$  базисно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда он является локально связным (т. е. пeanовским) и выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:*

(1)  *$K$  не содержит подкомпактов  $S^1, C_2, C_4, B$  и, для некоторого  $n$ , подкомпактов  $F_n$  и  $H_n$  (рис. 2, 3, 4);*

(2)  *$K$  не содержит подконтинуумов  $S^1, C_1, C_2, C_3, B, F, H_+, H_-, h_+, h_-$  (рис. 2, 4, 5).*

Введём использованные обозначения (рис. 4, 5). *Нуль-последовательностью* множеств называется последовательность множеств, диаметры которых стремятся к нулю.

Обозначим через  $C_3$  крест с нуль-последовательностью дуг, сходящихся к его «центру» и приклеенных к одной из его «ветвей».

Обозначим через  $C_4$  крест с последовательностью точек, сходящихся к его «центру».

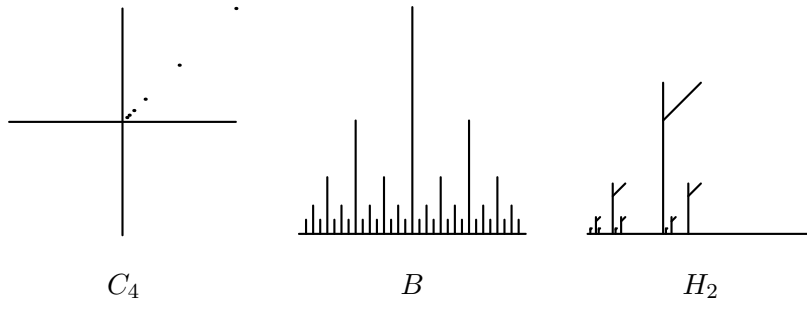


Рис. 4.

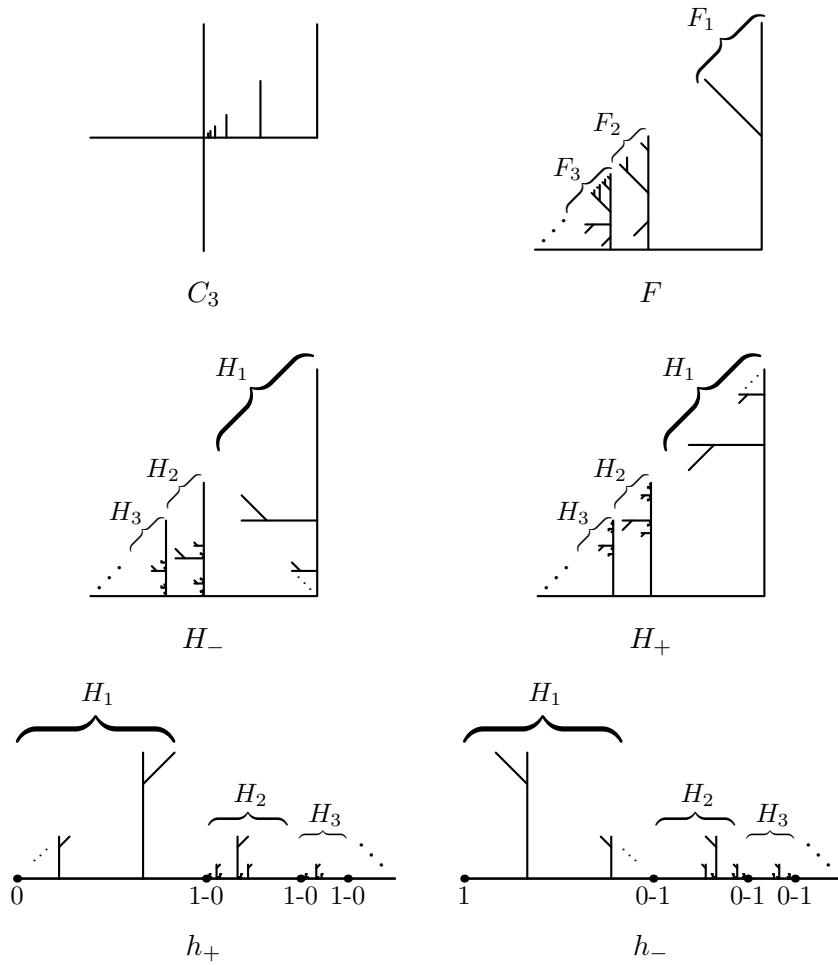


Рис. 5.

Каждый из континуумов  $B$ ,  $H_n$ ,  $F$ ,  $H_+$ ,  $H_-$  является объединением отрезка  $I = [0; 1]$  и нуль-последовательности

- дуг, приклеенных за один конец к  $(0, 1)$  в двоично-рациональных точках (для  $B$ ; очевидно, что топологический тип пространства  $B$  не зависит от вариаций в этом построении);
- триодов, приклеенных к  $I$  за один конец в точках множества  $\{3^{-l_1} + \dots + 3^{-l_s} : s \leq n, 0 < l_1 < \dots < l_s \text{ — целые}\}$  (для  $H_n$ );
- графов  $F_n$ , приклеенных к точкам  $1/n$  за одну из висячих вершин (для  $F$ );
- континуумов  $H_n$ , соединённых с точками  $1/n$  дугами, пересекающими  $H_n$  в  $1 \in I \subset H_n$  (для  $H_+$ ) или в  $0 \in I \subset H_n$  (для  $H_-$ ).

Континуум  $h_+$  (соответственно  $h_-$ ) получен из нуль-последовательности континуумов  $H_n$  склеиванием точек  $1 \in I \subset H_n$  и  $0 \in I \subset H_{n-1}$  (соответственно точек  $0 \in I \subset H_n$  и  $1 \in I \subset H_{n-1}$ ).

Гипотеза о базисной вложимости (не обязательно линейно-связных) континуумов в плоскость ещё более громоздка. Она сформулирована в [10, 17].

#### НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КРИТЕРИЯ БАЗИСНОЙ ВЛОЖИМОСТИ ГРАФОВ

Достаточно доказать следующие три утверждения.

- (а) Окружность  $S^1$ , пентод  $T_5$  и крест с разветвлёнными концами  $C$  (рис. 2) не вложимы базисно в  $\mathbb{R}^2$ .
- (б) Если конечный граф  $K$  не содержит ни одного из графов  $S^1$ ,  $T_5$  и  $C$  (рис. 2), то  $K$  содержится в  $R_n$  (рис. 3) для некоторого  $n$ .
- (с) Каждый граф  $R_n$  (рис. 3) базисно вложим в  $\mathbb{R}^2$ .

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ (в). Докажем, что *дерево*  $K$  с  $n$  невисячими вершинами, не содержащее графов  $T_5$  и  $C$ , содержится в  $R_n$ . Возьмём произвольную вершину  $a \in K$ . Поскольку  $K$  не содержит  $T_5$  и  $C$ , то  $\deg a \leq 4$ , причём если  $\deg a = 4$ , то  $a$  имеет висячее ребро. Значит, окрестность точки  $a$  из  $K$  можно вложить в  $R_n$  так, что  $a$  попадёт в центр  $R_n$ , а эта окрестность перейдёт в окрестность  $T_4$  центра  $R_n$ . С каждой вершиной, соседней с  $a$ , поступаем аналогично. Поскольку «глубина» графа  $R_n$  (т. е. количество невисячих вершин на самой длинной ветви от центра) равна  $n$ , а невисячих вершин в  $K$  ровно  $n$ , то, продолжая этот процесс дальше, мы сможем вложить в  $R_n$  весь граф  $K$ .  $\square$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ (с). Обозначим через  $R_0$  отрезок. Базисные вложения  $R_n \rightarrow \mathbb{R}^2$  строятся по индукции для  $n \geq 0$ . Вложим  $R_0$  в  $[-7; 5]^2$  как диагональ, соединяющую точки  $(-7, -7)$  и  $(5, 5)$ .

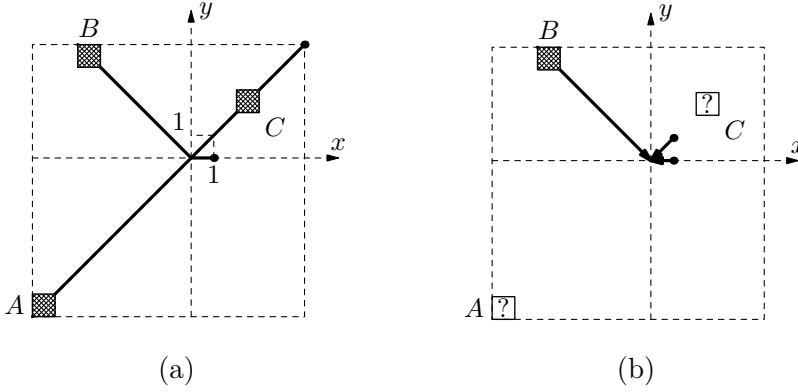


Рис. 6.

Вложение  $R_n \rightarrow \mathbb{R}^2$  получается из вложения на рис. 6а добавлением трёх вложений графа  $R_{n-1}$  в квадратики  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Проекции  $A_x, B_x, C_x$  квадратиков на ось  $Ox$  не пересекаются друг с другом и с проекцией отрезка в  $R_n$ , параллельного горизонтальной оси. Аналогичное утверждение справедливо и для проекций  $A_y, B_y, C_y$  квадратиков на ось  $Oy$ .

Докажем, что построенные вложения базисные, при помощи индукции по  $n$ . База индукции  $n = 0$  очевидна. Докажем шаг индукции.

Пусть  $n \geq 1$  и  $f: R_n \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Для  $t \in [0; 1]$  положим

$$\begin{aligned} g(t) &:= f(t, 0), \\ h(t) &:= f(t, t) - g(t) = f(t, t) - f(t, 0), \\ g(-t) &:= f(-t, t) - h(t) = f(-t, t) - f(t, t) + f(t, 0). \end{aligned}$$

По предположению индукции существуют такие функции

$$g: A_x \cup B_x \cup C_x \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } h: A_y \cup B_y \cup C_y \rightarrow \mathbb{R}, \text{ что } f(x, y) = g(x) + h(y) \text{ для } (x, y) \in (A \cup B \cup C) \cap R_n.$$

Положим

$$\begin{aligned} g(-t) &:= f(-t, t) - h(t) \quad \text{для } t \in C_y \text{ и} \\ h(t) &:= f(t, t) - g(t) \quad \text{для } t \in (-C_y) \cup B_x. \end{aligned}$$

Продолжим построенную функцию  $g: A_x \cup B_x \cup (-C_y) \cup [-1; 1] \cup C_x \rightarrow \mathbb{R}$  до непрерывной функции  $g: [-7; 1] \cup C_x \rightarrow \mathbb{R}$  (например, линейно). Положим

$$\begin{aligned} h(t) &:= f(-|t|, t) - g(t) \quad \text{для } t \in [-6; 4] \text{ и} \\ g(t) &:= f(t, t) - h(t) \quad \text{для } t \in [1; 2] \cup [3; 5] \end{aligned}$$

(это определение совпадает с прежним для  $t \in [-1; 1]$ ). После этого

продолжим  $g$  и  $h$  до непрерывных функций  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ясно, что полученные функции  $g$  и  $h$  — искомые.  $\square$

При доказательстве утверждения (а) мы используем критерий базисности из части 3 (а также приведённое перед ним определение молнии и приведённое после него определение операции  $E$ ).

Доказательство базисной невложимости окружности [18]. Пусть задано вложение окружности  $S \subset \mathbb{R}^2$ . На первом шаге применения  $E$  в  $S$  закрашивается в белый цвет не более четырёх точек (это точки, в которых существуют опорные прямые, параллельные координатным осям и пересекающие  $K$  ровно в одной точке). Если после  $n$ -го шага применения  $E$  закрашено белым цветом  $k$  точек, то на следующем шаге закрашивается не более  $2k$  точек. В самом деле, если закрашивается точка  $a \in E^n(S)$ , то хотя бы на одной из двух прямых, проходящих через  $a$  и параллельных координатным осям, есть закрашенная ранее точка. В противном случае каждая из этих прямых высекает в  $E^n(S)$  не менее двух точек, т. е.  $a$  не может быть закрашена на  $(n+1)$ -м шаге. Итак, после конечного числа шагов будет закрашено конечное число точек, т. е.  $E^n(S) \neq \emptyset$  для любого  $n$ .  $\square$

Доказательство базисной невложимости пентода. Предположим, что пентод  $T_5$  базисно вложен в плоскость. Пусть  $d$  — вершина пентода. Так как  $E^n(T_5) = \emptyset$  для некоторого  $n$ , то существует максимальное  $k$  такое, что  $E^k(T_5)$  содержит проколотую окрестность  $U$  вершины  $d$  в  $T_5$ . Тогда на  $(k+1)$ -м шаге в *одном* из рёбер  $A \subset T_5$  закрашивается в белый цвет некоторая последовательность точек  $a_n$ , сходящаяся к  $d$ . Значит (при необходимости переходя к подпоследовательности в  $a_n$  и меняя направление оси  $x$ ), мы можем считать, что одна из прямых  $x = x(a_i)$  или  $y = y(a_i)$  не содержит других точек из  $E^k(T_5)$ , кроме  $a_i$ . Поскольку окрестность  $(U - A) \cup d \cong T_4$  связна, она лежит по одну сторону от всех этих прямых, т. е. в полуплоскости  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . При этом  $E^n(T_4) = \emptyset$ , т. е.

*некоторый крест  $T_4 \subset T_5$  базисно вложен в  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  так, что  $d = (0, 0)$ .*

Теперь аналогично доказывается, что

*некоторый триод  $T_3 \subset T_4$  базисно вложен в  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  или в  $0 \times \mathbb{R}$  так, что  $d = (0, 0)$ .*

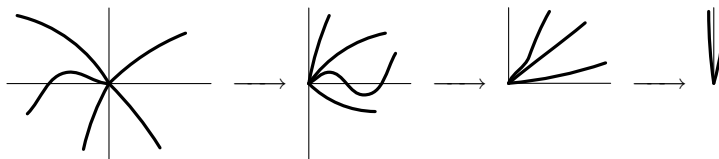


Рис. 7. Доказательство базисной невложимости пентода

Второй случай невозможен. Теперь аналогично доказывается, что некоторый диод  $T_2 \subset T_3$  базисно вложен в луч  $\mathbb{R}_+ \times 0$  так, что  $d = (0, 0)$ .

Получили противоречие.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БАЗИСНОЙ НЕВЛОЖИМОСТИ КРЕСТА С РАЗВЕТВЛЁННЫМИ КОНЦАМИ. Предположим, что  $C$  базисно вложен в плоскость. Аналогично доказательству базисной невложимости пентода получаем, что если крест  $T_4$  базисно вложен в плоскость  $\mathbb{R}^2$ , то одна из его ветвей содержит прямолинейный отрезок с концом в вершине креста, параллельный одной из координатных осей.

Теперь базисная невложимость графа  $C$  вытекает из следующей леммы.  $\square$

ЛЕММА О СХЛОПЫВАНИИ. Пусть  $K$  — конечный граф,  $K \subset_b \mathbb{R}^2$ . Определим отображение  $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой

$$q(x, y) = \begin{cases} (x, y), & x < a, \\ (a, y), & a \leq x \leq b, \\ (x - (b - a), y), & x > b. \end{cases}$$

Тогда

- (а)  $q|_{K-[a;b] \times c}$  инъективно;
- (б)  $q(K)$  базисно вложено в плоскость  $\mathbb{R}^2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть, напротив, две точки из  $K-[a;b] \times c$  склеиваются при схлопывании  $q$ . Тогда они лежат в полосе  $[a;b] \times \mathbb{R}$  и имеют одинаковую ординату  $d$ . Тогда эти точки  $(x_1, d)$ ,  $(x_2, d)$  вместе с  $(x_1, c)$ ,  $(x_2, c)$  являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Это множество не базисно в  $\mathbb{R}^2$ . Противоречие.

(б) Достаточно доказать, что если  $q(K)$  содержит молнию  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  длины  $n$ , то и  $K$  содержит молнию длины  $n$ . Если  $q^{-1}(A)$  — молния в  $K$ , то нужное утверждение доказано. Иначе найдутся точки  $a_i, a_{i+1}$  — вершины вертикального звена — такие, что  $p_x(a_i) = p_x(a_{i+1})$ . Тогда добавим к  $q^{-1}(A)$  точки  $(x(q^{-1}(a_i)), c)$  и  $(x(q^{-1}(a_{i+1})), c)$  (здесь полагаем  $q^{-1}(a, c) = (a, c)$ ). Прделав такую операцию несколько раз, получим молнию в  $K$  длины больше  $n$ .  $\square$

#### БАЗИСНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФОВ

Декартовым произведением  $X \times Y$  двух множеств  $X$  и  $Y$  называется множество всех пар  $(a, b)$  таких, что  $a \in X$  и  $b \in Y$ . Определение базисного вложения может быть очевидно обобщено на вложения в произвольное декартово произведение  $X \times Y$ . Если  $X$  и  $Y$  — графы, то мы можем представлять себе произведение  $X \times Y$  как двумерный объект (в некоторых

случаях можно считать, что этот объект расположен в трёхмерном пространстве). Обозначим через  $T_n$  звезду с  $n$  лучами. Например, для триода  $T_3$  пространство  $T_3 \times I$  является «книжкой с тремя страницами»,  $S^1 \times I$  — цилиндром и  $S^1 \times S^1$  — тором. Произведение  $T_n \times I$  назовём *книжкой с  $n$  страницами*.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для любых конечных графов  $X$  и  $Y$  найдётся конечный граф, который нельзя базисно вложить в произведение  $X \times Y$ .

Действительно, обозначим через  $k$  максимальную степень вершин графов  $X$  и  $Y$ . Докажем, что звезда  $T_{4k^2+1}$  не вложима базисно и кусочно-линейно в  $X \times Y$ . Предположим, противное. Малая окрестность центра  $v$  звезды в произведении  $X \times Y$  состоит из не более чем  $k^2$  прямоугольников  $I \times J$ , являющихся произведениями частей рёбер  $I$  и  $J$  графов  $X$  и  $Y$ . По принципу Дирихле среди  $4k^2 + 1$  рёбер звезды найдётся по крайней мере пять, начала которых выходят в один прямоугольник. Поэтому существует подзвезда  $T_5 \subset T_{4k^2+1}$ , базисно вложенная в один из таких прямоугольников. Это противоречит критерию базисной вложимости графов.  $\square$

**ТЕОРЕМА УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ([7]).** Любой конечный граф базисно вложим в произведение  $X \times I$  для некоторого букета  $X$  окружностей и отрезков.

Число окружностей в букете можно взять равным  $E - V + C$ , где  $E$ ,  $V$ ,  $C$  — количества вершин, рёбер и компонент связности графа. В частности, любое дерево базисно вложимо в книжку с некоторым числом страниц.

Результаты этого пункта приводятся без доказательства.

Следующая гипотеза навеяна теоремой Робертсона – Симора о вложимости графов в поверхность [11].

**ГИПОТЕЗА.** (а) Существует лишь конечное число «запрещённых» подграфов для базисной вложимости конечного графа в данное произведение графов.

(б) Существует алгоритм проверки базисной вложимости конечного графа в данное произведение графов.

**КРИТЕРИЙ БАЗИСНОЙ ВЛОЖИМОСТИ ГРАФОВ В КНИЖКУ С  $n$  СТРАНИЦАМИ ([13]).** Дефектом графа  $K$  называется сумма

$$\delta(K) = (\deg A_1 - 2) + \dots + (\deg A_k - 2),$$

где  $A_1, \dots, A_k$  — все вершины графа  $K$ , либо имеющие степень больше четырёх, либо степени 4, не имеющие висячих рёбер. Конечный граф  $K$  базисно вложим в  $I \times T_n$  тогда и только тогда, когда он является деревом и

- либо  $\delta(K) < n$ ,
- либо  $\delta(K) = n$  и  $K$  содержит вершину степени больше четырёх, имеющую висячее ребро.

Из этого результата вытекает положительное решение гипотезы для произведения  $I \times T_n$ . В [7] доказаны также обобщения этого результата.

### 3. БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ<sup>6)</sup>

#### РАЗРЫВНАЯ БАЗИСНОСТЬ

0. Представьте функцию  $f: [(-1, -1), (1, 1)] \cup [(0, 0), (1, -1)] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$  в виде суммы  $g(x) + h(y)$  двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты.

1. (а) Для любых ли четырёх чисел  $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$  существуют такие четыре числа  $g_1, g_2, h_1, h_2$ , что  $f_{ij} = g_i + h_j$  при любых  $i, j = 1, 2$ ?

(б) Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в игру «А ну-ка, разложи!». На шахматной доске отмечено несколько клеток. А. Н. расставляет числа в отмеченных клетках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет 16 чисел  $a_1, \dots, a_8, b_1, \dots, b_8$ , т. е. «весов» столбцов и строк, как хочет. Если число в каждой отмеченной клетке оказалось равным сумме весов строки и столбца этой клетки, то выиграл В. И., а иначе (т. е. если число хотя бы в одной отмеченной клетке оказалось не равным сумме весов строки и столбца этой клетки) выиграл А. Н.

Докажите, что при правильной игре В. И. выигрывает тогда и только тогда, когда не существует замкнутого маршрута ладьи, начальная клетка и клетки поворота которого являются отмеченными (не обязательно все отмеченные клетки задействованы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОЛНИИ. Обозначим через  $\mathbb{R}^2$  плоскость с фиксированной системой координат. Обозначим через  $x(a)$  и  $y(a)$  координаты точки  $a \in \mathbb{R}^2$ . Последовательность (конечная или бесконечная) точек плоскости  $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$  называется *молнией*, если для каждого  $i$  выполнено  $a_i \neq a_{i+1}$ , и при этом  $x(a_i) = x(a_{i+1})$  для чётных  $i$  и  $y(a_i) = y(a_{i+1})$  для нечётных  $i$ . (Не обязательно все точки молнии различны.)

Конечная молния  $\{a_1, \dots, a_{2l+1}\}$  называется *замкнутой*, если  $a_1 = a_{2l+1}$ .

2. Рассмотрим замкнутую молнию  $\{a_1, \dots, a_n = a_1\}$ . Назовём *разложением* расстановку чисел в проекциях точек этой молнии на ось  $Ox$  и в проекциях точек этой молнии на ось  $Oy$ . Можно ли так расставить в точках молнии числа  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$  с  $f_1 = f_n$ , чтобы для любого разложения

<sup>6)</sup>Первый и остальные пункты этой части независимы друг от друга.



некоторое число  $f_i$  не было бы равно сумме двух чисел, стоящих в  $x(a_i)$  и в  $y(a_i)$ ?

Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  плоскости называется *разрывно базисным*, если для любой функции  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  существуют такие функции  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для каждой точки  $(x, y) \in K$ .

3. (а) Отрезок  $K = 0 \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$  является разрывно базисным.

(б) Крест  $K = 0 \times [-1; 1] \cup [-1; 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$  является разрывно базисным.

(с) *Критерий разрывной базисности*. Подмножество плоскости разрывно базисно тогда и только тогда, когда оно не содержит замкнутых молний.

4\*\*. Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в 3D-игру «А ну-ка, разложи!». В кубе  $n \times n \times n$ , разбитом на  $n^3$  единичных кубиков, отмечено несколько кубиков. А. Н. расставляет числа в отмеченных кубиках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет  $3n$  чисел  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$  — «весов» колонок, продольных строк и поперечных строк (т. е. рядов, параллельных оси  $z$ , оси  $x$  и оси  $y$ ) — как хочет. Если число в каждом отмеченном кубике  $(i, j, k)$  (поставленное А. Н.) оказалось равным сумме  $a_i + b_j + c_k$  трёх весов колонки, продольной строки и поперечной строки этого кубика, то выиграл В. И., а иначе (т. е. если число хотя бы в одном отмеченном кубике оказалось не равным сумме трёх весов) выиграл А. Н.

Как по набору отмеченных кубиков узнать, кто выигрывает?

(Ясно, что *алгоритм* распознавания выигрышности данного набора отмеченных кубиков существует. Желательно найти простой критерий типа того, который имеется для плоского аналога этой игры. Интересны даже ответы для маленьких  $n$ .)

5\*\*. (а) Определите разрывную базисность подмножеств трёхмерного пространства. Сформулируйте и докажите пространственный аналог приведённого критерия.

(б) То же для многомерного случая.

#### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. (а) Это неверно. Если  $f_{ij} = g_i + h_j$  для  $i, j = 1, 2$ , то  $f_{11} + f_{22} = f_{12} + f_{21}$ , но это соотношение не имеет места для некоторых наборов чисел  $f_{ij}$ .

(б) «Только тогда» следует из задачи 2. Докажем утверждение «тогда» индукцией по количеству отмеченных клеток. Если отмечена только одна клетка, утверждение задачи тривиально. Обозначим через  $K$  множество центров отмеченных клеток. Множество  $E(K)$  определено в следующем пункте после задачи 9. По условию,  $K$  не содержит замкнутых молний, следовательно  $\#E(K) < \#K$ . Значит, по индуктивному предположению В. И. может выиграть на множестве  $E(K)$ . Все оставшиеся клетки являются единственными отмеченными в

своей строке или в своем столбце. Следовательно, В. И. сможет выбрать и оставшиеся веса для  $K$ .

2. Да. Если каждое из чисел  $f_i$  представимо в виде суммы двух чисел, расположенных в точках  $x(a_i)$  и  $y(a_i)$ , то  $f_1 - f_2 + f_3 - \dots - f_{n-1} = 0$ , но можно легко подобрать набор чисел  $f_i$ , для которого это неверно.

3. (а) Положим  $h(y) = f(0, y)$  и  $g(x) = 0$ .

(б) Положим  $g(x) = f(x, 0)$  и  $h(y) = f(0, y) - f(0, 0)$ .

(с) «Только тогда» следует из задачи 2. Докажем утверждение «тогда». Рассмотрим произвольную функцию  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  и построим по ней функции  $g$  и  $h$  такие, что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ . Назовём две точки  $a, b \in K$  эквивалентными, если существует молния  $\{a = a_1, \dots, a_n = b\} \subset K$ . Возьмём один из классов эквивалентности  $K_1 \subset K$  и определим функции  $g: x(K_1) \rightarrow \mathbb{R}$  и  $h: y(K_1) \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом. Зафиксируем произвольную точку  $a_1 \in K_1$ . Положим  $g(x(a_1)) = f(a_1)$  и  $h(y(a_1)) = 0$ . Если  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l}\}$  — молния из точек множества  $K$ , то положим

$$\begin{aligned} h(y(a_{2l})) &:= f(a_{2l}) - f(a_{2l-1}) + \dots - f(a_1) \text{ и} \\ g(x(a_{2l})) &:= f(a_{2l-1}) - f(a_{2l-2}) + \dots + f(a_1). \end{aligned}$$

Если  $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l+1}\}$  — молния из точек множества  $K$ , то положим

$$g(x(a_{2l+1})) = f(a_{2l+1}) - f(a_{2l}) + \dots + f(a_1)$$

(значение  $h(y(a_{2l+1}))$  уже определено). Сделаем это построение для всех классов эквивалентности одновременно. Для всех же прочих точек положим  $g(x) = 0$  и  $h(y) = 0$ .

### НЕПРЕРЫВНАЯ БАЗИСНОСТЬ

Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  называется (*непрерывно*) *базисным*, если для любой непрерывной функции  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  существуют такие непрерывные функции  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для каждой точки  $(x, y) \in K$ . (Определение непрерывной функции напомнено в начале части 1.) Слово «непрерывно» далее опускается.

**ПРОБЛЕМА АРНОЛЬДА.** *Какие подмножества плоскости являются базисными?*

Чтобы подойти к ответу, рассмотрим несколько примеров.

6. (а) Замкнутая молния не базисна.

(б) Отрезок  $K = 0 \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$  является базисным.

(с) Крест  $K = 0 \times [-1; 1] \cup [-1; 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$  является базисным.

7. (а) Если подмножество плоскости базисно, то оно разрывно базисно. (Определение и критерий разрывной базисности см. в предыдущем пункте.)

(b) *Пополненной молнией* называется объединение точки  $a_0 \in \mathbb{R}^2$  с бесконечной молнией  $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{R}^2$  из различных точек, *сходящейся* к точке  $a_0$  (т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое натуральное  $N$ , что для любого  $i > N$  выполнено  $|a_i, a_0| < \varepsilon$ ). Докажите, что никакая пополненная молния не является базисной. (Заметим, что она является разрывно базисной).

(c) Через  $[a, b]$  обозначим отрезок, соединяющий точки  $a$  и  $b$ . Докажите, что крест  $[(-1, -2), (1, 2)] \cup [(-1, 1), (1, -1)]$  не является базисным.

(d) Пусть  $m_{i,j} = 2 - 3 \cdot 2^{-i} + j \cdot 2^{-2i}$ . Рассмотрим множество, состоящее из точек  $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$  и точек  $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})$ , где  $i = 1, 2, \dots$  и  $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}$ . Докажите, что это подмножество плоскости не содержит бесконечной молнии, но содержит сколь угодно длинные молнии.

(e) Объединение множества из предыдущего пункта с точкой  $(2, 2)$  не базисно.

Последовательность точек  $a_i$  плоскости называется *сходящейся к точке  $a$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое целое  $N$ , что для любого  $i > N$  выполнено  $|a, a_i| < \varepsilon$ .

Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  плоскости называется *замкнутым*, если для любой бесконечной последовательности точек  $a_i \in K$ , сходящейся к точке  $a$ , выполнено  $a \in K$ .

8. Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  плоскости является замкнутым тогда и только тогда, когда для любой точки  $a \notin K$  найдётся такое  $\varepsilon > 0$ , что любая точка плоскости с расстоянием менее  $\varepsilon$  до  $a$  не принадлежит  $K$ .

**КРИТЕРИЙ БАЗИСНОСТИ.** *Замкнутое ограниченное подмножество плоскости базисно тогда и только тогда, когда оно не содержит сколь угодно длинных молний [18].*

Приведём здесь замечания и переформулировку (используемую в доказательстве). Само доказательство приводится в следующем пункте.

9. (a) Условие замкнутости в критерии действительно необходимо (т.е. если в формулировке теоремы опустить это условие, то получится неверное утверждение).

(b) Условие ограниченности в критерии действительно необходимо (т.е. если в формулировке теоремы опустить это условие, то получится неверное утверждение).

(c)\*\* Найдите критерий базисности для замкнутых (но неограниченных) подмножеств плоскости.

Пусть  $K$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Для каждой точки  $v \in K$  нарисуем две прямые, проходящие через  $v$  параллельно координатным осям. Если хотя бы одна из этих двух прямых пересекает  $K$  только в точке  $v$ ,

то покрасим  $v$  в белый цвет. Обозначим через  $E(K)$  множество всех точек  $K$ , не являющихся белыми:

$$E(K) = \{v \in K : |K \cap (x = x(v))| \geq 2 \text{ и } |K \cap (y = y(v))| \geq 2\}.$$

Например, рис. 6b получается из рис. 6a операцией  $E$ . Пусть  $E^2(K) = E(E(K))$ ,  $E^3(K) = E(E(E(K)))$  и т. д.

10. Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  не содержит сколь угодно длинных молний тогда и только тогда, когда  $E^n(K) = \emptyset$  для некоторого  $n$ .

11. Базисность подмножеств трёхмерного пространства определена выше перед леммой Арнольда о деревьях.

(a) Докажите, что ёж  $0 \times 0 \times [-1; 1] \cup 0 \times [-1; 1] \times 0 \cup [-1; 1] \times 0 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$  является базисным.

(b) Подмножество пространства  $\mathbb{R}^3$ , состоящее из четырёх точек  $(0, 0, 0)$ ;  $(1, 1, 0)$ ;  $(0, 1, 1)$ ;  $(1, 0, 1)$ , базисно. (Но  $E^n(K) \neq \emptyset$  для любого  $n$ , см. ниже.)

(c) Для  $K \subset \mathbb{R}^3$  аналогично определим  $E(K)$ , используя вместо прямых плоскости, перпендикулярные осям координат:

$$E(K) := \{v \in K : |K \cap (x = x(v))| \geq 2, |K \cap (y = y(v))| \geq 2 \text{ и } |K \cap (z = z(v))| \geq 2\}.$$

Докажите, что если  $K$  замкнуто, ограничено и  $E^n(K) = \emptyset$  для некоторого  $n$ , то  $K$  базисно [18, Lemma 23.ii].

(d) Никакое подмножество пространства  $\mathbb{R}^3$  (или даже  $\mathbb{R}^4$ ), гомеоморфное двумерному диску, не является базисным. Указание: определение многомерной молнии см. в [18, 6.12, р. 39].

#### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6. (a) Если бы молния  $A = \{a_1, \dots, a_{2l+1} = a_1\}$  была базисной, то  $f(a_1) - f(a_2) + \dots + f(a_{2l-1}) - f(a_{2l}) = 0$ , но легко подобрать функцию  $f$ , для которой это не выполнено. Сравните с задачей 2.

(b),(c) Аналогично задачам 3a, 3b.

7. (a) Если множество не является разрывно базисным, то по критерию разрывной базисности из предыдущего пункта оно содержит замкнутую молнию. Тогда утверждение задачи следует из 6a, так как функция  $f$  может быть продолжена с замкнутой молнии на всё множество.

(b) Рассмотрим функцию  $f$ , для которой  $f(a_i) = \frac{(-1)^i}{i}$ . Предположим, что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для некоторых непрерывных  $g$  и  $h$ , тогда

$$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - f(a_4) + \dots - f(a_{2l}) = h(y(a_1)) - h(y(a_{2l})).$$

Так как  $\lim_{l \rightarrow \infty} h(y_{2l})$  существует и равен  $h(y(a_0))$ , то ряд  $\sum_{i=1}^{2l} (-1)^i f(a_i)$  сходится при  $l \rightarrow \infty$ . Но это противоречит расходимости гармонического ряда.

(с) Крест содержит замкнутую молнию

$$a_{4k+1} = \left( \frac{-1}{4^k}, \frac{1}{4^k} \right), \quad a_{4k+2} = \left( \frac{1}{2 \cdot 4^k}, \frac{1}{4^k} \right),$$

$$a_{4k+3} = \left( \frac{1}{2 \cdot 4^k}, \frac{-1}{2 \cdot 4^k} \right), \quad a_{4k+4} = \left( \frac{-1}{4^{k+1}}, \frac{-1}{2 \cdot 4^k} \right).$$

Определим функцию  $f$  на этой молнии, используя задачу 7(b), и продолжим её кусочно-линейно на весь крест. Не существует таких функций  $g$  и  $h$ , что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ .

(d) Для любого  $i$  точки  $(m_{i,2l}, m_{i,2l})_{l=1}^{2^{i-1}}$  и  $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})_{l=1}^{2^{i-1}}$  образуют молнию из  $2^i$  элементов.

(е) Определим функцию  $f(x, y)$  соотношениями

$$f((m_{i,2l}, m_{i,2l})) := \frac{1}{2^i} \quad \text{и} \quad f((m_{i,2l}, m_{i,2l-2})) := -\frac{1}{2^i}.$$

Предположим, что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для некоторых непрерывных  $g(x)$  и  $h(y)$ . Теперь для каждого  $i$ , используя молнии  $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$  и  $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})$ , где  $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}$ , получаем  $h(2 - \frac{3}{2^i}) - h(2 - \frac{2}{2^i}) = 1$ . Это противоречит непрерывности  $h$  в точке  $y = 2$ .

8. Докажем утверждение «только тогда». Пусть  $K$  — замкнутое подмножество плоскости. Предположим, что для некоторой точки  $a = (x, y) \notin K$  и для произвольного  $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$  существует хотя бы одна точка  $a_n \in K$ , для которой  $|a, a_n| \leq \frac{1}{n}$ . Но тогда последовательность точек  $a_n \in K$  сходится к точке  $a$ , поэтому  $a \in K$ . Противоречие.

Теперь докажем утверждение «тогда». Пусть некоторая последовательность  $a_n$  сходится к точке  $a$ , не лежащей в множестве  $K$ . По условию существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любой точки  $a_n \in K$  расстояние  $|a, a_n| > \varepsilon$ . Но это противоречит сходимости последовательности.

9. (а) Любая бесконечная молния  $A$ , не содержащая замкнутых молний и сходящаяся к точке  $a \notin A$ , является базисной. Это следует из того, что любая функция, определённая на  $A$ , непрерывна.

(b) Контрпримером является множество  $\{(k, k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{(k, k-1)\}_{k=1}^{\infty}$  точек плоскости.

10. Докажем часть «только тогда». Предположим, что  $E^n(K) \neq \emptyset$  для всех  $n$ . Для каждого  $n$  рассмотрим точку  $a_0 \in E^n(K)$ . Выберем точки  $a_{-1}, a_1 \in E^{n-1}(K)$  такие, что  $x(a_{-1}) = x(a_0)$  и  $y(a_1) = y(a_0)$ . Теперь можно выбрать точки  $a_{-2}, a_2 \in E^{n-2}(K)$ , для которых  $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$  — молния. Аналогично можно сконструировать молнию из  $2n+1$  точек, лежащую целиком в множестве  $K$ . Что и требовалось доказать.

Докажем часть «тогда». Пусть множество  $K$  содержит молнию из  $2n+1$  точки  $\{a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_n\}$ . Тогда в множестве  $E(K)$  содержится молния из  $2n-1$

точки  $\{a_{-n+1}, \dots, a_{n-1}\}$ . Продолжая, получим, что  $a_0 \in E^n(K)$ . Следовательно, если  $E^n(K) = \emptyset$ , то  $K$  не содержит молнии из  $2n + 1$  точек.

11. (а) Для произвольной функции  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  на еже  $K$  определим  $g(x) := f(x, 0, 0)$ ,  $h(y) := f(0, y, 0) - f(0, 0, 0)$  и  $l(z) := f(0, 0, z) - f(0, 0, 0)$ .

(б) Положим  $g(0) = f(0, 0, 0)$ ,  $h(0) = 0$ ,  $l(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2g(1) &= f(0, 0, 0) + f(1, 1, 0) + f(1, 0, 1) - f(0, 1, 1), \\ 2h(1) &= -f(0, 0, 0) + f(1, 1, 0) - f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1) \text{ и} \\ 2l(1) &= -f(0, 0, 0) - f(1, 1, 0) + f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1). \end{aligned}$$

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ БАЗИСНОСТИ

Пусть  $K$  — произвольное замкнутое ограниченное подмножество плоскости. Известно, что тогда любая непрерывная функция  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена. Функция  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  называется *ограниченной*, если найдётся число  $M$  такое, что  $|f(x)| < M$  для любой точки  $x \in K$ . Для ограниченной функции  $G: K \rightarrow \mathbb{R}$  положим

$$|G| := \sup_{x \in K} |G(x)|.$$

*Начало доказательства части «только тогда» критерия базисности.* Предположим, напротив, что  $K$  содержит сколь угодно длинные молнии и базисно. Выбирая подпоследовательности, можно добиться того, чтобы в каждой молнии точки попарно различны. Поэтому будем считать, что это выполнено. Тогда для любого  $n \geq 4$  существует молния  $\{a_1^n, \dots, a_{2n+5}^n\}$  из  $2n + 5$  различных точек множества  $K$ .

Существует непрерывная функция  $f_n: K \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$f_n(a_i^n) = (-1)^i \quad \text{и} \quad |f_n(x)| \leq 1 \quad \text{для любого } x \in K.$$

(Действительно, построим сначала непрерывную функцию  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую этим условиям. Обозначим  $s = \min_{i < j} |a_i, a_j|$ . Рассмотрим  $n$  дисков с центрами в точках  $a_i$  и радиусами  $\frac{s}{3}$ . Вне этих дисков положим  $f = 0$ . Внутри  $i$ -го диска сделаем  $f$  линейной функцией от радиуса, равной  $(-1)^i$  в центре  $a_i$  и нулю на границе. Теперь ограничим построенную функцию на  $K \subset \mathbb{R}^2$  и получим требуемую непрерывную функцию  $K \rightarrow \mathbb{R}$ .)

Определим по индукции последовательность чисел  $s_n$  и функций  $F_n: K \rightarrow \mathbb{R}$ . Положим  $s_0 = 1$  и  $F_0 = 0$ . Предположим, что  $s_{n-1}$  и  $F_{n-1}$  уже определены. Возьмём функции  $G_{n-1}, H_{n-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которых  $F_{n-1}(x, y) = G_{n-1}(x) + H_{n-1}(y)$  (если таких функций нет, то все доказано). Берём

$$s_n > s_{n-1}! \cdot (|G_{n-1}| + n) \quad \text{и} \quad F_n = F_{n-1} + \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!}.$$

Достаточно доказать, что функция

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!} = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$$

не представима в виде  $G(x) + H(y)$ .

Предположим, что, напротив  $F(x, y) = G(x) + H(y)$  для некоторых  $G$  и  $H$ . Для получения противоречия достаточно доказать, что  $|G| > n$  для каждого  $n$ . А для этого достаточно показать, что  $s_{n-1}!|G - G_{n-1}| > s_n$ : тогда будет

$$|G| + |G_{n-1}| \geq |G - G_{n-1}| > \frac{s_n}{s_{n-1}!} > |G_{n-1}| + n.$$

ЛЕММА. Пусть  $m \geq 4$ ,

- $K = \{a_1, \dots, a_{2m+5}\}$  — молния из  $2m + 5$  различных точек на плоскости,
- $f(a_1), \dots, f(a_{2m+5})$  — числа, для которых  $|(-1)^i - f(a_i)| < 1/m$  и
- $g(x(a_i)), h(y(a_i)), i = 1, \dots, 2m + 5$ , — такие числа, что  $f(a_i) = g(x(a_i)) + h(y(a_i))$  для любого  $i$  (при этом если  $x(a_i) = x(a_j)$ , то  $g(x(a_i)) = g(x(a_j))$ ), и аналогично для  $y$  и  $h$ .

Тогда  $\max_i |g(x(a_i))| > m$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что прямая  $a_1 a_2$  параллельна оси  $Ox$  (если это не так, то увеличим все индексы на 1 в последующих формулах). Имеем

$$|(f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - f(a_4) + \dots - f(a_{2m+4}) - (2m + 4)| \leq \frac{2m + 4}{m} \leq 3.$$

Это означает, что  $|g(x(a_1)) - g(x(a_{2m+4}))| \geq (2m + 4) - 3 > 2m$ . Отсюда следует требуемое неравенство.  $\square$

Окончание доказательства части «только тогда» критерия непрерывной базисности. Имеем:

$$F - F_n = F - F_{n-1} - \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!} = \frac{s_{n-1}!(F - F_{n-1}) - f_{s_n}}{s_{n-1}!}.$$

Применим лемму к

$$\begin{aligned} m &= s_n, & a_i &= a_i^{s_n}, & f &= s_{n-1}!(F - F_{n-1}), \\ g &= s_{n-1}!(G - G_{n-1}), & h &= s_{n-1}!(H - H_{n-1}). \end{aligned}$$

Это возможно, так как  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  и (так как  $s_n - 1 > s_{n-1}$  при  $n > 2$ )

$$\begin{aligned} |f - f_{s_n}| = s_{n-1}! |F - F_n| &< \frac{1}{(s_n - 1) \cdot s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(s_n + 1) \cdot \dots \cdot s_{n+k}} < \\ &< \frac{1}{(s_n - 1) \cdot s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{s_n}. \end{aligned}$$

По лемме получим  $s_{n-1}! |G - G_{n-1}| > s_n$ . □

12. (а)\* Докажите элементарно (т. е. без использования описания пространства  $C^*(K)$  в терминах мер, см. ниже), что если  $K \subset \mathbb{R}^2$  замкнуто и ограничено, причём  $E(K) = \emptyset$ , то  $K$  базисно [14].

Указание. Получите сначала разложение  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для кусочно-линейных функций  $f$ , причём  $|g| + |h| < 5|f|$ .

(б)\*\* Докажите элементарно часть «тогда» критерия базисности.

Указание. То же,  $|g| + |h| < C_n|f|$ , где  $C_n$  зависит только от того  $n$ , для которого  $E^n(K) = \emptyset$ .

Напомним, что двумя звёздочками обозначаются нерешённые задачи.

*Доказательство критерия базисности* [18, §2, Лемма 23.ii]. <sup>7)</sup> Оно основано на переформулировке свойства базисности в терминах ограниченных линейных операторов в банаховых пространствах функций. Обозначим через  $C(X)$  пространство непрерывных функций на  $X$  с нормой  $|f| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ . В этом доказательстве обозначим через  $pr_x(a)$  и  $pr_y(a)$  проекции точки  $a \in K$  на оси координат.

Для подмножества  $K \subset I^2$  определим отображение (линейный оператор суперпозиции)  $\varphi: C(I) \oplus C(I) \rightarrow C(K)$  формулой

$$\varphi(g, h)(x, y) = g(x) + h(y).$$

Норма на пространстве  $C(I) \oplus C(I)$  вводится естественным способом. Ясно, что подмножество  $K \subset I^2$  базисно тогда и только тогда, когда  $\varphi$  эпиморфно.

Обозначим через  $C^*(X)$  пространство ограниченных линейных функций  $C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой  $|\mu| = \sup\{|\mu(f)| : f \in C(X), |f| = 1\}$ . Для подмножества  $K \subset I^2$  определим отображение (двойственный линейный оператор суперпозиции)  $\varphi^*: C^*(K) \rightarrow C^*(I) \oplus C^*(I)$  как

$$\varphi^* \mu(g, h) = (\mu(g \circ pr_x), \mu(h \circ pr_y)).$$

<sup>7)</sup> Это доказательство неэлементарно, формально не используется в дальнейшем и может быть опущено читателем. Однако мы приводим его, поскольку наше изложение короче и яснее данного в [18].



Норма на пространстве  $C^*(I) \oplus C^*(I)$  вводится естественным способом. Так как  $|\varphi^* \mu| \leq 2|\mu|$ , то  $\varphi^*$  ограничен. По двойственности,  $\varphi$  эпиморфен тогда и только тогда, когда  $\varphi^*$  мономорфен.<sup>8)</sup>

Понятно, что  $\varphi^*$  мономорфен тогда и только тогда, когда

$$\text{существует } \varepsilon > 0 \text{ такое, что } |\varphi^* \mu| > \varepsilon |\mu| \text{ для каждого} \quad (*) \\ \text{ненулевого } \mu \in C^*(K).$$

Чтобы работать с условием (\*), используем следующий нетривиальный факт:  $C^*(K)$  совпадает с пространством  $\sigma$ -аддитивных регулярных вещественнозначных борелевских мер на  $K$  (далее мы будем называть их просто «мерами»; используется также термин «заряды»). Имеем

$$\varphi^* \mu = (\mu_x, \mu_y), \quad \text{где } \mu_x(U) = \mu(pr_x^{-1}U) \text{ и } \mu_y(U) = \mu(pr_y^{-1}U).$$

Если  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  есть разложение меры  $\mu$  на положительные и отрицательные части, то  $|\mu| = \bar{\mu}(X)$ , где  $\bar{\mu} = \mu^+ + \mu^-$  есть абсолютное значение меры  $\mu$ .

Доказательство того, что условие (\*) влечёт отсутствие сколь угодно длинных молний, оставляем в качестве упражнения. (Это доказывает часть «только тогда», для которой у нас уже есть элементарное доказательство.)

Остаётся доказать, что условие (\*) следует из  $E^n(K) = \emptyset$ . (Это доказывает часть «тогда».) Приведём доказательство для  $n \in \{1, 2\}$  (для произвольного  $n$  оно аналогично).

Обозначим через  $D_x$  (и  $D_y$ ) множество тех точек из  $K$ , которые не затеняются никакой другой точкой из  $K$  в  $x$ - (и  $y$ -) направлении. Возьмём любую меру  $\mu$  на  $K$  с нормой 1.

Если  $n = 1$ , то

$$E(K) = \emptyset, \text{ поэтому } D_x \cup D_y = K, \text{ значит, } 1 = \bar{\mu}(K) \leq \bar{\mu}(D_x) + \bar{\mu}(D_y).$$

Тогда, не уменьшая общности,  $\bar{\mu}(D_x) \geq 1/2$ . Так как  $pr_x$  инъективна на  $D_x$ , то  $|\mu_x| \geq 1/2$ . Поэтому условие (\*) выполнено для  $\varepsilon = 1/2$ .

Если  $n = 2$ , то

$$E(E(K)) = \emptyset, \text{ поэтому } D_x \cup D_y = K - E(K) \text{ и } E(D_x \cup D_y) = \emptyset.$$

<sup>8)</sup> При этом  $\varphi^*$  может быть инъективным, но не мономорфным. Другими словами, не только линейные соотношения на  $\text{im } \varphi$  заставляют его быть строго меньше чем  $C(K)$ , как показывает пример небазисной пополненной молнии.

Заметим, что если  $K \subset \mathbb{R}^2$  — базисное подмножество, то мы можем доказать без использования  $\varphi$ , что  $\varphi^*$  мономорфно. Определим линейный оператор  $\Psi: C^*(I) \oplus C^*(I) \rightarrow C^*(K)$  формулой  $\Psi(\mu_x, \mu_y)(f) = \mu_x(g) + \mu_y(h)$ , где  $g, h \in C(I)$  таковы, что  $g(0) = 0$  и  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для  $(x, y) \in K$ . Ясно, что  $\Psi\varphi^* = \text{id}$  и  $\Psi$  ограничено, следовательно  $\varphi^*$  мономорфно.

При  $\bar{\mu}(E(K)) < 3/4$  имеем  $\bar{\mu}(D_x \cup D_y) > 1/4$  и, не уменьшая общности,  $\bar{\mu}(D_x) > 1/8$ , значит, как и в случае  $n = 1$ , имеем  $|\mu_x| > 1/8$ . Поэтому условие (\*) выполнено для  $\varepsilon = 1/8$ .

При  $\bar{\mu}(E(K)) \geq 3/4$  имеем  $\bar{\mu}(K - E(K)) \leq 1/4$ . Как и в случае  $n = 1$ , не уменьшая общности,  $\bar{\mu}_x(pr_x(E(K))) \geq \bar{\mu}(E(K))/2$ . Следовательно  $|\mu_x| \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ . Поэтому условие (\*) выполнено для  $\varepsilon = \frac{1}{8}$ .  $\square$

### ГЛАДКАЯ БАЗИСНОСТЬ

Пусть  $K$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Функция  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  называется *дифференцируемой* (по Уитни), если для любой точки  $z_0 \in K$  существуют такие вектор  $a \in \mathbb{R}^2$  и бесконечно малая функция  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любой точки  $z \in K$  выполнено

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|.$$

Здесь точка означает знак скалярного произведения векторов  $a = (f_x, f_y)$  и  $z - z_0 = (x, y)$ , т. е.  $a \cdot (z - z_0) = x f_x + y f_y$ . Функция  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется *бесконечно малой*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что для любой точки  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{если } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \text{ то } |\alpha(x, y)| < \varepsilon.$$

Подмножество  $K \subset \mathbb{R}^2$  плоскости называется *дифференцируемо базисным*, если для любой дифференцируемой функции  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  существуют такие дифференцируемые функции  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любой точки  $(x, y) \in K$  выполняется  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ .

13. (а) (б) (с) Решите аналоги задачи 6 для дифференцируемой базисности.

14. (а) График функции  $|x|$  на отрезке  $[-1; 1]$  является дифференцируемо базисным.

(б) Ломаная с последовательными вершинами  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  и  $(2, 0)$  не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она базисна.)

(с) Пополненная молния  $\left\{ \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right]^{-1/2}, \left[ \frac{n}{2} \right]^{-1/2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(0, 0)\}$  не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является также базисной.)

(д) Пополненная молния  $\left\{ \left( 2^{-\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}, 2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(0, 0)\}$  является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является базисной.)

(е)\*\* ГИПОТЕЗА И. ШНУРНИКОВА. Пополненная молния  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(0, 0)\}$  дифференцируемо базисна тогда и только тогда, когда последовательность  $\frac{\sum_{n=k}^{\infty} |a_n|}{|a_k|}$  ограничена.

15. (а) Крест  $K = [(-1, -2), (1, 2)] \cup [(-1, 1), (1, -1)]$  не является дифференцируемо базисным.

(б)\*\* ГИПОТЕЗА. Подмножество  $\left\{ \left( t^2, \frac{t^2}{(1+t)^2} \right) \right\}_{t \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}$  плоскости не является дифференцируемо базисным. Указание: можно пытаться делать аналогично задаче 15(а).

(с)\*\* ГИПОТЕЗА. Кусочно-линейный граф на плоскости является дифференцируемо базисным тогда и только тогда, когда он не содержит сколько угодно длинных молний, и для любых двух *сингулярных* точек  $a$  и  $b$  выполнено  $x(a) \neq x(b)$  и  $y(a) \neq y(b)$ . Точка  $a \in K$  называется *сингулярной*, если пересечение  $K$  с любым диском с центром в  $a$  не является прямолинейным отрезком.

(д)\*\* Найдите критерий дифференцируемой базисности для графов в плоскости.

16. Пусть  $K$  — подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$  и  $r \geq 0$ . Функция  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $r$  раз дифференцируемой, если для любой точки  $z_0 \in K$  существуют такие многочлен  $\bar{f}(z) = \bar{f}(x, y)$  степени не выше  $r$  от двух переменных  $x$  и  $y$  и бесконечно малая функция  $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $f(z) = \bar{f}(z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|^r$  для любой точки  $z \in K$ . (Это определение отличается от общепринятого.)

(а) Ноль раз дифференцируемые функции — это в точности непрерывные, а один раз дифференцируемые — это в точности дифференцируемые.

(б) Для любого целого положительного  $r$  определите  $r$ -дифференцируемую базисность подмножеств плоскости.

(с)\* Для любого целого  $k \geq 0$  найдётся подмножество плоскости,  $r$ -дифференцируемо базисное для любого  $r = 0, 1, \dots, k$ , но не  $r$ -дифференцируемо базисное ни для какого  $r > k$  [16].

(д)\*\* Найдите критерий  $r$ -дифференцируемой базисности для графов в плоскости.

#### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

13. (а), (б), (с) Аналогично задачам 6(а), 3(а) и 3(б).

14. (а) Пусть  $f(x, y)$  — дифференцируемая функция. Тогда  $f(x, |x|) - f(0, 0) = ax + b|x| + \alpha(x, |x|)|x, |x|$ . Положим  $h(y) = by$ ,  $g(x) = f(x, |x|) - b|x|$ . Подробнее см. [16].

(b) Предположим, что данная ломаная дифференцируемо базисна. Функция  $f(x, y) = xy$  дифференцируема. Поэтому  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для некоторых дифференцируемых функций  $g$  и  $h$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2 - 2d &= f(1+d, 1-d) + f(1-d, 1-d) = \\ &= g(1+d) + g(1-d) + 2h(1-d) = 2g(1) + 2h(1) - 2h'(1)d + o(d). \end{aligned}$$

Значит,  $h'(1) = 1$ . Аналогично

$$\begin{aligned} 2d - 2 &= f(-1+d, 1-d) + f(-1-d, 1-d) = \\ &= g(-1+d) + g(-1-d) + 2h(1-d) = 2g(-1) + 2h(1) - 2h'(1)d + o(d). \end{aligned}$$

Значит,  $h'(1) = -1$ . Противоречие.

(c) Предположим, что эта пополненная молния дифференцируемо базисна. Положим  $a_n = (\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor^{-1/2}, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^{-1/2})$ ,  $f(a_n) := \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Если  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для некоторых функций  $g(x)$  и  $h(y)$ , тогда  $f(a_2) - f(a_3) + f(a_4) - \dots$  сходится к  $g(1) - g(0)$  (аналогично задаче 7b). Но это противоречит расходимости ряда  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ .

(d) Не ограничивая общности можно считать, что  $f(0, 0) = 0$ , тогда возьмём  $g(0) = 0$  и  $h(0) = 0$ . Положим

$$\begin{aligned} h(2^{-k}) &= f(2^{-(k+1)}, 2^{-k}) - f(2^{-(k+1)}, 2^{-(k+1)}) + f(2^{-(k+2)}, 2^{-(k+1)}) - \dots, \\ g(2^{-k}) &= f(2^{-k}, 2^{-k}) - f(2^{-(k+1)}, 2^{-k}) + f(2^{-(k+1)}, 2^{-(k+1)}) - \dots, \end{aligned}$$

где правые части суть суммы знакопеременных рядов.

Теперь  $g(x)$  и  $h(y)$  могут быть продолжены до дифференцируемых функций  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

15. (a) Определим

$$w(0) = 0, \quad w(4^{-i} + 4^{-3i}) = w(4^{-i}) = 0 \quad \text{и} \quad w(4^{-i} + 4^{-3i-1}) = 2^{3i} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Продолжим теперь эту функцию кусочно-линейно до функции  $w: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Для каждого  $x \in [0; 1]$  определим  $f(x, -x)$  как площадь под графиком функции  $w$  на отрезке  $[0; x]$ . На остальном кресте положим  $f(x, y) = 0$ .

Предположим, что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для некоторых дифференцируемых  $g$  и  $h$ . Не ограничивая общности, будем считать, что  $g(0) = h(0) = 0$ . Для  $x \in [0; 1]$  определим  $W(x)$  как площадь под графиком функции  $w$  на отрезке  $[0; x]$ . Определим  $f(x, -x) = W(x)$  для  $x \in [0; 1]$  и  $f(x, y) = 0$  на остальных точках креста.

Ясно, что  $f$  дифференцируема вне  $(0, 0)$ . Можно проверить, что  $f$  дифференцируема и в  $(0, 0)$ .

Предположим, что  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  для некоторых дифференцируемых  $g$  и  $h$ . Не ограничивая общности, будем считать, что  $g(0) = h(0) = 0$ . Функция  $g$  не дифференцируема в точке  $x = 1/4$ , поскольку для  $0 < d < \frac{1}{4}$  выполнено

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{1}{4} + d\right) - g\left(\frac{1}{4}\right) &= W\left(\frac{1}{4} + d\right) - W\left(\frac{1}{4}\right) + W\left(\frac{1}{4^2} + \frac{d}{4}\right) - W\left(\frac{1}{4^2}\right) + \dots > \\
&> W\left(\frac{1}{4^{k+1}} + \frac{d}{4^k}\right) - W\left(\frac{1}{4^{k+1}}\right) = \frac{2^{3k} \cdot 4^{-3k}}{2} \geq \frac{(4d)^{3/4}}{2}.
\end{aligned}$$

Здесь

- первое равенство доказывается с использованием двух бесконечных молний из точек креста, начинающихся в точках  $(\frac{1}{4} + d, -\frac{1}{4} - d)$  и  $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$  и сходящихся к точке  $(0, 0)$ ;
- $k \geq 0$  таково, что  $4^{-2k} \geq 4d > 4^{-2(k+1)}$ ;
- первое неравенство выполнено, поскольку  $W$  невозрастающая функция;
- второе неравенство выполнено, поскольку  $\frac{d}{4^k} > \frac{1}{4^{3(k+1)}}$ ;
- второе равенство выполнено по определению числа  $k$ .

(Аналогично доказывается, что  $g$  не дифференцируема ни в какой точке вида  $x = 4^{-i}$ .)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд. *О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных* // Математическое просвещение. Сер. 2, вып. 3, 1958. С. 41–61.  
Эл. версия: <http://ilib.mirror1.mcsme.ru/djvu/mp2/mp2-3.djvu?djvuopts&page=43>
- [2] В. И. Арнольд. *Проблема 6* // Математическое просвещение. Сер. 2, вып. 3, 1958. С. 273–274.  
Эл. версия: <http://ilib.mirror1.mcsme.ru/djvu/mp2/mp2-3.djvu?djvuopts&page=243>
- [3] А. Г. Витушкин. *13-я проблема Гильберта и смежные вопросы* // УМН, т. 59, вып. 1(355), 2004. С. 11–24.
- [4] С. М. Воронин. *Аналитическая классификация ростков конформных отображений  $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  с тождественной линейной частью* // Функц. анализ и его прил. Т. 15, вып. 1, 1981. С. 1–17
- [5] С. М. Воронин. *Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения* // Функц. анализ и его прил. Т. 16, вып. 2, 1982. С. 21–29.
- [6] К. Куратовский. *Топология*. Тт. 1–2. Мир, Москва, 1969.
- [7] В. А. Курлин. *Базисные вложения графов и метод трехсторонних вложений Дынникова* // УМН, т. 58, вып. 2(350), 2003. С. 163–164.

- [8] В. А. Курлин. *Базисные вложения графов и метод трехсторонних вложений Дынникова*. Диссертация, 2003.  
Эл. версия <http://maths.dur.ac.uk/~dma0vk/PhD.html>
- [9] В. В. Прасолов. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.  
Эл. версия <http://www.mccme.ru/prasolov>
- [10] Д. Реповш, А. Скопенков. *Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства* // УМН, т. 54, вып. 6(330), 1999. С. 61–108.
- [11] А. Скопенков. *Вокруг критерия Куратовского планарности графов* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005, с. 116–128 и вып. 10, 2006, с. 276–277.  
Эл. версия <http://www.mccme.ru/free-booksmatprosa.html/>  
<http://arxiv.org/abs/0802.3820>
- [12] А. Б. Скопенков. *Алгебраическая топология с элементарной точки зрения* М.: МЦНМО, в печати.  
Эл. версия <http://arxiv.org/abs/0808.1395>
- [13] V. Kurlin. *Basic embeddings into products of graphs* // Topol. Appl. Vol. 102, 2000. P. 113–137.
- [14] E. Miliczka. *Constructive decomposition of a function of two variables as a sum of functions of one variable* // Proc. AMS. Vol. 137, no 2, 2009. P. 607–614.
- [15] N. Mramor-Kosta, E. Trenklerova [Miliczka]. *On basic embeddings of compacta into the plane* // Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 68, 2003. P. 471–480.
- [16] D. Repovš, M. Željko. *On basic embeddings into the plane* // Rocky Mountain J. Math. Vol. 36, no 5, 2006. P. 1665–1677.
- [17] A. Skopenkov. *A description of continua basically embeddable in  $\mathbb{R}^2$*  // Topol. Appl. Vol. 65, 1995. P. 29–48.
- [18] Y. Sternfeld. *Hilbert's 13th problem and dimension* // Lect. Notes Math. Vol. 1376, 1989. P. 1–49.

---

А. Б. Скопенков: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Независимый московский университет, Московский институт открытого образования  
Инфо: <http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps>  
e-mail: [skopenko@mccme.ru](mailto:skopenko@mccme.ru)

# Гиперболические треугольники максимальной площади с двумя заданными сторонами

Е. И. Алексеева

На плоскости Лобачевского рассматривается аналог очень простой задачи евклидовой геометрии: каким будет треугольник максимальной площади с двумя заданными сторонами и какой будет эта площадь.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Каким будет треугольник максимальной площади с двумя заданными сторонами, и какой будет эта площадь? Очевидно, что в геометрии Евклида искомым треугольник будет прямоугольным. В статье даётся ответ на вопрос, каким будет соответствующий треугольник (который мы в дальнейшем будем называть *треугольником максимальной площади*) в геометрии Лобачевского. При этом оказывается, что треугольник максимальной площади не является прямоугольным, но обладает многими свойствами, аналогичными свойствам евклидова прямоугольного треугольника (см. табл. 1).

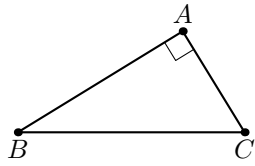
Как видно из табл. 1, в каком-то смысле аналогом евклидова прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского можно считать и *треугольник максимальной площади*.

БЛАГОДАРНОСТЬ. Автор благодарит П. В. Бибикова за постановку задачи и внимание к работе.

## 2. МОДЕЛЬ ПУАНКАРЕ В КРУГЕ

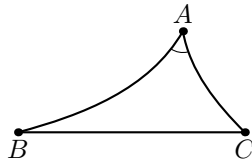
Существует несколько моделей геометрии Лобачевского, но нам будет удобнее рассматривать *модель Пуанкаре в круге* (см. [2, 6]). В этой модели *плоскостью Лобачевского* является внутренность единичного круга. Граница этого круга называется *абсолютом*. *Точками* являются обычные

## ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДА



- 1)  $\alpha = \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ ;
- 2) центр описанной окружности лежит в середине стороны  $BC$ ;
- 3)  $\frac{S}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{c}{2}$ ;
- 4)  $\cos \alpha = 0 = \text{const}$ ;
- 5)  $a^2 = b^2 + c^2$ .

## ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО



- 1)  $\alpha = \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ ;
- 2) центр описанной окружности лежит в середине стороны  $BC$ ;
- 3)  $\sin \frac{S}{2} = \text{th} \frac{b}{2} \cdot \text{th} \frac{c}{2}$ ;
- 4)  $\cos \alpha = \text{th} \frac{b}{2} \cdot \text{th} \frac{c}{2} \neq \text{const}$ ;
- 5)  $\text{sh}^2 \frac{a}{2} = \text{sh}^2 \frac{b}{2} + \text{sh}^2 \frac{c}{2}$ .

Табл. 1.

евклидовы точки круга, а *прямыми* — дуги евклидовых окружностей, ортогональных абсолюту, и диаметры абсолютa. Углы измеряются как обычные евклидовы углы между кривыми. Площадь треугольника в геометрии Лобачевского вычисляется по формуле

$$S(\Delta) = \pi - (\text{сумма углов}).$$

В этом состоит одно из существенных отличий геометрии Лобачевского от геометрии Евклида: в евклидовой геометрии нельзя выразить площадь треугольника через его углы.

## 3. КЛЮЧЕВАЯ ТЕОРЕМА

При решении различных задач геометрии Лобачевского, связанных с площадью треугольника, оказывается полезной следующая теорема (см. также [8]).

**КЛЮЧЕВАЯ ТЕОРЕМА.** Пусть вершина  $A$  неевклидова треугольника  $ABC$  совпадает с центром модели Пуанкаре и точка  $B'$  симметрична  $B$  относительно абсолютa<sup>1)</sup>.

Тогда  $S(ABC) = 2\tau$ , где  $\tau = \angle AB'C$ .

<sup>1)</sup>Т. е. точка  $B'$  является образом точки  $B$  при инверсии относительно абсолютa.



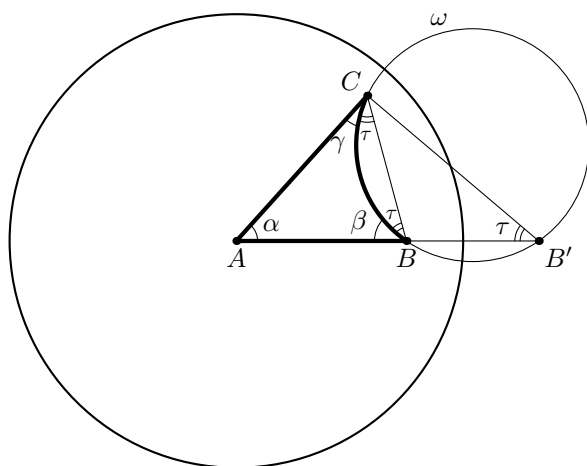


Рис. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим евклидову окружность  $\omega$ , содержащую неевклидову сторону  $BC$  треугольника  $ABC$  (рис. 1). Поскольку окружность  $\omega$  ортогональна абсолюту, она переходит в себя при инверсии относительно абсолютата и, следовательно, проходит через точку  $B'$  (см. [3]). Угол между хордой  $BC$  и окружностью  $\omega$  равен  $\tau$  как угол между хордой и касательной. Поэтому сумма *евклидовых* углов *евклидова* треугольника  $ABC$  равна  $\alpha + \beta + \gamma + 2\tau = \pi$ , откуда

$$S(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = 2\tau. \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Используя ключевую теорему, решите следующие задачи (см. [1, 8]).

1) Постройте в неевклидовом треугольнике  $ABC$  отрезок  $AH$ , делящий площадь  $ABC$  пополам. Верно ли, что отрезок  $AH$  является медианой?

2) Постройте в неевклидовом треугольнике  $ABC$  точку  $T$ , такую, что площади треугольников  $ABT$ ,  $BCT$  и  $CAT$  равны. Верно ли, что точка  $T$  является точкой пересечения медиан?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Рассмотрим на плоскости Лобачевского отрезок  $AB$  и прямую  $s$ . Найдите на прямой  $s$  точку  $C$ , такую, что площадь треугольника  $ABC$  минимальна.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Докажите аналог ключевой теоремы на сфере: множеством точек, образующих с данным отрезком  $AB$  треугольники постоянной площади, является окружность, проходящая через точки  $A'$  и  $B'$ , симметричные точкам  $A$  и  $B$  относительно центра сферы.

## 4. ТРЕУГОЛЬНИКИ МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ И ИХ СВОЙСТВА

Теперь мы готовы решить основную задачу: *найти неевклидов треугольник  $ABC$  максимальной площади с двумя заданными сторонами  $AB$  и  $AC$ .*

Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что вершина  $A$  совпадает с центром модели Пуанкаре. Зафиксируем сторону  $AB$ . Тогда вершина  $C$  лежит на неевклидовой окружности  $\psi$  с центром в точке  $A$  и фиксированным радиусом. Так как центр окружности  $\psi$  совпадает с центром модели Пуанкаре, эта окружность совпадает с евклидовой (но другого радиуса). По ключевой теореме треугольник  $ABC$  имеет площадь, равную  $2\angle AB'C$ , где точка  $B'$  симметрична точке  $B$  относительно абсолюта. Площадь треугольника  $ABC$  будет максимальна тогда, когда угол  $\angle AB'C$  максимален, т.е. когда отрезок  $B'C$  касается окружности  $\psi$  (рис. 2).

Итак, для построения треугольника  $ABC$  максимальной площади достаточно построить касательную  $B'C$  к окружности  $\psi$ .

Треугольник максимальной площади может быть охарактеризован рядом эквивалентных свойств, которые аналогичны свойствам евклидова прямоугольного треугольника (см. табл. 1).

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $ABC$  — неевклидов треугольник с заданными сторонами  $AC = b$  и  $AB = c$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (0)  $ABC$  имеет максимальную площадь;
- (1)  $\alpha = \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$ ;
- (2) центр описанной окружности совпадает с серединой стороны  $BC$ ;
- (3)  $\sin \frac{S}{2} = \operatorname{th} \frac{b}{2} \cdot \operatorname{th} \frac{c}{2}$ ;

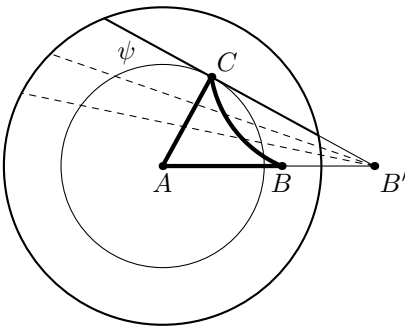


Рис. 2.

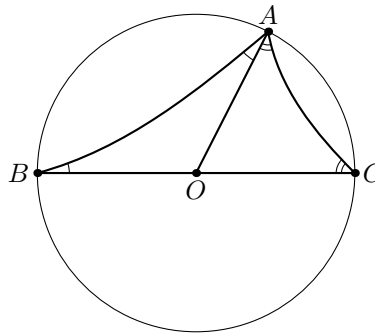


Рис. 3.

$$(4) \cos \alpha = \operatorname{th} \frac{b}{2} \cdot \operatorname{th} \frac{c}{2} \neq \operatorname{const};$$

$$(5) \operatorname{sh}^2 \frac{a}{2} = \operatorname{sh}^2 \frac{b}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{c}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства рассмотрим описанную выше конструкцию. По ключевой теореме  $\tau = \angle AB'C = \frac{S}{2}$ , где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ .

(0)  $\Leftrightarrow$  (1) Если треугольник  $ABC$  имеет максимальную площадь, то  $\angle ACB' = \frac{\pi}{2}$ , т. е. имеет место равенство  $\tau + \alpha = \frac{\pi}{2}$ , которое равносильно  $(\pi - \alpha - \beta - \gamma) + 2\alpha = \pi$ . Отсюда следует, что  $\alpha = \beta + \gamma$ . Обратно, если выполнено равенство  $\alpha = \beta + \gamma$ , то  $\angle ACB' = \tau + \alpha = \frac{\pi}{2}$  и площадь треугольника  $ABC$  максимальна.

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) См. рис. 3.

(0)  $\Leftrightarrow$  (3) Применим *евклидову* теорему синусов к *евклидовому* треугольнику  $AB'E$ . Имеем  $\frac{AB'_E}{\sin \angle ACB'} = \frac{AC_E}{\sin \tau}$ , где через  $AB'_E$  и  $AC_E$  обозначены *евклидовы* длины *евклидовых* отрезков  $AB'$  и  $AC$  соответственно. Известно (см. [6]), что евклидова длина  $l$  и неевклидова длина  $\rho$  отрезка, один из концов которого совпадает с центром модели Пуанкаре, связаны формулой  $l = \operatorname{th} \frac{\rho}{2}$ , поэтому  $AC_E = \operatorname{th} \frac{b}{2}$  и  $AB'_E = \frac{1}{AB_E} = \frac{1}{\operatorname{th} \frac{c}{2}}$ . Подставляя

эти значения в предыдущее равенство, получаем  $\sin \angle ACB' = \frac{\sin \frac{S}{2}}{\operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2}}$ .

Поэтому треугольник  $ABC$  имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда  $\sin \frac{S}{2} = \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2}$ .

(0)  $\Leftrightarrow$  (4) Рассмотрим *евклидов* треугольник  $AB'E$ . Если гиперболический треугольник  $ABC$  имеет максимальную площадь, то  $\cos \alpha = \frac{AC_E}{AB'_E} = \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2}$ . Обратно, если выполнено равенство  $\cos \alpha = \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2}$ , то *евклидов* угол  $\angle ACB'$  прямой и площадь неевклидова треугольника  $ABC$  максимальна.

(4)  $\Leftrightarrow$  (5) Для доказательства воспользуемся *неевклидовой теоремой косинусов*:  $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha$ . Подставляя значение  $\cos \alpha$  из (4), после упрощений получаем (5). Аналогично доказывается и обратная импликация.  $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4. Используя аналог ключевой теоремы для сферы (см. упражнение 3), постройте *сферический треугольник максимальной площади* (см. также [9]). Попробуйте также найти аналоги свойств (1)–(5) для этого треугольника.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Рассмотрим *евклидов* остроугольный треугольник  $APQ$  и проведём в нем высоты  $PB$  и  $QC$ . Докажите, что *неевклидов* треугольник  $ABC$  имеет максимальную площадь

а) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости относительно прямой  $PQ$  (рис. 4);

б) в модели Пуанкаре внутри окружности с центром в точке  $A$ , ортогональной описанной окружности четырёхугольника  $PCBQ$  (рис. 5).

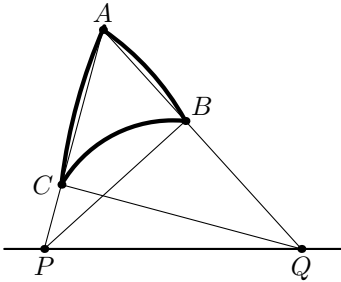


Рис. 4.

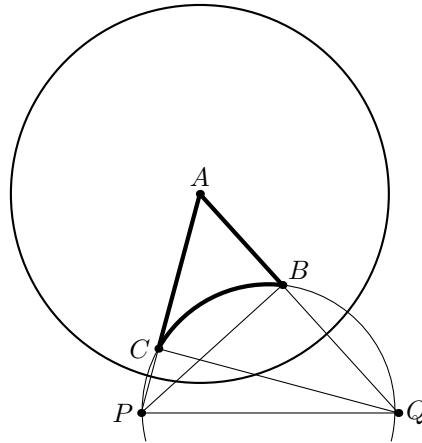


Рис. 5.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Когда  $b, c \rightarrow 0$ , свойства (1)–(5) из теоремы 1 переходят в соответствующие евклидовы свойства (см. табл. 1), что ещё раз демонстрирует аналогию между треугольником максимальной площади и прямоугольным треугольником.

2. Если  $b, c \rightarrow \infty$ , то из свойства (4) следует, что угол  $\alpha$  стремится к 0 (рис. 7), в то время как в евклидовом прямоугольном треугольнике  $\alpha = \frac{\pi}{2} = \text{const}$  (рис. 6). Этот факт наиболее ярко отражает разницу между прямоугольным треугольником и треугольником максимальной площади.

3. Формулу (5) можно назвать *неевклидовой теоремой Пифагора*, так как она имеет тот же вид, что и в геометрии Евклида, с той оговоркой, что в ней присутствуют не стороны, а гиперболические синусы от их половин.

Ключевая теорема и формула  $AB_E = \text{th} \frac{c}{2}$  объясняют, почему во многих формулах, связанных с площадью треугольника, встречаются именно половина площади и половины сторон.

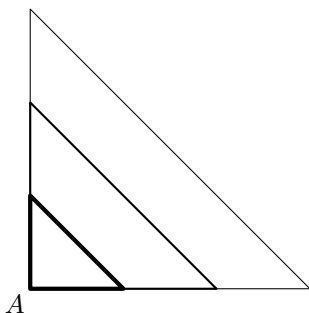


Рис. 6.

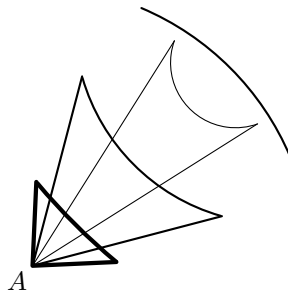


Рис. 7.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Используя доказательство равносильности свойств (0) и (3), докажите формулу

$$\operatorname{ctg} \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{cth} \frac{b}{2} \operatorname{cth} \frac{c}{2} - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

для вычисления площади произвольного неевклидова треугольника через две стороны и угол между ними. Используя ключевую теорему, попробуйте также доказать другие неевклидовы формулы, связанные с площадью треугольника (см. [1, 6]).

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ: ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Пользуясь свойствами треугольника максимальной площади, можно решить аналог так называемой изопериметрической задачи: *какой будет фигура максимальной площади при заданном периметре?* В геометрии Евклида ответ хорошо известен: эта фигура является кругом (см. [4, 7]). Оказывается, что в геометрии Лобачевского решением этой задачи также является круг (см. также [10]).

**ТЕОРЕМА 2.** *В геометрии Лобачевского фигурой максимальной площади с заданным периметром является круг.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Мы построим доказательство аналогично евклидовому доказательству, предложенному Штейнером (см. [4, 7]). Пусть  $F$  — искомая фигура с площадью  $S$  и периметром  $L$  (доказательство существования такой фигуры в геометрии Лобачевского аналогично доказательству для евклидовой геометрии; см. [7]).

Так же, как в евклидовой геометрии (см. [7]) доказывается, что фигура  $F$  выпукла, и отрезок  $BC$ , который делит периметр фигуры  $F$  пополам, делит и её площадь пополам. Назовём такой отрезок *диаметром*.

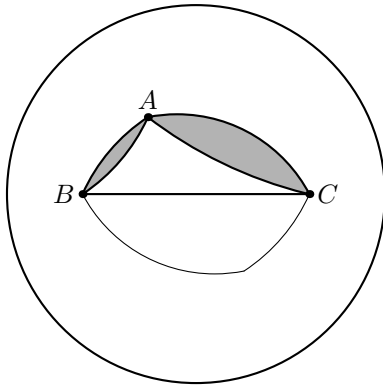


Рис. 8.

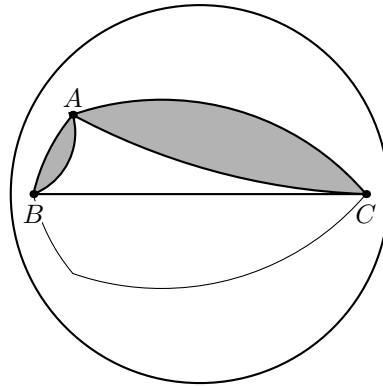


Рис. 9.

Пусть теперь  $A$  — произвольная точка границы фигуры  $F$  и  $BC$  — диаметр фигуры  $F$  (рис. 8). Докажем, что треугольник  $ABC$  имеет максимальную площадь. Предположим противное. Рассмотрим половину фигуры  $F$ , отсекаемую диаметром  $BC$  и содержащую точку  $A$ . Её площадь будет состоять из площади треугольника  $ABC$  и площадей двух оставшихся сегментов, прикреплённых к сторонам  $AB$  и  $AC$ . Если двигать стороны  $AB$  и  $AC$ , меняя угол между ними, то половина площади  $F$  будет меняться, причём сегменты будут двигаться вместе со сторонами, тем самым сохраняя периметр  $L/2$ . Таким образом можно добиться, чтобы площадь треугольника  $ABC$  стала максимальной (рис. 9). Тогда отразим полученную фигуру относительно диаметра  $BC$  и получим новую фигуру  $F'$  периметра  $L$  и с площадью большей  $S$  — противоречие.

Итак, для любой точки  $A$  границы фигуры  $F$  площадь треугольника  $ABC$  максимальна. По свойству (2) теоремы 1 имеем  $OA = OB = OC = \text{const}$ , а значит, фигура  $F$  является кругом с диаметром  $BC$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бибииков П. В., Ткаченко И. В. *О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 11, 2007. С. 113–126.
- [2] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. М.: Физматлит, 2003.
- [3] Заславский А. А. *Геометрические преобразования*. М.: МЦНМО, 2003.
- [4] Крыжановский Д. А. *Изопериметры*. М.: Физматгиз, 1959.

- [5] Норден А. П. *Элементарное введение в геометрию Лобачевского*. М.: ГИИТЛ, 1953.
- [6] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского*. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.
- [7] Протасов В. Ю. *Максимумы и минимумы в геометрии*. М.: МЦНМО, 2005.
- [8] Шварцман О. В. *Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко «О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского»* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 11, 2007. С. 127–130.
- [9] Maehara H. *The problem of thirteen spheres — a proof for undergraduates* // European Journal of Combinatorics **28**, 2007. P. 1770–1778.
- [10] Schmidt E. *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl* // Math. Z. V. 49, 1943. P. 1–109.

## О реализации расстояний

Ф. В. Петров      С. Е. Рукшин

Если подмножество  $A$  некоторой абелевой группы достаточно большое, то часто можно утверждать, что разностное множество  $A - A$  «ещё больше» — в том смысле, что удовлетворяет куда более сильным требованиям, чем  $A$ . Известное утверждение такого рода — теорема Штейнгауза: если множество  $A \subset \mathbb{R}^d$  имеет положительную меру Лебега, то  $A - A$  имеет 0 внутренней точкой. Мы поговорим об обобщениях этой теоремы в различных направлениях.

Начнём со следующего определения (ничуть не канонического).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Будем говорить, что множество  $M \subset \mathbb{R}^d$  является *штейнгаузовским*, если  $D(M) := M - M = \{x - y \mid x, y \in M\}$  имеет 0 внутренней точкой. Если  $K$  — некоторое ограниченное выпуклое множество в  $\mathbb{R}^d$ , то множество  $M$  называется  *$K$ -штейнгаузовским*, если для некоторого множества  $K_1$ , гомотетичного или равного  $K$ ,  $D(M \cap K_1) = D(K_1)$ .

Иными словами, любой вектор, соединяющий две точки множества  $K_1$ , реализуется как вектор, соединяющий две точки из  $M \cap K_1$ . В одномерном случае можно говорить не о векторах, а просто о расстояниях между точками множества.

Следующие факты известны:

**ТЕОРЕМА 1.** i) (Г. Штейнгауз, 1920 [6]). *Множество положительной внутренней лебеговой меры в  $\mathbb{R}^d$  является штейнгаузовским.*

ii) (Х. Миллер, 1990 [5]). *Множество положительной меры на прямой является  $I$ -штейнгаузовским, если  $I$  — интервал, полуинтервал или отрезок.*

Строго говоря, Штейнгауз рассматривал измеримые множества положительной меры, но очевидно, что тем самым была доказана и теорема для всех их надмножеств, то есть для всех множеств положительной внутренней меры.

Мы поговорим о возможных обобщениях теоремы Штейнгауза на случай множеств, больших в других возможных смыслах этого слова; и теоремы Миллера на случай меры Лебега в большей размерности.



Один из способов сказать, что множество является большим, не прибегая к понятию меры, таков: если все пространство разбито на конечное количество множеств, то одно из них в каком-то смысле большое. Тут трудно не вспомнить знаменитую теорему Ван дер Вардена: если натуральные числа разбиты на конечное количество частей, то одна из них содержит сколь угодно длинную арифметическую прогрессию. Аналог этого утверждения для «меры» называется теоремой Семереди и оказывается гораздо более сложным фактом, чем теорема Ван дер Вардена: множество натуральных чисел положительной нижней плотности (то есть такое, которое содержит хотя бы  $\text{const} \cdot N$  чисел из первых  $N$ ) также обязано содержать сколь угодно длинную арифметическую прогрессию. Казалось бы, утверждение Штейнгауза для разбиения прямой на части тоже должно быть только проще, чем для меры. И ясно, что если части разбиения измеримы, то оно является непосредственным следствием. Однако оказывается, что все наоборот: для разбиений не то что не проще, а прямо таки неверно! Аксиома выбора, позволяющая строить неизмеримые множества, делает неверными для всех множеств и многие теоремы, верные для измеримых множеств. Эта не исключение.

**ТЕОРЕМА 2.** *Прямую можно представить в виде дизъюнктного объединения двух (равных) множеств  $A$  и  $B = \mathbb{R} \setminus A$ , ни одно из которых не является штейнгаузовским.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Построим сходящуюся к нулю последовательность  $e_1 > e_2 > e_3 > \dots$  положительных чисел такую, что  $\sum_{i=1}^n r_i e_i \neq 0$  при не равных одновременно нулю рациональных  $r_i$  (иными словами, выберем  $e_i$  рационально независимыми над  $\mathbb{Q}$ ). Это можно сделать из соображений мощности (если выбраны элементы  $e_1, e_2, \dots, e_k$ , то можно взять любой  $e_{k+1} \in (0, e_k/2)$ , кроме счётного количества запрещённых элементов). Можно предъявить такую последовательность и явно:  $e_k := 1/\sqrt{p_k}$ , где  $p_k - k$ -е простое число. Доказательство в этом случае не просто, см. [2, задача 6.20].

Так или иначе, конструктивная часть на этом всё равно заканчивается, а начинается аксиома выбора. Назовём два вещественных числа эквивалентными, если их разность представима как линейная комбинация чисел  $e_i$  с целыми коэффициентами. Очевидно, это отношение эквивалентности, так что прямая представляется как объединение классов эквивалентности  $\mathbb{R} = \bigsqcup R_\alpha$ . Пользуясь аксиомой выбора, выберем в каждом классе эквивалентности  $R_\alpha$  элемент  $r_\alpha \in R_\alpha$ . Теперь определим  $A$  как множество тех  $x \in \mathbb{R}$ , которые представимы в виде

$$r_\alpha + \sum_{i=1}^n m_i e_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad 2 \mid \sum_{i=1}^n m_i.$$

Легко видеть, что множество  $B := \mathbb{R} \setminus A$  задаётся аналогичным образом, но с нечётной суммой коэффициентов  $\sum m_i$ . Так же ясно, что  $B = A + e_1$ , то есть множества  $A$  и  $B$  совмещаются параллельным переносом, и что множество  $A - A$  не содержит ни одного из чисел  $e_1, e_2, \dots$ . Следовательно,  $0$  не является для  $A - A$  внутренней точкой.  $\square$

Совершенно аналогично можно построить разбиение прямой на два равных множества, для каждого из которых разность  $A - A$  не имеет внутренних точек, надо лишь выбрать последовательность  $e_i$  не сходящейся к нулю, а всюду плотной.

Дело меняется, если вместо разностей рассматривать чуть более хитрые комбинации вида  $x + y - z$ .

**ТЕОРЕМА 3.** *Если  $\mathbb{R} = A \cup B$ , то одно из множеств  $A + A - A$ ,  $B + B - B$  совпадает с  $\mathbb{R}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим противное, пусть  $r \notin A + A - A$ ,  $s \notin B + B - B$ . Тогда  $r \notin A$ ,  $s \notin B$ , следовательно  $r \in B$ ,  $s \in A$ . Если например  $(r + s)/2 \in A$ , то  $r = (r + s)/2 + (r + s)/2 - s \in A + A - A$  — противоречие.  $\square$

Интересно было бы разобраться, что происходит при разбиении прямой на большее, чем 2, количество частей. Мы не знаем полного или хотя бы удовлетворительного ответа.

Отметим следующие следствия из теоремы 2.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *Существует множество  $A \subset \mathbb{R}$  полной внешней лебеговой меры (то есть дополнение которого имеет нулевую внутреннюю лебеговую меру), не являющееся штейнгаузовским.*

**СЛЕДСТВИЕ 2.** *Существует множество  $A \subset \mathbb{R}$  второй категории Бэра (то есть не представимое в виде счётного объединения нигде не плотных), не являющееся штейнгаузовским.*

Однако более сильное категорное требование влечёт свойство Штейнгауза.

**ТЕОРЕМА 4.** *Если  $A \subset \mathbb{R}$  и  $\mathbb{R} \setminus A$  — первой категории (счётное объединение нигде не плотных), то  $A - A = \mathbb{R}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для произвольного  $a > 0$  множество  $A \cap (A - a)$  — второй категории, а потому не пусто, откуда получаем, что  $a \in A - A$ .  $\square$

Аналогично доказывается, что если  $A = \Delta \setminus E$ , где  $\Delta$  — некоторый интервал, а  $E$  первой категории, то  $D(A) = D(\Delta)$ .

Вернёмся к мере Лебега.

Напомним важный классический результат.

ТЕОРЕМА 5 (ЛЕБЕГА О ТОЧКАХ ПЛОТНОСТИ). Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  — измеримое множество положительной меры Лебега  $|A| > 0$ . Обозначим для измеримого множества положительной меры  $\Delta \subset \mathbb{R}$  через

$$f_A(\Delta) = |A \cap \Delta|/|\Delta|$$

долю, которую  $A$  занимает в  $\Delta$ . Для почти всех  $x \in A$  нижняя плотность

$$\text{ld}_A(x) := \liminf_{t \rightarrow +0} f_A((x-t, x+t))$$

равна 1.

Доказательство см. напр. в [1]. Ясно, что для точки плотности  $x$  имеет место  $\lim f_A(P) = 1$  для всех промежутков  $P$ , содержащих  $x$ , размеры которых стремятся к нулю.

Следующая теорема усиливает результат Миллера, показывая, во-первых, что в достаточном большом по мере множестве интервал реализации расстояний можно выбрать достаточно большим, а во-вторых, что центром штейнгаузовского интервала реализации расстояний можно выбрать любую точку, в которой нижняя плотность множества  $A$  больше половины.

ТЕОРЕМА 6 (МАЛИННИКОВА, РУКШИН [3]). (i) Пусть  $\Delta \subset \mathbb{R}$  — интервал,  $A \subset \mathbb{R}$  — измеримое множество,  $|A \cap \Delta| = |\Delta|/2 + c$ ,  $c > 0$ . Тогда найдётся такой подинтервал  $\Delta_1 \subset \Delta$ , что  $|\Delta_1| \geq 2c$  и  $D(A \cap \Delta_1) = D(\Delta_1)$ .

(ii) Пусть  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $\text{ld}_A(x_0) > 1/2$ . Тогда для некоторого интервала  $\Delta$  с центром в точке  $x_0$  выполнено  $D(A \cap \Delta) = D(\Delta)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Назовём хорошим интервал  $I \subset \Delta$ , если  $|I \cap A| \geq |I|/2 + c$ . Из всех хороших интервалов выберем интервал наименьшей длины. Заметим, что он существует, так как множество хороших интервалов в фазовом пространстве замкнуто (иными словами, если интервалы  $(x_n, y_n)$  таковы,  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ , то интервал  $(x, y)$  тоже подходит). Обозначим наименьший хороший интервал  $\Delta_1$ . Очевидно, он не пуст и более того,  $|\Delta_1| \geq 2c$ . Докажем, что  $D(A \cap \Delta_1) = D(\Delta_1)$ . Пусть, не умаляя общности,  $\Delta_1 = (-a, a)$ . Выберем  $p \in (0, 2a)$  и докажем, что  $p \in D(A \cap (-a, a))$ . Предположим противное. Тогда  $f_A((-a, a-p)) + f_A((p-a, a)) \leq 1/2$ , иначе по принципу Дирихле при сдвиге на  $p$  некоторая точка из множества  $A \cap (-a, a-p)$  перейдёт в точку из  $A \cap (p-a, a)$  и получится, что  $p \in D(A \cap (-a, a))$  — противоречие. Теперь разберем два случая.

1)  $p > a$ . Тогда

$$2a - p \geq |A \cap (-a, a-p)| + |A \cap (p-a, a)|,$$

откуда

$$\begin{aligned} |A \cap (a - p, p - a)| &= |A \cap (a, a)| - |A \cap (-a, a - p)| - |A \cap (p - a, a)| \geq \\ &\geq a + c - (2a - p) = (p - a) + c, \end{aligned}$$

то есть интервал  $(a - p, p - a)$  тоже хороший — противоречие.

2)  $p \leq a$ . Тогда

$$\begin{aligned} |A \cap (-a, p - a)| + |A \cap (a - p, a)| &= \\ = 2|A \cap (-a, a)| - |A \cap (-a, a - p)| - |A \cap (p - a, a)| &\geq \\ \geq 2(a + c) - (2a - p) = p + 2c, \end{aligned}$$

так что один из интервалов  $(-a, p - a)$ ,  $(a - p, a)$  является хорошим. Опять противоречие.

(ii) Не умаляя общности,  $x_0 = 0$ . Пользуясь тем, что  $\text{ld}_A(0) > 1/2$ , выберем  $b > 0$  такое, что  $f_A((-t, t)) > 1/2$  для  $0 < t \leq b$ . Рассмотрим множество  $B$  тех  $t \in (0, b)$ , для которых  $f_A((-b, -t) \cup (t, b)) \leq 1/2$ . Для удобства будем также считать, что  $b \in B$ . Тогда ясно, что  $B$  замкнуто. Кроме того, ясно, что достаточно маленькие  $t$  не лежат в  $B$ , так как  $\lim_{t \rightarrow 0} f_A((-b, -t) \cup (t, b)) = f_A((-b, b)) > 1/2$ . Положим  $a = \inf B$ . Докажем, что интервал  $\Delta = (-a, a)$  искомый. Это вполне аналогично доказательству пункта (i). Выберем  $p \in (0, 2a)$  и докажем, что  $p \in D(A \cap (-a, a))$ . Как и в (i), рассмотрим два случая.

1)  $p \geq a$ . Тогда

$$2a - p \geq |A \cap (-a, a - p)| + |A \cap (p - a, a)|.$$

По выбору точки  $a$  имеем также

$$b - a \geq |A \cap (-b, -a)| + |A \cap (a, b)|.$$

Складывая, получаем

$$a + b - p \geq |A \cap (-b, a - p)| + |A \cap (p - a, b)|.$$

Значит, точка  $p - a < a = \inf B$  лежит в множестве  $B$  — противоречие.

2)  $p \leq a$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2a - p \geq |A \cap (-a, a - p)| + |A \cap (p - a, a)| &= \\ = |A \cap (-a, a)| + |A \cap (p - a, a - p)| &> 2a - p, \end{aligned}$$

так как  $|A \cap (-t, t)| > t$  для  $t < b$ . Противоречие.  $\square$

Важной для изучения бóльшей размерности будет следующая теорема, обобщающая теорему Лебега о точках плотности.

ТЕОРЕМА 7. Если  $A \subset \mathbb{R}^d$  — измеримое множество положительной меры, то для почти всех точек  $x \in A$  имеет место предельное соотношение

$$\lim_P \frac{|A \cap P|}{|P|} = 1,$$

где  $|\cdot|$  обозначает меру Лебега в  $\mathbb{R}^d$ ,  $P$  — параллелепипеды с рёбрами, параллельными осям координат, содержащие  $x$ , размеры  $P$  стремятся к нулю.

Различие с обычной теоремой Лебега, в которой в качестве  $P$  берутся квадраты (или круги — это не важно), в том, что отношение длин рёбер  $P$  может быть сколь угодно большим. В одномерном случае никаких отличий нет.

Теорема 7 несложно следует из одномерного варианта. Приведём набросок доказательства в размерности 2. Сначала замечаем, что почти все точки являются точками «вертикальной» плотности, и для таких точек вертикальной плотности почти все точки являются точками «горизонтальной» плотности. Интегрируя это обстоятельство, получаем требуемое. Тут надо ещё разобраться с измеримостью, но мы этим заниматься не будем, а отошлём читателя к [4].

Пусть  $B$  — замкнутый,  $C$  — открытый круг на плоскости. Существует множество полной лебеговой меры, не являющееся  $B$ -штейнгаузовским (достаточно рассмотреть множество  $M_r$  точек, у которых первая координата иррациональна). Однако, если  $M$  — множество полной лебеговой меры, то  $D(A \cap M) = D(A)$  для любого открытого множества  $A$  (рассмотрим произвольный вектор  $x \in D(A)$ , маленькие круги  $C_1, C_2 \subset A$  такие, что  $C_2 = x + C_1$ . Тогда  $C_1 \cap M$  и  $(C_2 \cap M) - x$  — два множества полной меры в  $C_1$ , они должны пересечься).

Если  $J$  — открытый круг, то существует множество положительной лебеговой меры, не являющееся  $J$ -штейнгаузовым. Достаточно взять замкнутое подмножество положительной меры из множества  $M_r$ .

В предыдущих двумерных рассуждениях можно заменить круг на треугольник, произвольное выпуклое множество без прямых участков на границе или на многоугольник, стороны которого не разбиваются на пары параллельных.

Рассмотрим в этой связи самый естественный из оставшихся объектов — параллелограмм. Аффинным преобразованием сведём дело к случаю квадрата.

ТЕОРЕМА 8. Пусть  $Q$  — квадрат (замкнутый или открытый) на плоскости. Тогда любое множество  $A$  положительной лебеговой меры на плоскости является  $Q$ -штейнгаузовским.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не умаляя общности,  $A$  замкнуто (можно заменить  $A$  на замкнутое подмножество положительной меры), а  $Q$  — открытый квадрат. В самом деле, для замкнутого квадрата  $Q_1$  множество  $D(A \cap Q_1)$  замкнуто, так что если  $D(A \cap Q_1) \supset D(\text{Int}Q_1)$ , то  $D(A \cap Q_1) = D(Q_1)$ . Введём декартовы координаты так, чтобы стороны  $Q$  были параллельны осям.

Для каждого натурального  $n$  рассмотрим множество  $A_n$  тех  $x \in A$ , для которых

$$|A \cap P| > 0,99 \cdot |P|$$

для всех прямоугольников  $P$ , стороны которых параллельны осям, диаметра меньше  $1/n$ .

Легко видеть, что множества  $A_n$  замкнуты и по теореме 7  $|\cup A_n| = |A| > 0$ . Так что можно выбрать такое  $N$ , что  $|A_N| > 0$ . Известно, что тогда для некоторого квадрата  $Q_1$ , гомотетичного  $Q$ ,  $|A_N \cap Q_1| > 0,99 \cdot |Q_1|$ . (Так как множество  $A_N$  аппроксимируется сверху по мере открытым, а открытое снизу — дизъюнктивным объединением ячеек, гомотетичных  $Q$ . В одной из этих ячеек наше множество  $A_N$  и должно занимать хотя бы 99 процентов меры.) Разобьём  $Q_1$  на много равных квадратиков диаметра меньше, чем  $1/N$ , один из них обладает тем же свойством, что хотя бы 99 процентов его точек лежат в  $A_N$ . Обозначим его  $Q_2$ , пусть сторона  $Q_2$  равна  $2a$ , и разобьём  $Q_2$  на четыре равных квадратика  $Q_3$ ,  $Q_4 = Q_3 + (a, 0)$ ,  $Q_5 = Q_3 + (0, a)$ ,  $Q_6 = Q_3 + (a, a)$ . Выберем в  $Q_3$  случайную (согласно мере Лебега) точку  $x$  и рассмотрим точки  $x$ ,  $x + (a, 0) \in Q_4$ ,  $x + (0, a) \in Q_5$ ,  $x + (a, a) \in Q_6$ . Каждая из них лежит в  $A_N$  с вероятностью хотя бы 96 процентов. Поэтому с положительной вероятностью все они лежат в  $A_N$ .

Итак, мы нашли квадрат  $Q_7$  с левым нижним углом  $x$  и стороной  $a < 1/2N$ , все углы которого лежат в  $A_N$ . Докажем, что  $D(A \cap Q_7) = D(Q_7) = (-a, a)^2$ . Рассмотрим произвольный вектор  $(p, q) \in (-a, a)^2$ . Не умаляя общности,  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$ . Тогда рассмотрим прямоугольники  $\Delta_1 = x + (0, a-p) \times (0, a-q)$  (с левым нижним углом  $x$ ) и  $\Delta_2 = x + (p, a) \times (q, a)$  (с левым верхним углом  $x + (a, a)$ ). По определению множества  $A_N$  каждый из них состоит хотя бы на 99 процентов из точек множества  $A$ . Значит, при параллельном переносе на вектор  $(p, q)$  некоторая точка  $\Delta_1 \cap A$  переедет в точку  $\Delta_2 \cap A$ . Следовательно,  $(p, q) \in D(A \cap Q_7)$ .  $\square$

Назовём множество  $S \subset \mathbb{R}^d$  удобным, если любое множество положительной меры Лебега является  $S$ -штейнгаузовским. Аналогично доказывается, что куб является удобным множеством в  $\mathbb{R}^d$ . Было бы любопытно получить ясную характеристику удобных множеств (хотя бы в предположении выпуклости и компактности).

Также было бы интересно получить аналоги теоремы 4 в старшей размерности, хотя бы для квадратов на плоскости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. П. Натансон. *Теория функций вещественной переменной*. Любое издание.
- [2] В. В. Прасолов. *Задачи по алгебре, арифметике и анализу*. М.: МЦНМО, 2007.
- [3] Е. В. Малинникова, С. Е. Рукшин. *О реализации расстояний точками измеримых множеств* // Ученые записки ЛГООУ, серия «Математика и информатика». Т. 1, 1998. С. 63–65.
- [4] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund. *Note on the differentiability of multiple integrals* // Fund. Math. Vol. 25, 1935. P. 217–234.
- [5] H. Miller. *Two results in classical measure theory* // Jour. of Math. Anal. and App. Vol. 151, iss. 1, 1990. P. 203–207.
- [6] H. Steinhaus. *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive* // Fund. Math. Vol. 1, 1920. P. 93–104.

---

Ф. В. Петров, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

С. Е. Рукшин, Российский Государственный Педагогический Университет им. Герцена

## Теорема Лиувилля для субгармонических функций на $\mathbb{Z}^2$

Н. Николов

Теорема Лиувилля утверждает, что каждая ограниченная (снизу или сверху) гармоническая функция на  $\mathbb{R}^n$  является константой. Кроме того, каждая ограниченная сверху субгармоническая функция на  $\mathbb{R}^2$  является константой. Этот результат неверен для  $\mathbb{R}^n$  при  $n \geq 3$ .

Эти утверждения имеют дискретные аналоги (см. напр. [3, 4]). В этой заметке мы рассмотрим дискретные аналоги субгармонических функций.

Пусть  $\mathbb{Z}^2$  — множество пар целых чисел. Далее мы при необходимости отождествляем пару  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  с гауссовым числом  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

Функция  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  называется *субгармонической*, если для каждой пары  $z = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ,

$$0 \leq 4\Delta_{\mathbb{Z}^2} f(z) := f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y).$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** *Каждая ограниченная сверху субгармоническая функция  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  является константой.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для функции  $g(z) = \ln(|z|^2 - 1)$  нетрудно проверить, что  $\Delta_{\mathbb{Z}^2} g(z) < 0$  для  $|z| > 2$ . Эту функцию легко можно доопределить на всём  $\mathbb{Z}^2$  так, чтобы  $\Delta_{\mathbb{Z}^2} g(z) < 0$  для  $z \neq 0$  (например,  $g(0) = \ln a$  и  $g(z) = \ln b$  для  $|z| = 1$ , где  $0 < 3a < b^4$  и  $0 < 4b < 1$ ).

Для  $\varepsilon > 0$  положим  $f_\varepsilon = f - \varepsilon g$ . Так как  $\lim_{z \rightarrow \infty} f_\varepsilon(z) = -\infty$ , то  $f_\varepsilon$  имеет максимум  $M_\varepsilon$ . Если  $z \neq 0$ , то из  $\Delta_{\mathbb{Z}^2} f_\varepsilon(z) > 0$  вытекает, что  $f_\varepsilon(z) < M_\varepsilon$ . Значит,  $f_\varepsilon(0) = M_\varepsilon$  и отсюда  $f(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon = M := \sup f$ . Тогда из  $\Delta_{\mathbb{Z}^2} f(z) \geq 0$  следует, что  $f(z) = M$  для каждого из четырёх соседей 0. Продолжая таким образом, заключаем, что  $f(z) = M$  для всех  $z$ .  $\square$

Аналогично  $\mathbb{Z}^2$ , можно определить понятие субгармонической функции на  $\mathbb{Z}^n$  и оператора Лапласа  $\Delta_{\mathbb{Z}^n}$ . Предоставляем читателю доказать, что утверждение 1 справедливо и для  $\mathbb{Z}$  (см. ниже для более общего случая). С другой стороны, для  $n \geq 3$  существует единственная функция (Грина)  $g_n: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  со следующими свойствами:

$$(i) \Delta_{\mathbb{Z}^n} g_n(0) = 1; \quad (ii) \Delta_{\mathbb{Z}^n} g_n(z) = 0 \text{ при } z \neq 0; \quad (iii) \lim_{z \rightarrow \infty} g_n(z) = 0.$$



Единственность легко следует из принципа максимума, а существование доказывается при помощи формулы Фурье (см. напр. [5] для  $n = 3$ ):

$$g_n(z) = \frac{n}{\pi^n} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \frac{\sum_{k=1}^n \cos(zx_k)}{\sum_{k=1}^n \cos x_k - n} dx_1 \dots dx_n$$

(интеграл сходится только при  $n \geq 3$ ).

Следовательно, утверждение 1 неверно для  $\mathbb{Z}^n$  при  $n \geq 3$ . Тогда из доказательства утверждения 1 вытекает

**СЛЕДСТВИЕ.** Если  $n \geq 3$  и  $k > 0$ , то не существует такой функции  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\Delta_{\mathbb{Z}^n} f(z) \geq 0$  для  $|z| > k$  и  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = -\infty$ .

Теперь рассмотрим так называемые  $F$ -субгармонические функции на  $\mathbb{Z}^n$  при  $n = 1, 2$ .

Пусть  $F: \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1)$  — такая неотрицательная функция, что  $\mathcal{F} = \{k \in \mathbb{Z} : F(k) > 0\}$  — конечное множество, состоящее из попарно взаимно простых чисел,  $\sum_{k \in \mathcal{F}} F(k) = 1$  и  $\sum_{k \in \mathcal{F}} kF(k) = 0$ . Будем говорить, что  $f$  является  $F$ -субгармонической функцией на  $\mathbb{Z}$ , если для каждого  $z \in \mathbb{Z}$  выполняется

$$f(z) \leq \sum_{k \in \mathcal{F}} F(k)f(z+k).$$

Отметим, что это неравенство справедливо для каждой субгармонической функции  $f$  в  $\mathbb{Z}$  (т. е. такой функции, что  $2f(z) \leq f(z+1) + f(z-1)$ ), так как нетрудно показать, что субгармоническая функция на  $\mathbb{Z}$  удовлетворяет неравенству Йенсена и даже неравенству Фукса — см. [1] для выпуклых функций в интервале).

Далее, пусть  $F: \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0, 1)$  — такая неотрицательная функция, что  $\mathcal{F} = \{a \in \mathbb{Z}^2 : F(a) > 0\}$  — конечное множество, для которого выполнены следующие свойства:

- (i)  $\sum_{a \in \mathcal{F}} F(a) = 1$ ;
- (ii) если  $a \in \mathcal{F}$ , то  $-a \in \mathcal{F}$  и  $ia \in \mathcal{F}$ ;
- (iii) множество  $\mathcal{F} \cap \{\text{Im } z = 0\}$  непусто и состоит из попарно взаимно простых чисел.

Будем говорить, что  $f$  является  $F$ -субгармонической функцией на  $\mathbb{Z}^2$ , если для каждого  $z \in \mathbb{Z}^2$  выполнено

$$f(z) \leq \sum_{a \in \mathcal{F}} F(a)f(z+a).$$

Следующее утверждение есть обобщение как утверждения 1, так и результата из [2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. а) Каждая  $F$ -субгармоническая функция  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{|z|} \leq 0,$$

является константой.

б) Каждая  $F$ -субгармоническая функция  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{\ln |z|} \leq 0,$$

является константой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как  $2|z| = |z - w| + |z + w|$  при  $|z| \geq |w|$ , то  $|z|$  является  $F$ -(суб)гармонической функцией при  $|t| \geq m = \max_{w \in \mathcal{F}} w$ . Тогда аналогично доказательству утверждения 1 можно показать, что  $\max_{[-m+1, m-1]} f = \sup f$ . Если  $f(z) = M$ , по индукции получаем, что  $f(z + \sum_{w \in \mathcal{F}} k_w w) = M$ , где  $k_w \in \mathbb{Z}^+$ . Сумма в скобках принимает все целые значения, так как среди чисел  $w \in \mathcal{F}$  есть хотя бы два числа противоположного знака и они взаимно просты по определению множества  $\mathcal{F}$ . Следовательно,  $f = M$ .

б) Доказательство аналогичное и основано на том, что функция  $g(z) = -\ln(|z|^2 - 4m^2)$  (строго)  $F$ -субгармоническая при  $|z|^2 \geq 56m^2$ . Это следует из неравенства

$$4g(z) < g(z + z_1) + g(z - z_1) + g(z + z_2) + g(z - z_2),$$

где  $z_1 = (a - b, b)$ ,  $z_2 = iz_1 = (-b, a - b)$  и  $0 \leq b \leq a \leq m$ . После несложных преобразований неравенство принимает вид

$$c^2(r - d)^2 + 2cd(r - d + c)^2 > 8((a - b)x + by)^2(-bx + (a - b)y)^2,$$

где  $r = |z|^2$ ,  $d = 4m^2$  и  $c = (a - b)^2 + b^2$ . Правая сторона последнего неравенства не больше, чем  $8c^2r^2$ , следовательно, достаточно доказать, что

$$c(r - d)^2 + 2d(r - d + c)^2 > 8cr^2.$$

Это неравенство эквивалентно

$$r[r(2d - 7c) - 2d(2d - c)] + d[2(d - c)^2 + cd] > 0.$$

Последнее очевидно, так как выражение в первых скобках неотрицательно в силу неравенств  $r \geq 14d$  и  $7(2d - 7c) \geq 2d - c > 0$  (т. е.  $d \geq 4c$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты оптимальные, как показывают примеры функций  $\varepsilon|z|: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\varepsilon \ln(|z|^2 + 1): \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\varepsilon > 0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Храбров А. И. *Вокруг монгольского неравенства* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 7. 2003. С. 149–162.
- [2] Богданов И. И., Челноков Г. Р. *Обобщенные супергармонические последовательности* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 10. 2006. С. 232–235.
- [3] Шольце П. *О неотрицательных гармонических последовательности на решетке* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 10. 2006. С. 236–242.
- [4] Слободник С. Г. *Дискретные положительные гармонические функции* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 11. 2007. С. 145–148.
- [5] Duffin R. J. *Discrete potential theory* // Duke Math. J. V. 20, no 2, 1953. P. 233–251.

## Экстремальная задача для матриц и теорема Безиковича о покрытии

А. Ф. Гришин      О. Ф. Крижановский

Находится минимальное число красок, необходимых для специальной раскраски рёбер полного графа. Вопрос сводится к некоторой экстремальной задаче для матриц. Эта задача появилась в связи с доказательством одного варианта теоремы Безиковича. Работа состоит из двух частей. В первой части решается экстремальная задача. Во второй части доказывается новый вариант теоремы Безиковича с использованием результата первой части.

Начнём с необходимых предварительных сведений. Начальные результаты теории графов изложены в [1]. Более продвинутым курсом является [2]. Мы будем рассматривать только неориентированные конечные простые графы, то есть графы без петель и параллельных рёбер, с фиксированной нумерацией вершин. Определение простого графа стандартно и взято из [2]. Петля — это ребро графа, соединяющее вершину с самой собой. Рёбра называются параллельными, если они соединяют одни и те же вершины.

Раскраска рёбер графа — это приписывание каждому ребру графа определённого цвета. В заметке цвета кодируются натуральными числами. Например: цвет 1, цвет 2. Раскраска называется правильной, если любые два смежных ребра (рёбра смежные, если они имеют общую вершину) имеют различный цвет. Известно, что для правильной раскраски полного графа порядка  $N$  необходима  $N - 1$  краска, если  $N$  чётное и  $N$  красок, если  $N$  нечётное [2, упражнение 9.7]. Граф называется полным, если любые две его вершины соединены ребром.

Пусть  $K_N$  — полный граф порядка  $N$  с вершинами как-то перенумерованными числами от 1 до  $N$ . Припишем ребру  $[i, k]$ , соединяющему  $i$ -ю вершину с  $k$ -й, цвет  $g_{i,k}$ . Тем самым мы производим раскраску рёбер графа. Поскольку граф неориентирован, то  $g_{i,k} = g_{k,i}$ . Припишем величинам  $g_{i,i}$  какие-либо численные значения. Величины  $g_{i,i}$  в дальнейших рассуждениях не участвуют, поэтому они могут выбираться произвольно. Мы получили матрицу  $G = (g_{i,k})$ ,  $i, k \in \overline{1, N}$ , которую будем называть матрицей раскраски рёбер графа. Это симметрическая матрица.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Раскраску рёбер графа  $K_N$  назовём *квазиправильной*, если для любой тройки чисел  $i, j, k$  такой, что  $1 \leq i < j < k \leq N$ , будет выполняться соотношение  $g_{i,j} \neq g_{j,k}$ .

Отметим, что при изменении нумерации вершин графа квазиправильная раскраска может перестать быть таковой. Поэтому понятие квази-правильной раскраски содержательно только для графов, для которых нумерация вершин возникает естественным образом.

В дальнейшем мы будем считать, что цвета  $g_{i,k}$  выбираются из промежутка  $\overline{1, n}$ . Тогда матрица  $G$  квазиправильной раскраски удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1)  $g_{i,k} \in \overline{1, n}$  при  $i \neq k$ ;
- 2) для любого  $i \in \overline{1, N}$  множества  $\{g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}\}$ ,  $\{g_{i,i+1}, \dots, g_{i,N}\}$  не пересекаются.

Обратите внимание, что при  $i = 1$  первое из выписанных множеств будет пустым, а при  $i = N$  будет пустым второе из выписанных множеств. Отметим также, что в обозначении множеств  $\{a_1, \dots, a_m\}$  мы допускаем повторяющиеся элементы. Например,  $\{1, 1, 3, 1, 5, 5\}$ ,  $\{1, 3, 1, 5, 3, 5\}$ ,  $\{1, 3, 5\}$  обозначают одно и то же множество.

ТЕОРЕМА 1. *Рёбра полного графа порядка  $N$  можно квазиправильно раскрасить  $n$  красками, где  $n$  — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству  $n \geq \log_2 N$ , и нельзя этого сделать меньшим числом красок.*

Доказательство теоремы прямо следует из следующей леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть  $n$  — произвольное натуральное число,  $G = (g_{i,k})$ ,  $i, k \in \overline{1, N}$  — симметрическая матрица, удовлетворяющая условиям 1), 2). Тогда  $N$  может принимать любое значение из промежутка  $\overline{1, 2^n}$ . Неравенство  $N > 2^n$  невозможно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица  $G$  удовлетворяет условиям 1), 2). Рассмотрим множества  $F_i = \{g_{i+1,i}, \dots, g_{N,i}\}$  при  $i \in \overline{1, N-1}$ . Это непустые множества. В силу условия 2) при  $i > 1$  элементы  $g_{i,1}, \dots, g_{i,i-1}$ , которые, соответственно, принадлежат множествам  $F_1, \dots, F_{i-1}$ , не принадлежат множеству  $F_i$ . Поэтому для различных  $i$  множества  $F_i$  различны. Так как  $F_i$  — это непустые подмножества множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , то  $N-1 \leq 2^n - 1$ , т.е.  $N \leq 2^n$ . Далее приведём пример матриц  $G_n$  порядка  $N = 2^n$ , обладающих свойствами 1), 2).

При  $n = 1, 2$  эти матрицы имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & 1 \\ 1 & g_{22} \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & g_{22} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & g_{11} & 2 \\ 1 & 1 & 2 & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Далее матрицы определяются следующим способом. Если матрица  $G_n$  уже найдена, то  $G_{n+1}$  строится как блочная матрица

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} H & H_1 \\ H_1 & H \end{pmatrix},$$

где блоки  $H$  и  $H_1$  имеют порядок  $2^n$ , блок  $H_1$  состоит из одних единиц, а блок  $H$  получается из матрицы  $G_n$  увеличением каждого её внедиагонального элемента на 1. Из того, что матрица  $G_n$  обладает свойствами 1), 2), и из того, что каждый внедиагональный элемент матрицы  $H$  строго больше единицы, а элементы матрицы  $H_1$  равны 1, следует, что матрица  $G_{n+1}$  обладает свойствами 1) и 2).

Если  $C_N = (g_{i,k})$ ,  $i, k \in \overline{1, N}$ ,  $N \leq 2^n$  — подматрица матрицы  $G_n$ , то  $C_N$  также обладает свойствами 1) и 2). Лемма доказана.  $\square$

В связи с понятием квазиправильной раскраски возникает задача, оставшаяся за рамками нашей работы. Пусть задан простой полный граф и некоторая раскраска его рёбер. Описать нумерации вершин графа, для которых эта раскраска будет квазиправильной. В частности, определить, существует ли хотя бы одна такая нумерация.

Различные результаты о раскраске графов приведены в [2, глава 9]. Там же можно найти дальнейшие ссылки.

\* \* \* \* \*

Переходим к следующему разделу заметки. Для куба  $Q$  с рёбрами, параллельными координатным осям, расположенного в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , мы будем применять и более информативное обозначение  $Q(x, r)$ , где  $x$  — центр куба,  $r$  — половина длины ребра. В этом случае  $Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x^s - y^s| \leq r, s = 1, 2, \dots, n\}$ . В заметке через  $a^s$  обозначается  $s$ -я координата вектора  $a \in \mathbb{R}^n$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $A$  — непустое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $r(x)$  — строго положительная функция на  $A$ . Рассматривается семейство кубов  $Q(x, r(x))$ ,  $x \in A$ . Тогда из этого семейства можно выделить конечную или бесконечную последовательность кубов  $Q_m$ ,  $m \leq \omega$ ,  $\omega \leq \infty$ , такую, что:

- 1)  $A \subset \bigcup_{m=1}^{\omega} Q_m$ ;
- 2) каждая точка  $y \in \mathbb{R}^n$  покрывается не более, чем  $4^n$  кубами из последовательности  $Q_m$ ;
- 3) последовательность  $Q_m$ , разбивается не более, чем на  $12^n + 1$  последовательность  $Q_m^p$ , причём для любого  $p$  последовательность  $Q_m^p$  состоит из попарно непересекающихся кубов.

**ЗАМЕЧАНИЯ.** Теорема 2 — это вариант теоремы Безиковича о покрытии. Оригинальная теорема Безиковича [3] отличается от теоремы 2 тем,

что в ней вместо семейства кубов  $Q(x, r)$  рассматривается семейство шаров  $B(x, r)$ , а в утверждениях 2) и 3) вместо констант  $4^n$ ,  $12^n + 1$  стоят неопределённые константы  $\theta_n$ ,  $\xi_n$ .

В книге М. Гусмана «Дифференцирование интегралов в  $\mathbb{R}^n$ » [4] содержится теорема 1.1, которая отличается от приводимой нами теоремы 2 тем, что в утверждениях 2) и 3) постоянные  $4^n$  и  $12^n + 1$  заменены на неопределённые постоянные  $\theta_n$  и  $\xi_n$ . Стоит отметить, что во всех встречавшихся до настоящего времени приложениях теоремы Безиковича важно существование постоянных  $\theta_n$ ,  $\xi_n$ , а не их величина.

Теорема 1.1 — наиболее часто цитируемый результат в книге [4]. Она существенно используется при доказательстве многих фактов вещественного анализа. Это касается, например, теорем Витали и Уитни о покрытиях, варианта Гусмана теоремы Сарда о критических точках, теоремы Лебега о дифференцировании интеграла, теорем о свойствах максимального оператора Харди – Литтлвуда. Об этом подробно написано в [4].

О важности теоремы Безиковича говорит и такой факт. Эту теорему переоткрыл Н. С. Ландкоф [5, 6]. В [6] это лемма 3.2, глава 3, §4. Ландкоф использовал доказанный им результат для оценок потенциалов.

Гусман в своей книге приводит и такой вариант теоремы Безиковича (теорема 1.2).

*Пусть  $A$  — непустое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $r(x)$  функция, определённая на  $A$  со значениями на множестве  $\{2^k : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Пусть  $Q(x, r(x))$ ,  $x \in A$ , — некоторое семейство кубов. Тогда из этого семейства можно выделить конечную или бесконечную последовательность кубов  $Q_m$ ,  $m \leq \omega$ ,  $\omega \leq \infty$ , такую, что:*

$$1) A \subset \bigcup_{m=1}^{\omega} Q_m;$$

2) каждая точка  $y \in \mathbb{R}^n$  покрывается не более, чем  $2^n$  кубами из последовательности  $Q_m$ ;

3) последовательность  $Q_m$  разбивается не более, чем на  $4^n + 1$  последовательность  $Q_m^p$ , причём для любого  $p$  последовательность  $Q_m^p$  состоит из попарно непересекающихся кубов.

Важным преимуществом этой теоремы является то, что она имеет достаточно короткое и прозрачное доказательство. Это получается за счёт дополнительного ограничения на функцию  $r(x)$ , которого нет в теореме 1.1 из [4].

Доказательство теоремы 1.1 проводится в [4] по схеме доказательства теоремы 1.2, но с некоторыми усложнениями. Отметим ещё, что в доказательстве теоремы 1.1 есть место, которое без восторга воспринимается читателем, особенно если этот читатель — лектор, решивший включить теорему в свой курс. Часть доказательства в качестве упражнения читателю

предлагается провести самому (речь идёт об аналоге свойства 5 из приводимого ниже доказательства).

Наше доказательство теоремы 2 — это дополнение к доказательству теоремы 1.1 в [4]. Оно частично совпадает с этим доказательством. Получение конкретных постоянных  $4^n$  и  $12^n + 1$  в теореме 2 достигается за счёт применения леммы 1. Точное значение постоянных  $\theta_n$  и  $\xi_n$  в теореме 1.1 из [4] неизвестно. Теорема 2 даёт оценки сверху:  $\theta_n \leq 4^n$ ,  $\xi_n \leq 12^n + 1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.** Обозначим  $R_0 = \sup\{r(x) : x \in A\}$ . Если  $R_0 = \infty$ , то утверждение теоремы тривиально. В этом случае найдётся куб  $Q(x, r(x))$ , который покрывает множество  $A$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $R_0 < \infty$ .

Далее по индукции строим следующую последовательность кубов  $Q_m = Q(x_m, r(x_m))$ . В качестве куба  $Q_1 = Q(x_1, r(x_1))$  берём такой куб, что  $r(x_1) > \frac{1}{2}R_0$ . Если куб  $Q_1$  покрывает  $A$ , то построение последовательности кубов уже закончено. В этом случае последовательность  $Q_m$  состоит из одного члена. Если же куб  $Q_1$  не покрывает  $A$ , то обозначим  $A_1 = A \setminus Q_1$ ,  $R_1 = \sup\{r(x) : x \in A_1\}$ . Далее в качестве куба  $Q_2 = Q(x_2, r(x_2))$  берём такой куб, что  $x_2 \in A_1$ ,  $r(x_2) > \frac{1}{2}R_1$ .

Пусть мы уже построили кубы  $Q_1, \dots, Q_s$ . Если  $A \subset \bigcup_{m=1}^s Q_m$ , то на этом построение последовательности  $Q_m$  заканчивается. В этом случае последовательность  $Q_m$  состоит из  $s$  членов. В противном случае определяем  $A_s = A \setminus \bigcup_{m=1}^s Q_m$ ,  $R_s = \sup\{r(x) : x \in A_s\}$ , и выбираем в качестве куба  $Q_{s+1} = Q(x_{s+1}, r(x_{s+1}))$  такой куб, что  $x_{s+1} \in A_s$ ,  $r(x_{s+1}) > \frac{1}{2}R_s$ . Отметим, что  $R_s$  — убывающая последовательность и что  $\frac{1}{2}R_s < r(x_{s+1}) \leq R_s$ . Эти факты будут использованы в дальнейшем.

В результате описанного процесса мы получаем конечную или бесконечную последовательность кубов  $Q_m$ . Справедливы следующие свойства последовательности  $Q_m$ .

1.  $x_{m+1} \notin \bigcup_{p=1}^m Q_p$ .
2. При различных  $m$  кубы  $Q(x_m, \frac{1}{3}r(x_m))$  не пересекаются.

Действительно, если  $y \in Q(x_i, \frac{1}{3}r(x_i)) \cap Q(x_j, \frac{1}{3}r(x_j))$ ,  $i < j$ , то для любого  $s \in \overline{1, n}$  будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} |x_i^s - x_j^s| &\leq |x_i^s - y^s| + |y^s - x_j^s| \leq \frac{1}{3}r(x_i) + \frac{1}{3}r(x_j) \leq \\ &\leq \frac{1}{3}r(x_i) + \frac{1}{3}R_{j-1} \leq \frac{1}{3}r(x_i) + \frac{1}{3}R_{i-1} < r(x_i). \end{aligned}$$



Из написанных неравенств следует, что  $x_j \in Q(x_i, r(x_i))$ . Это противоречит свойству 1. Тем самым свойство 2 доказано.

3. Если последовательность  $Q_m$  бесконечная, то  $\lim_{m \rightarrow \infty} r(x_m) = 0$ .

Докажем это. Пусть  $d = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\}$  — диаметр множества  $A$ . Здесь

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^k - y^k)^2}.$$

Пусть  $x_0 \in A$ . Каждый куб  $Q_m$  является частью куба  $Q = Q(x_0, d + R_0)$ .

Если свойство 3 не выполняется, то для некоторого  $\delta > 0$  неравенство  $r(x_m) \geq \delta$  будет выполняться для бесконечного числа значений  $m$ . Для таких  $m$  кубы  $Q(x_m, \frac{1}{3}\delta)$  не будут пересекаться и будут содержаться в кубе  $Q$ . Это невозможно. Тем самым свойство 3 доказано.

4.  $A \subset \bigcup_{m=1}^{\omega} Q_m$ .

Если  $\omega < \infty$ , то это соотношение выполняется в силу способа построения последовательности  $Q_m$ . Далее считаем, что  $\omega = \infty$ . Допустим, что утверждение неверно, и существует точка  $x \in A \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} Q(x_m, r(x_m))$ . В силу свойства 3 существует  $m_0$  такое, что для всех  $m \geq m_0$  будут выполняться неравенства  $r(x_m) < \frac{1}{2}r(x) \leq \frac{1}{2}R_{m-1}$ . Это противоречит способу выбора точки  $x_m$ . Свойство 4 доказано.

5. Каждая точка  $y \in \mathbb{R}^n$  покрывается не более чем  $4^n$  кубами из последовательности  $Q_m$ .

Поскольку формулировка теоремы допускает замену множества  $A$  на его сдвиг  $a+A$  с любым  $a \in \mathbb{R}^n$ , то можно считать, что  $y = 0$ . Пространство  $\mathbb{R}^n$  разбивается в объединение  $2^n$  гипероктантов. Оценим количество кубов  $Q(x_m, r(x_m))$ , которые покрывают точку 0, и центры которых расположены в положительном гипероктанте. Последнее означает, что выполняются неравенства  $x_m^s \geq 0$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть кубы  $Q(x_{\nu_p}, r(x_{\nu_p})) = Q(y_p, r(y_p))$ ,  $p = 1, 2, \dots, N$ , с центрами, расположенными в положительном гипероктанте, таковы, что  $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_N$  и точка 0 принадлежит всем этим кубам. Пусть  $1 \leq i < j \leq N$ . Поскольку  $y_j \notin Q(y_i, r(y_i))$ , то существует число  $s = s(i, j) \in \overline{1, n}$  такое, что не выполняется цепочка неравенств  $y_i^s - r(y_i) \leq y_j^s \leq y_i^s + r(y_i)$ . Так как  $0 \in Q(y_i, r(y_i))$ , то  $y_i^s - r(y_i) \leq 0$  и неравенство  $y_i^s - r(y_i) \leq y_j^s$  выполняется для любых  $s$ . Поэтому выполняется неравенство  $y_j^{s(i,j)} > y_i^{s(i,j)} + r(y_i)$ .

Пусть теперь  $1 \leq i < j < k \leq N$ . Тогда равенство  $s(i, j) = s(j, k)$  невозможно. Действительно, если  $s(i, j) = s(j, k)$ , то

$$\begin{aligned}
y_k^{s(j,k)} &> y_j^{s(j,k)} + r(y_j) = y_j^{s(i,j)} + r(y_j) > y_i^{s(i,j)} + r(y_j) + r(y_i) > \\
&> \frac{1}{2}(R_{\nu_j-1} + R_{\nu_i-1}) \geq R_{\nu_k-1} \geq r(y_k).
\end{aligned}$$

Из этого следует, что  $0 \notin Q(y_k, r(y_k))$ . Полученное противоречие доказывает, что  $s(i, j) \neq s(j, k)$ .

Пусть теперь  $G = (g_{i,j})$ ,  $i, j \in \overline{1, N}$  — симметрическая матрица такая, что  $g_{i,j} = s(i, j)$  при  $i < j$ . Тогда из доказанного соотношения следует, что матрица  $G$  удовлетворяет условиям 1), 2). По лемме  $N \leq 2^n$ .

Таким образом, число кубов  $Q_m$  с центрами в первом гипероктанте, которые содержат точку 0, не более  $2^n$ . Тогда число всех кубов  $Q_m$ , покрывающих точку 0, не превышает  $4^n$ . Свойство 5 доказано.

6. Последовательность  $Q_m$  можно разбить на не более, чем  $12^n + 1$  последовательность  $Q_m^p$  так, что каждая последовательность  $Q_m^p$  будет состоять из попарно непересекающихся кубов.

Если куб  $B$  с ребром, большим чем ребро куба  $C$ , пересекается с кубом  $C$ , то куб  $B$  содержит хотя бы одну вершину куба  $C$ . Рассмотрим кубы  $Q_i$  и  $Q_j$ ,  $i < j$ . Справедливо неравенство  $r(x_i) > \frac{1}{2}r(x_j)$ . Разобьём куб  $Q_j$  на  $2^n$  равных кубов  $A_j^p$ ,  $p = 1, \dots, 2^n$ . Множество всех различных вершин кубов  $A_j^p$  равно  $3^n$ .

Например, если вершины  $x = (x^1, \dots, x^n)$  куба  $Q_j$  имеют координаты, равные нулю или единице, то вершины  $y = (y^1, \dots, y^n)$  кубов  $A_j^p$  имеют координаты, равные одному из чисел  $0, \frac{1}{2}, 1$ .

Ребро куба  $Q_i$  больше ребра куба  $A_j^p$ . Если куб  $Q_i$  пересекается с кубом  $Q_j$ , то он пересекается хотя бы с одним из кубов  $A_j^p$  и поэтому содержит хотя бы одну из вершин какого-либо куба  $A_j^p$ . Так как любая точка  $\mathbb{R}^n$  покрывается не более, чем  $4^n$  кубами  $Q_i$ , то куб  $Q_j$  может пересекать не более, чем  $12^n$  кубов  $Q_i$  с  $i < j$ .

Разобьём теперь семейство кубов  $\{Q_m\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , на  $12^n + 1$  множество  $I_1, \dots, I_{12^n+1}$  так, чтобы в каждое множество входили только взаимно непересекающиеся кубы. Куб  $Q_s$  с  $s \leq 12^n + 1$  отнесём к множеству  $I_s$ . Пусть мы уже распределили кубы  $Q_s$  с номерами  $s \leq m$  по множествам  $I_k$  так, чтобы в каждое множество  $I_k$  входили только попарно непересекающиеся кубы. Рассмотрим куб  $Q_{m+1}$ . Он может пересекаться не более, чем с  $12^n$  кубами  $Q_s$ ,  $s \leq m$ . Значит, хотя бы одно из множеств  $I_k$  состоит только из кубов, не пересекающихся с  $Q_{m+1}$ . Отнесём куб  $Q_{m+1}$  к этому множеству. Таким образом, процесс неограниченно продолжается, и мы распределим всё семейство  $Q_m$  по множествам  $I_k$ . Тем самым свойство 6 доказано.

Свойства 4, 5, 6 совпадают с утверждениями теоремы.

Авторы благодарят С. С. Бойко, М. Н. Вялого, А. И. Ильинского, М. Кривелевича за обсуждение результатов работы. В первоначальном варианте работы отсутствовала теорема 1. М. Н. Вялый обратил внимание авторов на то, что лемму 1 можно интерпретировать как утверждение о графах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Оре О. *Графы и их применения*. М.: Мир, 1965.
- [2] Свами М., Тхуласираман К. *Графы, сети и алгоритмы*. М.: Мир, 1984.
- [3] Besicovich A.S. *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions.* // Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 41, 1945. P. 103–110.
- [4] Гусман М. *Дифференцирование интегралов в  $\mathbb{R}^n$* . М.: Мир, 1978.
- [5] Ландкоф Н.С. *Ёмкости и меры Хаусдорфа. Оценки потенциалов* // Успехи математических наук. Т. 20, 1965. С. 189–195.
- [6] Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала*. М.: Наука, ГРФМЛ, 1966.

---

А. Ф. Гришин: механико-математический факультет Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина  
e-mail: [grishin@univer.kharkov.ua](mailto:grishin@univer.kharkov.ua)

О. Ф. Крижановский: механико-математический факультет Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина  
e-mail: [oleg.kryzhanovsky@gs.com](mailto:oleg.kryzhanovsky@gs.com)

---

---

# Конкурсы и олимпиады

---

---

## Тест Клепцына: с компьютером и без него

К. А. Кноп

Л. Э. Медников

ИСТОРИЯ ВОПРОСА. В осенний тур 30-го Турнира городов была включена следующая задача Виктора Клепцына.

*Тест состоит из 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Сможет ли Витя действовать так, чтобы гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем после 24-й попытки? (Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.)*

ЛМ. Поначалу я не мог разгадать тест даже за 29 проб. Тем временем, местные<sup>1)</sup> любители Турнира городов сумели уменьшить число попыток до 21. Ознакомившись с их алгоритмами, я построил свой алгоритм разгадывания теста за 22 вопроса. Но конкуренция с молодёжью на этом пути была обречена: мне уже сообщили, что достаточно 18 попыток.

КК. Я заинтересовался этой задачей независимо от ЛМ и поначалу рассматривал её как задачу о взвешиваниях. Переформулировка исходной задачи на языке взвешиваний очевидна: «У Вити имеются 30 монет двух весов (известно, каких именно). За одно взвешивание (на односторонних весах со стрелкой) можно узнать суммарный вес любого подмножества монет. За какое (как можно меньшее) число взвешиваний Витя сумеет гарантированно определить вес каждой монеты?» Родство двух этих задач легко объяснить. В исходной задаче о тесте в какой-то из попыток нужно дать все одинаковые ответы (например, ответы «да»<sup>2)</sup>). Из этой попытки мы узнаём количество ответов «да»

---

<sup>1)</sup>Второй автор живёт в Израиле.

<sup>2)</sup>Для единообразия мы считаем, что вариантами ответа на каждый вопрос являются «да» и «нет».

среди правильных ответов. Пусть их число равно  $k$ . В формулировке с монетами первой попыткой нужно взвесить все монеты, и мы узнаем количество монет каждого веса (если известные веса монет равны  $x$  и  $y$ , то по результату взвешивания  $V = kx + (30 - k)y$  легко найти  $k$ ). На каждой следующей попытке угадывания часть ответов «да» заменяется на «нет», а в ответ мы получаем информацию о том, сколько ответов угаданы в этой попытке. Если мы заменили  $p$  ответов, а число верно угаданных изменилось на  $q$ , это значит, что  $(p + q)/2$  ответов из изменённых угаданы правильно, а остальные  $(p - q)/2$  — ошибочны. Аналогично в задаче про взвешивания: если взвешены  $t$  монет, из которых  $p$  монет веса  $x$ , то общий вес равен  $V = px + (t - p)y = ty + p(x - y)$ . Зная этот вес, а также  $x$ ,  $y$  и  $t$ , Витя немедленно определяет  $p$ :  $p = \frac{V - ty}{x - y}$ . Цель Вити — найти монеты веса  $x$ , что эквивалентно нахождению всех верных ответов на тест.

Задача об «опознании» монет двух весов не нова: её частный случай для 4 монет и 3 взвешиваний предлагался ещё 20 лет назад на Московской математической олимпиаде (8 класс, задача 4, автор Сергей Гашков, см. [2]). Впрочем, ещё на 5 лет раньше случай для 7 монет и 5 взвешиваний был опубликован как задача E3023 в *American Mathematical Monthly*. Правда, в задаче АММ веса монет были неизвестны, что не слишком усложняет ситуацию. Принципиальное же усложнение «теста Клепцына» по сравнению с его предшественниками — переход от маленьких чисел (4 и 7) к сравнительно большому (30).

*ЛМ.* При каждой следующей попытке Витя может использовать информацию, добытую в предыдущих попытках (такие алгоритмы называются *адаптивными*). Однако именно это условие плохо переводилось на понятные мне языки, и для начала я решил ограничиться *неадаптивным* алгоритмом: считать, что для разгадывания теста за  $n$  попыток Витя одновременно засылает на экзамен  $n$  своих агентов, которые вводят разные ответы согласно выданным им инструкциям. На основании полученных результатов Витя и должен определить верные ответы на все вопросы. В такой постановке задача легко перевелась на язык линейной алгебры.

## РАЗРЕШИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Ответ каждого агента можно рассматривать как строку из  $\pm 1$  (единица — выбор ответа «нет», минус единица — ответа «да»)<sup>3)</sup>. Неизвестный верный ответ — такая же строка. В качестве результата попытки удобно рассматривать не число верных ответов, а скалярное произведение этих строк — разность между числом верных и неверных ответов. (Эта разность и число верных ответов связаны простым линейным соотношением.)

<sup>3)</sup>На первый взгляд, естественнее рассматривать строку из 1 и 0, но, как будет видно впоследствии, «симметричное» представление полезнее.

Ответы всех  $n$  агентов на фиксированный вопрос теста задают  $n$ -мерный вектор с координатами  $\pm 1$  (такие векторы будем называть *знаковыми*). *Знаковой суммой* набора векторов  $u_1, \dots, u_k$  назовём любую сумму вида  $\varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_k u_k$ , где каждый из коэффициентов  $\varepsilon_i$  равен 1 или  $-1$ .

Набор знаковых векторов  $u_1, \dots, u_k$  назовём *разрешимым*, если по каждой их знаковой сумме можно однозначно восстановить знаки коэффициентов  $\varepsilon_i$ . (Это значит, что все  $2^k$  знаковых сумм различны.)

Итак, неадаптивный вариант задачи сведён к такому: при каких  $n$  в  $n$ -мерном пространстве существует разрешимый набор длины 30 (из 30 векторов).

*ЛМ.* Сам по себе перевод на алгебраический язык ничего не даёт. Разумеется, разрешимым набором будет любой базис 30-мерного пространства, но зачем нам разгадывать тест за 30 попыток? (Тем более, что базис из 30 знаковых векторов ещё надо построить.) Однако переход от подбора строчек к подбору столбцов привёл к идее работать с 16-мерным пространством и использовать тот факт, что 16 — число вершин 4-мерного куба. На этом пути, как мне показалось, удалось построить разрешимый набор длины 29. Отсюда следовало бы, что в 17-мерном пространстве существует разрешимый набор длины 30, а это лучше, чем известный мне «рекорд».

*КК.* По моей просьбе Лео Брухис из Нью-Йорка запрограммировал перебор тестов на компьютере. Однако вскоре выяснилось, что прямой перебор за разумное время не проходит, и в этот момент очень кстати оказались идеи ЛМ. Получив от него «решение» набор из 17 тестов длины 29, Лео прогнал его на компьютере, и тут же обнаружил в нём ошибку. Затем он сумел запрограммировать «целенаправленный» подбор векторов, и в результате машина выдала разрешимый набор длины 33 — на три больше, чем было «нужно».

*ЛМ.* Внимательно посмотрев на результат компьютерного моделирования, я наконец-то пришёл к более осмысленному пониманию своей собственной идеи, и в результате придал ей следующий вид.

**ЛЕММА.** Если для набора векторов  $u_1, \dots, u_k$  найдётся такой набор линейных функционалов  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ , что

$$\varphi_j(u_j) > |\varphi_j(u_{j+1})| + |\varphi_j(u_{j+2})| + \dots + |\varphi_j(u_k)| \quad \text{для каждого } j = 1, \dots, k-1, \quad (*)$$

то набор  $u_1, \dots, u_k$  разрешим.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u = \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_k u_k$  — некоторая знаковая сумма. Тогда

$$\varphi_1(u) = \varepsilon_1 \varphi_1(u_1) + \varepsilon_2 \varphi_1(u_2) + \dots + \varepsilon_k \varphi_1(u_k).$$

По условию,  $\varphi_1(u) > 0$ , если  $\varepsilon_1 = 1$ , и  $\varphi_1(u) < 0$ , если  $\varepsilon_1 = -1$ . Это значит, что  $\varepsilon_1 = \text{sign } \varphi_1(u)$ . Аналогично  $\varepsilon_2 = \text{sign } \varphi_2(u - \varepsilon_1 u_1)$ ,  $\varepsilon_3 =$

$= \text{sign } \varphi_3(u - \varepsilon_1 u_1 - \varepsilon_2 u_2)$ , и т. д. Наконец,  $\varepsilon_k$  определяется из сравнения  $u_k$  с выражением  $u - \varepsilon_1 u_1 - \dots - \varepsilon_{k-1} u_{k-1}$ .  $\square$

Заметим, что предъявление конкретных функционалов позволяет не только доказать абстрактную разрешимость набора, но и даёт эффективный алгоритм определения правильных ответов теста.

Осталось только построить наборы векторов и функционалов нужной длины.

### ПОСТРОЕНИЕ РАЗРЕШИМОГО НАБОРА

Мы будем строить достаточно длинный разрешимый набор в пространстве размерности  $n = 2^m$ . Поэтому вместо  $n$ -мерных векторов будем рассматривать функции  $f(x_1, \dots, x_m)$  от  $m$  переменных, принимающих значения  $\pm 1$  (область определения такой функции состоит из  $2^m = n$  точек  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ , а значения образуют  $n$ -мерный вектор).

Знаковому вектору соответствует функция, принимающая только значения  $\pm 1$  (такую функцию мы тоже будем называть знаковой).

Простой пример линейного функционала — сумма значений функции в нескольких точках. Собственно, нам понадобятся только такие функционалы.

В частности, обозначим через  $\sigma(f)$  сумму значений функции  $f$  во всех  $2^m$  точках области определения.

Заметим, что  $\sigma(f) = 0$  для каждой функции, нечётной хотя бы по одной из переменных.

С другой стороны, для знаковой функции  $f$  число  $\sigma(f)$  чётно и (по модулю) не превосходит  $2^m$ .

Пусть  $A$  —  $k$ -элементное подмножество множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

Обозначим через  $\sigma_A(f)$  сумму значений функции  $f$  в  $2^{m-k}$  точках, у которых все координаты с номерами из  $A$  равны 1.

Например,  $\sigma_1(f)$  — сумма значений  $f(1, x_2, \dots, x_m)$ ;  $\sigma_{2,3}(f)$  — сумма значений  $f(x_1, 1, 1, x_4, \dots, x_m)$  и т. д.

Заметим, что если  $f$  нечётна по одной из переменных, номер которой не принадлежит  $A$ , то  $\sigma_A(f) = 0$ .

С другой стороны, для любого чётного числа  $c$  от  $-2^{m-k}$  до  $2^{m-k}$  найдётся нечётная по всем переменным с номерами из  $A$  знаковая функция  $f$ , для которой  $\sigma_A(f) = c$ .

Действительно, если, например,  $A = \{1, \dots, k\}$ , знаки чисел  $f(1, \dots, 1, x_{k+1}, \dots, x_m)$  мы можем задать произвольно, добившись тем самым нужного значения их суммы, а остальные значения функции  $f$  однозначно восстанавливаются «по нечётности».

ТЕОРЕМА 1. Имеется разрешимый набор знаковых функций от  $m$  переменных длины

$$m + (m-1) \binom{m}{1} + (m-2) \binom{m}{2} + \dots + 2 \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-1} + 1 = m \cdot 2^{m-1} + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим такие знаковые функции  $f^1, \dots, f^m$ , что  $\sigma(f^i) = 2^i$ . Поставим каждой из этих функций в соответствие функционал  $\sigma$  и расположим их в порядке  $f^m, \dots, f^1$ . Для каждого  $k$  от 1 до  $m-1$  и каждого  $k$ -элементного подмножества  $A$  множества  $\{1, \dots, m\}$  рассмотрим нечётные по всем переменным с номерами из  $A$  знаковые функции  $f_A^1, \dots, f_A^{m-k}$ , для которых  $\sigma_A(f_A^i) = 2^i$ . (Выше показано, что такие функции существуют.) Поставим каждой из этих функций в соответствие функционал  $\sigma_A$  и расположим их в порядке  $f_A^{m-k}, \dots, f_A^1$ . Наконец, рассмотрим нечётную по всем переменным функцию  $f_{1,2,\dots,m}$ .

Указанный набор функций и функционалов, расположенных в порядке возрастания  $k$ , (функции, соответствующие множествам из равного количества элементов, можно ставить в любом порядке) удовлетворяет условиям леммы и, следовательно, разрешим.

Действительно, если  $A$  не содержит  $B$  (в частности, если  $|A| \leq |B|$ ), то  $B$  содержит элемент  $i$ , не входящий в  $A$ , т. е.  $\sigma_A(f_B^i) = 0$ .

С другой стороны,

$$\sigma_A(f_A^i) = 2^i > 2^{i-1} + \dots + 2^1 = \sigma_A(f_A^{i-1}) + \dots + \sigma_A(f_A^1). \quad \square$$

ЛМ. Таким образом, за  $16 = 2^4$  попыток Витя может разгадать тест не только из 30, но даже из  $33 = 4 \cdot 2^3 + 1$  вопросов. Возникло естественное желание уменьшить число попыток до 15, а также научиться строить достаточно длинные разрешимые системы в пространствах любой размерности. Ещё через несколько дней я понял, что последняя задача сводится к теореме 1.

## ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМЫХ СИСТЕМАХ

Пусть  $S_2(n)$  — сумма цифр в двоичной записи числа  $n$ , а  $B(n) = \sum_{i=1}^{n-1} S_2(i)$ . В частности,  $B(2^m) = m \cdot 2^{m-1}$ .<sup>4)</sup>

ТЕОРЕМА 2. В  $n$ -мерном пространстве имеется разрешимый набор длины  $B(n) + 1$ .

Вместо полного доказательства мы покажем, как из построенного в теореме 1 разрешимого набора длины 13 в 8-мерном пространстве получить

<sup>4)</sup>Последовательность  $B(n)$  в онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [1] имеет номер A000788: 0, 1, 2, 4, 5, 7, 9, 12, 13, 15, 17, 20, 22, 25, 28, 32, 33, 35, 37, 40, 42, 45, 48, 52, 54, 57, 60. . .



разрешимые наборы в 7-, 6- и 5-мерном пространствах (длины соответственно 10, 8, 6). Действия в общем случае совершенно аналогичны.

Построенный набор длины  $13 = B(8)+1$  состоял из функций (8-мерных векторов)

$$f^3, f^2, f^1, f_1^2, f_1^1, f_2^2, f_2^1, f_3^2, f_3^1, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,3}, f_{1,2,3}$$

и соответствующих функционалов

$$\sigma, \sigma, \sigma, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}.$$

Значение функции в точке  $(-1, -1, -1)$  было нужно только для вычисления функционала  $\sigma$ . Остальные функционалы можно рассматривать на 7-мерном пространстве функций, определённых на оставшихся 7 точках. Ограничив все наши функции (кроме первых трёх) на эти 7 точек, мы получим разрешимый набор 7-мерных векторов  $g_1^2, g_1^1, g_2^2, g_2^1, g_3^2, g_3^1, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,3}, g_{1,2,3}$  длины 10 с функционалами  $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}$ . При этом длина набора уменьшится на  $3 = S_2(7)$ . Поэтому число функций с  $B(8) + 1$  уменьшилось до  $B(7) + 1$ .

Далее заметим, что (из оставшихся функционалов) только при вычислении  $\sigma_1$  нужно знать значение функции в точке  $(1, -1, -1)$ . Это позволяет ограничить значения всех функций, кроме  $g_1^2, g_1^1$  на множество из шести оставшихся точек, то есть получить 6-мерный набор  $h_2^2, h_2^1, h_3^2, h_3^1, h_{1,2}, h_{1,3}, h_{2,3}, h_{1,2,3}$  длины 8 с функционалами  $\sigma_2, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_3, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}$ . (Длина набора уменьшилась ещё на  $2 = S_2(6)$ .)

Наконец заметим, что только при вычислении  $\sigma_2$  нужно знать значение функции в точке  $(-1, 1, -1)$ . Это позволяет ограничить значения всех функций, кроме  $h_2^2, h_2^1$ , на множество из пяти оставшихся точек и получить 5-мерный набор  $p_3^2, p_3^1, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,3}, p_{1,2,3}$  длины 6 с функционалами  $\sigma_3, \sigma_3, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}$ .

(Следующий шаг — исключение точки  $(1, 1, -1)$  и функционала  $\sigma_{1,2}$  приведёт к конструкции, изложенной в теореме 1 для  $n = 4, m = 2$ :  $\sigma_3$  превратится в  $\sigma$ , а  $\sigma_{1,3}$  и  $\sigma_{2,3}$  — в  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .)

*ЛМ.* Увы, для  $n = 15$  теорема 2 даёт разрешимый набор длины 29 (но не 30).

**ПРОБЛЕМА 1.** Является ли построенный в теореме 2 разрешимый  $n$ -мерный набор максимальным в следующих смыслах:

а) к нему нельзя добавить ни одного знакового вектора без нарушения разрешимости;

б) не существует разрешимого  $n$ -мерного набора большей длины?

Хотелось бы, чтобы ответ был положительным, хотя для больших  $n$  в это довольно трудно поверить (хотя бы в случае б). Но при  $n = 4, 5$  ответ положительный (см. ниже упражнения 3 и 4 и задачу 2). Остаётся

надежда получить ответ с помощью машинного эксперимента для ещё нескольких «малых» значений  $n$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1. Набор знаковых векторов является разрешимым тогда и только тогда, когда каждая знаковая комбинация каждого непустого поднабора отлична от нуля.<sup>5)</sup>

УПРАЖНЕНИЕ 2. К разрешимому набору можно добавить любой знаковый вектор, не являющийся результатом знаковой комбинации какого-то поднабора.

ПРОБЛЕМА 2. Можно ли уменьшить число попыток для разгадывания теста, используя адаптивный алгоритм?

КК. Анатолий Воробей сообщил мне (со ссылкой на Томека Чайку, сотрудника Google) следующую информацию о машинном моделировании «теста Клепцына»: программа, написанная Т. Чайкой, пробует несколько случайно выбранных ответов на тест, для каждого из них подсчитывает, сколько вариантов приводят к каждому возможному ответу, и находит максимальное число вариантов — т. е. худший случай. Из всех ответов выбирается тот, у которого худший случай наименьший. Далее программа рекурсивно решает каждую из 31 подзадач, отвечающих возможным результатам выбранного ответа на тест, и возвращает максимум по подзадачам плюс 1. При 50 случайных вопросах ей удаётся решить задачу за 15 попыток, и это занимает несколько часов компьютерного счета.

После того, как ЛМ уже построил разрешимые наборы для произвольного  $n$ , я стал просматривать библиографию, приведённую на сайте «Справочника целочисленных последовательностей», и наткнулся на статью Бернта Линдстрема [3], в которой решалась фактически та же задача построения разрешимого набора (там он назывался *detecting set*). Решение Линдстрема давало набор той же длины, что и решение ЛМ, при этом опиралось на построение такого набора натуральных чисел, для которого все подмножества имеют различные суммы. Однако Линдстром решал свою задачу «жадным» способом, предварительно сведя её к другой хорошо известной задаче — поиску  $(0, 1)$ -матриц с наибольшим значением определителя (Hadamard maximal determinant problem, см. последовательность A003432 в [1]). А именно, построив *detecting set* из  $n$  векторов с некоторым значением определителя, он затем переходил к  $n + 1$  и искал такой вектор, дополняющий ранее построенный набор, который сделает максимально возможным значение следующего определителя. Кроме того, Линдстром аккуратно исследовал асимптотику и доказал, что построенная им конструкция при больших  $n$  не может являться оптимальной. Видимо, это же можно сказать и про решение ЛМ, так что ответ на проблему 1б, скорее всего, отрицателен.

<sup>5)</sup>Некий аналог линейной независимости.

## ИНДУКТИВНЫЙ ПОДХОД

КК. Внимательно проанализировав решения, найденные участниками турнира и другими энтузиастами (особенно следует отметить огромный вклад Алексея Гладких), я вычленил из них идею «двух стадий»: сначала (первая стадия) показывается, какие именно величины достаточно знать, чтобы суметь решить тест для маленькой группы вопросов, а потом (вторая стадия) на всем тесте проводятся такие попытки, которые позволяют узнать нужные величины. Эта идея в конечном итоге привела к следующему построению.

Будем называть *каноническим* такой неадаптивный способ решения теста, при котором одна из попыток (для определённости, первая) представляет собой ответы «да» на все вопросы.

ЛЕММА. Если существует канонический способ решить тест длины  $M$  за  $N$  попыток, то существует и канонический способ решить тест длины  $2M + N - 1$  за  $2N$  попыток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Назовём *весом* множества вопросов  $X$  количество правильных ответов «да» на вопросы из множества  $X$ . *Взвешиванием* множества вопросов  $X$  будем называть такую попытку ответа на тест: на все вопросы множества  $X$  даётся ответ «да», а на все остальные вопросы — ответ «нет».

Отметим, что для канонических тестов результат каждого взвешивания в совокупности с результатом первой попытки позволяет вычислить вес множества  $X$  и его дополнения.

Разобьём  $2M + N - 1$  вопросов теста на три части, две из которых (назовём их  $A$  и  $B$ ) содержат  $M$  вопросов, а третья часть  $C$  — остальные  $N - 1$  вопросов. Заметим, что множества вопросов  $A$ ,  $B$  и  $C$  не пересекаются.

По условию леммы правильные ответы на вопросы каждой из частей  $A$  или  $B$  можно узнать каноническим тестом из  $N$  попыток. Подмножества вопросов, которые мы бы взвешивали в этих попытках, мы будем обозначать  $A_1, \dots, A_{N-1}$  для части  $A$ , для части  $B$  взвешиваемые в каноническом тесте множества обозначим через  $B_1, \dots, B_{N-1}$ .

Список попыток тоже разобьём на три части: первая попытка, вторая попытка, части «Sum» и «Diff» (из  $N - 1$  попыток каждая). В первой попытке мы отвечаем «да» на все вопросы (это канонический тест). Во второй — взвешиваем множество  $B$ . В части «Sum» взвешиваем в  $I$ -й попытке  $A_I \cup B_I \cup C_I$ . В части «Diff» в  $I$ -й попытке взвешиваем  $A_I \cup (B \setminus B_I)$ . Рассмотрим, какие выводы можно сделать, получив результаты первых двух попыток и  $I$ -х попыток из «Sum» и «Diff», то есть узнав веса  $A_I + B_I + C_I$ ,  $A_I + B - B_I$  и  $B$ . Очевидно, что чётность суммы этих результатов совпадает с чётностью значения  $C_I$ , что даёт нам знание правильного ответа на вопрос  $C_I$ . Дальше из системы уравнений легко находим веса  $A_I$  и  $B_I$ .

Наконец, зная общее число ответов «да» во всем тесте, а также в частях  $B$  и  $C$ , мы можем определить вес  $A$ . Таким образом, по результатам проведенных попыток мы знаем результаты взвешиваний всех подмножеств  $A_1, \dots, A_{N-1}, A$ , всех подмножеств  $B_1, \dots, B_{N-1}, B$  и правильные ответы на все вопросы множества  $C$ . В силу выбора множеств  $A_I, B_I$  мы в состоянии по этим данным узнать правильные ответы все вопросы множеств  $A$  и  $B$ , на этом доказательство леммы закончено.  $\square$

Индуктивный алгоритм построения решения задачи получается следующим образом: пользуясь очевидным результатом «2 вопроса за 2 попытки» и леммой для  $N = 2$ , найдем ответы для теста из  $5 = 2 \cdot 2 + 1$  вопросов за 4 попытки. Пользуясь результатом «5 за 4» и леммой для  $N = 4$ , решим тест из  $13 = 2 \cdot 5 + 3$  вопросов за 8 попыток. Наконец, воспользуемся результатом «13 за 8» и леммой для  $N = 8$ . В результате получим решение теста на  $33 = 2 \cdot 13 + 7$  вопроса за 16 попыток. Отметим, что этот результат идеально соответствует теореме о разрешимом наборе: тест длины  $m \cdot 2^{m-1} + 1$  разгадывается за  $2^m$  попыток.

### ЕЩЁ ОДНА СВЯЗЬ С ГИПЕРКУБОМ

УПРАЖНЕНИЕ 3. В  $n$ -мерном пространстве существует разрешимый набор длины  $k$  тогда и только тогда, когда можно отметить  $k$  вершин  $(n - 1)$ -мерного куба так, что каждые два (несовпадающих) набора из равного числа отмеченных вершин имеют разные центры масс.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Если в 3-мерном кубе отметить 6 вершин, то четыре из них являются вершинами параллелограмма.

(Это значит, что в 4-мерном пространстве не существует разрешимого набора длины 6.)

ЗАДАЧА 1. Если в 4-мерном кубе отметить 8 вершин, то четыре из них являются вершинами параллелограмма. Для 7 вершин это неверно.

ЗАДАЧА 2. Если в 4-мерном кубе отметить 7 вершин, то найдутся два треугольника с общим центром масс, у которых все вершины отмечены. (Треугольники могут пересекаться.) Для 6 вершин это неверно.

(Это значит, что в 5-мерном пространстве не существует разрешимого набора длины 7.)

ПРОБЛЕМА 3. При каком числе вершин выполнены утверждения задач 1 и 2 в 5-мерном кубе?

ПРОБЛЕМА 4. В 5-мерном кубе отметили 9 вершин. Всегда ли найдутся два тетраэдра (возможно, вырожденных) с общим центром масс, у которых все вершины отмечены?

Для 8 вершин есть контрпример (это следует из утверждения 3).

## НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ

Итак, в конечном счёте мы нашли (даже двумя разными способами) решение задачи за 16 попыток. Насколько это близко к идеалу? Более общо, каковы нижние оценки для числа попыток, необходимых для решения теста длины 30?

Ниже — один из возможных подходов к проблеме нижних границ.

Во-первых, если мы в проделанных попытках поменяем на противоположные все свои ответы на один и тот же вопрос, то все результаты этих попыток изменятся на 1 — увеличатся, если мы поменяли неправильный ответ на правильный, и уменьшатся в противном случае. Поэтому если какой-то алгоритм позволяет узнать правильные ответы на все вопросы, то можно поменять в нем ответы так, чтобы в первой его попытке на все вопросы отвечать «да», — в результате тоже должен получиться работающий алгоритм.

Пусть ответ на первую попытку был равен 15. Это означает, что число вариантов уменьшилось с  $2^{30}$  до  $\binom{30}{15} = 155\,117\,520$ . Если в любой из следующих попыток мы дали чётное число ответов «нет», то ответом будет нечётное число от 1 до 29 (15 возможных ответов), а если количество ответов «нет» чётно, то ответом будет чётное число от 0 до 30 (16 ответов). Итого в каждом случае число вариантов может сократиться не более чем в 16 раз, поэтому после 6 следующих попыток может остаться не менее чем  $\binom{30}{15}/16^6$  вариантов заполнения теста. Целая часть этого числа больше 1 — она равна 8. Таким образом, 7 попыток не хватит (даже при адаптивном алгоритме).

Обобщение этого подхода даёт результат  $1 + \log_K \binom{N}{K}$ , где  $K = N/2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>
- [2] <http://kvant.mirror1.mccme.ru/1988/09/p72.htm>
- [3] В. Lindstrom. *On a combinatorial problem in number theory* // Canad. Math. Bull. Vol. 8, 1965. P. 477–490.

---

К. А. Кноп, ЮМШ при СПбГУ

E-mail: kostyaknop@gmail.com

Сайт: <http://www.kknop.com>

Л. Э. Медников, Хайфа, Израиль

E-mail: lmednikov@mail.ru

## Студенческие математические олимпиады МФТИ

М. В. Балашов      И. И. Богданов      Р. Н. Карасев

В статье рассказано о 36-летнем опыте проведения Студенческой математической олимпиады Московского физико-технического института (государственного университета). Приведены примеры задач. Статья рассчитана на широкую аудиторию.

Студенческой математической олимпиаде Московского физико-технического института (МФТИ) в 2009 году исполняется 36 лет. Впервые олимпиада состоялась в 1974 году в рамках Всесоюзной олимпиады студентов по математике, в качестве её первого (институтского) тура. С тех пор олимпиада ежегодно проводится в марте–апреле весеннего семестра.

Основной целью олимпиады являются повышение интереса к математике у студентов, стимулирование их творческой активности. Для проведения олимпиады на кафедре высшей математики ежегодно создаются оргкомитет и жюри, которое по традиции возглавляет заведующий кафедрой. Оргкомитет проводит всю подготовительную работу, включающую, в частности, ознакомление студентов с задачами, предлагавшимися на прошлых олимпиадах.

Количество участников олимпиады колеблется в пределах от 70 до 120 человек. Проверку работ осуществляют около 10 преподавателей кафедры. Лучшие работы независимо перепроверяются и сравниваются членами жюри.

Одной из особенностей Студенческой олимпиады по математике МФТИ является её раздельное проведение на 1-м и старших курсах. Традиционно это связано с тем, что объем знаний по математике на 1-м курсе существенно ниже, чем на старших курсах: ещё не прочитан толком математический анализ, а многие другие дисциплины даже не изучались (например, дифференциальные уравнения).

Другая особенность нашей олимпиады — большой удельный вес задач по анализу. Это также связано со спецификой преподавания математики в МФТИ, основы которого заложили академик РАН С. М. Никольский, члены-корреспонденты РАН Л. Д. Кудрявцев, О. В. Бесов, член-корреспондент РАО Г. Н. Яковлев (все четверо — специалисты по теории функций).

Помимо задач по анализу, присутствуют задачи по линейной алгебре, дифференциальным уравнениям, геометрии. Встречаются и задачи по теории функций комплексного переменного, но они как правило допускают решения в рамках теории функций вещественной переменной.

За время проведения Студенческой математической олимпиады МФТИ авторами задач и организаторами олимпиады были такие замечательные учёные и педагоги, как Л. Д. Кудрявцев, Г. Н. Яковлев, А. А. Болибрух, Б. И. Голубов, С. П. Коновалов, Л. П. Купцов, Л. В. Курочкина, Е. С. Половинкин, С. В. Резниченко, А. П. Савин, В. М. Уроев, Б. В. Федосов и многие другие.

До 1990 года олимпиада МФТИ проводилась в рамках Всесоюзной математической олимпиады студентов, в качестве её первого тура. По результатам первого тура формировалась команда МФТИ для участия в Московском городском туре олимпиады. Наши студенты во II-м туре неизменно добивались высоких результатов, как в командном соревновании, где обычно выступало 35–45 команд вузов Москвы, так и в личном первенстве. Команда МФТИ, как правило, занимала почётное II место, пропуская вперёд только сильную команду механико-математического факультета МГУ. В личном первенстве члены команды МФТИ регулярно занимали призовые места. Это давало им право выступать в третьем заключительном туре олимпиады в составе команд Москвы и России. Уже в первой Всесоюзной олимпиаде студентов, проходящей на механико-математическом факультете МГУ в октябре 1974 года, жюри заключительного тура, возглавляемое академиком П. С. Александровым, присудило 3-е призовое место студенту 2-го курса МФТИ В. В. Сологубову. Ещё большего успеха добились наши студенты в ноябре 1985 года в Омском политехническом институте. Тогда команда Москвы, укомплектованная в основном студентами МФТИ, заняла I место. Первые два места в индивидуальном первенстве также достались нашим студентам.

Начиная с 1991 года II и III туры не проводятся. Составить впечатление об этих олимпиадах читатель может по книгам [1] и [2].

В отличие от развала студенческого олимпиадного движения в России в начале 90-х годов, за рубежом в это время интерес к математическим олимпиадам студентов возрос. С 1994 года возникла олимпиада ИМС [3] (International Mathematics Competition for University Students). Студенты МФТИ эпизодически (когда было финансирование) участвовали в соревнованиях ИМС и всегда добивались хороших результатов, входя обычно в командном первенстве в первую пятёрку из более чем 40 университетов – участников.

Взаимодействие с ИМС отразилось в том, что часть задач олимпиада МФТИ заимствовала из арсенала ИМС. Некоторые задачи посылались нами специально для ИМС: задача 5 (а) второго дня ИМС-2, задача 6 второго

дня ИМС-9, задача 3 второго дня ИМС-10, задача 5 первого дня ИМС-11, задача 5 второго дня ИМС-13.

Последние годы структура задач олимпиады МФТИ примерно соответствует структуре задач одного дня ИМС: 2 простые, 2 средние и 2 сложные задачи. При этом мы стараемся — насколько это в наших силах — давать оригинальные задачи. Многие из этих задач являются кусочками актуальных сегодня математических проблем или представляют классические, но малоизвестные в олимпиадной среде результаты. Решение такой задачи даёт замечательную возможность совершить небольшое открытие.

Нами также предпринимаются попытки привлечь к участию в олимпиаде студентов других вузов. В 2008 и 2009 годах для участия в нашей олимпиаде мы приглашали студентов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, а в 2009 году студенты МФТИ сами участвовали в заключительном туре олимпиады механико-математического факультета МГУ по математике. Кроме того, в 2009 году в олимпиаде МФТИ участвовали студенты Белорусского государственного университета и Южно-уральского государственного университета. Результаты можно найти на сайтах [4] и [5].

Ниже мы приводим задачи 2009 года и некоторые задачи прошлых лет. В конце статьи приведены решения задач. Подробную информацию о задачах, начиная с 1993 года, можно найти на сайте Студенческой математической олимпиады МФТИ [4].

#### Задачи 2009 года

1 (1 курс). Пусть  $A, B$  — два непустых подмножества  $\mathbb{R}$ , причём  $A \cap \overline{B} = \emptyset$  и  $B \cap \overline{A} = \emptyset$  (черта означает замыкание). Доказать, что найдутся два непересекающихся открытых множества  $U, V \subset \mathbb{R}$  такие, что  $U \supseteq A, V \supseteq B$ .

2 (1 курс). Пусть  $A$  — бесконечное множество вещественных чисел. Доказать, что существует строго монотонная последовательность  $\{a_n\}$ , все члены которой принадлежат  $A$ .

3 (все курсы). Пусть  $a, b, c, d$  — векторы в  $\mathbb{R}^n$ ,  $(\cdot, \cdot)$  — стандартное скалярное произведение. Доказать, что

$$((a, c) + (b, d))^2 + ((a, d) - (b, c))^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

4 (1 курс). Пусть аффинное отображение (композиция линейного оператора и сдвига)  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  такое, что для некоторого  $x \in \mathbb{R}^n$  множество  $\{\alpha^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ограничено. Доказать, что  $\alpha$  имеет неподвижную точку, то есть для некоторого  $y \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha(y) = y.$$



5 (ВСЕ КУРСЫ). 1) Пусть  $f: (0, 1]^2 \rightarrow (0, +\infty)$  — функция, непрерывная по совокупности переменных. Верно ли, что найдётся непрерывная функция  $g: (0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  такая, что  $g(x) = o(f(x, y))$ ,  $x \rightarrow +0$  при любом  $y \in (0, 1]$ ?

2) Пусть  $f: (0, 1]^2 \rightarrow (0, +\infty)$  — функция, непрерывная по  $x$  при любом фиксированном  $y \in (0, 1]$ . Верно ли, что найдётся непрерывная функция  $g: (0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$  такая, что  $g(x) = o(f(x, y))$ ,  $x \rightarrow +0$  при любом  $y \in (0, 1]$ ?

6 (1 КУРС). Пусть  $D \subset \mathbb{R}^2$  — область с гладкой границей  $\partial D$  без самопересечений,  $G = \overline{D}$ . Для каждой точки  $x \in \partial G$  найдётся круг  $B^{(x)}$  радиуса  $R$  такой, что  $x \in B^{(x)}$ ,  $B^{(x)} \cap G = B^{(x)} \cap \partial G$ .

1) Доказать, что найдётся окрестность  $U$  множества  $G$  такая, что для каждой точки  $x \in U$  существует единственная точка  $\pi(x) \in G$  со свойством  $\|x - \pi(x)\| = \inf_{g \in G} \|x - g\|$ .

2) Доказать, что окрестность  $U$  в пункте 1) можно выбрать так, что для некоторого числа  $L > 0$  и для любых точек  $x, y \in U$  выполнено неравенство

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|.$$

7 (СТАРШИЕ КУРСЫ). Доказать, что ненулевая комплексная матрица  $A$  размера  $2 \times 2$  является квадратом ( $A = B^2$ ) тогда и только тогда, когда  $A^2 \neq 0$ .

8 (СТАРШИЕ КУРСЫ). Дано дифференциальное уравнение с запаздыванием  $x'(t) = x(t - 1)$ . Верно ли, что для каждого решения  $x(t)$  этого уравнения выполнено

1)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{e^t} = 0$ ?

2)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^2(t)}{e^t} = 0$ ?

9 (СТАРШИЕ КУРСЫ). Существует ли такой набор  $I$  интервалов, лежащих в интервале  $(0, 1)$ , что каждая рациональная точка интервала  $(0, 1)$  принадлежит конечному числу интервалов из  $I$ , а каждая иррациональная точка этого отрезка — бесконечному числу интервалов из  $I$ ?

10 (СТАРШИЕ КУРСЫ). Пусть плоская гладкая кривая  $\Gamma$  ограничивает выпуклую область  $\Omega$  площадью  $10\pi$ . Отрезок длины 1 с концами на кривой  $\Gamma$  протаскивается по кривой  $\Gamma$  так, что его концы проходят все точки кривой  $\Gamma$ , а середина описывает гладкую кривую  $\gamma$ , которая ограничивает выпуклую область  $G \subset \Omega$ . Найти площадь  $G$ .

## ЗАДАЧИ РАЗНЫХ ЛЕТ

11 (2005, ВСЕ КУРСЫ). Пусть функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x = x_0$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (*)$$

Доказать, что в условии (\*) для каждого  $\varepsilon > 0$  можно так подобрать  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , что функция  $\delta(\varepsilon)$  будет непрерывной при  $\varepsilon > 0$ .

12 (2008, 1 КУРС). Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  — два базиса в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что существует такая перестановка  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_n}$  векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ , что для любого  $k = 1, 2, \dots, n$  векторы  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k}, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$  образуют базис.

13 (2008, ВСЕ КУРСЫ). Пусть  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Доказать, что найдётся подмножество  $X \subset [0, 1]$  мощности континуум, на котором функция  $f$  монотонна.

14 (2002, ВСЕ КУРСЫ). Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — компакт и

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists! a \in A : \|x - a\| = \sup_{y \in A} \|x - y\| \right\}.$$

Доказать, что замыкание множества  $B$  совпадает с  $\mathbb{R}^n$  («!» означает «единственный»).

15 (2006, СТАРШИЕ КУРСЫ). Доказать, что симметричная матрица  $A$  неотрицательно определена тогда и только тогда, когда для любой симметричной неотрицательно определённой матрицы  $B$  выполнено неравенство  $\text{tr} AB \geq 0$ .

## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 2009 ГОДА

ЗАДАЧА 1. Будем рассматривать только симметричные окрестности точек. По условию у каждой точки  $a \in A$  есть окрестность  $U(a)$ , которая не пересекается с  $B$ . У каждой точки  $b \in B$  есть окрестность  $V(b)$ , которая не пересекается с  $A$ . Из неравенства треугольника легко видеть, что если мы возьмём вдвое меньшие окрестности  $U'(a)$  и  $V'(b)$ , то они не будут пересекаться между собой при любых  $a \in A, b \in B$ . Тогда множества

$$U = \bigcup_{a \in A} U'(a), \quad V = \bigcup_{b \in B} V'(b)$$

обладают требуемым свойством.

ЗАДАЧА 2. Множество  $A$  обладает предельной точкой  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ . Пусть  $\{x_i\}$  — последовательность точек множества  $A$ , сходящаяся к  $x_0$  ( $x_i \neq x_0$ ). Тогда одно из множеств  $I = \{i : x_i < x_0\}$  или  $I' = \{i : x_i > x_0\}$

бесконечно; пусть для определённости это множество  $I$ . Тогда, заменив  $x_i$  на её подпоследовательность с индексами, лежащими в  $I$ , можно считать, что  $x_i < x_0$  при любом  $i$ .

Осталось построить монотонную подпоследовательность  $\{y_i\}$  последовательности  $\{x_i\}$ . Положим  $y_1 = x_1$ ,  $i_1 = 1$ . Пусть отрезок  $y_1 < \dots < y_n$  уже построен. Так как  $y_n < x_0$ , то из сходимости  $x_i \rightarrow x_0$  существует такое натуральное число  $i_{n+1}$ , что  $x_i > y_n$  при всех  $i \geq i_{n+1}$  (ясно, что  $i_{n+1} > i_n$ ). Тогда можно положить  $y_{n+1} = x_{i_{n+1}}$ . Последовательность  $\{y_n\}$  построена.

**ЗАДАЧА 3.** Рассмотрим вектора  $a+ib, c+id \in \mathbb{C}^n$ . Тогда по неравенству Шварца

$$|(a+ib, c+id)|^2 \leq |a+ib|^2 \cdot |c+id|^2,$$

раскрывая скобки, получаем

$$|(a, c) + (b, d) + i(b, c) - i(a, d)|^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

По определению левая часть равна

$$((a, c) + (b, d))^2 + ((a, d) - (b, c))^2.$$

**ЗАДАЧА 4.** Пусть  $\alpha$  представляется в виде

$$\alpha(x) = Ax + b,$$

где  $A$  — линейный оператор и  $b \in \mathbb{R}^n$ . Если неподвижной точки нет, то уравнение

$$Ax - x + b = 0$$

не имеет решений. Иначе говоря, вектор  $b$  не лежит в образе линейного оператора  $A - I$ . Следовательно, найдётся линейная функция  $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lambda((A - I)x) = 0 \text{ и } \lambda(b) \neq 0.$$

Тогда для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  получается

$$\lambda(\alpha(x)) = \lambda(Ax - x) + \lambda(x + b) = \lambda(x) + \lambda(b),$$

а следовательно,  $\lambda(\alpha^k(x)) = \lambda(x) + k\lambda(b)$ . Значит, для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  последовательность  $\{\lambda(\alpha^k(x))\}_{k \in \mathbb{N}}$  неограниченна, что противоречит условию задачи.

**ЗАДАЧА 5.** 1) Можно положить  $g(x) = x \cdot \min_{y \in [x, 1]} f(x, y)$  (минимум существует и положителен из непрерывности и положительности  $f(x, y)$ ). Тогда при любом фиксированном  $y \in (0, 1]$  неравенство  $g(x) \leq xf(x, y)$  верно для любого  $0 < x \leq y$ , откуда  $g(x) = o(f(x, y))$ ,  $x \rightarrow +0$ .

2) Множество  $M$  всех последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум. Зафиксируем взаимно однозначное соответствие

между  $M$  и  $(0, 1]$ ; пусть  $\{a_n^{(y)}\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность, соответствующая числу  $y \in (0, 1]$ . Тогда существует непрерывная функция  $h_y(x): (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  такая, что  $h_y(1/n) = 1/a_n^{(y)}$  (можно, например, сделать  $h_y(x)$  линейной на любом отрезке  $[1/(n+1), 1/n]$ ). Положим  $f(x, y) = h_y(x)$ .

Рассмотрим произвольную функцию  $g(x): (0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ ; пусть  $s_n = \lceil 1/g(1/n) \rceil$  (наименьшее натуральное число  $\geq 1/g(1/n)$ ). Тогда найдётся  $y \in (0, 1]$ , при котором  $f(1/n, y) = h_y(1/n) = 1/s_n \leq g(1/n)$ . Это означает, что  $g(1/n) \neq o(f(1/n, y))$ ,  $n \rightarrow \infty$ , и уж тем более  $g(x) \neq o(f(x, y))$ ,  $x \rightarrow +0$ .

**ЗАДАЧА 6.** 1) Выберем  $r \in (0, R)$ . Пусть  $U$  есть  $r$ -окрестность множества  $G$ , т. е. такие точки  $x$ , что  $\inf_{g \in G} \|x - g\| < r$ .

Через  $B_r(a)$  обозначим замкнутый круг радиуса  $r$  с центром в точке  $a$ .

Зафиксируем  $x \in U$ . Непустота множества ближайших к  $x$  точек множества  $G$  следует из компактности круга на плоскости и теоремы Вейерштрасса.

Пусть  $y$  — точка из  $G$ , для которой  $\|x - y\| = \inf_{g \in G} \|x - g\| = \varrho < r < R$ .

Тогда  $G \cap \text{int } B_\varrho(x) = \emptyset$  и  $y \in B_\varrho(x) \cap \partial G$ . Поэтому касательная прямая (прямая  $l$ ) к кривой  $\partial G$  в точке  $y$  совпадает с касательной прямой к окружности  $\partial B_\varrho(x)$  в точке  $y$ . По условию теоремы существует круг  $B^{(y)}$  радиуса  $R > \varrho$ , такой, что  $y \in B^{(y)}$ ,  $B^{(y)} \cap G = B^{(y)} \cap \partial G$ . С необходимостью  $B^{(y)}$  касается прямой  $l$  в точке  $y$  (иначе нарушается условие  $B^{(y)} \cap G = B^{(y)} \cap \partial G$ ), значит круги  $B^{(y)}$  и  $B_\varrho(x)$  касаются прямой  $l$  в точке  $y$  и оба лежат в одной полуплоскости относительно  $l$  (иначе  $B^{(y)}$  имеет общие точки с  $\text{int } G$ ). Поэтому  $\{y\} \cup \text{int } B^{(y)} \supset B_\varrho(x)$ . Следовательно,  $y \in G$  — единственная ближайшая к  $x$ .

2) Покажем, что отображение  $U \ni x \rightarrow \pi(x) \in G$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L = \frac{R}{R-r}$ . Множество  $U$  то же, что и в пункте 1).

Пусть  $x_1, x_2 \in U \setminus G$ , точки  $y_i = \pi(x_i)$  — проекции  $x_i$  на  $G$ ,  $z_i$  — центры шаров  $B^{(y_i)}$  соответственно. Тогда по свойству шаров  $\|z_1 - y_1\| \leq \|z_1 - y_2\|$ ,  $\|z_2 - y_2\| \leq \|z_2 - y_1\|$ .

Введём декартову систему координат с центром  $y_1$  так, чтобы точка  $y_2$  имела координаты  $(1, 0)$ ; пусть штрих означает абсциссу после проекции (т. е.  $x'_1$  — абсцисса точки  $x_1$  и т. п.). Тогда из доказанного  $z'_1 \leq 1/2$ ,  $z'_2 \geq 1/2$ ; поскольку  $x_1, x_2$  делят отрезки  $z_1 y_1, z_2 y_2$  в отношении, большем  $(R-r) : r$ , то  $x'_1 \leq (1/2) \cdot (r/R)$ ,  $x'_2 \geq 1 - (1/2) \cdot (r/R)$ , то есть  $|x'_2 - x'_1| \geq 1 - r/R$ . Значит, и  $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{R-r}{R} \|y_1 - y_2\|$ , что и требовалось.

Если  $x_2 = y_2 \in G$ , то можно повторить предыдущие рассуждения, взяв в качестве точки  $z_2$  любую точку со свойствами  $\|z_2 - y_2\| = R$ ,  $\|z_2 - y_2\| \leq \|z_2 - y_1\|$ .

ЗАДАЧА 7. Если  $A \neq 0$ ,  $A^2 = 0$  и  $A = B^2$ , то  $B^4 = 0$ . Следовательно, все собственные значения  $B$  нулевые и по теореме Гамильтона – Кэли  $A = B^2 = 0$  – противоречие.

Пусть теперь  $A^2 \neq 0$ . Тогда если  $A$  можно привести к диагональному виду

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

ТО МОЖНО ВЗЯТЬ

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}.$$

Иначе  $A$  можно привести к виду жордановой клетки с ненулевыми (так как  $A^2 \neq 0$ ) собственными значениями

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

И МОЖНО ВЗЯТЬ

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{1}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\sqrt{x}$  обозначает некоторый корень из комплексного числа.

ЗАДАЧА 8. 1) Верно. Пусть  $c_n = \sup_{t \in [n-1, n]} |x(t)|$ . Тогда  $|x'(t)| \leq c_n$  при  $t \in [n, n+1]$ , то есть  $|x(t)| \leq c_n + c_n(t-n)$  при этих же  $t$ . Значит,  $c_{n+1} \leq 2c_n$ , откуда и следует  $|x(t)| \leq 2^{n+1}c_1$ ,  $t \in [n, n+1]$ .

2) Неверно. Будем искать решение в виде  $x(t) = e^{\lambda t}$ . Условие  $x'(t) = x(t-1)$  даёт  $\lambda = e^{-\lambda}$ .

Пусть  $\lambda$  – вещественное число. Тогда существует вещественное решение  $\lambda_0 \in (0, 1)$  уравнения  $\lambda = e^{-\lambda}$ , причём при  $\lambda \in (0, \lambda_0)$  имеем  $\lambda < e^{-\lambda}$ ,

а при  $\lambda \in (\lambda_0, 1)$  имеем  $\lambda > e^{-\lambda}$ . Поскольку  $\frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}}$ , то  $\lambda_0 > \frac{1}{2}$  и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\lambda_0 t}}{e^t} = +\infty.$$

ЗАДАЧА 9. Существует. Пусть

$$I_n = \left\{ \left( \frac{a}{n!}, \frac{a+1}{n!} \right) \mid a = 0, 1, \dots, n! - 1 \right\}, \quad I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Ясно, что множества  $I_n$  попарно не пересекаются. Далее, каждая иррациональная точка принадлежит ровно одному интервалу из каждого множества  $I_n$ , то есть бесконечному множеству интервалов из  $I$ . Каждая же

рациональная точка (скажем, со знаменателем  $k$ ) не принадлежит интервалам из множеств  $I_n$  при  $n \geq k$ .

ЗАДАЧА 10. Пусть координаты концов протаскиваемого отрезка  $AB$  и его середины  $C$  есть

$$A(x_1, y_1) \in \Gamma, \quad B(x_2, y_2) \in \Gamma, \quad C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \in \gamma \subset \Omega.$$

Без ограничения общности можно считать, что при протаскивании отрезка точки  $A$  и  $B$  движутся по кривой  $\Gamma$  против часовой стрелки. По следствию из формулы Грина получаем, что

$$\begin{aligned} \mu\Omega &= 10\pi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x_1 dy_2 + x_2 dy_1 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x_1 - x_2) d(y_1 - y_2). \\ \mu G &= \frac{1}{4} \int_{\Gamma} (x_1 + x_2) d(y_1 + y_2) = \frac{1}{4} \int_{\Gamma} x_1 dy_1 + x_2 dy_2 + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} x_1 dy_2 + x_2 dy_1 = \\ &= 5\pi + \frac{1}{4} \int_{\Gamma} x_1 dy_2 + x_2 dy_1, \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} x_1 dy_2 + x_2 dy_1 = 2\mu G - 10\pi.$$

В итоге получаем, что

$$10\pi = 2\mu G - 10\pi + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x_1 - x_2) d(y_1 - y_2).$$

Поскольку при протаскивании отрезка  $AB$  по кривой  $\Gamma$  вектор  $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$  длины 1 совершает поворот на  $2\pi$  против часовой стрелки, то  $\int_{\Gamma} (x_1 - x_2) d(y_1 - y_2) = \pi$ , откуда  $\mu G = \frac{39}{4}\pi$ .

#### РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗНЫХ ЛЕТ

ЗАДАЧА 11. Для всякого числа  $\varepsilon > 0$  определим

$$\Delta(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 \mid \forall x \in U_{\delta}(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  выполнено включение  $\Delta(\varepsilon) \in (0, +\infty]$ , также если  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , то  $\Delta(\varepsilon_1) \leq \Delta(\varepsilon_2)$  (считаем, что  $+\infty \leq +\infty$ ). Если для любого числа  $\varepsilon > 0$  выполнено равенство  $\Delta(\varepsilon) = +\infty$ , то  $f(x) = f(x_0)$  и утверждение очевидно.

Пусть найдётся такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что  $\Delta(\varepsilon_0) < +\infty$ . Тогда функция

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Delta(t) dt, & 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} \Delta(t) dt, & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \end{cases}$$

является искомой.

**ЗАДАЧА 12.** Пусть среди  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  выбрано  $k < n$  таких различных векторов  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k}$ , что  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k}, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$  — базис. Рассмотрим  $(n-1)$ -мерное подпространство  $V_{k+1} = \langle e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k}, e_{k+2}, \dots, e_n \rangle$ . Среди векторов  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  найдётся вектор  $v$ , не лежащий в  $V_{k+1}$ . Заметим, что  $v$  отличен от  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k}$ , поскольку  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k} \in V_{k+1}$ . Положим  $e'_{i_{k+1}} = v$ , тогда  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_{k+1}}, e_{k+2}, e_{k+3}, \dots, e_n$  — базис.

Рассуждая как показано выше для  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , мы получим требуемую перестановку  $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_n}$ .

**ЗАДАЧА 13.** Пусть найдутся такие числа  $a, b \in [0, 1]$ , что  $a < b$  и  $f(a) < f(b)$ . Если это не так, то для любых чисел  $a, b \in [0, 1]$ ,  $a < b$ , выполнено  $f(a) \geq f(b)$  и требуемое доказано.

Для каждого  $c \in [f(a), f(b)]$  определим  $x_c = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) = c\}$ . В силу непрерывности  $f$  получаем, что  $f(x_c) = c$  и из  $c_1 < c_2$  следует  $x_{c_1} < x_{c_2}$  и  $f(x_{c_1}) = c_1 < c_2 = f(x_{c_2})$ . По построению  $\{x_c \mid c \in [f(a), f(b)]\}$  — искомый континуум.

**ЗАДАЧА 14.** Возьмём произвольную точку  $x \in \mathbb{R}^n$ . В силу непрерывности нормы и компактности множества  $A$  найдётся такая точка  $a \in A$ , что  $\|x - a\| = \sup_{y \in A} \|x - y\|$ . Пусть  $l = \{x + \lambda(x - a) \mid \lambda > 0\}$ . Обозначим

$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leq r\}$ . Тогда для любого  $z \in l$  имеем

$$A \subset B_{\|x-a\|}(x) \subset B_{\|z-a\|}(z),$$

причём пересечение границ двух последних шаров есть одноточечное множество  $\{a\}$ . Следовательно,  $l \subset B$ . Но  $x \in \bar{l}$ , поэтому  $x \in \bar{B}$ .

**ЗАДАЧА 15.** Заметим, что если  $X$  — столбец, то матрица  $XX^T$  неотрицательно определена и симметрична. Также заметим, что всякая неотрицательно определённая симметричная  $B$  представляется в виде (теорема о приведении к диагональному виду)

$$B = X_1 X_1^T + \dots + X_n X_n^T.$$

Пусть  $A$  неотрицательно определена. Тогда  $B = X_1 X_1^T + \dots + X_n X_n^T$  и

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} AX_i X_i^T = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr} X_i^T AX_i \geq 0$$

по определению положительной определённости.

В обратную сторону: для любого столбца  $X$  положим  $B = XX^T$  и получим, что

$$\operatorname{tr} X^T AX = \operatorname{tr} AX X^T \geq 0.$$

БЛАГОДАРНОСТИ. Работа поддержана АВЦП «Развитие потенциала высшей школы», грант 2.1.1/500. Мы благодарим «Клуб выпускников МФТИ» и его исполнительного директора С. Н. Марышева, а также ректорат МФТИ за финансовую поддержку.

Олимпиада 2009 года проводилась в рамках Всероссийской олимпиады по прикладной математике и физике, поддержанной РОА, мероприятие 2.2, проект НК-334(1). Работа частично поддержана фондом «Династия».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.А. Садовничий, А.С. Подколзин. *Задачи студенческих математических олимпиад*. М.: Наука, 1980.
- [2] В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. *Задачи студенческих математических олимпиад*. М.: Изд. МГУ, 1987.
- [3] <http://www.imc-math.org/> — сайт международной математической олимпиады студентов университетов.
- [4] <http://math.mipt.ru/olymp/> — сайт Студенческой математической олимпиады МФТИ.
- [5] <http://dfgm.math.msu.su/materials.php> — учебные материалы кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (раздел студенческие олимпиады и конкурсы).

---

М. В. Балашов, кафедра высшей математики МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.

Email: [balashov@mail.mipt.ru](mailto:balashov@mail.mipt.ru)

И. И. Богданов, кафедра высшей математики МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.

Email: [ilya.i.bogdanov@gmail.com](mailto:ilya.i.bogdanov@gmail.com)

Р. Н. Карасев, кафедра высшей математики МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.

Email: [r\\_n\\_karasev@mail.ru](mailto:r_n_karasev@mail.ru)



## Студенческие олимпиады мехмата МГУ

И. В. Аржанцев      В. И. Богачёв      А. А. Заславский  
В. Ю. Протасов      А. М. Райгородский      А. Б. Скопенков

Мы приводим задачи всемехматовских олимпиад 2001 (второй тур), 2008 и 2009 годов, а также указания, решения и комментарии.<sup>1)</sup> См. введение в [1].

Благодарим Я. Абрамова и Д. Янга за полезное замечание.

2001-1. Пусть  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  — монотонно убывающая функция, для которой  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) < \infty$ . Докажите, что существует последовательность  $\alpha_n$  положительных чисел, монотонно убывающая к нулю, для которой  $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n n) < \infty$ .

2001-2. Докажите, что для любого целого положительного  $n$  матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

имеет два равных элемента на главной диагонали.

2001-3. Пусть  $P_n$  и  $Q_n$  — правильные  $n$ -угольники, причём  $P_n$  вписан в круг диаметра 1, а  $Q_n$  описан около этого круга. Обозначим через  $p_n$  и  $q_n$  их периметры. В какой трети интервала  $(p_n, q_n)$  лежит число  $\pi$ ?

<sup>1)</sup> Вот победители этих олимпиад: А. Авилов (2009), В. Арутюнов (2008), В. Астахов (2008, 2009), А. Буфетов (2009), А. Гаврилюк (2009), Е. Горинов (2009), Р. Гимадеев (МФТИ, 2009), Р. Девятов (2008, 2009), А. Ефимов (2008), М. Илюхина (2008), А. Киселёв (МФТИ, 2009), П. Козлов (2009), И. Митрофанов (2008), П. Мищенко (МФТИ, 2009), А. Перепечко (2009), С. Смирнов (2008), А. Трепалин (2008), В. Шмаров (2009). А вот кто предложили задачи на олимпиады: И. В. Аржанцев (2008-3), В. И. Богачёв (2008-1, 2008-2, 2009-5), А. А. Заславский (2008-4, 2009-3), В. Ю. Протасов (2009-1), А. М. Райгородский (2008-5, 2009-2), А. Б. Скопенков (2008-3, 2009-4). Фамилии математиков, предложивших задачи 2001 года, утрачены, за что мы приносим свои извинения. Предложивший не обязательно является автором. Многие из приводимых задач не новы. Но мы полагаем, что многие из них оригинальны. Все варианты составлены В. И. Богачёвым. В [1] приведены задачи первого тура олимпиады 2001 года, а задачи второго тура ошибочно названы утраченными.

2001-4. Для любых целых  $p$  и  $\lambda$  обозначим через  $J(\lambda, p)$  число целочисленных решений  $(x_1, \dots, x_6)$  уравнения  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + \lambda$ , для которых  $1 \leq x_1, \dots, x_6 \leq p$ . Докажите, что  $J(\lambda, p) \leq J(0, p)$  для любого  $p$ .

2001-5. Положим  $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Каково наибольшее возможное количество точек в пересечении  $P^{-1}(1) \cap S$  по всем полиномам  $P$  третьей степени, для которых  $P^{-1}(1) \not\subset S$ ?

2001-6. Можно ли покрыть пространство  $\mathbb{R}^n$  семейством замкнутых шаров с положительными радиусами и попарно непересекающимися внутренностями?

2001-7. Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2^n x)$  сходится только в точках  $x = \pi 2^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

2001-8. Пусть  $\{\alpha_n\}$  — последовательность вещественных чисел, для которой последовательность функций  $\sin(\alpha_n x)$  сходится на множестве, имеющем положительную меру Лебега. Докажите, что последовательность  $\{\alpha_n\}$  имеет конечный предел.

2001-9. Найдите все выпуклые равноугольные многоугольники с вершинами в узлах целочисленной решётки на плоскости.

2008-1. Докажите, что для всякого  $n$  найдётся число  $c_n > 0$  со следующим свойством: каждое открытое выпуклое множество объёма  $v$  в единичном шаре из  $\mathbb{R}^n$  содержит шар радиуса  $c_n v$ .

2008-2. Для возрастающих функций  $f, g : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  докажите неравенство<sup>2)</sup>

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x) \sin x \, dx \geq \int_0^{\pi/2} f(x) \sin x \, dx \int_0^{\pi/2} g(x) \sin x \, dx.$$

2008-3. Обозначим через  $A$  подгруппу  $\mathbb{Z}^2 \oplus 0 \oplus 0$  группы  $\mathbb{Z}^4$ . Для каких элементов  $(b_1, b_2, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^4$  существует такая подгруппа  $D$  группы  $\mathbb{Z}^4$ , что  $(b_1, b_2, c_1, c_2) \in D$  и  $\mathbb{Z}^4 = A \oplus D$ ? Дайте ответ в терминах делимости чисел  $b_1, b_2, c_1, c_2$  и наибольших общих делителей подмножеств этого множества.<sup>3)</sup>

<sup>2)</sup>Здесь можно заменить  $\sin x$  на любую интегрируемую функцию  $\varrho : [0, \pi/2] \rightarrow [0, +\infty)$  с интегралом 1. Общий результат принадлежит П. Л. Чебышёву. Неравенство Чебышёва из «элементарной» математики — дискретный аналог этого неравенства.

<sup>3)</sup>Аналогично решается следующая более общая задача. Пусть  $C$  есть прямая сумма свободных конечно порождённых абелевых групп  $A$  и  $B$ . Для каких элементов  $(a, b) \in A \oplus B = C$  найдётся такая подгруппа  $D$  в  $C$ , что  $(a, b) \in D$  и  $C = A \oplus D$ ?

2008-4. Докажите, что существует выпуклая ограниченная фигура на плоскости, не имеющая центра симметрии, но обладающая следующим свойством: всякая прямая, делящая пополам её периметр, делит пополам и её площадь.

2008-5. Пусть  $W$  —  $11^n$ -элементное подмножество пространства  $\mathbb{R}^n$ , любое  $10^n$ -элементное подмножество которого содержит две точки  $x, y$  на расстоянии 1:  $|x - y| = 1$ . Докажите, что для достаточно большого  $n$  количество единичных расстояний между точками множества  $W$  больше, чем  $0.99 \cdot 12.1^n$ :

$$\frac{1}{2} \# \{(x, y) \in W_n \times W_n : |x - y| = 1\} > 0.99 \cdot 12.1^n,$$

где через  $\#A$  обозначено число элементов в множестве  $A$ .<sup>4)</sup>

2009-1. Для каких размерностей  $n$  существует гиперплоскость в  $\mathbb{R}^n$ , пересекающая все  $(n - 1)$ -мерные замкнутые грани  $n$ -мерного куба, но не имеющая общих точек со вписанным в этот куб замкнутым шаром?<sup>5)</sup>

2009-2. Обозначим через  $m(k)$  максимальное число попарно не ортогональных векторов из  $\{-1, 0, 1\}^{2k}$ , ровно  $k$  координат каждого из которых нулевые. Докажите, что

$$(a) \ m(k) \geq 2^{2k-1} \text{ при нечётном } k. \quad (b) \ 80 \leq m(4) \leq 140.$$

2009-3. Пусть  $n$  нечётно.<sup>6)</sup> На сторонах произвольного («первого»)  $n$ -угольника как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники с углом при вершине  $2\pi/n$ . Их вершины образуют второй  $n$ -угольник. На его сторонах как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники с углами при вершине  $4\pi/n$ . Их вершины образуют третий  $n$ -угольник. Аналогично из  $k$ -го  $n$ -угольника при помощи угла  $2\pi k/n$  строится  $(k + 1)$ -й  $n$ -угольник; равнобедренные треугольники строятся вовне  $k$ -го  $n$ -угольника при  $2\pi k/n < \pi$  и внутрь при  $2\pi k/n > \pi$ . Докажите, что  $(n - 1)$ -й  $n$ -угольник правильный.

2009-4. Докажите, что всякое линейное отображение в себя пространства матриц  $n \times n$  с комплексными коэффициентами, сохраняющее определитель, является обратимым.

<sup>4)</sup>На олимпиаде задача предлагалась в несколько другой формулировке. Хотя это и не обязательно для формулировки или решения задачи, заметим, что для достаточно большого  $n$  такое подмножество  $W$  действительно существует. Это доказывается аналогично [2, с. 16, §2.3, первые две выключные формулы].

<sup>5)</sup>Эта задача интересна как ещё один пример того, что в высоких размерностях вписанный в куб шар «маленький».

<sup>6)</sup>Имеется естественный аналог этой задачи для чётного  $n$ .

2009-5. Для непрерывной функции  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ , некоторого  $C > 0$ , любого квадрата  $K$  с единичным ребром и любого  $x \in K$  выполнено неравенство  $f(x) \leq C + C \int_K f(x) dx$ . Докажите, что  $f(x) \leq Me^{C\|x\|}$  при некотором  $M \geq 0$ .<sup>7)</sup>

### РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ 2008 ГОДА

1. Применим индукцию по  $n$ . При  $n = 1$  все очевидно. Пусть наше утверждение верно в размерности  $n - 1$ . Можно считать, что данное тело  $K$  компактно (взяв выпуклое компактное подмножество исходного тела объёма более  $v/2$ ). Пусть

$$a = \min\{x_n : (x_1, \dots, x_n) \in K\}, \quad b = \max\{x_n : (x_1, \dots, x_n) \in K\}, \quad l = b - a.$$

Среди сечений

$$K_t := \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in K\}$$

возьмём сечение максимального  $(n - 1)$ -мерного объёма. Пусть это сечение  $K_c$ , где  $a \leq c \leq b$ , а соответствующий  $(n - 1)$ -мерный объём равен  $v_0$ . Можно считать, что  $b - c \geq l/2$ . По предположению индукции в  $K_c$  есть  $(n - 1)$ -мерный шар  $B$  с центром в  $Z = (z_1, \dots, z_{n-1}, c)$  радиуса  $r = c_{n-1}v_0$ . По построению в  $K$  есть точка  $X = (x_1, \dots, x_{n-1}, b)$ . Положим  $Y = (x_1, \dots, x_{n-1}, c)$ . Ввиду выпуклости тела  $K$  конус  $Q$  с вершиной в  $X$  и основанием  $B$  входит в  $K$ . Проверим, что он содержит нужный шар. Заметим, что  $|Z - Y| \leq 2$ .

Пусть  $|Z - Y| \geq l$ . Тогда указанный конус  $Q$  содержит шар радиуса  $\varrho = \frac{1}{4} \frac{rl}{|Z - Y|} \geq \frac{1}{8}rl$ . Это видно из прямоугольного треугольника с вершинами в точках  $X, Y, Z$ , имеющего катеты  $l$  и  $|Z - Y|$ . В самом деле, на катете  $YZ$  возьмём такую точку  $W$ , что  $|W - Z| = r$ . Обозначим через  $U$  точку пересечения перпендикуляра в  $W$  с гипотенузой. Из подобия треугольников  $|U - W| = \frac{lr}{|Z - Y|}$ . Кроме того,  $|U - W| \leq r$ . Остаётся заметить, что радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник с меньшим катетом  $|U - W|$  больше  $|U - W|/4$ . Итак,

$$\varrho \geq \frac{1}{8}rl = \frac{1}{8}c_{n-1}v_0l \geq \frac{1}{8}c_{n-1}v,$$

ибо  $v \leq lv_0$ , что очевидно из принципа Кавальери.

Пусть  $|Z - Y| \leq l$ . Тогда при  $r \leq l$  конус  $Q$  содержит шар радиуса

$$\frac{1}{4}r = \frac{1}{4}c_{n-1}v_0 \geq \frac{1}{4}c_{n-1}\frac{v}{l} \geq \frac{1}{8}c_{n-1}v.$$

<sup>7)</sup>На олимпиаде задача предлагалась для  $C = 1$  с оценкой  $f(x) \leq M(1 + \|x\|)$ .

Наконец, при  $r \geq l$  конус  $Q$  содержит шар радиуса  $l/4$ . Ясно, что  $l$  не меньше  $v/s_{n-1}$ , где  $s_{n-1}$  —  $(n-1)$ -мерный объём единичного шара в  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

2. Положим  $\varrho(x) := \sin x$  (см. сноску к условию). Заменяя  $g$  на  $g - c$ , где  $c$  — интеграл от  $g\varrho$ , переходим к случаю  $\int g\varrho dx = 0$ . В этом случае надо доказать, что интеграл от  $fg\varrho$  неотрицателен. Так как интегралы от  $(f - f(0))g\varrho$  и  $fg\varrho$  равны, то приходим к случаю, когда  $f \geq 0$ . Пусть  $x_0 := \inf\{x: g(x) \geq 0\}$ . Ясно, что  $x_0 > 0$ . Тогда  $g(x) < 0$  при  $x < x_0$ ,  $g(x) \geq 0$  при  $x > x_0$ . Ввиду оценок  $0 \leq f(x) \leq f(x_0)$  при  $x < x_0$  и  $f(x) \geq f(x_0)$  при  $x > x_0$  получаем

$$\int_0^{x_0} f(x)g(x)\varrho(x) dx \geq f(x_0) \int_0^{x_0} g(x)\varrho(x) dx,$$

$$\int_{x_0}^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x) dx \geq f(x_0) \int_{x_0}^{\pi/2} g(x)\varrho(x) dx,$$

откуда

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x) dx \geq f(x_0) \int_0^{\pi/2} g(x)\varrho(x) dx = 0.$$

Возможно другое *короткое решение*: с помощью приближений утверждение сводится к случаю непрерывно дифференцируемых функций. Функция  $\Phi(x) = \int_0^x g(t)\varrho(t) dt$  в предположении, что  $g\varrho$  имеет нулевой интеграл, удовлетворяет таким условиям:  $\Phi(0) = \Phi(\pi/2) = 0$ ,  $\Phi(x) \leq 0$  (если  $\Phi'(x_0) = g(x_0)\varrho(x_0) = 0$ , то  $\Phi'(x) \leq 0$  при  $x \leq x_0$  и  $\Phi'(x) \geq 0$  при  $x \geq x_0$  из-за возрастания  $g$ ). Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x) dx = - \int_0^{\pi/2} f'(x)\Phi(x) dx \geq 0.$$

Возможно третье *короткое решение* с помощью двойных интегралов (придуманное на олимпиаде А. Трепалиным).

3. *Ответ*: необходимое и достаточное условие —

- либо  $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ ,
- либо одно из чисел  $c_1, c_2$  ненулевое и оба числа  $b_1$  и  $b_2$  делятся на  $\text{НОД}(c_1, c_2)$ .

4. *Ответ* [3]. Например, подходит фигура, ограниченная кривой

$$x = 12 \cos \varphi + \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 4\varphi, \quad y = 12 \sin \varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 4\varphi.$$

*Указание*. Убедиться в этом, а также получить другие примеры искомым кривых, можно следующим образом. Каждому направлению (задаваемому углом  $\varphi$ ) соответствует ровно одна прямая, делящая площадь и периметр фигуры пополам. Обозначим через  $2l(\varphi)$  длину отрезка этой прямой,

лежащего внутри нашей фигуры. Обозначим через  $(x(\varphi), y(\varphi))$  координаты его середины. Нетрудно доказать, что  $l(\varphi)$  не зависит от  $\varphi$ , и что

$$\text{прямая, делящая фигуру пополам, касается кривой } (x(\varphi), y(\varphi)). \quad (*)$$

Примеры функций  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих условию  $(*)$ , будем искать в виде  $\sum_{k=0}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$ . (Для знакомых с рядами Фурье поиск решения в таком виде естественен.) Условие  $(*)$  переформулируется в виде уравнения на коэффициенты  $a_k, b_k$  (с параметром  $l$ ). Граница нашей фигуры задаётся параметрическим уравнением  $X(\varphi) = x(\varphi) + l \cos \varphi$ ,  $Y(\varphi) = y(\varphi) + l \sin \varphi$ . При этом для достаточно больших  $l$  полученная фигура будет выпуклой.

5. *Указание.* Рассмотрим граф, множество вершин которого —  $W$ , и в котором ребром соединены вершины на расстоянии 1. Тогда более слабая оценка  $0.49 \times 12.1^n$  легко получается из следующего известного результата: *если среди любых  $k$  вершин графа с  $v$  вершинами некоторые две соединены ребром, то число рёбер в графе не меньше  $(k-1)q(q-1)/2$ , где  $q := \left\lceil \frac{v}{k-1} \right\rceil$ .* Для доказательства оценки  $0.99 \times 12.1^n$  нужно уточнить рассуждения, применяемые при доказательстве слабой оценки, используя несуществование  $n+2$  точек в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^n$  с попарными расстояниями 1.

## РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ 2009 ГОДА

1. *Ответ:*  $n = 5$ .

При каждом  $n \geq 5$  гиперплоскость  $x_1 + \dots + x_n = n - 2$  пересекает все замкнутые  $(n-1)$ -мерные грани  $n$ -мерного куба

$$I_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1\}.$$

В самом деле: точки  $(1, \frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{n-3}{n-1})$  и  $(-1, 1, \dots, 1)$  этой гиперплоскости лежат на гранях  $x_1 = 1$  и  $x_1 = -1$  куба  $I_n$ , соответственно. Аналогично с остальными гранями. Эта гиперплоскость не пересекает вписанного шара, поскольку расстояние от начала координат до неё равно  $\frac{n-2}{\sqrt{n}} > 1$ .

Несуществование такой гиперплоскости при  $n = 4$  доказывается так (доказательство предложено В. Шмаровым; случай  $n \leq 3$  аналогичен). Предположим, напротив, что нашлась такая плоскость  $a_1x_1 + \dots + a_4x_4 = b$  для 4-мерного куба  $I_4$ . Без ограничения общности, считаем, что  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq 0$  и  $b \geq 0$ . Поскольку данная гиперплоскость пересекает грань

$x_1 = -1$ , имеем  $-a_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$  для некоторых  $x_2, x_3, x_4 \in [-1, 1]$ . Тогда

$$0 \leq b \leq -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq a_3 + a_4, \quad \text{поэтому}$$

$$b^2 < (a_3 + a_4)^2 = a_3^2 + 2a_3a_4 + a_4^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

Следовательно, гиперплоскость пересекает вписанный шар. Противоречие.

2А. *Указание.* Пусть  $H_1, \dots, H_{2^{k-1}}$  — все подмножества множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ , имеющие чётное число элементов. Положим

$$M_s := \left\{ (a_1, b_1, \dots, a_k, b_k) \in \{-1, 0, 1\}^{2k} : (a_i, b_i) = \begin{cases} (\pm 1, 0) & \text{при } i \in H_s, \\ (0, \pm 1) & \text{при } i \notin H_s \end{cases} \right\}.$$

Докажите, что  $\bigcup_{s=1}^{2^{k-1}} M_s$  и есть искомое множество из  $2^{2k-1}$  векторов.

2В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА  $80 \leq m(4)$ . Возьмём векторы

- $e_1, \dots, e_5$ , у которых первые три координаты равны +1, среди последних пяти координат ровно одна равна +1, а остальные координаты нулевые;

- $e_6, \dots, e_{10}$ , у которых первые три координаты равны +1, среди последних пяти координат ровно одна равна -1, а остальные координаты нулевые;

- $f_1, \dots, f_{30}$ , у которых среди первых трёх координат ровно две равны +1 и одна нулю, а среди последних пяти координат ровно две равны +1 и ровно три нулю.

Ясно, что  $e_i \cdot e_j \geq 2$ ,  $f_k \cdot f_l \geq 1$  and  $e_i \cdot f_k \geq 2 - 1 = 1$ . Поэтому векторы

$$e_1, \dots, e_{10}, -e_1, \dots, -e_{10}, f_1, \dots, f_{30}, -f_1, \dots, -f_{30}$$

попарно неортогональны.

2В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА  $m(4) \leq 140$ . (Это решение принадлежит В. Арутюнову; аналогичное решение предложил В. Вановский.)

Для каждого вектора рассмотрим множество позиций, на которых стоят нули. Поскольку никакие два вектора не ортогональны, у любых двух векторов эти множества не «противоположны» (т.е. не дополняют друг друга). Существует  $\binom{8}{4} = 70$  вариантов расположения нулевых позиций. Если, вопреки утверждению задачи, найдётся 141 таких попарно неортогональных векторов, то некоторые 5 из этих векторов будут иметь общие нулевые позиции.

Мы можем считать, что указанные позиции суть 1, 2, 3, 4 и что

$$(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) —$$

один из пяти векторов. Ясно, что не более одного из оставшихся четырёх векторов имеет ровно четыре координаты -1. Ни один из оставшихся

четырёх векторов не имеет ровно двух координат  $-1$  (поскольку такой вектор ортогонален вектору  $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$ ). Не более одного из оставшихся четырёх векторов имеет ровно одну координату  $-1$  (поскольку два различных вектора такого вида ортогональны). Аналогично, не более одного из оставшихся четырёх векторов имеет ровно одну координату  $1$ . Противоречие.

3. Обозначим через  $z_1^k, \dots, z_n^k$  комплексные числа, соответствующие вершинам  $k$ -го  $n$ -угольника, и  $\mathbf{z}^k := (z_1^k, \dots, z_n^k) \in \mathbb{C}^n$ . Комплексные координаты на плоскости выберем так, чтобы выполнялось условие  $z_1^k + \dots + z_n^k = 0$ .

Вершины равнобедренных треугольников, построенных на сторонах первого многоугольника, являются линейными функциями вершин этого многоугольника. Поэтому  $\mathbf{z}^2 = A_1 \mathbf{z}^1$  для некоторой матрицы  $A_1$ . Аналогично,  $\mathbf{z}^3 = A_2 \mathbf{z}^2$ ,  $\mathbf{z}^4 = A_3 \mathbf{z}^3$  и т. д. для некоторых матриц  $A_2, A_3, \dots$ . Заметим, что

1. Векторы  $v_i = (1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n})$  для  $i = 0, \dots, n-1$  образуют набор собственных векторов матрицы  $A_k$  для любого  $k$ .

2. Одно из собственных чисел матрицы  $A_k$  равно нулю.

3. Ему соответствует ровно один собственный вектор  $v_{n-k}$ .

Условие 2 означает, что умножение на матрицу  $A_k$  задает проектирование пространства  $\mathbb{C}^n$  на некоторую гиперплоскость. Из условия 3 получаем, что эти гиперплоскости различны для разных  $k$ . Следовательно, умножение на произведение матриц  $A_{n-2}A_{n-3} \dots A_2A_1$  задает проекцию подпространства  $z_1 + \dots + z_n = 0$  на одномерное подпространство, задающее правильные  $n$ -угольники. Утверждение задачи доказано.

4. Обозначим данное отображение через  $T$ . Пусть, напротив, найдётся матрица  $A \neq 0$ , для которой  $T(A) = 0$ . Существует вырожденная матрица  $B$ , для которой  $A+B$  невырождена (докажите!). Тогда следующая цепочка равенств даёт противоречие:

$$0 = \det B = \det T(B) = \det(T(B) + T(A)) = \det T(A + B) \neq 0.$$

5. Пусть для непрерывной функции  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , некоторого  $C > 0$  и любых единичного отрезка  $K$  и точки  $x \in K$  выполнено неравенство  $f(x) \leq C + C \int_K f(x) dx$ . Тогда

$$f_1(x) \leq C + C \int_{x-1}^x f_1(y) dy \leq C + C \int_{-1/2}^x f_1(y) dy \quad \text{при } x \geq 1/2.$$

Отсюда

$$f_1(x) \leq \left( C + C \int_{-1/2}^0 f_1(y) dy \right) e^{Cx} \leq \left( C + C \int_{-1/2}^{1/2} f_1(y) dy \right) e^{Cx} \quad \text{при } x \geq 1/2.$$



(Этот несложный переход — частный случай *неравенства Гронуолла*: для всякой неотрицательной функции  $\varphi$  из неравенства  $\varphi(x) \leq A + B \int_{x_0}^x \varphi(y) dy$  при  $x > 0$  следует, что  $\varphi(x) \leq (A + B \int_{x_0}^0 \varphi(y) dy) e^{Bx}$  при  $x > 0$ .)

Аналогичная оценка верна и при  $x < -1/2$ , что в итоге даёт

$$f(x) \leq \left( C + C \int_{-1/2}^{1/2} f_1(y) dy \right) e^{C|x|},$$

поскольку при  $|x| \leq 1/2$  это верно по условию.

Пусть  $x \in \mathbb{R}^2$  и  $|x| > 1/2$ . Повернём систему координат так, что  $x = (0, x_2)$ . Можно считать, что  $x_2 > 1/2$ . Введём функцию  $\eta(t) := \int_{-1/2}^{1/2} f(z, t) dz$ . Интегрированием неравенства

$$f(x_1, t) \leq C + C \int_{[-1/2, 1/2] \times [t-1, t]} f(y) dy \quad \text{по } x_1 \text{ на отрезке } [-1/2, 1/2]$$

получаем  $\eta(t) \leq C + \int_{t-1}^t \eta(u) du$ . По одномерному случаю это даёт

$$\eta(t) \leq \left( 1 + \int_{-1/2}^{1/2} \eta(s) ds \right) e^{C|t|} = \left( 1 + \int_{[-1/2, 1/2]^2} f(x) dx \right) e^{C|t|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(0, x_2) &\leq C + C \int_{[-1/2, 1/2] \times [x_2-1, x_2]} f(y) dy = \\ &= C + C \int_{x_2-1}^{x_2} \eta(t) dt \leq C + C^2 + C^2 e^{C|x_2|} \int_{[-1/2, 1/2]^2} f(y) dy, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Другой способ изложить это решение, придуманный участниками олимпиады, основан на следующей лемме (приведём её формулировку для  $C = 1$ ):  $f(x) \leq 2 + \max_{y \in K} f(y)$  для любого единичного квадрата  $K$  и любой

точки  $x$ , лежащей в прямоугольнике  $1 \times \frac{1}{2}$ , пересекающемся с  $K$  по общему ребру.

Справедливо следующее более общее утверждение.

Пусть  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$  — локально ограниченная измеримая функция, причём для любого куба  $K$  с ребром единичной длины и  $x \in K$  выполнено неравенство  $f(x) \leq C_1 + C_2 \int_K f(y) dy$ , где  $C_1$  и  $C_2$  не зависят от  $K$ .

Тогда  $f(x) \leq M \exp(C_2|x|)$ , где

$$M = C_1 + C_1 C_2 + \max(C_2^2, 1) \sup_{A \in SO_d} \int_{A([-1/2, 1/2]^d)} f(y) dy.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Богачев, А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков, Н. А. Толмачев. *Студенческие олимпиады и межкафедральный семинар на мехмате Московского государственного университета* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 12, 2008. С. 205–222.  
<http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/stolymp.pdf>
- [2] А. М. Райгородский. *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2007.
- [3] А. А. Заславский. *Свойства и признаки окружности* // Квант. №6, 2001. С. 32–33.

---

И. В. Аржанцев, механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

Email: [arjantse@mccme.ru](mailto:arjantse@mccme.ru)

В. И. Богачёв, механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

Email: [vibogach@mail.ru](mailto:vibogach@mail.ru)

А. А. Заславский, Центральный Экономико-Математический Институт

Email: [zaslavsky@mccme.ru](mailto:zaslavsky@mccme.ru)

В. Ю. Протасов, механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

Email: [v-protassov@yandex.ru](mailto:v-protassov@yandex.ru)

А. М. Райгородский, механико-математический факультет Московского Государственного Университета, факультет инноваций и высоких технологий Московского Физико-технического Института.

Email: [mraigor@yandex.ru](mailto:mraigor@yandex.ru)

А. Б. Скопенков, механико-математический факультет Московского Государственного Университета, Независимый Московский Университет и Московский Институт Открытого Образования.

Email: [skopenko@mccme.ru](mailto:skopenko@mccme.ru)

Инфо: <http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps>

## Математическая интернет-олимпиада для студентов

А. Домошницкий    В. О. Бугаенко    А. Я. Канель-Белов

17 декабря 2009 года состоялась 5-я международная Математическая интернет-олимпиада для студентов. За четыре часа её проведения было зафиксировано более четырёх тысяч посещений сайта, на котором были выложены условия задач, а участниками олимпиады стали 489 студентов из 19 стран мира. География участников простиралась от Бразилии и США на западе до Вьетнама на востоке. Среди победителей — призёры национальных и международных математических олимпиад из России, Украины, Румынии, Армении, Бразилии, Грузии и Израиля. Штаб олимпиады располагается в Ариэльском Университетском Центре в Самарии (Израиль).

Сегодня существуют множество соревнований по различным предметам, в том числе и олимпиад по математике. Каждая олимпиада относится, как правило, к одному из двух типов. Олимпиада первого типа рассчитана на «профессионалов», для решения её задач требуется определённая тренировка. Новичку на такой олимпиаде мало что светит. Даже формулировки задач будут для него непривычными. Он, скорее всего, ничего не решит, и его участие в олимпиаде может сыграть скорее отрицательную, чем положительную роль. Вместо того, чтобы разбудить интерес к науке, это может наоборот привести к разочарованию и неуверенности в себе. Олимпиада второго типа рассчитаны на массового участника. Её задачи вполне посильны новичку, для их решения достаточно проявить немного сообразительности, а некоторые из задач и вовсе не сильно отличаются от тех, которые студенты получают на своих занятиях в качестве упражнений. Однако, сильным студентам такие олимпиады, как правило, не интересны. Олимпиадные «профессионалы» смотрят на них порой с пренебрежением, демонстрируя, что участвовать в такой олимпиаде весьма несолидно.

Можно ли добиться, чтобы олимпиада была привлекательна, как для профессионала-олимпиадника, так и для новичка, и каждому из них приносила пользу? Мы постарались найти такую оптимальную форму. Участникам было предложено избыточное количество задач, среди которых были, как достаточно простые, так и весьма сложные. Таким образом,

каждый участник мог выбрать для решения задачи, соответствующие своему уровню. Однако, оценивались задачи неодинаково: количество баллов, дающееся за решение задачи, обратно пропорционально количеству участников, её решивших. Таким образом, на результат победителей реально влияют лишь сложные задачи. Олимпиадник вполне может взяться решать только их, а на простые, но не очень ему интересные задачи, времени не тратить. С другой стороны, такой подбор задач приводит к тому, что «нулевых» работ практически нет, так как даже слабые студенты могут найти несколько посильных для себя задач. При этом, результат какого-нибудь новичка, справившегося, скажем, с четырьмя задачами, вовсе не выглядит провалом в сравнении с результатом победителя, решившего шесть-семь задач.

Другой отличительной чертой олимпиады является использование Интернета, позволяющее участвовать в ней студентам из различных уголков земного шара, не покидая своего города. В момент начала олимпиады открывается сайт с условиями задач, а по окончании участники должны выслать свои решения по электронной почте в адрес жюри. Во время проведения олимпиады участники имеют возможность задавать жюри вопросы по условиям задач посредством Интернета. Со многими местами проведения установлена аудио и видеосвязь. Эти же технические средства используются при проведении церемонии закрытия олимпиады.

Первая олимпиада состоялась в 2006 году, и в ней участвовали только израильские студенты. К удивлению организаторов на приглашение принять в ней участие откликнулись не только будущие математики, физики и инженеры, но также студенты других факультетов, в том числе даже те, кто учится на медсестёр. Количество участников от года к году неуклонно росло, и уже на второй год олимпиада стала международной: к участию в ней присоединились университеты России, Украины, Румынии, Болгарии и Германии. В последней олимпиаде приняли участие студенты 35 университетов из 19 стран мира.

Благодаря сотрудничеству с российским Национальным аккредитационным агентством в сфере образования и его руководителем В. Г. Наводновым финальный тур четвёртой олимпиады 17 мая 2009 года был совмещён с финальным туром Всероссийской студенческой интернет-олимпиады по математике. Такое сотрудничество видится нам весьма плодотворным, мы планируем его продолжать и расширять. Надеемся, что в 2010 году к этому объединению присоединится и румынская олимпиада.

Следующий тур Математической интернет-олимпиады состоится 15 апреля 2010 года, а финальный тур сезона будет проходить 20 мая 2010 года.

Ниже мы приводим условия задач, предлагавшихся на прошедшем 17 декабря 2009 года туре. С подробной информацией об олимпиаде, в

том числе с решениями задач можно ознакомиться на сайте олимпиады <http://www.ariel.ac.il/cs/projects/dom/itpm/>

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры саблезубого тигра, а юбка из перьев павлина — на три каменных копыя. На другом базаре, расположенном в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки из павлина, а шкура тигра — на четыре копыя. Все обмены можно осуществлять в обе стороны. Охотник принёс на первый базар шкуру мамонта и хочет выменять её на четыре тигровых шкуры. Сможет ли он это сделать за 33 дня?

2. Найдите  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\ln(x)}$ .

3. Определите, является ли функция

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

чётной или нечётной (или ни чётной, ни нечётной).

4. Вася спускается на парашюте с постоянной скоростью  $v$ , а его друг Миша катается на колесе обозрения, которое крутится с постоянной скоростью (точка, из которой прыгнул Вася, находится выше верхней точки колеса обозрения). В момент приземления Васи кабинка, в которой катался Миша, находилась в нижней точке (на уровне земли). Известно, что пока Вася спускался, друзья оказывались на одной и той же высоте ровно 4 раза (считая момент Васиного приземления). Найдите вертикальную составляющую скорости Миши в тот момент, когда они с Васей впервые оказались на одной высоте (мальчиков можно считать точками).

5. Сколько решений имеет уравнение  $x^2 = 2^x$ ?

6. Даны две произвольные ненулевые матрицы  $A$  и  $B$  второго порядка. Докажите, что для некоторой матрицы  $C$  выполняется условие  $ACB \neq 0$ .

7. Чему равно минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x - 1960)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 441)^2} ?$$

8. Найдите ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число

$$\sqrt[5]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[5]{\sqrt{2} - 1}.$$

9. На отрезке  $[0, 1]$  случайным образом выбираются два числа. Какова вероятность того, что первое число, возведённое в квадрат, больше, чем второе число?
10. Два цилиндра радиуса 1 расположены в пространстве так, что их оси пересекаются под прямым углом. Найдите объём пересечения цилиндров.
11. Профессор сформулировал  $n$  утверждений  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Он задаёт своим аспирантам темы диссертационных работ: «из  $A_i$  следует  $A_j$ ». Диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием диссертаций, заданных ранее. Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора?
12. Пусть  $f(x, y)$  — бесконечно дифференцируемая функция двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у неё нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической* если в ней обе частные производные  $\partial f/\partial x$  и  $\partial f/\partial y$  обращаются в нуль.)

---

А. Домошницкий, Ариэльский университетский центр, Израиль

В. О. Бугаенко, Ариэльский университетский центр, Израиль

А. Я. Канель-Белов, Московский институт открытого образования

# Московская математическая конференция ШКОЛЬНИКОВ

(информационное сообщение программного комитета ММКШ)

В статье [3] рассказывалось о научных конференциях школьников. Напомним, что главной целью таких конференций мы считаем развитие творческих способностей и приобщение к научной работе сильных школьников.

С 2007 года в Москве проводится Московская математическая конференция школьников. *Научными премиями конференции* награждены работы В. Болбачана [1] (руководитель А. Б. Скопенков) и Ф. Нилова [2] (руководитель А. А. Заславский). Присуждено также большое количество *поощрительных призов*.

Ближайшее заседание конференции планируется на ноябрь–декабрь 2010 (точная дата будет назначена в сентябре 2010).

К участию в конференции приглашаются школьники старших классов.

Подробную информацию, в том числе и предлагаемые задачи для исследования, можно получить на сайте конференции [www.mcsme.ru/mmks](http://www.mcsme.ru/mmks).

Особенность ММКШ — ориентация докладов школьников на пользователя, т. е. читателя или слушателя. Программный Комитет и приглашённые им математики помогают докладчикам сделать их тексты и выступления более ясными и чёткими. За счёт этого обычно обнаруживаются (и часто исправляются) ошибки: теорема не доказана, пока нет грамотного и понятного письменного изложения доказательства. Такая работа требует времени. Поэтому мы настоятельно рекомендуем докладчикам представлять работы задолго до крайнего срока подачи (в сентябре или ранее).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Болбачан. *A short elementary proof of a Guillerera-Sondow formula*.  
<http://arxiv.org/abs/0910.4048>
- [2] Ф. Нилов. *Параболические четырёхугольники* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 12, 2008. С. 195–204. Эл. версия  
<http://arxiv.org/abs/0803.0072>
- [3] А. Скопенков. *Размышления об исследовательских задачах для школьников* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 12, 2008. С. 23–32. Эл. версия  
[www.mcsme.ru/circles/oim/iss1.pdf](http://www.mcsme.ru/circles/oim/iss1.pdf)

---

---

# По мотивам задачника «Математического просвещения»

---

---

## Нетранзитивные рулетки

И. И. Богданов

Представьте себе: вы приходите в казино и видите вместо одной рулетки с последовательными числами — сразу несколько рулеток, и числа на всех разные. Крупье предлагает вам такую игру: вы выбираете одну из рулеток, а затем он выбирает одну из оставшихся; после этого обе рулетки запускаются, и побеждает игрок, на чьей рулетке выпавшее число больше.

Ясно, что крупье не стал бы предлагать такую игру, если бы он оставался в проигрыше. Но может ли оказаться, что он будет выигрывать больше, чем в половине случаев (иначе говоря, может ли вероятность<sup>1)</sup> выигрыша крупье быть больше  $\frac{1}{2}$ )? Для этого надо, чтобы для каждой рулетки нашлась другая, которая выигрывает у неё чаще, чем проигрывает.

Это невозможно лишь на первый взгляд. На рис. 1 приведены два самых известных примера; второй из них (с заменой рулеток на игральные кубики) известен под названием *кубиков Эфрона* (ещё несколько подобных конфигураций можно найти, например, в статье М. Гарднера [1]). В нём, правда, встречаются одинаковые числа, но это легко исправить, заменив, скажем, шесть троек на шесть чисел, близких к тройке и т. п.

В первом примере каждая рулетка выигрывает у следующей по стрелке в 5 случаях из 9; во втором случае каждая рулетка выигрывает у следующей в 24 случаях из 36 — с вероятностью  $\frac{2}{3}$ ! Наверное, это ещё не предел?

Итак, после нахождения таких примеров встаёт вопрос — а насколько большим может быть выигрыш крупье? Может ли он предложить вам

---

<sup>1)</sup>От читателя требуются лишь самые элементарные представления о вероятности.



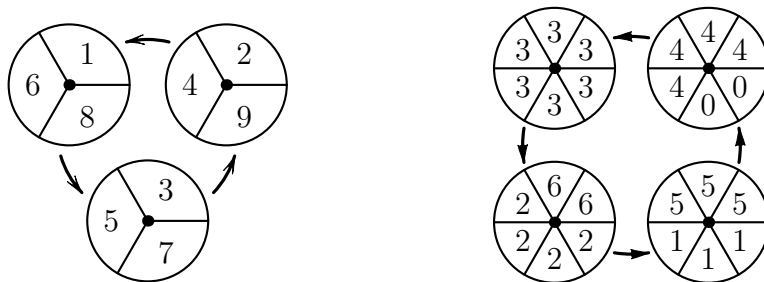


Рис. 1.

ставку 2 : 1 (т.е. при выигрыше вы получаете вдвое больше, чем отдаёте при проигрыше) и по-прежнему выигрывать? А 3 : 1? Иначе говоря — какой может быть наибольшая вероятность выигрыша крупье (при оптимальном выборе игрока)?<sup>2)</sup> А что, если количество рулеток ограничено?<sup>3)</sup>

Ответам на эти вопросы и посвящена эта заметка. Главным результатом в ней является решение задачи 10.5 из задачника «Математического просвещения». Напомним её условие.

10.5. На берегу круглого острова Гдетотам расположено  $n$  деревень, в каждой живут борцы. Был проведён турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня  $A$  считается сильнее деревни  $B$ , если хотя бы  $(1 - \alpha)$ -я часть поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни  $A$ . (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.) Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Докажите, что  $\alpha \geq \alpha_0 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n+2}}$ , причём число  $\alpha_0$  нельзя заменить на меньшее.

Ясно, что эта задача эквивалентна вопросу о максимальной возможной вероятности выигрыша крупье на  $n$  рулетках: достаточно в секторах каждой рулетки записать силы борцов из соответствующей деревни.

Мы предполагаем, что все числа на всех рулетках — разные. Кроме того, мы предполагаем, что все числа на каждой рулетке выпадают равновероятно (впрочем, это не играет особой роли, если не ограничивать количество чисел на рулетках).

<sup>2)</sup>Точнее, речь идёт о точной верхней грани этого выигрыша; мы увидим, что она чаще всего не достигается.

<sup>3)</sup>Казино платит за площадь арендуемого помещения, и слишком много рулеток строить невыгодно!

Выясним, как должен быть устроен выбор рулетки крупье в ответ на наш выбор. Пусть вероятность выигрыша крупье равна  $\beta$ . Тогда для любой рулетки  $A$ , выбранной вами, должна найтись рулетка  $B$ , выигрывающая у неё с вероятностью, не меньшей  $\beta$ . Проведём стрелку от  $B$  к  $A$ . В полученном графе в каждую вершину входит по стрелке, значит, в нём есть ориентированный цикл. Выбросив все рулетки, не входящие в этот цикл, мы получаем набор из не большего числа рулеток, в котором первая рулетка выигрывает у второй (с вероятностью не меньше  $\beta$ ), вторая — у третьей, ..., последняя — у первой. Значит, вероятность выигрыша крупье здесь не меньше, чем на исходном наборе (она могла и повыситься!). Назовём такую систему *системой с выигрышем  $\beta$* , если минимальная среди вероятностей выигрыша рулетки у следующей равна  $\beta$ . Далее мы рассматриваем только такие системы рулеток. (Заметим, что в задаче 10.5 также описана ровно такая система.)

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Для читателя, знакомого с теорией вероятности, приведём наиболее общую постановку задачи. Пусть  $X_1, \dots, X_n$  —  $n$  независимых случайных величин. Рассмотрим величину

$$F(X_1, \dots, X_n) = \min \{P(X_1 > X_2), P(X_2 > X_3), \dots, P(X_n > X_1)\}.$$

Каково максимальное возможное значение функции  $F(X_1, \dots, X_n)$ , если  $n$  может быть любым? А если  $n$  фиксировано?

Эта постановка — ненамного более общая. Действительно, любую случайную величину можно приблизить величиной с кусочно постоянной функцией распределения; более того, вероятности всех значений новой случайной величины можно сделать рациональными — а после этого и равными, заменив каждое значение на несколько очень близких друг к другу. Полученную случайную величину можно сопоставить рулетке. Таким образом, общая постановка сводится к нашему случаю, и ответы в обеих задачах совпадают.

Этот общий вопрос исследовался Трыбулой [2] и Усыскиным [3]; в нашу статью включены эти результаты.

## 1. ГЛОБАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Может показаться, что раз уж возможен выигрыш с вероятностью, большей  $\frac{1}{2}$ , то, наверное, можно выигрывать и с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Это не так! В этом разделе мы найдём точную верхнюю грань возможных выигрышей крупье.

**ТЕОРЕМА 1.** *Среди любых рулеток найдётся одна, которая выигрывает у любой из оставшихся с вероятностью, большей  $\frac{1}{4}$ ; при этом число  $\frac{1}{4}$*

нельзя заменить на меньшее. Иначе говоря, вероятность выигрыша крупье всегда меньше  $\frac{3}{4}$  (и он не будет предлагать ставку 3 : 1), но может быть сколь угодно близка к этому числу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на  $i$ -й рулетке стоят  $k_i$  чисел:  $a_{i,1} < a_{i,2} < \dots < a_{i,k_i}$ . Пусть  $b_i$  — медиана этого набора, то есть  $b_i = a_{i,m_i}$ , где  $m_i = \left\lceil \frac{k_i + 1}{2} \right\rceil$  (иначе говоря,  $b_i$  — число, стоящее в середине нашего списка; в случае чётного количества чисел мы выбрали меньшее из них). Выберем наибольшее из чисел  $b_i$ ; не ограничивая общности, можно считать, что это  $b_1$ . Тогда первая рулетка — искомая. Действительно,  $b_i < b_1$  для любого  $i > 1$ ; это значит, что каждое из чисел  $a_{i,1}, \dots, a_{i,m_i} = b_i$  меньше каждого из чисел  $b_1 = a_{1,m_1}, a_{1,m_1+1}, \dots, a_{1,k_1}$ . Таким образом, первая рулетка выигрывает у  $i$ -й не менее, чем в  $m_i(k_1 - m_1 + 1)$  случаях из  $k_i k_1$ , то есть вероятность её выигрыша не меньше

$$\frac{m_i(k_1 - m_1 + 1)}{k_i k_1} = \frac{m_i}{k_i} \left(1 - \frac{m_1 - 1}{k_1}\right) > \frac{1}{4},$$

так как  $\frac{1}{2}k_s + 1 > m_s \geq \frac{1}{2}k_s$  при любом  $s$ .

Осталось привести пример, показывающий, что число  $\frac{1}{4}$  нельзя заменить на большее. Выберем большое число  $n$  и рассмотрим клетчатый квадрат  $(2n + 1) \times (2n + 1)$ . Разделим его на два клетчатых треугольника:  $T_1$ , состоящий из всех клеток не выше диагонали, соединяющей левый нижний и правый верхний углы квадрата, и  $T_2$  — из всех остальных клеток. Заполним  $T_1$  числами от  $(2n + 1)^2$  до  $n(2n + 1) + 1$  сверху вниз по убыванию: в первую строку поставим самое большое число  $(2n + 1)^2$ , в следующую — два следующих, т. е.  $(2n + 1)^2 - 1$  и  $(2n + 1)^2 - 2$ , и т. д. Аналогично заполним треугольник  $T_2$  числами от  $n(2n + 1)$  до 1. На рис. 2 показан такой квадрат для  $n = 2$ .

Напишем теперь на  $i$ -й рулетке числа, стоящие в  $i$ -й строке квадрата. Тогда последняя рулетка будет выигрывать у первой с вероятностью

7	8	9	10	25
4	5	6	23	24
2	3	20	21	22
1	16	17	18	19
11	12	13	14	15

Рис. 2.

$1 - \frac{1}{2n+1} > \frac{3}{4}$  (при  $n \geq 2$ ). Для любого же  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $i$ -я рулетка будет проигрывать  $(i+1)$ -й в  $(i+1)(2n+1-i)$  случаях из  $(2n+1)^2$ , то есть вероятность такого проигрыша будет равна

$$\frac{(i+1)(2n+1-i)}{(2n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - (n-i)^2}{(2n+1)^2} \leq \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}.$$

При  $n \rightarrow \infty$  последняя оценка стремится к  $\frac{1}{4}$ . Итак, любая рулетка выигрывает у следующей по циклу с вероятностью, не меньшей  $1 - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}$  (что близко к  $\frac{3}{4}$ ), что и требовалось.  $\square$

Мы видим, что для построения примера, близкого к оптимуму, пришлось взять большое количество рулеток с большим количеством чисел на каждой. Далее мы выясним, что будет, если ограничить количество рулеток или чисел на каждой.

Точный ответ при ограниченном количестве чисел получается лёгкой модификацией предыдущего рассуждения.

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть на каждой из рулеток не больше, чем  $n \geq 3$  чисел. Тогда найдётся рулетка, которая выигрывает у любой из оставшихся с вероятностью, не меньшей  $f(n)$ , где  $f(2s) = f(2s-1) = 1 - \frac{s}{2(2s-1)}$ . При этом число  $f(n)$  нельзя заменить на меньшее.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Оценка аналогична оценке в предыдущей теореме; надо лишь поточнее оценить величину  $1 - \frac{m_i-1}{k_i}$ . Если  $k_i$  чётно, то  $1 - \frac{m_i-1}{k_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k_i}$ , а если оно нечётно, то  $1 - \frac{m_i-1}{k_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k_i}$ . Тогда нетрудно понять, что минимум выражения  $1 - \frac{m_i-1}{k_i}$  при  $k_i = 1, 2, \dots, n$  достигается тогда, когда  $k_i$  — наибольшее нечётное число, не превосходящее  $n$  (пусть оно равно  $2s-1$ ). Значит,

$$\frac{m_i(k_i - m_i + 1)}{k_i k_1} = \frac{m_i}{k_i} \left(1 - \frac{m_i - 1}{k_i}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2s-1)}\right) = \frac{s}{2(2s-1)},$$

что и требовалось.

Пример также получается нехитрым изменением предыдущего; надо только учесть, что для достижения точности в предыдущей оценке необходимо, чтобы длины строчек имели соответствующие чётности. На рис. 3 показан пример для  $n = 5$  (он же, естественно, годится для  $n = 6$ ); из него ясен общий принцип построения.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В последнем наборе рулеток не все строчки нужны: например, на рис. 3 первую и последнюю строки можно без особого ущерба

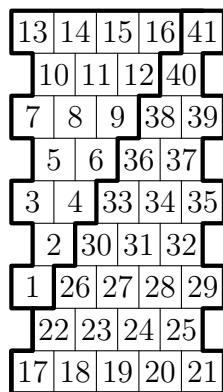


Рис. 3.

выкинуть. Значит, в этом случае количество рулеток можно уменьшить (а при больших значениях  $n$  это количество можно даже сделать меньшим  $n$ ).

Вопрос о том, какого выигрыша можно добиться, если фиксировать только количество рулеток, гораздо более интересен. Его разбору посвящён остаток статьи. Для его исследования мы сначала выделим некоторый класс оптимальных конфигураций.

## 2. УЛУЧШЕНИЕ РУЛЕТОК

Зафиксируем количество чисел на каждой рулетке и попытаемся найти вид, в котором следует искать оптимальную конфигурацию чисел.

Мы начнём с того, что опишем расположение чисел на рулетках на другом языке. Рассмотрим систему из  $n \geq 3$  рулеток с выигрышем  $\alpha$ . Запишем числа на рулетках в таблицу, числа на  $i$ -й рулетке — в  $i$ -ю строку по возрастанию (будем считать, что таблица склеена в цилиндр: её низ склеен с верхом, т. е. следующая строка за последней — первая). Построим ориентированный граф: соединим число  $a$  из  $i$ -й строки стрелкой с числом  $b$  из  $(i + 1)$ -й строки, если  $a > b$ . Тогда вероятность того, что  $i$ -я строка выигрывает у  $(i + 1)$ -й, равно количеству стрелок между этими строками, делённому на произведение количеств чисел в этих строках.

Таким образом, по графу можно восстановить все интересующие нас вероятности. Поэтому, если мы выясним, какие графы могут соответствовать расположению чисел на рулетках, то можно забыть про числа в вершинах графа и рассматривать только соответствующие графы (заменив числа в строках на точки).

Для (возможно, совпадающих) вершин  $a, b$  будем писать  $a \preceq b$ , если они стоят в одной строчке, причём  $a$  не правее  $b$ . Заметим, что рассматриваемые графы обладают дополнительным свойством: поскольку в каждой строке числа идут по возрастанию, то вместе с любой стрелкой  $a \rightarrow b$  в графе должны присутствовать все стрелки вида  $c \rightarrow d$ , где  $a \preceq c$  и  $d \preceq b$ . Такие графы мы будем называть *монотонными*.

Известно, что вершины ориентированного графа можно занумеровать так, чтобы любая стрелка шла от большего числа к меньшему, тогда и только тогда, когда в этом графе нет ориентированных циклов. Докажем версию этого утверждения для монотонных графов.

**ЛЕММА 3.** *Вершины монотонного графа  $G$  можно занумеровать так, чтобы любая стрелка шла от большего числа к меньшему (и числа в каждой строке шли по возрастанию), тогда и только тогда, когда в  $G$  нет ориентированных циклов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Необходимость отсутствия ориентированных циклов очевидна. Достаточность легко доказать индукцией по количеству вершин. Действительно, если в графе нет ориентированных циклов, то найдётся вершина, в которую не входит стрелок. Из монотонности, в самую правую вершину этой же строки также не входит стрелок. Тогда можно выбросить эту самую правую вершину, занумеровать вершины оставшегося графа (это возможно по предположению индукции), а затем присвоить выкинутой вершине номер, превосходящий номера всех остальных вершин. Ясно, что при этом все условия будут выполнены.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Вообще говоря, если по перенумерации заново построить граф, то в нём могут появиться стрелки, которых не было в исходном; однако это только увеличит вероятности выигрыша.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В монотонном графе отсутствие ориентированных циклов можно переформулировать так: в любом пути длины  $n$  («витке») с началом  $a$  и концом  $b$ , выполняется  $b \prec a$ .

Рассмотрим теперь произвольный монотонный граф без ориентированных циклов и попытаемся его «улучшить»: добавим в него несколько рёбер так, чтобы он продолжал удовлетворять условиям монотонности и отсутствия циклов (вероятности выигрыша при этом не уменьшатся). Естественно, это улучшение должно выглядеть так: если вершина  $a$  соединена со всеми вершинами следующей строки вплоть до  $b$ , то попытаемся соединить её со следующей вершиной после  $b$ ; если при этом не появилось ориентированных циклов, то получился монотонный граф «не хуже», чем до того. После нескольких улучшений мы получим граф, в котором такие добавления невозможны; назовём такой граф *связкой*. Наша ближайшая цель — выяснить вид связки.

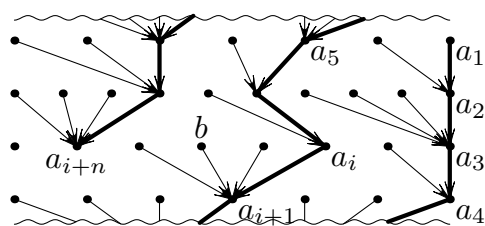


Рис. 4.

Для каждой вершины  $a$  обозначим через  $\psi(a)$  самую правую вершину, в которую из  $a$  ведёт стрелка (если таких стрелок нет, то положим  $\psi(a) = \emptyset$ ).

В связке найдётся вершина, в которую не ведёт ни одной стрелки; более того, можно считать, что она — самая правая вершина в своей строке. Выберем такую вершину  $a_1$  (пусть для определённости она лежит в первой строке). Далее положим  $a_2 = \psi(a_1)$ ,  $a_3 = \psi(a_2)$ , ... — до тех пор, пока для некоторого  $a_k$  не получится  $\psi(a_k) = \emptyset$ . Полученный путь  $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_k$  назовём *нитью*.

Примерный вид связки показан на рис. 4; из каждой вершины  $a$  проведена стрелка лишь в  $\psi(a)$ , нить выделена жирными линиями.

Рассмотрим любую вершину  $b$  такую, что  $a_{i+n} \prec b \preceq a_i$  (напомним, что  $n$  — количество строк, так что  $a_{i+n}$  и  $a_i$  лежат в одной строке); найдём  $\psi(b)$  (см. рис. 4). С одной стороны,  $\psi(b) \preceq \psi(a_i) = a_{i+1}$  из-за монотонности графа. С другой стороны, любой путь из  $n - 1$  ребра, начинающийся в  $t \preceq a_{i+1}$ , идёт не правее соответствующего участка нити  $a_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow a_{i+n}$ ; значит, если мы добавим ребра  $b \rightarrow t$  при всех  $t \preceq a_{i+1}$ , то в графе не появится циклов. А тогда эти ребра уже есть в связке, и  $\psi(b) = a_{i+1}$ .

Аналогично, если вершина  $a_i$  — самая левая вершина нити в своей строке и  $b \preceq a_i$ , то  $\psi(b) = \psi(a_i)$ . Если же  $a_i$  — самая правая вершина нити в своей строке и  $b \succ a_i$ , то  $\psi(b)$  — самая правая вершина в следующей строке.

Заметим теперь, что последний случай невозможен. Предположив противное, найдём наибольшее  $i \in [2, n]$  такое, что существует  $b \succ a_i$ . Если  $i = n$ , то по доказанному в связке есть стрелка  $b \rightarrow a_1$ , что невозможно по выбору  $a_1$ . Если же  $i < n$ , то  $\psi(b) = a_{i+1}$  — самый правый элемент в своей строке (из максимальной  $i$ ). Тогда можно добавить в граф все стрелки  $a_{i-1} \rightarrow t$  при  $a_i \prec t \preceq b$ : при этом цикла, содержащего новые рёбра, не появится, ибо путь, начинающийся с  $a_{i-1}$ , все равно пойдёт не правее нити, начиная с  $(i + 1)$ -й строки. Поскольку в связку добавлять рёбра нельзя, мы получили противоречие.

Итого, мы доказали следующую лемму.

**ЛЕММА 4.** *Если существует набор рулеток, выигрывающих по циклу с вероятностью  $\alpha$ , то существует и связка с не меньшим выигрышем. При этом в любой связке «первый виток» нити (то есть вершины  $a_1, \dots, a_n$ ) состоит из самых правых вершин в строках. Далее, для произвольной вершины  $b$ , если  $i$  — максимальный индекс такой, что  $b \preceq a_i$ , то  $\psi(b) = \psi(a_i)$ ; в частности, нить полностью задаёт всю связку.*

Теперь мы готовы к следующей переформулировке. Нарисуем вместо строки из  $t$  точек отрезок длины 1, разбитый на  $t$  равных частей. Если нить идёт из точки  $a$  в точку  $b$ , то соединим *правые* концы соответствующих отрезков. Полученную ломаную также назовём нитью; координаты (абсциссы) точек новой нити обозначим через  $b_i$ . Соединим также правый конец отрезка, соответствующего последней точке нити  $a_k$ , с началом следующего отрезка, и для симметрии продлим нить по всем остальным левым концам (см. рис. 5).

Пусть теперь на  $i$ -м отрезке отмечены точки с координатами  $x_0 = 0, x_1, \dots, x_s = 1$ , из которых нить переходит в точки  $(i + 1)$ -го отрезка с координатами  $y_0 = 0, y_1, \dots, y_s$  (может оказаться, что  $y_1 = 0$  или  $y_s < 1!$ ). Тогда ясно, что вероятность выигрыша  $i$ -й строки у  $(i + 1)$ -й равна

$$P_i = \sum_{i=1}^s (x_i - x_{i-1})y_i = \sum_{i=0}^{s-1} (1 - x_i)(y_{i+1} - y_i). \quad (1)$$

(В первой сумма посчитаны вероятности выигрыша для отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ ; во второй же — вероятности проигрыша для отрезков  $[y_i, y_{i+1}]$ .)

До этого момента мы предполагали, что количество чисел на рулетке фиксировано. Если убрать это требование, то можно выбирать на отрезках точки с произвольными рациональными координатами; а поскольку мы ищем точную верхнюю грань выигрыша, то можно убрать и требование рациональности: для любого примера с иррациональными координатами

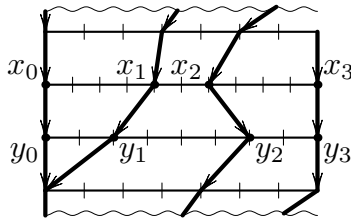


Рис. 5.



найдётся пример с рациональными, вероятности выигрыша в котором будут сколь угодно близки к изначальным.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Полученную в результате систему из  $n$  отрезков можно рассматривать как  $n$  рулеток с неравными секторами. Собственно, все предыдущие рассуждения также проходят для таких рулеток: достаточно каждой стрелке в нашем графе приписать вес, равный произведению площадей соответствующих секторов.

### 3. ОПТИМИЗАЦИЯ НИТИ

Разберёмся теперь, в каких случаях мы можем оптимизировать нить. Будем говорить, что одна нить не хуже другой, если минимальная вероятность выигрыша (т. е.  $\min\{P_1, \dots, P_n\}$ ) для первой нити не меньше, чем для второй.

**ЛЕММА 5.** *Для каждой нити существует нить, не худшая исходной, в которой на каждом отрезке есть не более одной точки, отличной от концов.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть на  $i$ -м отрезке найдутся две соседние точки нити, отличные от концов:  $b_s$  и  $b_{s+n}$ . Попробуем изменить эти числа. В выражения (1) для вероятностей  $P_i$  и  $P_{i-1}$ , соответствующих этому отрезку, наши числа входят линейно:  $P_i = c_1 b_s + c_2 b_{s+n} + \text{const}$ ,  $P_{i-1} = d_1 b_s + d_2 b_{s+n} + \text{const}$  для некоторых чисел  $c_i, d_i$ . Заменяем теперь  $b_s$  и  $b_{s+n}$  на  $b'_s = b_s + c_2 \varepsilon$ ,  $b'_{s+n} = b_{s+n} - c_1 \varepsilon$ ; тогда  $P_i$  не изменится, а  $P_{i-1}$  прибавится  $(d_1 c_2 - d_2 c_1) \varepsilon$ . Теперь, выбрав  $\varepsilon$  соответствующего знака, можно, не изменив значения  $P_i$ , заменить значение  $P_{i-1}$  на не меньшее.

Ясно, что  $\varepsilon$  нужно выбирать достаточно малым по модулю, чтобы не нарушить упорядоченность точек нити на отрезке. Граничным случаем при этом будет совпадение двух точек нити. Выбрав соответствующее значение  $\varepsilon$ , мы получим нить, которая в некоторый момент делает полный виток и приходит в точку, из которой этот виток начался (см. рис. 6). Выбросим все точки этого витка (кроме начальной). Нетрудно видеть, что мы не ухудшим её (поскольку каждый отрезок будет «выигрывать» у всех, у которых он выигрывал до того, и может быть, ещё у каких-то), но при этом уменьшим количество точек нити. (Может оказаться, что новая нить проходит не по всем концам или началам отрезков; в таком случае эти концы и начала нужно добавить в конец или начало нити, соответственно.)

Итак, после нескольких таких преобразований мы получим нить, в которой на каждом отрезке не более одной точки, отличной от концов, что и требовалось.  $\square$

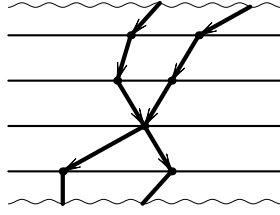


Рис. 6.

Таким образом, нам достаточно рассматривать только нити, в которых принадлежать интервалу  $(0, 1)$  могут лишь точки  $b_{n+1}, \dots, b_{2n}$ . Для краткости обозначим  $r_i = b_{i+n}$ . Тогда вероятность того, что  $i$ -я рулетка проигрывает  $(i + 1)$ -й, равна

$$Q_i = r_i(1 - r_{i+1}) \quad \text{при } i = 1, \dots, n - 1, \quad Q_n = 1 - (1 - r_n)r_1, \quad (2)$$

а проигрыш системы рулеток равен  $Q(r_1, \dots, r_n) = \max\{Q_1, \dots, Q_n\}$ . Функция  $Q(\cdot)$  непрерывна, поэтому на компакте  $(r_1, \dots, r_n) \in [0, 1]^n$  она достигает минимального значения. Обозначим временно через  $(r_1, \dots, r_n)$  произвольную точку её минимума, а через  $q$  — значение этого минимума.

ЛЕММА 6. В точке  $(r_1, \dots, r_n)$  имеем  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = q$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что  $r_1 < 1$ . Действительно, если  $r_1 = 1 = b_{n+1} = b_1$ , то можно удалить первый виток нити. Повторяя эту процедуру, в конце концов мы добьёмся того, что  $r_1 < 1$ .

Предположим, что утверждение леммы неверно; тогда найдётся такое  $i$ , что  $Q_i = q$ ,  $Q_{i+1} < q$  (мы считаем, что  $Q_{n+1} = Q_1$ ). Пусть  $i < n$ . Ясно, что  $1 > q = Q_i = r_i(1 - r_{i+1})$ , поэтому  $r_i > 0$  и  $r_{i+1} < 1$ . Заметим, что функции  $Q_i = r_i - r_i r_{i+1}$  и  $Q_{i+1}$  линейно зависят от  $r_{i+1}$ , причём коэффициент при  $r_{i+1}$  у первой функции отрицателен. Заменяем теперь  $r_{i+1}$  на  $r'_{i+1} = r_{i+1} + \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon > 0$ . Тогда значение  $Q_i$  уменьшится, а  $Q_{i+1}$  останется меньшим  $q$  (для этого  $\varepsilon$  и должно быть достаточно мало). Таким образом, в этом случае мы уменьшили количество  $Q_i$ , равных  $q$ .

В случае  $i = n$  проходят подобные рассуждения: во-первых, из  $1 > q = Q_n = 1 - (1 - r_n)r_1$  следует, что  $r_1 > 0$ ,  $r_n < 1$ ; кроме того, мы помним, что  $r_1 < 1$ . Далее, функция  $Q_n = 1 - r_1(1 - r_n)$  по-прежнему линейна по  $r_1$  с отрицательным коэффициентом при  $r_1$ ; значит, опять же можно увеличить значение  $r_1$ , уменьшая тем самым  $Q_n$ .

Итого, в любом случае можно уменьшить количество индексов  $i$  таких, что  $Q_i = q$  (оставив все остальные вероятности меньшими  $q$ ). Через

несколько таких шагов получим набор значений, для которых все  $Q_i < q$ . Это противоречит минимальности  $q$ .  $\square$

Итого, нам достаточно уже рассматривать нити, в которых все  $Q_i = q$ . Назовём такую нить *оптимальной*. Мы предполагаем, что в оптимальной нити  $r_1 < 1$ .

#### 4. ПОСЛЕДНЯЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Опишем структуру оптимальной нити в других терминах. Заметим, что равенство  $Q_i = q$  при  $i < n$  равносильно равенству  $r_i = f(r_{i+1})$ , где  $f(x) = \frac{q}{1-x}$ . Обозначим  $f_0(x) = x$ ,  $f_i(x) = f(f_{i-1}(x)) = f_{i-1}(f(x)) = \underbrace{f(f(\dots(f(x)\dots)))}_{i \text{ раз}}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Тогда в оптимальной нити мы имеем

$$r_{n-i} = f(r_{n-i+1}) = \dots = f_i(r_n). \text{ В частности, } r_1 = f_{n-1}(r_n).$$

Далее, ясно, что функция  $f_1(x)$  монотонно возрастает на  $[0, 1)$ ,  $f_1(0) \leq r_{n-1} < 1$ , и  $f_1(1-0) = +\infty$ . Тогда существует  $R_1 \in [0, 1)$  такое, что  $f_1(R_1) = 1$ . Теперь функция  $f_2(x) = f(f_1(x))$  монотонно возрастает на  $[0, R_1)$ ,  $f_2(0) \leq r_2 < 1$ , и  $f(R_1-0) = +\infty$ . Тогда существует  $R_2 \in [0, R_1)$  такое, что  $f_2(R_2) = 1$ . Продолжая так дальше, мы получим, что  $f_{n-1}(x)$  монотонно возрастает на  $[0, R_{n-2})$ ,  $f_{n-1}(0) \leq r_1 < 1$ ,  $f_{n-1}(R_{n-2}-0) = +\infty$ , и существует такая точка  $R_{n-1} \in [0, R_{n-2})$ , что  $f_{n-1}(R_{n-1}) = 1$ . При этом, поскольку  $r_i = f_{n-i}(r_n) \in [0, 1]$  при  $i = 1, \dots, n$ , мы получаем, что  $r_n \in [0, R_{n-1}] \subset [0, R_{n-2}) \subset \dots \subset [0, R_1)$ . Для краткости обозначим  $R = R_{n-1}$ .

**ЛЕММА 7.** *Рассмотрим функцию  $g(x) = f_{n-1}(x)(1-x)$  на отрезке  $[0, R]$ . Тогда  $1-q = g(r_n) = \max_{x \in [0, R]} g(x)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для произвольного  $x \in [0, R]$  рассмотрим последовательность  $r'_n = x$ ,  $r'_{n-i} = f_i(x)$ . Они определяют некоторую систему рулеток, в которой вероятности проигрыша  $Q'_i = q$  при всех  $i = 1, \dots, n-1$ . Из леммы 6 следует, что в этой рулетке  $Q'_n \geq q$  (иначе значение  $q$  неоптимально). Однако  $Q'_n = 1 - (1-r'_n)r'_1 = 1 - g(x)$ . Значит,  $g(x) \leq g(r_n)$ ; кроме того, при  $x = r_n$  мы имеем  $q = Q_n = 1 - g(r_n)$ , откуда  $g(r_n) = 1 - q$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Заметим, что если мы «отразим» наш рисунок симметрично относительно центра (это преобразование задаётся формулой  $r'_i = 1 - r_{n+1-i}$ ), то вероятности выигрыша не изменятся. Это легко доказать, подставив значения  $r'_i$  в формулы (2) (или просто внимательно посмотрев на рис. 5).

Итак, мы исследуем функцию  $g(x)$  на максимум. Из соображений симметрии следует, что  $g(1 - f_{n-1}(x)) = g(x)$ . В частности,  $g(R) = g(0)$ .

ЛЕММА 8.  $g(0) = g(R) > g(x)$  при всех  $x \in (0, R)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдём производную  $g'(x)$ . Имеем

$$f'(x) = \frac{q}{(1-x)^2} = \frac{f(x)^2}{q},$$

поэтому

$$f'_i(x) = [f(f_{i-1}(x))]' = \frac{f_i(x)^2}{q} f'_{i-1}(x),$$

откуда по индукции получаем

$$f'_i(x) = \frac{f_i(x)^2 f_{i-1}(x)^2 \cdots f_1(x)^2}{q^i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1-x)f'_{n-1}(x) - f_{n-1}(x) = \\ &= f_{n-1}(x) \cdot \left( \frac{f_{n-1}(x)f_{n-2}(x)^2 f_{n-3}(x)^2 \cdots f_1(x)^2}{q^{n-1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Множитель  $f_{n-1}(x)$  положителен, а выражение в скобках — возрастающая функция  $h(x)$  на отрезке  $[0, R]$ . Если бы она была знакопостоянной, то и  $g'(x)$  была бы знакопостоянной; это неверно, так как  $g(0) = g(R)$ . Значит,  $h(x)$  имеет ровно один корень  $x_0$ , и  $g'(x) < 0$  при  $x \in (0, x_0)$ ,  $g'(x) > 0$  при  $x \in (x_0, R)$ . Это и означает, что  $g(0) = g(R) > g(x)$  при всех  $x \in (0, R)$ .  $\square$

Итого, мы получили следующее описание оптимальной нити.

СЛЕДСТВИЕ 9. В оптимальной нити  $r_n = 0$ ,  $r_{n-i} = f_i(0)$ , причём  $r_1 = f_{n-1}(0) = 1 - q$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства  $r_n = 0$ ,  $r_{n-i} = f_i(0)$  следуют из лемм 7 и 8. Последнее равенство следует из того, что  $Q_n = 1 - (1 - r_n)r_1 = 1 - r_1 = q$ .  $\square$

Итого, наша задача свелась к следующей.

ЗАДАЧА. По числу  $q \in (0, 1)$  построим последовательность  $r_i = f_{n-i}(0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Найти минимальное  $q$ , при котором  $r_i \in [0, 1]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $r_1 = 1 - q$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что при возрастании  $q$  значения  $f(x)$  также возрастают. Значит, условие  $r_i \in (0, 1)$  можно опустить: при минимальном  $q$  это условие автоматически выполнится.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе Трыбулы [2] доказано несколько большее. Пусть

$$\Xi = \left\{ (P(X_1 > X_2), \dots, P(X_n > X_1)) \in [0, 1]^n : \right.$$

$X_i$  — независимые случайные величины с  $P(X_i = X_j) = 0$  при  $i \neq j$  }.

Тогда множество  $\Xi$  является выпуклой оболочкой аналогичного множества, построенного только для наборов случайных величин, соответствующих оптимальным нитям, их циклических сдвигов, и их же — выстроенных в обратном порядке (то есть «последовательностей с максимальным проигрышем»). Читатель может попытаться самостоятельно доказать это утверждение.

### 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ $q$

Для получения ответа нам потребуются некоторые сведения о дробно-линейных функциях, то есть о функциях вида  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - bc \neq 0$  — чтобы функция не оказалась константой). Мы будем считать, что наша функция  $f$  действует на множестве  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ; тогда она задаёт биекцию на множестве  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Заметим, что композиция дробно-линейных функций также дробно-линейна. Более того, если дробно-линейной функции сопоставить матрицу  $2 \times 2$  по правилу

$$\frac{ax+b}{cx+d} \mapsto M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то композиции  $f \circ g(x) = f(g(x))$  соответствует матрица  $M_{f \circ g} = M_f M_g$ . Здесь мы, правда, допускаем некоторую небрежность, ибо функции  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  и  $f(x) = \frac{\mu ax + \mu b}{\mu cx + \mu d}$  совпадают. Значит, функции  $f(x)$  сопоставлена не одна матрица  $M_f$ , а все матрицы вида  $\mu M_f$ ,  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Это не приведёт к недоразумениям.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это сопоставление означает, что группа всех дробно-линейных функций относительно композиции изоморфна группе  $PGL_2(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R}) / \{\mu E : \mu \in \mathbb{R}\}$ .

Рассмотрим некоторое  $q$ , при котором выполняются условия нашей задачи. Для облегчения записи положим  $s_i = r_{n-i}$ ; тогда  $s_0 = 0$ ,  $s_{i+1} = f(s_i)$ ,  $s_{n-1} = 1 - q$ .

Поскольку мы считаем, что  $f$  действует на  $\overline{\mathbb{R}}$ , мы можем продолжить последовательность  $(s_i)$ :  $s_n = f(s_{n-1}) = 1$ ,  $s_{n+1} = f(s_n) = \infty$ ,  $s_{n+2} = f(s_{n+1}) = 0$ . Мы получили, что  $f_{n+2}(0) = 0$ , и, аналогично,  $f_{n+2}(s_i) = s_i!$

Значит, у дробно-линейной функции  $f_{n+2}$  есть  $n+2$  неподвижных точки:  $s_0, \dots, s_{n+1}$ . Однако у нетождественной дробно-линейной функции не может быть более двух неподвижных точек: они должны быть корнями (не более чем квадратного) уравнения  $ax+b=x(cx+d)$ . Значит,  $f_{n+2}(x) \equiv x$ , и, следовательно, её матрица  $(M_f)^{n+2}$  является скалярной:  $(M_f)^{n+2} = \mu E$ .

Это значит, в свою очередь, что  $M_f$  диагонализуема, и её собственные значения пропорциональны корням  $2(n+2)$ -й степени из единицы (множитель 2 появился из-за того, что коэффициент  $\mu$  может оказаться отрицательным), то есть  $\lambda_{1,2} = c \exp\left(\pm \frac{\pi ki}{n+2}\right)$  для некоторого  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Однако

$M_f = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , и её характеристический многочлен есть  $P(x) = x^2 - x + q$ .

По теореме Виета,  $1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2c \cos \frac{\pi k}{n+2}$  (откуда  $c = \left(2 \cos \frac{\pi k}{n+2}\right)^{-1}$ ) и

$$q = \lambda_1 \lambda_2 = c^2 = \left(2 \cos \frac{\pi k}{n+2}\right)^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

(ясно, что можно ограничиться значениями  $k = 0, 1, \dots, n+1$ ).

Наоборот, если  $q$  имеет вид (3) при  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , то собственные значения матрицы  $M_f$  различны, она диагонализуема, и тогда  $M_f^{n+2} = (-1)^k c^{n+2} E$ ,  $f_{n+2}(x) \equiv x$ , откуда  $s_{n+2} = s_0$ ,  $s_{n+1} = \infty$ ,  $s_n = 1$ ,  $s_{n-1} = 1 - q$ . (Если  $k = 0$ , то матрица  $M_f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  не является диагонализуемой, и поэтому  $(M_f)^{n+2}$  не скалярна). Значит,  $q$  удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию (3) при  $k = 1, \dots, n+1$ . Минимальное значение  $q$  получится, естественно, при  $k = 1$ , и оно будет равно  $q = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n+2}}$ .

Итого, мы доказали следующую теорему (и тем самым решили задачу 10.5).

**ТЕОРЕМА 10.** *В любой системе из  $n$  рулеток с проигрышем  $q$  имеем  $q \geq \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n+2}}$ , причём это значение нельзя заменить на меньшее.*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Известно, что число  $\cos^2 \frac{\pi}{n+2} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{n+2}\right)$  рационально лишь при  $n = 1, 2, 4$ . Поэтому набор рулеток (с равными секторами), на которых *достигается* проигрыш  $q$ , возможен лишь при  $n = 4$  (ибо рулеток не менее трёх). Он действительно достигается, как показывает правый пример на рис. 1; здесь  $q = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}$ . Если же допустить рулетки с произвольными длинами секторов, то это значение достигается

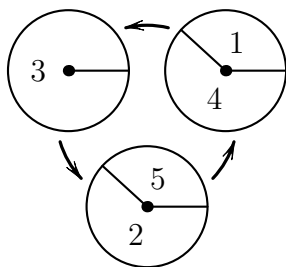


Рис. 7.

всегда: достаточно построить соответствующую нить, а по ней построить рулетки. На рис. 7 изображены оптимальные рулетки для  $n = 3$  (бóльшие секторы на разделённых рулетках составляют  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ -ю часть рулетки).

В заключение хочется заметить, что вопрос, какого максимального выигрыша можно добиться на  $n$  рулетках с  $k$  числами на каждой, ещё далёк от решения. В 1994 г. Р. Сэвидж [4] нашёл точные значения при  $n = 3$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Гарднер. *Нетранзитивные парадоксы*. В кн. «Путешествие во времени». М.: Мир, 1990.
- [2] S. Trybula. *On the paradox of  $n$  random variables* // Zastos. Mat. (Appl. Math.) Vol. 8, 1965. P. 143–154.
- [3] Z. Usiskin. *Max–min probabilities in the voting paradox* // Ann. Math. Statist. Vol. 35, 1964. P. 857–862.
- [4] R. Savage. *The Paradox of Nontransitive Dice* // The American Mathematical Monthly. Vol. 101, no. 5, 1994. P. 429–436.

---

И. И. Богданов, кафедра высшей математики Московского физико-технического института, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.

Email: ilya.i.bogdanov@gmail.com

# О некоторых парах перспективных треугольников

Н. И. Белухов

*Посвящается Цветине*

В «Математическом просвещении» вып. 12, 2008 г. была опубликована следующая красивая задача под номером 12.8:

**ЗАДАЧА 1.** Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны, противоположно ориентированы и имеют общий ортоцентр. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. (А. Акопян)

Авторское решение использовало проективные методы и свойства равносторонних гипербол. В данной статье мы рассмотрим задачу с другой точки зрения. Мы приведём её элементарное решение и обсудим, как оно может быть найдено. Затем мы выведем обобщение утверждения задачи 1, называемое «теорема о двух треугольниках», и исследуем его связь с другими задачами. Наконец мы сформулируем несколько близких теорем и приведём их элементарные доказательства (известные автору). Все доказываемые утверждения сформулированы в виде задач, которые читатель может пытаться решать самостоятельно.

## 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Пусть  $H$  — общий ортоцентр треугольников, и серединные перпендикуляры к отрезкам  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $P_c$ . Покажем, что  $\angle AP_cA_1 = 180^\circ - 2\alpha$  и  $\angle BP_cB_1 = 180^\circ - 2\beta$  (через  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  обозначены углы  $\triangle ABC$ ).

Действительно, пусть точка  $P'_c$  на серединном перпендикуляре к  $AA_1$  такова, что  $\angle AP'_cA_1 = 180^\circ - 2\alpha$ . Пусть также  $Q$  — такая точка на серединном перпендикуляре, что  $\angle AQA_1 = 2\gamma$ . Тогда  $\triangle A_1QP'_c \sim \triangle A_1HB_1$  (см. рис. 1), а значит,  $\triangle A_1B_1P'_c \sim \triangle A_1HQ$  и  $P'_cB_1 : QH = A_1B_1 : A_1H$ . Аналогично  $P'_cB : QH = AB : AH$ . Поскольку  $\triangle ANB \sim \triangle A_1NB_1$ , отсюда следует, что  $P'_cB = P'_cB_1$ , т. е.  $P'_c \equiv P_c$ .

---

Перевод А. А. Заславского.



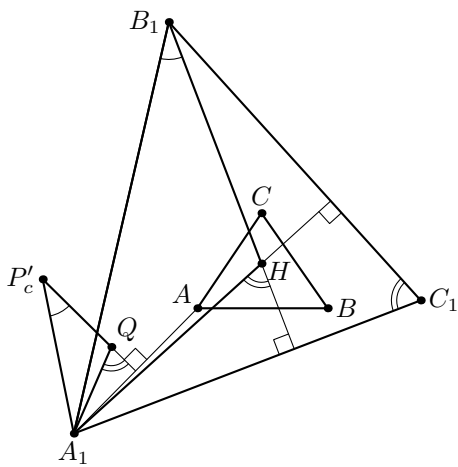


Рис. 1.

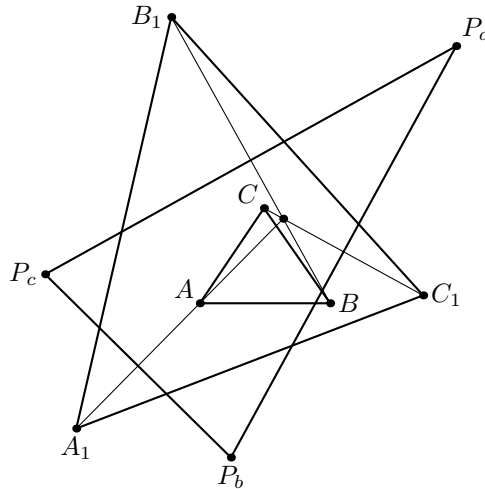


Рис. 2.

Аналогично  $\angle BP_cB_1 = 180^\circ - 2\beta$ .

Теперь аналогично определим точки  $P_a$  и  $P_b$ . Как показано выше,  $\angle AP_cA_1 = 180^\circ - 2\alpha = \angle AP_bA_1$ , значит  $P_bP_c$  — серединный перпендикуляр к  $AA_1$ , следовательно, четырёхугольник  $AP_bA_1P_c$  — ромб. Таким образом,  $AA_1$  — серединный перпендикуляр к  $P_bP_c$ . Аналогично  $BB_1$  и  $CC_1$  — серединные перпендикуляры к  $P_aP_c$  и  $P_aP_b$  (рис. 2), т.е. все три прямые проходят через центр описанной окружности треугольника  $P_aP_bP_c$ .

## 2. ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА

Чтобы объяснить, как можно найти это решение, вспомним известную теорему.

**ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА.** Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник, и равнобедренные треугольники  $\triangle ABT_c \sim \triangle BCT_a \sim \triangle CAT_b$  с углами при вершинах, равными  $120^\circ$ , построены на его сторонах как на основаниях во внешнюю сторону. Тогда треугольник  $T_aT_bT_c$  правильный.

Утверждение теоремы остаётся верным для треугольников, построенных во внутреннюю сторону. Соответствующий правильный треугольник обозначим, как  $\triangle S_aS_bS_c$ .

Заметим, что из этой конфигурации можно извлечь ряд фактов, касающихся только треугольников  $T_aT_bT_c$  и  $S_aS_bS_c$ . Наиболее важный из этих фактов состоит в том, что прямые  $T_aS_a$ ,  $T_bS_b$  и  $T_cS_c$  пересекаются в одной точке (центре описанной окружности  $\triangle ABC$ )!

Формулируя подобные факты, мы можем исключить  $\triangle ABC$  и говорить только о двух правильных треугольниках, подразумевая, разумеется, что существует  $\triangle ABC$ , для которого они являются треугольниками Наполеона. Читатель, знакомый с теоремой, может вывести необходимое условие для этого — треугольники должны быть противоположно ориентированы и иметь общий центр (центры треугольников  $T_aT_bT_c$  и  $S_aS_bS_c$  совпадают с центром тяжести  $\triangle ABC$ ). То, что это условие является и достаточным, вытекает из следующей задачи, предложенной автором несколько лет назад.

**ЗАДАЧА 2.** Пусть  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — правильные, противоположно ориентированные треугольники с общим центром. Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

Приведём изящное решение этой задачи, не использующее теорему Наполеона.

**РЕШЕНИЕ.** Пусть точка  $Q$  изогонально сопряжена  $A_1$  относительно  $\triangle ABC$ ,  $Q'$  симметрична  $Q$  относительно биссектрисы  $\sphericalangle BAC$ . Тогда  $Q'$  лежит на всех прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .  $\square$

Сходство двух задач очевидно, так что возникает вопрос: существует ли обобщение теоремы Наполеона, порождающее конфигурацию задачи 1, так же, как классическая теорема порождает конфигурацию задачи 2? Ответ положительный.

**ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА.** Дан  $\triangle MNP$  и точка  $T$ . Для произвольного треугольника  $ABC$  построим точки  $T_a$ ,  $T_b$  и  $T_c$  такие, что  $\triangle ABT_c \sim \triangle MNT$ ,  $\triangle BCT_a \sim \triangle NPT$  и  $\triangle CAT_b \sim \triangle PMT$  (все подобия сохраняют ориентацию). Тогда углы  $\triangle T_aT_bT_c$  не зависят от выбора  $\triangle ABC$ . Более точно, пусть прямые  $MT$ ,  $NT$  и  $PT$  вторично пересекают описанную окружность  $\triangle MNP$  в точках  $M_1$ ,  $N_1$  и  $P_1$ . Тогда треугольники  $T_aT_bT_c$  и  $M_1N_1P_1$  подобны и противоположно ориентированы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Построим точки  $U_a$ ,  $U_b$  и  $U_c$  такие, что

$$MNPT \sim ABU_cT_c \sim U_aBCT_a \sim AU_bCT_b.$$

Тогда  $\triangle BT_cU_c \sim \triangle BT_aC$ , а потому  $\triangle BU_cC \sim \triangle BT_cT_a$ . Аналогично доказывается, что  $\triangle AU_cC \sim \triangle AT_cT_b$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sphericalangle T_bT_cT_a &= \sphericalangle T_cAU_c + \sphericalangle U_cBT_c = \sphericalangle TMP + \sphericalangle PNT = \\ &= \sphericalangle M_1P_1T + \sphericalangle TP_1N_1 = \sphericalangle M_1P_1N_1. \end{aligned}$$

Так же получаем  $\sphericalangle T_aT_bT_c = \sphericalangle P_1M_1N_1$  и  $\sphericalangle T_cT_aT_b = \sphericalangle N_1M_1P_1$ .  $\square$

Возьмём теперь другой треугольник  $M'N'P'$  и точку  $T'$  и, применив к  $\triangle ABC$  ту же конструкцию, получим другой треугольник  $T'_aT'_bT'_c$ . Какими должны быть необходимые и достаточные условия на треугольники

$T_aT_bT_c$  и  $T'_aT'_bT'_c$ , чтобы существовал  $\triangle ABC$ , для которого они являются обобщёнными треугольниками Наполеона? Ответ даёт следующая

**ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА О ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКЕ.** Существуют фиксированные точки  $X$  и  $X'$ , зависящие только от четырёхугольников  $MNPT$  и  $M'N'P'T'$  и такие, что для точек  $O$  и  $O'$ , удовлетворяющих условиям  $T_aT_bT_cO \sim M_1N_1P_1X$  и  $T'_aT'_bT'_cO' \sim M'_1N'_1P'_1X'$  (оба подобия не сохраняют ориентацию),  $O \equiv O'$  для любого  $\triangle ABC$ .

Эти точки можно построить так: заметим, что при применении конструкции Наполеона к самому треугольнику  $MNP$  треугольник  $T_aT_bT_c$  вырождается в точку  $T$ , которая, следовательно, совпадает с соответствующей точкой  $O$ . Отсюда получаем следующий способ: построим точки  $X_a, X_b$  и  $X_c$  такие, что  $\triangle MNX_a \sim \triangle M'N'T'$ ,  $\triangle NPX_b \sim \triangle N'P'T'$  и  $\triangle PMX_c \sim \triangle P'M'T'$  (т. е. применим конструкцию Наполеона к  $\triangle M'N'P'$  и  $\triangle MNP$ ). Теперь построим точку  $O'$ , для которой  $X_aX_bTX_cT \sim M'_1N'_1P'_1O'$ . Тогда  $O'$  — одна из фиксированных точек предыдущей теоремы.

Вторую точку можно найти, построив  $\triangle M'N'X'_a \sim \triangle MNT$ ,  $\triangle N'P'X_b \sim \triangle NPT$  и т. д. Заметим, что в обоих случаях мы получаем подобные четырёхугольники  $MTNX_c \sim M'X'_cN'T'$  и т. д.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольный треугольник  $ABC$ . Построим точку  $O$  и точки  $R_a, R_b$  и  $R_c$  так, что

$$OT_aT_bT_cR_aR_bR_c \sim T'X'_aX'_bX'_cM'N'P'.$$

Построим также

$$\begin{aligned} OW'_bT'_aW'_c &\sim T_aBT'_aC \sim T_aR_bOR_c \text{ и} \\ OW''_aT'_cW''_b &\sim T_cAT'_cB \sim T_cR_aOR_b. \end{aligned}$$

Покажем, что  $W'_b \equiv W''_b \equiv W_b$ . Тогда, построив аналогично точки  $W_a$  и  $W_c$ , получим, что  $OT'_aT'_bT'_cW_aW_bW_c \sim TX_aX_bX_cMNP$  и, значит,  $O \equiv O'$ , что и требуется доказать.

Для этого заметим, что  $T_aCT'_aB \sim T_aR_cOR_b$  и потому  $\triangle T_aBR_b \sim \triangle T_aT'_aO$ . Следовательно,  $\angle(R_bB, OT'_a) = \angle BT_aT'_a = \angle W'_bOT'_a$ , откуда получаем  $OW'_b \parallel R_bB$ . Кроме того,

$$OW'_b : OT'_a = T_aB : T_aT'_a = R_bB : OT'_a,$$

т. е.  $OW'_b = R_bB$ . Аналогично получаем, что  $OW''_b \parallel R_bB$  и  $OW''_b = R_bB$ , что завершает доказательство.

Теорема Наполеона в приведённой здесь общей формулировке является источником многих олимпиадных задач. Различным образом выбирая треугольники в её формулировке, мы получим ряд задач вида «Докажите, что такие-то треугольники подобны» или «Докажите, что такие-то точки в таких-то треугольниках совпадают» и т. д. Приведём несколько примеров.

ЗАДАЧА 3. Пусть в выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$   $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$  и  $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$ . Докажите, что  $BC \cdot AE \cdot FD = CA \cdot EF \cdot DB$ .  
(IMO shortlist 1998, Польша)

ЗАДАЧА 4. Дан треугольник  $ABC$  и точки  $A_1, B_1, C_1$  на его описанной окружности такие, что прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке. Точка  $A_2$  симметрична  $A_1$  относительно  $BC$ , точки  $B_2$  и  $C_2$  определены аналогично. Докажите, что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  подобны.  
(Олимпиада им. И. Ф. Шарыгина, А. Заславский)

ЗАДАЧА 5. Дан треугольник  $ABC$ . Точка  $A_1$  — середина дуги  $BC$  описанной около него окружности, не содержащей  $A$ , точка  $A'$  симметрична  $A_1$  относительно  $BC$ . Точки  $B_1, B', C_1$  и  $C'$  определены аналогично.

(а) Докажите, что ортоцентр  $\triangle A'B'C'$  совпадает с центром вписанной окружности треугольника  $\triangle ABC$ .

(б) Докажите, что окружности Эйлера треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  концентричны.

(с) Обозначим центры описанной и вписанной окружностей  $\triangle ABC$  через  $O$  и  $I$ . Докажите, что радиус описанной окружности  $\triangle A'B'C'$  равен  $|OI|$ .  
(Н. Белухов)

Теперь нетрудно выбрать четырёхугольники  $MNPT$  и  $M'N'P'T'$  так, чтобы получить конфигурацию задачи 1 — нужно, чтобы треугольники  $MNP$  и  $M'N'P'$  были подобны и противоположно ориентированы, а точки  $T$  и  $T'$  были центрами описанных около них окружностей. Тогда четырёхугольники  $AT_cBT'_c$ ,  $BT_aCT'_a$  и  $CT_bAT'_b$  будут ромбами, и, исходя из треугольников  $T_aT_bT_c$  и  $T'_aT'_bT'_c$ , мы можем восстановить точки  $A, B$  и  $C$ , проведя соответствующие серединные перпендикуляры. В результате получим решение, приведённое в первом параграфе.

Но можно взять треугольники  $MNP$  и  $M'N'P'$  не подобными, по-прежнему выбирая в качестве  $T$  и  $T'$  центры их описанных окружностей. Тогда большая часть доказательства сохранится, и мы получим обобщение, описанное в следующем параграфе.

### 3. ТЕОРЕМА О ДВУХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

ТЕОРЕМА. Пусть даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  и точка  $O$ . Найдём необходимое и достаточное условие того, что два треугольника, подобных  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  с центром  $O$  (но разными углами поворота и коэффициентами гомотетии), были перспективны. Или: для двух четырёхугольников  $OA'B'C' \sim OABC$  и  $OA'_1B'_1C'_1 \sim OA_1B_1C_1$  прямые  $A'A'_1, B'B'_1$  и  $C'C'_1$  пересекаются в одной точке. Мы докажем, что это равносильно выполнению одного из следующих двух условий

(1) Оба четырёхугольника  $OABC$  и  $OA_1B_1C_1$  вписанные и прямо подобны.

(2) Ни один из четырёхугольников не является вписанным и выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \angle ABC = \angle A_1OB_1, \quad \angle BCA = \angle B_1OC_1, \quad \angle CAB = \angle C_1OB_1, \\ \angle A_1B_1C_1 = \angle AOB, \quad \angle B_1C_1A_1 = \angle BOA, \quad \angle C_1A_1B_1 = \angle COB. \end{aligned} \quad (*)$$

Заметим, что  $\angle XYZ$  обозначает ориентированный угол. Если  $O$  лежит внутри обоих треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , эта система уравнений имеет простой геометрический смысл:

$$180^\circ = \angle A + \angle B_1OC_1 = \angle A_1 + \angle BOC = \angle B + \angle C_1OA_1 = \dots \text{ и т. д.}$$

Прежде, чем приступить к доказательству, исследуем систему (\*). Ясно, что из любых трёх уравнений в одной строке следует четвёртое, но для нас более интересно, что эта система равносильна следующей:

$$\begin{aligned} \angle OAB = \angle OC_1B_1, \quad \angle OBC = \angle OA_1C_1, \quad \angle OCA = \angle OB_1A_1, \\ \angle OAC = \angle OB_1C_1, \quad \angle OCB = \angle OA_1B_1, \quad \angle OBA = \angle OC_1A_1 \end{aligned} \quad (**)$$

Вывести (\*) из (\*\*) легко. Покажем, как вывести (\*\*) из (\*): в  $\triangle A_1B_1C_1$ , проведём прямые, делящие его углы на части, равные соответствующим углам  $\triangle ABC$  (например, прямая  $l_a$ , проходящая через точку  $A_1$ , делит  $\angle B_1A_1C_1$  так, что  $\angle(B_1A_1, l_a) = \angle BCO$  и  $\angle(l_a, A_1C_1) = \angle OBC$ ). Так как прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  пересекаются в одной точке  $\triangle ABC$ , то, применив теорему Чебы в форме синусов, получим, что прямые  $l_a, l_b$  и  $l_c$  пересекаются в некоторой точке  $O'$ . Применив наше построение к этой точке и используя (\*), получим, что  $\angle OA_1O' = \angle OB_1O' = \angle OC_1O'$ . Так как в случае (2) четырёхугольник  $OABC$  не является вписанным, отсюда следует, что  $O \equiv O'$ , что и требовалось доказать.

Это наблюдение будет весьма полезно в дальнейшем в ходе доказательства.

**Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ.** Используем аналитическое рассуждение.

Зафиксировав четырёхугольник  $OABC$  и угол поворота  $\theta$  четырёхугольника  $OA_1B_1C_1$ , устремим коэффициент гомотетии  $OA_1B_1C_1$  к бесконечности. Тогда точка пересечения прямых  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  будет стремиться к некоторой точке  $X_\theta$ , а сами прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  — к прямым, проходящим через  $A, B$  и  $C$ , параллельным  $OA_1, OB_1$  и  $OC_1$  соответственно. Т.е. прямые, проходящие через  $A, B$  и  $C$ , параллельные  $OA_1, OB_1$  и  $OC_1$ , пересекаются в  $X_\theta$ .

Теперь будем менять  $\theta$ . Тогда прямые  $AX_\theta, BX_\theta$  и  $CX_\theta$  будут вращаться вокруг  $A, B$  и  $C$  с одинаковыми угловыми скоростями. Значит,  $X_\theta$  будет одновременно двигаться по описанным окружностям треугольников

$ABX_\theta$ ,  $BCX_\theta$  и  $CAX_\theta$ , т.е. эти окружности совпадают, и  $X_\theta$  лежит на описанной окружности  $\triangle ABC$ .

Но это однозначно определяет углы между  $OA_1$ ,  $OB_1$  и  $OC_1$ ! Аналогично углы между  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  равны и противоположно ориентированы углам  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Если  $OABC$  не является вписанным, эти условия однозначно определяют форму и ориентацию четырёхугольника  $OA_1B_1C_1$ , соответствующую случаю (2) теоремы.

Если же четырёхугольник  $OABC$  вписанный, то получаем, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  одинаково ориентированы. Выберем четырёхугольник  $OA'_1B'_1C'_1$  с той же описанной окружностью, что и  $OABC$ . Если  $\triangle ABC \equiv \triangle A'_1B'_1C'_1$ , мы получаем случай (1). Если же  $\triangle ABC \not\equiv \triangle A'_1B'_1C'_1$ , то прямые  $AA'_1$ ,  $BB'_1$  и  $CC'_1$  равноудалены от центра окружности  $OABC$  и могут пересекаться в одной точке, только будучи её диаметрами. Теперь нетрудно построить пример, когда  $A'A'_1$ ,  $B'B'_1$  и  $C'C'_1$  не пересекаются в одной точке.

Достаточность. (1) Легко видеть, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  проходят через вторую общую точку окружностей  $OABC$  и  $OA_1B_1C_1$ .

(2) Построим такую точку  $P_c$ , что  $\angle P_cAA_1 = \angle A$ ,  $\angle P_cA_1A = \angle A_1$  и треугольники  $AP_cA_1$  и  $ABC$  одинаково ориентированы. Покажем, что  $\angle P_cBB_1 = \angle B$ ,  $\angle P_cB_1B = \angle B_1$  и треугольники  $BP_cB_1$  и  $A_1B_1C_1$  одинаково ориентированы.

Действительно, построим точку  $T_c$ , изогонально сопряжённую  $C$  относительно  $\triangle AOB$ . Тогда  $\triangle AT_cO \sim \triangle AP_cA_1$ , и надо показать, что  $\triangle BT_cO \sim \triangle BP_cB_1$ . Аналогично, пусть  $S_c$  изогонально сопряжена  $C_1$  относительно  $\triangle A_1OB_1$ . Тогда  $\triangle OS_cA_1 \sim \triangle AP_cA_1$  и надо показать, что  $\triangle BS_cO \sim \triangle B_1T_cB$ .

Имеем  $\triangle AT_cO \sim \triangle AP_cA_1$ , откуда  $\triangle AP_cT_c \sim \triangle AA_1O$  и  $\angle P_cT_cA = \angle A_1OA$ , так что  $\angle BT_cP_c = \angle BOB_1$ . Аналогично  $BT_c : T_cP_c = BO : OB_1$ . Но отсюда следует, что  $\triangle BT_cP_c \sim \triangle BOB_1$ , а значит,  $\triangle BT_cO \sim \triangle BQ_cB_1$ , что и требовалось доказать.

Теперь построим аналогично точки  $P_a$  и  $P_b$ . Из проведённых выше рассуждений сразу следует, что четырёхугольники  $AP_cA_1P_b$ ,  $BP_aB_1P_c$  и  $CP_bC_1P_a$  — дельтоиды. Следовательно, прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  являются серединными перпендикулярами к сторонам  $\triangle P_aP_bP_c$  и пересекаются в центре его описанной окружности.  $\square$

Из доказанной теоремы легко получить множество красивых следствий. Прежде всего, это задача 1. Другой пример — следующая задача, предложенная автором.

Задача 6. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Произвольная прямая  $l$  проходит через центр

$I$  этой окружности. Пусть  $\triangle A'B'C'$  симметричен  $\triangle A_1B_1C_1$  относительно  $l$ . Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.  
(Болгарская олимпиада, 2009)

Весьма короткое решение этой задачи было найдено И. Богдановым во время олимпиады.

РЕШЕНИЕ. Имеем равенство ориентированных углов

$$\angle A'IB' = -\angle A_1IB_1 = 180^\circ + \angle ACB = 2(90 + \angle ACI) = 2\angle AIB.$$

Отсюда следует, что точки, симметричные  $A'$  относительно  $AI$  и  $B'$  относительно  $BI$ , являются одной и той же точкой  $T$ . Аналогично  $T$  симметрична  $C'$  относительно  $CI$ , и прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в точке, изогонально сопряжённой  $T$  относительно  $\triangle ABC$ .

Следующее обобщение этой задачи совершенно в другом направлении было получено М. Матдиновым.

ЗАДАЧА. Вписанная в  $\triangle ABC$  окружность касается его сторон в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Пусть  $I$  — центр окружности,  $P$  — произвольная точка. Прямые  $PA_1$ ,  $PB_1$  и  $PC_1$  вторично пересекают окружность в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.

Исходная задача возникает, когда  $P$  — бесконечно удалённая точка.

Любопытный предельный случай возникает, когда  $\triangle A_1B_1C_1$  вырождается в точку  $O$ . На первый взгляд, утверждение теоремы в этом случае становится бессмысленным, но эту трудность можно преодолеть с помощью теоремы Дезарга. Действительно, пусть соответствующие стороны треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  пересекаются в точках  $Q_a$ ,  $Q_b$  и  $Q_c$ . Тогда теорема утверждает, что эти точки лежат на одной прямой. Так как эти точки можно определить и при  $\triangle A_1B_1C_1 \equiv O$ , получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Дан  $\triangle ABC$  и точка  $O$ . Пусть  $l$  — произвольная прямая, проходящая через  $O$ , а прямые, симметричные  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  относительно  $l$ , пересекают соответствующие стороны  $\triangle ABC$  в точках  $Q_a$ ,  $Q_b$  и  $Q_c$ . Тогда эти точки лежат на одной прямой.

Возможна следующая красивая переформулировка

ЗАДАЧА 7. Пусть  $ABCDEF$  — полный четырёхсторонник с диагоналями  $AC$ ,  $BD$  и  $EF$ . Точка  $O$  такова, что биссектрисы двух из углов  $\angle AOC$ ,  $\angle BOD$  и  $\angle EOF$  совпадают. Докажите, что биссектриса третьего угла также совпадает с ними.  
([2, №1052], С. Маркелов)

Можно сделать следующее любопытное наблюдение.

ЗАДАЧА 8. Пусть в обозначениях предыдущей теоремы прямая  $l$  проходит через центр вписанной в  $\triangle ABC$  окружности. Докажите, что прямая  $Q_a Q_b Q_c$  касается этой окружности. (Hyacinthos<sup>1</sup>)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть касательная к окружности из точки  $Q_a$ , отличная от  $BC$ , пересекает  $AB$  в точке  $Q'_c$ . Достаточно показать, что  $Q_c \equiv Q'_c$ .

Пусть  $PI$  пересекает  $AC$  и  $Q_a Q'_c$  в точках  $K$  и  $L$ . Пусть также точки  $M$  и  $N$  симметричны  $Q_a$  и  $C$  относительно  $PI$ . Заметим, что  $PMA$  — прямая.

Теперь шестиугольник  $KAQ'_cLMN$  описан вокруг вписанной окружности  $\triangle ABC$ , и по теореме Брианшона  $KL$ ,  $AM$  и  $Q'_cN$  пересекаются в одной точке. Следовательно, эта точка есть  $P$  и  $Q'_cNP$  — прямая, т. е.  $\angle CPI = \angle Q'_cPI$  и  $Q'_c \equiv Q_c$ .  $\square$

Есть ли другие интересные результаты, когда  $l$  проходит через какую-нибудь замечательную точку или  $O$  является замечательной точкой? Автору это неизвестно, но читатель может провести собственное исследование!

#### 4. ГОМОТЕТИЧНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Предыдущие исследования (подробнее см. конец этого раздела) побудили автора рассмотреть ряд случаев, в которых два треугольника остаются перспективными, притом что один из них подвергается гомотетии с фиксированным центром и переменным коэффициентом. Общее описание таких ситуаций получается заменой слово «подобный» в формулировке теоремы о двух треугольниках словом «гомотетичный»:

*пусть даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  и точка  $O$ . Найдите необходимые и достаточные условия того, что любые два треугольника, гомотетичные  $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  с центром  $O$  (но разными коэффициентами), были перспективны.*

К сожалению, для этого случая автору неизвестен общий критерий, подобный приведённому в предыдущем разделе.

Однако существует одно мощное достаточное условие (разумеется, тривиальное достаточное условие возникает, когда треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  сами гомотетичны, мы используем это позднее). Оно является специальным случаем теоремы Сонда<sup>2</sup>), и имеет следующий вид.

<sup>1</sup>)Hyacinthos — группа, обсуждающая проблемы геометрии треугольника на форуме <http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>. Проблема возникла в процессе обсуждения и не имеет определённого автора.

<sup>2</sup>)Эта теорема была сообщена автору А. Заславским. Его статья «Теорема Сонда» на <http://math.olymp.mioo.ru/>, может использоваться как введение в тему.



ТЕОРЕМА СОНДА. Пусть треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  ортологичны и оба центра ортологичности совпадают с точкой  $O$ . Это значит, что

$$\begin{aligned} OA \perp B_1C_1, & \quad OB \perp C_1A_1, & \quad OC \perp A_1B_1, \\ OA_1 \perp BC, & \quad OB_1 \perp CA, & \quad OC_1 \perp AB. \end{aligned}$$

Тогда прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

Ясно, что условие теоремы сохраняется при гомотетии.

Интересно отметить, что для любых двух треугольников, удовлетворяющих условию теоремы Сонда, можно построить два треугольника, удовлетворяющих условию теоремы о двух треугольниках, отразив один из них относительно произвольной прямой, проходящей через  $O$ ! Обратно, если выполнены условия теоремы о двух треугольниках, то отразив один из них относительно некоторой прямой, проходящей через  $O$ , можно получить два треугольника, удовлетворяющих теореме Сонда.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть прямые  $OA$  и  $B_1C_1$  пересекаются в точке  $P_a$ , а  $BC$  и  $B_1C_1$  — в точке  $Q_a$ . Точки  $P_b, P_c, Q_b$  и  $Q_c$  определяются аналогично.

Рассмотрим описанные окружности треугольников  $AP_aQ_a$ ,  $BP_bQ_b$  и  $CP_cQ_c$ . Легко видеть, что  $O$  и ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$  имеют равные степени относительно этих окружностей. Если  $O \equiv H$ , то треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  гомотетичны, и утверждение теоремы очевидно. В противном случае три окружности соосны, и значит, их центры  $O_a, O_b$  и  $O_c$  лежат на одной прямой, перпендикулярной радикальной оси.

Но, будучи серединами отрезков  $AQ_a, BQ_b$  и  $CQ_c$ , точки  $O_a, O_b$  и  $O_c$  делят стороны серединного треугольника  $\triangle ABC$  в тех же отношениях, в каких  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$  делят стороны  $\triangle ABC$ . По теореме Менелая  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$  лежат на одной прямой. Отсюда по теореме Дезарга получаем утверждение теоремы.  $\square$

Как можно получить это доказательство?

Пусть  $\triangle A_1B_1C_1$  вырождается в точку  $O$ , как и в предыдущем разделе используем теорему Дезарга. Точки  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$ , которые определены и в этом случае, лежат на одной прямой, так что мы получаем следующую задачу.

ЗАДАЧА 9. Даны  $\triangle ABC$  и точка  $O$ . Пусть  $Q_a$  такая точка прямой  $BC$ , что  $\angle AOQ_a$  прямой. Точки  $Q_b$  и  $Q_c$  определены аналогично. Докажите, что  $Q_a, Q_b$  и  $Q_c$  лежат на одной прямой. ([2, №924], С. Маркелов)

Напомним также ещё одну задачу на эту тему:

ЗАДАЧА. Докажите, что, если в обозначениях задачи 9  $O$  лежит на описанной окружности  $\triangle ABC$ , то  $Q_a Q_b Q_c$  проходит через центр этой окружности. (Математика, 2/1998, А. Иванов)

Первое найденное автором решение этой задачи было связано с теоремой Гаусса – Боденмиллера.

ТЕОРЕМА ГАУССА – БОДЕНМИЛЛЕРА. Три окружности, диаметры которых являются диагоналями полного четырёхсторонника, соосны (пересекаются в двух точках).

Если обозначить полный четырёхугольник  $ABCQ_a Q_b Q_c$ , а одну из общих точек окружностей  $O$ , получится в точности ситуация задачи 9. Теперь, чтобы решить задачу, нужно показать, что, если даны три стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , так, чтобы заданная точка плоскости оказалась общей точкой окружностей Гаусса – Боденмиллера. Так возникла идея рассмотреть описанные окружности треугольников  $AP_a Q_a$ ,  $BP_b Q_b$  и  $CP_c Q_c$  в приведённом выше доказательстве. После этого уже нетрудно сделать обобщение, доказывающее теорему.

Теперь опишем более элементарный подход к теореме Сонда.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $AD_a$ ,  $BD_b$  и  $CD_c$  — диаметры описанной окружности  $\triangle ABC$ , а прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  пересекают эту окружность в точках  $E_a$ ,  $E_b$  и  $E_c$  соответственно. Обозначим точку пересечения прямых  $D_a E_a$  и  $D_b E_b$  через  $C'_1$  и определим точки  $A'_1$  и  $B'_1$  аналогично. Покажем, что  $\triangle A'_1 B'_1 C'_1$  гомотетичен  $\triangle A_1 B_1 C_1$  с центром  $O$ .

Действительно, при данном  $\triangle ABC$ , условие теоремы определяет семейство гомотетичных треугольников  $A_1 B_1 C_1$ . Следовательно, надо показать, что это условие выполнено.

Так как  $AD_a$  — диаметр, то  $AO \perp B'_1 C'_1$ . Кроме того, четырёхугольник  $OE_b A'_1 E_b$  вписанный, следовательно,  $\angle E_c A'_1 O = \angle E_c E_b O = \angle E_c E_b B = \angle E_c C B$ , откуда получаем  $\angle A'_1 E_c C = \angle(A'_1 O, BC)$  и  $A'_1 O \perp BC$ . Остальные условия проверяются аналогично.

Теперь построим такую точку  $P_c$ , что треугольники  $ABC$  и  $A'_1 B'_1 P_c$  подобны и противоположно ориентированы, и пусть  $P_c H_c$  — высота  $\triangle A'_1 B'_1 P_c$ . Пусть  $A' B' C'$  — произвольный треугольник, гомотетичный  $\triangle ABC$  с центром  $O$ , и  $C'_1 C'$  пересекает  $P_c H_c$  в точке  $C''$ . Покажем, что  $OC' : C' C = P_c C'' : C'' H_c$ .

Действительно, пусть прямая, проходящая через  $C$  и параллельная  $A'_1 B'_1$  пересекает  $C'_1 A'_1$  в точке  $X$ , а  $C'_1 B'_1$  в точке  $Y$ . Четырёхугольник  $OCY E_a$  вписанный, следовательно,  $\angle XYO = \angle CYO = \angle C E_a O = \angle C E_a A = \angle CBA$ . Аналогично,  $\angle YXO = \angle CAB$ . Поэтому  $OXCY \sim P_c A'_1 H_c B'_1$  и гомотетия с центром  $C'_1$  переводит первый четырёхугольник во второй. Следовательно, она переводит  $C'$  в  $C''$ .

Построим аналогично точки  $P_a, P_b, H_a, \dots$  и т. д. Очевидно, достаточно показать, что прямые  $A'_1A', B'_1B'$  и  $C'_1C'$  всегда пересекаются в одной точке, или  $A'_1A'', B'_1B''$  и  $C'_1C''$  пересекаются в одной точке. По теореме Чевы это равносильно равенству

$$\frac{S_{C'_1B'_1C''}}{S_{C'_1A'_1C''}} \cdot \frac{S_{B'_1A'_1B''}}{S_{B'_1C'_1B''}} \cdot \frac{S_{A'_1C'_1A''}}{S_{A'_1B'_1A''}} = 1.$$

Но  $\triangle A'_1B'_1P_c \sim \triangle A'_1P_bC'_1$ , поэтому  $\triangle A'_1H_cP_c \sim \triangle A'_1H_bP_b$ , следовательно,  $\triangle A'_1H_cC'' \sim \triangle A'_1H_bB''$ , откуда имеем  $\angle B''A'_1H_b = \angle H_cA'_1C''$ . Значит,

$$\begin{aligned} S_{C'_1A'_1C''} : S_{B'_1A'_1B''} &= \\ &= (C'_1A'_1 \cdot A'_1C'' \cdot \sin \angle C'_1A_1C'') : (B'_1A'_1 \cdot A'_1B'' \cdot \sin \angle B'_1A_1B'') = \\ &= (C'_1A'_1 : B'_1A'_1) \cdot (A'_1B'' : A'_1C'') = \frac{C'_1A'_1}{B'_1A'_1} \cdot \frac{A'_1P_b}{A'_1P_c}. \end{aligned}$$

Преобразовав левую часть, получаем

$$\begin{aligned} \frac{S_{C'_1B'_1C''}}{S_{C'_1A'_1C''}} \cdot \frac{S_{B'_1A'_1B''}}{S_{B'_1C'_1B''}} \cdot \frac{S_{A'_1C'_1A''}}{S_{A'_1B'_1A''}} &= \\ &= \frac{C'_1A'_1}{B'_1A'_1} \cdot \frac{A'_1B'_1}{C'_1B'_1} \cdot \frac{B'_1C'_1}{A'_1C'_1} \cdot \frac{A'_1P_b}{A'_1P_c} \cdot \frac{B'_1P_c}{B'_1P_a} \cdot \frac{C'_1P_a}{C'_1P_b} = \\ &= \frac{A'B'}{C'B'} \cdot \frac{B'C'}{A'C'} \cdot \frac{C'A'}{B'A'} = 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

Теорема Сонда имеет множество красивых следствий.

**Задача 10.** На сторонах  $\triangle ABC$  как на основаниях построены прямоугольники  $ABB_aA_b$ ,  $BCC_bB_c$  и  $CAA_cC_a$ .

(а) Докажите, что существуют три точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  такие, что  $A'B'C_aC_b$ ,  $B'C'A_bA_c$  и  $C'A'B_cB_a$  — также прямоугольники.

(б) Докажите, что площади треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  равны.

(с) Докажите, что прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** (с) Пусть  $O$  — четвёртая вершина параллелограмма  $OAA_cB'$ . Тогда  $OB'C_aC$ ,  $OCC_bA'$ ,  $OA'B_cB$ ,  $OBV_aC'$  и  $OC'A_bA$  — тоже параллелограммы. Применив теорему Сонда к треугольникам  $ABC$ ,  $A'B'C'$  и точке  $O$ , получим утверждение задачи.  $\square$

Эта конфигурация имеет много других интересных свойств, но здесь мы не будем на них останавливаться.

**Задача 11.** Дан правильный  $\triangle ABC$  и точка  $P$ . Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $ABP$ ,  $BSP$  и  $CAP$  пересекаются в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему Сонда к треугольнику, образованному центрами тяжести треугольников  $ABP$ ,  $BCP$  и  $CAP$ , треугольнику, образованному центрами их описанных окружностей, и центру  $\triangle ABC$ .  $\square$

На самом деле наше второе доказательство было найдено сначала для задачи 11, а затем обобщено до доказательства теоремы.

Нетрудно видеть, что условие теоремы Сонда не является необходимым для гомотетичной перспективности. Действительно, применив к двум треугольникам Сонда произвольное аффинное преобразование, получим контрпример. Автору неизвестно, можно ли любую гомотетично перспективную пару треугольников перевести соответствующим аффинным преобразованием в конфигурацию теоремы Сонда.

Перейдём к изучению интересных контрпримеров, возникших из работ автора по исследованию различных прямых Эйлера.

ТЕОРЕМА ШИФФЛЕРА. Пусть  $I$  — центр окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ . Тогда прямые Эйлера треугольников  $ABI$ ,  $BCI$ ,  $CAI$  и  $ABC$  пересекаются в одной точке.

Эта точка  $S$  называется точкой Шиффлера.

ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРЕМА ШИФФЛЕРА. Пусть  $M_a$  и  $O_a$  — центр тяжести и центр описанной окружности  $\triangle BCI$ . Точки  $M_b, M_c, O_b$  и  $O_c$  определены аналогично. Тогда любые два треугольника, гомотетичные  $\triangle M_a M_b M_c$  и  $\triangle O_a O_b O_c$  с центром  $I$ , перспективны.

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Дан треугольник  $ABC$  и точка  $O$ . Прямые  $AO, BO$  и  $CO$  пересекают описанную окружность  $\triangle ABC$  в точках  $A', B'$  и  $C'$ . Пусть  $M_a$  и  $M_A$  — центры тяжести треугольников  $OBC$  и  $OB'C'$  соответственно,  $O_a$  и  $O_A$  — центры их описанных окружностей, точки  $M_b, M_B, O_b, \dots$  определены аналогично. Тогда любые два треугольника, гомотетичные  $\triangle M_a M_b M_c$  и  $\triangle O_a O_b O_c$  с центром  $O$ , перспективны тогда и только тогда, когда любые два треугольника, гомотетичные  $\triangle M_A M_B M_C$  и  $\triangle O_A O_B O_C$  с центром  $O$ , перспективны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $M'_A M'_B M'_C$  — произвольный треугольник, гомотетичный  $\triangle M_A M_B M_C$  с центром  $O$ , а  $\triangle M'_a M'_b M'_c$  гомотетичен  $\triangle M_a M_b M_c$  с теми же центром и коэффициентом. Очевидно, достаточно доказать, что, если  $O_A M'_A, O_B M'_B$  и  $O_C M'_C$  пересекаются в некоторой точке  $X$ , то  $O_a M'_a, O_b M'_b$  и  $O_c M'_c$  пересекаются в некоторой точке  $Z$ .

Пусть точка  $Y$  изогонально сопряжена  $X$  относительно  $\triangle O_A O_B O_C$ . Заметим, что  $\triangle O_a O_b O_c \sim \triangle O_A O_B O_C$  и построим такую точку  $Z$ , что  $O_a O_b O_c Z \sim \triangle O_A O_B O_C Y$ .

Так как  $OA'B'O_C M_C M'_C \sim OBAO_C M_C M'_C$ , то  $Z$  лежит на прямой  $O_C M'_C$ . Аналогично она лежит на прямых  $O_a M'_a$  и  $O_b M'_b$ , следовательно  $Z$  — искомая точка.  $\square$

Вернёмся к доказательству обобщённой теоремы Шиффлера. Пусть  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  пересекают описанную окружность  $\triangle ABC$  в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Тогда  $I$  — ортоцентр  $\triangle A'B'C'$ . Значит, оба треугольника  $M_A M_B M_C$  и  $O_A O_B O_C$  гомотетичны  $\triangle A'B'C'$ , и любые два треугольника, гомотетичные им с центром  $I$ , перспективны. Осталось применить лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке леммы важно, что прямые Эйлера треугольников  $OAB$ ,  $OBC$  и  $OCA$  пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые Эйлера треугольников  $OA'B'$ ,  $OB'C'$  и  $OC'A'$  пересекаются в одной точке. Следовательно, можно взять  $\triangle A'B'C'$  правильным и, используя задачу 11, получить следующий результат.

ТЕОРЕМА. Пусть в  $\triangle ABC$   $A_p$  — одна из двух точек Аполлония. Тогда прямые Эйлера треугольников  $ABA_p$ ,  $BCA_p$  и  $CAA_p$  пересекаются в одной точке.

Так как  $A$  является точкой Аполлония  $\triangle BA_p C$ , три прямых Эйлера, как и в теореме Шиффлера, пересекаются на прямой Эйлера  $\triangle ABC$ . Однако элементарное доказательство того, что точка Шиффлера  $\triangle ABC$  лежит на прямой Эйлера, автору неизвестно.

Многие замечательные точки  $X$  обладают тем свойством, что прямые Эйлера треугольников  $ABX$ ,  $BCX$  и  $CAX$  пересекаются в одной точке (их геометрическое место называется кубикой Нейберга и обладает многими интересными свойствами). Однако, существует ли для каких-то из этих точек «гомотетичное» обобщение, автору неизвестно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Математическое просвещение. Серия 3, вып. 12, 2008. Задача 12.8. С. 236.
- [2] И.Ф. Шарыгин. *Геометрия. Планиметрия*. М.: Дрофа, 2001.

---

Н. И. Белухов, факультет математики и информатики, университет Софии (Болгария).  
Email: nbeluhov@abv.bg

## О вычислении объёма $n$ -мерного шара

А. А. Заславский

В учебниках по математическому анализу объём  $n$ -мерного шара  $B_n = B_n(R)|_{R=1}$  с радиусом  $R$ , равным единице, вычисляется интегрированием по частям. В результате получается рекуррентное соотношение, выражающее  $B_n$  через  $B_{n-2}$ , которое после соответствующих преобразований приводит к формулам, имеющим разный вид для чётного и нечётного  $n$ . Между тем, использование вероятностных соображений позволяет сразу получить единую для всех  $n$  формулу.

Ясно, что  $B_n(R) = B_n R^n$ . Площадь<sup>1)</sup> границы такого шара, являющейся  $(n-1)$ -мерной сферой радиуса  $R$ , равна производной  $B_n(R)$  по  $R$ . Поэтому при  $R = 1$  получаем  $S_{n-1} = nB_n$ , где  $S_{n-1}$  есть площадь  $(n-1)$ -мерной сферы единичного радиуса, площадь же  $(n-1)$ -мерной сферы радиуса  $R$  суть  $S_{n-1}R^{n-1}$ .

Рассмотрим случайный вектор  $x \in R^n$  со стандартным нормальным распределением и плотностью<sup>2)</sup>

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)/2}.$$

Тогда вероятность того, что  $x$  лежит в шаре с центром в начале координат

<sup>1)</sup>Определение площади поверхности тела по Минковскому — это производная объёма  $\varepsilon$ -окрестности тела по  $\varepsilon$ .

<sup>2)</sup>При изучении непрерывных величин говорят не о вероятности того, что величина принимает данное значение (она равна нулю), а о плотности вероятности. Вероятность  $dP$  попасть в окрестность данной точки  $\vec{z}$  объёма  $dV$  равна  $\rho(\vec{z})dV$ , функция  $\rho(\vec{z})$  есть плотность вероятности. Поскольку полная вероятность равна 1,  $\int \rho(\vec{z}) dz_1 dz_2 \dots dz_n = 1$ . Заметим, что

$$\int p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2/2} dx_1 \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2/2} dx_n = I^n,$$

где  $I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$ , так что функция  $p(x)$  действительно является распределением вероятностей.

Равенство  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (знаменитый интеграл Гаусса) устанавливается так: легко видеть, что  $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi$  (замена  $t = r^2$ ).

и радиусом  $t$ , равна

$$P(r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{r \leq t} e^{-r^2/2} dx_1 \dots dx_n.$$

Будем считать интегралы так. Разобьём пространство на сферические слои толщины  $dR$  каждый. Объём такого слоя равен  $S_{n-1}R^{n-1}dR$ , а значение функции  $p(x)$  близко к  $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)/2}$ . Следовательно,

$$P(r \leq t) = \frac{nB_n}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_0^t r^{n-1} e^{-r^2/2} dr.$$

Теперь, устремив  $t$  к бесконечности, получим в левой части единицу, а интеграл в правой части заменой  $u = r^2/2$  приводится к виду

$$2^{-n/2} \int_0^\infty u^{(n-2)/2} e^{-u} du.$$

В результате получаем выражение объёма через гамма-функцию<sup>3)</sup>

$$B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Заметим, что  $\Gamma(n)$  при  $n \rightarrow \infty$  растёт быстрее, чем любая показательная функция  $a^n$ . Отсюда следует, что при любом  $R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(R) = 0.$$

В частности, равен нулю искомый предел в задаче 13.2 из задачника «Математического просвещения».

---

А. А. Заславский, ЦЭМИ РАН

<sup>3)</sup>  $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^z e^{-y} dy$  есть знаменитая *гамма-функция* Эйлера, доопределяющая факториал на комплексную плоскость:  $\Gamma(k) = (k+1)!$  при целом  $k$  и  $\Gamma(z) = \Gamma(z-1)z$  (это равенство позволяет доопределить  $\Gamma(z)$  при  $\text{Re}(z) < 0$ ). Известно, что  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi / \sin(\pi x)$ , в частности  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ .

---

---

## Задачный раздел

---

---

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Дано бесконечное периодическое слово минимального периода  $n$  и два его одинаковых под слова длины  $n - 1$ . Доказать, что их начальные буквы находятся на расстоянии кратном  $n$ . (А. Я. Белов)

2. Найти предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg} \sin(x)}{\arcsin \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg} \arcsin(x)}$ . (В. И. Арнольд)

3. Бесконечное множество точек на плоскости таково, что все попарные расстояния целые. Докажите, что все точки лежат на одной прямой. А что если все попарные расстояния рациональны? (Фольклор)

4. Докажите, что при любых натуральных  $n \geq l$  выполняется тождество:

$$\frac{1}{l!} \sum_{\substack{\sum_{i=1}^l k_i = n; \\ k_i \geq 1}} \frac{1}{k_1 \cdot \dots \cdot k_l} = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^l k_i = n; \\ k_i \geq 1}} \frac{1}{k_1(k_1 + k_2) \cdot \dots \cdot (k_1 + \dots + k_l)}$$

(И. Никкошев)

5. Бесконечно Мудрый Таракан живёт на плоскости. Он близорук и потому видит Истину, только когда находится не более, чем в одном шаге от неё. Первоначально Таракан находится в  $n$  шагах от Истины. Когда Таракан делает шаг, друзья говорят ему, приблизился он к Истине, или нет. а) Докажите, что, пользуясь этой и только этой информацией, Таракан может достичь Истины менее чем за  $n + 10 \ln n$  шагов. б) Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего достичь Истины менее чем за  $n + 0.1 \ln n$  шагов. (А. Я. Белов)



6.  $f(x, y)$  — бесконечно дифференцируемая функция от двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у ней нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической*, если в ней обе частные производные  $\partial f/\partial x$  и  $\partial f/\partial y$  обращаются в нуль.) (Фольклор)
7. Пусть  $q \neq 2^k + 1$  — натуральное число. Докажите, что в  $q$ -ичной системе счисления существует число, равное определителю  $q \times q$  матрицы, составленной из цифр этого числа и их циклических перестановок. Например, в десятичной системе счисления ( $q = 10$ )

$$692 = \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$456790123 = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Н. И. Белухов)

8. Дан  $\triangle ABC$ .  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания сторон  $BC, AC, AB$  с вписанной окружностью соответственно.  $A_0, B_0, C_0$  — середины сторон. Обозначим точку пересечения прямых  $A_0B_0$  и  $A_1B_1$  через  $C'$ . Аналогично определяются точки  $A'$  и  $B'$ . Докажите, что прямые  $AA', BB'$  и  $CC'$  пересекаются в точке Фейербаха. (Ф. Ивлев)
9. Докажите, что при игре «Жизнь» а) в квадрате  $2010 \times 2010$ ; б) на бесконечной плоскости найдётся конфигурация без прообраза.<sup>4)</sup> (Фольклор)
10. Докажите, что существует такое  $x < 4 \cdot 99!$ , что  $x(x+1)$  делится на  $100!$ . (С. В. Конягин)

<sup>4)</sup> Конвеевская игра «Жизнь» заключается в следующем: в некоторых клетках решётки стоит фишка, а некоторые клетки пустые. Фишка, имеющая меньше двух соседей, умирает от одиночества, а имеющая больше трёх соседей — от перенаселённости. На пустом поле, имеющем ровно три соседние фишки, рождается новая фишка. Клетки соседствуют по общим сторонам или общим вершинам. Состояния всех клеток меняются одновременно.

11. Известно, что если зафиксировать одну переменную, то функция  $f(x, y)$  по другой будет многочленом. Верно ли, что она будет сама многочленом от двух переменных? (Б. П. Панеях)
12. По некоторым рёбрам клеток плоской решётки проведены перегородки. Пьяница с равной вероятностью идёт из квадрата, где он находится, в любой соседний квадрат, куда он может пройти. Докажите, что он с вероятностью 1 вернётся в исходную точку. (А. Я. Канель, М. Б. Скопенков)

## Решения задач из предыдущих выпусков

5.6. УСЛОВИЕ. а) Все коэффициенты многочлена  $P(x)$  целые и среди них есть нечётные. Докажите, что найдётся многочлен  $Q(x)$ , имеющий ровно два нечётных коэффициента и делящийся на  $P(x)$ .

б) Существует ли многочлен  $P(x, y)$  с целыми коэффициентами такой, что всякий многочлен  $R(x, y)$ , делящийся на  $P(x, y)$ , имеет более миллиона нечётных коэффициентов?

РЕШЕНИЕ. а) Поскольку нас интересует только чётность коэффициентов, будем рассматривать многочлены над  $\mathbb{Z}_2$ . Наша цель — показать, что при некоторых  $n_1 \neq n_2$  многочлен  $x^{n_1} - x^{n_2}$  делится на  $Q(x)$ .

Рассмотрим остатки от деления на  $Q(x)$  многочленов вида  $x^n$ . Они представляют собой многочлены степени не выше  $\deg(Q) - 1$ , и количество различных остатков не превосходит  $2^{\deg(Q)}$ . Значит, при каких-то  $n_1 \neq n_2$  остатки повторятся и многочлен  $x^{n_1} - x^{n_2}$  будет искомым.

б) Ответ: да, существует!

Рассмотрим многочлены с коэффициентами по модулю 2. Если член  $x^n y^m$  входит с ненулевым коэффициентом, то отметим точку с координатами  $(n, m)$ . Выпуклая оболочка множества отмеченных точек есть *многоугольник Ньютона* многочлена  $P(x, y)$ .

Покажем, что многоугольник Ньютона произведения  $P(x, y)Q(x, y)$  есть сумма Минковского многоугольников Ньютона многочленов  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . *Сумма Минковского*  $M_1 \oplus M_2$  фигур  $M_1$  и  $M_2$  по определению равна

$$M_1 \oplus M_2 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2; \vec{x}_1 \in M_1, \vec{x}_2 \in M_2\}$$

(Точка отождествляется со своим координатным вектором.) Подробнее о сумме Минковского написано в статье В. А. Тиморина и А. Г. Хованского в этом выпуске, см. 30–57.

В самом деле, каждому направлению на плоскости отвечает *вес*  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , для которого вес монома  $x^n y^m$  равен  $n\lambda_1 + m\lambda_2$ . Каждая вершина многоугольника  $M$  суть точка со строго максимальным (или строго минимальным — что то же самое, ибо знаки  $\lambda_i$  можно поменять) весом, при подходящем выборе веса, и все точки с таким свойством — суть вершины. Рёбра отвечают весам, имеющим равные значения на паре вершин (соединяемым этим ребром). (Геометрически это значит, что при подходящем

выборе проекции вершина  $M$  будет единственной максимальной точкой, соответственно, ребро спроецируется в точку). Ясно, что вершина максимального веса для многоугольника Ньютона произведения  $P(x, y)Q(x, y)$  отвечает произведению мономов максимального веса сомножителей — т. е. сумме соответствующих вершин многоугольников Ньютона для многочленов  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ .

Если показать, что количество вершин у  $M_1 \oplus M_2$  не меньше, чем количество вершин в каждом слагаемом, то из этого будет следовать утверждение задачи. В качестве примера достаточно взять многочлен, у которого многоугольник Ньютона содержит более миллиона вершин.

Сумма Минковского обладает следующим свойством. Ориентируем стороны  $M_i$  по часовой стрелке. Если у  $M_1$  и  $M_2$  нет сонаправленных векторов сторон, то множество векторов сторон у  $M_1 \oplus M_2$  суть объединение соответствующих множеств для  $M_i$ , в случае же если такие векторы есть, то вместо пары векторов берётся их сумма. Поэтому количество вершин у  $M_1 \oplus M_2$  не меньше, чем количество вершин в каждом слагаемом. Задача решена.

Решение задачи (для обоих пунктов) проходит, если 2 заменить на произвольное  $1 < n \in \mathbb{N}$ , а также для многочленов над любым конечным полем. (А. Я. Канель-Белов)

9.1. УСЛОВИЕ. По веточке ползёт червячок со скоростью 1 мм/с, а веточка, в свою очередь, растёт со скоростью 1 м/с. Сможет ли червячок проползти всю веточку? (Веточка растёт равномерно, так что её середина удаляется от концов со скоростью 0.5 м/с.)

РЕШЕНИЕ. Разрежем веточку на 2000 равных частей. Концы каждой из них удаляются друг от друга со скоростью 0.5 мм/с. Ясно, что червячок их всех по очереди проползёт.

РЕШЕНИЕ 2. Пусть  $v$  — скорость червячка,  $V$  — веточки,  $d\lambda$  — относительное смещение за время  $dt$ ;  $t$  обозначает время,  $\ell_0$  — начальную длину веточки. Тогда

$$\begin{aligned}\ell(t) &= \ell_0 + tV, \\ d\lambda &= v dt / \ell(t) = \frac{v dt}{\ell_0 + tV}, \\ \lambda(T) &= \int_0^T d\lambda = v \int_0^T \frac{dt}{\ell_0 + tV} = \frac{v}{V} (\ln(TV) - \ln \ell_0).\end{aligned}$$

При  $T = \frac{1}{V} \ell_0 e^{V/v}$  получаем  $\lambda(T) = 1$ , что и означает, что червячок прополз всю веточку. Таким образом, мы нашли точный ответ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта задача возникла у А. Д. Сахарова из размышлений о возможности облететь расширяющуюся Вселенную.

(А. Я. Канель-Белов)

9.5. УСЛОВИЕ. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

РЕШЕНИЕ. *Ответ:* Нет, не существует.

ЛЕММА. *Множество точек разрыва функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  есть счётное объединение замкнутых множеств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что *колебанием* функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  называется величина

$$\begin{aligned}\omega_f(x_0) &= \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) - \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{|x-x_0| < \varepsilon} f(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{|x-x_0| < \varepsilon} f(x) \geq 0\end{aligned}$$

(может случиться, что  $\omega_f(x_0) = +\infty$ ). Известно, что функция  $\omega_f$  полунепрерывна сверху, то есть для любого  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \omega_f(x) = \omega_f(x_0).$$

Ясно также, что  $f$  непрерывна в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда  $\omega_f(x_0) = 0$ . Значит, множество точек разрыва этой функции есть

$$N_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k, \quad \text{где } T_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) \geq 1/k\}.$$

Осталось заметить, что при любом  $k$  множество  $T_k$  замкнуто как прообраз замкнутого луча  $[1/k, +\infty]$  относительно полунепрерывной сверху функции  $\omega_f$ .  $\square$

Перейдём к решению задачи. Предположим, что требуемая функция  $f$  существует. Тогда по лемме найдутся такие замкнутые множества  $T_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ . Заметим, что любое множество  $T_k$  нигде не плотно. Действительно, в противном случае его замыкание (совпадающее с  $T_k$ ) должно содержать некоторый интервал; значит, этот интервал содержится в  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , что невозможно.

Но в таком случае  $\mathbb{R}$  также можно представить как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\},$$

что противоречит теореме Бэра.

(И. И. Богданов)

10.9. УСЛОВИЕ.  $G$  — группа порядка  $2^n(2k+1)$ , содержащая элемент порядка  $2^n$ . Докажите, что множество элементов нечётного порядка является подгруппой.

РЕШЕНИЕ. Каждая группа  $G$  действует на себя левыми сдвигами, т. е. с каждым элементом  $g \in G$  можно связать биекцию  $(\varphi_g: G \rightarrow G): h \rightarrow gh$ . (Таким образом,  $G$  вкладывается в группу перестановок  $S_{|G|}$  из  $|G|$  элементов, что представляет собой утверждение знаменитой *теоремы Келли*).

Пусть  $|G| = 2^n(2q+1)$ ,  $x \in G$  есть элемент порядка  $2^n$ . Тогда при указанном действии множество  $G$  разобьётся на  $2q+1$  орбиту вида  $h = x^{2^n}h, xh, \dots, x^{2^n-1}h$ . Каждая орбита представляет собой чётный цикл (из  $2^n$  элементов), являющийся нечётной перестановкой множества  $G$ , а всего таких циклов нечётное число, так что  $\varphi_x \in S_{|G|}$  есть нечётная перестановка. Легко видеть также, что если  $2^n$  делит порядок элемента  $y$ , то  $\varphi_y$  есть нечётная перестановка, а если не делит — то чётная.

Таким образом, при действии  $\varphi$  есть элемент  $x$ , образ которого нечётен. Легко видеть, что при этом чётность  $\varphi_{xy}$  противоположна чётности  $\varphi_y$ . Поэтому элементов с чётным и нечётным образом поровну, и элементов с чётным образом — половина. Порядок каждого такого элемента имеет вид  $2^{n-k}(2q'+1)$ ,  $k > 0$ .

Элементы с чётным образом образуют подгруппу  $G_1$  порядка  $|G|/2 = 2^{n-1}(2q+1)$ , содержащую элемент  $x^2$  порядка  $2^{n-1}$ , так что дело завершает индукция.

Легко видеть, что множество элементов нечётного порядка является *нормальной подгруппой* и при  $n > 0$  группа  $G$  не проста (а простая группа нечётного порядка суть  $\mathbb{Z}_p$  — это очень трудная теорема).

(А. Я. Канель-Белов)

11.1<sup>1)</sup>. УСЛОВИЕ. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}.$$

РЕШЕНИЕ. Разобьём промежуток интегрирования на отрезок  $[0, 1]$  и луч  $[1, \infty)$  и в первом из получившихся интегралов сделаем замену  $x = 1/t$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} = \\ &= \int_1^\infty \frac{t^\pi dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(Д. Горяшин, А. Москвин)

<sup>1)</sup>В прошлом номере уже было опубликовано решение этой задачи. Здесь мы приводим более короткое решение, присланное нашими читателями.

11.6. УСЛОВИЕ. Обозначим через  $s(n)$  сумму цифр числа  $n$ . Ограничена ли последовательность  $s(n)/s(n^2)$ ?

РЕШЕНИЕ. Ответ: последовательность  $s(n)/s(n^2)$  неограниченна.

Пусть  $n = 1 + 10^k - 10^{2k-1} + 10^{3k} + 10^{4k}$ . Ясно, что  $s(n) = 9k + 12$ , когда  $k \geq 2$ , так что  $s(n) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

С другой стороны,  $n^2 = 1 + 2 \cdot 10^k + 8 \cdot 10^{2k-1} + 18 \cdot 10^{3k-1} + 10^{4k-2} + 4 \cdot 10^{4k} + 18 \cdot 10^{5k-1} + 8 \cdot 10^{6k-1} + 2 \cdot 10^{7k} + 10^{8k}$  так что  $s(n^2) = 54$  при  $k \geq 2$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} s(n)/s(n^2) = \lim_{k \rightarrow \infty} (9k + 12)/54 = \infty$ . Задача решена.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Решение задачи выглядит просто, однако для его получения потребовался месяц работы. Она в своё время довольно долго стояла во Второй школе (её нам сообщил В. А. Сендеров) как «полуоткрытый вопрос», т. е. задача с неясным решением. Немного видоизменив конструкцию, можно показать, что для любого  $k > 1$  последовательность  $s(n)/s(n^k)$  неограниченна. Более того,  $n$  можно возводить в целую степень  $\psi_n \sim (\ln n)^{0.5-\varepsilon}$ . Для этого надо рассмотреть случаи  $k = 2, 3$  и воспользоваться неравенством  $s(nm) \leq s(n)s(m)$  (верно также  $s(n+m) \leq s(n) + s(m)$ , равенство достигается когда нет переноса разрядов).

2. Можно показать также, что  $s(k^n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  если  $k \neq 10^m$ . Это следует из результатов Дж. Бейкера о диофантовых приближениях линейной комбинации логарифмов.

3. Можно построить число  $n$  со сколь угодно большой суммой цифр, такое, что  $s(n^3) = s(n)^3$  и  $s(n^2) = s(n)^2$ . Если же  $s(n^4) = s(n)^4$  то либо  $n = 10^k$ , либо  $n = 10^k + 10^l$ ,  $k \neq l$ . Если  $s(n^k) = s(n)^k$ ,  $k \geq 5$ , то  $n = 10^k$ .

4. См. также задачу О. Ф. Крыжановского, предложенную на отборе 1994 года команды Москвы (10 класс) на Всероссийскую олимпиаду:

Пусть  $P(x)^2$  имеет все положительные коэффициенты. Может ли многочлен  $P(x)$  иметь коэффициенты разного знака?

(А. Я. Канель-Белов)

12.4. УСЛОВИЕ. Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — положительные числа,  $M$  — их среднее арифметическое,  $G$  — их среднее геометрическое. Докажите, что для любого  $1 \leq i \leq n$  выполняется неравенство:

$$1 + \rho < a_i/M < 1 + \rho',$$

где  $\rho < 0$  и  $\rho' > 0$  корни трансцендентного уравнения

$$(1+x)e^{-x} = (G/M)^n.$$

РЕШЕНИЕ. Выбрав подходящую нумерацию переменных, можно считать, что  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . При этом достаточно проверить что  $a_1/M > 1 + \rho$  и  $a_n/M < 1 + \rho'$ .

Неравенство  $a_1/M > 1 + \rho$  достаточно установить для случая, когда  $a_2 = a_3 = \dots = a_n$ . В самом деле, заменив каждую из величин  $a_2, \dots, a_n$  на

их среднее арифметическое, мы не изменим  $M$ , но увеличим произведение  $a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ , а, следовательно, и  $G$ .

Аналогичным образом, неравенство  $a_n/M < 1 + \rho'$  достаточно установить для случая, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$ .

Итак, покажем неравенство  $a_1/M > 1 + \rho$ . В силу однородности можно считать, что  $a_2 = \dots = a_n = 1$ . Тогда  $M = 1 - (1 - a_1)/n$ ,  $G = \sqrt[n]{a_1}$ ,  $0 < a_1 < 1$ .

Пусть  $1 - \varepsilon = \frac{\sqrt[n]{a_1}}{1 - (1 - a_1)/n}$ . Нужно оценить величину

$$\frac{a_1}{1 - (1 - a_1)/n} = a_1^{1-1/n}(1 - \varepsilon).$$

Легко проверить, что

$$(1 - \varepsilon)^n(1 - (1 - a_1)/n)^n = a_1.$$

Положим  $x = a_1 - 1$ . Тогда

$$(1 - \varepsilon)^n(1 + x/n)^n = 1 + x, \quad x < 0.$$

Если  $-1 < x < 0$ , то  $e^x < (1 + x/n)^n$  (а если  $x > 0$ , то  $e^x > (1 + x/n)^n$ ), так что  $(1 - \varepsilon)^n(1 + x/n)^n > (1 - \varepsilon)^n e^{-x}$  и  $(1 - \varepsilon)^n > (1 + x)e^{-x}$ . Остаётся заметить, что при отрицательном  $x$  функция  $(x + 1)e^{-x}$  монотонно возрастает, поэтому  $x$  больше отрицательного корня уравнения  $(1 + z)e^{-z} = (1 - \varepsilon)^n$ .

Аналогично доказывается второе неравенство. В этом случае получается формула

$$(1 - \varepsilon)^n(1 + x/n)^n = 1 + x, \quad x > 0.$$

Если  $x > 0$ , то  $e^x > (1 + x/n)^n$ . Остаётся заметить, что при положительном  $x$  функция  $(x + 1)e^{-x}$  монотонно убывает, поэтому  $x$  меньше положительного корня уравнения  $(1 + z)e^{-z} = (1 - \varepsilon)^n$ . (А. Я. Канель-Белов)

13.1. УСЛОВИЕ. Треугольник  $ABC$  может быть покрыт тремя единичными кругами с центрами в его вершинах. Соответствующие стороны треугольника  $A'B'C'$  меньше соответствующих сторон треугольника  $ABC$ . Верно ли, что треугольник  $A'B'C'$  обладает тем же свойством?

РЕШЕНИЕ. Ответ: не обязательно. Пусть стороны треугольника  $\triangle ABC$  равны  $2, 2, 4 + \varepsilon$ , величина  $\varepsilon$  выбрана достаточно малой. Легко видеть, что  $\triangle ABC$  покрывается тремя единичными кругами с центрами в его вершинах. Пусть стороны треугольника  $\triangle A'B'C'$  равны  $2 - \varepsilon, 2 - \varepsilon, 2 - \varepsilon$ . Тогда при достаточно малом  $\varepsilon$  центр описанной окружности около  $\triangle A'B'C'$  находится на расстоянии близком к  $(\cos \pi/6)^{-1} = 2/\sqrt{3}$  относительно всех вершин  $\triangle A'B'C'$  и все эти круги его не покрывают.



Рассмотрев симплекс, у которого вершины находятся вблизи вершин  $\triangle ABC$  и, кроме того, все вершины кроме двух близки между собой, можно получить аналогичные примеры для произвольной размерности  $\geq 2$ .

Несмотря на кажущуюся простоту этой задачи, многие дают неправильный ответ. (А. Я. Канель-Белов)

13.2. УСЛОВИЕ. К чему стремится объем  $n$ -мерного шара радиуса 2008 при  $n \rightarrow \infty$ ?

РЕШЕНИЕ. Ответ: этот объем стремится к нулю!

Этот факт вытекает из формулы для объема  $n$ -мерного единичного шара. (Этой формуле посвящена заметка А. А. Заславского в данном выпуске, см. с. 270–271). Наша цель — показать, как это увидеть непосредственно.

Объем  $n$ -мерного шара радиуса  $R$  равен  $B_n R^n$ , где  $B_n$  — объем  $n$ -мерного шара единичного радиуса. Нам достаточно показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $C > 0$ , что  $B_n < C\varepsilon^n$ . В этом случае предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n R^n = 0$  при любом  $R$ .

В свою очередь, для этого достаточно установить, что  $B_n/B_{n-1} < \varepsilon$  при всех достаточно больших  $n$ . Легко видеть, что

$$B_n = \int_{-1}^1 B_{n-1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx$$

или

$$B_n/B_{n-1} = \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx &= \int_{-1}^{-\varepsilon/3} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx + \int_{\varepsilon/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx + \\ &\quad + \int_{-\varepsilon/3}^{\varepsilon/3} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что первые два интеграла не превосходят

$$\left(\sqrt{1-(\varepsilon/3)^2}\right)^{n-1}$$

и, следовательно, стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , а третий интеграл не превосходит  $2\varepsilon/3$ . (Мы пользуемся тем, что значение интеграла не превосходит произведения максимального значения функции на меру множества, по которому интегрируют). Задача решена. (А. Я. Канель-Белов)

---

---

# Издательство МЦНМО: новинки

---

---

ИЗДАНО В 2010 ГОДУ

Америк Е. Ю. **Гиперболичность по Кобаяси: некоторые алгебро-геометрические аспекты.** 48 с.

Великова Л. В. **ЕГЭ. Русский язык. Тренировочные задания для подготовки к ЕГЭ.** 159 с.

Вершик А. М. (под ред.) **Математика XX века. Взгляд из Петербурга.** 184 с.

Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. **Элементарная топология.** 352 с.

Высоцкий И. Р. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В5. Рабочая тетрадь.** 80 с.

Голенищева-Кутузова Т. И., Казанцев А. Д., Кудряшов Ю. Г., Кустарёв А. А., Мерзон Г. А., Яценко И. В. **Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Часть I.** 248 с.

Гуцин Д. Д., Малышев А. В. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В10. Рабочая тетрадь.** 72 с.

Пирковский А. Ю. **Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов.** 176 с.

Посицельская М. А., Посицельский С. Э. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В2. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Смирнов В. А. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В6. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Смирнов В. А. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В4. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Смирнов В. А. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В9. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Стрельцов А. А. **Государственная информационная политика: основы теории.** 112 с.

Холево А. С. **Квантовые системы, каналы, информация.** 328 с.

Шестаков С. А., Гуцин Д. Д. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В12. Рабочая тетрадь.** 64 с.

Шестаков С. А. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В3. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Шестаков С. А. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В7. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Шестаков С. А. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В11. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Шноль Д. Э. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В1. Рабочая тетрадь.** 48 с.

Яценко И. В., Захаров П. И. (под ред. А. Л. Семенова и И. В. Яценко) **ЕГЭ 2010. Математика. Задача В8. Рабочая тетрадь.** 80 с.

Яценко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. **ЕГЭ. Математика. Тематическая рабочая тетрадь. 11 класс.** 96 с.

#### ПЕРЕИЗДАНИЯ

Гейдман Б. П. **Площади многоугольников.** (3-е изд., стер.) 24 с.

Рохлин В. А. **Избранные работы. Воспоминания о В. А. Рохлине. Материалы к биографии.** (2-е изд., доп.) 576 с.

Толпыго А. К. **Тысяча задач Международного математического Турнира городов.** (2-е изд., доп.) 488 с.

#### ИЗДАНО В 2009 ГОДУ

**Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 13.** 192 с.

**Учим математике-2 (материалы второй открытой школы-семинара учителей математики).** 176 с.

Абрамов С. А. **Лекции о сложности алгоритмов.** 256 с.

Акияма Джин, Руис Мари-Джо **Страна математических чудес.** 240 с.

Андреева Е. В. **Программирование это так просто, программирование это так сложно. Современный учебник программирования.** 184 с.

Аржанцев И. В. **Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта.** 64 с.

Арнольд В. И. **Вещественная алгебраическая геометрия.** 88 с.

Арнольд В. И. **Математическое понимание природы.** 144 с.

Бегунц А. В., Бородин П. А., Сергеев И. Н. **Олимпиада МГУ «Ломоносов» по математике (2005–2008).** 56 с.

Болибрух А. А. **Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений.** 200 с.

Варламов С. Д., Зильберман А. Р., Зинковский В. И. **Экспериментальные задачи на уроках физики и физических олимпиадах.** 184 с.

Воскресенский В. Е. **Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп.** 408 с.

Высоцкий И. Р., Захаров П. И., Панфёров В. С., Семёнов А. В., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Шестаков С. А., Яценко И. В. **ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ.** 72 с.

Ганчарова О. С., Злобовская О. А., Кирюхина О. О. и др. **Олимпиада по биологии. Взгляд изнутри.** 182 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Математика. Рабочая тетрадь N1 для 2 класса начальной школы.** 64 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Математика. Рабочая тетрадь N2 для 2 класса начальной школы.** 64 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Математика. Рабочая тетрадь N3 для 2 класса начальной школы.** 64 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Математика. Рабочая тетрадь N4 для 2 класса начальной школы.** 64 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Математика. 4 класс. 1-е полугодие.** 122 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Математика. 4 класс. 2-е полугодие.** 128 с.

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. **Программа по математике для начальной школы.** 16 с.

Гуровиц В. М., Ховрина В. В. **Графы.** 32 с.

Дольник В. Р. **Непослушное дитя биосферы.** 352 с.

Жижилкин И. Д. **Инверсия.** 72 с.

Замолодчиков А. Б., Замолодчиков Ал.Б. **Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах.** 168 с.

Заславский А. А., Пермяков Д. А., Скопенков А. Б., Скопенков М. Б., Шаповалов А. В. (под ред.) **Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду.** 488 с.

Заславский А. А., Френкин Б. Р. **Математика турниров.** 32 с.

Иванов О. А. **Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей.** 384 с.

Казарин О. В. **Методология защиты программного обеспечения.** 464 с.

Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. **Как решают нестандартные задачи (5-е изд., испр.).** 96 с.

Карпель Е. Г., Минлос Р. А. **Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине основоположнике суперматематики.** 384 с.

Кириллов А. А. **Повесть о двух фракталах.** 180 с.

Киселёв В. В. **Квантовая механика. Курс лекций.** 560 с.

Конвей Дж., Смит Д. **О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях.** 184 с.

Кострикин А. И. **Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры.** 272 с.

Кострикин А. И. **Введение в алгебру. Часть 2: Линейная алгебра.** 368 с.

Кострикин А. И. **Введение в алгебру. Часть 3: Основные структуры алгебры.** 272 с.

Кострикин А. И. (под ред.) **Сборник задач по алгебре.** 408 с.

Кульгин А. К. (сост.) **XXXI Турнир им. М. В. Ломоносова.** 204 с.

Ларкин А. И. **Собрание трудов. Т. 1.** 715 с.

Лейбсон К. Л. **Сборник практических заданий по математике. Часть 2. 9 класс.** 184 с.

Манин Ю. И., Панчишкин А. А. **Введение в современную теорию чисел.** 552 с.

- Махортов С. Д. **Математические основы искусственного интеллекта. Теория LP-структур для построения и исследования моделей знаний.** 304 с.
- Медников Л. Э. **Чётность.** 60 с.
- Молев А. И. **Янгианы и классические алгебры Ли.** 536 с.
- Муравенко Е. В., Шеманаева О. Ю., Пиперски А. Ч. (сост.) **Лингвистика для всех. Летние лингвистические школы 2007 и 2008.** 488 с.
- Николенко С. И., Тулупьев А. Л. **Самообучающиеся системы.** 288 с.
- Понарин Я. П. **Элементарная геометрия: В 3 т. Том 3. Треугольники и тетраэдры.** 192 с.
- Понарин Я. П. **Аффинная и проективная геометрия.** 288 с.
- Прохоров Ю. Г. **Особенности алгебраических многообразий.** 128 с.
- Райгородский А. М. **Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии.** 136 с.
- Райгородский А. М. **Остроугольные треугольники Данцера – Грюнбаума.** 32 с.
- Скопенков А. Б. **Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах.** 72 с.
- Смирнов В. А. **Готовимся к ЕГЭ. Геометрия. Планиметрия.** 256 с.
- Смирнов В. А. **Готовимся к ЕГЭ. Геометрия. Стереометрия.** 272 с.
- Смирнов В. А., Смирнова И. М. **Геометрия на клетчатой бумаге.** 264 с.
- Смирнов Е. Ю. **Группы отражений и правильные многогранники.** 48 с.
- Спивак А. В. **Математический кружок. 67 классы.** 128 с.
- Тель Ж. **Введение в распределенные алгоритмы.** 616 с.
- Толпыго А. К. **Тысяча задач Международного математического Турнира городов.** 456 с.
- Туганбаев А. А. **Теория колец. Арифметические модули и кольца.** 472 с.
- Турова Н. Я. **Таблицы-схемы по неорганической химии.** 48 с.
- Тюрин Ю. Н., Макаров А. А., Симонова Г. И. **Теория вероятностей. Учебник для экономических и гуманитарных специальностей.** 256 с.
- Успенский В. А. **Простейшие примеры математических доказательств.** 56 с.
- Френкин Б. Р. (сост.) **Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1.** 264 с.
- Хачиян Л. Г. **Избранные труды.** 520 с.
- Хелемский А. Я. **Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении.** 304 с.
- Цфасман М. А., Прасолов В. В. (под ред.) **Глобус. Общематематический семинар. Выпуск 4.** 224 с.
- Чулков П. В. **Арифметические задачи.** 64 с.
- Чулков П. В. (под ред.) **Весенний турнир Архимеда.** 416 с.
- Шахмейстер А. Х. **Введение в математический анализ.** 792 с.
- Шахмейстер А. Х. **Комплексные числа.** 176 с.
- Шень А. **Космография.** 48 с.
- Яценко И. В., Семенов А. В., Захаров П. И. **Подготовка к экзамену по математике ГИА 9 (новая форма) в 2009 году. Методические рекомендации.** 208 с.

Яценко И. В., Семенов А. В., Захаров П. И. **Подготовка к экзамену по математике ГИА 9 (новая форма) в 2010 г. Методические рекомендации.** 240 с.

Яценко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. **Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания.** 128 с.

Яценко И. В., Семенов А. В., Захаров П. И. **ГИА. Алгебра. Тематическая рабочая тетрадь. 9 класс (новая форма).** 240 с.

Яценко И. В., Семенов А. В., Захаров П. И. **ГИА. Алгебра. Тематическая рабочая тетрадь для подготовки к экзамену (в новой форме). 9 класс.** 208 с.

Яценко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. **ЕГЭ. Математика. Тематическая рабочая тетрадь. 11 класс.** 176 с.

#### ПЕРЕИЗДАНИЯ

Алфутова Н. Б., Устинов А. В. **Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.** (3-е, испр. и доп.) 336 с.

Андреева Е. В., Гуровиц В. М., Матюхин В. А. (под ред.) **Московские олимпиады по информатике.** (2-е изд., доп.) 415 с.

Арнольд В. И. **Цепные дроби.** (2-е изд., стер.) 40 с.

Арнольд В. И. **Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов.** (2-е изд., стер.) 40 с.

Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. **Особенности дифференцируемых отображений.** (3-е изд., стер.) 672 с.

Великова Л. В. **Русский язык для старшекласников и абитуриентов в 2-х книгах.** (2-е изд., испр. и доп.) 510 с.

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А. **Метод координат.** (7-е изд., стер.) 184 с.

Гельфанд И. М., Шень А. **Алгебра.** (2-е изд., испр. и доп.) 144 с.

Ильяшенко Ю. С., Вейгу Ли **Нелокальные бифуркации.** (2-е изд., стер.) 416 с.

Львовский С. М. **Лекции по комплексному анализу.** (2-е изд., стер.) 136 с.

Мякишев А. Г. **Элементы геометрии треугольника.** (2-е изд., стер.) 32 с.

Сабитов И. Х. **Объёмы многогранников.** (2-е изд., испр.) 32 с.

Сурдин В. Г. **Динамика звёздных систем.** (2-е изд., стер.) 32 с.

Сурдин В. Г. **Пятая сила.** (2-е изд., стер.) 40 с.

Успенский В. А. **Четыре алгоритмических лица случайности.** (2-е изд., испр.) 48 с.

Шахмейстер А. Х. **Задачи с параметрами на экзаменах.** (3-е изд., испр.) 248 с.

Шахмейстер А. Х. **Тригонометрия.** (2-е изд., испр. и доп.) 752 с.

Яценко И. В. **Приглашение на математический праздник.** (3-е изд., испр. и доп.) 140 с.

Яценко И. В. **Парадоксы теории множеств.** (2-е изд., стер.) 40 с.

## ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

В материалах о Я. С. Дубнове, помещённых в предыдущем сборнике «Математическое просвещение», обнаружилось неточности. Следовало указать, что эти материалы были добыты для нас старшим преподавателем каф. мат. анализа, зам. декана Коми гос. пединститута Борисом Дмитриевичем Лившицем, которому мы весьма признательны за содействие.

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В №13

СТРАНИЦА,	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
49,	13 сверху	161–177	145–160
137,	15 сверху	соединение	соединение
138,	19 сверху	$r = s \rightarrow \infty$	$s \rightarrow 0, r/s \rightarrow 1$
139,	2 сверху	$r = \text{const}, s \rightarrow \infty$	$s \rightarrow 0, r/s \rightarrow 0$

Подготовка оригинал-макета: L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2 $\epsilon$ ,  
METAPOST, М. Н. Вялый

Подписано в печать 08.02.10. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать  
офсетная. Печ. л. 18,0. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского Центра  
непрерывного математического  
образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83

Отпечатано по StP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.  
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.