МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 8

Москва
Издательство МЦНМО
2004

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(*издательский проект* № 03–01–14139).

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, к. 202
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@mccme.ru Web-page: www.mccme.ru/free-books

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 8. — М.: МЦНМО, 2004. — 264 с.
ISBN 5–94057–136–0

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, заметки по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

В восьмом номере серии содержится большая подборка статей по геометрии и многие другие интересные материалы.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 5–94057–136–0

Содержание

Юрий Петрович Соловьёв
(1944 – 2003)

Юрий Соловьёв поступил на механико-математический факультет МГУ после нескольких лет службы в ракетных войсках. Он был старше своих однокурсников, но, к удивлению преподавателей, понимал и осваивал материал лучше и более основательно, чем самые сильные выпускники элитарных математических школ. Сочетание геометрического воображения и вкуса к изысканной современной алгебре привело его к исследовательской работе по алгебраической топологии на кафедре дифференциальной геометрии, где он стал учеником А. С. Мищенко.

Его первая работы были связаны с тематикой его научного руководителя. После защиты кандидатской диссертации Юрий Петрович Соловьёв был оставлен при кафедре в должности ассистента. Затем последовал яркий цикл работ по гомологиям с внутренними симметриями и эрмитовой K-теории. Научную работу он совмещал с преподаванием в школе-интернате №18 имени А. Н. Колмогорова. Запомнились и его доклады в

Московском Математическом Обществе (ММО) в цикле «Студенческие Чтения».

На механико-математическом факультете МГУ Ю. П. Соловьёв проработал до конца своей жизни в должностях старшего научного сотрудника, а затем, после блистательной защиты докторской диссертации, в должности и звании профессора.

Научные интересы Ю. П. Соловьёва постепенно сместились в сторону математической физики. Со свойственной ему основательностью он обработал огромный объем материала и сделал его доступным многим благодаря прочитанным им спецкурсам. Важной вехой в научной жизни Москвы стал его доклад на заседании ММО о работах М. Атьи по топологической квантовой теории поля. Затем последовал цикл совместных работ с В. В. Белокуровым и Е. Т. Шавгулидзе по квантовой теории поля. Их совместную монографию на эту тему Юрию Петровичу не суждено было увидеть в завершенном виде...

Из жизни ушел уникальный человек: энциклопедически образованный и основательный, добрый, всегда готовый прийти на помощь, талантливый и глубокий ученый, учитель в самом высоком смысле этого слова.

А. Б. Сосинский

* * * * * *

Трудно, очень трудно писать об ушедшем друге. Не хочется верить, что больше никогда не услышишь его голоса, не увидишь его добрую широкую улыбку, не получишь в трудную минуту совета и поддержки.

Я познакомился с Юрием Петровичем Соловьёвым в начале 70-х годов. Было это так. Приехав в школу-интернат при МГУ читать свою очередную лекцию, я обнаружил группу преподавателей, окруживших незнакомого мне человека, который что-то рассказывал. Усевшись за свободным столом, я прислушался. Незнакомец говорил о царевиче Димитрии, Борисе Годунове, начале смутного времени, о бурных и роковых событиях нашей истории.

Рассказ был настолько высокохудожественным, трактовки событий (в общем, хорошо мне известных) такими глубокими и тонкими, что я заслушался и, если мне не изменяет память, даже на несколько минут опоздал на свою лекцию. После окончания занятий мы совершенно случайно вместе вышли из интерната и разговорились. Так состоялось знакомство, очень быстро перешедшее в теплые дружеские отношения.

Юрий Петрович был превосходным, широко эрудированным математиком. О его научных достижениях рассказано выше, так что их я касаться не буду.

Он обладал и педагогическим талантом. Его лекции по алгебре, анализу и геометрии в интернате отличали глубина мысли, ясность, четкость и редкостная прозрачность. О самых трудных для школьников вещах он умел рассказывать увлекательно и понятно, выделяя главные идеи и как гвозди вколачивая из в головы слушателей. Многие из математиков – выпускников интерната, прослушавшие лекции Соловьёва, через много лет говорили мне, что в их биографии он был лучшим лектором, во многом определившим их научную судьбу. Юрий Петрович превосходно знал и понимал историю математики и обладал несомненным литературным даром. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть подшивки журнала «Квант», заместителем главного редактора которого он был с 1981 по 1994 год. Его статьи «Вызов Ван Роумена», «Творцы новой астрономии», «Н. И. Лобачевский» и другие несомненно входят в золотой фонд научно-популярной литературы.

Будучи членом редколлегии, заместителем главного редактора «Кванта», Юрий Петрович во многом определял лицо и уровень журнала. Он тратил много времени и труда не только на написание своих статей, но и на редактирование (иногда — переписывание) писаний других авторов. Это часто бывает в «Кванте», когда неплохие по замыслу статьи оказываются плохо написанными и их приходится улучшать, делать понятными школьникам, т. е. «доводить до ума».

Юрий Петрович обладал широчайшей эрудицией. Он знал несколько языков, в том числе древних. Трудно найти область науки и техники, с которой он в той или иной степени не был знаком. Наиболее глубокими были его познания в области истории. Мне доводилось путешествовать с ним по разным странам и в каждой из них я узнавал от него много нового, интересного и, главное, не общеизвестного. Он говорил об истории как глубокий и тонкий знаток. Порой его повествования о событиях глубочайшей древности выглядели как рассказы очевидца. Настолько наглядно, ясно и проникновенно он говорил о них. В каждом городе, где Юрий Петрович оказывался, он устремлялся в книжные магазины. В его гигантской домашней библиотеке собраны книги по математике, физике, другим точным наукам. Много в ней и художественной литературы и, разумеется, по его особому пристрастию — истории. Уникальна собранная Соловьёвым коллекция разных изданий Библии. Незадолго до смерти он говорил о своей мечте — раздобыть коптскую Библию.

Юрий Петрович был очень добрым и мудрым человеком. Неоднократно в крайне тяжелые моменты моей жизни он оказывал мне дружескую поддержку и помощь. Об этом можно было бы говорить много и долго. Но это уже личное. Скажу одно — мне очень не хватает моего друга, так рано нас покинувшего.

А. А. Егоров

Математический мир

Израиль Моисеевич Гельфанд

В. М. Тихомиров

В 2003 году отмечалось девяностолетие со дня рождения одного из крупнейших математиков современности — Израиля Моисеевича Гельфанда, ученого, находящегося по сей день на передовом рубеже современной науки.

...Давайте мысленно проследим за событиями, произошедшими в математике в прошлом веке, и, разделив его на три части, попробуем назвать математиков, оказавших наибольшее влияние на развитие нашей науки в каждый из этих трех периодов. Эта проблема не имеет однозначного решения. У каждого из нас может быть собственное мнение об эволюции математики и о влиянии на ее развитие отдельных ученых. Разные люди назовут разные имена. Но число названных ученых будет не слишком велико: круг тех, кто может претендовать на титул крупнейшего математика своего времени, достаточно узок.

Я назову три имени: Давид Гильберт, Андрей Николаевич Колмогоров и Израиль Моисеевич Гельфанд.

Двадцатый век принес величайшие достижения в науке. И в математике тоже. Адамар, С. Бернштейн, Брауэр, А. Вейль, Г. Вейль, Винер, Виноградов, Гёдель, Зигель, Ито, А. Картан, Э. Картан, М. Крейн, Лебег, Лере, фон Нейман, Петровский, Понтрягин, Уитни, Черн, Шнирельман... Я назвал здесь лишь математиков поколения моих учителей, родившихся в девятнадцатом веке и в первые десятилетия двадцатого века, и хорошо осознаю, что этот список неполон. Но взглянув на него, как не воскликнуть: какие имена! какие блистательные звёзды! И всё же для меня три имени в наибольшей мере символизируют математику двадцатого века (Пуанкаре я отношу к девятнадцатому веку) — Гильберта, Колмогорова и Гельфанда.

* * * * * *

Жизнь и творчество И. М. Гельфанда во многих отношениях беспрецедентны. Я хотел бы выделить три черты этой экстраординарности.

Все великие математики из приведенного мною списка закончили школы, все (кроме М. Г. Крейна) учились в престижных университетах, у подавляющего большинства из них детство и юность были вполне благополучными — обеспеченные родители, интеллектуальный круг общения, домашняя библиотека... Жизнь Гельфанда начиналась по-иному.

Израиль Моисеевич Гельфанд родился 20 августа (2 сентября по новому стилю) 1913 года в небольшом поселке Красные Окны (ныне в Одесской области в Украине). В одном интервью о своем детстве он рассказывал так:

«Я родился в маленьком городке, в котором была лишь одна школа. Мой учитель математики был очень добрым человеком (его фамилия была Титоренко). Я никогда не встречал лучшего учителя, хотя я знал больше, чем он, и он осознавал это.»

Кончить школу Гельфанду не довелось. В своем интервью Гельфанд поведал о трех «счастливых» обстоятельствах своей жизни. Первое из них состояло в том, что ему не пришлось кончать ни средней, ни высшей школы. Второе, — что он приехал в Москву шестнадцати с половиной лет. (Это случилось «в результате некоторых трудностей, возникших в моей семье»; некоторое время в Москве Гельфанд был безработным.) А в чём же состояло третье «счастливое» обстоятельство в жизни Израиля Моисеевича? Вот, что он рассказал:

«Мои родители не имели возможности покупать мне математические книги — у них не было средств для этого. Но мне снова повезло. Когда мне было 15 лет, родители повезли меня в Одессу делать операцию аппендицита. Я сказал, что не пойду в госпиталь, если они мне не купят книгу по математике». И книга была куплена. Это был очень ординарный учебник по анализу. Но он радикально изменил представление пятнадцатилетнего юноши о математике. Перед тем он думал, что существуют две различные математики: алгебра и геометрия. А когда он увидел формулу Маклорена, он осознал, что между этими науками нет пропасти: «Математика предстала передо мной в своем единстве. И с той поры я понял, что разные области математики вместе с математической физикой образуют единое целое.»

Без учителей, вдали от родного дома, без средств, безо всякой поддержки, в возрасте девятнадцати лет он вошел в математику настолько, что сумел поступить в аспирантуру Московского университета. Его руководителем стал Андрей Николаевич Колмогоров. В 1935 году Гельфанд защищает свою кандидатскую диссертацию, содержащую результаты, которые рассматриваются ныне, как классика функционального анализа. С той поры началась его блистательная творческая жизнь.

Примечательной особенностью его биографии является то, что он почти никогда не работал в одиночестве, а всегда со своими студентами, сотрудниками и коллегами. Вот далеко неполный список его соавторов (сохраняя примерный временной порядок): Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, М. А. Наймарк, А. М. Яглом, С. В. Фомин, Б. М. Левитан, З. Я. Шапиро (они завершили свое образование до Второй мировой войны), М. И. Граев, М. Л. Цетлин, В. Б. Лидский, Л. А. Дикий, О. В. Локуциевский (учились в военные и первые послевоенные годы), Ф. А. Березин, И. И. Пятецкий-Шапиро, Р. А. Минлос, А. Г. Костюченко, Н. Н. Ченцов, А. М. Вершик, А. А. Кириллов, Ю. И. Манин, С. Г. Гиндикин, Д. Б. Фукс (были студентами в пятидесятые годы), И. Н. Бернштейн, Д. А. Каждан, А. М. Габриэлов — в шестидесятые, В. А. Васильев, А. Н. Варченко, А. Б. Гончаров, И. Я. Дорфман, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов, В. С. Ретах, В. В. Серганова, Б. Л. Фейгин — в семидесятые годы.

Всех их я отношу к *лидерам своих поколений.* Что я вкладываю в это понятие?

Если спросить выпускника мехмата МГУ: «Кто учился на твоем курсе?», будет названо несколько имен, но, как правило, всегда имеется некое «инвариантное ядро». Вот его-то я и отношу к числу лидеров своего поколения. Практически все в приведенном выше списке соавторов Гельфанда входят в это «инвариантное ядро». (Нужно сказать еще, что в последние годы у Израиля Моисеевича появилось множество соавторов из других стран.)

Глядя на фамилии соавторов, попробуем выделить творческие периоды Гельфанда. Первый период (я упоминал о нем) не представлен в списке — работы в области классического функционального анализа были написаны без соавторов. Первым соавтором Гельфанда был не кто иной, как Андрей Николаевич Колмогоров. По сути дела это была первая работа по нормированным кольцам (или по-нынешнему — банаховым алгебрам). Этот цикл завершился монографией трех авторов (Гельфанда, Райкова и Шилова) под названием «Нормированные кольца», которая совершила переворот во всём функциональном анализе. В военные годы Израиль Моисеевич обратился к теории представлений. Это направление занимает одно из основных мест во всей научной биографии Гельфанда. В пятидесятые годы сфера деятельности Израиля Моисеевича резко расширяется. Это и обобщенные функции, и обратные задачи, и численные методы, и математическая физика, и случайные процессы... В эти годы начинается работа над монографической серией «Обобщенные функции». Она сыграла выдающуюся роль в развитии математики двадцатого столетия. Далее шла интегральная геометрия, бесконечномерные алгебры Ли, интегрируемые системы. Затем — комбинаторика, теория гипергеометрических функций, некоммутативная математика. И всё это в одной лишь математике.

Но, начиная с шестидесятых годов, Гельфанд концентрирует титанические усилия на проблемах биологии (математическая диагностика, теория движения, биология клетки). Я слышал, что Гельфанда как-то спросил один из биологов: «Не имеете ли Вы какого-либо отношения к известному математику Гельфанду?»

Нелегко назвать ту из отраслей математики, представленных в секциях Математических Конгрессов (за исключением, пожалуй математической логики), в которые Гельфанд не внес бы фундаментального вклада. При этом он является всемирно признанным мировым лидером в функциональном анализе, теории групп Ли и теории представлений. Невозможно не отметить его вклад в алгебру, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, теорию дифференциальных уравнений, математическую физику, численный анализ, приложения к нефизическим наукам. Такая широта почти не имеет примеров в нашей науке.

Так вот, вторая необычайность творчества Гельфанда — его поразительная разносторонность, соединенная с тем (об этом уже говорилось), что он сотрудничал и сотрудничает (занимая позицию лидера) с представителями многих поколений. Возрастной диапазон соавторов Гельфанда вообще умопомрачителен: дистанция между годами рождения старшего и младшего из соавторов Гельфанда восемьдесят лет!

А еще одна несравненная особенность гельфандовской жизни в науке — это его невероятное долголетие: в этом году исполняется семьдесят лет его научного творчества на уровне высших достижений.

Как правило, творческий потенциал ученого подходит к концу, когда ему исполняется 60 лет, а интенсивная творческая деятельность длится два, три, редко четыре десятилетия. Научная биография Гельфанда длится семьдесят лет!

Помимо творчества, обращенного ко всему Человечеству, Израиль Моисеевич имеет огромные заслуги в области математического просвещения в нашей стране. Семьдесят лет тому назад был образован знаменитый «семинар Гельфанда», один из самых плодотворных научных семинаров в истории науки. Математики чуть более старшего, чем моего, поколения с восторгом и восхищением рассказывали о Гельфанде-лекторе математических курсов (многие называли его лучшим, среди всех, кого им доводилось слушать). Гельфанд был среди основателей школьных математических кружков при Московском университете. Он основал Заочную математическую школу.

И еще об одном нельзя забывать и нельзя не сказать: Израиль Моисеевич очень много делал и делает для людей, в частности, многие обязаны ему своей жизнью. Но это — отдельная тема.

* * * * * *

В этом году с 31 августа по 4 сентября в США состоялась конференция "The Unity of Mathematics", приуроченная к девяностолетию И. М. Гельфанда. Информацию о Конференции я оставляю без комментариев.

На конференции выступили с докладами Д. Каждан, Р. Дийкграаф, А. Бейлинсон, В. Дринфельд, Г. Люстиг, М. Атья, К. Вафа, А. Конн, А. Шварц, Т. Сейберг, С.-Т. Яо, Д. МакДафф, Н. Некрасов, Л. Фаддеев, М. Хопкинс, М. Концевич, С. Новиков, И. Зингер, П. Сарнак, Б. Костант, Д. Гейтсгори, А. Вершик, И. Бернштейн.

На этой конференции 2 сентября, в день своего девяностолетия, выступил с докладом и сам юбиляр. Его доклад назывался "Mathematics as an adequate language". Вот план этого доклада: 0. Introduction. 1. Non-commutative Multiplication. 2. Addition and Multiplication. 3. Geometry. 4. Fourier Transform, Analitic Functionals, and Hypergeometric Functions. 5. Applied Mathematics, Blow-up and PDE's. (Таким образом, в докладе отражены суперсовременные алгебра, теория чисел, геометрия, анализ и прикладная математика.) Вот небольшой отрывок из введения к докладу:

«Я не ощущаю себя пророком. Я лишь ученик (I do not consider myself a prophet. I am simply a student.) Всю жизнь я учился у великих математиков, таких как Эйлер или Гаусс, у моих старших и младших коллег, у моих друзей и сотрудников, но более всего (most importantly) у моих учеников. В этом мой путь продолжать свой труд».

Труд во благо Человечества, во благо всех нас продолжается.

Поздравим же юбиляра, пожелаем ему здоровья, сил и дальнейших успехов и поблагодарим его за счастье быть его современниками.

Речь И. М. Гельфанда на вечере в Royal East Research 3 сентября 2003 г.

Мне приятно видеть всех вас. Мне задавали множество вопросов. Я постараюсь ответить на некоторые из них. Первый вопрос: как это я в мои годы могу работать в математике? Второй: что нам надо делать в математике? И третий: каково будущее математики? Эти вопросы представляются мне слишком частными. Вместо них я отвечу на мой собственный вопрос: что есть математика? (Смеется.) Начнем с этого вопроса: что такое математика?

С моей точки зрения математика — это часть культуры, как музыка, поэзия и философия. Я сказал об этом в моей лекции на Конференции. Там я упомянул о связи математического стиля и стиля классической музыки или поэзии. Я был счастлив, когда нашел следующие четыре общих черты: это — красота, простота, точность и безумство идей (crazy ideas). В комбинировании этих четырех сущностей — красоты, простоты, точности и безумства идей — сердце математики, сердце классической музыки. Классическая музыка — это не только музыка Моцарта, или Баха, или Бетховена. Это также музыка Шостаковича, Шнитке, Шёнберга (последнего я знаю меньше). Всё это классическая музыка. И я думаю, что все эти четыре черты всегда сосуществуют в ней. По этой причине, как я старался объяснить в моей лекции, это не означает, что математика то же, что классическая музыка. Они сходны по стилю своей философской организации. Есть еще одна черта сходства между математикой, классической музыкой, поэзией и т. п. Все они суть языки, с помощью которых можно понимать многие вещи. Например, в моей лекции я это объяснял, чего не буду делать здесь, но я знаю ответ: почему греческие философы изучали геометрию? Они были философами. Они учили геометрию, как философию. Великие геометры следовали и следуют всё той же традиции преодолеть разрыв между видимым и сущностью. Например, работы Евклида исчерпывали эту тему для своего времени. Но это — другая тема. Важная черта математики состоит в том, что она является адекватным языком многих различных областей: физики, инженерии, биологии. Это очень важное понятие: адекватный язык. Существуют адекватные и неадекватные языки. Я могу дать вам примеры адекватных и неадекватных языков. Например, использовать методы механики в биологии — неадекватный язык, но использование математики при изучении последовательностей генов — адекватный язык. Математический язык позволяет организовать многие вещи. Но это — серьезный вопрос, и я не хочу входить в детали. Почему эта тема важна сейчас? Она важна потому, что в наше время происходит «перестройка». Существуют компьютеры, которые могут делать всё. Мы не обязаны ограничиваться только двумя операциями — сложением и умножением. У нас имеется множество средств. Я уверен, что через 10 – 15 лет математика будет совершенно отлична от той, что была раньше.

Следующий вопрос: Как я могу работать в мои годы. Ответ очень прост. Я не великий математик. Я говорю серьезно. Я просто ученик, всю мою жизнь. С самого начала моей жизни я старался учиться. И например, сейчас, слушая доклады и читая тезисы этой Конференции, я обнаруживаю, как многого я еще не знаю и должен узнать. Таким образом, я учусь всю жизнь. В этом смысле я ученик. И никогда не был «вождем».

Мне хочется назвать моих учителей. Я не могу назвать их всех, их было слишком много. Когда я был молод, и мне было 15 – 16 лет, я начал изучать математику. У меня нет формального образования: я не кончал никакого университета. Я «перепрыгнул» через это. В 19 лет я стал аспирантом и учился у моих старших коллег. В этот период одним из наиболее важных моих учителей был Шнирельман — математический гений, умерший молодым. Затем были Колмогоров, Лаврентьев, Плеснер, Петровский, Понтрягин, Виноградов, Люстерник. Они были разными. Некоторых из них я любил, про некоторых из них я знал, как они хороши, но я не был согласен с их, как бы это сказать помягче, точками зрения. (Смеется.) Но все они — великие математики. Я благодарен им всем, я многое воспринял от них.

А в конце я хочу привести для вас пример короткого не математического высказывания, в котором сочетаются простота, точность, красота и всё другое, о чём я говорил. Это высказывание принадлежит Нобелевскому лауреату Исааку Башевису Зингеру. Пусть моя дочь прочтет его.

“There will be no justice as long as man will stand with a knife or with a gun and destroy those who are weaker than he is.”

Памяти З. А. Скопеца

Б. А. Розенфельд Е. М. Элькина

В 2004 году исполняется 20 лет со дня смерти замечательного геометра, профессора Ярославского педагогического института Залмана Алтеровича Скопеца.

З. А. Скопец родился 1 января 1917 г. в городе Краславе в той части Витебской губернии, которая после образования Латвийской республики вошла в ее состав. После окончания гимназии в родном городе З. А. учился на физико-математическом факультете Латвийского университета в Риге. Он рассказывал, что лекции по математике там читали немецкие и французские профессора, студенты пользовались учебниками на немецком и французском языках, а З. А. читал также русские математические книги.

Еще в гимназии З. А. любил решать сложные геометрические задачи, а в университете с особенным удовольствием слушал геометрические курсы. По западным учебникам З. А. изучил проективную и алгебраическую геометрию и различные виды начертательной геометрии. Он внимательно прочел «Проективную геометрию» Н. А. Глаголева, изданную в Москве в 1936 г.

В 1937 г. З. А. окончил университет и в 1938 г. защитил магистерскую диссертацию. В том же году З. А. был призван в латвийскую армию.

В первые дни войны, когда немецко-фашистские войска приближались к Риге, З. А. удалось эвакуироваться.

З. А. доехал до Ярославской области, где стал работать учителем математики в одной из сельских школ. Школьники не могли выговорить его имени и отчества и называли его «Залп Артиллерич». Коллеги посоветовали ему взять русское имя и он выбрал «Захар Александрович», это имя закрепилось за ним до конца жизни.

В 1942 г. З. А. переехал в Ярославль, где стал преподавателем в Ярославском педагогическом институте.

Уезжая из Риги, З. А. не смог взять с собой документ об окончании университета, и во время одной из поездок в Москву он прошел собеседование с профессорами Московского университета, получил документ об окончании университета и был принят в заочную аспирантуру МГУ. Научным руководителем З. А. был доцент кафедры высшей геометрии

Сергей Дмитриевич Россинский. З. А. написал диссертацию по алгебраической геометрии, которую защитил в МГУ в 1946 г. После защиты З. А. стал доцентом и (в 1953 г.) заведующим кафедрой элементарной математики Ярославского пединститута.

Один из авторов этих строк познакомился с З. А. в 1947 г. в МГУ и впоследствии часто приезжал к З. А. в Ярославль, а З. А. бывал у него в Москве. Второй автор — близкий друг семьи З. А. — много лет работала учительницей математики в Ярославле. З. А. был неприхотливым, добрым человеком, преданным семьянином. Его жена Мария Борисовна была доцентом кафедры физики того же института. Их дочери Рива и Алла стали математиками.

В Ярославском пединституте З. А. читал курсы и руководил аспирантами по геометрии и по методике преподавания математики.

Несколько раз З. А. приезжал в Ригу и читал лекции по геометрии на латышском языке в родном университете.

Интересы З. А. выходили далеко за пределы математики, он был знатоком западноевропейской, латышской и русской литературы, очень любил поэзию великого латышского поэта Яна Райниса, прекрасно играл на скрипке.

Виртуозность З. А. в решении геометрических задач стала известна в Москве и редакция журнала «Математика в школе» поручила З. А. руководить отделом задач этого журнала.

В 1954 г. во время празднования 150-летия Казанского университета З. А. поздравил этот университет от имени Ярославского пединститута.

Научная работа З. А. относилась к проективной, алгебраической, начертательной и неевклидовой геометрии. В 1951 г. на конференции, посвященной 125-летию открытия Лобачевского, З. А. доложил и опубликовал в сборнике «125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского» свою работу «Циклографическое отображение пространства Лобачевского». В 1955 г. в сборнике «Методы начертательной геометрии и ее приложения» была опубликована статья З. А. «Принципы начертательной геометрии пространства Лобачевского».

В этих работах З. А. предложил две новые интерпретации пространства Лобачевского. В первой из них плоскости пространства Лобачевского изображаются окружностями на евклидовой плоскости, во второй интерпретации плоскости пространства Лобачевского изображаются «циклами» плоскости Лобачевского, т. е. окружностями, эквидистантами (геометрическими местами точек, равноотстоящих от прямой линии) и орициклами (ортогональными траекториями пучков параллельных прямых). В первом случае в пространстве Лобачевского задается орисфера, т. е. поверхность вращения орицикла вокруг одной из его нормалей, и всякой плоскости пространства ставится в соответствие окружность на этой орисфере, во всех точках которой нормали к орисфере параллельны данной плоскости. Так как орисферы пространства Лобачевского изометричны евклидовой плоскости, окружности на орисфере изображаются евклидовыми окружностями. Во втором случае в пространстве Лобачевского задается плоскость, и всякой плоскости пространства ставится в соответствие цикл на заданной плоскости, во всех точках которого перпендикуляры к этой плоскости параллельны данной плоскости. Цикл является окружностью, когда данная плоскость не пересекается со взятой плоскостью, эквидистантой, когда эти плоскости пересекаются, и орициклом, когда эти плоскости параллельны.

Обе эти интерпретации конформны, т. е. угол между двумя окружностями или циклами, изображающими две плоскости пространства Лобачевского, равен углу между этими плоскостями. Изображение плоскостей пространства Лобачевского окружностями или циклами в этих интерпретациях является обобщением классических «циклографических изображений» точек или плоскостей евклидова пространства окружностями на евклидовой плоскости.

Эти интерпретации были описаны в докторской диссертации З. А., которую он защитил в 1962 г. в Московском государственном педагогическом институте. С 1963 г. З. А. — профессор Ярославского пединститута. С 1964 г. он заведовал кафедрой геометрии пединститута.

В других работах З. А. изучал алгебраические линии и поверхности и их применение к решению задач проективной и начертательной геометрии. Из этих работ отметим статьи 1961 г. «Отображение пространства на плоскость посредством пространственных кривых» и 1963 г. «Отображение четырехмерного пространства на двумерную плоскость посредством нормкривой». В этих работах рассматривается нормкривая n-мерного проективного пространства, уравнения которой приводятся к виду $x^0 = 1$, $x^1 = t$, $x^2 = t^2$, $\ldots$, $x^n = t^n$ при $n = 3$ и $n = 4$ и применение этих кривых для сведéния задач 3-мерной и 4-мерной геометрии к задачам плоской геометрии.

В некоторых работах З. А. рассматривал кремоновы (бирациональные) преобразования. В работе 1952 г. «Квадратичные кремоновы преобразования на плоскости и комплексные числа» З. А. определил инверсии относительно конических сечений как такие преобразования плоскости, при которых всякая точка X плоскости переходит в точку X' пересечения поляры точки X относительно конического сечения с диаметром, проходящим через точку X, и доказал, что квадратичные кремоновы преобразования на проективной плоскости являются произведениями проективных преобразований на инверсии относительно конических сечений, а также выразил инверсии относительно окружностей на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях и относительно циклов на изотропной плоскости с помощью однотипных функций обычного комплексного переменного, двойного переменного $a + be$, $e^2 = +1$, и дуального переменного $a + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$.

З. А. подготовил около сорока кандидатов наук, из которых 5 стали докторами наук.

Первая аспирантка З. А. Галина Васильевна Киотина защитила кандидатскую диссертацию в 1956 г. В настоящее время она — доктор физ.-мат. наук и профессор, заведовала кафедрой геометрии Рязанского пед. университета. В своей докторской диссертации она разработала несколько новых типов неевклидовой геометрии.

Александр Сергеевич Тихомиров защитил в Ярославле кандидатскую диссертацию по алгебраической геометрии, в настоящее время он — доктор физ.-мат. наук и профессор, заведует кафедрой алгебры Ярославского гос. университета.

Доктора педагогических наук: Г. Д. Глейзер — академик Российской академии образования, и Т. А. Иванова — зав. кафедрой теории и методики обучения математике Нижегородского пед. университета. Доктор технических наук Г. С. Иванов — зав. кафедрой начертательной геометрии Московского авиационного института.

Среди аспирантов З. А. были Э. А. Лаудыня и М. К. Муран из Латвии, П. Марголите из Литвы, украинец О. А. Котий, кабардинка Е. А. Тефова и 6 аспирантов из Болгарии.

Некоторые студенты З. А. стали аспирантами других руководителей. Нина Талызина под влиянием курсов З. А. по методике преподавания занялась психологией и стала доктором психологических наук и профессором Московского университета. (Ныне она академик РАО.) Аспирантами А. М. Лопшица, работавшего одно время в Ярославском пединституте, были Владимир Васильевич Афанасьев и Исай Львович Кантор. В. В. Афанасьев, изучавший «плоскости Матье», состоящие из конечного числа точек, группами движений которых являются простые конечные группы Матье, впоследствии стал ректором Ярославского пед. университета. И. Л. Кантор, автор известных работ по геометрии групп Ли, в настоящее время — профессор университета в Лунде (Швеция).

В 1979 г. по инициативе З. А. Ярославским пединститутом, МГУ и Институтом математики АН СССР в Ярославле была организована всесоюзная школа по алгебраической геометрии, в которой участвовали академики В. И. Арнольд, С. П. Новиков, профессор М. М. Постников и другие известные математики. Занятия этой школы проходили в течение нескольких лет, после смерти З. А. школу возглавил А. С. Тихомиров.

Р. З. Гушель, дочь З. А., бывшая аспиранткой О. А. Котия, является автором многих работ по геометрии сегреан (алгебраических многообразий К. Сегре) и по истории математики и математического образования в России и в других странах.

З. А. оказывал большое внимание учителям. По его инициативе была создана общественная аспирантура по методике преподавания математики для учителей школ. Во многих городах России и населенных пунктах Ярославской области З. А. давал уроки геометрии в школах. Эти уроки были образцом творчества учителя и завораживали учеников, многие из которых впоследствии становились математиками.

Академик А. Н. Колмогоров подверг школьные учебники математики суровой критике за то, что геометрия в них излагается на уровне Евклида, а алгебра — на уровне ал-Хорезми, и предложил создать новые учебники, соответствующие современному уровню математики. А. Н. Колмогоров привлек З. А. к созданию новых учебников геометрии. З. А. охотно взялся за эту работу, используя свой богатый опыт преподавания. В результате были созданы новые учебники геометрии для всех классов начальной и средней школы.

Однако новые учебники были встречены «в штыки» многими учителями, и при переизданиях учебников важные новшества авторов исчезали. Это тяжело отразилось на здоровье А. Н. Колмогорова и З. А.

З. А. сильно переживал закрытие ученого совета по защите диссертаций по геометрии в Ярославском udпединституте. В Ярославском гос. университете диссертаций по геометрии не принимали к защите, и лишь лучшие из учеников З. А. защищали диссертации в Московском гос. пединституте и других местах.

Вечером 2 ноября 1984 года З. А. позвонил в Москву одному из авторов этих строк и попросил помочь в организации защиты диссертации В. В. Афанасьева. Утром 3 ноября из Ярославля позвонили, что этой ночью Захар Александрович умер от инфаркта.

З. А. был прост в общении, доброжелателен, особенно к своим ученикам. Многие учителя, бывшие студенты З. А., с большой теплотой вспоминают своего наставника, который привил им любовь к педагогической работе и к геометрии.

К проблемам математического образования

На протяжении многих десятилетий не утихает дискуссия по проблемам математического образования. Особенной остроты она достигла в последние годы. Обсуждения ведутся в школах, вузах, университетах, в Российской академии наук, по радио и телевидению.

Наше издание также собирается принимать участие в обсуждении этой актуальной темы. Здесь мы предлагаем читателю ознакомиться с мнением выдающегося математика о том, как следует преподавать математику нематематикам.

Лекция о преподавании математики нематематикам

В. А. Рохлин

Замечательный математик, известный благодаря своим основополагающим работам в теории динамических систем и топологии, и воспитавший ряд первоклассных математиков — Владимир Абрамович Рохлин (1919–1984) — был блестящим лектором и много размышлял над проблемами преподавания математики. Одно время он руководил математическим лекторием для учителей на матмехе ЛГУ. Его собственный педагогический опыт был обширен и разнообразен: он преподавал во ВТУЗе, затем в педагогических институтах, и, в течение последних 20 лет жизни, в Ленинградском Государственном Университете. Подробности см. в книге В. А. Рохлин. «Избранные работы. Воспоминания.» М.: МЦНМО, 1999.

Ниже публикуются фрагменты одной из последних лекций В. А. Рохлина. Эта лекция состоялась 20 ноября 1981 года на заседании Ленинградского Математического Общества. Публикация основана на магнитофонной записи, которая была недавно расшифрована и подготовлена к печати в результате усилий А. М. Вершика, О. Я. Виро, Б. А. Лифшица и С. В. Рыбина. К сожалению, начало лекции — примерно 15 минут — утрачено. В нем Владимир Абрамович рассказал, в частности, о своем опыте преподавания студентам-нематематикам в вузах Архангельска, Иваново и Коломны в 1950-е годы.

А. М. Вершик

...В школе детям, естественно, не излагают серьезных доказательств, но им даются формулировки. Например, их учат делить дробь на дробь. Имеется правило, которое формулируется — формулировку они должны знать.

Однажды я присутствовал на докладе одного методиста, который объяснял, как учить детей делить дробь на дробь.

Он рассказал, что правило было сформулировано, после чего он прорешал для детей в качестве примеров несколько задач такого рода. Затем порешали примеры дети, а потом им была дана контрольная письменная работа. И в этой контрольной письменной работе почти все сделали одну типичную ошибку. Они, в некоторых случаях, и все в одних и тех же, почему-то не переворачивали дроби, а просто перемножали — в некоторых случаях сначала переворачивали, а в других — нет.

В чём дело?

И методист объяснил, что анализ показал причину ошибки. Причина ошибки заключалась в том, что в примерах, которые предлагались детям до контрольной, вторая дробь всегда была правильная. Дети и усвоили из этих примеров, как надо действовать. Так они и действовали.

Таким образом, правило, которое было сначала сформулировано этим преподавателем, вовсе не было формулировкой, которую дети должны были понять и которой они должны были руководствоваться. Это правило было продиктовано детям. Полагается диктовать правило — и оно было продиктовано.

То обстоятельство, что дети в этом возрасте должны научиться *понимать* правило и пользоваться этой формулировкой, а вовсе не примерами, которые им были показаны, — это обстоятельство совершенно ускользнуло от этого методиста и ото всех других, присутствовавших на его лекции.

Мне представляется зловредным заблуждением то, что сразу после формулировки даются примеры. Мне кажется совершенно несомненным, что дети должны сами, руководствуясь данным правилом, просчитывать первые примеры. Конечно, они должны приобрести навыки и дальше делать это автоматически, но ценнейшее обстоятельство, что дети на примере могут научиться и должны научиться понимать формулировку, было упущено.

Это не частный случай. На самом деле то, что я сейчас рассказал, — это основные принципы методики преподавания. Они общераспространены.[1)]

В наше время можно окончить среднюю школу и не решить, в действительности, ни одной математической задачи. Даются шаблоны, примеры, подражая которым дети и справляются со своими школьными обязанностями.

Когда на первом курсе студентам, да и часто не только на первом курсе, на упражнениях предлагаются задачи, понаблюдайте — что делают студенты. Ну, конечно, я не говорю о студентах матмеха.

У меня другой предмет — преподавание математики нематематикам. Но у меня такой опыт, что в группе студенческой, нематематической, предложенные задачи решают 2–3 человека. Остальные сидят и ждут.

[1)]Вероятно, в утраченном начальном фрагменте лекции Рохлин говорил о зловредности общепринятых принципов методики преподавания математики. К сожалению, сохранилось лишь критика принципа, согласно которому каждое правило надлежит, немедленно после его формулировки, иллюстрировать примерами его использования. – Примечание О. Я. Виро

Они, собственно, не знают, чего от них хотят. Они ждут, что задача будет решена на доске, или что им скажут, как решать такие задачи. Они не проявляют инициативы, им вообще совершенно непривычна сама постановка вопроса.

Ведь если вы скажете этим молодым людям, что они должны пойти в магазин и в аптеку, и что перерыв в аптеке тогда-то, а в магазине тогда-то, они выберут правильный порядок посещения магазина и аптеки и не пойдут в аптеку во время перерыва. Ну, конечно, всякие бывают случаи. (*Оживление.*)

Задачи, которые предлагаются студентам на занятиях, гораздо проще этой задачи про аптеку и магазин. Однако детям и в голову не приходит приниматься за их решение. И детям, и таким детям, которым уже 17–18 лет. Вот это удивительное явление, конечно же, является следствием самого преподавания математики.

Подобным же образом, удивительным является общий уровень познаний в области точных наук, не только математики, среди взрослого населения, среди людей, которые давно уже не учатся, по крайней мере, в школе или в ВУЗе, и считаются людьми образованными.

Если вы возьмете писателей, музыкантов, актеров, режиссеров, очень многих врачей (я уже не говорю о других представителях гуманитарных специальностей), вы обнаружите совершенно удивительные вещи.

Они с гордостью говорят и пишут, что не сильны в математике или физике. Они рассказывают об этом с некоторой усмешкой, и, в общем, не делают большого различия. Позвольте мне такой несколько утрированный оборот речи: для них всё это — какая-то область техники, физики — есть что-то не очень высокое, не очень достойное уважения, но, во всяком случае, нечто такое, что должно им служить.

С врачами, конечно, дело постепенно меняется. Сейчас преподают математику и философам, и представителям других гуманитарных специальностей. Однако преподают всё по тому же самому шаблону, совершенно не добиваясь какого бы то ни было понимания или проникновения в предмет.

Если вы внимательно почитаете интересные, иной раз, статьи представителей гуманитарных специальностей, вы заметите, что они очень любят пользоваться оборотами речи, заимствованными из физики и математики. Это модно, современно, но, о ужас, что они пишут! Поразительно, что они не очень представляют себе, что такое множитель и делитель, что такое степень, что такое отрицательное и положительное число. Например, можно встретить такую фразу, что имеется нечто отрицательное и потому это не ноль, а бесконечность?! (*Смех*).

Я не преувеличиваю, я мог бы привести несколько мест, где такое можно прочитать. Это всё написано известными людьми с громкими именами. Написано в газетах. Что-то они запомнили из курса начальной школы и почему-то думают, что они запомнили правильно.

Что же со всем этим делать? Это трудный вопрос.

Я не верю в то, что проблему повышения уровня образования — общего, массового — в области точных наук (и математики, в частности) можно решить быстро. Это трудная задача, которая требует огромных усилий и времени.

Возникает еще один вопрос. А можно ли и нужно ли эту задачу решать? Все образованные общества до недавнего времени были образованными гуманитарно. В истории человечества еще не было общества, которое было бы массовым образом образовано в области точных наук.

Классическое образование в образованных слоях общества в свое время было распространенным, чрезвычайно распространенным. Но точные сколько-нибудь науки сколько-нибудь серьезным образом не были достоянием образованной части общества никогда.

Многие современные развивающиеся страны имеют большую историю, уходящую в глубь веков и даже тысячелетий. Многие из них имеют свою интеллигенцию, но это интеллигенция опять же гуманитарная. Они чрезвычайно охотно изучают гуманитарные науки, но точные науки не очень охотно. Не очень охотно и не очень успешно.

Заканчивая эти предварительные замечания, я хочу сказать, что на самом деле никто не знает, ну и я, конечно, не знаю, к чему привело бы, массовое серьезное обучение математике и точным наукам, — улучшило бы это положение, или ухудшило, что улучшилось бы, что ухудшилось. Я этого не знаю, как не знает никто. Такого опыта нет. Тем не менее мы почему-то к этой цели стремимся. Мы стараемся. Как-то мы интуитивно чувствуем, что это будет хорошо, если наши дети и внуки будут приобщены к логической культуре, к математической культуре, если они будут лучше понимать точные науки.

Очень может быть, что это приведет к невиданному перевороту, к невиданным результатам, – кто знает. Но, так или иначе, до этого далеко.

Обращаясь к более узкому предмету своей лекции, я должен сказать, что обучение математике математиков — дело бесконечно более легкое, чем обучение математике нематематиков.

В конце концов, с будущими математиками мы разговариваем честно. Вот есть наука, и этой науке, которую знаем мы, мы стараемся обучить будущих математиков. Как бы мы ни были искусны или неискусны в деле чтения лекций и ведения упражнений, мы, зная предмет, способны интересующимся людям свои знания передать. Но как быть с теми, которые не интересуются и думают, что не способны, или так говорят.

Очень часто это говорят люди, которые просто погрязли, так сказать, с детства в интеллектуальной лени. Эта интеллектуальная лень —

чрезвычайно распространенное явление, иной раз это удается быстро выяснить. Поговорив недолго с человеком, утверждающим, что у него нет никаких математических способностей, что он бесконечно далек от всего этого, обнаруживаешь, что он прекрасно понял всё, что вы ему сказали.

Таким образом, вопрос о способностях в этой области — сложный вопрос, и не надо уж так прямо и просто доверять людям, которые говорят, что у них нет склонности к этим областям, у них, видите ли, гуманитарный интерес.

Обращаясь собственно к преподаванию математики нематематикам, я должен, прежде всего, объяснить, кого я называю нематематиком. Бесполезно обсуждать этот вопрос вообще. Я просто скажу, кого я имею в виду вот сейчас, говоря об этом предмете. Я имею в виду обучение математике людей, которые не собираются математикой заниматься, которые изучают ее либо для прикладных целей, либо потому, что проявляют к ней непрофессиональный интерес.

Ну, интерес этот, конечно, облегчает как-то задачу преподавателя. Очень часто этого интереса нет, а есть отвращение. Сколько угодно имеется сейчас категорий обучающихся, которые обязаны что-то учить в области точных наук, но не проявляют к этому интереса. Тем не менее, они должны сдавать экзамены и прочее. Как быть с этими людьми? Как быть с людьми, которые проявляют интерес к математике, но обучаются по программам, по которым научиться нельзя? Имеется много математических программ для студентов ВТУЗов[2)] самого разного содержания, самого разного объема.

Однако часто и программы, и соответствующие учебники не являются самостоятельными, а представляют собой просто испорченные курсы, по которым готовят математиков. Всё тот же порядок изложения, всё те же пределы, та же производная, тот же интеграл, те же кривые второго порядка, и так далее, и тому подобное.

Изложение ведется в том же порядке, но менее понятно. Нет надлежащих доказательств, которые позволили бы понять суть дела. Нет литературного таланта у авторов учебников. Всё это скучно, непонятно. Хорошо, если лектор сможет заинтересовать студентов и что-то им объяснить, так сказать, за рамками написанного.

Это положение вещей является совершенно массовым, и не только в нашей стране оно таково, как я говорил. Это явление вполне международное. И, как мне кажется, суть дела здесь в следующем. По-видимому, высшие технические учебные заведения, педагогические институты и средние школы требуют совершенно особых курсов математики. Для каждой категории обучающихся (достаточно большой, конечно) нужен,

[2)] Аббревиатура ВТУЗ означает высшее техническое учебное заведение.

по-видимому, свой курс. И вовсе не тот, по которому учат математике математиков.

Главный дефект этих курсов, главная причина их неуспехов, как мне кажется, заключается в следующем. Никто из крупных математиков никогда не занимался составлением курса математики для нематематиков. Сейчас я говорю уже не о средней школе, а о высшей, и имею в виду следующее.

Вот обычно, перед тем, как излагать дифференциальное и интегральное исчисление, студентам преподают теорию пределов. Теперь и в средней школе то же самое. Там тоже преподают пределы. Между тем, и это яркий пример имеющегося положения вещей, пределы — это самая трудная часть курса для понимания и, что самое интересное, — совершенно ненужная. И дифференциальное исчисление, и интегральное исчисление, и, вообще, всю классическую математику, я уже не говорю о математике конечной, прекрасно можно изложить без пределов. Более того, они там совершенно не нужны. Это совершенно чужеродное явление, чужеродный предмет, который был внесен в эту область людьми, стремившимися *обосновать* анализ.

Между тем, цель *обоснования* во ВТУЗе, конечно, не достигается, и даже не ставится. Уже из этого примера видно, что эти курсы совершенно не продуманы и просто представляют собой ухудшенные варианты университетских курсов.

Сейчас я объясню свою мысль, относящуюся к пределам, чуть более подробно.

Вот когда я учился в школе (возможно это и сейчас так), мне объясняли, что такое площадь круга. Мне говорили, что площадь круга — это предел некий, и потом что-то писали, говорили, и получали какую-то формулу для площади круга. Трудно было понять, что там рассказывали, а когда я стал математиком, то мне стало совершенно ясно, почему это было трудно понять — потому что всё это сплошной вздор.

Никто из обучавшихся вместе со мною не сомневался в том, что он знает, что такое площадь круга. Скорее нам было странно, что для круга определяется площадь, но почему-то она не определяется для других фигур. Нам было странно то, что площадь круга, которая нам совершенно понятна, определяется нам через какие-то пределы, которые нам совершенно непонятны. Нам было странно, конечно же (и всем детям странно, которые немножечко об этом размышляли), что какие-то теоремы о пределах нужны для того, чтобы установить совсем ясные и простые вещи, в которых мы не сомневались.

Ну, а для чего же вообще определять площадь круга и доказывать, что она равна πR^2? Почему не объявить просто, что площадь круга есть, по определению, πR^2, какая разница? По-видимому, разница в том, действительно серьезная разница, что площадью обладает не один круг, что площадь — это общее понятие, что площадь определена для широкого класса фигур, она обладает всем известными свойствами, которыми и пользуются и которые делают площадь понятием полезным.

Таким образом, отношение школьного курса к понятию площади было тогда (а, может быть, и сейчас во многих случаях остается) совершенно диким.

Но таково же и отношение в преподавании математики во ВТУЗе и к интегралам, и к производной, и к объему, и к массе, и к плотности, и к заряду, и к моменту инерции и, вообще, ко всем математическим и физическим величинам такого дифференциального или интегрального характера.

С точки зрения человека, который не является профессиональным математиком, вещи эти существуют, они не требуют определения — они требуют вычисления, и они должны быть готовы для применений. Вот то, что нужно.

Точке зрения, с которой их нужно определять, не место в таком преподавании — по крайней мере, человеку, который не сомневается в существовании площади у всех фигур и в свойствах площади, такому человеку не нужно определять площадь. Нужно изучать ее свойства, нужно научить его эту площадь вычислять.

Совершенно то же относится и к другим математическим понятиям. Ну вот, возьмите понятие интеграла. Я хотел бы по этому поводу задать один вопрос исторического характера. Скажите, Архимед владел понятием интеграла или нет? На этот счет существуют разные мнения. Одни говорят: владел. Другие говорят: не владел. Я выскажу свое собственное мнение. Я думаю, что Архимед, величайший математик, возможно, всех времен, не владел понятием интеграла. И вот почему я так думаю.

Архимед многократно, и многими различными способами вычислял интеграл от x^2 между нулем и единицей. Он вычислял его, когда занимался площадью участка плоскости, ограниченного отрезками прямых и дугой параболы. Он вычислял этот интеграл, когда вычислял объём шара, и во многих других случаях. Каждый раз он употреблял особые приемы, очень остроумные, гениальные. Но, по-видимому, он не знал, что это всё одно и то же. Хотя, наверное, чувствовал.

Причина этого совершенно понятна. Греки не владели понятием действительного числа. Объем и площадь были для них совершенно разными сущностями, геометрическими сущностями, которые они не сравнивали. Например, $x + x^2$, такое выражение, которое можно написать, вызвало бы протест. Человек, образованный по-древнегречески, сказал бы, что x и x^2 никак не возможно складывать. Это все равно, что складывать линии с плоскими фигурами. А мы складываем. У нас есть числа. И вот числовым понятием интеграла Архимед, по-видимому, не владел. Если бы он им владел, то он, вне всякого сомнения, не вычислял бы один и тот же интеграл много раз.

С другой стороны, Архимед оставил нам метод исчерпывания, который, по-видимому, как нельзя более подходит для преподавания математики нематематикам. В силу этого метода, вместо всей теории пределов, нужен один единственный факт. Я его сформулирую. Факт этот очень несложен. Он состоит в том, что если неотрицательное число меньше любого положительного числа, то это нуль. Повторяю, если неотрицательное число меньше любого положительного числа, то это нуль.

Факт этот, конечно, нетрудно доказать. Но, может быть, его не нужно и доказывать. После того, как вы знакомы с этим фактом, вы можете на его основе доказывать все равенства, которые встречаются в дифференциальном и интегральном исчислении и их применениях и, вообще, во всём анализе, — при условии, что вы не занимаетесь теоремами существования.

Вы не доказываете существования. Именно для доказательства существования и существует теория пределов.

Если вам не нужно доказывать существование площади, то теория пределов не нужна в этом вопросе. Если вам не нужно доказывать существование интеграла, то теория пределов не нужна — и так далее. Если вам нужно только вычислять, то вы можете обойтись без теории пределов. Это сразу делает дифференциальное и интегральное исчисление бесконечно более простым.

[ПЕРЕРЫВ]

Я говорил о теории пределов. Почему эта теория вызывает у меня такое желание столь круто с ней расправиться, изгнать ее из курса математики для нематематиков?

Я не хочу сказать, что ее необходимо отовсюду изгнать, нет. Я хочу сказать только следующее. Теория пределов в настоящее время служит не средством ввести основные понятия анализа, а очень высоким и трудно преодолимым порогом, через который нужно перебраться для того, чтобы что-нибудь понять.

И порог этот — совершенно лишний! Он, как правило, непреодолим для студентов-нематематиков и является совершенно лишним.

Позвольте я приведу пример, который это продемонстрирует. Я в качестве примера мог бы взять дифференциальное исчисление или интегральное. Я возьму более простой случай, или, лучше сказать, предмет, о котором быстрее можно рассказать, — интегральное исчисление.

Вы должны объяснить начинающим, что такое интеграл. Конечно, вы можете начать, и это, вероятно, правильно, просто с площади, как это обычно делают.

А что мешает вам объявить интегралом саму эту площадь? Ведь никто из ваших слушателей не сомневается в существовании площади. Вам пришлось бы потратить много времени на то, чтобы заставить ваших слушателей в этом существовании усомниться.

Конечно, имея в своем распоряжении площадь, вы очень легко можете построить интегральные суммы. Вы скажете своим слушателям, что у площади имеются общеизвестные свойства. Я вам их назову.

- ▷ Если одна фигура содержится в другой, то площадь первой фигуры не превосходит площади второй. Трудно не согласиться с этим, и все с вами согласятся.
- ▷ Вы можете сказать, что если вы складываете, составляете, две фигуры без общих внутренних точек, то их площади складываются, и с этим согласятся.
- ▷ Вы скажете, что площадь не меняется, если фигура перемещается как твердое тело по плоскости. И с этим согласятся.
- ▷ И наконец, вы скажете, что площадь единичного квадрата равна единице.

Эти четыре свойства, как хорошо известно, однозначно определяют площадь на широком классе фигур. На классе всех квадрируемых фигур.[3)]

Эти же свойства, в чуть-чуть измененном виде, однозначно определяют интеграл на широком классе функций. Таким образом, вы можете, начав с площади, определить интеграл его свойствами, в которых никто не сомневается, поскольку речь идет о площади.

В дальнейшем вы замечаете, что если вы построите для так называемой криволинейной трапеции, которая определяется графиком функции, нижние и верхние римановские суммы (а если хотите, и лебеговские суммы — никакой разницы!), то интересующая вас площадь будет заключена между этими двумя вспомогательными площадями. Это прямо следует из того, что я сказал. Вы пишите то самое неравенство, которое обычно пишут в курсах интегрального исчисления: нижняя сумма не превосходит интеграла, а интеграл не превосходит верхней суммы. Одним словом, интеграл есть то единственное число, которое заключено между нижними и верхними суммами.

[3)] См. статью В. А. Рохлина *Площадь и объём* в книге «Энциклопедия элементарной математики, книга пятая — Геометрия» с. 7–89. М.: Наука, 1966.

Всё это на языке площадей, вполне очевидно, не вызывает никакого сомнения, легко усваивается. Вместе с тем, это дает способ вычисления площадей. Ни о каких пределах нет речи. Если вам нужно доказать равенство какое-нибудь — между двумя интегралами или равенство какого-нибудь числа какому-нибудь интегралу — то просто замечаете, что оба числа, равенство которых вы хотите доказать, заключены между нижними суммами, с одной стороны, и верхними суммами, с другой стороны. Следовательно, они равны, потому что разность между теми и другими, при надлежащем выборе подразделения, может быть сделана меньшей любого положительного числа. А она неотрицательна. Значит это ноль.

Вопрос о том, как это технически осуществляется в каждом отдельном случае, не возникает. Вся эта техника имеется. Она подробно описана во всех обычных курсах, только там всё поставлено с ног на голову.

Совершенно так же вы можете определить и производную несколькими способами. Конечно, будет лучше, если вы начнете с наглядного примера. Скажем, с касательной или со скорости, как это обычно делают. Но никакой нужды в теории пределов здесь нет. Это не значит, что вы не сможете позже, когда вы пожелаете или если программа этого действительно разумным образом требует и лица, которых вы обучаете, должны действительно познакомиться с понятием предела, это не значит, что вы не можете потом объяснить, что, в действительности, производная есть такой-то и такой-то предел. Но первоначально это совершенно не нужно, а для многих категорий обучающихся это и вообще не нужно.

Одним словом, я предложил бы следующий подход к понятиям анализа, который я условно назову *наивно-аксиоматическим.* Этот подход состоит в том, что вы на самом деле определяете интересующие вас понятия аксиомами.

Например, в случае интеграла это вот какие аксиомы.

Интеграл постоянной — это произведение этой постоянной на длину интервала интегрирования. Конечно, эта аксиома не появится просто так. Сначала вы поговорите о площади. Всё это будет подготовлено. Но вот вам аксиома номер один.

Аксиома номер два: если одна функция не превосходит другой по значению в каждой точке, то интеграл первой функции не превосходит интеграла второй.

И третья аксиома: если вы интегрируете функцию по промежутку, который составлен из двух меньших промежутков, то соответствующий интеграл равен сумме двух других интегралов, распространенных на эти промежутки.

Это и всё! Трудно придумать менее сложный подход. Конечно, в применении к площади такие вещи можно говорить сразу — к площади все привыкли, в применении к интегралам — несколько позже, но на основании этих свойств великолепно вычисляются все интегралы. В действительности, во всех учебниках они именно на основании этих свойств и вычисляются.

Более того, схемы применений понятия интеграла в естественных науках и в самой математике необычайно упрощаются. Если вы хотите, например, доказать, что некий объём есть такой-то интеграл, то вы просто убеждаетесь в том, что выполнены эти три свойства. В результате вам ничего не надо доказывать. Так как единственность у вас есть, объём оказывается интегралом, и сразу получается для него формула, будь то объём тел вращения, будь то объёмы в других ситуациях.

То же относится к статическим моментам, вычислениям центров тяжести, моментам инерции, да и вообще к любым механическим, физическим и геометрическим величинам. Никакой нужды в каких бы то ни было предельных переходах и вообще во всём том длинном и занудном изложении, которым наполнены втузовские учебники, никакой необходимости в этом нет.

Разумеется, я привожу примеры. Их можно было бы привести очень много. Ну а если говорить о деле серьезно, то, конечно, надо признать, что курс математики для ВТУЗа просто не составлен. Он не составлен не в том смысле, что нет программ или что нет учебников — есть программы, есть учебники. Под курсом я понимаю нечто другое.

Чтобы не было недоразумений, я скажу в двух словах, как я понимаю это выражение: составить курс. Представьте себе текст. Конечно, более длинный, чем текст программы, но более короткий, чем текст учебника. Текст, из которого квалифицированный человек может точно узнать, что и как излагать во всех деталях.

Такой текст вовсе не обязательно будет доступен обучающимся. Он должен быть доступен обучающим. К сожалению, если бы такой текст был составлен для средних школ, он не был бы доступен обучающим. Но, такой текст, написанный или просто содержащийся в голове, вот это — составленный курс.

Так вот я хочу сказать, что составленного курса математики, в таком вот духе, о котором я говорю, пока не существует. Конечно, есть много возможных вариантов в этом плане, и я надеюсь, что такие курсы будут составлены, и по ним будут написаны учебники.

Те немногие слова, которые были сказаны об интегральном исчислении, конечно, относятся не только к нему. Я думаю, что даже и студентам-математикам университета совсем не повредил бы семестровый предварительный курс анализа, в котором были бы введены основные понятия не с, так сказать, буквоедской точки зрения, а эти понятия были бы описаны по существу, с перспективой применений, с изложением геометрического и физического смысла и с неограниченным материалом для упражнений. После того, как это сделано, можно приступать, для математиков, уже к систематическому и тщательно составленному изложению.

Такие опыты частично проводились. Я не знаю, как обстоит дело сейчас вот у нас, скажем, на математико-механическом факультете в Ленинграде в этом отношении. Делались ли такие вещи у нас, мне неизвестно.

Мне представляется, что и при профессиональном обучении такой наивно-аксиоматический метод в начале мог бы оказаться полезным. Во всяком случае, мне кажется, что он совершенно необходим при обучении математике нематематиков.

Скажу несколько слов о более возвышенных частях курса математики. Ну, скажем, студентам-нематематикам излагают ведь и не только дифференциальное и интегральное исчисления и не только ряды, скажем. Им излагают, например, криволинейные интегралы, им излагают интегралы по поверхностям, замену переменных в кратных интегралах и так далее и тому подобное.

Это вещи уже технически не очень приятные, они могут представлять известные трудности и технически. Как быть с ними? Тут, конечно, не всегда обойдешься наивно-аксиоматическим методом. Тут приходится идти на компромиссы.

Совсем недавно я по подобному поводу имел беседу с одним из ленинградских преподавателей, которому нужно излагать студентам замену переменных в двойном интеграле. Как это сделать? Будучи математиком, преподаватель не хочет никого надувать. Ему стыдно надувать кого бы то ни было, в том числе и своих студентов. Он хочет им что-то *доказывать.*

С другой стороны, предмет довольно сложен — замена переменных в двойном интеграле. Предлагаются разные методы. Можно постепенно заменять переменные под знаком интеграла, пользуясь формулой замены переменной в простом интеграле. Представить интеграл как повторный — вот такой прием предлагается. И многие другие. Здесь, как мне кажется, действует такая привычка, которая имеется у профессиональных математиков, — *доказывать.*

Но ведь, собственно говоря, чему мы должны научить будущего инженера, будущего физика, я уж не говорю — будущего философа? Мы должны научить его, прежде всего, пониманию. Он должен понимать предмет. Мы должны, и это, вероятно, главное, отказаться от такого изложения вещей, которое нашим студентам не понятно. Студентам и школьникам.

Вполне массовым образом студентам преподают вещи, которых они не понимают. Ну какая польза в том, что студент ВТУЗа будет в каком-то смысле, довольно условном, конечно, доказывать формулу замены переменных в кратном интеграле? Не лучше ли будет, если он будет понимать эту формулу? Хотя бы на наглядном уровне?

Ну, например, можно ли или нельзя вначале как-нибудь объяснить студентам, как ведет себя площадь при линейном преобразовании? Вот просто подвергают линейному преобразованию. Как ведет себя площадь треугольника, многоугольника? Это, вероятно, можно объяснить. Можно, вероятно, объяснить, что в малом, в гладкой ситуации примерно так ведет себя площадь и при нелинейном преобразовании. Так что появление якобиана под знаком интеграла его уже не удивит. Но, конечно, он должен сначала к якобиану привыкнуть.

Здесь запись была прервана, по-видимому для смены кассеты с пленкой. Вероятно, в утраченном фрагменте речь шла, в частности, о теореме о неявной функции.

...аксиомы, которые устанавливают равносильность разных подходов ну, скажем, к заданию поверхности в пространстве. Поверхность в пространстве может быть задана параметрически тремя уравнениями, может быть задана одним уравнением — неявно, и может быть, наконец, задана как график функции. Все эти три подхода эквивалентны и эквивалентность устанавливается теорией неявных функций.

К моему удивлению, это мало кто знает, даже из студентов-математиков, пока не встречаются с этим остро, в других областях, где это используется. Курсы анализа это редко излагают. В учебниках анализа я этого не видел. Связь этого явления с отображениями излагается в немногих местах. Но может быть студенту ВТУЗа всё это можно изложить без так сказать буквоедства, так, чтобы он это понял (в примерах, которые понятны, в более общих формулировках). Одним словом, по-видимому, помимо наивно-аксиоматического подхода, о котором я говорил, нужна еще бо́льшая свобода обращения с материалом, когда речь идет о преподавании математики нематематикам, а иной раз и математикам.

По-видимому, надо вспомнить преподавателю, как он сам воспринимал всё это, когда учился. Обычно мы такие вещи забываем. Вот я, например, могу сказать о себе, что я совсем не помню, как и что я воспринимал в школе. Может быть, я помнил это, когда был студентом еще, потом постепенно забыл. Может быть, необходимо изучение этого вопроса и на таком уровне: нужно привлечь учащихся к этой деятельности в известном смысле и послушать, что скажут они. Ведь мы обычно этим занимаемся недостаточно.

В качестве примера я приведу следующее. Вне всякого сомнения, студенты, слушающие тот или иной курс, ставят преподавателю оценки. Они не ставят ему оценку в зачетную книжку, но на самом деле у каждого преподавателя имеется некоторая устойчивая средняя оценка. Так сказать, рейтинг, как у шахматистов. В отличие от шахматного рейтинга, этот рейтинг не публикуется и даже держится в секрете. Обычно. Я не буду обсуждать вопрос о том, хорошо это или плохо. Я думаю, каждый сам знает, хорошо это или плохо. Но, несомненно, что здесь помощь студентов была бы неоценима.

Я думаю, что их помощь неоценима и при составлении курса, по которому студенты обучаются. Конечно, происходит смена поколений: одни студенты помогут нам в этом, а учить мы после этого будем других студентов. Но тем не менее, я думаю, что эта деятельность, которой с такой самоуверенностью занимаются преподаватели, без помощи обучающихся не может быть успешной. С учащимися надо консультироваться по этим вопросам в первую очередь.

Вот, не так давно у меня была встреча с девочкой, которая учится в средней школе и живет со мной рядом, соседка. Я как-то ее приглашал в гости. Она пришла ко мне вечером и сказала: «Вот я пришла, Вы меня звали, я пришла. У меня не получается задача.» (*Веселье*).

Ну хорошо. Стал я смотреть, что за задача, и пришел в ужас. Во-первых, решить эту задачу нельзя, потому что непонятно, что там спрашивается. Задача, профессионально говоря, составлена безграмотно. Догадаться можно, чего хочет вопрошавший. Мы догадываемся. Но я с удивлением обнаружил, что я-то догадывался, а она всё понимала с самого начала. (*Веселье*). Этого мало: когда я начал решать эту задачу, выяснилось, что она прекрасно знала всё то, что я говорю. Ей это всё давно известно, так я подумал сначала. Из дальнейшего разговора выяснилось, что она этого ничего не понимает. Она все эти слова знает. Оказалось, что этих слов совершенно достаточно для решения задачи. И она знает эти слова.

Такого рода опыт совершенно неоценим для преподавателя и для лиц, составляющих программу. Имейте в виду, что речь идет о массовом обучении. Не об обучении детей, которые собраны в специализированные школы, которые много сами слышали математическую речь и сами говорят на математическом языке. Нет, это дети, которые не обучаются математике профессионально и не собираются ею профессионально заниматься. Они слышат все эти слова, они научаются их произносить, но понимание этих слов у них какое-то странное. То ли его нет совсем, то ли оно какое-то странное. Во многих случаях обнаруживается совершенно неожиданное понимание.

Вот некоторые слова, математические термины, оказывается, эта девочка понимала совсем не так, как я. Ну, разумеется, надо бы выяснить, как понимает эти слова ее учительница. В этом, конечно, всё и дело.

Позвольте мне обратить ваше внимание еще на одну особенность преподавания математики и восприятия этого преподавания. Эта особенность заключается в следующем. Это — обучение, так сказать, почти что волшебство, обучение оккультное, если можно так выразиться.

Вот много лет назад я видел программу вступительного экзамена в высшие учебные заведения. Программа эта была утверждена и подписана высокими лицами, и в этой программе я увидел такую странную вещь: записано там решение уравнений первой степени с одним неизвестным и два типа уравнений,

$$ax = b, \text{ это один тип, а другой } ax + b = 0. \quad (\textit{Смех}).$$

Это — разные типы, оказывается! В чём дело?

Понять это мне помогла другая девочка. Из разговора с ней я понял, что все числа — положительные. (*Смех*). Отрицательных чисел не существует, и, на самом деле, отрицательное число — это вот что такое. Это положительное число, перед которым для всеобщего обозрения стоит знак минус. (*Смех*). Ну если так, то, конечно, это разные типы уравнений. Ведь если b перенести из одной части равенства в другую, так знак изменится, а нужно, чтоб числа были положительные! Вот a положительно, b положительно — ясно, что, действительно, два типа уравнений.

Как же произошло, что это попало в программу вступительного экзамена? Это попало из школьной программы. Было такое требование выставлено, чтоб программы вступительных экзаменов не отличались от школьной программы. А то что это такое будет? Как же сдавать такой экзамен? Ну вот, из школьных программ это перекочевало в программы вступительных экзаменов.

А как же это попало в школьную программу? Ясно как. Школьные программы составляются специалистами по преподаванию математики, которые знают, как преподавать математику, и говорят, что преподавать ее надо вот так. Они знают, как преподавать математику, но они, наверно, и в самом деле думают, что все числа положительны. (*Оживление*).

Конечно, никакой учитель в классе не говорит, что все числа положительны. Это не написано в учебнике, как же он это будет говорить? Но он так думает! И если он так думает, то так же будут думать его ученики. Как это им передается? Это, конечно, интересный вопрос, но это совершенно несомненно.

Понимание предмета учителем передается учащимся. Понимание предмета лектором передается слушателям. Оно передается таинственными путями, но очень надежно. И это надо иметь в виду. Никакое внешнее обучение преподавателя, никакое правильное изложение в учебнике, программе не поможет делу, если учитель думает иначе.

Учитель, преподаватель — это в этом смысле центральная, решающая фигура. Я хочу еще раз повторить, что совершенно не верю в то, что можно как-то изменить или улучшить преподавание, улучшая программы, учебники, но не затрагивая как следует подготовку учителей.

Существуют, правда, методы переподготовки, всевозможное усовершенствование и так далее. Насколько они эффективны? Я не имею на этот счет фактических данных. Имею только личный опыт и опыт моих друзей. И тут я должен высказать весьма мрачный прогноз. По моим сведениям, переподготовка, дополнительная подготовка лиц, изучавших математику в высшем учебном заведении, педагогическом институте, ни к чему не приводит. Если за годы студенчества они ничему не научились, если за долгие годы последующего преподавания они умудрились,... я боюсь сказать забыть — это будет лучше, если они умудрились,... ну, хорошо, забыть то, чему они там научились, то, конечно, дополнительная подготовка может привести только к внешним изменениям: они привыкнут к новым словам, они привыкнут к новым методикам, но, в сущности, это ничего не изменит.

Мне кажется, что массовое преподавание математики может быть улучшено только одним путем. Это медленный, длительный, трудный путь, но, может быть, он возможен. Этот путь состоит в том, что должна быть постепенно расширена подготовка квалифицированных преподавателей.

Людей, обладающих достаточными способностями для этого, совершенно достаточно. К сожалению, их как следует не учат. И по понятным причинам: учить некому.

В прежние времена, когда преподаватели математики для тогдашних средних школ все были выпускниками университета (это было давно, школа не была массовой), положение было лучше. Мы часто слышим, читаем, что вот раньше преподаватели математики были лучше. Они лучше знали предмет и лучше преподавали. Я не знаю, правда это или нет, но если это правда, то это без сомнения объясняется тем, что тогда эти самые преподаватели обучались не в педагогических институтах, а в *немногих* университетах. Теперь они обучаются, как правило, в педагогических институтах и во *многих* университетах.

Я бы не хотел, чтобы эта лекция оставила такое мрачное воспоминание о себе. Я хочу сказать и нечто оптимистическое под конец. Я думаю, что если нужно сто лет для того, чтобы постепенно подготовить достаточное количество квалифицированных преподавателей и наладить в школе, средней и высшей, хорошее обучение математике, если ста лет для этого достаточно, то это хорошо. (*Оживление*).

Тема номера: геометрия

Нужна ли школе 21-го века Геометрия?

И. Ф. Шарыгин

Не знающий геометрии не допускается

Надпись при входе в Академию Платона

Вступление. Развивая мысль Пуанкаре, высказанную еще в начале 20-го столетия, доводя ее в некотором смысле до абсурда, Владимир Арнольд в конце того же столетия говорит: «Математика — это часть физики». Соглашаясь с этой формулой, я все же хотел бы ее продолжить: «А физика — часть геометрии».

И вновь вернемся к началу прошлого столетия. Великий французский архитектор Корбюзье как-то воскликнул: «Все вокруг геометрия!». Сегодня уже в начале 21-го столетия мы можем повторить это восклицание с еще бо́льшим изумлением. В самом деле, посмотрите вокруг — всюду геометрия! Современные здания и космические станции, авиалайнеры и подводные лодки, интерьеры квартир и бытовая техника, дорожные развязки и городские парки, микросхемы и даже рекламные ролики. Воистину, современная цивилизация — это Цивилизация Геометрии. Геометрические знания и умения, геометрическая культура и развитие являются сегодня профессионально значимыми для многих современных специальностей, для дизайнеров и конструкторов, для рабочих и ученых. И уже этого достаточно, чтобы ответить на вопрос: «Нужна ли в 21-м веке Геометрия в школе?» И все же сегодня мы отчетливо слышим голоса, призывающие, если и не полностью исключить геометрию из школьных программ, то, по крайней мере, значительно сократить программу по Геометрии. При этом голоса эти раздаются и со стороны людей, причисляющих себя (я полагаю, по недоразумению) к профессиональному математическому

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 8, 2004(37–52)

сообществу. Странным образом самому существенному сокращению подвергаются программы по пространственной Геометрии, наиболее практически значимому сегодня разделу. (Стереометрия полностью исключена из международных математических олимпиад!) И если де юре Геометрия пока еще сохраняется в (российской) школе, то де факто она почти исчезла. Знакомство же с материалами ЕГЭ вынуждает нас убрать это самое «почти». И вообще, система тестирования несовместима с Геометрией.

Поэтому приходится несколько подробнее ответить на вопрос, зачем нужна школьная Геометрия?

1. Об Образовании и устройстве мира. (Двусмысленность в заглавии отнюдь не случайна.) Говоря о целях, которые реализуются при изучении того или иного предмета, мы должны исходить из общих целей Системы Образования. А здесь главными являются две: воспроизводство существующей в стране социальной системы и ее развитие. И в зависимости от уровня развития страны и даже просто от качества жизни основной массы жителей ведущей целью является либо первое, либо второе. Понятно, что в этом месте расходятся главные цели образования для стран с высоким уровнем развития и стран отстающих. Проще говоря, для богатых и бедных стран. Понятно также, что копирование слаборазвитыми странами систем образования стран высокоразвитых приведет к сохранению сложившейся иерархии между странами, а значит, стратегически полезно именно странам с наиболее высоким уровнем развития.

Глобализация экономики, создание единой общемировой рыночной системы привели к резкой поляризации в мировой цивилизации. В результате значительной разности потенциалов между полюсами возникли мощные потоки: от одного полюса к другому следуют ресурсы всех видов, природные, людские, интеллектуальные, а обратно направляется готовая продукция и управляющие сигналы. При этом «добавленная стоимость» целиком остается на одном из полюсов, увеличивая эту разность потенциалов. Однако общемировой образовательный ландшафт не совсем соответствует ландшафту экономическому. Да и Система Образования плохо подчиняется рыночному управлению. И в этом таятся определенные угрозы существующей иерархии мира.

Что же касается непосредственно Геометрии, следует заметить, что она является очень мощным средством развития личности в самом широком диапазоне. Возможно, именно по этой причине в странах, где качество жизни бóльшей части населения высоко, Геометрия обычно изучается на очень низком уровне. Ведь Геометрия развивает свойства личности (творческое развитие, нравственное воспитание, независимость суждений и поведения), весьма привлекательные с общечеловеческих позиций, но при широком их распространении угрожающие стабильности отдельно взятого даже процветающего сообщества (страшно подумать, что случится, если к власти придут творчески думающие и высоконравственные люди).

Даже среди дисциплин математического цикла Геометрия выделяется своим вольнодумством, неким особым свободолюбивым характером, нежеланием подчиняться стандартам, нормам, алгоритмам и даже логике. Поэтому можно понять стремление руководителей разных мастей и уровней ограничить программы по Геометрии, сузить пространство ее учебных целей.

А с другой стороны, само Образование является элементом рынка. И при разумном подходе страны, не очень преуспевающие в экономике, но с хорошей Системой Образования могут использовать ее элементы на внешнем рынке и помочь себе тем самым экономически. В условиях все той же глобализации Россия могла бы выступать не только в качестве поставщика сырья богатым странам, но и предоставлять услуги по развитию математического образования. Российское математическое образование пока еще котируется в мире. И возможно, именно школьная Геометрия могла бы здесь сыграть ведущую роль.

Кстати, торговля российским математическим образованием уже давно развернулась по всему миру, но дивиденды получают просто отдельные ловкие люди, зачастую просто присвоившие себе не принадлежащую им интеллектуальную собственность. Можно даже углядеть определенное сходство с природными ресурсами (также присвоенными) — в виде наличия ренты. Там природной, здесь интеллектуальной.

В последнее время внимание ученых — математиков и специалистов в области математического образования — все больше и больше привлекает Элементарная Геометрия. И, на мой взгляд, здесь лидерство России наиболее заметно. Похоже, именно в Геометрии особо заметен евразийский характер русской культуры. В истории Геометрии ярко видны две ветви, западная и восточная. Западная Геометрия строилась по Евклиду, а затем по Декарту. Здесь во главу угла ставились точные логические конструкции, систематичность, общие теории. Восточная Геометрия опиралась на наглядность, Геометрия была скорее элементом Культуры, Искусства, даже Культа, нежели наукой. И эти две ветви тесно переплелись в России, географически и геометрически служившей мостом между Западом и Востоком. Само положение России наиболее благоприятствовало развитию Синтетической Геометрии, которая сегодня особенно привлекает специалистов. И я убежден, что в области преподавания Геометрии мы занимаем лидирующее положение в мире. Нам есть, что предложить миру. Пока есть.

И эти два обстоятельства — несоответствие устройства Мировой Системы Образования экономическому устройству мира и ее рыночные возможности — и определяют наблюдаемое сегодня стремление единственной оставшейся супердержавы взять под контроль Общемировую Систему Образования. В первую очередь математического, ведь именно математическое образование интернационально в своей основе (имеет «ртутный» характер) и оказывает самое большое влияние на развитие Земной Цивилизации. И поэтому не следует удивляться тому, что все руководство в различных международных структурах, занимающихся проблемами математического образования, оказалось в руках представителей этой самой супердержавы, в которой, по общему мнению, математическое образование едва ли не худшее в мире. На этом всемирном образовательном рынке действуют обычные рыночные механизмы. Более сильные и богатые не пускают на него более слабых и бедных, несмотря на то, что и качество продукта лучше, да и цена меньше. И в средствах сильные, как всегда, не стесняются.

И в конце этого раздела я хочу сказать, возможно, не совсем по делу, несколько слов в связи с проходящей в России реформой-модернизацией среднего образования. По мнению многих специалистов, это не реформы и не модернизация, а разрушение сложившейся системы образования. Так в чем же дело? Почему реформы продолжаются и поддерживаются на самом высоком уровне? Неужто там сидят люди уж совсем ничего не понимающие? По этому поводу высказывалось много мнений. Добавлю одно соображение.

В Советском Союзе сложилась хорошая Система Образования, основной целевой установкой которой было творческое развитие учащегося (что, признаемся, весьма странно для тоталитарного режима). Математическое Образование же в Советском Союзе чуть ли не официально признавалось лучшим в мире. И я убежден, что именно Система Образования была фундаментом всех значимых побед Советского Союза (индустриализация, Война, атомная бомба, выход в Космос), и она же стала одной из главных причин, приведших к распаду Советского Союза (не буду заходить здесь слишком далеко и вычленять особо роль Геометрии). Ее сохранение на прежнем уровне может стать источником постоянно действующей угрозы для новой, а по сути перекрасившейся старой номенклатуры. И дважды повторять не приходится, инстинкт самосохранения у номенклатуры развит посильней, чем у зверя. А возможностей для соединения у номенклатур разных стран гораздо больше, чем у пролетариев.

2. Воспитание геометрией. Целью изучения геометрии, конечно, является знание. Но следует признать, что эта цель по отношению к геометрии второстепенна, поскольку большинство школьных геометрических знаний не востребовано ни в практической жизни человека, ни даже в научной деятельности.

Более важно, что геометрия есть феномен общечеловеческой культуры. Некоторые теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников мировой культуры. Человек не может по-настоящему развиться культурно и духовно, если он не изучал в школе геометрию; геометрия возникла не только из практических, но и из духовных потребностей человека.

История человечества пишется в трех книгах. Это История Вражды, история войн, революций, мятежей и бунтов. Из них большею частью складывается История Государства. Это История Любви. Ее пишет Искусство. И это История Мысли человеческой. История Геометрии не только отражает историю развития человеческой мысли. Геометрия издавна является одним из самых мощных моторов, двигающих эту мысль. Возникшая несколько тысячелетий тому назад Теория конических сечений, пополненная открытыми Кеплером законами, вымостила дорогу человечества в Космос. (Кстати, о прикладном и практическом значении Геометрии).

Геометрия, да и математика в целом представляет собой очень действенное средство для нравственного воспитания человека. В романе «Война и мир», характеризуя старшего князя Болконского Николая, Л. Н. Толстой пишет: «Он говорил, что есть только два источника людских пороков: праздность и суеверие, и что есть только две добродетели: деятельность и ум. Он сам занимался воспитанием своей дочери и, чтобы развить в ней обе главные добродетели, давал ей уроки алгебры и геометрии и распределил всю ее жизнь в беспрерывных занятиях».

Научной и нравственной основой курса геометрии является принцип доказательности всех утверждений. И это единственный школьный предмет, включая даже предметы математического цикла, полностью основанный на последовательном выводе всех утверждений. Людьми, понимающими, что такое доказательство, трудно и даже невозможно манипулировать. В то время как власть никогда не утруждает себя доказательствами. (Отсюда совет тем, кто хочет стать политиком, идти во власть: не занимайтесь геометрией.)

3. Какая геометрия? Итак, вроде все ясно, Геометрия — один из важнейших предметов, причем не только среди предметов математического цикла, но и вообще среди всех школьных предметов. Ее целевой потенциал охватывает необычайно широкий ареал, включает в себя чуть ли не все мыслимые цели образования. Так почему же еще продолжаются споры о роли и месте Геометрии в школе?

Следует сказать, что спор по поводу школьной геометрии напоминает порой известный спор из чеховских «Трех сестер»: «Черемша —

лук. Чехартма — мясо». Спорят о разных предметах. И поэтому, когда мы пытаемся ответить на вопросы: Нужна ли в 21-м веке школьная Геометрия? Зачем будет нужна в школе Геометрия? — необходимо пояснять, о какой Геометрии идет речь. Есть Геометрия и геометрия.

Перефразируя известное высказывание Толстого, мы можем сказать: «Хорошие курсы Геометрии могут быть построены разными способами, плохие же большею частью очень похожи друг на друга». Есть три основных способа уничтожить Геометрию и соответственно три основных типа курсов анти (лже, псевдо) геометрии. Причем, несмотря на различие подходов, соответствующие учебники схожи друг с другом, они плохо структурированы, написаны на скверном языке, и литературном и изобразительном, изобилуют логическими неувязками. Самое удивительное, что логические пробелы и проколы характерны для курсов, претендующих чуть ли не на абсолютную логическую строгость, концептуально построенных на формально-логической (аксиоматической) основе. Такие курсы весьма распространены в российской школе. Характерные признаки: множество чисто формальных определений, зачастую делающих определяемое понятие неузнаваемым; длительная возня с первоначальными понятиями, в результате чего в течение чуть ли не половины курса школьник не узнает ничего нового; обилие многословных рассуждений, а точнее пустых сочетаний слов, выдаваемых за рассуждения, доказывающих очевидные факты и делающих этот очевидный факт абсолютно непонятным, а самое главное, дискредитирующих саму идею доказательства. Подобные курсы быстро и надежно убивают всякий интерес к предмету. Как говаривал незабвенный Николай Озеров, «Такой хоккей нам не нужен».

Следующей разновидностью псевдогеометрии являются курсы практически-прикладного типа. При этом практическая направленность понимается в узко утилитарном смысле. Все содержание сводится к небольшой подборке формул для вычисления длин, площадей и объемов. Подобные курсы были распространены в России на заре советской власти, а сегодня они характерны для западной школы, в частности, американской (насколько мне известно). Исторически подобные курсы оправдывает этимология слова «геометрия». Но геометрия уже давно вышла за узкие рамки «землемерия». Да и практическая деятельность людей ставит перед ними сегодня совершенно иные практические задачи, в том числе и геометрические. Далеко не «землемерные». И получается, что обе рассмотренные разновидности геометрических курсов не соответствуют заявленной концепции: формально-логические содержат формально-логические ошибки, а практически-прикладные не дают знаний и умений, полезных в прикладной и практической деятельности.

И если с этими двумя типами геометрических курсов все понятно, то с третьей разновидностью, которую я тоже причисляю к антигеометрии, все не столь однозначно. Речь идет о «королевском» пути в Геометрии, указанном Декартом. Созданный им метод координат позволяет, как полагал его создатель, среднему и даже посредственному человеку достичь высот, доступных ранее лишь особо одаренным. Кто-то из последующих классиков заметит, что «он покрыл Геометрию паршой алгебраических формул». Надо признать, что координатный метод позволяет единообразно решать самые трудные геометрические задачи. Даже среди победителей международных олимпиад встречаются школьники, владеющие, по сути, лишь одним координатным методом, но владеющие им виртуозно, способные решить этим методом чуть ли не любую из предлагаемых на олимпиадах геометрических задач. (И здесь, кстати, следует сделать серьезное замечание по поводу качества геометрических задач на современных математических олимпиадах.) И все же я убежден, метод координат (наряду с тригонометрией) является одним из самых действенных методов борьбы с геометрией, и даже уничтожения геометрии. И вреден он на всех этажах школьного образования, и для слабых школьников и для самых способных. Что касается слабых, отстающих или попадающих по тем или иным причинам в категорию отстающих по математике школьников, то здесь опасность чрезмерной алгебраизации достаточно очевидна. Большей частью в этой группе находятся дети, которые плохо считают, с трудом понимают и запоминают формулы и т. д. Для этих детей Геометрия могла бы стать предметом, за счет которого они могли бы повысить свой статус в классе, компенсировать недостатки общематематического развития. А вместо этого она ложится на них дополнительным грузом, причем на ту же чашу весов, где находится и алгебра, вынуждает заниматься неинтересной и трудной для них деятельностью.

А чем же опасна подобная алгебраическо-координатная геометрия для одаренных детей? Дело в том, что координатный метод, алгебраический метод оставляют в стороне геометрическую суть изучаемой геометрической ситуации. Воспитывается исполнитель, решающий заданную конкретную задачу. Не меньше, но и не больше. Не развивается геометрическая и даже математическая интуиция, столь необходимая математику-исследователю. Возможно, именно поэтому (отчасти) победители международных олимпиад не так уж часто становятся высококлассными учеными. Однако координатный метод очень удобен, он универсален, его легко формализовать, тренировать, и прочее и прочее. И пока на международных олимпиадах сохранится нынешний стиль (качество задач, способы проверки и оценки), пока целью ведущих стран будет оставаться «победа любой ценой», учебники по «координатной геометрии» будут одними из самых востребованных школьных учебников, во всяком случае, при обучении сильных школьников (одаренных?)

Безусловно, тремя этими разновидностями вовсе не исчерпывается плохая геометрия. Нередко встречаются всевозможные логико-практические смеси, рядом возникают модернистские и даже постмодернистские интегрированные естественнонаучные курсы. Но еще раз подчеркну, все эти курсы легко узнаваемы. И чтобы их узнать, достаточно прочитать оглавление и пролистать учебник.

Итак, какой не должна быть Геометрия, более или менее понятно. А какой же она должна быть? Не думаю, что возможен полный ответ на этот вопрос. Даже представления об идеальном курсе у разных людей, и простых и великих, различны. Но идеалы, как известно, недостижимы. Да и не следует объяснять другим, каким должен быть этот курс, как бы ты сам его написал, если бы умел.

И все же одно мне кажется бесспорным. Вспоминая изречение Брежнева «Экономика должна быть экономной» (с моей точки зрения абсолютно верное утверждение и даже вовсе не бессмысленное), я говорю: «Геометрия должна быть геометрической», а не аналитической или алгебраической. Я также не согласен с известным определением: «Геометрия — это искусство правильно рассуждать на неправильном чертеже». Какой-то мазохизм! Все равно что: «Вокал — это умение правильно петь под фальшивую музыку». Главным действующим лицом Геометрии должна быть фигура (на плоскости треугольник и окружность), а главным средством обучения — рисунок, картинка. Правильный рисунок и красивая картинка! *Геометрия, впрочем, как и алгебра, является носителем собственного метода познания мира.* Овладение этим методом — важнейшая цель образования.

И еще одно утверждение по этому поводу хочу добавить, вполне очевидное для меня, но с которым не все, наверное, согласятся. Учебник по геометрии не должен сводиться лишь к выстраиванию геометрической теории. Процесс изучения Геометрии включает самые разнообразные виды деятельности. В том числе и даже в первую очередь — решение задач. Задача — это не только умения, это и элемент знания. Ученик должен ознакомиться с определенным набором достаточно трудных геометрических задач, освоить некоторые геометрические методы, научиться решать задачи, следуя известным образцам. Кстати, именно в этом и состоит, по сути, процесс обучения алгебре. Мы показываем ученику методы, приемы, сообщаем алгоритмы, которые трудно, почти невозможно найти самостоятельно. В Геометрии, в отличие от Алгебры, подобных алгоритмов, очень мало, почти нет. Почти каждая задача по Геометрии является нестандартной. Поэтому при обучении возрастает значение опорных задач, сообщающих полезный факт, либо иллюстрирующих метод или прием. Я полагаю недопустимым предлагать задачи на минимальном уровне, на тройку. Задача должна быть нормальной задачей, а оценивать мы должны, сколь далеко ученик ушел от полного нуля и приблизился к полному решению. (Кстати, именно так обычно оцениваются задачи на олимпиадах и вступительных экзаменах.)

4. Геометрия при обучении одаренных и отстающих детей. Одной из важнейших социально-педагогических задач, стоящих сегодня перед системой образования, является задача дифференцированного обучения, обучения детей с разным уровнем развития и различными способностями. И здесь очень важна роль геометрии. Геометрия становится одним из немногих (единственным?) универсальных средств, в равной мере работающим на различных этажах Образования, включая крайние, и даже особенно на крайних: при обучении одаренных детей и при обучении отстающих детей.

Следует иметь в виду, что два обозначенных множества (одаренные и отстающие дети) имеют вовсе не нулевое пересечение. Большинство из нас (я имею в виду не рядовых учителей, а математиков, занимающихся проблемами образования) большей частью имеют дело именно с одаренными детьми. Но многие дети попадают в разряд отстающих (по математике) вследствие плохих программ по математике, неудачных методик и даже конфликта с учителем. И здесь возникает важнейшая общественно-педагогическая задача: помочь им вовремя избавиться от ярлыка. Ведь среди них нередко встречаются и одаренные дети. Но, наверное, еще более общественно и социально важной задачей является проблема реабилитации детей, действительно отстающих в своем развитии.

Свои корректирующие и развивающие функции Геометрия реализует различным образом на разных этапах школьного образования. (Я исхожу не из того, что есть на самом деле, а из того, что, по моему мнению, должно быть. Как сказал Бродский: «Не в том суть жизни, что в ней есть, но в вере в то, что в ней должно быть.») В первой школьной половине (с 1-го по 6-й класс) Геометрия, по сути, является разновидностью физкультуры, Интеллектуальной Физкультурой. И включиться в занятия Геометрией можно в любой момент. А это, признаемся, не типично для математики. Здесь большею частью даже небольшой пропуск по болезни или по иной причине, не знание или не понимание одной темы может привести к отставанию, которое не легко ликвидировать.

С 7-го класса в российской школе по традиции (и я не вижу причин отказываться от этой традиции) начинается систематический курс геометрии или курс Систематической Геометрии. И здесь уже исчезает либерализм, присущий предшествующему этапу. Курс выстраивается в жесткой последовательности (возможно, различной для разных учебников) и выпадение одного звена разрушает эту последовательность. (Кстати, курс алгебры, наоборот, распадается на отдельные темы.) Что надо сделать, чтобы систематический курс смог охватить разные категории учащихся? Здесь, на мой взгляд, необходимо уделить особое внимание первому, начальному этапу. (7-й класс). Хорошо, если мы имеем дело с ребенком, который познакомился с хорошей Геометрией в предыдущих классах. Если же нет, то нашей первой задачей является задача заинтересовать. И эта задача вступает в серьезное противоречие с требованием «систематичности»: мы изначально рассматриваем ученика как своего рода «чистый лист» (с точки зрения геометрических знаний), который следует заполнить в определенной последовательности. Мы не имеем права использовать уже имеющиеся у него знания, знания «со стороны», и даже апеллировать к «здравому смыслу». И возникает опасность не то, что не развить интерес к Геометрии, но, наоборот, отбить всякий интерес, привить идиосинкразию к ней. Но все же я убежден, что задача «заинтересовать» на первом этапе вполне решаемая. Главные инструменты: красивая картинка, хорошая задача и живой язык. Мы должны достаточно долго держать открытой дверь в Геометрию, заманивая туда ученика. Надо постараться в некотором смысле развить в нем зависимость от Геометрии, интеллектуальную, психологическую а, может, и физиологическую (?). И тогда мы легче сумеем решить задачу второго этапа систематического курса: научить. На третьем, последнем этапе (я имею в виду цикл с 7-го по 9-й классы) в числе прочих возникает важная методическая задача «повторить». На этом этапе мы имеем возможность компенсировать оставшиеся пробелы и пропуски и (что самое главное) показать ученику Геометрию целиком, в виде единого и готового здания, которое мы в течение трех лет строили.

Но роль Геометрии при обучении математике не исчерпывается собственно Геометрией. Широкое использование геометрии в негеометрических разделах школьного курса может значительно улучшить общематематическую подготовку школьников. Геометрические интерпретации позволяют лучше понять вывод алгебраических формул, правил и законов арифметики, сделать их наглядными, более понятными, запомнить их.

Психико-физиологической основой, позволяющей Геометрии в равной степени и развивать детей одаренных и реабилитировать детей отстающих, является выявленная физиологами функциональная асимметрия головного мозга человека.

Оказывается, наши полушария по-разному думают. Левое ведает логическим, алгоритмическим мышлением. Работает левое полушарие лишь во время бодрствования. Когда человек спит, оно выключается. Правое отвечает за чувственную, образную сферу нашего сознания. Правое полушарие функционирует постоянно. Наши сновидения — продукт деятельности правого полушария. Некоторые из известных методик обучения математике чрезмерно перегружают левое полушарие. Это очень опасно именно на ранних ступенях школьного обучения и особенно в отношении детей с доминирующим правополушарным типом мышления, а таких детей довольно много, возможно даже, подавляющее большинство. В результате, мы имеем учебные перегрузки, стрессы и даже неоправданную дебилизацию некоторых учеников, которые начинают отставать в своем интеллектуальном развитии. Широко известно, что переучивание левши может привести к ослаблению его умственных возможностей. Переучивание же «интеллектуального левши» может привести и вовсе к трагическим последствиям.

Отсюда можно сделать вывод, и этот вывод уже подтвержден практикой, что при широкой геометризации школьной математики на ее начальных ступенях значительно сокращается число отстающих, лучше усваиваются и негеометрические разделы. У детей развивается воображение, а тем самым значительно возрастает творческий потенциал.

Геометрия очень важна для полноценного физиологического (не только интеллектуального) развития ребенка. Уже сам процесс занятий геометрией имеет большое развивающее значение.

Геометрия является первичным видом интеллектуальной деятельности, как для всего человечества, так и для отдельного человека. Мировая наука начиналась с геометрии. Ребенок, еще не научившийся говорить, познает геометрические свойства окружающего мира. Многие достижения древних геометров (Архимед, Аполлоний) вызывают изумление у современных ученых, и это несмотря на то, что у них полностью отсутствовал алгебраический аппарат. И, продолжая аналогию между общечеловеческим и индивидуальным, замечу, что геометрические возможности детей младшего и среднего возраста почти не зависят от уровня их математической подготовки.

И теперь отдельно несколько тезисов о работе с математически одаренными школьниками.

Работа с математически одаренными детьми состоит из трех этапов: *заинтересовать*, *выявить* (*отобрать*), *научить*. Здесь я хочу подчеркнуть, что этап «заинтересовать» может длиться чуть ли не до окончания школы. Очень важна роль геометрии на первых двух этапах. Посредством геометрии можно заинтересовать математикой многочисленные категории школьников, даже не очень хорошо обученных (об этом я уже говорил). И опять же, посредством геометрического материала мы можем отбирать детей именно талантливых, а не специально обученных.

В основе работы с одаренными детьми должен лежать парный принцип: *демократизм и элитарность*. С одной стороны, мы должны дать возможность получить полноценное образование детям всех социальных слоев, на всех этапах обучения оставляя открытыми двери для талантливых детей (демократизм). А с другой, — обеспечить высокий уровень подготовки одаренных детей, чтобы создать подлинную научную элиту. Талантливость и обученность — вот два критерия отбора в эту элиту. Геометрия прекрасно соответствует сформулированному принципу. Нередки случаи, когда прекрасно подготовленный олимпиадный профессионал не справляется на олимпиаде с геометрической задачей, и именно эту задачу, чуть ли не единственную, решил не подготовленный специально школьник. Многие задачи олимпиад высокого уровня просто непонятны не только обычным школьникам, но и рядовым учителям. Единственное, что еще соответствует на олимпиадах содержанию школьных программ, это задачи по геометрии. Кроме того, олимпиада, особенно в своей геометрической части, если, конечно, она разумно выстроена, нередко дает возможность проявить себя и не слишком успевающим по школьной программе детям.

Следующий принцип работы с одаренными детьми — комфортность и многоступенчатость. Система олимпиад, являющаяся важнейшим элементом работы с одаренными детьми, да и сам процесс обучения нередко образуют достаточно жесткую конкурентную среду. И эта среда может самым губительным образом воздействовать на психически не подготовленного ребенка. А ведь психика именно одаренных детей особенно ранима. Поэтому очень важно для каждого одаренного школьника определить ту ступень, на которой он может комфортно работать. Слишком высокий уровень может оказаться для него просто непосильным. В результате ребенок потеряет уверенность в себе. Одновременно не следует одаренному школьнику задерживаться на слишком низком для себя уровне. Он может остановиться в развитии. Особенно четко эта иерархичность и многоступенчатость видна в системе олимпиад. Разрыв между школьной и международной олимпиадой необычайно велик. Геометрия является тем стержневым предметом, который соединяет всю эту многоступенчатую систему. Кроме того, геометрия дает возможность талантливому ребенку развиваться постепенно, препятствует искусственным ранним скачкам, форсированию развития, из-за которого мы нередко теряем талантливую молодежь. (Куда девались многочисленные вундеркинды, о которых еще несколько лет тому назад с восторгом писали наши газеты?)

В области геометрии достигает своего наименьшего значения расстояние между математической наукой и школьной математикой. Некоторые самые современные достижения профессиональных математиков-геометров могут быть вполне доступно изложены школьникам. И сами эти достижения, и соответствующие идеи могут стать источником олимпиадных задач. Причем не только для старших школьников.

А с другой стороны, геометрия дает возможность одаренным детям уже на школьной скамье начать заниматься полноценными научными исследованиями, а не их имитацией, что нередко бывает на школьных научных конференциях. И здесь могут проявить себя дети не олимпиадного типа.

Геометрия способствует полноценному эмоциональному развитию ребенка. Как показывают исследования психологов, эмоциональное развитие является основой общеинтеллектуального развития. *Его составной частью является эстетическое воспитание.* Именно геометрия предоставляет огромные возможности для эстетического развития, эстетического воспитания. В математике мы достаточно четко можем отличить красивое решение от просто решения. Но особенно часто понятие красивое решение мы связываем с геометрическими задачами. Хороший математик, просто ученый должен обладать достаточно развитым эстетическим чувством. А о том, насколько важно создание хорошего эмоционального фона при работе с отстающими детьми можно и не говорить.

Я могу привести много примеров, иллюстрирующих сказанное, но ограничусь одним.

В мае 2001 года мне позвонила учительница из города Чебоксары. Она рассказала следующую историю.

В начале учебного года у нее в классе появился второгодник. Новый ученик по геометрии был на полном нуле (как и вообще по математике), а упомянутая учительница особое внимание уделяла именно геометрии. (Вынужден признаться, что занималась она по моему учебнику, почему и позвонила мне.) Учительница дала ученику учебник и заставила того начать изучать геометрию с самого начала.

Короче говоря, этот ученик на проходившей в городе в апреле 2001-го года математической олимпиаде получил вторую премию.

5. Геометрия в 21-м веке. В чём ее роль? Человечество вступило в Новый Век. Посмотрим вокруг, что происходит?

Здание земной цивилизации значительно выросло за последние десятилетия и продолжает стремительно расти. Деятели образования в разных странах предпринимают отчаянные, но тщетные попытки угнаться за ростом этого здания. Заметно выделяются два пути решения проблемы: модернизация (в узком смысле) и дифференциация. При этом зачастую и модернизация, и дифференциация понимаются очень примитивно.

В чем смысл предложений «модернизаторов» от образования?

Поскольку сегодня в мире возникло много новых профессий, много новых видов человеческой деятельности и даже наук, возникли новые информационные технологии, следует потеснить в школе старые и традиционные предметы, заменив их современными. Что же касается математики, то необходимо сократить, прежде всего, Геометрию (частично или полностью), как предмет устаревший, почти не изменившийся за последние несколько тысячелетий, мало используемый в практической жизни. А вместо нее ввести современные разделы: математический анализ, теорию вероятностей и прочее. Что здесь плохого?

Дело в том, что образовательные процессы подчиняются строгим биологическим законам и ускорить их невозможно, подобно тому как нельзя ускорить процесс вынашивания плода, который в своем развитии проходит этапы, совершенно не нужные с точки зрения взрослой особи. Не существует такого скоростного лифта, который мог бы вознести ребенка или даже молодого человека сразу на верхние этажи здания цивилизации. Такие попытки в образовании, в том числе и математическом, уже делались и неоднократно, но все они кончались плачевно.

Чем выше здание, тем прочнее должен быть фундамент. Человек, получивший хорошее фундаментальное образование, гораздо быстрее приспособится к условиям современной жизни, сумеет найти в ней свое место, чем тот, кто поверхностно познакомился с многочисленными современными механизмами, научился нажимать кнопки сложных приборов, не понимая сути происходящих в них процессов. Владение же геометрическим методом очень полезно современному человеку, так как позволяет ему быстро и наглядно понять суть сложного явления, дать ему ясную интерпретацию.

Дифференциация в образовании (в широком смысле модернизация включает в себя дифференциацию) задает несколько иной путь решения возникшей перед современным обществом проблемы. Школа, в первую очередь, в старшем звене становится специализированной, возникают школы различного типа: гуманитарные, физико-математические, биологические, даже музыкально-спортивные и всякие иные. С одной стороны, это необходимо. Но, с другой, — чрезмерное дробление может привести к полному распаду школы. Уже реальностью становится дифференциация школы по региональному принципу. А это для России не просто опасно, но смертельно опасно. Поэтому для России очень важны стержневые школьные предметы, которые должны противостоять возрастающим центробежным силам. Одним из таких предметов является математика.

Чрезмерная дифференциация на школьном уровне может помешать ее выпускникам в будущем реализовать свои основные общечеловеческие права, право на свободное передвижение, право на выбор профессии. Как показывают недавние социологические исследования, человеку в течение жизни приходится неоднократно, до 25 раз менять профессию.

Кроме того, это в муравейнике можно посредством питания выращивать по заказу солдат или рабочих, производителей или прислугу.

Человечество не муравейник. Кем станет человек в будущем, на школьной скамье решить трудно. Даже ставить такую задачу — безнравственно.

И мы вновь приходим к выводу о необходимости усиления именно фундаментальной подготовки выпускников наших школ. И этот принцип фундаментальности выдвигает на первое место именно математическое образование. А внутри этого математического образования все более важную роль должна играть геометрическая составляющая, благодаря таким качествам, как наглядность и универсальность.

И все же полностью отказываться от принципов дифференциации не следует. Здесь важно уловить разумную грань, за которой образование распадается на отдельные феодальные хозяйства. Возможно, для математики достаточно обойтись всего лишь двумя разновидностями. Не вдаваясь в детали, замечу, что математические курсы, основанные на принципах наглядности, на геометрических идеях дают возможность дать полноценное (или достаточное) математическое образование представителям самых далеких от математики специальностей (гуманитариям, но не только).

Заметным явлением сегодняшней цивилизации стал компьютер. И здесь особо следует сказать о взаимоотношениях между геометрией и компьютером. С одной стороны, геометрический тип рассуждений наименее поддается компьютеризации. (А отсюда, в частности, следует, что его сохранение и развитие особенно важно именно в настоящее время.) Геометрия остается одной из немногих сфер интеллектуальной деятельности, где человек еще не проиграл соревнование компьютеру. А с другой, — компьютер является очень полезным инструментом в геометрических исследованиях. С его помощью можно экспериментально обнаруживать новые интересные геометрические факты. Человеку же остается важнейшая роль — эти факты доказывать (всего лишь!). При этом в геометрическую деятельность с использованием компьютеров могут включаться школьники и сильные, и слабые (с точки зрения математики), технари и гуманитарии. И получается, что *первонаука, которой является геометрия, получила новый толчок к развитию, как образовательный предмет и как наука, благодаря самым современным компьютерным технологиям.*

Важнейшим фактом и фактором современной жизни является научно-техническая революция, которая, вопреки смыслу слова революция, стала постоянно действующим явлением. Резко возросли психологические и интеллектуальные нагрузки на человека, на его мозг, причем с самого раннего возраста. И нагрузки эти не равномерны, они разбалансированы, значительно перегружается левое полушарие. Отсюда стрессы, нервные и психические заболевания, начинающие разрушать организм ребенка еще до его рождения.

Скорость изменения окружающей среды, среды обитания столь велика, что человек не успевает приспособиться к этим изменениям просто как биологический вид.

В последнее время все большее влияние получает в обществе движение в защиту окружающей среды. Люди очень озабочены тем, каким воздухом они дышат, какие продукты питания потребляют, естественные или синтезированные, экологически чистые или же содержащие химические добавки и прочее и прочее. Но пора создавать и движение в защиту образовательной среды, нужны глубокие исследования по *экологии образовательной среды*.

Для нормального развития ребенку необходимо полноценное питание. Для нормального интеллектуального развития необходима разнообразная интеллектуальная пища. Сегодня математика, особенно геометрия, является одним из немногих экологически чистых и полноценных продуктов, потребляемых в системе образования. Геометрия может и должна стать предметом, с помощью которого мы можем сбалансировать работу головного мозга, улучшить функциональное взаимодействие между полушариями. *Геометрия — витамин для мозга.*

Но Геометрия — это продукт, который должен быть приготовлен очень умелым кулинаром. Иначе она может не только утратить свои питательные качества, но и принести вред организму.

...И замкнулся круг. То есть может замкнуться. Геометрия, стоявшая у колыбели человеческого разума, может помочь сегодня человеку сделать еще один скачок в своем развитии. Интеллектуальном, духовном и нравственном. Надо не упустить эту возможность.

Экстремальные расположения правильных многогранников

А. Скопенков* А. Таламбуца

He looked at the snail. Can it see me? he wondered.
Then he felt, how little I know,
and how little it is possible to know; and with this
thought he experienced a moment of joy.

I. Murdoch, The Flight From the Enchanter

Введение

Один из наиболее активно развивающихся разделов комбинаторной геометрии связан с задачами об *оптимальных упаковках.* В этих задачах требуется расположить в данной фигуре одного типа наибольшую возможную фигуру второго типа (или наибольшее количество фигур второго типа данного размера). Настоящая статья посвящена некоторым чрезвычайно красивым расположениям одних правильных многогранников в других и доказательству экстремальности этих расположений (в смысле, четко сформулированном ниже). Основные идеи иллюстрируются на примере правильного тетраэдра, куба и правильного октаэдра (рис. 1 и $1'$). Другие правильные многогранники (правильные додекаэдр и икосаэдр) упоминаются только в конце статьи, где и приводится их определение. В этой статье правильный тетраэдр и правильный октаэдр сокращенно называются тетраэдром и октаэдром.

Приводимые расположения известны специалистам (но, к сожалению, не широкой публике). Доказать оптимальность некоторых из них предлагалось ранее на олимпиадах. Настоящая статья написана на основе цикла задач [3], предлагавшегося на 13-й летней конференции Турнира Городов,

*Работа А. Скопенкова поддержана грантами РФФИ №02-01-00014 и №01-01-00583, грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ-1988.2003.1, стипендией МГУ для молодых преподавателей и ученых и программой РАН «Современные проблемы теоретической математики».

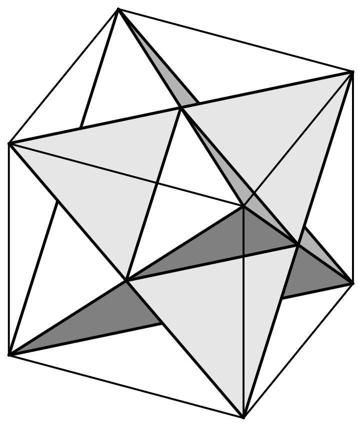


Рис. 1.

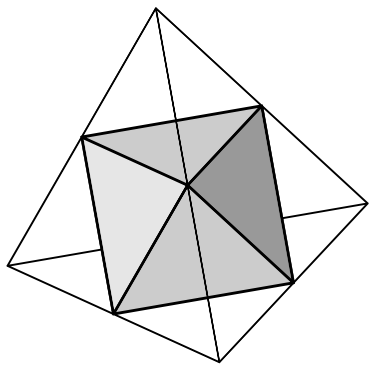


Рис. 1′.

проходившей в августе 2000 г. под г. Малоярославцем Калужской области. В данной статье мы предлагаем для исследования несколько задач, решения которых нам неизвестны.

Многие приводимые результаты двойственны друг другу. Мы используем в нумерации штрих для указания двойственного утверждения, но не обсуждаем двойственность подробно, отсылая читателя к [1, §9.2].

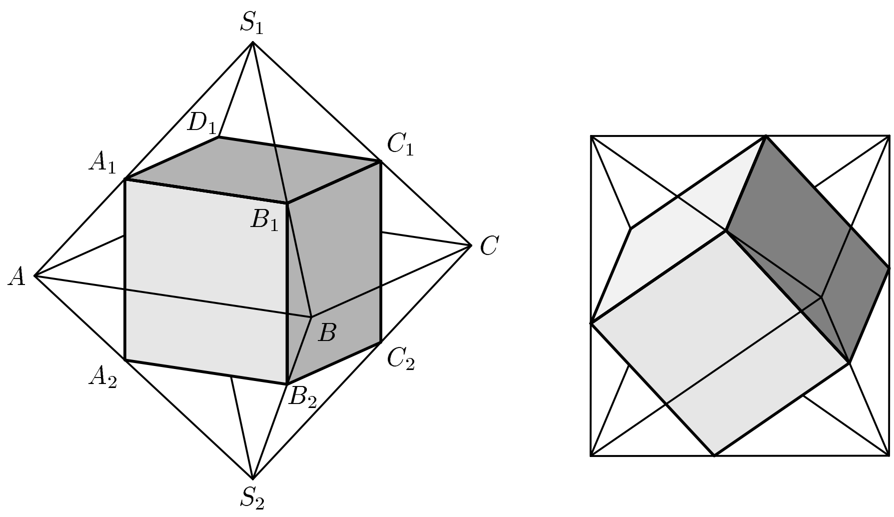
Описание интересных расположений тетраэдра, куба и октаэдра

На рисунке 1 показано, как выбрать четыре вершины куба так, чтобы они были вершинами тетраэдра. Раскрасим вершины куба с ребром 1 в черный и белый цвета в «шахматном» порядке (т. е. так, чтобы соседние вершины были раскрашены в разные цвета). Тогда вершины одного цвета задают тетраэдр с ребром $\sqrt{2}$.

Заметим, что пересечение тетраэдров с черными и белыми вершинами есть октаэдр, вершины которого являются серединами ребер этих тетраэдров.

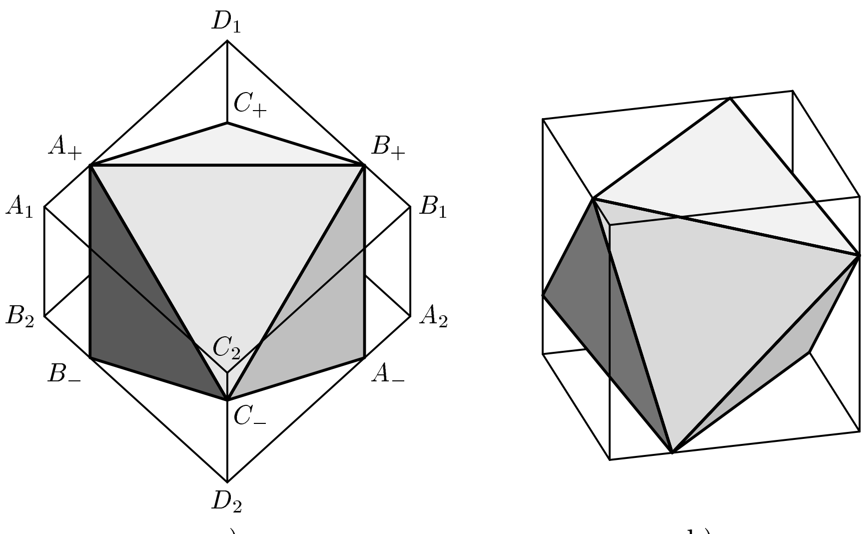
На рисунке $1'$ легко видеть и непосредственно, что середины ребер тетраэдра с ребром 1 являются вершинами октаэдра с ребром $1/2$. Из этого вытекает также, что можно выбрать четыре плоскости граней октаэдра так, чтобы они были плоскостями граней тетраэдра.

На рисунках 2a, 2b показано, как выбрать на ребрах октаэдра восемь точек, являющихся вершинами куба. Вершины октаэдра с ребром 1 обозначим через A, B, C, D, S_1, S_2, чтобы выделить «основание» $ABCD$ и «вершины» S_1 и S_2. На восьми ребрах, соединяющих вершины основания с точками S_1 и S_2, возьмем восемь «красных» точек $A_iB_iC_iD_i$, делящих



a) b)

Рис. 2.



a) b)

Рис. 2′.

соответствующие ребра в одинаковых отношениях. Легко видеть, что «красные» точки являются вершинами прямоугольного параллелепипеда. Его грани, параллельные основанию, являются квадратами. «Красный» прямоугольный параллелепипед является кубом тогда и только тогда, когда $A_1A_2 : A_1B_1 = AA_1\sqrt{2} : SA_1 = 1$. Сторона «красного» куба равна при этом $A_1B_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.

На рисунках $2'$a,b показано, как выбрать на ребрах куба шесть точек, являющихся вершинами октаэдра. Вершины куба с ребром 1 обозначены нестандартно, но именно такое обозначение удобно для нашего построения. Четыре вершины трех ребер куба, имеющих общую точку, обозначены четырьмя разными буквами с некоторыми индексами. На трех ребрах D_1A_1, D_1B_1 и D_1C_1, выходящих из вершины D_1, взяты три точки A_+, B_+, C_+, делящие эти ребра в одинаковых отношениях $3:1$ (к общей вершине D_1 примыкает *бóльший* отрезок деления). Рассмотрим также точки A_-, B_-, C_-, симметричные им относительно центра куба. Имеем

$$A_+B_- = \sqrt{A_+A_1^2 + A_1B_2^2 + B_2B_-^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}A_+D_1 = A_+B_+\,.$$

Аналогично получаем, что все восемь треугольников $A_\pm B_\pm C_\pm$ — правильные с ребром $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. Таким образом, $P = A_+B_+C_+A_-B_-C_-$ — правильный октаэдр с ребром $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Обычно приводятся расположения на рисунках 2a и $2'$b, из которых не совсем понятно, что они двойственны друг другу.

Закончим этот параграф интересным замечанием В. Дольникова. Вопрос о том, когда среди вершин n-мерного куба можно выбрать точки, являющиеся вершинами правильного n-мерного симплекса, очень интересен, но не решен более 100 лет. Не все знают, хотя за последние 70 лет это неоднократно переоткрывалось, что это можно сделать тогда и только тогда, когда существует матрица Адамара порядка $n+1$. (*Матрицей Адамара* называется ортогональная матрица, состоящая из единиц и минус единиц.) До сих пор не доказана гипотеза о том, что при $n \geqslant 4$ матрица Адамара существует в точности тогда, когда n делится на 4.

Оптимальность приведенных расположений

Сформулируем проблему, при решении которой появляются указанные красивые расположения.

Проблема (P, Q). Даны два выпуклых многогранника P и Q. При каком наибольшем $p = p(P, Q)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q, можно поместить многогранник с ребром p, гомотетичный P?

Проблема (P, Q) в случае правильных многогранников P и Q будет в дальнейшем обозначаться с использованием пиктограмм для правильных многогранников. См., например, формулировку следующих теорем.

Теоремы: 1. $p($  ,  $) = \sqrt{2}$. 1′. $p($  ,  $) = 1/2$.

Оптимальные расположения для теорем 1 и 1′ уже построены (рис. 1 и 1′). Доказательство их оптимальности несложно и красиво. Оно основано на следующих общеизвестных фактах.

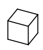
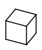
– *Сфера, описанная около тетраэдра, имеет минимальный радиус среди всех сфер, в которые его можно поместить.*

– *Вписанная в выпуклый многогранник сфера имеет максимальный радиус среди всех сфер, которые можно поместить в данный многогранник.*

Заметим, что первый из этих фактов неверен для *произвольных* тетраэдров.

Итак, докажем, что в кубе Q с ребром 1 невозможно расположить тетраэдр с ребром, бо́льшим $\sqrt{2}$. Пусть в Q расположен тетраэдр P. Тогда P содержится в сфере S, описанной вокруг Q. По первому из сформулированных фактов, ребро тетраэдра P не превосходит ребра тетраэдра, вписанного в S. Как раз такой тетраэдр изображен на рис. 1a, и его ребро равно $\sqrt{2}$.

Теперь докажем, что в тетраэдре Q с ребром 1 невозможно расположить октаэдр с ребром, бо́льшим $1/2$. Пусть в Q расположен октаэдр P. Тогда Q содержит сферу S_P, вписанную в P. По второму из сформулированных фактов, радиус сферы S_P не превосходит радиуса сферы S_Q, вписанной в Q. Значит, ребро октаэдра P не превосходит ребра октаэдра, описанного вокруг S_Q. Как раз такой октаэдр изображен на рис. 1b, и его ребро равно $1/2$.

Теоремы: 2. $p($  ,  $) = 2 - \sqrt{2}$. 2′. $p($  ,  $) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Оптимальные расположения для теорем 2 и 2′ уже построены (рис. 2 и 2′). Доказательство их оптимальности также несложно и красиво. Оно основано на следующей лемме.

Лемма о центрах симметрии. *Если выпуклый центрально-симметричный многогранник P можно расположить внутри другого выпуклого центрально-симметричного многогранника Q, то это можно сделать и таким образом, чтобы центры симметрии многогранников совпали.*

Для *доказательства теоремы* 2 достаточно показать, что куб P на рисунке 2 имеет наибольшее ребро среди всевозможных кубов, помещающихся в единичном октаэдре. Предположим, напротив, что в октаэдре существует куб P' бо́льшего размера, чем P. По лемме о центрах симметрии можно считать, что центр куба P' совпадает с центром O октаэдра. Тогда все вершины куба P' лежат вне сферы с центром O, описанной около куба P. Пусть K и L — точки пересечения этой сферы с ребрами AB и AD, соответственно, ближайшие к A. Рассмотрим пирамиду $AKLA_1A_2$ и пять аналогичных пирамид, соответствующих остальным вершинам октаэдра. Если некоторая точка лежит в октаэдре, но не содержится ни в одной из этих шести пирамид, то она лежит внутри рассматриваемой сферы. Таким образом, вершины куба P' расположены в объединении построенных шести пирамид. По принципу Дирихле хотя бы две вершины куба P' должны лежать в одной пирамиде. Однако диаметр каждой пирамиды (т. е. наибольшее расстояние между точками пирамиды) равен A_1A_2, что равно ребру куба P и по нашему предположению меньше ребра куба P'. Полученное противоречие завершает доказательство.

Для *доказательства теоремы* $2'$ достаточно показать, что октаэдр P на рисунке $2'$ имеет наибольшее ребро среди всевозможных октаэдров, помещающихся в единичном кубе. Предположим, напротив, что в кубе существует октаэдр P', бо́льший, чем P. По лемме о центрах симметрии можно считать, что центр октаэдра P' совпадает с центром O куба. Тогда все вершины октаэдра P' лежат вне сферы с центром O, описанной около октаэдра P. Эта сфера пересекает ребра куба в точках на расстоянии $1/4$ от его вершин. Рассмотрим 8 четырехугольных пирамид, каждая из которых образована вершинами куба и тремя ближайшими к ней точками пересечения сферы с ребрами куба (лежащими на выходящих из этой вершины ребрах). Если точка лежит в кубе, но вне объединения этих 8 пирамид, то она лежит внутри рассматриваемой сферы. Таким образом, вершины октаэдра P' расположены в объединении 8 данных пирамид. Это означает, что две из вершин октаэдра P' должны принадлежать либо одной пирамиде, либо лежать в двух пирамидах, отвечающих двум соседним вершинам куба. Однако расстояние между двумя точками объединения пирамид, относящихся к соседним вершинам, не превосходит $\sqrt{1^2 + (1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, что равно ребру октаэдра P и меньше ребра октаэдра P'. Полученное противоречие завершает доказательство. Немного другое доказательство теоремы $2'$, а также близкие интересные факты приведены в [2, задача 415].

Осталось *доказать лемму о центрах симметрии.* Мы будем использовать формулу для композиции центральных симметрий: $Z_A \circ Z_B = T_{2\overline{BA}}$. Пусть O_Q и O_P — центры симметрии многогранников Q и P. Многогранник $Z_{O_Q}(P)$ также содержится в Q. Имеем: $S_{O_Q}(P) = S_{O_Q}(S_{O_P}(P)) = T_{2\overline{O_PO_Q}}(P)$ (см. рис. 3, на котором изображен плоский аналог). Тогда

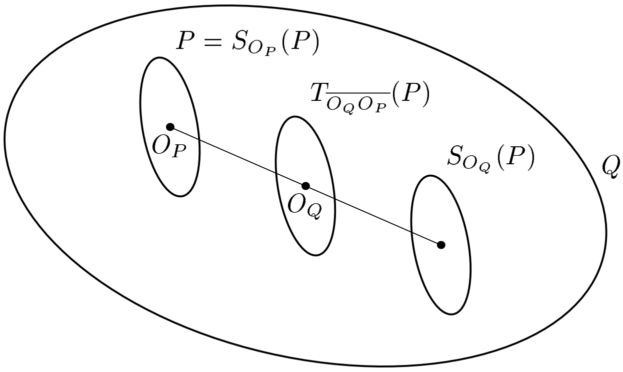
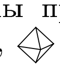


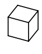
Рис. 3.

многогранник $P' = T_{\overline{O_P O_Q}}(P)$ равен P, имеет центр симметрии в точке O_Q и содержится внутри Q. Последнее следует из выпуклости многогранника Q, поскольку каждая точка $x \in P'$ лежит на отрезке, соединяющем точки $T_{\overline{O_P O_Q}}(x)$ и $T_{\overline{O_Q O_P}}(x)$.

Мы предлагаем заинтересовавшемуся читателю решить проблемы ( , ) и ( , ) или хотя бы получить оценки для соответствующих $p(P, Q)$ (видимо, эти проблемы являются нерешенными). Например, рассматривая рисунок $1'$, можно доказать, что $p($  ,  $) \geqslant 1$ (поскольку тетраэдр, симметричный «верхнему» тетраэдру относительно «нижней» грани последнего, лежит в октаэдре).

Оптимальные расположения нескольких тетраэдров

Проблема (Q, n). Дан выпуклый многогранник Q. При каком наибольшем $p = p(Q, n)$ в многограннике с ребром 1, гомотетичном Q, можно поместить n непересекающихся тетраэдров с ребром p?

Теорема 3. $p($  $, 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ *и* $p($  $, 2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Построим оптимальные расположения для теоремы 3 (рис. 4а). Рассмотрим две противоположные вершины S_1 и S_2 куба. Рассечем куб плоскостью, равноудаленной от S_1 и S_2. В сечении получим правильный шестиугольник со стороной $1/\sqrt{2}$. В это сечение можно поместить правильный треугольник со стороной $p < \sqrt{3}/\sqrt{2}$ так, что центр треугольника совпадет с центром сечения. Тетраэдры с вершинами S_1 и S_2, основаниями которых служат указанные треугольники, — искомые. Высоты построенных тетраэдров равны радиусу $R = \sqrt{3}/2$ описанной около куба

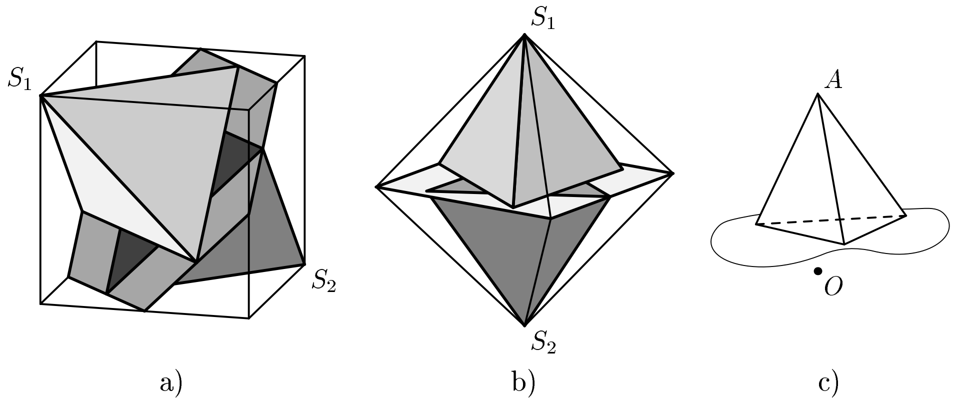


Рис. 4.

сферы. Так как $R = p\sqrt{2/3}$, то эти тетраэдры правильные. Оптимальность построенных расположений вытекает из следующей леммы.

Лемма о двух тетраэдрах. *Если многогранник Q находится в сфере диаметра d, то $p(Q,2) \leqslant d\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.*

Эта лемма доказывается очень просто. Если в многограннике Q расположены два тетраэдра с ребром $p = p(Q,2)$, не имеющие общих внутренних точек, то центр сферы O не лежит в одном из них. Проведем через грани этого тетраэдра плоскости. Одной из них можно отделить O от вершины A тетраэдра, не лежащей в этой плоскости (рис. 4c). Тогда $d/2 \geqslant AO \geqslant h = p\sqrt{2}/\sqrt{3}$, где h — длина высоты тетраэдра.

Рассматривая теперь (рис. 4b) две противоположные вершины S_1 и S_2 *октаэдра* и рассекая октаэдр равноудаленной от этих вершин плоскостью, получим в сечении квадрат со стороной 1. Впишем в него окружность радиуса 1/2, а в нее — правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}/2$. Тетраэдры с вершинами S_1 и S_2, основаниями которых служат указанные треугольники, — искомые. Доказательство аналогично случаю куба.

Мы предлагаем заинтересовавшемуся читателю получить оценки числа $p(Q,n)$ для оставшихся пар (Q,n). На рисунке 5 представлено замечательное расположение, показывающее, что $p(\;,3) \geqslant 1$.

Разбиение тетраэдра на тетраэдры и октаэдры

Из рисунка $1'$ и неравенства $p(\;,\;) \geqslant 1$ вытекает, что $p(\;,5) \geqslant$ $\geqslant 1/2$. Приведем красивое классическое расположение, обобщающее расположение на рисунке $1'$ и дающее оценку $p\left(\;,\dfrac{n^3+n}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{n}$ (аналогичное

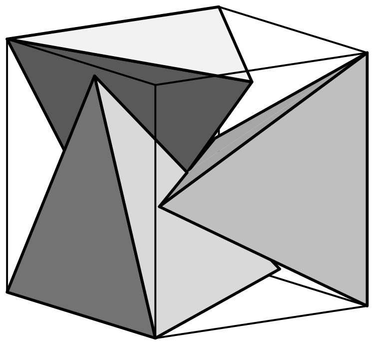


Рис. 5.

построение можно провести и для октаэдра). См. рис. $1'$ для $n = 2$ и рис. 6 для $n = 3$.

Теорема 4. *Для каждой высоты тетраэдра с ребром* 1 *проведем* $n-1$ *перпендикулярных ей плоскостей, делящих ее на* n *равных частей. Тогда проведенные плоскости разбивают тетраэдр на* $\frac{n^3+2n}{3}$ *тетраэдров и* $\frac{n^3-n}{6}$ *октаэдров с ребром* $\frac{1}{n}$.

Теорему 4 легко доказать по индукции. База $n = 2$ следует из рисунка $1'$. Докажем шаг индукции сначала для $n = 3$. Проведенные плоскости разбивают тетраэдр на *куски*. Среди проведенных плоскостей рассмотрим те четыре плоскости, каждая из которых отсекает от исходного тетраэдра *малый* тетраэдр с ребром $2/3$. Куски в малых тетраэдрах являются тетраэдрами и октаэдрами по предположению индукции. Казалось бы, исходный тетраэдр является объединением малых тетраэдров. В действительности, это не так: центр исходного тетраэдра не лежит в этом объединении! (См. рис. 6.) Это следует из того, что центр исходного тетраэдра делит высоту в отношении $1:3$, а каждая из четырех выбранных плоскостей — $1:2$. Но в объединении малых тетраэдров не лежит лишь один кусок. Он ограничен четырьмя гранями малых тетраэдров, не совпадающими с гранями исходного тетраэдра, и поэтому является тетраэдром с ребром $1/3$ (его вершинами являются центры граней исходного «большого» тетраэдра). Значит, по предположению индукции все куски являются тетраэдрами и октаэдрами с ребром $1/3$. Поскольку

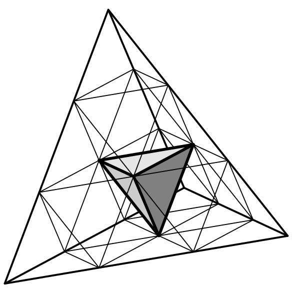


Рис. 6.

малых тетраэдров четыре, то ровно четыре куска являются октаэдрами. Пусть T кусков являются тетраэдрами. Для нахождения T воспользуемся соображениями подобия. Объём тетраэдра с ребром $1/3$ в $3^3 = 27$ раз меньше объема исходного тетраэдра и в 4 раза меньше объема октаэдра со стороной $1/3$. Следовательно, $4 \cdot 4 + T = 27$, откуда $T = 11$.

Докажем теперь, что теорема 4 верна для произвольного $n > 3$. Среди проведенных плоскостей рассмотрим те четыре плоскости, каждая из которых отсекает от исходного тетраэдра *малый* тетраэдр с ребром $1-1/n$. Так как $n > 3$, то объединение четырех малых тетраэдров уже является исходным тетраэдром. Значит, по предположению индукции все куски являются тетраэдрами и октаэдрами с ребром $1/n$. Подсчитаем теперь количества T_n тетраэдров и O_n октаэдров в разбиении. Объединение двух малых тетраэдров является исходным тетраэдром, из которого вырезаны куски, прилежащие к одному из ребер. Среди этих кусков n октаэдров с ребром $1/n$. Пересечением двух малых тетраэдров является тетраэдр с ребром $1 - 2/n$. Поэтому $O_{n+1} = n + 2O_n - O_{n-1}$ при $n \geqslant 3$. Используя $O_2 = 1$ и $O_3 = 4$, по индукции легко показать, что $O_n = \dfrac{n^3 - n}{6}$. Далее, из соображений подобия получим, что $4O_n + T_n = n^3$, откуда $T_n = \dfrac{n^3 + 2n}{3}$.

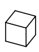
Оптимальные расположения с участием додекаэдра и икосаэдра

Приведем аналогичные результаты для других правильных многогранников — додекаэдра и икосаэдра. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани — одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны. Далее все многогранники подразумеваются правильными. Используя рис. 7, можно доказать [1, §9.1], что действительно существует

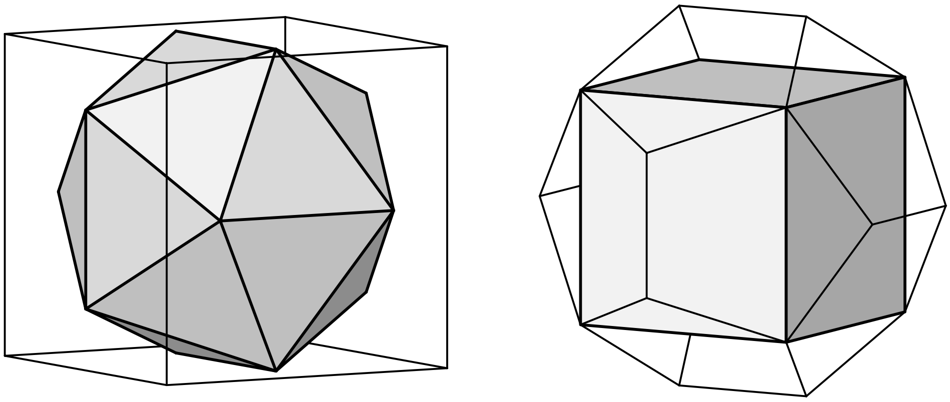
– *правильный додекаэдр, т. е. многогранник, каждая грань которого — пятиугольник*;

– *правильный икосаэдр, т. е. многогранник, в каждой вершине которого сходится* 5 *ребер.*

Не существует других типов правильных многогранников, кроме пяти построенных [1, §9]. Этот факт не используется в данной статье.

Теорема 5. $p($  ,  $) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $p($  ,  $) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Теорема 5′. $p($  ,  $) = \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{2\sqrt{2}}$, $p($  ,  $) = \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4\sqrt{2}}$.



a) b)

Рис. 7.

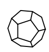
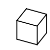
Оптимальные расположения для теорем 5 и $5'$ представлены на рис. 7b и 8. Их оптимальность доказывается аналогично теоремам 1 и $1'$. В доказательстве используется, что для додекаэдра и икосаэдра существует:

– *сфера, проходящая через все его вершины* (*описанная сфера*);

– *сфера, касающаяся всех его граней* (*вписанная сфера*).

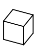
Мы предлагаем заинтересовавшемуся читателю решить оставшиеся проблемы (P, Q) или хотя бы получить оценки для соответствующих $p(P, Q)$. Приведем имеющиеся у нас верхние оценки:

– $p($  ,  $) \geqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (*рис.* 7a);

– $p($  ,  $)$ *можно оценить из рис.* 7b: *додекаэдр, гомотетичный данному с центром в центре куба, содержится в кубе*;

– $p($  ,  $) \geqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$, *рис.* 7a: *середины ребер икосаэдра, лежащие на гранях куба, являются вершинами октаэдра*;

– $p($  ,  $)$ *можно оценить из рис.* 7a: *середины ребер додекаэдра, лежащие над гранями куба, являются вершинами октаэдра*;

– $p($  ,  $)$ *можно оценить из рис.* 8: *центры граней октаэдра являются вершинами куба*;

– $p($  ,  $)$ *можно оценить из рис.* 8: *центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра.*

Теорема 6. $p($  $, 2) = \frac{3(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{2}}$ и $p($  $, 2) = \frac{\sqrt{3(5+\sqrt{5})}}{4}$.

Оптимальные расположения для теоремы 6 изображены на рис. 9. Доказательство их оптимальности аналогично доказательству теоремы 3.

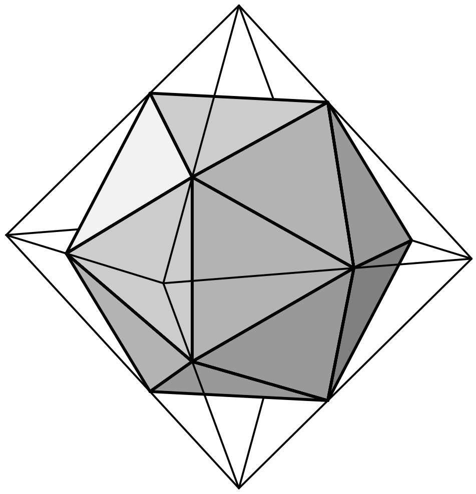
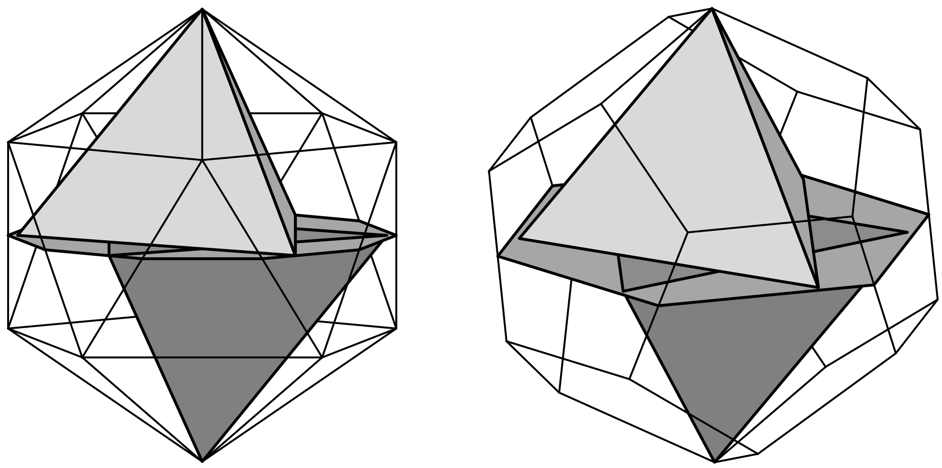


Рис. 8.



a) b)

Рис. 9.

Необходимы следующие вычисления. Для додекаэдра построенное аналогично доказательству теоремы 3 сечение есть правильный шестиугольник со стороной $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$ и радиусом вписанной окружности

$$r = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{8} > \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{2}}\,.$$

Для икосаэдра построенное сечение есть правильный десятиугольник со стороной $1/2$ и радиусом вписанной окружности

$$r = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5-2\sqrt{5}}} > \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{4}\,.$$

Мы благодарим М. Вялого, В. Дольникова, М. Евдокимова и И. Ф. Шарыгина за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии.* М.: Наука, 1989.

[2] Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии.* М.: Наука, 1989.

[3] Скопенков А., Таламбуца А. *Упаковки правильных многогранников* // Математическое образование, 2000. №3(14), с. 52–53.

Изогональные трехвалентные графы на сфере

Р. М. Травкин

Мы рассматриваем в этой статье *изогональные трехвалентные графы*, т. е. графы на сфере $\mathbb{S}^2$, ребра которых идут по геодезическим, а в каждой вершине сходятся по 3 ребра, образующие между собой равные углы (по 120°). Такие графы возникают при изучении структуры сингулярных мыльных пленок (см. [1]). Другая простая физическая интерпретация — резиновая «трехвалентная» сетка, натянутая на сферу, у которой натяжения всех резинок совпадают, а трение между сеткой и сферой отсутствует. Такая сетка имеет форму изогонального трехвалентного графа. Оказывается, существует всего девять типов таких графов (см., например, [1]); точнее говоря, любой такой граф можно наложить поворотом сферы на один из графов некоторого набора (из девяти графов). Цель настоящей заметки — привести элементарное «переборное» доказательство этого факта; при этом переборе естественно появятся все девять изогональных трехвалентных графов. Эти графы изображены на рис. 1. Из рисунка видно, что каждому графу соответствует сферический многогранник. Любопытно, что числа граней этих многогранников, расположенные в порядке возрастания, образуют ряд 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12.

1. Свойства сферических многоугольников

В этом параграфе мы перечислим ряд свойств сферических многоугольников, которые нам потребуются в дальнейшем. Доказательства этих свойств[1)], которые мы предоставляем читателю, могут быть получены из основных правил сферической геометрии[2)] (см., например, учебник [2]). В условиях задачи сфера разбивается нашим графом на сферические многоугольники, обладающие следующими свойствами:

1. Все углы каждого из многоугольников равны 120°.

[1)] Как и доказательство применяемой ниже формулы (1) из разд. 4.2.

[2)] Свойство 9 вытекает из леммы 1 (см. разд. 6 настоящей статьи). Получить непосредственное геометрическое доказательство свойства 9 автору не удалось. Ряд свойств легче доказывается при переходе к двойственным (полярным) многоугольникам.

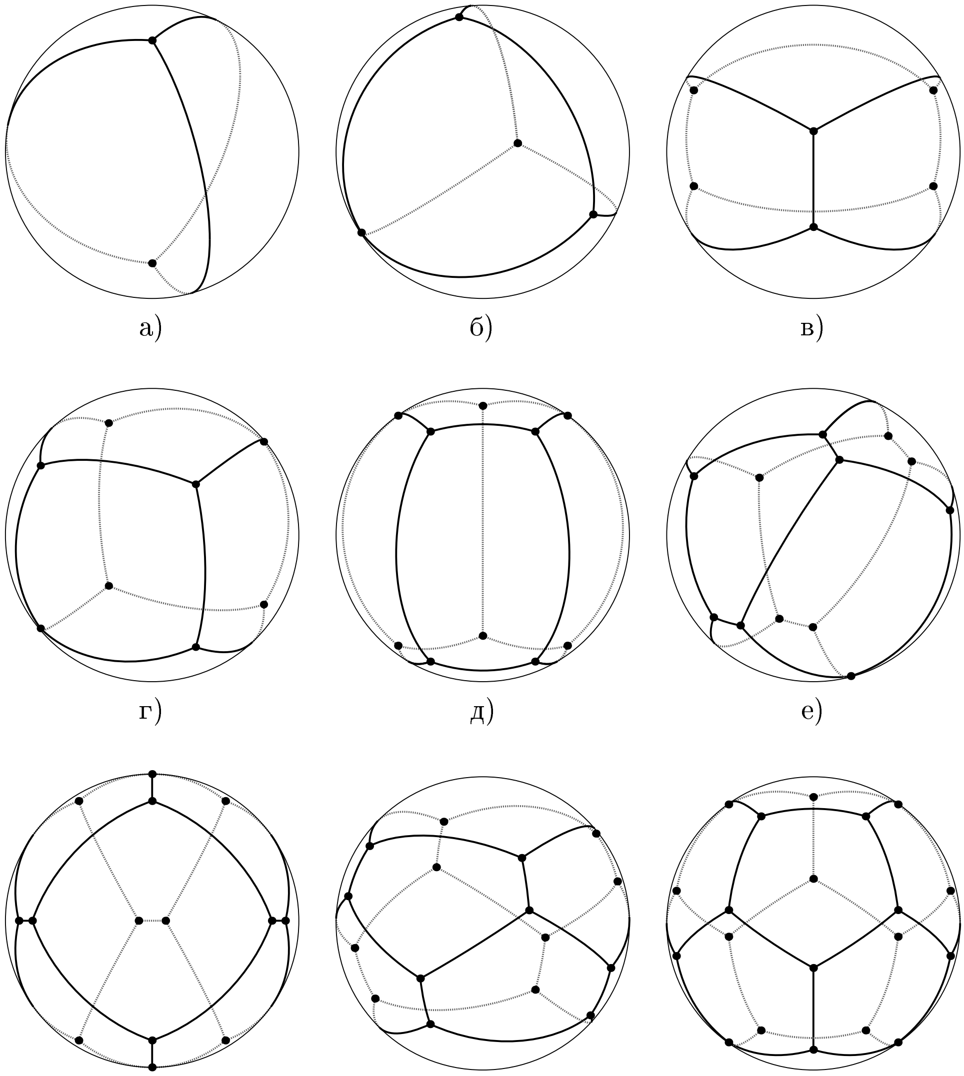


Рис. 1.

2. Многоугольники правильно примыкают друг к другу, т. е. два многоугольника имеют либо общую сторону, либо не имеют общих точек (из трехвалентности всех вершин нашего графа следует, что если два многоугольника имеют общую вершину, то они имеют и общую сторону).

3. Число сторон каждого многоугольника $\leqslant 5$ (поскольку сумма внешних углов сферического многоугольника меньше 2π, см. [2]).

Известно (см. [2]), что сумма углов любого выпуклого сферического многоугольника однозначно определяет его площадь, независимо от формы самого многоугольника. Рассмотрим для удобства сферу, площадь поверхности которой равна 12. Тогда площадь поверхности для многоугольников, составляющих разбиение сферы ребрами изогонального трехвалентного графа, будет равна:

4 — для двуугольников,
3 — для треугольников,
2 — для четырехугольников,
1 — для пятиугольников.

Отметим также следующие свойства (выпуклых) сферических многоугольников с углами 120°:

4. Все двуугольники равны (конгруэнтны) между собой.

5. Все треугольники равны между собой.

6. Четырехугольники равны по одной стороне.

7. Пятиугольники равны по двум соответственным сторонам (т. е. по двум смежным или по двум не смежным).

8. Никакая сторона пятиугольника не равна стороне треугольника.

9. Если каждая из трех смежных сторон одного пятиугольника не меньше соответствующей стороны из трех смежных сторон другого пятиугольника, то эти пятиугольники равны.

В дальнейшем, если в тексте прямо не указано иное, слово *многоугольник* означает выпуклый сферический многоугольник, все углы которого равны 120°. Далее, мы будем говорить, что два сферических многогранника имеют одинаковый *комбинаторный тип*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между их вершинами, ребрами и гранями, сохраняющее примыкание.

Кроме перечисленных свойств, нам будет полезна следующая

Теорема единственности. *Если два сферических многогранника с выпуклыми гранями имеют одинаковый комбинаторный тип и одинаковые соответственные углы, то они равны.*

Доказательство теоремы единственности приводится в конце статьи. Теорема позволяет проверять только существование сферических многогранников с заданным комбинаторным типом, не заботясь о доказательстве единственности. Отметим, что справедливость этой теоремы позволяет a priori утверждать конечность изучаемого множества искомых многогранников.

Далее мы последовательно перебираем все возможные искомые многогранники в зависимости от наличия у них тех или иных граней (по свойству 3 число сторон их граней может принимать значения $2, 3, 4, 5$).

2. Есть двуугольник

Пусть одна из граней искомого многогранника — двуугольник. Тогда из свойств 1 и 2 следует, что у многогранника еще две грани — тоже двуугольники, так что в этом случае на сфере получается *правильный трехгранник*, изображенный на рис. 1а.

3. Есть треугольник (и нет двуугольников)

Рассмотрим отдельно два подслучая этого случая.

3.1. К треугольнику примыкает другой треугольник

Пусть рядом с треугольником ABC имеется треугольник BCD. Очевидно, что рядом с ними можно расположить треугольник ABD, который будет примыкать к ним по сторонам AB и BD (рис. 2). Если же мы попытаемся вписать в угол ABD четырехугольник или пятиугольник, то его стороны (проведенные под теми же углами) пойдут по геодезической AD, на которой окажутся все его вершины (кроме B). Тем самым, случай четырех-(пяти-) угольника невозможен.

Следовательно, конфигурация из двух смежных треугольников может быть дополнена только треугольником. Продолжая расширять конфигурацию из треугольников, придем к тому, что вся сфера будет покрыта треугольниками. Это разбиение получается при центральной проекции на сферу ребер *правильного тетраэдра*. Оно изображено на рис. 1б.

3.2. К треугольнику не примыкает никакой другой треугольник

Ввиду свойства 8, можно считать, что треугольник окружен только четырехугольниками (рис. 3). Обозначим длину стороны треугольника через a, и пусть b — длина стороны четырехугольника, смежной со стороной a (свойство 6). Вписывая четырехугольник $AA'B'B$ в угол $A'AB$,

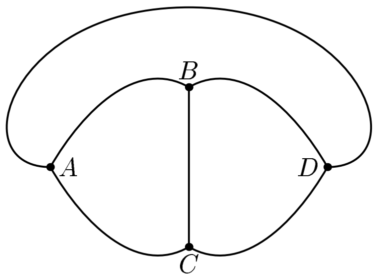


Рис. 2.

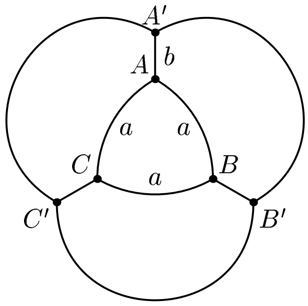


Рис. 3.

получим равенство длин $AA' = b$, аналогично $BB' = b$ и $CC' = b$. Поскольку все углы сферического треугольника $A'B'C'$ равны $120°$, любая пара смежных сторон этого треугольника входит в один и тот же многоугольник. Очевидно, таким многоугольником может быть только сам треугольник $A'B'C'$. Таким образом в этом случае на сфере получается центральная проекция *треугольной призмы*. Она изображена на рис. 1в.

4. Есть четырехугольник (и нет 2-угольников и треугольников)

Здесь мы снова рассмотрим ряд подслучаев.

4.1. В разбиении есть четырехугольник, граничащий только с пятиугольниками

Этот четырехугольник вместе с примыкающими к нему пятиугольниками имеет комбинаторную схему, изображенную на рис. 4. Фигура $C_1B_2C_2B_3C_3B_4C_4B_1$ имеет четыре внешних угла, равных $120°$ (B_1, B_2, B_3, B_4). Здесь снова возникают две возможности, и мы отдельно рассмотрим два «подподслучая»

4.1.1. В углы B_1, B_2, B_3, B_4 вписаны только пятиугольники

Тогда получающаяся фигура будет иметь на границе 4 стороны (которые можно заклеить четырехугольником). В результате получается разбиение сферы на фигуру $C_1B_2C_2B_3C_3B_4C_4B_1$ и дополнительную к ней фигуру такого же типа. Описанная ситуация реализуется при центральной проекции на сферу 10-гранника, состоящего из двух прямоугольных и восьми пятиугольных граней.

Построить этот 10-гранник можно следующим образом. Впишем в сферу куб $ABCDC_2D_2A_2B_2$. Грань $D_2A_2B_2C_2$ повернем в своей плоскости

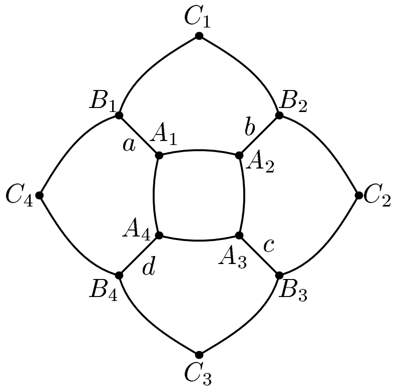


Рис. 4.

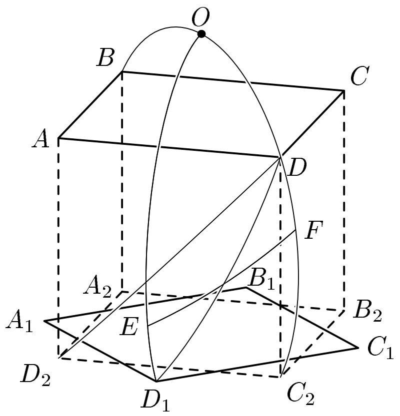


Рис. 5.

на 45°, как показано на рисунке 5, получая квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (он тоже будет вписанным в сферу). Центральные проекции на сферу квадратов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ дадут два четырехугольника нужного сферического многогранника. Пусть O — проекция центра квадрата $ABCD$ на сферу. Прилежащие к вершинам квадратов ребра пятиугольников пойдут по линиям пересечения со сферой больших кругов BDC_2A_2, ACB_2D_2 и двух кругов, проходящих через точки OA_1C_1 и OB_1D_1. Чтобы завершить построение, необходимо найти на дугах OD_1 и ODC_2 такие точки E и F, чтобы оба угла D_1EF и DFE равнялись 120° (тогда остальные дуги можно построить аналогично). Станем симметрично вращать дугу EF от начального положения D_1D до среднего положения, когда ее плоскость станет параллельна плоскости квадрата $ABCD$. Поскольку в конечном положении требуемые углы будут равны 90°, достаточно доказать, что в начальном положении они больше 120°, или, что то же самое, что сферический угол D_1DC_2 меньше 60°. Если повернуть квадрат $A_1B_1C_1D_1$ еще на 45°, он перейдет в квадрат $A_2B_2C_2D_2$, причем угол D_1DC_2 увеличится и перейдет в угол D_2DC_2. Последний равен 60°, как половина сферического угла между соседними ребрами куба. Требуемый 10-гранник тем самым построен. Его проекция на сферу изображена на рис. 1з.

4.1.2. В углы B_1, B_2, B_3, B_4 вписаны не только пятиугольники

Пусть, для определенности, в угол B_2 вписан четырехугольник (рис. 6).

Будем считать, что никакие два четырехугольника не имеют общей стороны (варианты со смежными четырехугольниками рассматриваются далее). Точки C_3, B_3, C_2 и D входят в один многоугольник, который по

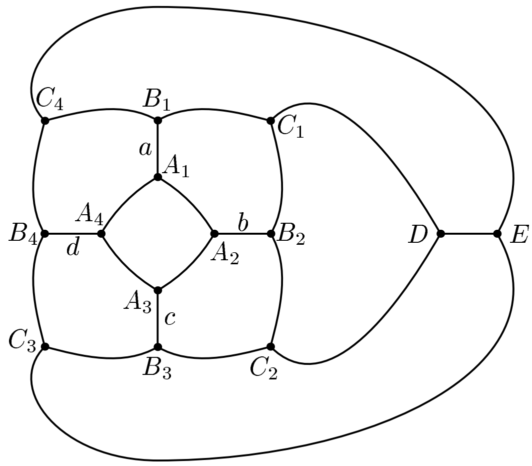


Рис. 6.

нашему допущению является пятиугольником $C_3B_3C_2DE$. При этом образуется пятиугольник $C_4B_1C_1DE$ и еще один четырехугольник $C_3B_4C_4E$.

Полученная комбинаторная схема включает 3 четырехугольника и 6 пятиугольников и реализуется на сфере так, что все четырехугольники являются «квадратами». Заметим, что длина диагонали «квадрата» не превосходит 1/3 длины окружности большого круга. Разместив 3 «квадрата» так, чтобы их диагонали равномерно располагались на этой окружности, как на экваторе, и проведя из вершин «квадратов» геодезические к полюсам, получим требуемое разбиение, изображенное на рис. 1ж. Оно имеет комбинаторный тип так называемого многогранника Сташефа (см. [3]).

4.2. Есть два соседних четырехугольника, окруженных со всех сторон пятиугольниками

Изображенная на рис. 7 конфигурация многоугольников имеет площадь 8 и ее граница состоит из 6 сторон; следовательно, недостающие многоугольники должны иметь суммарную площадь 4. Поскольку x, y и z (аналогично u, v и w) разделены углами в 120°, они входят в один и тот же многоугольник. С учетом соображений площади недостающие многоугольники — два четырехугольника.

Поскольку изображенные на рисунке 7 четырехугольники имеют общую сторону, в силу свойства 6 они равны. Теперь рассмотрим верхний пятиугольник на рис. 7. У него есть пара равных сторон. Значит, по свойству 7, у него есть ось симметрии. Аналогично для нижнего

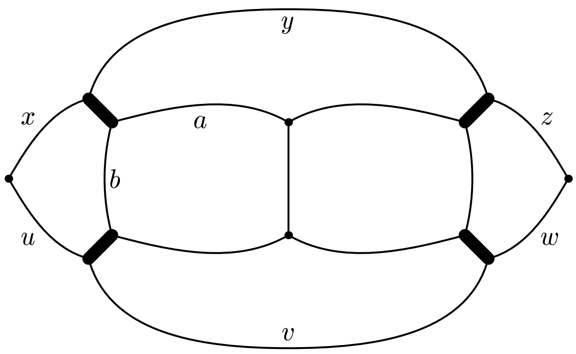


Рис. 7.

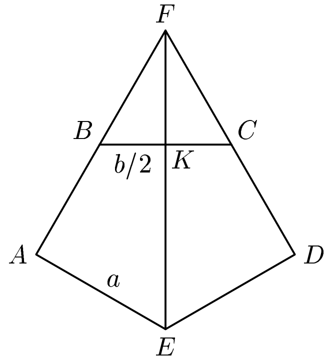


Рис. 8.

пятиугольника. В силу того же свойства 7, верхний пятиугольник равен нижнему, поэтому все ребра, отмеченные на рисунке жирными линиями, равны между собой. Наконец, в силу свойства 7 для несмежных сторон все четыре пятиугольника равны, в частности $x = u = z = w = a$ и $y = v = b$. Нашей дальнейшей задачей является вычисление a и b на основании этих равенств. Поскольку стороны многоугольников на сфере являются геодезическими, их можно рассматривать как углы. Стороны четырехугольников a и b связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

Согласно доказанному, сферические пятиугольники, участвующие в разбиении, имеют вид, указанный на рис. 8.

При этом имеют место соотношения $AE = ED = a$; $BK = KC = b/2$; $\angle EAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle DEA = 120°$, откуда

$$\angle KBF = \angle KEA = 60°; \angle BKF = 90°.$$

Применяя формулы сферической тригонометрии (см. [2]), по $\cos a$ из треугольника AEF найдем $\cos\angle BFK$, а по нему найдем $\cos(b/2)$. В результате возникает еще одно соотношение между a и b:

$$\cos\frac{b}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3\cos a + 1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(3\frac{1-\operatorname{tg}^2(a/2)}{1+\operatorname{tg}^2(a/2)} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\operatorname{tg}^2(a/2)}{1+\operatorname{tg}^2(a/2)}\,.$$

Возведем обе части равенства (1) в квадрат и подставим туда значение $\operatorname{tg}^2(b/2)$, выраженное через $\cos^2(b/2)$. Получим такое соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(a/2)\left(\frac{3(1+\operatorname{tg}^2(a/2))^2}{(2-tg^2(a/2))^2} - 1\right) = \frac{1}{4}\,.$$

После преобразований получается следующее уравнение относительно неизвестной $y := 1/\operatorname{tg}^2(a/2)$:

$$y^3 - 9{,}75y - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет ровно один положительный корень и однозначно определяет значения $\operatorname{tg}^2(a/2), \operatorname{tg}(a/2)$ и a, поскольку $a < \pi$. Следовательно, существует пятиугольник со сторонами a и b, которые удовлетворяют определяющему соотношению (1) и, следовательно, являются сторонами некоторого четырехугольника. Поэтому конфигурация, изображенная на рис. 8, может быть достроена (единственным образом) до сферического многогранника, изображенного на рис. 1е.

Очевидно, что четырехугольники могут укладываться на сферу в ряды. А возможны ли двойные ряды? Например, возможна ли конфигурация, изображенная на рис. 9?

4.3. Две смежные стороны четырехугольника являются сторонами других четырехугольников

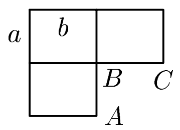


Рис. 9.

В силу того, что все углы четырехугольников равны по 120°, очевидно, что на рис. 9 сторона AB совпадает с CB, так что изображенные четырехугольники являются на самом деле «квадратами».

Докажем, что приведенную конфигурацию нельзя расширить пятиугольником. Вставим пятиугольник в некоторый внешний угол конфигурации. В тот же угол можно вставить и «квадрат», две смежных стороны которого будут являться сторонами пятиугольника. Являясь выпуклой фигурой, пятиугольник займет при этом не меньше половины «квадрата». Но из соображений площади он не может занять и более половины «квадрата», так что он должен совпадать с треугольником, образованным смежными сторонами «квадрата» и диагональю, на которую они опираются. Противоречие.

Следовательно, наша конфигурация (как и все получающиеся из нее) может расширяться только «квадратами». В результате мы получим *проекцию куба*, изображенную на рис. 1г.

Осталось рассмотреть случаи, когда четырехугольники образуют незамкнутый ряд и когда они образуют «кольцо».

4.4. Имеется более двух соседних четырехугольников, не образующих «кольцо»

Несложными рассуждениями (которые мы оставляем читателю), опирающимися на разд. 1, можно показать, что этот случай невозможен.

4.5. Имеется более двух соседних четырехугольников, и они образуют «кольцо»

Пусть имеется k таких четырехугольника. Нетрудно доказать, что тогда «кольцо» можно дополнить до сферического многогранника только заклеиванием двумя k-угольниками. Случаи $k = 3$ и $k = 4$ были рассмотрены ранее. Остается только (по свойству 3) случай $k = 5$. Ясно, что в этом случае на сфере получается проекция пятиугольной призмы. Она изображена на рис. 1д.

На этом заканчивается рассмотрение возможных разбиений с четырехугольной гранью.

5. Есть только пятиугольники

Нетрудно показать, что искомый граф с пятиугольными гранями имеет комбинаторный тип додекаэдра. В силу теоремы единственности это — центральная проекция *правильного додекаэдра*, которая изображена на рис. 1и.

Мы перебрали все возможные изогональные графы на сфере: наше доказательство завершено.

6. Доказательство теоремы единственности

Для доказательства этой теоремы потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A_1 \ldots A_n$ *и* $B_1 \ldots B_n$ — *два сферических* n*-угольника таких, что* $\angle A_i = \angle B_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. *На сторонах многоугольника* $A_1 \ldots A_n$ *расставлены знаки «+» и «−» в зависимости от того, больше или меньше данная сторона соответствующей стороны многоугольника* $B_1 \ldots B_n$ *(в случае равенства никакой знак не ставится). Тогда, если многоугольники не равны, то количество перемен знака при обходе многоугольника* $A_1 \ldots A_n$ *будет не менее* 4 *(стороны, не снабженные знаком, при подсчете числа перемен игнорируются).*

Доказательство. Данная лемма представляет собой переформулировку леммы Коши (см. [4]).

Лемма 2. *Пусть на сфере нарисован граф с непересекающимися ребрами, у которого никакие две вершины не соединены более чем одним ребром, и пусть на некоторых его ребрах расставлены знаки «+» и «−», причем есть хотя бы одно ребро, где стоит знак. Тогда найдется вершина, к которой подходит хотя бы одно ребро со знаком, но количество перемен знаков ребер при обходе вокруг этой вершины не более* 2.

Случай 1. Все грани графа — треугольные и нет «пустых вершин» (т. е. таких вершин, что все ребра, выходящие из этой вершины, не помечены).

Заметим, что количество граней в 1,5 раза меньше, чем количество ребер. Пусть количество граней равно $2k$, а количество ребер равно $3k$. Тогда по формуле Эйлера (см. [5, с. 391]) количество вершин равно $k+2$. Достаточно рассмотреть случай, когда все ребра помечены, так как в противном случае можно расставить недостающие знаки произвольным образом, и тогда количество перемен знаков в каждой вершине не уменьшится. Для каждой грани количество перемен знаков в этой грани не более двух, поэтому общее количество перемен знаков в гранях (или, что то же, в вершинах) не более $4k$. Количество вершин равно $k+2$, значит, найдется вершина, где количество перемен знака будет меньше 4, т. е. $\leqslant 2$, что и требовалось доказать.

Случай 2. Граф связный, без кратных ребер, и нет пустых ребер.

Этот случай можно свести к случаю 1. Каждая грань представляет собой многоугольник, который имеет не менее трех ребер, и ее можно разбить на треугольники, не добавляя новых вершин. Добавляя ребра разбиения, попадем в условия случая 1.

Общий случай.

Удалим из графа пустые ребра и пустые вершины. Тогда граф может распасться на несколько компонент связности. Выберем одну из них и применим к ней случай 2.

Доказательство леммы 2 закончено.

Доказательство теоремы. Обозначим графы, образованные ребрами заданных многогранников, через A и B. Рассмотрим графы A' и B', двойственные к графам A и B соответственно.[3] Между ребрами графа и ребрами двойственного к нему графа имеется взаимно однозначное соответствие. Поскольку многогранники комбинаторно эквивалентны, A' и B' можно отождествить. На каждом ребре a графа A' поставим знак «+» или «−» в зависимости от того, какое из ребер многогранников A и B, соответствующих a, больше. Если многогранники не равны, к графу A' можно применить лемму 2. По этой лемме, в A' найдется непустая вершина p с не более чем двумя переменами знаков. Этой вершине соответствует две грани в многогранниках A и B. Если эти грани были бы равны, то вершина p была бы пустой. Значит, они не равны, и можно применить лемму 1, согласно которой число перемен знаков в этой вершине должно быть не менее 4, в то время как оно, по доказанному, не более 2.

[3] Двойственным к графу A является граф A', вершины которого выбраны по одной в каждой грани A, и две вершины A' связаны ребром, если соответствующие грани A имеют общее ребро.

Ввиду полученного противоречия, многогранники A и B равны. Теорема доказана.

Автор благодарит А. Б. Сосинского за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко. *Минимальные поверхности и проблема Плато*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1987.

[2] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. *Геометрия*. М.: МЦНМО, 1999.

[3] П. Картье. *Комбинаторика деревьев* // Студенческие чтения МК НМУ, вып. 2. М.: МЦНМО, 2001.

[4] Н. П. Долбилин. *Жемчужины теории многогранников*. Биб-ка «Математическое просвещение», вып. 5. М.: МЦНМО, 2000.

[5] Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая. Геометрия. М.: Гос.изд. физ.-мат. л-ры, 1963.

Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра

А. А. Заславский

Постановка задачи

Эта статья посвящена задаче, которая была предложена школьникам на XV летней конференции Турнира Городов в августе 2003 года. Постановка задачи является совершенно естественной. Действительно, большая часть планиметрии состоит в изучении свойств треугольника. Трехмерным аналогом треугольника является тетраэдр, поэтому вполне логично поставить вопрос, для каких свойств треугольника существуют трехмерные аналоги. Впрочем, в полном объеме эта задача абсолютно неподъемна. Достаточно сказать, что в электронной энциклопедии [1] число связанных с произвольным треугольником замечательных точек приближается уже к 2000. Здесь мы рассмотрим вопросы, связанные примерно с десятком этих точек, которые будут перечислены ниже.

1. *Центр тяжести* M — точка пересечения медиан треугольника.

2. *Центр описанной окружности* O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

3. *Центр вписанной окружности* I — точка пересечения его биссектрис. Напомним, что для любого треугольника существуют еще три вневписанные окружности, каждая из которых касается одной из его сторон и продолжений двух других.

4. *Ортоцентр* H — точка пересечения высот треугольника. Отметим, что точки O, M и H лежат на одной прямой (прямая Эйлера) и $HM = 2MO$. Кроме того, точки O и H изогонально сопряжены[1)].

5. *Точка Жергонна* G — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности.

6. *Точка Нагеля* N — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с соответ-

[1)] Если даны треугольник ABC и точка P, то прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис соответствующих углов ABC, пересекаются в одной точке P', которая называется *изогонально сопряженной* P относительно ABC.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 8, 2004(78–92)

ствующей вневписанной окружностью. При этом точки N, M, I лежат на одной прямой и $NM = 2MI$. Отметим также, что точки G и N изотомически сопряжены[2)] друг другу, а изогонально сопряженные им точки являются центрами гомотетии описанной и вписанной окружностей.

7. *Точка Лемуана* L — изогонально сопряженная точке M. Точка L обладает также тем свойством, что сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника меньше, чем для любой другой точки плоскости.

8. *Точки Торричелли* — точки пересечения прямых AA', BB' и CC', где ABC', BCA', CAB' — правильные треугольники, построенные на сторонах треугольника ABC. При этом, если треугольники строятся во внешнюю сторону, получается первая точка Торричелли T_1, а если во внутреннюю, — вторая точка Торричелли T_2. Если все углы треугольника меньше $120°$, то точка T_1 лежит внутри треугольника и из нее все стороны треугольника видны под углами $120°$. В этом случае она обладает еще одним важным свойством: сумма расстояний от вершин треугольника до точки T_1 меньше, чем до любой другой точки плоскости.

9. *Точки Аполлония* — точки пересечения трех окружностей, каждая из которых проходит через одну вершину треугольника и точки пересечения биссектрис внутреннего и внешнего углов при этой вершине с противоположной стороной. Точки Аполлония обладают тем свойством, что расстояния от них до вершин треугольника обратно пропорциональны соответствующим сторонам, а их проекции на стороны треугольника образуют правильные треугольники. Кроме того, точки Аполлония изогонально сопряжены точкам Торричелли, поэтому мы будем обозначать их как T_1', T_2'.

Мы будем исследовать вопрос, существуют ли аналогичные точки в произвольном тетраэдре, и, если нет, то как описать соответствующие классы тетраэдров, а также существуют ли между трехмерными замечательными точками такие же связи, как между их плоскими аналогами. Приведем сначала результаты, которые можно считать широко известными.

Известные факты геометрии тетраэдра

1. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке — центре тяжести тетраэдра M. Они делят друг друга в отношении $3:1$.

[2)] Если прямые AP, BP, CP пересекают противоположные стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1, C_1, а точки A_2, B_2, C_2 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно середин соответствующих сторон, то прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке P', которая называется *изотомически сопряженной* P относительно ABC.

2. Вокруг любого тетраэдра можно описать сферу. Ее центр — точка O пересечения перпендикуляров к граням тетраэдра, проходящих через центры описанных около них окружностей.

3. В любой тетраэдр можно вписать сферу. Ее центром I будет точка пересечения биссекторных плоскостей его двугранных углов. Сложнее выяснить, сколько существует сфер, касающихся плоскостей всех граней тетраэдра. Прежде всего отметим, что их не может быть больше 8. Действительно, так как центр такой сферы равноудален от плоскостей ABC и ABD, он лежит в биссекторной плоскости одного из двух смежных двугранных углов между этими плоскостями. Аналогичны условия равноудаленности от плоскостей ABC и ACD; ABC и BCD. Так как каждую плоскость можно выбрать 2 способами, для трех плоскостей имеем 8 возможностей. В каждом из этих 8 случаев плоскости имеют не более одной общей точки (в противном случае, например, биссекторная плоскость угла при ребре AB проходила бы через точку C, что невозможно), которая однозначно определяет сферу.

Осталось понять, действительно ли эти 8 сфер существуют. Для этого посмотрим, на какие части разбивают пространство плоскости граней тетраэдра. Очевидно, что этих частей 15:

а) внутренность тетраэдра,

б) 4 трехгранных угла с вершинами в вершинах тетраэдра,

в) 4 части, примыкающих к граням тетраэдра,

г) 6 «корытец», примыкающих к ребрам тетраэдра.

Очевидно, что в части типа б) сфера вписана быть не может, так как каждая из таких частей не пересекается плоскостью четвертой грани. Докажем, что для части типа в) вневписанная сфера существует всегда. Для этого построим вписанную в тетраэдр сферу и проведем к ней касательную плоскость, например, параллельную плоскости ABC. Она отсекает от тетраэдра гомотетичный (с центром гомотетии D) тетраэдр $A'B'C'D$. Соответствующая гомотетия переводит вписанную сферу в искомую вневписанную.

Наконец, исследуем части типа г). Пусть в такую часть, прилежащую к ребру CD, можно поместить сферу, касающуюся плоскостей всех граней, с центром K и радиусом r. Тогда

$$V_{ABCD} = V_{ABCK} + V_{ABDK} - V_{ACDK} - V_{BCDK} = \\ = \frac{r}{3}(S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}).$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования искомой сферы будет неравенство $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$. Для доказательства его достаточности заметим, что для любой точки рассматриваемого «корытца» ее расстояния a, b, c, d до плоскостей BCD, CDA, DAB, ABC

удовлетворяют соотношению

$$dS_{ABC} + cS_{ABD} - bS_{ACD} - aS_{BCD} = 3V.$$

Поэтому, для точки K с $a = b = c = r = \dfrac{3V}{S_{ABC} + S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD}}$ выполняется $d = r$.

Таким образом, если $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, вписать сферу нельзя, а если $S_{ABC} + S_{ABD} \neq S_{ACD} + S_{BCD}$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытец». Соответственно, в зависимости от того, сколько из равенств $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, $S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} - S_{BCD}$, $S_{ABC} + S_{BCD} = S_{ACD} + S_{ABD}$ выполняются, количество сфер, касающихся всех плоскостей граней тетраэдра, может быть от 5 до 8. Нетрудно построить примеры тетраэдров, реализующих указанные возможности.

Краснодарский школьник И. Шнурников нашел другое условие для определения числа вневписанных сфер.

Утверждение 1. Если $\angle ADB + \angle ACB = \angle CAD + \angle CBD$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу, а если $\angle ADB + \angle ACB \neq \angle CAD + \angle CBD$, то сферу можно вписать ровно в одно из этих двух «корытец».

Лемма 1. Пусть дан четырехгранный угол $OABCD$ и сфера, касающаяся изнутри его граней OAB, OBC и OCD. Тогда

– если $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD также касается сферы;

– если $\angle AOB + \angle COD > \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD не пересекает сферы;

– если $\angle AOB + \angle COD < \angle BOC + \angle AOD$, то плоскость OAD пересекает сферу.

Доказательство леммы 1 полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения об описанном четырехугольнике.

Доказательство утверждения 1. Найдем теперь необходимое и достаточное условие существования сферы, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD. Пусть лучи DP и DQ противоположны соответственно DA и DB, а лучи DR и DS параллельны лучам BC и AC (рис. 1). Рассмотрим любую сферу, касающуюся всех граней угла $DPQRS$, кроме, возможно, DRS. Если плоскость DRS пересекает сферу, то меняя ее радиус, можно добиться искомого касания с плоскостью ABC, а если нет — то нельзя. По лемме 1 соответствующее условие имеет вид

$$\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD.$$

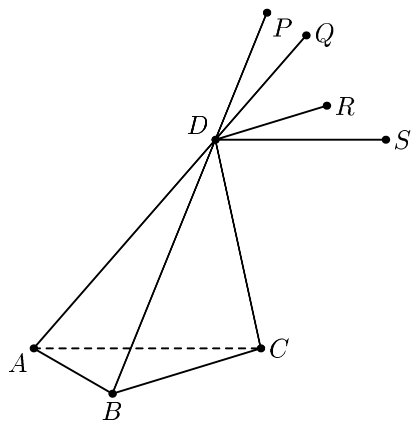


Рис. 1.

Аналогично, для ребра AB необходимым и достаточным условием будет противоположное неравенство.

Впрочем, убедиться в равносильности условий $\angle ADB + \angle ACB > \angle CAD + \angle CBD$ и $S_{ABC} + S_{ABD} > S_{ACD} + S_{BCD}$ можно непосредственно, разрезав тетраэдр по ребрам AC, BC, AD и BD на два четырехугольника с равными сторонами, но разными углами и сравнив их площади.

Отметим также следующий важный факт. Пусть I — центр вписанной сферы тетраэдра, X, Y — его проекции на ребра AC, BC, D' — точка касания сферы с гранью ABC (рис. 2). Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D'X = r \operatorname{ctg} \frac{AC}{2}$, $D'Y = r \operatorname{ctg} \frac{BC}{2}$.

Таким образом, расстояния от точки касания до сторон основания относятся как котангенсы половин двугранных углов при соответствующих

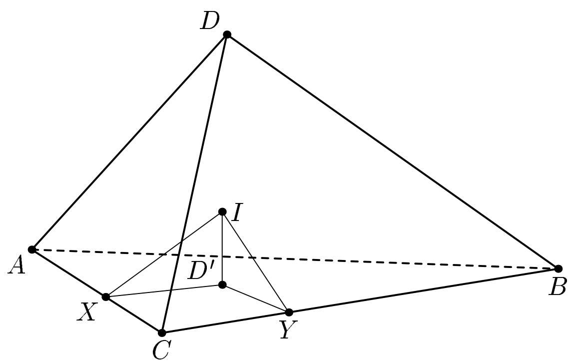


Рис. 2.

ребрах. Аналогично, если рассмотреть вневписанную сферу, касающуюся грани ABC и продолжений остальных граней, то расстояния от точки D'' ее касания с ABC до ребер основания относятся как тангенсы тех же углов. Отсюда следует, что

$$\angle D'CA = \angle D''CB, \quad \angle D'AC = \angle D''AB, \quad \angle D'BC = \angle D''BA,$$

т. е. доказано

Утверждение 2. Точки касания вписанной и вневписанной сфер изогонально сопряжены относительно соответствующей грани.

Рассмотрим теперь точку касания плоскости ABC с вневписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней. Расстояния от этой точки до BC, CA и AB относятся как $\operatorname{ctg}\dfrac{BC}{2} : \operatorname{ctg}\dfrac{AC}{2} : \operatorname{tg}\dfrac{AB}{2}$. Следовательно, для изогонально сопряженной точки отношение этих расстояний равно $\operatorname{tg}\dfrac{BC}{2} : \operatorname{tg}\dfrac{AC}{2} : \operatorname{ctg}\dfrac{AB}{2}$. Именно такое отношение получается для точки касания ABC со сферой, вписанной в «корытце», прилегающее к ребру CD (или AB). Таким образом, 8 точек касания плоскости ABC со сферами, касающимися плоскостей всех граней тетраэдра, разбиваются на 4 пары изогонально сопряженных.

Пойдем дальше. Как известно, если $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу. Это связано с тем, что точки касания сферы с плоскостями граней уходят в бесконечность. Но тогда изогонально сопряженные им точки лежат на описанных окружностях граней. Отсюда и из ранее доказанных утверждений следует

Теорема 1. Следующие условия равносильны.

а) Ни в одно из «корытец», прилегающих к ребрам AB и CD, нельзя вписать сферу.

б) $S_{ABC} + S_{ABD} = S_{ACD} + S_{BCD}$.

в) $\angle ACB + \angle ADB = \angle CAD + \angle CBD$.

г) Точка касания плоскости ABC с вневписанной сферой, касающейся грани ABD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABC.

д) Точка касания плоскости ABD с вневписанной сферой, касающейся грани ABC и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ABD.

е) Точка касания плоскости ACD с вневписанной сферой, касающейся грани BCD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около ACD.

ж) Точка касания плоскости BCD с вневписанной сферой, касающейся грани ACD и продолжений остальных граней, лежит на окружности, описанной около BCD.

з) Центр вписанной сферы лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AC, BC, AD, BD.

Последнее условие найдено С. Л. Берловым. Его равносильность условию б) следует из того, что центр вписанной сферы является выпуклой линейной комбинацией вершин тетраэдра с коэффициентами, пропорциональными площадям противоположных граней.

Из теоремы 1 можно получить множество красивых следствий. Вот одно из них.

Если точки касания одной из вневписанных сфер с плоскостями трех граней тетраэдра лежат на описанных окружностях этих граней, то то же верно для трех других вневписанных сфер (соответствующий тетраэдр называется *равногранным*, так как все его грани — равные треугольники. О равногранных тетраэдрах можно прочесть в статье [2]).

Может возникнуть вопрос: почему в качестве аналога вписанной окружности треугольника мы решили взять сферу, касающуюся всех граней тетраэдра, а не всех его ребер. Дело в том, что последняя сфера существует не всегда. Действительно, пусть сфера касается ребер тетраэдра в точках X, Y, Z, U, V, W (рис. 3). Тогда $AX = AU = AW = a$, как касательные, проведенные к сфере из одной точки. Аналогично, $BY = BU = BV = b$, $CZ = CV = CW = c$, $DX = DY = DZ = d$. Следовательно, $AB + CD = AC + BD = AD + BC = a + b + c + d$, т. е. необходимым условием существования искомой сферы является равенство сумм

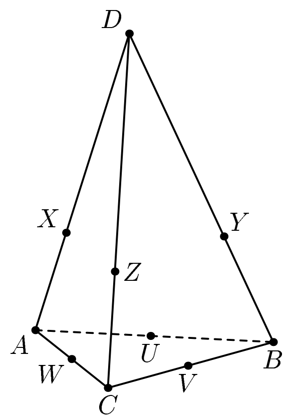


Рис. 3.

противоположных ребер тетраэдра. Как показано в [2], это условие будет и достаточным.

Тетраэдры, для которых существует сфера, касающаяся всех его ребер, называются *каркасными*. В [2] приводится следующий перечень равносильных каркасности свойств:

а) тетраэдр является каркасным;

б) суммы противоположных ребер равны;

в) суммы противоположных двугранных углов равны;

г) окружности, вписанные в грани, попарно касаются;

д) любой четырехугольник, образованный на развертке тетраэдра двумя его гранями, описанный;

е) перпендикуляры к граням, восставленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Ниже будет показано, что этот список можно дополнить.

4. Высоты пересекаются в одной точке не для всех тетраэдров, а лишь для некоторого специального класса — *ортоцентрических* тетраэдров. В [3] доказываются следующие условия, эквивалентные ортоцентричности:

а) противоположные ребра тетраэдра перпендикулярны;

б) суммы квадратов противоположных ребер равны;

в) основание любой высоты тетраэдра совпадает с ортоцентром противоположной грани.

Отметим также, что для ортоцентрических тетраэдров существует аналог прямой Эйлера: точка пересечения высот H, центр тяжести M и центр описанной сферы O лежат на одной прямой и $OM = OH$.

В [3] описан еще один класс тетраэдров. Тетраэдр называется *инцентрическим*, если отрезки, соединяющие его вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней, пересекаются в одной точке. Для этого необходимо и достаточно, чтобы произведения противоположных ребер были равны.

Новые факты

Выясним теперь, в каких тетраэдрах существуют аналоги точек Жергонна и Нагеля. Для этого будет полезной следующая

Лемма 2. Пусть точка C' лежит в грани ABD тетраэдра $ABCD$, а точка D' — в грани ABC. Отрезки CC' и DD' пересекаются тогда и только тогда, когда $S_{ACD'}S_{BDC'} = S_{BCD'}S_{ADC'}$.

Доказательство. Для того, чтобы CC' и DD' пересекались, необходимо и достаточно, чтобы точки C, D, C' и D' лежали в одной плоскости.

Пусть X — точка пересечения этой плоскости с отрезком AB. Тогда отрезки CD' и DC' пересекаются в точке X, и значит

$$\frac{S_{ACD'}}{S_{BCD'}} = \frac{S_{ACX} - S_{AD'X}}{S_{BCX} - S_{BD'X}} = \frac{AX}{BX} = \frac{S_{ADC'}}{S_{BDC'}},$$

что равносильно утверждению леммы.

Теперь определим условия пересечения двух отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, например отрезков CC' и DD'. Из рис. 2 видно, что $S_{ACD'} = AC \times D'X = AC \times r/\operatorname{tg}\dfrac{\widehat{AC}}{2}$. Выписав аналогичные соотношения для площадей треугольников BCD', ADC', BDC' и применив лемму 2, получим условие пересечения.

$$AC \times BD/\operatorname{tg}\frac{\widehat{AC}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{BD}}{2} = AD \times BC/\operatorname{tg}\frac{\widehat{AD}}{2}\operatorname{tg}\frac{\widehat{BC}}{2}.$$

Это условие можно упростить, воспользовавшись тем, что в трехгранном угле синусы плоских углов относятся так же, как синусы противолежащих им двугранных. Соответственно, имеем

$$\frac{AC \times BD}{AD \times BC} = \frac{\sin\widehat{ABC}\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{BAC}\sin\widehat{ABD}} = \frac{\sin\widehat{AC}\sin\widehat{BD}}{\sin\widehat{BC}\sin\widehat{AD}},$$

и после преобразований условие пересечения принимает вид

$$\cos\frac{\widehat{AC}}{2}\cos\frac{\widehat{BD}}{2} = \cos\frac{\widehat{AD}}{2}\cos\frac{\widehat{BC}}{2}.$$

Отсюда, очевидно, следуют два утверждения.

Утверждение 3. Пусть вписанная сфера касается граней тетраэдра в точках A', B', C', D'. Если отрезки AA' и BB' пересекаются, то отрезки CC' и DD' также пересекаются.

Назовем тетраэдр *жергонновым*, если отрезки, соединяющие его вершины тетраэдра с точками касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке.

Утверждение 4. Тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда произведения косинусов половин его противоположных двугранных углов равны.

Рассуждая аналогично, найдем условия, при которых выполнен аналог свойства 6. Такие тетраэдры будем называть тетраэдрами Нагеля.

Утверждение 5. Пусть вневписанные сферы касаются граней тетраэдра в точках A', B', C', D'. Если отрезки AA' и BB' пересекаются, то отрезки CC' и DD' также пересекаются.

Утверждение 6. Тетраэдр является нагелевым тогда и только тогда, когда произведения синусов половин его противоположных двугранных углов равны.

Утверждения 3–6 были доказаны учеником автора, школьником московской гимназии 1543 Д. Косовым. На XV Летней конференции турнира городов школьники М. Исаев (Барнаул) и В. Филимонов (Екатеринбург) обнаружили еще одно свойство тетраэдров Жергонна.

Утверждение 7. Тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда любое его ребро видно из точки касания вписанной сферы с содержащей это ребро гранью под углом $120°$. Таким образом, в жергонновом тетраэдре точки Торричелли всех граней совпадают с точками касания граней и вписанной сферы.

Доказательство. Докажем сначала, что если для одной грани тетраэдра точка ее касания с вписанной сферой совпадает с точкой Торричелли, то это верно и для остальных граней. Пусть A', B', C', D' — точки касания вписанной сферы с гранями BCD, CDA, DAB, ABC, и $\angle AD'B = \angle BD'C = \angle CD'A = 120°$. Так как касательные к сфере из одной точки равны, $AD' = AC'$, $BD' = BC'$, то треугольники ABD' и ABC' равны и $\angle AC'B = \angle AD'B = 120°$. Аналогично, $\angle BA'C = \angle CB'A = 120°$. Далее, $\angle AB'D = \angle AC'D$, $\angle BC'D = \angle BA'D$, $\angle CA'D = \angle CB'D$ и $\angle AB'D + \angle CB'D = \angle BC'D + \angle AC'D = \angle CA'D + \angle BA'D = 240°$, откуда следует, что все эти углы равны $120°$.

Пусть теперь точки касания C' и D' — точки Торричелли соответствующих граней. Так как прямые CD' и DC' являются биссектрисами углов $AD'B$ и $AC'B$, они пересекают ребро AB в точке X, такой что $\frac{AX}{BX} = \frac{AC'}{BC'} = \frac{AD'}{BD'}$. Следовательно, точки C, D, C', D' лежат в плоскости CDX, и отрезки CC' и DD' пересекаются. Любые другие два отрезка также пересекаются, а так как четыре отрезка не лежат в одной плоскости, точка пересечения одна и та же. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Очевидно, утверждение 7 можно переформулировать следующим образом: тетраэдр является жергонновым тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие вершины с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке. Все приведенные выше результаты объединяет следующая

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

а) Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра и точки касания противоположных граней с вписанной сферой, пересекаются в одной точке.

б) Произведения косинусов половин противоположных двугранных углов равны.

в) Точка касания одной из граней тетраэдра с вписанной сферой является точкой Торричелли этой грани.

г) Точки касания всех граней тетраэдра с вписанной сферой являются точками Торричелли этих граней.

д) Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками Торричелли противоположных граней, пересекаются в одной точке.

е) Проекции центра вневписанной сферы на ребра соответствующей грани образуют равносторонний треугольник.

ж) Тетраэдр, образованный точками касания вписанной сферы с гранями, инцентрический.

Равносильность условий е) и г) следует из того, что точки касания грани с вписанной и вневписанной сферами сопряжены, а точка Торричелли изогонально сопряжена с точкой Аполлония; условий б) и ж) — из того, что, например, $A'B' = 2r\cos\dfrac{CD}{2}$.

Выясним теперь, чем является точка Жергонна тетраэдра $ABCD$ для тетраэдра $A'B'C'D'$. Поскольку отрезки CC' и DD' пересекаются, прямые CD и $C'D'$ лежат в одной плоскости. Рассмотрим плоскость $A'B'C'$. Она пересекает вписанную сферу $ABCD$ по окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, плоскости BCD и ACD — по прямым, касающимся этой окружности в точках A' и B' и пересекающимся в некоторой точке Q, а плоскость $CDC'D'$ — по прямой $C'Q$. Нетрудно доказать, что тогда прямая CQ будет симедианой треугольника $A'B'C'$ (т. е. прямой, симметричной медиане, проведенной из вершины C', относительно биссектрисы, проведенной из той же вершины). Следовательно, прямая DD' пересекает грань $A'B'C'$ в точке, лежащей на симедиане. Аналогично точка пересечения лежит на двух других симедианах, т. е. является точкой Лемуана треугольника $A'B'C'$. Точно так же доказывается, что прямые AA', BB', CC' проходят через точки Лемуана граней $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$. Отметим, что по лемме 2 прямые, соединяющие вершины тетраэдра и точки Лемуана противоположных граней, пересекаются тогда и только тогда, когда тетраэдр является инцентрическим. Таким образом, доказана

Теорема 3. Если тетраэдр $ABCD$ жергоннов, то тетраэдр $A'B'C'D'$, образованный точками касания его граней с вписанной сферой, инцентрический, и точка Жергонна $ABCD$ совпадает с точкой пересечения прямых, соединяющих вершины $A'B'C'D'$ с точками Лемуана противоположных граней.

Теорема 3 является аналогом планиметрического утверждения о совпадении точки Жергонна треугольника и точки Лемуана треугольника, образованного точками касания его сторон с вписанной окружностью.

Для тетраэдров Нагеля пока не найдено никаких условий, отличных от задаваемых утверждением 6. Неизвестно также, лежит ли точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки касания его граней с вневписанными сферами, на прямой, проходящей через центр тяжести тетраэдра и центр его вписанной сферы. Возможно, впрочем, что какой-то аналог этого свойства выполняется для другого класса тетраэдров.

В заключение отметим следующее. Может показаться, что еще один класс тетраэдров задает условие пересечения в одной точке отрезков, соединяющих вершины тетраэдра и точки Жергонна противоположных граней. Однако, применив лемму 2, нетрудно убедиться, что это условие задает каркасные тетраэдры. Действительно, в этом случае, например, $\dfrac{S_{ACD'}}{S_{BCD'}} = \dfrac{AB+AC-BC}{AB+BC-AC}$. Подставив это и аналогичные выражения в лемму, после преобразований получим $AC+BD = AD+BC$. То же получится и при замене точек Жергонна точками Нагеля.

Прежде чем пытаться строить трехмерные точки Лемуана, Торричелли и Аполлония, определим для тетраэдров аналоги изотомического и изогонального сопряжения. Для изотомического сопряжения сделать это несложно.

Утверждение 8. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P. A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения прямых AP, BP, CP, DP с противоположными гранями тетраэдра, A_2, B_2, C_2, D_2 — точки, изотомически сопряженные A_1, B_1, C_1, D_1 относительно граней. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2, DD_2 пересекаются в одной точке.

Это утверждение сразу следует из леммы 2. Полученную точку естественно назвать *изотомически сопряженной* к P. Впрочем, изотомическое сопряжение даже на плоскости не обладает особо интересными свойствами, так что и в пространстве трудно ожидать получения каких-либо ценных результатов.

Определим теперь изогональное сопряжение в пространстве относительно тетраэдра $ABCD$. Прежде всего отметим следующий факт.

Утверждение 9. Пусть дан тетраэдр $ABCD$ и точка P. Тогда 6 плоскостей, симметричных плоскостям ABP, ACP, BCP, ADP, BDP, CDP относительно биссекторных плоскостей соответствующих двугранных углов, пересекаются в одной точке.

Для доказательства достаточно заметить, что если расстояния от P до граней тетраэдра относятся как $a : b : c : d$, то каждая из рассматриваемых плоскостей проходит через точку, расстояния от которой до тех же граней относятся как $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{d}$.

Определенную таким образом точку P' назовем *изогонально сопряженной* P относительно $ABCD$. Покажем теперь, что, как и в плоском случае, существует другой способ ее определения.

Утверждение 10. Пусть A', B', C', D' — проекции точки P на плоскости BCD, CDA, DAB, ABC. Тогда перпендикуляры, опущенные из A на $B'C'D'$, из B на $C'D'A'$, из C на $D'A'B'$, из D' на $A'B'C'$ пересекаются в изогонально сопряженной P точке P'.

Прежде всего докажем следующий, имеющий самостоятельную ценность факт.

Лемма 3. Пусть даны два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Перпендикуляры, опущенные из A' на BCD, из B' на CDA, из C' на DAB, из D' на ABC пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда «антисоответственные» ребра этих тетраэдров (например, $A'B'$ и CD) перпендикулярны.

Доказательство. Пусть P — точка пересечения перпендикуляров. Так как $PA' \perp BCD$ и $PB' \perp CDA$, то $PA' \perp CD$ и $PB' \perp CD$. Следовательно, $CD \perp PA'B'$ и $CD \perp A'B'$.

Обратно, пусть «антисоответственные» ребра перпендикулярны. Тогда перпендикуляры из A' на BCD и из B' на ACD лежат в плоскости, проходящей через $A'B'$ и перпендикулярной CD, и, значит, пересекаются. Аналогично пересекаются два любых других перпендикуляра, и так как четыре перпендикуляра не лежат в одной плоскости, все они проходят через одну точку.

Доказательство утверждения 10. Из леммы 3 сразу следует, что если перпендикуляры из вершин одного тетраэдра на грани другого пересекаются, то и перпендикуляры из вершин второго на грани первого тоже пересекаются. Поэтому осталось доказать, что в условиях утверждения точкой пересечения будет именно P'.

Плоскость $PC'D'$ перпендикулярна ребру AB. Поэтому, если она пересекает AB в точке Q, то $C'QD'$ — линейный угол угла AB. Перпендикуляр, опущенный из A на $B'C'D'$, перпендикулярен $C'D'$, значит, линия пересечения плоскости π, проходящей через этот перпендикуляр и AB, с $C'D'X$ также перпендикулярна $C'D'$ по теореме о трех перпендикулярах. Отсюда и из свойства 1 плоского изогонального сопряжения, следует, что π проходит через P'. Утверждение доказано.

Исследуем теперь свойства изогонального сопряжения. Очевидно, что как и на плоскости, центры вписанной и вневписанных сфер сопряжены сами себе. Не представляет также труда доказать, что центр тяжести M изогонально сопряжен точке L, для которой сумма квадратов расстояний до граней тетраэдра минимальна. Эту точку можно считать точкой Лемуана тетраэдра. С другой стороны, точки, изогонально сопряженные бесконечно удаленным, лежат не на описанной сфере, а на некоторой поверхности третьего порядка. Вопрос об изогональной сопряженности точек O и H, очевидно, имеет смысл ставить лишь для ортоцентрических тетраэдров. Впрочем, с помощью утверждения 10 легко доказывается, что даже для них ответ будет положителен, только если тетраэдр правильный. Какими свойствами обладает точка, изогонально сопряженная O, в общем случае, непонятно.

Наконец, попробуем разобраться с точками Торричелли и Аполлония. Судя по всему, единственный перспективный путь — найти точку, минимизирующую сумму расстояний до вершин тетраэдра. Для этого проведем механическое рассуждение, аналогичное плоскому.

Пропустим через вершины тетраэдра четыре веревки, свяжем их внутренние концы в узел, а за внешние будем тянуть в одном направлении с равными силами. Если узел не проскочит через одну из вершин, то остановится в искомой точке T, причем сумма действующих на него сил будет равна нулю. Исследуем свойства этой точки.

Пусть $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_4}$ — единичные векторы, направленные из T в направлении A, B, C, D. Имеем

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3}=-\boldsymbol{e_4}\\ (\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3})=\mathbf{1}\\ (\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})+(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})+(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3})=-\mathbf{1},\end{gathered}$$

т. е. для любых трех векторов $\boldsymbol{e_i}$ сумма косинусов углов между ними равна -1. Далее

$$(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_4})=-(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3})=-\mathbf{1}-(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2})-(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_3})=(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}).$$

Это означает, что из точки T противоположные ребра тетраэдра видны под равными углами. Отсюда следует, что трехгранные углы $TABC$, $TCDA$, $TBAD$ и $TDCB$ равны. Так как их объединение совпадает со всем пространством, каждый из них высекает на единичной сфере с центром T область площади π, и, значит, сумма его двугранных углов равна 2π. Соответственно, для того чтобы узел не провалился в вершину тетраэдра, нужно чтобы сумма двугранных углов в любой вершине была меньше 2π (или сумма косинусов плоских углов больше -1). Подведем итог нашим рассуждениям.

Теорема 4. Если в любой вершине тетраэдра $ABCD$ сумма двугранных углов меньше 2π, то внутри тетраэдра существует точка T, из которой противоположные ребра тетраэдра видны под равными углами. При этом сумма расстояний от вершин тетраэдра до точки T меньше, чем до любой другой точки пространства.

Найденную точку T можно считать трехмерным аналогом первой точки Торричелли. Аналогично плоскому случаю доказывается, что проекции изогонально сопряженной ей точки T' на грани тетраэдра образуют равногранный тетраэдр. Поэтому точку T' можно считать аналогом точки Аполлония. Невыясненными остаются следующие вопросы.

1. Как определить точку Торричелли для тетраэдра, сумма двугранных углов при одной из вершин которого больше 2π?

2. Сколько существует точек, проекции которых на грани тетраэдра образуют равногранный тетраэдр, и какими свойствами обладают сопряженные к ним? (Эти точки задаются системой трех уравнений второй степени, следовательно, их не более 8. Но не исключено, что число действительных и конечных среди них всегда меньше.)

3. Обладают ли точки Аполлония еще какими-либо свойствами, аналогичными плоским?

Возможно, ответы на эти вопросы удастся найти читателям.

Список литературы

[1] C. Kimberling. *Encyclopedia of Triangle Centers.* `http://cedar.evansville.edu/~ck6/encyclopedia/`

[2] Матизен В. *Равногранные и каркасные тетраэдры* // Квант №7, 1983.

[3] Матизен В., Дубровский В. *Из геометрии тетраэдра* // Квант №9, 1988.

Бильярдная формула для измерения расстояний в геометрии Лобачевского

Г. А. Гальперин

1. О «бильярдной» формуле и бильярдной задаче

Целью настоящей статьи является простая формула для измерения расстояний в пространстве Лобачевского, использующая биллиардный шар (формула (2) на с. 107). Поэтому автор назвал эту формулу «бильярдной». О чем эта формула, мы расскажем позже, после формулировки и обсуждения задачи о бильярдном отражении, к решению которой бильярдная формула будет применена. К своему удивлению, автор обнаружил, что бильярдная формула неизвестна даже специалистам-геометрам, хотя им и известны другие, ей эквивалентные, но не столь простые формулы для длин отрезков в геометрии Лобачевского. Соответственно, и доказательства этих эквивалентных, но «не простых» формул, не совсем просты (все они использует элементы комплексного анализа). Приводимое в настоящей статье доказательство бильярдной формулы не будет выходить за рамки элементарной школьной математики; только один раз нам понадобится — и то исключительно по необходимости и для полноты изложения! — формула, использующая интеграл, которую читатель при первом чтении может пропустить.

Бильярдная формула возникла у автора так.

При исследовании автором специальной динамической системы у него сама собой появилась геометрическая задача, которая никак не поддавалась (и не поддалась до самого конца!) решению в рамках евклидовой геометрии. Эта задача приведена в части 3 этой статьи, и читатель сможет сам оценить ее трудность, попытавшись решить ее самостоятельно.

В результате долгого обдумывания автор вдруг совершенно неожиданно увидел всю геометрическую картину в абсолютно новом свете, после чего решение задачи пришло к нему практически мгновенно. Одним из ключей к ее решению оказалась упомянутая выше бильярдная формула для измерения расстояний в пространстве Лобачевского.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 8, 2004(93–112)

Другим, и, по мнению автора, более важным, ключом к решению оказалась полная смена точки зрения на исходный геометрический объект. Именно она и сыграла решающую роль.

В результате продумывания эффекта «смены точки зрения» автору показалось уместным предварить обсуждение основной темы статьи небольшим лирическим отступлением, в котором на нескольких примерах коротких, но необычных и ярких (а кому-то, возможно, и хорошо известных) задач показано, как одна только смена точки зрения сразу приводит к их решению. Читатели, которым хочется поскорее познакомиться с основной задачей статьи и бильярдной формулой, могут безо всякого для себя ущерба перепрыгнуть сразу в часть 3 статьи.

2. Лирическое отступление: о пользе смены точки зрения

В науке часто случается так (а к математике это относится, пожалуй, в бо́льшей степени), что одна только смена точки зрения на предмет позволяет полностью решить трудную задачу или даже изменить лицо этой (а, возможно, и смежной) науки. Достаточно упомянуть создание таблицы Менделеева (математические свойства которой отражают многочисленные химические законы); три стадии прохождения классической механики (ньютонова, лагранжева и гамильтонова); смену классической механики на релятивистскую (после обнаружения постоянства скорости света во всех инерциальных системах отсчета); почти дословный перенос принципов классической механики на оптику; создание генетики (введением вероятностных законов в биологию); возникновение квантовой механики (после того как оказалось, что матричное описание физических процессов на атомном уровне совпадает с волновым описанием); и многое другое.

В этом отступлении мне хотелось бы подтвердить тезис о пользе и плодотворности смены точки зрения на нескольких простых и ярких примерах решения задач из элементарной математики (все они взяты из олимпиадного фольклора), которым и посвящена оставшаяся часть этого параграфа.

Пример 1. *Фиксируем в произвольном выпуклом многоугольнике какую-нибудь внутреннюю точку P и опустим из нее перпендикуляры на прямые, содержащие стороны многоугольника. Доказать, что основание хотя бы одного из перпендикуляров попадет на сторону, а не на ее продолжение. Аналогичный вопрос про выпуклый многогранник (произвольной размерности).*

Если посмотреть на многоугольник (или, в общем случае, на многогранник) как на физический объект, заполненный веществом таким

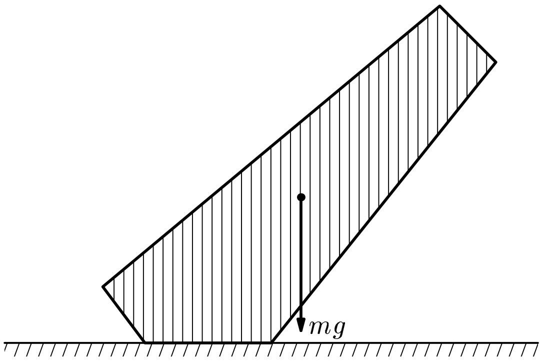


Рис. 1.

образом, что центр тяжести этого вещества находится в зафиксированной точке P, то с ним можно провести следующий эксперимент: поставить его на горизонтальный стол в поле тяжести и посмотреть, что получится. Предположим, что справедливо утверждение, противоположное доказываемому. Тогда перпендикуляр, опущенный из P на любую сторону многоугольника, выходит за пределы многоугольника. Следовательно, многоугольник на столе перекатится под действием силы тяжести на смежную сторону. Но перпендикуляр, опущенный на новую сторону, также выходит за ее пределы, поэтому многоугольник перекатится еще раз. Такое перекатывание будет происходить вновь и вновь — до бесконечности, и мы получаем вечный двигатель, которого, согласно физике, не существует (см. рис. 1). Полученное противоречие и дает доказательство утверждения.

Возможно, вам не понравилось приведенное физическое рассуждение. (Откуда, собственно, известно, что не существует вечного двигателя? Из многовекового опыта человечества? А вдруг завтра такой двигатель появится? Сошлемся здесь на то, что существование вечного двигателя противоречит закону сохранения энергии — это можно доказать чисто математически.) Приведенное доказательство можно модернизировать: если многоугольник перекатился на соседнюю сторону, то центр тяжести понизился (потому что была совершена работа силы тяжести по перекатыванию). А вечно понижаться центр тяжести не может, число понижений не может превосходить числа сторон многоугольника, уменьшенного на единицу: многоугольник остановится, когда центр тяжести окажется в наинизшем положении. (Вспомните, как падает кирпич, стоящий на своей самой маленькой грани: если вы его толкнете, он упадет на другую грань и окажется в более устойчивом положении. Если же его можно толкнуть еще раз, то в этот последний раз он упадет на свою грань наибольшей площади и больше падать не сможет. В устойчивом положении центр тяжести кирпича наинизший возможный.)

Еще одно маленькое усилие, и приведенное «физическое» рассуждение становится чисто математическим: забыв о центре тяжести, рассмотрим ту сторону многоугольника, расстояние до которой от точки P наименьшее. Тогда перпендикуляр, опущенный из P на эту сторону, попадает именно на нее, а не на ее продолжение! Потому что в противном случае легко увидеть из рисунка, что точка P была бы ближе к соседней, смежной с ней стороне многоугольника, и отмеченная сторона оказалась бы не наиближайшей к P.

Приведенное довольно длинное рассуждение, опуская детали, можно выразить одной фразой: если допустить противное, то из многоугольника можно было бы получить вечный двигатель, что дает противоречие. Простая смена точки зрения: «многоугольник — это физический объект в поле тяжести», сразу приводит к прозрачному видению всей картины и к очевидному доказательству, по своей структуре напоминающему древнегреческое «Смотри!» (Замена слова «многоугольник» на «многогранник» решения не меняет.)

Пример 2. *Доказать, что у любого выпуклого трехмерного многогранника всегда найдутся две грани с равным числом сторон.*

Большинство известных мне решателей этой задачи мгновенно привлекало формулу Эйлера для многогранника: $V - E + F = 2$, и далее... ничего не происходило. Оказывается, приведенная задача вовсе не по геометрии, а по арифметике! (См. рис. 2).

Как только поймешь это, решение приходит тотчас же. Действительно, забыв о геометрии, допустим, что все грани имеют разное число сторон и что n — наибольшее возможное число сторон у грани. К этой грани примыкает n других граней многогранника, у любых двух из которых числа сторон различные (по предположению), причем все они строго меньше n (по тому же самому предположению). Однако количество натуральных

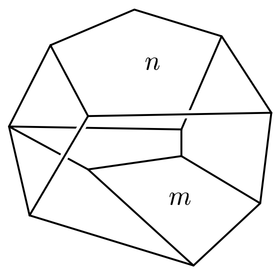


Рис. 2.

чисел, меньших n, строго меньше n, и мы получаем противоречие. (На самом деле наименьшим возможным натуральным числом в данной ситуации является 3 (треугольник), а не 1, и противоречие еще более усугубляется).

Пример 3. *Доказать, что если среди следующих шести чисел:* $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ *нет нулевых, то по крайней мере одно из них положительно.*

Здесь, наоборот, точку зрения следует сменить с алгебраической на геометрическую. Для этого надо «увидеть», что шесть указанных чисел — это всевозможные скалярные произведения четырех двумерных векторов $\mathbf{v}_1 = (a, b)$, $\mathbf{v}_2 = (c, d)$, $\mathbf{v}_3 = (e, f)$ и $\mathbf{v}_4 = (g, h)$. Пусть эти вектора расположены на плоскости, как показано на рис. 3.

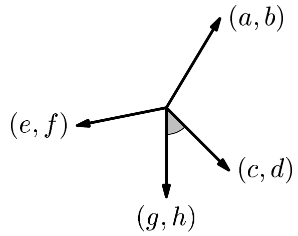


Рис. 3.

Все шесть скалярных произведений не могут быть отрицательными числами — это обстоятельство соответствовало бы четырем тупым углам между соседними векторами, а тогда сумма этих четырех углов превосходила бы $360°$ (хотя она равна в точности $360°$), и мы получили бы противоречие. Следовательно, между какими-то векторами угол острый, поэтому его косинус положительный, и, стало быть, скалярное произведение этих векторов — одно из заданных чисел — положительно.

Пример 4. *Имеется некоторое (заранее неизвестное) количество мешков с неограниченным запасом золотых монет в каждом. В каких-то мешках все монеты настоящие и весят по* 6 *грамм, а в остальных мешках все монеты фальшивые и весят по* 5 *грамм. Заранее неизвестно, в каких мешках находятся настоящие монеты, а в каких фальшивые (рис. 4). Разрешается взять произвольное число монет из одного или из нескольких мешков и найти их общий вес на весах со стрелкой. Какое минимальное число взвешиваний следует сделать, чтобы определить все мешки с фальшивыми монетами?*

Простейшая процедура по выявлению всех фальшивых мешков такова: взвешиваем одну монету из первого мешка, потом одну монету из второго

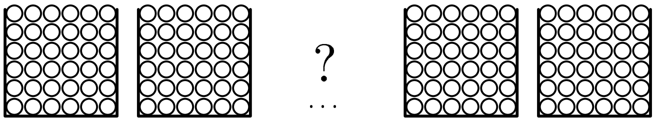


Рис. 4.

мешка, и так далее, вплоть до последнего мешка, определяя на каждом шаге, с каким мешком мы имеем дело — с настоящим или фальшивым. И на первый взгляд кажется, что минимальное число взвешиваний равно числу мешков.

Однако ответ в этой задаче совершенно неожиданный: минимальное число взвешиваний не зависит от числа мешков и равно единице! Как же всего за одно взвешивание определить сразу все фальшивые мешки? И что это за взвешивание, в которое, очевидно, должны быть вовлечены сразу все имеющиеся мешки?

Широко известна аналогичная задача, в которой условие из примера 4 ослаблено: известно, что только *один* мешок содержит фальшивые монеты. В этой задаче единственное взвешивание осуществляется так: нумеруем все мешки от первого до последнего, затем из каждого мешка достаем столько монет, каков номер этого мешка, после чего взвешиваем все выбранные монеты на весах. Если бы фальшивых монет не было вовсе, весы показали бы (численно, в граммах) в 6 раз бо́льший вес, чем число выложенных на весы монет; однако какие-то k монет (из мешка с номером k) фальшивые и весят $5k$ грамм вместо $6k$ грамм, так что весы на самом деле показывают на k грамм меньше. Итак, номер k мешка с фальшивыми монетами тут же становится известным как разность двух чисел: того веса, который должен был бы быть, и реального, показываемого стрелкой весов.

Однако такой трюк не проходит, если число «фальшивых» мешков два или больше: указанная выше разность двух чисел равна сумме номеров всех фальшивых мешков и не дает возможности определить каждый мешок по-отдельности. Похоже, что одним взвешиванием тут не обойтись. Тем не менее, одного взвешивания, как и раньше, оказывается достаточно!

Идея решения становится почти очевидной, если сменить точку зрения и вспомнить о системах счисления. Поскольку каждое натуральное число записывается однозначно в системе счисления с данным основанием b, надо занумеровать мешки от 0 до $n-1$ (где n число мешков, пока что тоже неизвестное) и выбрать b^k монет из мешка с номером k. Легко сообразить (проще всего для десятичной системы счисления, $b = 10$), что вместо стандартного веса $P = 6 \cdot (1 + b + \ldots + b^n)$ стрелка весов остановится на весе, разность которого с P в b-ичной системе счисления будет выражаться числом, целиком состоящим из нулей и единиц. Места, на которых стоят единицы, как раз и соответствуют номерам фальшивых мешков!

Пример 5. *На прямой расположено* 500 *одинаковых бильярдных шаров*: 200 *из них катятся слева направо с одной и той же скоростью* v, *а* 300 *остальных — справа налево с той же скоростью* v (*рис.* 5). *Между шарами начинают происходить упругие столкновения, после ка-*

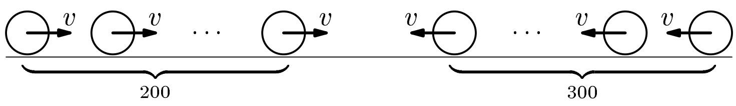


Рис. 5.

ждого из которых столкнувшиеся шары меняют направления своих движений на противоположные, но не меняют своих скоростей. (*Расстояния между соседними шарами могут быть произвольными, так что порядок столкновения шаров заранее неизвестен.*) *Конечно или бесконечно число столкновений в этой системе? Если конечно, то каким оно может быть?*

Занумеруем все шары слева направо от 1 до 500. Следить за последовательностью столкновений шаров практически нереально: даже фиксировав все соседние расстояния, будет трудно уследить порядок, в котором эти столкновения происходят. Лучше сменить точку зрения: вместо того, чтобы следить за парой столкнувшихся и затем разлетевшихся шаров, будем считать, что эти два шара просто проникли друг сквозь друга как бесплотные тела, обменявшись своими номерами. От такой смены точки зрения картина движения шаров не изменится (а номера шаров нас интересуют постольку-поскольку), однако изменится наше отношение к этой картине и мы сможем ответить на оба поставленных вопроса одновременно. Мы видим, что с новой точки зрения достаточно найти число проникновений шаров друг сквозь друга. Таких проникновений, очевидно, будет $200 \times 300 = 60000$, поскольку каждый правый шар прошел сквозь каждый левый (при этом по отдельности шары как в левой группе, так и в правой не взаимодействуют между собой). Итак, число столкновений в системе шаров всегда *конечно* и равно 60000, независимо от первоначальных расстояний между ними и от последовательности их столкновений.

Указанную систему из движущихся одинаковых бильярдных шаров можно рассматривать, после приведенного рассуждения, как примитивный калькулятор, производящий умножение двух натуральных чисел: числа шаров, движущихся влево, на число шаров, движущихся вправо.

Пример 6. *Предположим, ваш друг задумал несколько произвольных натуральных чисел (среди которых могут быть и повторяющиеся), а вы хотите все их угадать (заодно определив и их количество), причем именно в том порядке, в каком он эти числа задумал (т. е. угадать весь вектор целых чисел). Вам разрешается попросить друга сделать произвольное вычисление, связанное с его числами, например, попросить его найти произведение или сумму некоторых из них, или же более сложную комбинацию. Каждое такое вычисление, когда на выходе получается* натуральное *число, будем называть «ходом». (Другой вариант задачи: на каждом ходе результатом вычисления должно оказываться* нецелое *число). За какое наименьшее число ходов вы сможете наверняка определить задуманный вектор?*

И в этой задаче (как и в чем-то похожей на нее задаче из примера 4 о фальшивых мешках) ответ: *всего за один ход*! Сначала разберем первую постановку задачи, когда результат вычисления на каждом ходе — целое число. Если посмотреть на эту задачу глазами логика, знающего о гёделевской нумерации всех формально-логических формул вывода в арифметике (такая нумерация возникает при доказательстве теоремы Гёделя о неполноте арифметики), то ответ «за один ход» очевиден: если задуман вектор чисел $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где k — количество задуманных чисел, то следует попросить друга вычислить число $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, …, p_k — первые k последовательных простых чисел. (Естественно, что, поскольку количество задуманных чисел неизвестно, следует попросить друга сделать указанную операцию словесно: «Возьми подряд столько простых чисел, сколько чисел ты задумал, возведи каждое простое число в степень, равную соответствующему задуманному тобой числу, перемножь полученные результаты и сообщи мне ответ.») Известно, что разложение любого натурального числа на простые множители однозначно и единственно (этот факт — основная теорема арифметики), поэтому представление N в указанном выше виде дает единственную возможность для нахождения координат вектора $\mathbf{n}$.

Если же ограничиваться только нецелыми результатами вычислений, то достаточно вместо числа N попросить вычислить, скажем, его обратное N^{-1}: тогда определится вектор $(-\mathbf{n})$, а с ним и искомый вектор $\mathbf{n}$. Или же, можно попросить друга вычислить число N/p_{k+1} (где p_{k+1} — это непосредственно идущее простое число за уже выбранными простыми p_1, p_2, …, p_k), и по нему однозначно найти вектор $\mathbf{n}$. Прямо или косвенно все такие вычисления основаны на идее гёделевской нумерации.

Однако человеку, не знакомому с гёделевской нумерацией, стоит сменить точку зрения по-другому: вспомнить о цепных дробях и попросить друга вычислить цепную дробь

$$\alpha = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \ldots + \cfrac{1}{m_k}}},$$

где каждое $m_i = n_i + 1$. (Опять же, вычисление цепной дроби надо сформулировать словесно, аналогично словесной формулировке гёделевского номера вектора $\mathbf{n}$.)

Знаменатели m_1, m_2, $\ldots$, m_k цепной дроби восстанавливаются по числу α однозначно: m_1 — это целая часть α; m_2 — это целая часть $\beta = 1/(\alpha - m_1)$; m_3 — это целая часть $1/(\beta - m_2)$; и т. д. Неопределенность в определении набора $\{m_i\}$ могла бы случиться только на последнем шаге, когда мы определили последнее целое число, равное, скажем, M, и не знаем, какой вывод из этого сделать: то ли $m_k = M$, то ли $m_{k-1} = M - 1$ и $m_k = 1$. К счастью, никакой неопределенности здесь нет: мы для того-то и прибавили вначале ко всем задуманным $\{n_i\}$ по единичке, чтобы получить числа $m_i \geqslant 2$, а тогда вторая возможность в указанной дихотомии не может реализоваться. Итак, вектор $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$, а вместе с ним и искомый вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_k) = (m_1 - 1, m_2 - 1, ..., m_k - 1)$, а заодно и количество координат k каждого из них определяются описанным вычислением однозначно.

Этим необычным способом мы вторично находим весь вектор $\mathbf{n}$.

Пример 7. *Найти все целочисленные решения диофантова уравнения*

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})^{2004} + (a_2 + b_2\sqrt{2})^{2004} + \ldots + (a_{100} + b_{100}\sqrt{2})^{2004} = 5000 + 4000\sqrt{2}.$$

Раскроем все скобки слева и соберем отдельно все целые числа и отдельно все целые, умноженные на $\sqrt{2}$. Первая сумма будет равна 5000, вторая 4000. Казалось бы, у нас есть много свободы в выборе целых чисел a_i и b_i, однако первая же попытка определить их к успеху не приводит. Сменим точку зрения: воспользуемся симметрией и заменим в каждой скобке слева знак «+» на «−». Очевидно, что в правой части появится число $5000 - 4000\sqrt{2}$ (поскольку все собранные после раскрытия скобок целые числа останутся без изменения, а все целые, умноженные на $\sqrt{2}$, поменяют знак). Итак,

$$(a_1 - b_1\sqrt{2})^{2004} + (a_2 - b_2\sqrt{2})^{2004} + \ldots + (a_{100} - b_{100}\sqrt{2})^{2004} = 5000 - 4000\sqrt{2}.$$

Казалось бы, мы не узнали ничего нового. Но обратим внимание на то, что $5000 - 4000\sqrt{2} < 0$. Мы тут же получаем невозможное соотношение: слева в последнем равенстве стоит сумма неотрицательных чисел (из-за четности показателя 2004), а справа — отрицательное число. Следовательно, целочисленных решений исходное уравнение не имеет вовсе!

Идея, которую мы использовали в решении этой задачи, состоит в наличии скрытой симметрии: посмотрев в «зеркало» (изменив знаки «+» на «−»), мы не увидели изображения; стало быть, и исходного объекта не существует.

На этом мы закончим демонстрацию примеров коротких задач и перейдем к основной задаче статьи, которая также будет решена на основе смены точки зрения.

3. Задача о бильярдном отражении в $\mathbb{R}^d$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^d$ расположена $(d-1)$-мерная плоскость П, которую будем рассматривать как горизонтальное зеркало. Сверху от зеркала П, в каких-то точках A_1, A_2, …, A_n пространства находятся маленькие кусочки плоских зеркал, от которых, а также и от зеркала П отражается световой луч, образуя замкнутую периодическую траекторию $\gamma = A_1B_1A_2B_2\dots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_nA_1$ (рис. 6). Траекторию γ будем называть по естественным причинам «бильярдной»: точечный бильярдный шар, выпущенный из точки A_1 в точку B_1, будет двигаться по траектории γ, поскольку после каждого отражения от каждого зеркала угол его отражения будет равен углу его падения, как и для исходного светового луча. Несоседние отрезки траектории γ в пространстве размерности $d \geqslant 3$ будут, вообще говоря, непересекающимися, как на рис. 6а, а в случае, когда все точки A_1, A_2, …, A_n и точки отражения B_1, B_2, …, B_{n-1}, B_n расположены в одной плоскости ($d=2$), периодическая траектория γ выглядит, как на рис. 6б.

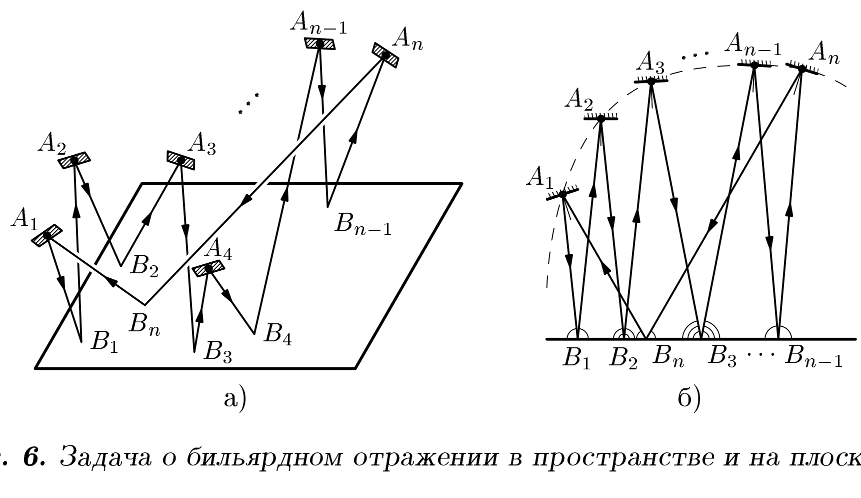


Рис. 6. *Задача о бильярдном отражении в пространстве и на плоскости*

Рассмотрим треугольники $\Delta_k = {\scriptstyle\triangle} A_k B_k A_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ и $\Delta_n = {\scriptstyle\triangle} A_1 B_n A_n$, которые назовем *бильярдными треугольниками.* Для каждого из первых $n-1$ бильярдных треугольников определим его *избыток*

$$\delta_k = A_k B_k + B_k A_{k+1} - A_k A_{k+1} \ ,$$

и его *периметр*

$$p_k = A_k B_k + B_k A_{k+1} + A_k A_{k+1} \ .$$

Точно так же определим избыток и периметр последнего, n-го, треугольника $\Delta_n = {\scriptstyle\triangle} A_1 B_n A_n$:

$$\begin{aligned} \delta_n &= A_1 B_n + B_n A_n - A_1 A_n \ , \\ p_n &= A_1 B_n + B_n A_n + A_1 A_n \ . \end{aligned}$$

Сравним два числа: отношение избытков $\delta_1 \delta_2 \cdot \ldots \cdot \delta_{n-1} / \delta_n$ и отношение периметров $p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} / p_n$.

Задача. *Можно ли утверждать, что одно из сравниваемых двух чисел всегда, независимо от бильярдной траектории γ, не превосходит другое? Возможно ли равенство этих чисел, и если да, то для каких траекторий γ?*

Оказывается, ответы на оба вопроса положительны, а равенство отношений избытков и периметров накладывает необычное ограничение на расположение точек $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$. Решение задачи дается следующей теоремой:

Теорема 1.

(A). *Для произвольной бильярдной траектории γ справедливо неравенство*

$$\frac{\delta_1 \delta_2 \cdot \ldots \cdot \delta_{n-1}}{\delta_n} \leqslant \frac{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}}{p_n} \ . \tag{1}$$

(B). *Неравенство* (1) *превращается в равенство тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие три условия на расположение точек $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ в пространстве $\mathbb{R}^d$:*

(b1) *все A-точки $\{A_k\}$ и все B-точки $\{B_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ расположены в одной и той же двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$;*

(b2) *все B-точки расположены на одной прямой $\ell \in \mathbb{R}^2 \cap \Pi$, причем первые $n-1$ B-точек расположены в порядке B_1, B_2, $\ldots$, B_{n-1} на прямой ℓ, а последняя точка B_n лежит внутри открытого интервала $(B_1, B_{n-1}) \in \ell$;*

(b3) *все A-точки лежат на одной окружности $c \in \mathbb{R}^2$, центр которой расположен в некоторой точке O прямой ℓ, причем на окружности c они идут в порядке A_1, A_2, $\ldots$, A_n.*

Теорема 1 становится почти очевидной, если сменить точку зрения и посмотреть на всю задачу с позиции геометрии Лобачевского. Смена точки зрения и доказательство теоремы 1 приводится в части 5, а пока что перейдем к простейшим фактам геометрии Лобачевского и бильярдной формуле.

4. Геометрия Лобачевского и бильярдная формула

Напомним некоторые факты геометрии Лобачевского, или гиперболической геометрии. Нам здесь важна самая употребительная модель этой геометрии, а именно, модель Пуанкаре в верхней полуплоскости, если речь идет о двумерной геометрии, и в верхнем полупространстве, если речь идет о размерности три и выше.

Начнем с двумерной плоскости Лобачевского H^2. Ее моделью Пуанкаре является открытая верхняя полуплоскость евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$: все точки евклидовой плоскости выше оси абсцисс Ox являются точками плоскости H^2, а все точки на оси Ox считаются бесконечно удаленными точками гиперболической плоскости. Ось абсцисс Ox называется также *абсолютом* плоскости Лобачевского. Прямые на плоскости H^2 (к ним прилагается эпитет «гиперболические», для того, чтобы не путать их с евклидовыми прямыми) бывают двух типов: к первому относятся вертикальные евклидовы лучи, ортогональные оси Ox, а ко второму — евклидовы полуокружности с центрами на абсолюте Ox. (Эпитет «евклидов» для евклидовых объектов — точек, прямых, отрезков, окружностей, кривых и т. д. — мы часто будем опускать; любой геометрический объект с отсутствием этого эпитета считается автоматически евклидовым. Эпитет «гиперболический» мы, наоборот, будем каждый раз скрупулезно приписывать к соответствующему объекту геометрии Лобачевского.) Для любых двух точек A и B на верхней полуплоскости мы всегда можем определить, какому из двух типов принадлежит гиперболическая прямая AB: если прямая AB ортогональна оси Ox, то к первому, а если AB не ортогональна Ox, то ко второму. Во втором случае понятно, как построить гиперболическую прямую AB циркулем и линейкой: для этого надо провести перпендикуляр к середине отрезка AB, найти точку O пересечения его с осью абсцисс и, наконец, провести окружность с центром O, — ее верхняя открытая (без концов, принадлежащих абсолюту) полуокружность и будет искомой гиперболической прямой (рис. 7а). Если гиперболическая точка P лежит вне гиперболической прямой ℓ, то через P можно провести целый пучок гиперболических прямых, «параллельных» (т. е. не имеющих общих точек с) гиперболической прямой ℓ (рис. 7б): пятый постулат Евклида о единственности прямой, параллельной данной, в геометрии Лобачевского нарушается.

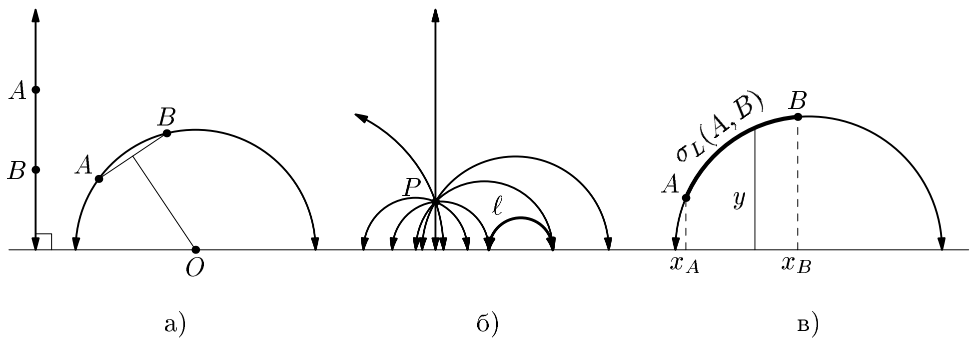


Рис. 7.

Пусть A и B — две гиперболические точки, соединенные какой-либо кривой σ. Тогда ее гиперболическая длина $\sigma_L(A,B)$ определяется по формуле

$$\sigma_L(A,B) = \int\limits_A^B \frac{ds}{y}\,,$$

где ds — элемент евклидовой длины: $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$, а y — ордината текущей точки кривой σ (рис. 7в). Если y есть функция от x, $y = y(x)$, то легко найти длину кривой σ по формуле

$$\sigma_L(A,B) = \int\limits_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} = \int\limits_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{y}\,dx.$$

Кривой между точками A и B может быть, в частности, дуга евклидовой окружности с концами в точках A и B, или, иными словами, гиперболический отрезок $\smile AB$ (если точки A и B лежат на вертикальной прямой, то им будет евклидов отрезок AB); его гиперболическая длина вычисляется по той же самой формуле. Несложно показать (мы этого здесь делать не будем), что гиперболическая длина гиперболического отрезка всегда короче гиперболической длины любой кривой с теми же концами, поэтому гиперболический отрезок является геодезическим (т.е. «кратчайшим») отрезком на плоскости Лобачевского H^2. В частности, выполняется неравенство треугольника, а в общем случае — неравенство многоугольника: длина любой стороны многоугольника не превышает сумму длин всех его остальных сторон. Равенство возникает, когда объединение всех остальных сторон совпадает с исходной стороной многоугольника.

Все приведенные рассмотрения дословно переносятся с плоскости Лобачевского H^2 на пространство Лобачевского H^d (гиперболическое пространство). А именно, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ выбирается горизонтальная гиперплоскость $\Pi = \Pi^{d-1}$, и верхнее открытое полупространство с границей Π объявляется моделью (Пуанкаре) гиперболического пространства H^d (т. е. евклидовы точки верхнего полупространства являются теперь одновременно и гиперболическими точками), а сама гиперплоскость Π — абсолютом (множеством бесконечно удаленных точек) этого гиперболического пространства. Чтобы определить расстояние между двумя гиперболическими точками A и B, надо сначала опустить из них перпендикуляры на гиперплоскость Π, провести двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$ через эти перпендикуляры (она определится однозначно, если только точки A и B не лежат на одной вертикальной прямой), и в этой плоскости взять верхнюю полуплоскость (над прямой, являющейся пересечением плоскости $\mathbb{R}^2$ и гиперплоскости Π), которая и будет плоскостью Лобачевского. А к ней уже затем применить все построения, рассмотренные выше: провести через A и B окружность и вычислить по указанной выше интегральной формуле гиперболическую длину гиперболического отрезка $\smile AB$.

После этих общих рассмотрений мы покажем, как просто находить гиперболическую длину гиперболического отрезка $\smile AB$.

Поместим в точку A бильярдный шар и запустим его в пространстве $\mathbb{R}^d$ в сторону гиперплоскости Π так, чтобы он после отражения в точке $C \in \Pi$ попал в точку B. Как найти точку отражения C в плоскости Π, показывает рисунок 8: для этого надо отразить точку A относительно гиперплоскости Π (причем построение отражения следует делать в дву-

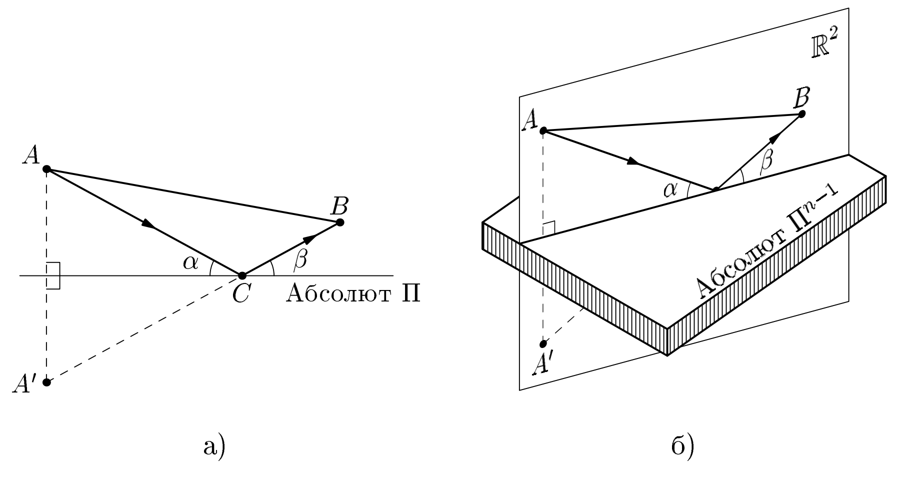


Рис. 8. *Бильярдная формула для гиперболического расстояния на плоскости и в пространстве Лобачевского*

мерной плоскости $\mathbb{R}^2$, ортогональной П), и полученный образ, точку A', соединить с точкой B. Точка пересечения отрезка $A'B$ с гиперплоскостью $\mathbb{R}^2$ и будет искомой: $C = A'B \cap \Pi$. Действительно, из рассмотрения треугольников легко видеть, что $\alpha = \beta$, т. е. угол отражения равен углу падения (рис. 8), так что, действительно, траектория $A \to C \to B$ — бильярдная.

Итак, возник бильярдный треугольник ABC. У него есть периметр $p = AC + CB + AB = d_B + d_E$, где $d_B = AC + CB$ — *бильярдное* расстояние между точками A и B (отсюда и индекс B у обозначения расстояния), а d_E — евклидово расстояние между теми же точками; и есть *эксцесс* — величина $\delta = AC + CB - AB = d_B - d_E$. Обозначим гиперболическое расстояние между точками A и B через d_L. Справедлива следующая

Теорема 2 (бильярдная формула).

$$d_L = \ln \frac{p}{\delta} = \ln \frac{d_B + d_E}{d_B - d_E}\,. \tag{2}$$

Замечание. Если $\triangle ABC$ вырожден, т. е. точки A и B лежат на одном вертикальном евклидовом луче CAB, то формула (2) дает хорошо известную из учебников формулу $d_L = \ln\left|\frac{AC}{BC}\right|$, с которой мы и начнем наше доказательство формулы (2) в части 6 этой статьи.

Доказательство теоремы 2 будет дано в части 6, но сначала, основываясь на бильярдной формуле, докажем теорему 1.

5. Решение задачи о бильярдном отражении

Сменим точку зрения и посмотрим на имеющийся евклидов геометрический объект в верхнем полупространстве $(\mathbb{R}^d)^+$ — зеркало П и бильярдную траекторию $\gamma = A_1B_1A_2B_2\ldots A_{n-1}B_{n-1}A_nB_nA_1$ — как на некую конструкцию в d-мерном пространстве Лобачевского H^d. А именно, будем мыслить верхнее полупространство $(\mathbb{R}^d)^+$ как модель Пуанкаре геометрии Лобачевского с абсолютом П; тогда точки отражения A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, A_n превратятся в гиперболические точки, а точки B_1, B_2, $\ldots$, B_{n-1}, B_n отражения от зеркала П — в бесконечно удаленные точки пространства H^d. Для полноты картины нам не достает только соединить гиперболические точки A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, A_n в указанном порядке друг с другом гиперболическими отрезками (а в конце — гиперболическим отрезком точку A_n с точкой A_1), что мы и сделаем. В результате получим гиперболический многоугольник $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$, гиперболические стороны $\smile\!A_kA_{k+1}$ которого — это дуги евклидовых полуокружностей с центрами на зеркале П. По неравенству многоугольника, гиперболическая длина стороны $\smile A_1A_n$ не превосходит суммы гиперболических длин остальных его сторон:

$$d_L(\smile A_1A_n) \leqslant d_L(\smile A_1A_2) + d_L(\smile A_2A_3) + \ldots + d_L(\smile A_{n-1}A_n), \qquad (3)$$

причем равенство выполняется, когда точки $A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на дуге евклидовой окружности $\smile A_1A_n$, и именно в этом порядке (от A_2 до A_{n-1}).

Мы сейчас покажем, что неравенство (3) в точности эквивалентно неравенству (1), которое мы как раз и хотим доказать; этим мы завершим доказательство части (A) теоремы 1. Часть (B) теоремы 1 (причем сразу все пункты) будет следовать из условия превращения неравенства (3) в равенство (см. последнее предложение предыдущего абзаца). Итак, простая смена точки зрения действительно даст нам доказательство теоремы!

Перепишем неравенство (1) так:

$$\frac{p_1}{\delta_1} \cdot \frac{p_2}{\delta_2} \cdot \ldots \cdot \frac{p_{n-1}}{\delta_{n-1}} \geqslant \frac{p_n}{\delta_n}\,. \qquad (1.1)$$

Возьмем логарифм от обеих частей:

$$\ln\frac{p_1}{\delta_1} + \ln\frac{p_2}{\delta_2} + \ldots + \ln\frac{p_{n-1}}{\delta_{n-1}} \geqslant \ln\frac{p_n}{\delta_n}\,. \qquad (1.2)$$

Согласно бильярдной формуле (2), каждое слагаемое в левой части неравенства (1.2), $\ln\frac{p_k}{\delta_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, есть просто гиперболическая длина гиперболического отрезка $\smile A_kA_{k+1}$, а выражение $\ln\frac{p_n}{\delta_n}$ в правой части — это гиперболическая длина гиперболического отрезка $\smile A_1A_n$. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (3), а с ней и первая часть теоремы 1 доказана.

Неравенство (1) превращается в равенство тогда и только тогда, когда эквивалентные ей неравенства (1.1), (1.2) и (3) становятся равенствами. Неравенство (3) будет равенством при попадании, как уже говорилось, всех точек от A_2 до A_{n-1} на гиперболический отрезок $\smile A_1A_n$. По определению гиперболического отрезка, это означает, что евклидовы дуги окружностей $\smile A_2A_3$, $\smile A_3A_4$, $\ldots$, $\smile A_{n-2}A_{n-1}$ лежат на дуге окружности $\smile A_1A_n$. Следовательно, точки A_2, A_3, $\ldots$, A_{n-1}, именно в этом порядке, лежат на дуге окружности $\smile A_1A_n$ (рис. 9). Это доказывает наиболее трудный пункт (b3) второй части теоремы 1. (Интересно отметить, что наиболее трудную часть теоремы 1 нам удалось доказать сразу — с другими пунктами надо еще повозиться! — и всего лишь за счет одной только смены точки зрения!)

Кроме того, из приведенного рассуждения следует также, что точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n вместе с точками B_1, B_2, $\ldots$, B_n отражения от зеркала Π лежат в одной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, поскольку все двумерные плоскости соответствующих бильярдных треугольников $_\triangle A_kB_kA_{k+1}$

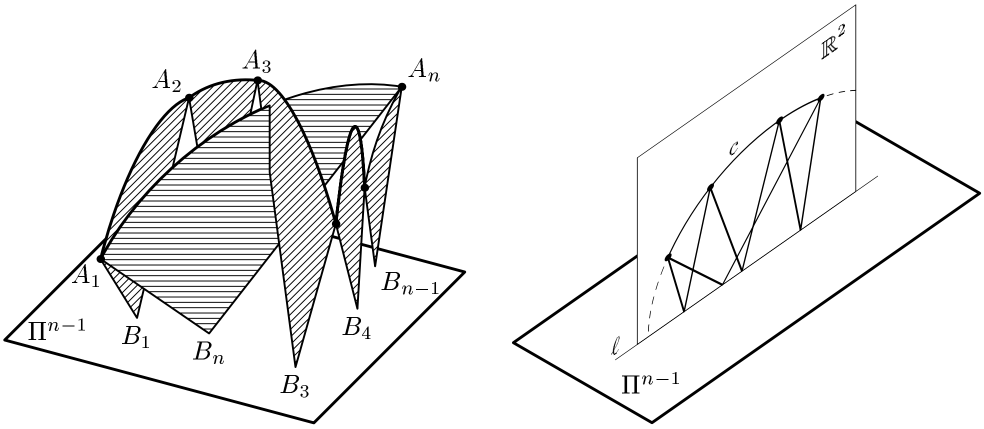


Рис. 9. *Решение задачи о бильярдном отражении в* $\mathbb{R}^n$

$(2 \leqslant k \leqslant n-1)$ и $\triangle A_1 B_n A_n$ обязаны совпасть. Тем самым мы получаем утверждение пункта (b1) теоремы 1.

Наконец, докажем пункт (b2). Прежде всего, точки отражения бильярдной траектории γ от зеркала Π («B-точки») обязаны принадлежать прямой $\ell = \mathbb{R}^2 \cap \Pi$, так как они принадлежат как гиперплоскости Π (по определению точек отражения), так и перпендикулярной ей двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ (в силу установленного выше). Вдобавок, каждая точка B_k, $k = 1, \ldots, n-1$, расположена на прямой ℓ между ортогональными проекциями $\mathrm{pr}(A_k)$ и $\mathrm{pr}(A_{k+1})$ точек A_k и A_{k+1} на прямую ℓ: отрезок $[A'_k A_{k+1}]$, где A'_k — образ точки A_k при отражении относительно гиперплоскости Π, пересекает отрезок $[\mathrm{pr}(A_k)\,\mathrm{pr}(A_{k+1})]$ в его *внутренней* точке B_k (мы не рассматриваем очевидный вырожденный случай, когда точки A_k и A_{k+1} лежат на вертикальной евклидовой прямой). Последняя точка отражения траектории γ на зеркале Π, B_n, является, очевидно, внутренней точкой отрезка $[\mathrm{pr}(A_1)\,\mathrm{pr}(A_n)]$. К тому же, поскольку отрезок $[A'_1 A_2]$ лежит в плоскости $\mathbb{R}^2$ внутри угла $\angle A_1 A'_1 A_n$ (поскольку точка A_2 лежит внутри дуги окружности $\smile A_1 A_n$), он пересекает отрезок $[\mathrm{pr}(A_1) B_n]$ в его внутренней точке B_1. Точно так же, начиная рассуждать теперь с точки A_n, мы видим, что отрезок $A'_n A_{n-1}$ принадлежит плоскости $\mathbb{R}^2$ внутри угла $\angle A_n A'_n A_1$. Это означает, что точка B_{n-1} является внутренней точкой отрезка $[B_n\,\mathrm{pr}(A_n)]$. Исходя из принадлежности $B_1 \in [\mathrm{pr}(A_1) B_n]$ и $B_{n-1} \in [B_n\,\mathrm{pr}(A_n)]$, заключаем, что $B_n \in [B_1 B_{n-1}]$. Но точка B_n не может совпасть ни с концом B_1, ни с концом B_{n-1} отрезка $[B_1 B_{n-1}]$; следовательно, B_n принадлежит *открытому* интервалу (B_1, B_{n-1}). Утверждение пункта (b2) теоремы 1 доказано, и доказательство теоремы 1, тем самым, завершено.

6. Доказательство бильярдной формулы

Обозначим через A' образ точки A при ее отражении относительно прямой ℓ. (Напомним, что ℓ — это горизонтальное зеркало, от которого отражается бильярдный шар, запущенный из точки A в точку B, и одновременно абсолют геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре.) Тогда $AC = A'C$ и формулу (2) можно переписать в виде

$$d_L(A,B) = \ln \frac{A'B + AB}{A'B - AB}\,. \tag{2.1}$$

В случае вырожденного $_\triangle ABC$, формула (2.1) вытекает немедленно из определения гиперболического расстояния d_L: в этом случае $x_A = x_B$, поэтому $dx = 0$ и, стало быть,

$$d_L(A,B) = \int\limits_A^B \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} = \int\limits_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{y} =$$

$$= (\ln y)\Big|_{y_A}^{y_B} = \ln\left(\frac{y_B}{y_A}\right) = \ln\left(\frac{2y_B}{2y_A}\right) =$$

$$= \ln \frac{(y_B+y_A)+(y_B-y_A)}{(y_B+y_A)-(y_B-y_A)} = \ln\frac{A'B+AB}{A'B-AB}\,.$$

Рассмотрим теперь невырожденный случай $_\triangle ABC$. Тогда гиперболическая прямая в модели Пуанкаре H^2 будет (евклидовой) полуокружностью c с центром O на абсолюте ℓ, проходящей через точки A и B. Сначала мы установим три промежуточные формулы для гиперболического расстояния $d_L(A,B)$.

Введем следующие обозначения: $YX \in \ell$ — диаметр полуокружности c, $_\angle AOX = \varphi$ и $_\angle BOX = \psi$, $_\angle AYX = \alpha$ и $_\angle BYX = \beta$ (см. верхнюю половину рис. 10). Введем также стандартное обозначение $[AB, XY]$ для двойного отношения четырех точек A, B, X, Y:

$$[AB,XY] := \frac{AX/AY}{BX/BY}\,.$$

Лемма. *Справедливы следующие формулы для гиперболического расстояния между точками A и B:*

$$d_L(A,B) = \left|\,\ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right|; \tag{2.2}$$

$$d_L(A,B) = \left|\,\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right|; \tag{2.3}$$

$$d_L(A,B) = \Big|\ln\ [AB,XY]\Big|\,. \tag{2.4}$$

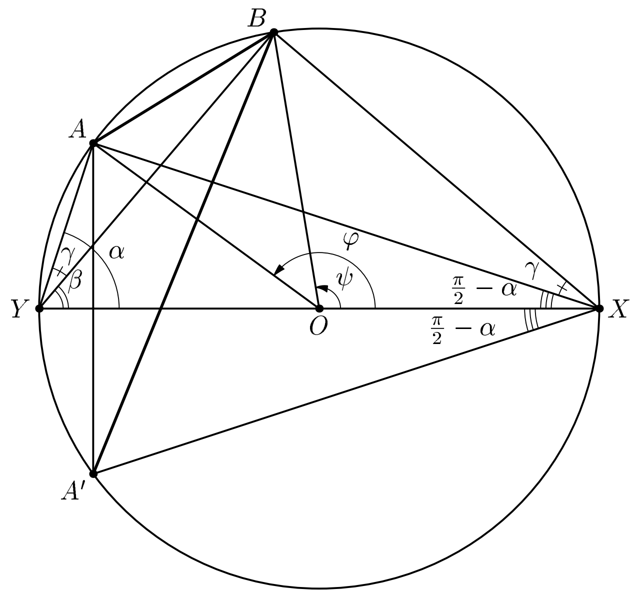


Рис. 10. *Доказательство бильярдной формулы*

Доказательство. В полярных координатах $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = r d\theta$ (поскольку $dr = 0$ на окружности); следовательно,

$$d_L(A,B) = \int\limits_{\psi}^{\varphi} \frac{ds}{y} = \int\limits_{\psi}^{\varphi} \frac{r d\theta}{r\sin\theta} = \left| \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \right|\Bigg|_{\psi}^{\varphi} = \left| \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right|,$$

и формула (2.2) доказана.

Далее, поскольку $\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(\smile ABX) = \alpha$ и $\frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}(\smile BX) = \beta$, находим из (2.2):

$$\left| \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| = \left| \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right|,$$

и формула (2.3) доказана.

Заметим теперь, что треугольники $\triangle YAX$ и $\triangle YBX$ прямоугольные. Выразим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ через отношения AX/AY и BX/BY, соответственно:

$$\left| \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right| = \left| \ln \frac{AX/AY}{BX/BY}\right|.$$

Формула (2.4), а с ней и лемма, доказана. □

Теперь мы готовы к завершению доказательства теоремы 2.

Продлим полуокружность, проходящую через точки A и B, с верхней полуплоскости на нижнюю — получим полную окружность c с диаметром $XY \in \ell$ и центром $O \in \ell$. Пусть R ее радиус. Точка A', зеркальный образ точки A, лежит на окружности c ниже диаметра YX. Соединим точку A' с точкой B и обозначим (дополнительно к уже введенным обозначениям $\angle AYX = \alpha$ и $\angle BYX = \beta$) $\angle AYB = \angle AXB = \gamma$, $\angle AXY = \angle A'XY = \pi/2 - \alpha$ (рис. 10).

Применим (евклидову) теорему синусов к треугольникам $\triangle ABX$ и $\triangle A'BX$:

$$AB = 2R\sin\gamma = 2R\sin(\alpha-\beta) \text{ и } A'B = 2R\cdot\sin(\angle BXA') = 2R\sin(\alpha+\beta).$$

Подставим найденные выражения в дробь, стоящую в правой части формулы (2):

$$\frac{A'B+AB}{A'B-AB} = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} = \frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\,.$$

Применяя к найденному выражению формулу (2.3) из доказанной выше леммы, получаем

$$d_L(A,B) = \left|\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right| = \ln\frac{A'B+AB}{A'B-AB} = \ln\left(\frac{p}{\delta}\right),$$

т. е. формулу (2). Бильярдная формула доказана. □

Список литературы

[1] James W. Andersen. *Hyperbolic Geometry.* Springer-Verlag, 1999.

[2] C. I. Delman, G. Galperin. *A tale of three circles* // Mathematics Magazine, February 2003. V. 76, No.1. P. 15–32.

Проективные преобразования, оставляющие на месте окружность

Р. Н. Карасёв
141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер. 9,
Московский физико-технический институт,
кафедра высшей математики

1. Введение

В этой статье мы рассмотрим некоторые свойства проективных преобразований, которые переводят заданную окружность на проективной плоскости в ту же окружность. Кроме того, мы найдем способы явного построения таких преобразований. Мы отметим аналогию между такими преобразованиями и ортогональными преобразованиями трехмерного пространства, или, в школьной формулировке, движениями трехмерного пространства, оставляющими на месте начало координат. Эта аналогия позволяет рассмотреть важный класс проективных преобразований, переводящих окружность в себя, которые аналогичны отражениям относительно плоскости в случае ортогональных преобразований пространства.

От читателя предполагается некоторое знакомство с понятиями проективной плоскости и проективного преобразования, например, по книгам [1] или [2].

2. Некоторые определения

Напомним некоторые определения из проективной геометрии (см. [1]):

Определение. *Проективной плоскостью* называется множество прямых, проходящих через начало координат трехмерного пространства. Прямые этого множества называются *точками проективной плоскости*, плоскости, проходящие через начало координат, называются *прямыми проективной плоскости.*

Определение. На любой плоскости, расположенной в трехмерном пространстве и не содержащей начала координат, проективные точки и прямые высекают настоящие точки и прямые. Такая плоскость называется *аффинной картой.* Она содержит все точки проективной плоскости, кроме одной прямой, которая называется *бесконечно удаленной прямой* в данной карте.

Определение. *Проективными преобразованиями* называются преобразования проективной плоскости, возникающие из любых линейных преобразований трехмерного пространства.

Для школьного курса можно считать, что линейные преобразования — это преобразования, заданные формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

с ненулевым детерминантом матрицы (a_{ij}). Для каждого такого преобразования есть обратное и из любых двух преобразований можно сделать композицию — то есть они образуют *группу*.

Координаты (x, y, z) в трехмерном пространстве будем называть *однородными координатами*, а само это пространство — *однородным пространством*. Для точек проективной плоскости однородные координаты определены с точностью до умножения на любое ненулевое число. Также мы часто будем использовать аффинную карту, задаваемую условием $z = 1$, для нее связь между однородными координатами и координатами (u, v) в аффинной плоскости задается так:

$$\begin{gathered} (u, v) \to (u, v, 1), \\ (x, y, z) \to (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}). \end{gathered}$$

3. Окружность на проективной плоскости

Пусть на плоскости дана окружность S. Выберем систему координат, в которой ее уравнение имеет вид

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Преобразуем к однородному виду, тогда получим уравнение в однородных координатах

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Проективные преобразования оставляют на месте окружность тогда и только тогда, когда при подстановке преобразованных координат (x', y', z') в Q получим $Q(x', y', z') = \lambda Q(x, y, z)$, где λ — некоторое число.

Заметим, что в данном случае $\lambda > 0$. Это можно доказать, если заметить, что существует плоскость в однородном пространстве, на которой

$Q > 0$ для любого ненулевого вектора, и не существует плоскости, на которой $Q < 0$ для любого ненулевого вектора. Для преобразованного выражения $Q(x', y', z')$ это свойство тоже должно выполняться, а значит $\lambda > 0$.

Умножение линейного преобразования однородного пространства на некоторое число не влияет на получающееся преобразование проективной плоскости, поэтому можно считать, что $\lambda = 1$.

Итак, мы будем изучать линейные преобразования, для которых выражение Q — *инвариант*. Множество таких преобразований обозначим L и будем называть трехмерной группой Лоренца, по аналогии с четырехмерной группой Лоренца (из физики) — группой преобразований между инерциальными системами отсчета, которая имеет инвариант $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

Заметим, что если бы мы имели дело с квадратичной формой $Q' = x^2 + y^2 + z^2$ (это скалярный квадрат вектора), то тогда у нас получилась бы не группа Лоренца, а обычная группа движений трехмерного пространства, оставляющих на месте начало координат. В дальнейшем мы увидим, что аналогия между Q' (будем называть пространство с формой Q' *евклидовым пространством*) и Q (будем называть пространство с формой Q *пространством Минковского*) позволяет использовать при изучении Q известные факты из стереометрии, относящиеся к евклидовому пространству.

Квадратичная форма Q' позволяет определить евклидово скалярное произведение

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))' = \\ = \frac{1}{2}(Q'(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) - Q'(x_1, y_1, z_1) - Q'(x_2, y_2, z_2)) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

которое приводит к понятию перпендикулярности векторов в евклидовом пространстве. По аналогии можно определить

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \\ = \frac{1}{2}(Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) - Q(x_1, y_1, z_1) - Q(x_2, y_2, z_2)) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

Назовем это выражение *скалярным произведением Минковского*. Оно будет основным инструментом в последующих рассуждениях.

Если для двух векторов однородного пространства имеет место $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ будем говорить, что векторы перпендикулярны. Это определение не зависит от домножения каждого из векторов на ненулевые числа, а значит у нас появляется следующее понятие:

Определение. Точки a и b проективной плоскости называются *двойственными* относительно окружности S, если соответствующие им векторы однородного пространства $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны в скалярном произведении Минковского, соответствующем окружности S.

Заметим, что уравнение окружности S в однородных координатах можно записать как $(\overline{s}, \overline{s}) = 0$. Как и в случае евклидова скалярного произведения, множество векторов, перпендикулярных данному, образует плоскость. Соответственно, множество точек, двойственных данной точке, образует прямую, она называется *полярой* точки. Докажем лемму:

Лемма 1. *Пусть l — касательная к окружности S в точке p. Тогда прямая l — поляра точки p.*

Доказательство. Пусть точке p соответствует вектор $\overline{p}$ в однородном пространстве. Пусть q — любая другая точка l с соответствующим вектором $\overline{q}$. Предположим противное, то есть

$$(\overline{p}, \overline{q}) = m \neq 0.$$

Вспомним, что $(\overline{p}, \overline{p}) = 0$, тогда положим $n = \dfrac{(\overline{q}, \overline{q})}{2m}$ и получим

$$(\overline{q} - n\overline{p}, \overline{q} - n\overline{p}) = (\overline{q}, \overline{q}) - 2n(\overline{p}, \overline{q}) = (\overline{q}, \overline{q}) - 2nm = 0.$$

Итак, мы имеем вектор $\overline{q}' = \overline{q} - n\overline{p}$, неколлинеарный p. Соответствующая ему точка $q' \neq p$ лежит на l и на S — противоречие.

Из этой леммы можно вывести и следующую лемму, позволяющую явно строить поляру точки:

Лемма 2. *Пусть точка p лежит вне окружности S, l_1 и l_2 — касательные к S, касающиеся ее в точках q_1 и q_2 и проходящие через p. Тогда поляра точки p — это прямая, проходящая через q_1 и q_2.*

Доказательство этой леммы оставляем в качестве упражнения для читателя.

4. Симметрии относительно плоскости

Известно, что существует много евклидовых движений, оставляющих на месте начало координат, поэтому можно ожидать, что в группе Лоренца будет много преобразований. Начнем строить такие преобразования явно, используя аналогию с евклидовыми движениями. Рассмотрим одно из самых простых движений — симметрию относительно плоскости.

Пусть в пространстве дана плоскость α, перпендикулярная некоторому вектору $\overline{v}$. Тогда симметрия относительно плоскости α задается формулой (проверьте!)

$$\overline{x}' = \overline{x} - 2\frac{(\overline{x},\overline{v})'}{(\overline{v},\overline{v})'}\overline{v}.$$

Заменив в этой формуле евклидово скалярное произведение на скалярное произведение Минковского, мы получим преобразование, определенное для любого $\overline{v}$ с $(\overline{v},\overline{v}) \neq 0$

$$\sigma_{\overline{v}} : \overline{x} \to \overline{x} - 2\frac{(\overline{x},\overline{v})}{(\overline{v},\overline{v})}\overline{v}.$$

Следующие свойства $\sigma_{\overline{v}}$ проверяются прямым вычислением:

1. $\sigma_{\overline{v}}(\overline{x}) = \overline{x}$ тогда и только тогда, когда $(\overline{x},\overline{v}) = 0$;
2. $\sigma_{\overline{v}}(\overline{x}) = -\overline{x}$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \lambda\overline{v}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. скалярное произведение Минковского сохраняется при этом преобразовании.

Соответствующее проективное преобразование можно охарактеризовать так:

1. $\sigma_v(x) = x$ тогда и только тогда, когда либо x и v двойственны относительно S, либо $x = v$;
2. окружность S при этом преобразовании переходит в себя и отношение двойственности точек относительно окружности при этом не меняется.

Рассмотрим вопрос о том, как найти образ заданной точки x при этом преобразовании.

Сначала разберем случай, когда точка x лежит на окружности. Проведем через v и x прямую l. Если она является касательной к окружности S, то по лемме 1 $\sigma_v(x) = x$. Иначе, l пересекает S в двух точках: x и некоторой x'. Точка $\sigma_v(x)$ обязана лежать и на l, и на S, кроме того, она не равна x, поэтому получается, что $x' = \sigma_v(x)$.

Теперь рассмотрим случай, когда x не лежит на окружности. Проведем через x две прямые: l, пересекающую S в точках a и b; m, пересекающую S в точках c и d. Мы можем найти образы точек a, b, c, d, провести через пары точек прямые $\sigma_v(l)$ и $\sigma_v(m)$, а точка их пересечения и будет искомой $x' = \sigma_v(x)$ (см. рис. 1).

Теперь читатель уже в состоянии доказать следующую лемму, которая бывает весьма полезна при решении задач, в формулировке которых присутствуют одна окружность и некоторое количество прямых:

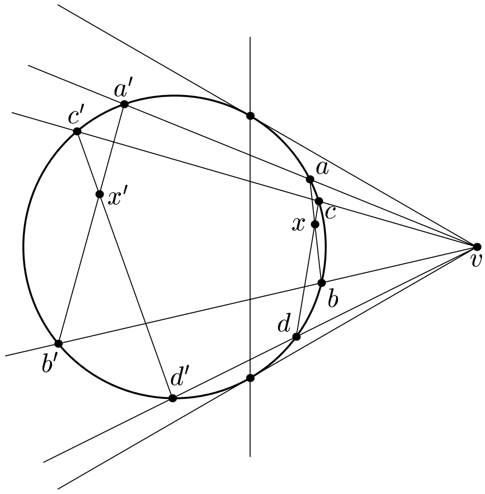


Рис. 1.

Лемма 3. *Любую точку внутри окружности S можно перевести некоторым преобразованием σ_v в центр окружности S. Любую прямую, не пересекающую окружность S, можно перевести в бесконечно удаленную прямую.*

5. Решение задач

Изложенные выше сведения о симметриях относительно плоскости из группы Лоренца позволяют практически мгновенно решить следующую стандартную задачу:

Задача 1. *Пусть на окружности S даны 4 различных точки a, b, c и d. Определим точки пересечения прямых $x = ac \cap bd$, $y = ab \cap cd$, $z = ad \cap bc$. Тогда все три точки x, y, z двойственны друг другу относительно окружности* (*см. рис.* 2).

Эта задача легко решается, если заметить, что преобразование σ_x оставляет на месте точки y и z; аналогично для σ_y и σ_z. Заметим, что соответствующие векторы $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ задают ортогональный базис для скалярного произведения Минковского в однородном пространстве.

Теперь проанализируем смысл теоремы Паскаля о вписанном шестиугольнике в терминах симметрий скалярного произведения Минковского. Для этого нам надо выяснить некоторые свойства композиции симметрий.

Начнем с симметрий в обычном евклидовом пространстве. Композиция двух симметрий — это вращение вокруг прямой пересечения плоскостей симметрии на некоторый угол. То же верно для симметрий скалярного произведения Минковского, за исключением того, что под «вращением» нужно понимать несколько иное понятие.

Если мы рассмотрим композицию трех симметрий, то в общем случае это еще более сложное преобразование, однако есть один случай, когда ситуация упрощается: это случай, когда все векторы симметрий лежат на одной прямой. В этом случае прямая, перпендикулярная всем трем векторам, остается на месте при всех преобразованиях, и нам остается выяснить, как устроена композиция трех симметрий относительно прямых, содержащих начало координат, на плоскости. Легко доказать, что эта композиция на самом деле тоже симметрия относительно некоторой прямой.

Для случая скалярного произведения Минковского верно аналогичное утверждение:

Лемма 4. *Если три вектора $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ компланарны, то композиция преобразований $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}$ — это преобразование $\sigma_{\overline{t}}$ для некоторого вектора $\overline{t}$, компланарного $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда векторы $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ не лежат на одной прямой, иначе все три симметрии совпадают и утверждение очевидно.

Пусть все три вектора лежат в плоскости α. Можно заметить, что плоскость α переходит сама в себя. Далее будем работать в плоскости α. Каждая симметрия задает некоторое линейное преобразование в этой плоскости, которое меняет ее ориентацию, или, более строго, имеет отрицательный детерминант. Композиция трех таких преобразований тоже будет иметь отрицательный детерминант.

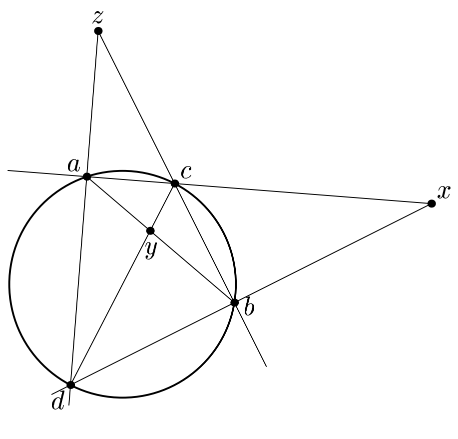


Рис. 2.

Теперь воспользуемся утверждением, что линейное преобразование плоскости с отрицательным детерминантом обязательно переводит некоторый вектор $\bar{t}'$ в сонаправленный себе и один вектор $\bar{t}$ в противонаправленный самому себе. Это можно доказать прямым вычислением; для читателей, знакомых с линейной алгеброй, заметим, что это следует из того, что у характеристического многочлена преобразования в этом случае обязательно есть два вещественных корня разных знаков.

Рассмотрим два случая:

1. $Q(\bar{t}) = 0$: плоскость α может содержать не более двух неколлинеарных векторов с нулевым скалярным квадратом. Если их два, то каждая симметрия переставляет их между собой и композиция трех симметрий тоже переставит их, в этом случае $\bar{t}$ не может быть одним из них. Если такой вектор в плоскости один, то по лемме 1 он ортогонален любому вектору из α, значит, при каждой симметрии он переводится в себя и не может поменять направление, то есть это не $\bar{t}$.

2. $Q(\bar{t}) \neq 0$: в этом случае $Q(\bar{t})$ и $Q(\bar{t}')$ не меняются при композиции симметрий, значит остается только вариант $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\bar{t}) = -\bar{t}$ и $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\bar{t}') = \bar{t}'$, в этом случае
$$(\bar{t}, \bar{t}') = (\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\bar{t}), \sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}(\bar{t}')) = (\bar{t}, -\bar{t}') = -(\bar{t}, \bar{t}'),$$
значит $(\bar{t}, \bar{t}') = 0$ и $\bar{t}$ — искомый вектор.

Так как для любой симметрии $\sigma_{\bar{t}} \circ \sigma_{\bar{t}}$ является тождественным преобразованием, то как следствие из этой леммы мы получаем, что $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}$ — тождественное преобразование. Это помогает нам доказать лемму:

Лемма 5. *Пусть точки x, y, z лежат на одной прямой и не лежат на окружности S. Пусть разные точки a, b, c, d, e, f лежат на окружности S и при этом следующие тройки точек коллинеарны: (x, a, b), (y, b, c), (z, c, d), (x, d, e) и (y, e, f) (см. рис. 3). Тогда точки z, f, a тоже коллинеарны.*

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. Достаточно рассмотреть действие преобразования $\sigma_z \circ \sigma_y \circ \sigma_x \circ \sigma_z \circ \sigma_y \circ \sigma_x$ на точку a.

Из леммы 5 читатель легко выведет теорему Паскаля:

Теорема (Паскаля). *Пусть разные точки a, b, c, d, e, f лежат на одной окружности. Тогда точки пересечения прямых $x = ab \cap de$, $y = bc \cap ef$ и $z = cd \cap fa$ коллинеарны.*

Рассмотрим теперь еще одну задачу:

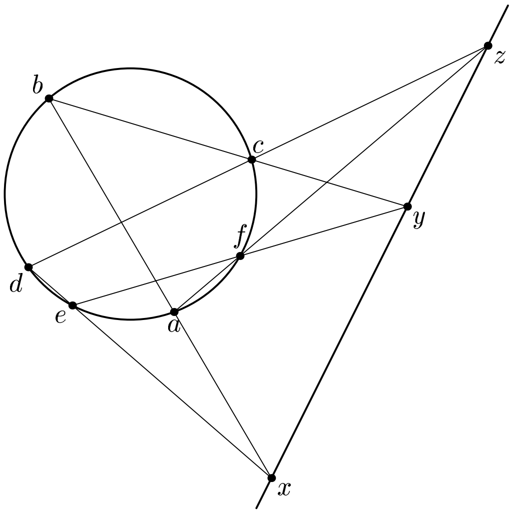


Рис. 3.

Задача 2. *Пусть вне окружности S даны разные точки x, y, z, x', y', z', при этом точка x двойственна y' и z', y двойственна x' и z', z двойственна y' и x' относительно окружности S. Докажите, что прямые $x'x$, $y'y$, $z'z$ пересекаются в одной точке.*

Чтобы решить эту задачу, перейдем в однородное пространство и для начала потренируемся на случае евклидового скалярного произведения. Рассмотрим случай, когда все скалярные произведения $(\overline{x},\overline{y})'$, $(\overline{y},\overline{z})'$, $(\overline{z},\overline{x})'$ не равны нулю. Тогда мы имеем трехгранный угол с ребрами вдоль $\overline{x}$, $\overline{y}$ и $\overline{z}$. Плоскость $\overline{x}'\overline{x}$ перпендикулярна плоскости $\overline{y}\overline{z}$, $\overline{y}'\overline{y}$ перпендикулярна $\overline{x}\overline{z}$, $\overline{z}'\overline{z}$ перпендикулярна $\overline{x}\overline{y}$. Иначе говоря, плоскости $\overline{x}'\overline{x}$, $\overline{y}'\overline{y}$ и $\overline{z}'\overline{z}$ — это «высоты» трехгранного угла. Поэтому они будут пересекаться по некоторой прямой — это утверждение можно свести к теореме о высотах треугольника на плоскости с помощью рассмотрения некоторого сечения плоскостью и активного применения теоремы о трех перпендикулярах.

Эти рассуждения в принципе можно перенести и на случай скалярного произведения Минковского, но мы найдем более аналитическое решение, которое уже явно будет проходить в случае любого скалярного произведения. Обозначим за $\overline{x}''$ вектор, перпендикулярный $\overline{x}$ и $\overline{x}'$, аналогично обозначим $\overline{y}''$ и $\overline{z}''$. Утверждение задачи равносильно тому, что векторы $\overline{x}''$, $\overline{y}''$, $\overline{z}''$ компланарны. Найдем координаты этих векторов в базисе $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$.

Заметим, что из скалярных произведений $(\overline{x},\overline{y})$, $(\overline{y},\overline{z})$, $(\overline{z},\overline{x})$ не более одного равно нулю, иначе бы мы получили одно из равенств $\overline{x} = \overline{x}'$,

$\overline{y} = \overline{y}'$, $\overline{z} = \overline{z}'$ с точностью до умножения векторов на константы. Найдем координаты $\overline{x}''$. Так как $(\overline{x}'', \overline{x}') = 0$, то $\overline{x}''$ лежит в плоскости векторов $\overline{y}$ и $\overline{z}$, то есть $\overline{x}'' = a\overline{y} + b\overline{z}$. Запишем уравнение

$$0 = (\overline{x}, \overline{x}'') = a(\overline{x}, \overline{y}) + b(\overline{x}, \overline{z}).$$

Одно из его решений дает нам $\overline{x}'' = (\overline{x}, \overline{z})\overline{y} - (\overline{x}, \overline{y})\overline{z}$. Аналогично можно найти $\overline{y}'' = (\overline{x}, \overline{y})\overline{z} - (\overline{y}, \overline{z})\overline{x}$, $\overline{z}'' = (\overline{y}, \overline{z})\overline{x} - (\overline{x}, \overline{z})\overline{y}$.

Компланарность векторов теперь следует просто из того, что их сумма равна нулю.

В заключение предложим читателю пару задач для самостоятельного решения, первую из них можно легко решить с помощью изложенной выше техники, над второй же придется немного подумать:

Задача 3. *Дана окружность S и точки a и b вне ее. Возьмем на окружности точку x, пусть прямые ax и bx пересекают окружность также в точках a_x и b_x, не считая точки x. Построить циркулем и линейкой точку x так, чтобы прямая $a_x b_x$ была параллельна ab.*

Задача 4. *Дана окружность S, точки a и b вне ее и прямая l. Возьмем на окружности точку x, пусть прямые ax и bx пересекают окружность также в точках a_x и b_x, не считая точки x. Построить циркулем и линейкой точку x так, чтобы прямая $a_x b_x$ была параллельна l.*

Список литературы

[1] Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. *Геометрия.* М.: Наука, 1990.

[2] Прасолов В. В. *Сборник задач по планиметрии.* Изд. 4-е. М.: МЦНМО, 2001.

Об остроугольных многогранниках

В. О. Бугаенко

Остроугольными называются выпуклые многогранники, все двугранные углы которых острые или прямые.

Остроугольные многогранники в евклидовых и сферических пространствах любой размерности классифицировал Г. С. М. Кокстер [4]. Оказалось, что все они являются симплексами на сферах или произведениями симплексов в евклидовых пространствах. Например, остроугольные многоугольники на евклидовой плоскости могут быть только треугольниками (двумерными симплексами) или прямоугольниками (произведениями двух отрезков — одномерных симплексов). Остроугольные многогранники в трехмерном евклидовом пространстве могут быть только тетраэдрами (трехмерными симплексами), треугольными призмами (произведениями треугольника и отрезка) или прямоугольными параллелепипедами (произведениями трех отрезков).

Классификация многогранников Кокстера в трехмерном пространстве Лобачевского была проведена Е. М. Андреевым [1]; он же доказал, что в пространстве Лобачевского любой размерности гиперплоскости несмежных граней остроугольного многогранника не пересекаются [2]. Последнее утверждение верно также в евклидовых и сферических пространствах: это является очевидным следствием кокстеровской классификации. В настоящей статье мы приведем простое доказательство этого утверждения, не опирающееся на результаты Кокстера и применимое во всех трех типах пространств.

В статье [3] в прошлом выпуске «Математического просвещения» была приведена классификация остроугольных многогранников в евклидовых и сферических пространствах, полученная отличным от использованного Кокстером методом. Этот метод основывался на рассмотрении системы нормалей к граням многогранника. Однако при этом использовалось более сильное определение остроугольного многогранника, а именно, требовалось, чтобы углы между пересекающимися гиперплоскостями его любых, а не только смежных, граней были нетупыми. (Углом между гиперплоскостями граней называется тот из четырех образуемых ими двугранных углов, который содержит внутри себя многогранник.) И хотя это определение равносильно основному (действительно, как уже было упомянуто выше, гиперплоскости несмежных граней остроугольных многогранников не пересекаются), но доказательства равносильности определений, не опирающегося на кокстеровскую классификацию, автору известно не было. Однако вскорости после выхода статьи подтвердилась небезосновательность старой шутки, бытующей в среде московских математиков: чтобы узнать решение математической задачи, нужно предложить ее участникам Московской математической олимпиады. На LXVI ММО в марте 2003 г. школьникам была предложена задача: «У выпуклого многогранника внутренний двугранный угол при каждом ребре острый. Сколько может быть граней у многогранника?». Фактически предлагалось описать трехмерные евклидовы остроугольные (правда, остроугольные в строгом смысле, т. е. не допускающие не только тупых, но и прямых двугранных углов) многогранники. Из упомянутой классификации следует, что такими многогранниками могут быть только тетраэдры, но доказательство этого факта, не использующее общего классификационного результата, отнюдь не просто. Неудивительно, что на олимпиаде задачу решили всего двое участников. Один из них — ученик 11 класса Михаил Раскин — заметил следующее свойство остроугольных многогранников: их проекция на плоскость любой своей грани совпадает с этой гранью. Это свойство может служить еще одним определением остроугольного многогранника, и его использование дает простое доказательство равносильности двух других определений. Это доказательство мы изложим ниже. Для наглядности проведем его для случая трехмерного пространства, заметив лишь, что обобщение доказательства на случай любой размерности получается путем очевидной замены всех трехмерных объектов на их n-мерные аналоги, двумерных — на $(n-1)$-мерные, а одномерных — на $(n-2)$-мерные. Читатель, знакомый с геометрией Лобачевского, заметит, что представленное доказательство применимо не только к случаю евклидовых многогранников, но также и к случаю многогранников в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. *Следующие свойства выпуклых многогранников равносильны:*

1. *все двугранные углы нетупые*;
2. *все углы между пересекающимися плоскостями граней нетупые*;
3. *проекция на плоскость любой грани совпадает с этой гранью.*

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1). Очевидно.

1) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим грань F многогранника и двугранные углы при ее сторонах (которые являются нетупыми по условию). Спроектируем каждый из этих углов на плоскость грани F. Эта плоскость является также

плоскостью грани каждого из рассматриваемых двугранных углов. Проекцией нетупого двугранного угла на плоскость своей грани является полуплоскость (сама грань). Поэтому полученные проекции будут являться полуплоскостями, содержащими F; при этом каждая из ограничивающих их прямых содержит по одной стороне грани F. Пересечением этих полуплоскостей будет грань F.

В силу условия выпуклости многогранник содержится в каждом из рассматриваемых двугранных углов, а значит, и в их пересечении. Поэтому его проекция содержится в пересечении проекций этих углов, т. е. в F. Обратное (грань F содержится в рассматриваемой проекции) очевидно.

3) $\Rightarrow$ 2). Предположим противное: угол между плоскостями граней F и F_1 тупой. Тогда проекция любой внутренней точки грани F_1 на плоскость Π грани F лежит по другую сторону от линии пересечения плоскостей этих граней, чем сама грань F. Это противоречит тому, что проекция любой точки многогранника на плоскость Π содержится в F.

Как указал автору Э. Б. Винберг, похожие рассуждения позволяют доказать и более сильный результат — упоминавшуюся выше теорему Андреева. Приведем это доказательство. Опять же ограничимся случаем трехмерного пространства (евклидова или Лобачевского), хотя, как и в предыдущей теореме, доказательство в случае любой размерности принципиально от него не отличается.

Теорема 2. *Плоскости несмежных граней остроугольного многогранника не пересекаются.*

Доказательство. Пусть ℓ — линия пересечения плоскостей граней F и F_1 остроугольного многогранника P. Докажем, что прямая ℓ содержит ребро многогранника P (или, что то же самое, сторону грани F).

Заметим прежде всего, что если прямая ℓ пересекается с отличной от нее прямой m, содержащей некоторую сторону многоугольника F, то образует с ней нетупой угол (среди четырех углов, образуемых парой прямых, мы рассматриваем тот, который содержит F). Действительно, пара прямых ℓ и m образуется при пересечении плоскости грани F многогранника P с парой плоскостей двух других его граней. Поскольку многогранник P остроугольный, попарные двугранные углы, образуемые этими тремя плоскостями, нетупые. Осталось воспользоваться следующей теоремой элементарной стереометрии: если все двугранные углы трехгранного угла нетупые, то и плоские его углы тоже нетупые. Доказательство этой теоремы оставляем в виде упражнения.

Все дальнейшие рассуждения будут планиметрическими: нам не придется выходить за рамки плоскости грани F. Очевидно, что многоугольник F лежит целиком по одну сторону от прямой ℓ, пересекаясь с ней разве что по своим граничным точкам. Спроектируем F на ℓ. Для этого представим F как пересечение всевозможных фигур, имеющих следующий вид: пересечение двух полуплоскостей, одна из которых ограничена прямой ℓ (она одна и та же для всех фигур), а вторая ограничена отличной от ℓ прямой m, содержащей некоторую (каждый раз свою) сторону многоугольника F (во всех случаях из двух возможных полуплоскостей, ограниченных заданной прямой, выбираем ту, которая содержит F). Такая фигура является либо нетупым углом (если прямые ℓ и m пересекаются), либо полосой между двумя непересекающимися прямыми (в противном случае). В обоих случаях фигура обладает следующим свойством: ее проекция на прямую ℓ совпадает с ее пересечением с прямой ℓ (действительно, в первом случае проекция будет лучом — стороной угла, а во втором — прямой ℓ целиком). Легко видеть, что указанное свойство сохраняется при взятии пересечения фигур, поэтому пересечение всех фигур — многоугольник F — также им обладает. Проекция многоугольника на прямую есть отрезок, значит, пересечение F с ℓ — отрезок. Поскольку прямая ℓ не содержит внутренних точек многоугольника F, этот отрезок является его стороной.

Замечание. Для случая сферического пространства приведенные доказательства теорем 1 и 2 напрямую не применимы, поскольку они используют понятие проекции на прямую, которое не всегда определено однозначно (например, невозможно определить проекцию полюса на экватор). Однако сферический случай можно свести к евклидову, так как любой сферический многогранник задает многогранный конус в евклидовом пространстве размерности на единицу больше. Этот конус является евклидовым многогранником. Из справедливости теорем для него следует их справедливость и для исходного сферического многогранника.

Список литературы

[1] Андреев Е. М. *О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского* // Матем. сборник, 1970. Т. 81. №3. С. 445–471.

[2] Андреев Е. М. *О пересечении плоскостей граней многогранников с острыми углами* // Матем. заметки, 1970. Т. 8. №4. С. 521–527.

[3] Бугаенко В. О. *Классификация многогранников Кокстера* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 7. 2002. С. 82–106.

[4] Coxeter H. S. M. *Discrete groups generated by reflections* // Ann. Math., 1934. V. 35. No. 3. P. 588–621.

Прямоугольники на кривой и вложения листа Мёбиуса

В. В. Прасолов

В 1929 г. советский математик Л. Г. Шнирельман доказал, что на любой гладкой несамопересекающейся кривой на плоскости можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами квадрата.[1] Его статья была напечатана малым тиражом в сборнике Комакадемии и впоследствии была перепечатана в журнале «Успехи математических наук» (см. [3]). Это доказательство довольно трудное, оно занимает 5 страниц.

Несколько неожиданные топологические рассуждения позволяют доказать более слабое утверждение: на любой гладкой несамопересекающейся кривой на плоскости можно выбрать четыре точки, являющиеся вершинами прямоугольника. Это доказательство[2] основано на том, что при любом вложении листа Мёбиуса в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ его средняя линия и край зацеплены[3]. Это свойство листа Мёбиуса давно было известно топологам, но недавно появилось очень простое его доказательство, одна из важнейших составных частей которого восходит к знаменитому математику Конвею. Это доказательство мы тоже здесь приведем, но сначала объясним, как из указанного свойства листа Мёбиуса следует существование прямоугольника.

Теорема 1. *На любой гладкой замкнутой плоской кривой γ можно выбрать 4 точки, являющиеся вершинами прямоугольника.*

Доказательство. Каждой паре точек A, B кривой γ сопоставим точку $f(A, B)$ следующим образом. Из середины отрезка AB проведем перпендикуляр к плоскости кривой γ и отложим на нем отрезок длины AB. Конец этого отрезка — это и есть $f(A, B)$. (Все точки $f(A, B)$ мы выбираем в одном и том же полупространстве.) Случай $A = B$ не исключается; в этом случае $f(A, A) = A$.

---

[1] Точнее говоря, Шнирельман доказал свою теорему для замкнутых несамопересекающихся кривых, имеющих непрерывную кривизну или состоящих из конечного числа дуг таких кривых.

[2] Его изложение можно найти на сс. 82–88 книги [5].

[3] Из этого, кстати сказать, очевидным образом следует, что проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ нельзя вложить в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$.

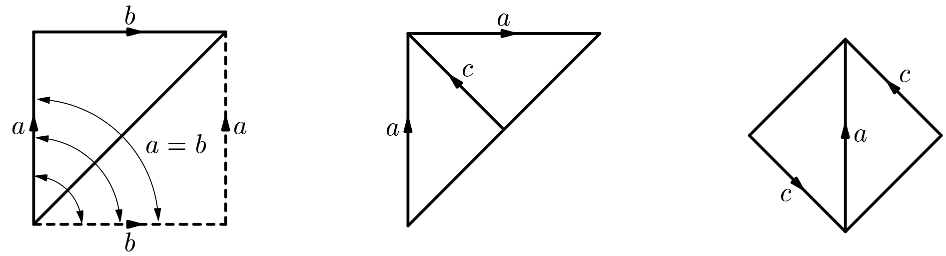


Рис. 1. *Лист Мёбиуса*

Мы получили отображение в $\mathbb{R}^3$ некоторого топологического пространства. Легко видеть, что это пространство представляет собой тор $S^1 \times S^1$, точки которого отождествлены по следующему правилу: $(x, y) \sim \sim (y, x)$ (мы не различаем пары A, B и B, A). Это пространство является листом Мёбиуса. Чтобы убедиться в этом, достаточно посмотреть на рис. 1.

Предположим, что отображение f является биекцией на свой образ. Тогда, в частности, мы получим вложение листа Мёбиуса в трехмерное пространство, которое устроено следующим образом: край листа Мёбиуса лежит в некоторой плоскости, а остальная его часть лежит по одну сторону от этой плоскости. В таком случае край листа Мёбиуса и его средняя линия не зацеплены (чуть позже мы поясним, что это означает). Приходим к противоречию.

Следовательно, найдутся две пары точек A_1, B_1 и A_2, B_2, для которых $f(A_1, B_1) = f(A_2, B_2)$. Это означает, что середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2 совпадают и их длины равны. В таком случае $A_1A_2B_1B_2$ — прямоугольник.

Чтобы двигаться дальше, нужно объяснить, что такое коэффициент зацепления двух гладких ориентированных замкнутых кривых J и K в трехмерном пространстве, которые не имеют самопересечений и попарно не пересекаются. Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления, состоящего из двух кривых J и K, т.е. рассмотрим проекцию кривых J и K на некоторую плоскость и на перекрестках будем отмечать, какая дуга проходит сверху. Будем обращать внимание лишь на те перекрестки, где кривая K проходит над J. Такие перекрестки бывают двух типов (рис. 2). Для каждого рассматриваемого перекрестка возьмем соответствующее значение $\varepsilon_i = \pm 1$ и сложим все числа ε_i. Полученное в результате целое число называют *коэффициентом зацепления* замкнутых ориентированных кривых J и K в S^3 и обозначают $\operatorname{lk}(J, K)$. Можно доказать, что коэффициент зацепления является инвариантом зацепления $\{J, K\}$, т. е.

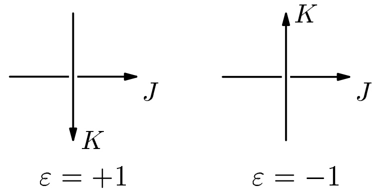


Рис. 2. *Два типа перекрестков*

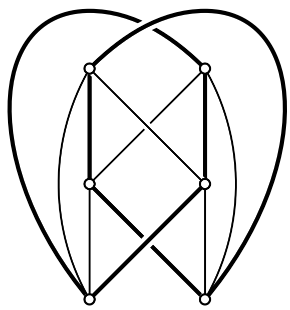


Рис. 3. *Граф K_6 с двумя зацепленными циклами*

он не зависит от выбора диаграммы этого зацепления. (Другие подходы к определению коэффициента зацепления обсуждаются в моей статье [1] в одном из предыдущих выпусков этого журнала; подробно коэффициент зацепления обсуждается в книге [2]).

Рассмотрим вложение в $\mathbb{R}^3$ графа K_6, состоящего из шести вершин, попарно соединенных ребрами. Выберем в графе K_6 три вершины и рассмотрим цикл C_1, порожденный этими тремя вершинами, и цикл C_2, порожденный тремя остальными вершинами. Фиксируем проекцию вложенного в $\mathbb{R}^3$ графа K_6 и определим $\omega(C_1, C_2)$ как остаток от деления на 2 количества перекрестков, на которых цикл C_1 проходит над C_2. Иными словами, $\omega(C_1, C_2) = \mathrm{lk}(C_1, C_2) \pmod 2$, где lk — коэффициент зацепления. В частности, $\omega(C_1, C_2) = \omega(C_2, C_1)$ (доказательство этого свойства коэффициента зацепления приведено в [2]). Поэтому можно рассмотреть число $\lambda(K_6) = \sum \omega(C_i, C_j)$, где суммирование ведется по всем $\frac{1}{2}\binom{6}{3} = 10$ неупорядоченным парам непересекающихся циклов из трех элементов.

Теорема 2 ([7] и [4]). *Для любого вложения графа K_6 в трехмерное пространство $\lambda(K_6) \equiv 1 \pmod 2$. В частности, для любого такого вложения найдется пара зацепленных циклов.*

Доказательство. У графа K_6 есть вложение в $\mathbb{R}^3$, для которого ровно два цикла зацеплены, а все остальные циклы незацеплены (рис. 3).

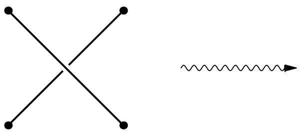


Рис. 4. *Изменение типа перекрестка (пересечение пары ребер)*

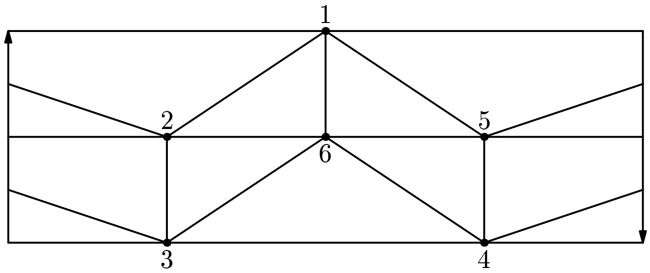


Рис. 5. *Вложение графа K_6 в лист Мёбиуса*

Любое вложение графа K_6 в $\mathbb{R}^3$ можно преобразовать в данное вложение, если при этом допускаются преобразования ребер, изображенные на рис. 4.

Посмотрим, что происходит с $\lambda(K_6)$ при пересечении пары ребер e_i и e_j. Число $\omega(C_p, C_q)$ при этом изменяется лишь в том случае, когда $e_i \subset C_p$ и $e_j \subset C_q$ (или $e_j \subset C_p$ и $e_i \subset C_q$). Непересекающиеся циклы C_p и C_q, содержащие пару ребер e_i и e_j, существуют тогда и только тогда, когда ребра e_i и e_j несмежные. Таких пар циклов для данных ребер e_i и e_j ровно две: к ребру e_i можно добавить одну из двух вершин, которые не входят в e_i и e_j. Таким образом, при пересечении ребра с самим собой или со смежным ребром число $\sum \mathrm{lk}(C_i, C_j)$ не изменяется, а при пересечении ребра с несмежным ребром это число изменяется на ± 2. Поэтому число $\lambda(K_6) = \sum \mathrm{lk}(C_i, C_j) \pmod 2$ не изменяется при всех преобразованиях вложения графа K_6.

Следствие 1. *При любом вложении листа Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ его край зацеплен со средней линией.*

Доказательство. ([6]) Вложим в лист Мёбиуса граф K_6, как показано на рис. 5.

Циклы 134 и 256 соответствуют краю листа Мёбиуса и его средней линии. Несложно проверить, что во всех других парах несамопересекающихся циклов один из циклов заклеен треугольной областью, принадлежащей листу Мёбиуса. Такие циклы не могут быть зацеплены, потому что иначе возникли бы самопересечения листа Мёбиуса. Если циклы C_i и C_j не зацеплены, то $\omega(C_i, C_j) = 0$. Поэтому циклы 134 и 256 зацеплены.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вырежем из вложенной в $\mathbb{R}^3$ проективной плоскости диск D^2. В результате получим лист Мёбиуса. Его средняя линия C зацеплена с $S^1 = \partial D^2$, поэтому C пересекает D^2, чего не может быть.

Список литературы

[1] Прасолов В. В. *Поверхность Зейферта* // Математическое просвещение, вып. 3, 1999. С. 116–126.

[2] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия.* М.: МЦНМО, 1997.

[3] Шнирельман Л. Г., *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых* // Успехи математических наук, выпуск **X**, 1944. С. 34–44.

[4] Conway J. H., Gordon C. McA. *Knots and links in spatial graphs* // J. Graph Theory **7**, 1983. P. 445–453.

[5] Krantz S. G. *Techniques of problem solving.* AMS, 1997.

[6] Maehara H. *Why is P^2 not embedable in $\mathbb{R}^3$?* // Amer. Math. Monthly **100**, 1993. P. 862–864.

[7] Sachs H. *On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs — an open problem* // Lecture Notes Math., **1018**, 1982. P. 231–240.

Двенадцать лет «Геомбинаторики»

А. Сойфер
Принстонский университет;
Центр дискретной математики и теоретической информатики,
университет Ратгерса;
Университет штата Колорадо в Колорадо-спрингс
asoifer@Princeton.edu asoifer@uccs.edu
http://www.uccs.edu/~asoifer/

«Этот ежеквартальный журнал, основанный Александром Сойфером в университете штата Колорадо в Колорадо-спрингс, посвящен геометрии и комбинаторике, но в этих областях он выделяется своим подходом!»

Поль Кайнен, 1991

«Дорогой Алекс, я наконец приступил к октябрьскому номеру «Геомбинаторики», и он содержит еще большую россыпь драгоценностей, чем обычно, — заметки Визинга и Алона сто́ят больше, чем годовая подписка, если уместно оценивать великолепную математику в деньгах, — а почему бы и нет, ведь за произведения искусства постоянно платят деньги…»

Питер Д. Джонсон, 18 декабря 1995

1. Концепция

Весной 1990 года я сформулировал ряд задач и гипотез, относящихся к евклидовой теории Рамсея, и хотел привлечь к ним внимание нескольких коллег — в первую очередь таких, как Пауль Эрдёш, Рон Грэхем и Бранко Грюнбаум. Как это сделать? Можно написать несколько длинных писем о математике, но это займет месяцы! Можно послать ксерокопии, но это будет выглядеть столь безлично; не знаю, кто станет их читать и тем

 Перевод Б. Р. Френкина.

более обдумывать! И вот однажды в июне 1990 года я позвонил Бранко Грюнбауму и предложил следующее решение проблемы:

– Не будет ли полезно издавать небольшой, оперативный журнал, целиком посвященный постановке задач, текущей работе, так что вместо дюжины писем коллегам можно написать всего один обзор?

– Во многих журналах есть рубрика «открытые проблемы», но я не знаю журнала, целиком им посвященного. Подразумеваются ли какие-то рамки?

– Как насчет геометрии с комбинаторным оттенком, «геомбинаторики»?

– Хорошая идея; попробуем ее осуществить.

– Но тогда я жду статей — в каждый номер.

– Хорошо, я попробую.

Теперь вы знаете «всю историю» концепции журнала «Геомбинаторика», который родился годом позже, в июне 1991 года, когда вышел первый номер. Он был тоненьким и содержал всего две статьи, написанных Бранко и мной. Но объём удвоился во втором номере, когда к нам присоединились Пауль Эрдёш и Джон Избелл. И дело пошло.

Что же такое «Геомбинаторика»? Что отличает ее от других журналов?

2. Живая математика

Академические журналы напоминают мне старые кладбища. Они публикуют (хоронят?), причем с большим почтением, законченные исследования и решения задач. При этом публикации появляются через пару лет или позже после завершения работы. Но тогда эти результаты вряд ли представляют большой интерес не только для читателей, но и для самих авторов: прошли годы, и активно работающий математик, вероятно, занят чем-то другим!

«Геомбинаторика», возможно, — единственное издание, целиком посвященное *продолжающимся исследованиям*. Здесь вы получите удовольствие от *живой математики*!

В сущности, это — совместное творение сравнительно небольшого числа активных подписчиков, разбросанных по всему миру, которых объединяет желание развивать комбинаторную геометрию и делиться друг с другом новыми задачами, идеями, свежими результатами, пока они еще интересны им самим — а, значит, могут заинтересовать и других.

И как только очередной номер выходит из печати, его содержание подхватывается и распространяется среди сотен тысяч других математиков благодаря таким изданиям, как Mathematical Reviews, Zentralblatt für Mathematik и Mathematics Abstracts.

3. Содержательность и доступность

Статьи для нашего журнала пишутся, чтобы их *читали*. Читали многочисленные активно работающие математики, от одаренных школьников и студентов до сложившихся исследователей. Задачи, которые мы публикуем, обладают классической ясностью. На самом деле понять их может каждый — фокус в том, чтобы их решить. Статьи, как правило, содержат историю проблемы, частичные результаты, гипотезы автора и библиографию.

Распространено мнение, что молодых студентов не следует привлекать к работе над открытыми проблемами. Мы отвергаем такую дискриминацию по возрастному признаку и предоставляем молодым читателям возможность отправиться в свободное самостоятельное плавание. Так, диссертация Поля О'Доннелла из университета Ратгерса выросла из некоторых его ранних статей по хроматическому числу плоскости, появившихся на страницах «Геомбинаторики». Последняя статья Поля О'Доннелла [1], вышедшая в 2000 году, содержала решение старой и хорошо известной задачи, поставленной Паулем Эрдёшем в 1976 г., о существовании графов единичных расстояний с хроматическим числом 4 и произвольно большим обхватом. Поль доказал, что они существуют!

У нас есть немало молодых подписчиков. Более того, у нас есть авторы из числа школьников и студентов. По этому поводу лучше всего сказал Томас Пьетрахо, школьник из Вермонта (письмо от 29 августа 1991 г.):

«Хотя я не решил никакой задачи (то есть еще не решил), я знаю, что много получу от таких публикаций... И если музы даруют мне свою помощь, я немедленно пошлю вам свои решения.»

4. Комбинаторная и дискретная геометрия

Небольшое издание не может охватить всю ширь сегодняшней математики. Поэтому «Геомбинаторика» изначально сосредоточилась на комбинаторной и дискретной геометрии и смежных вопросах. Приглашаем математиков, работающих в других областях, создать аналогичные журналы, посвященные живой математике.

Но мы ни перед кем не воздвигаем искусственных барьеров. «Геомбинаторика» опубликовала (мое) историческое исследование о П. Й. Х. Боде, Б. Л. ван дер Вардене и И. Шуре, а также воспоминания многочисленных сотрудников и коллег о Пауле Эрдёше и Бранко Грюнбауме.

Мы даже готовы иногда помогать людям в творческой деятельности иного рода. Когда знаменитый русский поэт Евгений Евтушенко, выступая в Колорадском колледже, пожаловался, что никто не хочет публиковать его новое спорное произведение, я предложил ему страницы «Геомбинаторики»!

5. Эпилог

У нас есть страница в сети:

`http://www.uccs.edu/~asoifer/geombinatorics.html`

Она включает содержание каждого номера за первые 12 лет, указатель авторов и список редколлегии. Будущие авторы могут найти там правила оформления и образец договора об авторских правах.

«Геомбинаторика» обязана своим успехом многим коллегам со всего мира, которые в течение двенадцати лет обогащали этот журнал своими мыслями и стремлениями. Его зрелость была признана, когда Mathematical Reviews и Zentralblatt für Mathematik объявили журнал «изданием высокой плотности реферирования» (это означает, что реферируются все статьи из «Геомбинаторики» в окончательном варианте).

Задачный стиль «Геомбинаторики» в большой степени был сформирован более чем двадцатью статьями Пауля Эрдёша, посвященными формулировкам нерешенных задач, а также его бесчисленными докладами, посвященными нерешенным проблемам. Пауль являлся редактором нашего журнала, но при этом внес весомый вклад и в его содержание: он написал пятнадцать эссе для двадцати одного номера «Геомбинаторики», вышедшего при его жизни.

Бранко Грюнбаум из Вашингтонского университета был редактором «Геомбинаторики» с момента ее рождения. Его материалы сыграли решающую роль в успехе и даже просто выживании журнала. Разнообразные по темам, но всегда написанные свежо и на высочайшем уровне, они служат основой журнала. Их регулярность также не имеет аналога: Бранко написал 39 статей для 50 номеров «Геомбинаторики», вышедших к настоящему времени.

Кроме того, эссе Пауля Эрдёша и Бранко Грюнбаума стимулировали появление многочисленных статей других авторов.

Наши редакторы Хейко Харборт (Брауншвейгский технический университет), Ярослав Несетрил (Карлов университет в Праге), Питер Джонсон мл. (университет Обёрн) и Янош Пах (Курантовский институт математических наук и Венгерская академия наук) не только опубликовали на страницах «Геомбинаторики» собственные замечательные статьи, но и привлекли молодых талантливых авторов.

Список литературы

[1] O'Donnell, Paul. *Arbitrary Girth, 4-Chromatic Unit Distance Graphs in the Plane* // Geombinatorics IX(3), 145-150; IX(4), 180-193.

Треугольники в выпуклых многоугольниках

А. Сойфер
Университет штата Колорадо,
Колорадо-Спрингс

П. Эрдёш
Институт математики
Венгерской академии наук

Во время совместной встречи Нового 1992 года в Колорадо-Спрингс нам пришел в голову ряд «максминных» задач.

Пусть S — конечное множество точек на плоскости. Символ $\min\Delta(S)$ будет обозначать наименьшую площадь треугольника, все вершины которого содержатся в S. Выпуклый n-угольник P_n в этой статье понимается как множество его n вершин. Однако мы будем говорить о его внутренности, имея в виду внутренность его выпуклой оболочки.

Вначале заметим, что из предложения 2 статьи А. Реньи и Р. Суланке [1] вытекает изящное следствие:

Результат 1. Среди всех выпуклых n-угольников P_n единичной площади величина

$$\Delta(n,0) = \max(\min\Delta(P_n))$$

достигается, когда P_n является аффинным образом правильного n-угольника.

Поставим следующую задачу:

Задача 2. Для совокупности всех n-угольников P_n единичной площади и всех точек из их внутренности найдите

$$\Delta(n,1) = \max(\min\Delta(P_n \cup \{p\}))\ .$$

Найдите все конфигурации $P_n \cup \{p\}$, реализующие этот максимум.

Для $n = 4$ эта задача решена в [2, гл.9]: $\Delta(4,1) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. Соответствующая оптимальная конфигурация (с точностью до аффинных преобразований) показана на рис. 1 для равностороннего треугольника со стороной 1. (Чтобы сделать его площадь единичной, нужно применить гомотетию.)

В общем виде задача формулируется так:

©CEME. Geombinatorics, vol. II, No 4, 1993. P. 72–74. Перевод Б. Р. Френкина.

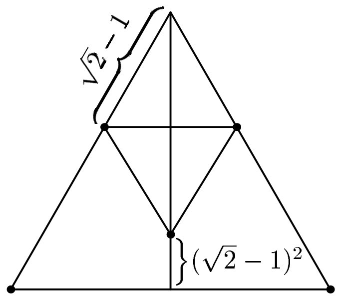


Рис. 1.

Задача 3. Для совокупности всех выпуклых n-угольников P_n единичной площади и всех k-элементных множеств S_k из их внутренности найдите

$$\Delta(n,k) = \max(\min \Delta(P_n \cup S_k)) \ .$$

Вопрос представляется интересным как для малых, так и для больших значений k, например для $k = n$. При больших k он связан со следующей хорошо известной проблемой Хейльбрауна:

> Пусть даны n точек в квадрате (или круге) единичной площади. Найдите максимум минимальной площади треугольника с вершинами в каких-либо из этих точек.

Список литературы

[1] A. Rényi, R. Sulanke. *Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten* // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 2(1963), 75 – 84.

[2] A. Soifer. *How Does One Cut a Triangle*? Center for Excellence in Mathematical Education, Colorado Springs, 1990.

Дырявые изогональные колонны

Б. Грюнбаум*
Университет штата Вашингтон,
Сиэттл

Перед вами продолжение заметки [3] о бесконечных многогранниках. Мы заимствуем оттуда терминологию и дадим здесь лишь краткие пояснения основных понятий. Под *бесконечным многогранником* P мы понимаем бесконечное семейство плоских выпуклых многоугольников (его *граней*) с попарно непересекающимися внутренностями; при этом каждая сторона каждой грани является стороной еще одной и только одной грани и называется *ребром*, а ее концы называются *вершинами* многогранника P. Грани, рёбра и вершины должны удовлетворять условиям, обычно выполненным в многогранниках и сформулированных явно в [3]. Однако подчеркнем, что так как от многогранника не требуется выпуклость, то нет оснований предполагать, что его грани лежат в разных плоскостях. И действительно, замощение плоскости многоугольниками подпадает под наше определение бесконечного многогранника.

Нас будут интересовать *изогональные* (или *вершинно-транзитивные*) многогранники, т. е. такие, в которых все вершины взаимно эквивалентны относительно симметрий многогранника. В заметке [3] мы в основном занимались *однородными* многогранниками, т. е. такими изогональными многогранниками, у которых все грани — правильные многоугольники; при этом мы считали многогранник периодичным в трех независимых направлениях.

Изогональным (в том числе однородным) многогранникам, периодичным в двух независимых направлениях, посвящено большое число публикаций. Имеется обширная литература по замощениям плоскости с такими свойствами (см., например, [4, главы 2 и 6] и приведенную там библиографию). В работе [5] рассмотрено большое число однородных многогранников, периодичных в двух направлениях, но не лежащих в плоскости; исчерпывающее исследование изогональных многогранников такого рода содержится в недавно подготовленной диссертации Уильяма Т. Веббера. Некоторые из этих «пластин» имеют «дыры», т. е. их топологический род

*Работа частично поддержана грантом NSF # DMS-9008813.

бесконечен. Простейшие примеры строятся следующим образом: замостим две параллельные плоскости квадратами, удалим некоторое множество квадратов из каждой плоскости и соединим образовавшиеся дыры «трубами», состоящими из четырех квадратов.

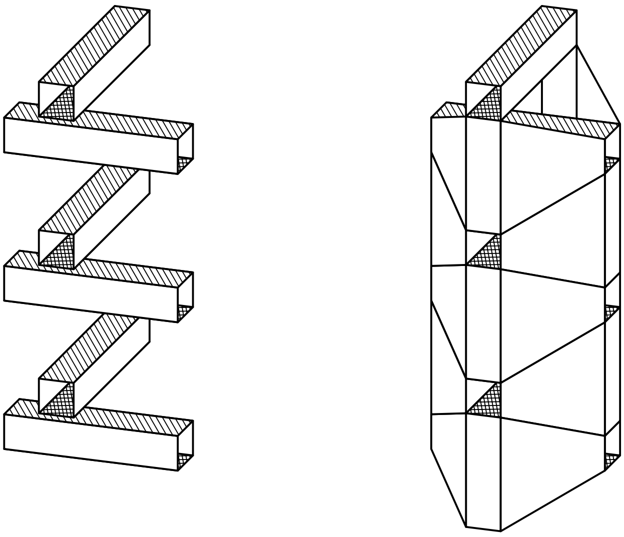
Изучались и изогональные (в том числе однородные) многогранники, периодичные в одном направлении; в соответствии с их очертаниями такие многогранники можно назвать «колоннами (columns)». Однородные колонны легко составить из призм и антипризм (удалив общие основания соседних компонент). Такие и некоторые другие колонны показаны на иллюстрациях в работе [5]. Интересная колонна получается из правильных тетраэдров; Бакминстер Фуллер назвал ее «тетрагеликс» (tetrahelix) (см. [2] и [1]; в последней работе рассмотрены также обобщения на высшие размерности). Существует и много других способов строить изогональные колонны.

Однако в литературе нет упоминаний об однородных или изогональных колоннах более высокого рода. Цель данной заметки — восполнить этот пробел.

Вначале опишем одно бесконечное семейство «дырявых» изогональных колонн; примеры приведены на рис. 1 и 2. Поскольку чертеж готового многогранника не выражает его структуру достаточно ясно, мы опишем и проиллюстрируем само построение. Сделаем «дыры» («внутренние проходы»), показанные в части (а) обоих рисунков. В общем случае каждая «дыра» состоит из призмы, в основании которой лежит $2n$-угольник (n целое, $n \geqslant 2$), все углы которого равны, а длины сторон поочередно принимают два различных значения; при построении бесконечной колонны нужно удалить боковые грани призм, содержащие более короткие стороны оснований. Расположим такие «раскрытые» призмы вертикально одну над другой через равные промежутки и повернем каждую относительно предыдущей на угол $\pi/n(= 180^\circ/n)$. На рис. 1(а) изображен простейший случай ($n = 2$), а на рис. 2(а) — случай $n = 4$, который, вероятно, лучше иллюстрирует общую ситуацию. Чтобы построить колонну, добавим снаружи подходящую «обшивку», соединяющую «дыры», которые при этом сохраняются; в результате получается многогранник.

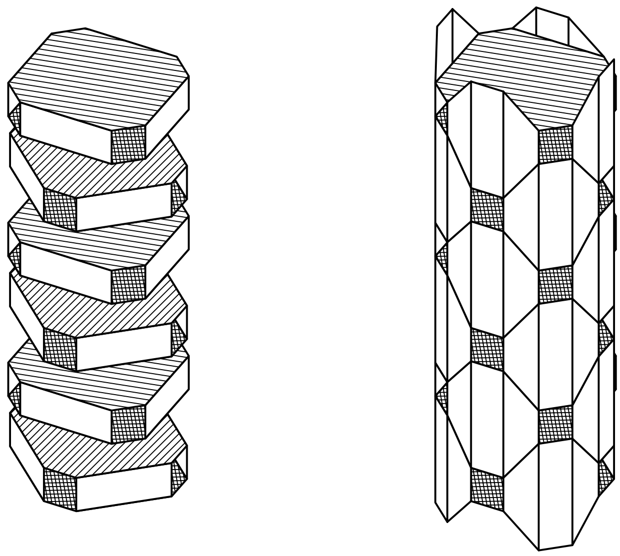
Очевидно, что многогранники, построенные таким образом, изогональны, причем к каждой вершине примыкают пять четырехугольников (два — из стенок «дыры» и три — из «обшивки»). С точностью до подобия и числа n, многогранник зависит от трех параметров, которые могут принимать произвольные положительные значения: это высота призмы, расстояние между соседними призмами и отношение (большее чем 1) длин двух соседних сторон основания.

Интерес к таким многогранникам отчасти определяется следующим предположением:



(a) (b)

Рис. 1.



(a) (b)

Рис. 2.

Гипотеза 1. Не существует изогональных колонн бесконечного рода, кроме описанных выше.

Если это верно, то становится понятным отсутствие упоминаний в литературе об однородных колоннах бесконечного рода. Сформулируем это следующим образом:

Гипотеза 2. Не существует однородных колонн бесконечного рода.

Список литературы

[1] H.S.M. Coxeter, The simplicial helix and the equation $\tan nq = n \tan \Theta$. *Canad. Math. Bull.* 28 (1935), 385-393.

[2] R.B.Fuller, *Synergetics*, Macmillan, New York (1975).

[3] B. Grünbaum, Infinite uniform polyhedra. *Geombinatorics* II(1993), 53-60.

[4] B. Grünbaum and G.C.Shephard, *Tilings and Patterns.* Freeman, New York (1987). Тж. в: *Tilings and Patterns: An Introduction.* Freeman, New York (1989).

[5] A.Wachman, M.Burt, and M.Kleinmann, *Infinite Polyhedra.* Faculty of Architecture and Town Planning, Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel (1974).

Наш семинар: математические сюжеты

Сумма обратных квадратов

К. П. Кохась*

В этой заметке мы рассказываем о том, как можно разными способами найти значение суммы

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots .$$

Вероятно, все изложенные здесь способы являются известными. Да и попытки устроить ревизию в этом хозяйстве уже тоже предпринимались.

Толчком к написанию этого текста послужило наблюдение, изложенное в параграфе 7, пополнению коллекции доказательств сильно помогли статья [12] и дискуссии в [18].

1. Метод Абеля

Воспользуемся стандартным способом нахождения сумм — методом Абеля. Его проходят в конце первого курса. Способ состоит в следующем. Чтобы найти сумму сходящегося ряда $\sum a_k$, рассматривают степенной ряд $f(x)=\sum a_k x^k$. По теореме Абеля радиус сходимости этого ряда не меньше 1. Есть много различных приемов работы со степенными рядами и если мы каким-нибудь образом сумеем найти явную формулу для функции $f(x)$, то тогда $\sum a_k = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$. Итак, положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}.$$

*Поддержано грантом НШ–2251.2003.1

Тогда

$$xf'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)\,.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx\,. \tag{1}$$

К сожалению, интеграл «не берется». Думаем, с этой трудностью сталкивались многие первокурсники.

Придется идти другим путем. Впрочем, чуть позже мы все-таки вычислим этот интеграл при помощи комплексного интегрирования (с помощью вычетов).

2. Разложим синус или что-нибудь на множители

Вот рассуждение, принадлежащее Эйлеру. Рассмотрим формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\,. \tag{2}$$

Выражение в правой части (ряд) представляет собой «многочлен бесконечной степени». Естественно, что раз степень этого «многочлена» бесконечна, то у него должно быть бесконечно много корней. Это замечание прекрасно соответствует нашим знаниям о функции $\sin x$: действительно эта функция имеет бесконечно много корней, а именно, все точки вида πn, $n \in \mathbb{Z}$ (и кстати, других комплексных корней нет). Попробуем разложить эту функцию на множители. Здесь нужно действовать аккуратно: например, разложение

$$\sin x = x(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\ldots$$

вряд ли может быть верным, сомножители при фиксированном x стремятся к бесконечности, да и все коэффициенты при раскрытии скобок получаются целочисленными кратными π, что не соответствует формуле (2). Для того чтобы получить более «правильное» разложение, давайте перенормируем скобки: вместо скобки $(x - k\pi)$, обращающейся в нуль при $x = k\pi$, возьмем $(1 - \frac{x}{k\pi})$. Кроме того сгруппируем вместе скобки, соответствующие корням $\pm k\pi$. Получим

$$\sin x = x\Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\ldots\,. \tag{3}$$

Это разложение уже более правдоподобно: произведение в правой части сходится при любом вещественном (и даже комплексном) x. Да и коэффициент при младшем члене (т. е. при x) такой, как надо: если раскрыть все скобки в правой части, то, ясное дело, коэффициент при x будет равен единице.

Давайте тогда вычислим коэффициент при x^3 в формуле (3). В левой части коэффициент при x^3 равен $-1/6$, это мы знаем из формулы (2). А в правой части коэффициент равен... постойте, постойте... ну да, он равен $-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots\right)$. И мы приходим к замечательному равенству

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\,. \tag{4}$$

Разумеется, рассуждения, которыми получена эта формула, не претендуют на звание «доказательство». Но по большому счету они верны. Теорема о разложении функции $\sin x$ в бесконечное произведение (т. е. формула (3)) доказывается в курсе анализа или ТФКП (см. [5, 8]).

* * * * * *

Вариацией на эту же тему является вот какой подход: давайте подберем какую-нибудь разумную последовательность многочленов, у которых корнями являются не то чтобы сами дроби $1/n^2$, а какие-то асимптотически близкие к ним выражения, после чего выполним предельный переход.

Например, сделаем так ([12]). Возьмем нечетное число $n = 2m+1$. Нетрудно проверить, что тогда

$$\sin nx = P_n(\sin x),$$

где P_n — многочлен степени n. Подставляя $x = k\pi/n$, мы видим, что числа $\sin(k\pi/n)$, $-m \leqslant k \leqslant m$, являются корнями этого многочлена, а так как их здесь ровно n, то других корней нет, следовательно,

$$P_n(y) = ny\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{y^2}{\sin^2(k\pi/n)}\right).$$

Здесь нормировочный коэффициент n в правой части подобран из тех соображений, что $\lim\limits_{y\to 0} P_n(y)/y = n$. Таким образом,

$$\sin nx = n\sin x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2(k\pi/n)}\right).$$

Приравнивая коэффициенты при x^3 разложений Тейлора в нуле левой и правой частей, получаем

$$-\frac{n^3}{6} = -\frac{n}{6} - n\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2(k\pi/n)}\,,$$

и следовательно,

$$\frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{1}{6n^2}\,. \tag{5}$$

Теперь зафиксируем натуральное число M и будем полагать, что число m, которое мы выбрали с самого начала, больше чем M. Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=M+1}^{m} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)}\,.$$

В правой части воспользуемся неравенством $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, верным при $0 < x < \pi/2$:

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} < \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=M+1}^{m} \frac{1}{4k^2}\,.$$

Пусть теперь $m \to +\infty$ (и вместе с ним $n = 2m+1$ тоже стремится к бесконечности), в пределе получим

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k^2\pi^2} \leqslant \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}\,.$$

Наконец, устремим и M к бесконечности. Поскольку в правой части написан хвост сходящегося ряда, мы сразу получаем (4). Первоисточник этого рассуждения — [14].

* * * * * *

А теперь чуть менее техническое рассуждение. Вероятно, читатель учил когда-то в школе формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

Знаете, что за двойка стоит в числителе? Это на самом деле коэффициент C_2^1. А знаете, что за минус единица стоит в знаменателе? Это, конечно же $(-1)^{k+1}C_2^k$ при $k=2$. Общая же формула, которую читатель, вероятно, в школе не проходил, выглядит так (мы ее к тому же запишем для котангенсов, а не для тангенсов):

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{1 - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2}\alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4}\alpha - \ldots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1}\alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3}\alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5}\alpha - \ldots}\,. \tag{6}$$

На самом дела эта формула очевидна: подставьте

$$\cos nx = \operatorname{Re}(\cos x + i\sin x)^n, \quad \sin nx = \operatorname{Im}(\cos x + i\sin x)^n$$

и все получится. Для наших целей эта формула хороша тем, что она сразу

же позволяет указать корни многочлена
$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \dots .$$
Вот эти корни:
$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1}, \quad \dots, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} .$$
Действительно, подставляя $n = 2m+1$, $\alpha = k\pi/(2m+1)$ в (6), мы видим, что левая часть бесконечна и при этом все котангенсы в правой части конечны; это может быть только если знаменатель обращается в нуль.

Теперь мы можем подсчитать сумму этих корней по теореме Виета
$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{m(2m-1)}{3} .$$
А заодно, поскольку $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1$, мы можем установить и такое равенство
$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{m\pi}{2m+1}} = \\ = \frac{m(2m-1)}{3} + m = \frac{m(2m+2)}{3} .$$
(Кстати, это в точности равенство (5).)

Ну вот, а сейчас мы вытащим из шляпы зайца. Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\sin\alpha}$ при $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, мы можем заключить из предыдущих двух формул, что
$$\frac{m(2m-1)}{3} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{3\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \\ < \frac{m(2m+2)}{3} .$$
Сокращая на $\dfrac{(2m+1)^2}{\pi^2}$ и переходя к пределу при $n \to +\infty$, получаем равенство (4). Это рассуждение мы взяли из [10, задача 143].

3. Котангенс

Вот еще одно рассуждение от Эйлера. Прологарифмируем равенство (3), после чего возьмем производную, получится
$$\operatorname{ctg} x = \dots + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \dots \tag{7}$$
Дифференцирование законно, поскольку ряд $\dfrac{1}{x} + \sum \dfrac{2x}{x^2 - \pi^2 k^2}$ сходится равномерно в окрестности любой точки $x \neq \pi k$. Между прочим, получилось

довольно разумное равенство, типичное разложение на простейшие, сравните с разложениями

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x+1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P'(x_k)}{x-x_k}$$

(в последнем равенстве $P(x)$ — многочлен степени n, x_k — его (комплексные) корни). В курсе ТФКП, это так и называется: «разложение мероморфной функции на элементарные дроби».

Теперь будем пожинать плоды. Разложим каждую из дробей $\dfrac{1}{x+\pi k}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{x+\pi k} = \frac{1}{\pi k} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{\pi k}} = \frac{1}{\pi k}\Bigl(1 - \frac{x}{\pi k} + \frac{x^2}{\pi^2 k^2} + \ldots\Bigr).$$

Суммируя такие разложения по всем k, получаем формулу

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2}\Bigl(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\Bigr) - \frac{2x^3}{\pi^4}\Bigl(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\Bigr) - \ldots .$$

Чтобы в очередной раз узнать, чему же, собственно, равна сумма $1 + \dfrac{1}{4} + {} + \dfrac{1}{9} + \ldots$, осталось только подсчитать коэффициент при x в тейлоровском разложении в окрестности точки $x_0 = 0$ функции $\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}$. Эта функция только с виду ведет себя в нуле не очень хорошо, но если положить $f(0) = {} = 0$, то она окажется в нуле и непрерывна, и дифференцируема, и даже аналитична; искомый коэффициент равен

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\Bigr)' = \lim_{x\to 0}\Bigl(-\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}\Bigr) = -\frac{1}{3}. \tag{8}$$

И мы снова получаем (4). Кстати, аналогично можно узнать, что сумма обратных четвертых степеней равна $\pi^4/90$ (это можно было также узнать, пользуясь всеми остальными изложенными здесь способами или их обобщениями).

В книге [4], из которой мы взяли это рассуждение, предлагается еще и такой вариант:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1-\sin x} &= \operatorname{ctg}\Bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\Bigr) = \\ &= -2\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{x-\frac{5\pi}{2}} + \frac{1}{x+\frac{7\pi}{2}} + \ldots\right) = \\ &= \frac{4}{\pi}\Bigl(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\Bigr) + \end{aligned} \tag{9}$$

$$+\frac{8x}{\pi^2}\Big(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots\Big)+$$
$$+\frac{16x^2}{\pi^3}\Big(1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+\ldots\Big)+\ldots.$$

Приравнивая коэффициенты при x в левой и правой частях, получаем равенство

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{10}$$

Но сумма обратных квадратов нечетных чисел легко выражается через сумму обратных квадратов всех натуральных чисел:

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots=$$
$$=\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\Big)-\Big(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\ldots\Big)=$$
$$=\frac{3}{4}\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\Big).$$

4. Арктангенс

Вам ничего не напоминает, уважаемый читатель, выражение (9)?

Ну конечно же, это «кусочек» знаменитой формулы Грегори – Лейбница, первого в истории математики ряда, задающего разложение числа π:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots.$$

Возведем это равенство в квадрат! Точнее говоря, сначала запишем его в виде $\pi=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}$, а уж потом возведем в квадрат

$$\pi^2=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}} \underset{n:=r-m}{=}$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})}= \tag{11}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} \tag{12}$$

Законность перемены порядка суммирования (переход от (11) к (12)) здесь нетривиальна, мы не будем это доказывать (у нас *популярная* статья), доказательство можно прочесть в [5, § 1.66], а пока закончим вычисление. Заметим, что в последних суммах при $n \neq 0$ мы имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}} \right) = 0\,.$$

Поэтому двойная сумма (12) равна

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2} = 8\Big(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\Big)\,.$$

Мы опять доказали формулу (10).

5. Теорема о вычетах

Еще один подход к вычислению интересующей нас суммы, родственный использованию формулы (7), основан на применении теоремы о вычетах. Желаете вычислить некоторую сумму? Есть фирменный способ! Подберите такую мероморфную функцию, вычеты которой в особых точках равны слагаемым этой суммы, и вычислите интеграл по контуру, охватывающему все особые точки!

Например, вычислим-ка, чему равно $2+2$. Разложение (7) подсказывает, что есть довольно удобная функция, у которой много особых точек и все вычеты в особых точках равны единице. Эта функция — котангенс! Рассмотрим тогда интеграл

$$\int\limits_{C_R} 2 \operatorname{ctg} z \, dz,$$

где контур C_R изображен на рис. 1 слева. Внутри контура две особые точки, по теореме о вычетах интеграл равен $2\pi i(2+2)$. С другой стороны, в силу π-периодичности котангенса интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника сокращаются, а в силу нечетности сумма интегралов по горизонтальным сторонам равна удвоенному интегралу по верхней стороне. Итак,

$$2\pi i(2+2) = 2 \int\limits_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} 2 \operatorname{ctg} z \, dz = 2 \int\limits_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} \frac{2\cos z}{\sin z} \, dz = 4i \int\limits_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} \frac{1+e^{-2iz}}{1-e^{-2iz}} \, dz\,.$$

Левая часть не зависит от R, а в правой части подынтегральное выражение при $R \to +\infty$ стремится к -1, а сам интеграл — к 2π. Переходя

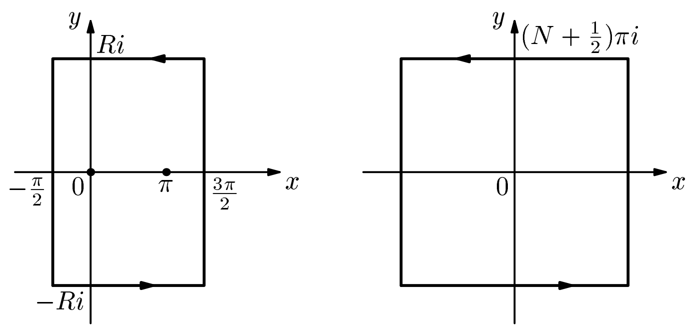


Рис. 1. *К вопросу о том, чему равно 2+2*

к пределу, заключаем, что

$$2+2=4. \tag{13}$$

Как вы понимаете, теперь вычисление суммы $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$ для нас не проблема. Правда, удобнее вычислять удвоенную сумму

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2}\,, \tag{14}$$

где штрих обозначает, что в сумме пропущено слагаемое для $n=0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{C_N} \frac{\pi^2}{z^2}\operatorname{ctg} z\,dz,$$

где контур C_N изображен на рис. 1 справа (здесь N — натуральное число). Мы добавили в подынтегральное выражение множитель π^2/z^2, чтобы вычеты подынтегральной функции стали равны слагаемым нашей суммы. Аналогично предыдущему вычислению интегралы по вертикальным сторонам квадрата сокращаются, а интегралы по горизонтальным сторонам квадрата стремятся к нулю, кстати, тоже из-за множителя $1/z^2$. Кроме того, при $N\to+\infty$ в контур попадает все больше особых точек котангенса. Переходя к пределу, мы получаем, что

$$\operatorname{res}_{z=0}\frac{\pi^2}{z^2}\operatorname{ctg} z \;+\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2}=0$$

Сам вычет мы уже фактически подсчитали в (8). И это дает нам еще одно доказательство формулы (4).

6. Γ-функция

Приведенное вычисление, несомненно, оставит неприятный осадок в душе настоящего эстета. Прозрачная идея, краткость, несложные или хорошо замаскированные технические подробности, — все это прекрасно, но один штрих (а именно: штрих в формуле (14)) сводит на нет все наши усилия: с самого начала вычисления нам пришлось удвоить количество слагаемых!

— Нет ли у Вас такого же халата, но с перламутровыми пуговицами? — спросит нас этот читатель. — Т. е. нет ли у Вас такой функции, особые точки которой находятся в точках $n \in \mathbb{N}$, а вычеты по-прежнему равны единице?

Есть. Есть такая функция! Это логарифмическая производная Γ-функции Эйлера! Ну..., почти.

Саму Γ-функцию можно определить выражением

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx,$$

которое задает ее при $\operatorname{Re} z > 0$. На остальные комплексные значения z ее можно распространить, пользуясь формулой понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{15}$$

Имеет место следующая замечательная формула, которую получают, отталкиваясь от определений и простых свойств Γ-функции, довольно замысловатыми манипуляциями с интегралами (см., например [8, §535–537]):

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} + C = \int\limits_0^1 \frac{1-t^z}{1-t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\Big). \tag{16}$$

Здесь C — это не какая попало константа, а постоянная Эйлера. Эта формула показывает, что функция $\dfrac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}$ действительно обладает нужными нам свойствами: ее особые точки расположены, правда, не в натуральных, а в отрицательных целых точках, ну так и вычеты равны не единице, а минус единице.

Между прочим, все три части равенства (16) можно продифференцировать по z, а потом подставить $z = 0$, получится перспективная для наших целей формула

$$\frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}\bigg|_{z=0} = \int\limits_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,, \tag{17}$$

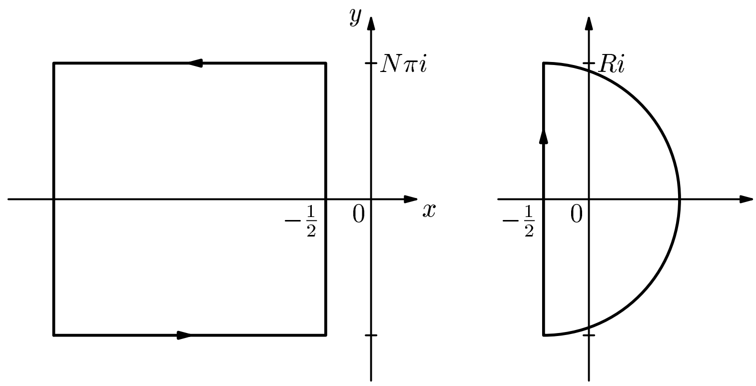


Рис. 2.

которая выражает интересующую нас сумму, впрочем, не вполне понятно через что (и кстати, интеграл в средней части формулы мы уже встречали в параграфе 1). Не будем пока думать об этом, мы поглощены другой идеей. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{S_N} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2\Gamma(z+1)}\,dz,$$

где S_N — квадратный контур, изображенный на рис. 2 слева.

Как ведут себя интегралы по сторонам этого квадрата, когда N растет? Интегралы по горизонтальным сторонам и по левой вертикальной стороне стремятся к нулю, благодаря множителю z^2 в знаменателе, поскольку по формуле (16) подынтегральная функция в этих местах невелика. Переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем равенство

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2\Gamma(z+1)}\,dz.$$

Отметим еще одно достижение человеческой мысли, формулу Вейерштрасса (см. [8])

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{z}{n}\Bigr)e^{-z/n}, \qquad z\in\mathbb{C},\ z\neq -1,-2,-3\ldots$$

(здесь C — по-прежнему постоянная Эйлера). Из этой формулы в частности следует, что $\Gamma(z+1)\neq 0$ при $\operatorname{Re} z > -\dfrac{1}{2}$ и поэтому в полуплоскости

$\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ определена однозначная ветвь функции $\log\Gamma(z+1)$. Тогда проинтегрируем по частям

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2\Gamma(z+1)}\,dz = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz,$$

и чтобы вычислить интеграл в правой части, изобретем подходящий контур (рис. 2 справа):

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=-\frac{1}{2}} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{\pi i}\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}-Ri}^{-\frac{1}{2}+Ri} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz + \int\limits_{\substack{\operatorname{Re} z\geqslant -\frac{1}{2}\\ |z|=\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}}} \frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,dz\right) =$$

$$= -2\operatorname{res}_{z=0}\frac{\log\Gamma(z+1)}{z^3}\,. \qquad (18)$$

Второе слагаемое под пределом — интеграл по полуокружности — стремится к нулю при $R\to+\infty$ опять в силу оценок, которые следуют из формулы (16), а минус перед пределом стоит из-за неправильной ориентации контура. Таким образом, под пределом стоит интеграл по границе полукруга, который мы вычислили по теореме о вычетах.

Осталось подсчитать вычет (18) и тут наша наезженная магистраль упирается в тупик: стандартный способ вычисления вычетов приводит к необходимости найти значение выражения $\left(\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}\right)'$ при $z=0$, т.е. к проигнорированной нами чуть раньше формуле (17)!

7. Немного здравого смысла, везения и комплексного интегрирования

Мы его все-таки вычислим, этот вычет. Вернемся к интегралу (1). Сделаем замену переменных $x = e^{-t}$:

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x-1}\,.$$

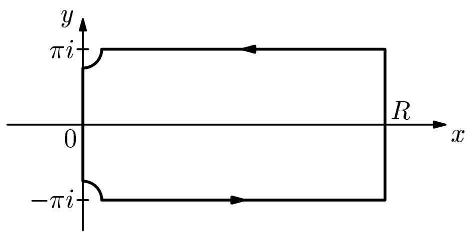


Рис. 3.

Рассмотрим контур $C_{r,R}$, изображенный на рис. 3. Проинтегрируем функцию $\dfrac{z^2}{-e^z-1}$ по этому контуру.

В точках $\pm\pi i$ подынтегральная функция имеет простой полюс с главной частью ряда Лорана $\dfrac{-\pi^2}{x\mp\pi i}$. Поэтому сумма пределов интегралов по дугам, обходящим особые точки $\pm\pi i$, равна $\pi^3 i$. По теореме о вычетах имеем

$$0=\pi^3 i+\lim_{\substack{r\to+0\\ R\to+\infty}}\int\limits_{C_{r,R}}\frac{z^2\,dz}{-e^{-z}-1}=\pi^3 i+\lim_{\substack{r\to+0\\ R\to+\infty}}\left(\int\limits_{\to}+\int\limits_{\uparrow}+\int\limits_{\leftarrow}+\int\limits_{\downarrow}\right)\frac{z^2\,dz}{-e^{-z}-1}\,.$$

Рассмотрим сумму интегралов по горизонтальным сторонам контура:

$$\lim_{\substack{r\to+0\\ R\to+\infty}}\left(\int\limits_{\to}+\int\limits_{\leftarrow}\right)\frac{z^2\,dz}{-e^{z}-1}=$$

$$=\lim_{\substack{r\to+0\\ R\to+\infty}}\int\limits_r^R\frac{(t-\pi i)^2\,dt}{-e^{t-\pi i}-1}-\lim_{\substack{r\to+0\\ R\to+\infty}}\int\limits_r^R\frac{(t+\pi i)^2\,dt}{-e^{t+\pi i}-1}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{-4\pi i t\,dt}{e^t-1}\,.$$

Интеграл по правой вертикальной стороне контура $C_{r,R}$ стремится к нулю из-за экспоненты в знаменателе. Таким образом, получаем равенство

$$0=\pi^3 i-4\pi i\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dt}{e^t-1}-\lim_{r\to+0}\int\limits_{(-\pi+r)i}^{(\pi-r)i}\frac{z^2\,dz}{e^z+1}\,. \tag{19}$$

Теперь заметим, что

$$\frac{z^2}{e^z+1}=-\frac{z^2}{2}\cdot\frac{e^z-1}{e^z+1}+\frac{z^2}{2}\,,$$

причем функция $-\dfrac{z^2}{2}\cdot\dfrac{e^z-1}{e^z+1}$ — нечетна, и следовательно, интеграл от нее по промежутку $[(-\pi+r)i, (\pi-r)i]$ равен нулю. Значит, мы можем переписать равенство (19) в виде

$$4\pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t-1} = \pi^3 i - \int\limits_{-\pi i}^{\pi i} \frac{z^2}{2}\,dz\,.$$

Таким образом, мы находим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{e^t-1} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Это вычисление нам подсказал Е. Горячко.

Заканчивая тему комплексных вычислений, мы приведем еще одно вычисление, связанное с интегралом $\int \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$, при помощи которого можно совсем легко найти сумму обратных квадратов нечетных чисел (мы почерпнули это вычисление в [16]).

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{-1}^{1} \frac{z^k}{k}\,dz = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\log(1-z)}{z}\,dz = -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} \frac{\log(1+z)}{z}\,dz\,.$$

Можно считать, что в правой части мы интегрируем не по отрезку $[-1,1]$, а по полуокружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Тогда введем параметризацию $z = e^{2it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и, избегая не очень содержательных в данном случае замечаний о выборе ветви логарифма, учтем, что $\log(1+e^{2it}) = \ln|1+e^{2it}| + i\arg(1+e^{2it}) = \ln 2\cos t + it$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2}\int_{1}^{-1} \frac{\log(1+z)}{z}\,dz =$$

$$= -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+e^{2it})\,dt = -i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2\cos t\,dt + \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Сравнивая вещественные части самого левого и самого правого выражения, мы опять находим нашу сумму, а сравнивая мнимые части, получаем равенство $\int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$, которое, впрочем, нам не потребуется.

8. Функциональное уравнение для дзета-функции

До сих пор мы старательно обходили еще один подход, чуть ли не самый важный, к вычислению нашей суммы. Обозначим

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

Эта формула задает функцию комплексной переменной $\zeta(s)$ — дзета-функцию Римана — при $\operatorname{Re} z > 1$. Доказательство того, что эта функция аналитична в указанной области, является несложным упражнением для второкурсника. Функция допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Получается функция, имеющая единственный простой полюс в нуле. Нас интересует значение $\zeta(2)$. Кстати, вопрос, чему равно $\zeta(3)$, интересует все прогрессивное человечество.

Известно функциональное уравнение для дзета-функции:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\cos\tfrac{1}{2}\pi s\,\Gamma(s)\zeta(s).$$

Уравнение, эквивалентное написанному, встречается (без доказательства) в одной работе Эйлера 1749 г. Два доказательства этой формулы можно прочесть в [5, §4.44–4.45]. Выразив $\zeta(s)$ из правой части и подставив $s=2$, мы находим, что

$$\zeta(2) = \frac{\zeta(-1)}{2^{-1}\pi^{-2}\cos\pi\,\Gamma(2)} = -2\pi^2\zeta(-1).$$

Нам осталось найти, чему же равно $\zeta(-1)$. А поскольку ответ мы уже знаем, то достаточно проверить формулу

$$1+2+3+4+5+\ldots = -\frac{1}{12}\,. \tag{20}$$

Появление здесь расходящегося ряда, да еще *такого*, не должно шокировать читателя. Работа с расходящимися рядами и вообще с *сомнительными* объектами — это одна из постоянных черт работы математика. Вспомните, например, о производящих функциях, при работе с которыми далеко не всегда задаются вопросом, а определена ли эта функция хотя бы в одной точке (кроме нуля; впрочем, значение производящей функции в нуле мало кого интересует).

Сама формула (20) была известна еще Эйлеру. В книге Харди [9, §13.10] дано доказательство этой формулы, состоящее в том, что предлагается специальный способ суммирования рядов — метод суммирования Рамануджана, который для сходящихся рядов дает их обычную сумму, но кроме того дает конечную сумму для целого класса расходящихся рядов, в том числе для ряда (20). Кроме того при этом не остается сомнений, что мы вычисляем в точности $\zeta(-1)$.

Мы же ограничимся красивым, но трудно формализуемым выводом формулы (20), фактически в стиле [9, §13.12], который принадлежит D. Piponi (мы прочли об этом в заметке J. Baez в [18]).

Рассмотрим дифференциальный оператор $D = \dfrac{d}{dx}$. Формальное вычисление экспоненты дает нам формулу Тейлора

$$(e^{cD} f)(x) = f(x) + cf'(x) + \frac{c^2}{2} f''(x) + \ldots = f(x+c).$$

Эта формула хорошо знакома тем, кто слышал о представлениях группы Гейзенберга и ее алгебры Ли. Суммируя найденные выражения по c и подставляя $x = 0$, получаем

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots = \big((1 + e^D + e^{2D} + \ldots) f\big)(0) = \left(\frac{1}{1 - e^D} f\right)(0).$$

Пусть $f(x) = x$, $F(x) = x^2/2$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда мы имеем соотношение

$$1 + 2 + 3 + \ldots = \left(\frac{D}{1 - e^D} F\right)(0).$$

Для вычисления правой части осталось воспользоваться обычным разложением Тейлора

$$\frac{t}{1 - e^t} = -1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \ldots$$

и тем соображением, что более чем двукратное дифференцирование функции $F(x) = x^2/2$ дает нуль. Формула (20) «доказана».

9. Интегрирование по частям

Следующее рассуждение мы почерпнули в [3], первоисточник — [15]. Пусть

$$I_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2k} x \, dx.$$

Обычное интегрирование по частям дает равенство

$$I_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2k-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin x \cdot (\cos^{2k-2} x \sin x) \, dx =$$

$$= \frac{2k}{2k-1}\, I_{k-1} - \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} x (2x \sin x + x^2 \cos x)\, dx =$$

$$= \dots = \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{1}{2k-1} I_k - \frac{2}{2k(2k-1)} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\, dx.$$

Пользуясь известным равенством

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,, \tag{21}$$

мы получаем соотношение

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k^2}\,.$$

Суммируя эти соотношения по k, мы получаем, что

$$I_0 - I_N = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N^2}\,.$$

Поскольку $I_N \to 0$ при $N \to +\infty$, мы окончательно получаем, что

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{N^2} + \ldots = I_0 = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

10. Арксинус

Знаете, как раскладывают в ряд Тейлора $\arcsin x$ в нуле? Очень просто. Сначала его дифференцируют, получится $(1-x^2)^{-1/2}$. Это выражение раскладывают по биному:

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 - \Bigl(-\frac{1}{2}\Bigr)x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2!}x^4 - \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{3!}x^6 + \dots\,,$$

а потом интегрируют, получается

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}\, x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\, x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\, x^7 + \dots\,.$$

Ну хорошо, подставим в обе части $x = \sin t$ и проинтегрируем по t от 0 до $\pi/2$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} t\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, dt + \frac{1}{2\cdot 3} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 t\, dt + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^5 t\, dt + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^7 t\, dt + \dots\,.$$

Вычисление интеграла в левой части оставим читателю в качестве упражнения, а для интегралов в правой части сгодится формула (21). Итого

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \ldots .$$

Фантастика! Мы взяли это рассуждение в [4] (также как и рассуждения с формулой (3)).

11. Двойной интеграл

Следующее рассуждение, принадлежащее Калаби, мы приводим по [13]. Рассмотрим сумму $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Запишем каждое слагаемое $(2k+1)^{-2}$ в виде $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k}\, dxdy$, тогда сумму можно преобразовать следующим образом

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k}\, dxdy =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (xy)^{2k} \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-(xy)^2}$$

(сумму и интегралы можно поменять местами, например, в силу положительности). Теперь сделаем замену переменных

$$x = \frac{\sin u}{\cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}.$$

Загадочным образом выражение под интегралом превратиться в $1\, dudv$, а область, по которой происходит интегрирование, — в треугольник $\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\right\}$. Таким образом, полученный интеграл равен $\pi^2/8$.

* * * * * *

Следующее рассуждение взято из работы [11] со скромным названием: «Доказательство, которое упустил Эйлер: вычисление $\zeta(2)$». На самом деле, Эйлер упустил предыдущее доказательство.

Запишем сумму нашего ряда в виде двойного интеграла:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1} \right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy}.$$

Мы не будем прослеживать судьбу полученного многострадального интеграла в деталях, об этом можно прочесть не только в цитированной работе, но и в интернете, на страничке

http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeta2.html, в [12] и в других местах. Скажем только, что после замены переменных $x = u - v$, $y = u + v$ и интегрирования по v, получается интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\Bigr)\, du,$$

Который, э-э-э, берется.

12. Ряды Фурье

Сразу несколько способов подсчета суммы обратных квадратов дает теория рядов Фурье. Рассмотрим разложения

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$\frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}\,, \quad x \in [0, 2\pi]$$

и т. д. Из них можно сразу найти значение нашей суммы, подставляя подходящее значение x.

А из разложений

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\,, \quad x \in (0, 2\pi);$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\,, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

и т. д., можно получить значение нашей суммы, если применить равенство Парсеваля.

* * * * * *

Следующее рассуждение (из [12]) принадлежит Е. Старку. Из определения ядра Фейера следует, что

$$\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2 = \sum_{k=-n}^{n} (n - |k|)e^{ikx} = n + 2\sum_{k=1}^{n}(n-k)\cos kx.$$

Пользуясь этой формулой, проинтегрируем по промежутку $[0, \pi]$ функцию $x\bigl(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\bigr)^2$, для этого удобнее взять в качестве n четное число,

$n = 2N$, тогда получаем

$$\int_0^\pi x\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx = N\pi^2 - 8N\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{(2r+1)^2} + 4\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{2r+1}\,.$$

Или

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{(2r+1)^2} + O\Big(\frac{\log N}{N}\Big). \tag{22}$$

Поскольку $\sin\dfrac{x}{2} > x/\pi$ при $0 < x < \pi$, мы можем оценить интеграл в правой части

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x/2}\right)^2 dx < \frac{\pi^2}{8N}\int_0^\pi \sin^2 Nx\frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{8N}\int_0^{N\pi}\sin^2 y\frac{dy}{y} = O\Big(\frac{\log N}{N}\Big).$$

Переходя в (22) к пределу при $N \to \infty$, получаем равенство (10).

Другое рассуждение Старка, ничуть не более изящное, можно прочесть в [17].

13. Формула суммирования Пуассона

Эта формула утверждает, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi nix}dx\,, \tag{23}$$

если функция удовлетворяет разумным условиям аналитичности (в этом случае ее доказывают комплексной техникой, напоминающей рассуждения § 5; см. [2]) или суммируемости (тогда используют преобразование Фурье; см. [6]).

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ни тому, ни другому условию не удовлетворяет, поэтому применим формулу (23) к функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$, а потом перейдем к пределу при $a \to 0$. Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi nix}\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\,e^{-2\pi|n|a}$$

(опять вычисление по вычетам). Следовательно, сумма в правой части (23) равна

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{a}\,e^{-2\pi|n|a} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-2\pi na} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a}\cdot\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\,.$$

Таким образом, в нашем случае формула (23) превращается в равенство

$$\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\,.$$

Что же получится, если мы теперь перейдем к пределу? Думаем, читатель, ни секунды не сомневаясь, ответит: «$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$». Правильно!

14. Теория чисел

Следующее рассуждение — опять из [12]. Обозначим через $r(n)$ количество целочисленных решений уравнения

$$x^2+y^2+z^2+t^2 = n.$$

Хорошо известна формула для $r(n)$ (см., например, [1, предл. 17.7.2]):

$$r(0) = 1, \qquad r(n) = 8\sum_{\substack{m|n,\\ 4\nmid m}} m.$$

Положим $R(N) = \sum\limits_{n=0}^{N} r(n)$. Тогда

$$R(N) = 1+8\sum_{n=0}^{N}\sum_{\substack{m|n,\\ 4\nmid m}} m = 1+8\sum_{\substack{m\leqslant N,\\ 4\nmid m}} m\left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor = 1+8\bigl(\theta(N)-4\theta(N/4)\bigr)\,, \quad (24)$$

где

$$\theta(N) = \sum_{m\leqslant N} \left\lfloor\frac{N}{m}\right\rfloor = \sum_{mr\leqslant N} m = \sum_{r\leqslant N}\sum_{m=1}^{\lfloor N/r\rfloor} m = \frac{1}{2}\sum_{r\leqslant N}\left(\left\lfloor\frac{N}{r}\right\rfloor^2 + \left\lfloor\frac{N}{r}\right\rfloor\right) \quad (25)$$

Найдем асимптотику левой и правой частей (24) при $N\to\infty$. Очевидно, $R(N)$ — это количество точек с целочисленными координатами в четырехмерном шаре радиуса $\sqrt{N}$, эта величина асимптотически равна объему шара, т. е. $\pi^2N^2/2$. Асимптотика $\theta(N)$ видна из формулы (25): $\theta(N) \sim \sim \zeta(2)N^2/2$. Подставляя эти величины в (24), получаем, что $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Список литературы

[1] Айерлэнд К., Роузен М. *Классическое введение в современную теорию чисел.* М.: Мир, 1987.

[2] Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции.* М.: Наука, 1979.

[3] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу.* М.: Наука, 1992.

[4] Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* М.: Наука, 1975.

[5] Титчмарш Е. *Теория функций.* М.: Наука, 1980.

[6] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье.* М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[7] Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа.* Часть вторая. М.: Физматлит, 1963.

[8] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 2. СПб: Невский Диалект, 2002.

[9] Харди Г. *Расходящиеся ряды.* М.: ИЛ, 1951.

[10] Яглом А. М., Яглом И. М. *Неэлементарные задачи в элементарном изложении.* М.: ГИТТЛ, 1954.

[11] Apostol T. M. *A proof that Euler missid: evaluting* $\zeta(2)$ // Math. Intel., 1983. Vol. 60.

[12] Chapman R. *Evaluating* $\zeta(2)$.
`http://www.maths.ex.ac.uk/~rjc/rjc.html`

[13] Elkies N. *On the sums* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)^{-n}}$. `arxiv.org/math.CA/0101168`

[14] Kortram R. A. *Simple proofs for* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ *and* $\sin x =$ $= x\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2})$ // Math. Mag., 1996. Vol. 69. P. 122–125.

[15] Matsuoka Y. *An elementary proof of the formula* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ // Amer. Math. Monthly, 1961. Vol. 68. P. 486–487.

[16] Russel D. *Another Eulerian-type proof* // Math. Mag., 1991. Vol. 60. P. 349.

[17] Stark E. L. *The series* $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}$, $s=2,3,4,\dots$, *once more* // Math. Mag., 1974. Vol. 47. P. 197–202.

[18] `newsgroup: sci.math.research`

Динамические системы с упругими отражениями и механизм ускорения Ферми

Л. Д. Пустыльников

В названии статьи сфокусирована проблема из области физики, однако приводимые ниже утверждения и доказательства носят строго математический характер.

Результаты, описанные в статье, не только дают ответы на поставленные ранее чисто физические проблемы, но и содержат решения возникающих в этой связи чисто математических задач. Методы, обсуждаемые далее, позволяют решать аналогичные проблемы как в области математики, так и механики и физики.

Физическая задача, ответ на которую по существу здесь описан, это поставленная известным физиком Энрико Ферми проблема: объяснить происхождение в космическом пространстве частиц с высокими энергиями на основе статистики механических столкновений частиц с периодически движущимися в космосе макрообъектами (см. [1]). В основе решения этой задачи лежит исследование специального класса динамических систем, описывающих движение материальной точки внутри некоторой области с движущейся границей.

В результате столкновения с границей точка испытывает упругий удар, который будет рассматриваться в дальнейшем как в рамках классической (ньютоновой), так и в рамках релятивистской механики (теории относительности). Для понимания математических утверждений, сформулированных и доказанных в настоящей статье, знание механики и теории относительности не обязательно. Общее описание физической проблемы дано в п. 1, а в пп. 2–4 исследуются три основные динамические системы, связанные с этой физической проблемой. По существу, речь идет о возможности или невозможности ухода на бесконечность траекторий некоторых специальных преобразований, задаваемых элементарными функциями. Эти преобразования обозначаются ниже буквами A, D и S. Несмотря на простоту формулировок полученных результатов (см. теоремы 1, 2 и 3), их доказательства связаны с глубокими теориями в математике. Эти доказательства приведены в работе на уровне идей.

Отметим, что развитые в ходе доказательств методы, примененные к модификациям описанных здесь динамических систем, позволили дать строгое решение стоящей со времен Клаузиуса, Больцмана и Гиббса проблемы обоснования второго начала термодинамики — закона возрастания энтропии — на основе механики ([2]).

1. Проблема обоснования механизма ускорения Ферми

Для объяснения происхождения быстрых частиц с высокими энергиями в космическом пространстве Э. Ферми в 1949 г. в работе [1] предложил статистический механизм, согласно которому энергия частиц при взаимодействии с периодически двигающимися в космосе макрообъектами возрастает. Под макрообъектами здесь следует понимать поля звезд, галактик и других объектов в космосе. Природа этого механизма может быть изучена уже на самых простых механических моделях. С этой целью математик Станислав Улам рассмотрел следующую динамическую систему ([3]), которая впоследствии получила название «модель Ферми – Улама»: упругий шарик движется в вертикальном направлении q между двумя параллельными горизонтальными бесконечно тяжелыми стенками, каждая из которых совершает вертикальные периодические колебания по законам $q = f_1(t)$ и $q = f_2(t)$ (рис. 1). Здесь t — время, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — гладкие функции, имеющие одинаковый период по t, причем $f_2(t) > f_1(t)$ при всех t. Улам предлагал изучать два случая: первый случай, когда $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — синусоиды, и второй случай, когда $f_1(t)$ — синусоида, а $f_2(t) \equiv \ell$, т. е. когда верхняя стенка неподвижна. Гипотеза Ферми и Улама применительно к этой динамической системе состояла в том, что в результате столкновений со стенками энергия шарика будет расти до бесконечности. Эта проблема относится к классической ньютоновской механике, и первоначально ее исследование проводилось численными методами (см. [3]). Однако результаты этих исследований оказались противоположны тем,

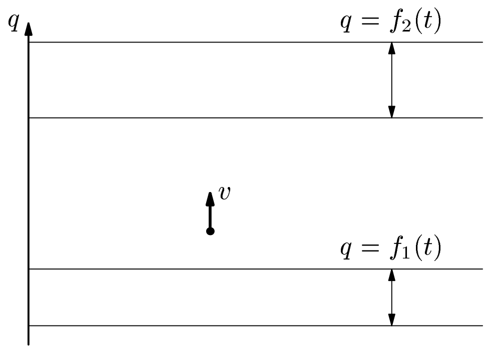


Рис. 1. *Модель Ферми – Улама*

которые ожидались. Несмотря на простоту формулировки проблема Ферми – Улама оказалась, как это часто бывает в математике, нетривиальной, и ее решение было получено только спустя несколько десятков лет впервые в работе [4], а затем в работах [5–7] и в обзоре [2]. Было доказано, что для любых функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ указанного вида и любых начальных данных системы для всех моментов времени $t \geqslant t_0$ скорость и энергия шарика ограничена по модулю некоторой константой, зависящей только от начальных данных в фиксированный момент времени t_0 и не зависящей от t. Таким образом, ответ, дающий решение проблемы Ферми – Улама, оказался отрицательным в рамках классической механики. Однако гипотеза Ферми о возможности неограниченного роста энергии частицы при ее механических столкновениях с периодически движущимися стенками оказывается справедливой, если рассматривать модель Ферми – Улама в рамках теории относительности: неограниченный, растущий по экспоненте от времени, рост энергии шарика возможен для начальных положений и скоростей, расположенных внутри множества, имеющего положительный объём [2, 8].

Этот результат доказан при выполнении следующего условия, введенного в работе [2]: существует вещественное число t_0 и целое число m_0 такие, что справедливы соотношения: $f_1(t) = f_1(t+2\pi)$, $f_2(t) = f_2(t+2\pi)$ при всех t, и

$$\frac{(1+\dot f_1(t_0))(1-\dot f_2(t_0))}{(1-\dot f_1(t_0))(1+\dot f_2(t_0))} > 1, \quad f_2(t_0) - f_1(t_0) = 2\pi m_0 \tag{1}$$

(точка над функцией обозначает дифференцирование по t, т.е. $\dot f(t) = \frac{df}{dt}(t)$). Учет релятивистского фактора в модели Ферми – Улама сказывается только на законе преобразования скорости и энергии шарика при его упругих отражениях от стенок. Он вытекает из законов сохранения энергии и импульса в теории относительности до и после столкновения массивной частицы со стенкой *конечной* массы, а затем перехода к пределу массы стенки к бесконечности.

В п.4 изучается еще одна популярная динамическая система, связанная с механизмом ускорения Ферми. Она описывает движение материальной точки, падающей в поле тяжести с постоянным ускорением на бесконечно тяжелую горизонтальную стенку, которая колеблется в вертикальном направлении согласно периодическому по времени закону и сталкивается с частицей по закону упругого удара (рис. 2). Впервые эта модель была изучена в статье [9], где было доказано существование бесконечного множества (более точно, континуума) начальных данных, приводящих к неограниченному росту скорости шарика. В последующих работах ([10] и [11]) было доказано, что это множество имеет бесконечный объём.

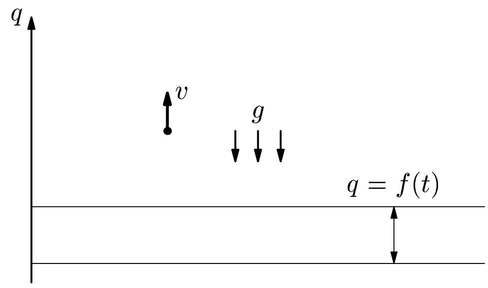


Рис. 2. *Ускорительная модель с одной стенкой в поле тяжести*

2. Модель Ферми – Улама

Для простоты изложения рассмотрим только тот случай модели Ферми – Улама, в котором верхняя стенка неподвижна и задается уравнением $q = \ell$, а нижняя стенка движется в вертикальном направлении q по периодическому закону $q = f(t)$, где $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая 2π-периодическая функция: $f(t) = f(t + 2\pi)$, причем $|f(t)| < \ell$ (рис. 3).

Случай двух колеблющихся стенок мы рассматривать здесь не будем, так как все идеи демонстрируются уже рассматриваемым случаем; отличие лишь в технических деталях.

Теорема 1. *Предположим, что в начальный момент времени t_0 шарик имел скорость v_0. Тогда во все последующие моменты времени $t \geqslant t_0$ абсолютная величина скорости v шарика не превосходит константу, зависящую только от v_0.*

Доказательство теоремы 1. Предположим, что в некоторый момент времени t столкновения с нижней стенкой шарик приобрел скорость $v > 0$, а в следующий за t момент времени t' столкновения ша-

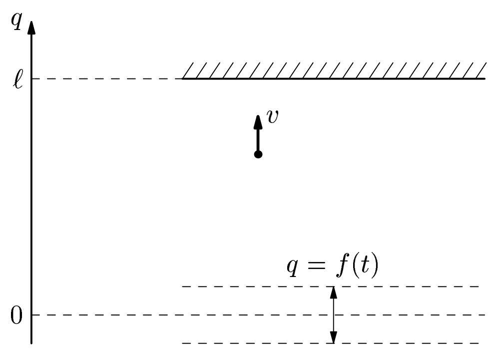


Рис. 3. *Модель Ферми – Улама с неподвижной верхней стенкой*

рика с нижней стенкой он приобрел скорость v'. Пара (t, v) однозначно определяет пару (t', v'). В результате возникает отображение A плоскости $\mathbb{R}^2$ с полярными координатами (t, v) (здесь t — угол, $0 \leqslant t < 2\pi$, а v — радиус), имеющее вид: $A(t, v) = (t', v')$. Отображение A, в силу постановки задачи, задается следующими равенствами:

$$t' = t + \frac{\ell - f(t)}{v} + \frac{\ell - f(t')}{v}; \quad v' = v + 2\dot{f}(t'). \tag{2}$$

Равенство для t' получается прибавлением к t времени движения шарика вверх до столкновения с верхней стенкой и времени движения вниз — после этого столкновения. Равенство для v' легко получается из законов сохранения импульса и энергии в момент времени t' столкновения шарика с нижней стенкой (при вычислениях, естественно, массу нижней стенки следует сначала считать конечной, а затем устремить ее к бесконечности).

Для доказательства теоремы нам потребуется важная лемма (лемма 1), которая дает одно из условий применимости общей теоремы к преобразованию (2). Эта общая теорема позволяет установить, что преобразование A имеет много *инвариантных* (т. е. переходящих в себя под действием A) *замкнутых* кривых. Следует отметить, что без выполнения заключения леммы 1 о пересечении кривой и ее образа инвариантных кривых может и не быть (простейший пример: прибавим к радиусу v одно и то же маленькое число $\varepsilon > 0$).

Лемма 1. Пусть γ — замкнутая кривая без самопересечений на плоскости $\mathbb{R}^2$, окружающая круг достаточно большого радиуса с центром в начале координат $v = 0$. Тогда кривая γ пересекает кривую $A(\gamma)$, являющуюся образом γ при отображении A.

Идея доказательства леммы 1 основана на том, что преобразование A сохраняет «площадь» на плоскости $\mathbb{R}^2$ (здесь кавычки означают, что сохраняется мера, эквивалентная площади). Поэтому, если бы кривые γ и $A(\gamma)$ не пересекались, то одна из них содержалась бы в области плоскости, ограниченной другой кривой. Однако это невозможно в силу того, что «площадь» области, ограниченной γ, должна совпадать с «площадью» области, ограниченной кривой $A(\gamma)$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы 1. (Подробности см. в [4].)

Продолжим доказательство теоремы 1. Мы воспользуемся идеей, которая оказывается полезной при решении многих математических задач: перейти в окрестность бесконечно удаленной точки (бесконечности) и изучить действие преобразования A там. Дело в том, что в формуле (2) для выражения t' есть член $2\ell/v$. При больших v этот член очень мал и входит в качестве слагаемого линейно. Таким образом, в окрестности

$v = \infty$ величина $y = 2\ell/v$ будет мала, — а это нам и нужно для применения общей теоремы. Поэтому введем новую переменную $y = 2\ell/v$ и выразим через нее преобразование A. Нетрудно проверить, что преобразование A, выраженное в переменных t, y, в силу (2) превращается в преобразование $B\colon (t, y) \to (t', y')$, задающееся формулами:

$$t' = t + y + \varphi(y) = t + y - \frac{(f(t) + f(t'))y}{2\ell}\,, \tag{3}$$

$$y' = y + \psi(t, y) = y - \frac{2y^2 \dot f(t')}{2\ell + 2y\dot f(t')}\,. \tag{4}$$

Заметим, что для простоты записи мы ввели функции $\varphi(t, y)$ и $\psi(t, y)$, изображающие дроби в правых частях. Переменная t, как и раньше, играет роль угла, а переменная y — роль радиуса.

Если при достаточно малом числе $\varepsilon > 0$ переменная y удовлетворяет неравенству $|y| \leqslant \varepsilon$, то в силу (3) и (4) справедливы следующие оценки сверху:

$$|\varphi(t, y)| < c_1|y|, \quad \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t, y)\Big| < c_1, \quad |\psi(t, y)| < c_2|y|^2. \tag{5}$$

Здесь c_1 и c_2 — некоторые константы, причем, что очень существенно, константа c_1 удовлетворяет неравенству

$$0 < c_1 < 1. \tag{6}$$

Введем теперь новую переменную r по формуле $r = y/\varepsilon$, причем t будем рассматривать, как и раньше в качестве угловой переменной, меняющейся в области $0 \leqslant t < 2\pi$. В результате действия этого преобразования кольцо $y \leqslant \varepsilon$, $y \neq 0$ (т. е. круг радиуса ε с выколотым центром) растянется и превратится в круг единичного радиуса $r \leqslant 1$ с выколотым центром: $r \neq 0$. Выразив преобразование B через новые переменные t и r, мы получим преобразование $U\colon (t, r) \to (t', r')$, зависящее от малого параметра $\varepsilon > 0$, которое в силу (3) и (4) имеет вид

$$t' = t + \varepsilon r + \omega(t, r), \quad r' = r + \rho(t, r). \tag{7}$$

Функции $\omega(t, r)$ и $\rho(t, r)$ имеют по t период 2π и удовлетворяют, в силу (5), неравенствам

$$|\omega(t, r)| < c_1\varepsilon r, \quad \Big|\frac{\partial\omega}{\partial r}(t, r)\Big| < c_1\varepsilon, \quad |\rho(t, r)| < c_2\varepsilon r^2. \tag{8}$$

В результате мы получим отображение U плоскости $\mathbb{R}^2$, к которому и будет применяться общая теорема о существовании инвариантных замкнутых кривых.

Итак, мы рассматриваем преобразование U в кольце $0 < r \leqslant 1$. Согласно лемме 1, при малом $\varepsilon > 0$ каждая замкнутая кривая в этом кольце,

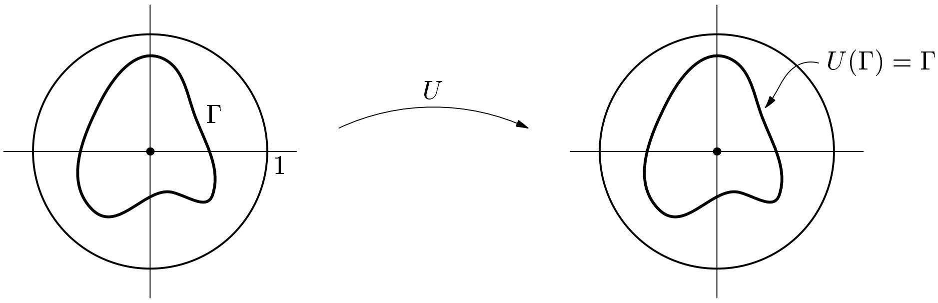


Рис. 4. *Существование инвариантной кривой* Γ *в кольце* $0 < r \leqslant 1$

окружающая точку $r = 0$, пересекается со своим образом при отображении U. Поэтому, если параметр ε — достаточно малое положительное число, то, в силу (7) и (8), мы попадаем в сферу применения общей теоремы о существовании замкнутых инвариантных кривых для отображения кольца, близкого к повороту на угол, зависящий от радиуса, и удовлетворяющего указанному выше свойству пересечения замкнутых кривых с их образами при этом отображении.

Впервые эта теорема при более сильных ограничениях была доказана Ю. Мозером в [12], а ее обобщение, применимое здесь, в котором существенную роль играет неравенство (6), доказано автором в работе [6]. Согласно этой общей теореме, при малом параметре $\varepsilon > 0$ в кольце $0 < r \leqslant 1$ существует замкнутая кривая Γ, окружающая точку $r = 0$ и инвариантная относительно преобразования U (рис. 4). Возьмем прообраз кривой Γ на плоскости t, r при второй замене переменных, т. е. кривую Λ на плоскости t, y. Поскольку Γ инвариантна относительно преобразования U (т. е. $U(\Gamma) = \Gamma$), Λ будет инвариантна относительно преобразования B: $B(\Lambda) = \Lambda$. При этом, напомним, кривая Λ содержится в области $|y| \leqslant \varepsilon$. Сделаем теперь еще один обратный шаг — перейдем от плоскости t, y назад в плоскость t, v. Прообраз кривой Λ в исходной плоскости t, v есть кривая Π, инвариантная относительно исходного преобразования A и содержащая круг, радиус которого будет стремиться к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно, область плоскости t, v, заключенная внутри кривой Π, инвариантна относительно преобразования A, т. е. под действием A она не выходит за пределы этой кривой. Это и означает, что при начальной скорости v_0, по модулю не превышающей радиус этого круга, заключенного в область, ограниченную кривой Π, скорость v в любой другой момент времени t будет также ограничена по модулю.

Теорема 1 доказана.

3. Релятивистский аналог модели Ферми – Улама

В этом разделе мы изучаем тот же частный случай модели Ферми – Улама, что и в п. 2, но в рамках релятивистской механики (теории относительности). Релятивистский эффект здесь проявляется только в том, что упругий удар шарика об осциллирующую нижнюю стенку учитывает законы сохранения импульса и энергии в теории относительности, в то время как закон отражения от верхней неподвижной стенки в точности такой же, как в ньютоновской механике: после удара меняется только направление (но не величина) скорости шарика.

Не ограничивая общности, предположим, что масса шарика равна 1, а все скорости измеряются в долях скорости света, т. е. скорость света полагается равной 1, а абсолютные величины всех остальных скоростей меньше 1. В этом случае, как известно из теории относительности ([13]), скорость шарика v и его энергия E связаны между собой равенством $E = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Так же, как и в предыдущем параграфе, рассмотрим частный случай модели Ферми – Улама, где мы предполагаем, что верхняя стенка — неподвижная и задается уравнением $q = \ell$, а нижняя стенка движется в вертикальном направлении q согласно периодическому закону $q = f(t)$, где $f(t)$ — дифференцируемая 2π-периодическая функция такая, что $|f(t)| < \ell$ (рис. 3). Мы докажем, что в этой модели энергия E может неограниченно возрастать; скорость шарика при этом будет стремиться к скорости света.

Предположим, что после одного из моментов времени t столкновения с нижней стенкой шарик приобрел энергию E, а после следующего за t момента времени t' столкновения с нижней стенкой шарик приобрел энергию E'. Рассмотрим отображение D плоскости с координатами t, E, $D\colon (t,E) \to (t',E')$, которое задается следующими равенствами:

$$t' = t + \sqrt{\frac{E^2}{E^2-1}}\big(2\ell - f(t) - f(t')\big), \tag{9}$$

$$E' = E\frac{1+\dot f(t')}{1-\dot f(t')} + \frac{2\dot f(t')}{1-\dot f^2(t')}\big(\sqrt{E^2-1} - E\big). \tag{10}$$

Равенство (9) для t' получается из первого равенства (2) для t' подстановкой $v = \sqrt{\dfrac{E^2-1}{E^2}}$, а равенство (10) для E' получается из релятивистских законов сохранения импульса и энергии, которые здесь мы опускаем.

Прежде чем формулировать и доказывать точную математическую теорему (теорему 2), укажем основную идею построения траекторий с неограниченным ростом энергии. Для предельного преобразования $\hat D$, введенного в доказательстве и аппроксимирующего преобразование D при неограниченном возрастании энергии, строится специальная резонансная траектория, такая что шарик сталкивается с нижней стенкой в моменты времени, сравнимые с t_0 по модулю 2π (здесь t_0 — число, введенное в условии теоремы 2). Поэтому после каждого удара с нижней стенкой энергия шарика увеличивается примерно в одно и то же число раз, и то же самое справедливо для некоторой окрестности этой траектории, поскольку она оказывается устойчивой (по Ляпунову). Именно в этом и состоит принципиальное отличие релятивистского случая от классического: в рамках ньютоновской механики модель Ферми – Улама вообще не имеет резонансных траекторий!

Теорема 2. *Предположим, что выполнено следующее условие: существует такое число t_0, что $\dot{f}(t_0) > 0$ и $\ell - f(t_0) = \pi m_0$, где m_0 — некоторое положительное целое число. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_0 > 0$ и $E_0 > 0$, что если начальные данные t, E удовлетворяют условиям $|t - t_0| \leqslant \varepsilon_0$, $E \geqslant E_0$, то у траектории преобразования D, $(t_n, E_n) = D^n(t, E)$ $(n = 1, 2, \dots)$, величина энергии E_n стремится к бесконечности при $n \to \infty$, причем ее рост быстрее, чем экспоненциальный: $E_n > cEk_0^n$, где $k_0 = \dfrac{1 + \dot{f}(t_0)}{1 - \dot{f}(t_0)} > 1$, а $c > 0$ — константа, не зависящая от t, E и n.*

Замечание. В общем случае, когда двигаются две стенки, условие теоремы 2 заменяется на условие (1), п. 1.

Доказательство теоремы 2. Главная идея доказательства теоремы 2 аналогична идее доказательства теоремы 1 и состоит в том, чтобы рассмотреть действие преобразования D в окрестности бесконечно удаленной точки $E = \infty$. Однако здесь переход к бесконечно удаленной точке будет осуществляться по-другому.

С этой целю заметим, что в силу (9) и (10) преобразование D при $E \to \infty$ сходится к преобразованию $\hat{D}\colon (t, E) \to (\hat{t}, \hat{E})$, имеющему вид

$$\hat{t} = t + 2\ell - f(t) - f(\hat{t}), \tag{11}$$

$$\hat{E} = E\frac{1 + \dot{f}(\hat{t})}{1 - \dot{f}(\hat{t})}\,, \tag{12}$$

а модули разностей $|\hat{t} - t'|$, $|\hat{E} - E'|$ являются величинами порядка $1/E$, т. е.

$$|\hat{t} - t'| + |\hat{E} - E'| < \frac{\hat{c}_1}{E}\,, \tag{13}$$

где $\hat{c}_1$ — константа, не зависящая от переменных t и E.

Введем новую переменную $\eta = \ln E$. Тогда преобразования D и $\hat{D}$, выраженные через переменную η, перейдут соответственно в преобразования P и $\hat{P}$:

$$P\colon (t, \eta) \to (t', \eta'), \quad \hat{P}\colon (t, \eta) \to (\hat{t}, \hat{\eta}), \tag{14}$$

где

$$\eta' = \ln E', \quad \hat{\eta} = \ln \hat{E}, \tag{15}$$

а величины t' и $\hat{t}$ здесь те же, что и в (9) и (11). При этом неравенство (13) переходит в неравенство такого же вида:

$$|\hat{t} - t'| + |\hat{\eta} - \eta'| < \frac{\hat{c}_2}{E}, \tag{16}$$

где $\hat{c}_2$ — константа, не зависящая от переменных t и η.

Теперь естественно ввести, в силу (12), функцию $F(t) = \ln \dfrac{1 + \dot{f}(\hat{t})}{1 - \dot{f}(\hat{t})}$, где $\hat{t} = \hat{t}(t)$ — величина, определенная с помощью равенства (11). Из равенства (11) и условия теоремы 2 следует, что

$$\hat{t}(t_0) - t_0 = 2\ell - f(t_0) - f(\hat{t}_0) = 2\pi m_0, \quad \frac{d\hat{t}}{dt}(t_0) = \frac{1 - \dot{f}(t_0)}{1 + \dot{f}(t_0)} = \frac{1}{k_0} < 1, \tag{17}$$

а в силу равенств (12), (15) и определений (14) и функции $F(t)$ получаем:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}(t, \eta) = \eta + F(t), \quad \hat{\eta}(t_0, \eta) = \eta + \ln k_0. \tag{18}$$

Из (17) видно, что t_0, рассматриваемое на окружности $0 \leqslant t < 2\pi$, является неподвижной точкой преобразования (11), причем эта точка притягивает некоторую свою окрестность — в силу того, что $\dfrac{d\hat{t}}{dt}(t_0) < 1$. В то же время переменная η растет под действием преобразования $\hat{P}$ как арифметическая прогрессия с положительной разностью.

Действительно, согласно условию теоремы 2, m_0 — целое число, а функция $f(t)$ имеет период 2π по t; поэтому из первого равенства (17) и равенства (18) следует, что у траектории $(\hat{t}_0^{(n)}, \hat{\eta}_0^{(n)}) = \hat{P}^n(t_0, \eta)$ преобразования $\hat{P}$ (здесь $\hat{P}^n$ — n-я итерация $\hat{P}$) при всех $n \geqslant 1$ координаты $\hat{t}_0^{(n)}$, $\hat{\eta}_0^{(n)}$ имеют вид арифметических прогрессий:

$$\hat{t}_0^{(n)} = t_0 + 2\pi m_0 n, \quad \hat{\eta}_0^{(n)} = \eta + n \ln k_0, \tag{19}$$

где $\ln k_0 > 0$. Кроме того, из второго равенства (17), и из (18) и (19) следует существование такого числа $\hat{\varepsilon} > 0$, что при $|t - t_0| \leqslant \hat{\varepsilon}$ у траектории $(\hat{t}^{(n)}, \hat{\eta}^{(n)}) = \hat{P}^n(t, \eta)$ координаты $\hat{t}^{(n)}$, $\hat{\eta}^{(n)}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lim_{n\to\infty} (\hat{t}^{(n)} - \hat{t}_0^{(n)}) = 0, \quad |\hat{\eta}^{(n)} - \hat{\eta}_0^{(n)}| < \hat{c}_3 \hat{\varepsilon}, \tag{20}$$

где $\hat{c}_3$ — константа, не зависящая от n, t и η.

Если бы речь шла только о преобразованиях $\hat{D}$ и $\hat{P}$, то из (20) и (19) вытекало бы утверждение теоремы 2. Однако первоначальные преобразования D и P отличаются, хотя и мало, от $\hat{D}$ и $\hat{P}$. Тем не менее, и для них утверждение теоремы 2 будет справедливо. Действительно, применяя неравенства (16), (20) и равенства (15), (19), получим, что существует константа η_0 такая, что если $\eta \geqslant \eta_0$ и $|t - t_0| \leqslant \hat{\varepsilon}$, то у траектории $(t_n, \eta_n) = P^n(t, \eta)$ координата η_n при всех $n \geqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$\eta_n > \hat{c} + \eta + n \ln k_0,$$

где $\hat{c}$ — константа, не зависящая от n, t и η. Положив $c = e^{\hat{c}}$, $\varepsilon_0 = \hat{\varepsilon}$, $E_0 = e^{\eta_0}$, $E = e^{\eta}$, мы видим, что $E_n = e^{\eta_n} > e^{\hat{c}+\eta+n \ln k_0}$, откуда и следует утверждение теоремы 2.

4. Ускорительная модель с одной стенкой в поле тяжести

В этом разделе мы рассмотрим последнюю, третью, модель ускорения частицы.

Пусть $f(t)$ — гладкая периодическая функция, имеющая по t период $T > 0$. Предположим, что бесконечно тяжелая горизонтальная стенка движется в вертикальном направлении q во времени t по закону $q = f(t)$. На стенку падает массивный шарик с постоянным ускорением g и отталкивается от нее по закону упругого удара (рис. 2). Верхней стенки («потолка») в этой модели нет, но из-за силы тяжести шарик каждый раз возвращается к нижней стенке и затем отражается от нее.

Предположим, что после столкновения со стенкой в момент времени t шарик приобрел скорость $v > 0$, а после следующего столкновения со стенкой в момент времени t' шарик приобрел скорость v'. В результате возникает преобразование $S\colon (t, v) \to (t', v')$ плоскости t, v. Точка (t', v') однозначно определяется из следующих равенств:

$$f(t) + v(t' - t) - \frac{g}{2}(t' - t)^2 = f(t'), \tag{21}$$

$$v' = g(t' - t) - v + 2\dot{f}(t'), \tag{22}$$

(точка, как и раньше, — дифференцирование по t). Равенство (21) означает, что шарик движется по дуге параболы, левый конец которой совпадает со значением $f(t)$, а правый — со значением $f(t')$ (см. рис. 5). Формула (22) словесно формулируется так: к скорости $g(t' - t) - v$ падающего вниз шарика добавляется удвоенная скорость движения стенки при упругом ударе с ней шарика (как и в ньютоновской модели Ферми – Улама, см. вторую формулу в (2)).

Для преобразования S будет построена специальная резонансная траектория (см. лемму 2), такая что каждый раз шарик будет попадать на колеблющуюся стенку в одной и той же фазе и, следовательно, будет испытывать один и тот же прирост скорости. Таким образом, скорость ша-

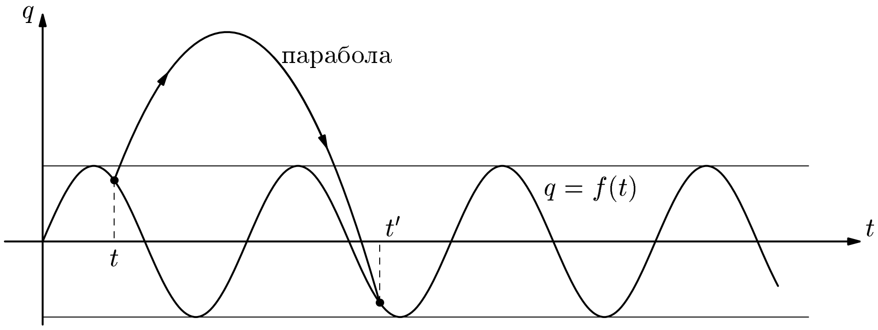


Рис. 5. *График движения шарика во времени t от одной точки столкновения до другой точки столкновения*

рика на этой траектории будет стремиться к бесконечности. Самое же трудное — доказать, что построенная траектория *устойчива* (по Ляпунову), т. е. что при малых отклонениях начальных условий, во все последующие моменты времени отличие отклоненной траектории от исходной будет мало. Устойчивость построенной в лемме 2 траектории позволяет сделать заключение, что для всех близких траекторий скорость шарика на них также будет стремиться к бесконечности. Таким образом, свойство $v \to \infty$ выполняется на множестве положительной (и даже бесконечной) меры начальных данных.

Переходим к теореме 3 и ее доказательству. В ее формулировке используются значки $\dot{f}$, $\ddot{f}$, $\dddot{f}$ и $\ddddot{f}$, которые означают соответственно первую, вторую, третью и четвертую производные по времени.

Теорема 3. *Предположим, что функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Существуют целое $k_0 > 0$ и t_0, такие что*
$$Tgk_0 = 2\dot{f}(t_0), \quad -g < \ddot{f}(t_0) = \beta < 0.$$
(*Первое равенство — условие, позволяющее найти резонансную траекторию; второе — доказать ее устойчивость.*)
2. $\ddot{f}(t_0) \neq -\frac{g}{2} + \frac{g}{2}\cos(2\pi \frac{k}{r})$, *где* $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm r$; $r = 1, 2, 3, 4$.
3. $a_0(\beta)\ddddot{f}(t_0) + a_1(\beta)\dddot{f}^2(t_0) \neq 0$, *где* $a_0(x)$ *и* $a_1(x)$ *— фиксированные функции, не зависящие от функции* $f(t)$.

(*Условия 2 и 3 — чисто технические; они позволяют применить общую теорему об устойчивости неавтономной системы.*)

Тогда на плоскости t, v существует открытое множество начальных данных (t, v), имеющее бесконечную меру (площадь), такое что у *траектории* $(t_n, v_n) = S^n(t,v)$ $(n = 1,2,\dots)$ *преобразования* S *координата* v_n *стремится к бесконечности, и при этом* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{v_n}{n} = Tgk_0$.

Замечание. Множество функций $f(t)$, удовлетворяющих условию теоремы 3, содержит открытое множество в пространстве T — периодических аналитических функций, которому, в частности, принадлежат функции вида $f(t) = h\sin\omega t$, где h, ω взяты из некоторого открытого множества на плоскости h, ω.

Доказательство теоремы 3. Начнем с построения резонансной траектории.

Лемма 2. Предположим, что $2\dot f(t_0) = Tgk_0$, $v_0 = \frac{1}{2}Tgm$, $k_0 > 0$, $m > 0$, k_0 и m — целые числа. Тогда для траектории $(t_n^0, v_n^0) = S^n(t_0, v_0)$ $(n = 0,1,2,\dots)$ выполнены неравенства

$$t_0 = t_0^0 \equiv t_1^0 \equiv \dots \equiv t_n^0 \equiv \dots \pmod T, \quad t_{n+1}^0 - t_n^0 = T(m + 2k_0 n),$$
$$v_n^0 = v_0 + Tgk_0 n$$

(мы полагаем $S^0 = \mathrm{id}$ — тождественное отображение).

Доказательство леммы 2 мы опускаем: оно легко получается из равенств (21) и (22) (см. [11, гл. 2, §1, лемма 1].

Изучим теперь поведение преобразования S в окрестности резонансной траектории (t_n^0, v_n^0) $(n = 0,1,\dots)$, построенной в лемме 2.

С этой целью мы введем бесконечную последовательность отображений S_n $(n = 1,2,\dots)$ фиксированной окрестности W точки $(0,0)$ следующим образом: если $(t,v) \in W$, то

$$(t_n', v_n') = S_n(t,v) \overset{\mathrm{def}}{=} S(t_{n-1}^0 + t, v_{n-1}^0 + v) - (t_n^0, v_n^0). \tag{23}$$

(См. рис. 6, на котором показано, как отображается точка (t,v) из окрестности нуля W под действием отображения S_n.) Из леммы 2 и из формул (21) и (22) следует, что отображения S_n сходятся при $n \to \infty$ к предельному отображению S_∞:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t,v) = S_\infty(t,v),$$

где S_∞ — отображение той же самой окрестности нуля W, имеющее вид:

$$S_\infty\colon (t,v) \to (t_\infty', v_\infty') = \left(t + \frac{2v}{g}, v + 2\dot f(t_0 + t + \frac{2v}{g}) - 2\dot f(t_0)\right). \tag{24}$$

В этом переходе к бесконечности еще раз проявляется общая идея всей работы, согласно которой мы изучаем поведение системы в окрестности бесконечно удаленной точки: S_∞ отвечает точке резонансной траектории, у которой координата v с самого начала равна ∞.

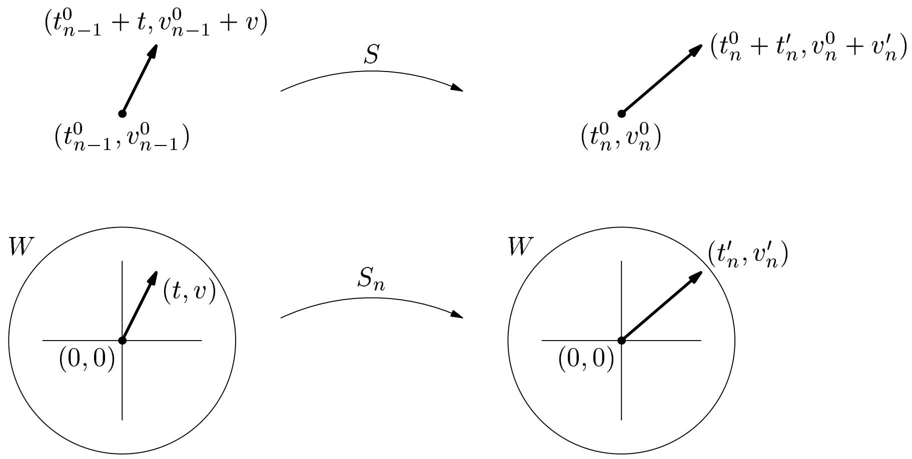


Рис. 6. *Точечное отображение S плоскости t, v в ускорительной модели и порожденная им последовательность S_n отображений векторов в окрестности начала координат плоскости t, v*

В силу (24) преобразование S_∞ сохраняет площадь (якобиан отображения S_∞, как нетрудно видеть, тождественно равен 1), причем начало координат $(0,0)$ — неподвижная точка отображения S_∞. Кроме того, согласно условиям теоремы 3, неподвижная точка $(0,0)$ есть точка общего эллиптического типа, что означает, что линейная часть отображения S_∞ в этой точке в некоторых полярных координатах приводится к повороту окрестности нуля W на угол, отличный от $2\pi k/r$, где r принимает только 4 исключительных значения: $r = 1, 2, 3, 4$, а $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm r$. Поэтому к преобразованию S_∞ в окрестности нуля W можно применить теорему Мозера [12] (о ней уже шла речь в разделе 2), согласно которой точка $(0,0)$ устойчива (по Ляпунову) относительно преобразования S_∞. Эквивалентная формулировка дается следующей леммой 3.

Лемма 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, если $|t| + |v| \leqslant \delta$, то при любом натуральном числе n координаты точки

$$(t^{(n)}_\infty, v^{(n)}_\infty) = S^n_\infty(t, v)$$

удовлетворяют неравенству $|t^{(n)}_\infty| + |v^{(n)}_\infty| \leqslant \varepsilon$.

Переходим к завершающему этапу в доказательстве теоремы 3. Утверждение теоремы 3 об открытом множестве разгоняющихся до бесконечности траекторий преобразования S будет доказано, если будет установлено, что траектория (t^0_n, v^0_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, построенная в лемме 2, *устойчива* относительно S. Последнее же утверждение в силу определения преобразований S_n в (23) (см. рис. 6) сводится к доказательству следующей леммы 4 об устойчивости резонансной траектории.

Лемма 4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, если $|t| + |v| \leqslant \delta$, то при любом натуральном числе n координаты точки

$$(t^{(n)}, v^{(n)}) = S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1(t, v)$$

(где $S_1, \dots, S_n$ — отображения, введенные в (23)) удовлетворяют неравенству $|t^{(n)}| + |v^{(n)}| \leqslant \varepsilon$.

Формальное доказательство леммы 4 весьма сложно; в полном виде оно приведено в работе [11]. Однако с интуитивной точки зрения лемма 4 весьма прозрачна: ведь отображения S_n сходятся при $n \to \infty$ к предельному отображению S_∞, и если в формулировке леммы 4 заменить суперпозицию $S_n \circ S_{n-1} \circ \dots \circ S_1$ отображений $S_1, \dots, S_n$ на n-ю степень $S_\infty^n = \underbrace{S_\infty \circ S_\infty \circ \dots \circ S_\infty}_{n \text{ раз}}$ отображения S_∞, то мы сразу приходим к установленной выше лемме 3.

Заключение

Во всех трех обсуждаемых моделях, связанных с физическим механизмом ускорения частиц, реализованы три различных способа одной и той же общей для них всех идеи — переходу к бесконечности и изучению динамической системы в бесконечно удаленной точке. Результаты исследования для каждой из этих моделей получаются различными. А именно, в *первой* модели (ньютоновская модель Ферми – Улама) скорость и энергия шарика всегда ограничены; во *второй* модели (релятивистская модель Ферми – Улама) скорость шарика ограничена скоростью света, а его энергия может стремиться к бесконечности; и, наконец, в *третьей* модели (ускорительная модель в поле тяжести) как скорость, так и энергия могут стремиться к бесконечности. При этом во второй и третьей моделях соответствующие эффекты справедливы для открытого множества (положительной меры) начальных данных.

Настоящая работа может рассматриваться как результат взаимодействия геометрии с теорией динамических систем и физикой. Однако для каждой из трех моделей, описанных здесь, связь с геометрией различная. Опишем эти геометрические связи более подробно.

- ▹ Модель Ферми – Улама, ньютоновский случай (п. 2): в основе доказательства лежит теорема об инвариантных замкнутых кривых плоского кольца. Она справедлива при выполнении чисто геометрического условия, согласно которому замкнутая кривая пересекается со своим образом (рис. 4).

▷ Модель Ферми – Улама, релятивистский случай (п. 3): здесь закон преобразования скорости и энергии шарика при упругом столкновении с движущейся стенкой основаны на геометрии теории относительности. Эта геометрия есть разновидность неевклидовой геометрии (геометрия Лобачевского), а траектории шарика могут рассматриваться как обобщенные геодезические линии в этой геометрии.

▷ Наконец, ускорительная модель с одной стенкой в поле тяжести (п. 4). Здесь присутствуют два аспекта, связанных с геометрией:

1. как и в п. 2, первый аспект касается инвариантных замкнутых кривых при отображениях плоского кольца, и именно обобщение этого результата приводит к устойчивости резонансной траектории, построенной в лемме 2 (п. 4);
2. геометрическая природа отображения S (см. равенство (21)), получающегося в результате перехода от одной точки пересечения параболы с графиком периодической функции $f(t)$ к другой такой точке пересечения.

Список литературы

[1] Fermi E. *On the origin of the cosmic radiation* // Phys. Rev., 1949. Vol. 75. No 8. P. 1169–1174.

[2] Пустыльников Л. Д. *Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми* // УМН, 1995. Т. 50. №1. С. 143–186.

[3] Ulam S. *On some statistical properties of dynamical systems* // Proc. 4th Berkeley Sympos. on Math. and Probabil. 1961. Vol. 3. Berkeley – Los Angeles: California Press. P. 315–320.

[4] Пустыльников Л. Д. *Об одной задаче Улама* // ТМФ, 1983. Т. 57. №1. С. 128–132.

[5] Пустыльников Л. Д. *О модели Ферми – Улама* // ДАН СССР, 1987. Т. 292. №3. С. 549–553.

[6] Пустыльников Л. Д. *Существование инвариантных кривых для отображений, близких к вырожденным, и решение проблемы Ферми – Улама* // Матем. сб., 1994. Т. 185. №6. С. 1–12.

[7] Довбыш С. А. *Колмогоровская устойчивость, невозможность разгона Ферми и существование периодических решений в некоторых системах типа гамильтоновых* // Прикладная математика и механика, 1992. Т. 56. №2. С. 218–229.

[8] Пустыльников Л. Д. *Новый механизм ускорения частиц и релятивистский аналог модели Ферми – Улама* // ТМФ, 1988. Т. 77. №1. С. 154–160.

[9] Пустыльников Л. Д. *Об одной динамической системе* // УМН. 1968. Т. 23. №4 (142). С. 251–252.

[10] Пустыльников Л. Д. *Существование множества положительной меры осциллирующих движений в одной задаче механики* // ДАН СССР, 1972. Т. 202. №2. С. 287–289.

[11] Пустыльников Л. Д. *Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. II* // Труды ММО. 1977. Т. 34. С. 3–103.

[12] Мозер Ю. *Об инвариантных кривых сохраняющего площадь отображения кольца в себя* // Математика. 1963. Т. 6. №5. С. 51–67.

[13] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. *Теория поля.* М.: Физматгиз, 1962.

О круговых многочленах

А. Я. Белов

Как известно, любой многочлен с целыми коэффициентами однозначно разлагается в произведение неприводимых множителей. Хорошо известна также следующая

Теорема 1. *Многочлен $x^n - 1$ разлагается в произведение неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов Φ_d:*

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

При этом корнями Φ_d являются неприводимые корни d-й степени из единицы и $\deg(\Phi_d) = \varphi(d)$.

Здесь $\varphi(d)$ есть *функция Эйлера*, выражающая количество различных остатков от деления на d, взаимно простых с d. Корень d-й степени из единицы называется *неприводимым*, если он не является корнем из единицы, степени ме́ньшей чем d.

Этой теоремой довольно часто пользуются (см., например решение задачи 2.7 из задачника «Математического просвещения», №6, с. 140–142). С ее доказательством можно ознакомиться по книгам [1,2]. Мы приводим здесь другое доказательство, которое довольно красиво и содержательно. (Автор благодарит А. В. Шаповалова, рассказавшего ему это доказательство.)

Если число d — простое, то $\Phi_d(x) = x^{d-1} + x^{d-2} + \cdots + 1$ и доказательство неприводимости многочлена $\Phi_d(x)$ получается путем применения критерия Эйзенштейна к многочлену $\Phi_d(x+1)$ (неприводимость которого равносильна неприводимости $\Phi_d(x)$). Напомним соответствующее утверждение:

Предложение 1 (критерий Эйзенштейна). *Пусть*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

причем все коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ делятся на некоторое простое p и a_n не делится на p^2. Тогда многочлен P неприводим над множеством рациональных чисел.

Доказательство этого критерия получается от противного сравнением коэффициентов $P(x)$ и $P_1(x)P_2(x)$ и применения леммы Гаусса, которая утверждает, что неприводимость над $\mathbb{Z}$ влечет неприводимость над $\mathbb{Q}$. Мы предоставляем читателю провести доказательства самому, либо обратиться к любому ВУЗовскому учебнику по алгебре.

Бытует мнение (в том числе среди алгебраистов), что теорема 1 стандартным образом выводится из этого своего частного случая (d — простое) с помощью теории Галуа. Однако такое доказательство теоремы 1 нам неизвестно.

Несколько полезных фактов

Прежде всего отметим, что

$$\Phi_d(x) = \frac{x^d - 1}{\prod\limits_{s\,|\,d;\, s<d} \Phi_s(x)}\,. \tag{1}$$

Если частное двух многочленов с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 является многочленом, то этот многочлен также имеет целые коэффициенты и старший коэффициент 1. Применяя это наблюдение к равенству (1), получаем по индукции, что все коэффициенты многочленов Φ_d — целые.

Китайская теорема об остатках. *Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — конечный набор попарно взаимно простых целых чисел, $a_1, \ldots, a_k$ — произвольные целые числа. Тогда найдется такое число x, что $x \equiv a_i \pmod{z_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Теорема Виета. *Коэффициенты a_k многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ выражаются через его корни x_i следующим образом:*

$$a_k = (-1)^k \sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}.$$

Симметрический многочлен — это многочлен, значение которого не зависит от перестановки переменных. *Элементарными симметрическими многочленами* называются многочлены

$$s_k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}.$$

Основная теорема о симметрических многочленах. *Любой симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ с целыми коэффициентами можно представить в виде многочлена с целыми коэффициентами от элементарных симметрических многочленов s_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Следствием этих двух утверждений является

Лемма 1. *Пусть* $Q(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ *— многочлен с целыми коэффициентами. Тогда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *коэффициенты многочлена* $\tilde{Q}_k(x) = (x - x_1^k) \cdot \ldots \cdot (x - x_n^k)$ *также целые.*

Пусть $\bar{Q}(x)$, $\bar{\tilde{Q}}$ *— покоэффициентные редукции многочленов* $Q(x)$, $\tilde{Q}(x)$ *по модулю простого числа* p; $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— корни* $\bar{Q}$ *в подходящем алгебраическом расширении* $\mathbb{Z}_p$. *Тогда* $\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k$ *— корни* $\bar{\tilde{Q}}$.

Следующая лемма является ослаблением теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии, разность которой взаимно проста с начальным членом. Через $\mathbb{Z}_q^*$ обозначается группа по умножению остатков от деления на q чисел, взаимно простых с q.

Лемма 2. *Пусть* $G \neq \mathbb{Z}_q^*$ *— подгруппа группы* $\mathbb{Z}_q^*$. *Тогда множество простых чисел, остатки от деления которых на* q *не принадлежит группе* G, *бесконечно.*

В частности, количество простых чисел, не представимых в виде $qk + 1$, (например $6k - 1$ или $4k - 1$) бесконечно.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех p, остатки от которых по модулю q не лежат в G, а $x \notin G$. В силу китайской теоремы об остатках можно найти такое y, что $y \equiv x \pmod{q}$, $y \equiv 1 \pmod{p_i}$ для любого $p_i \in \mathcal{P}$.

Тогда произведение $q \prod\limits_{p_i \in \mathcal{P}} p_i + y$ содержит простой делитель, не сравнимый с элементами G по модулю q, и не принадлежащий $\mathcal{P}$. Противоречие.

И еще одно полезное наблюдение:

Лемма 3. *Пусть* p *— простое. В любом кольце имеют место следующие сравнения по модулю* p: *a)* $(a + b)^p \equiv a^p + b^p$, *b)* $(ab)^p = a^p b^p$, *c) для любого многочлена* Q *с целыми коэффициентами* $Q(\xi)^p \equiv Q(\xi^p)$.

Пп. a) и b) проверяются непосредственно, c) из них следует.

Доказательство неприводимости $\Phi_d(x)$

Предположим, что Φ_d разлагается в произведение неприводимых многочленов Q_i, отличных от константы: $\Phi_d(x) = \prod_{i=1}^{s} Q_i(x)$ и $s > 1$. Пусть $m = \min \deg Q_i$, без ограничения общности считаем, что $\deg(Q_1) = m$.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — корни Q_1. Тогда для любого k, взаимно простого с d, числа x_i^k будут неприводимыми корнями d-й степени из единицы, а многочлен $\tilde{Q}_k = \prod_i (x - x_i^k)$ по лемме 1 будет иметь целые коэффициенты. Поскольку НОД двух многочленов с целыми коэффициентами есть снова многочлен с целыми коэффициентами, а Q_i — неприводимый и

$\deg Q_i \geqslant \deg \tilde{Q}_k = m$, то многочлены Q_i и $\tilde{Q}_k$ либо не имеют общих делителей, либо совпадают.

Любой неприводимый корень d-й степени из единицы имеет вид x_1^r, где НОД$(d, r) = 1$ и, следовательно, является корнем $\tilde{Q}_r$. Значит, любой многочлен разложения Q_i имеет нетривиальный общий делитель с некоторым $\tilde{Q}_r$. Поэтому, в силу вышесказанного, Q_i должен совпадать с каким-то $\tilde{Q}_r$. Итак, разложение Φ_d на неприводимые компоненты должно иметь вид $\Phi_d = \prod \tilde{Q}_k$.

Заметим также, что поскольку все корни рассматриваемых многочленов суть корни d-й степени из единицы, многочлен $\tilde{Q}_k$ зависит только от остатка k по модулю d. Если при этом НОД$(k, d) = 1$, то все корни многочлена $\tilde{Q}_k$ суть *неприводимые корни d-й степени из единицы*.

Рассмотрим множество таких остатков k по модулю d, что $\tilde{Q}_k = Q_1 = \tilde{Q}_1$. Оно образует подгруппу G в группе $\mathbb{Z}_d^*$. В силу нашего предположения о приводимости Φ_d группа G не совпадает со всей группой $\mathbb{Z}_d^*$.

При всех достаточно больших p редукции по модулю p для различных Q_i будут различны и, кроме того, редукция многочлена $x^d - 1$ (а, значит, и Φ_d) не будет иметь кратных корней (ибо будет взаимно проста со своей производной dx^{d-1} если $p > d$).

Из леммы 2 следует наличие такого $k : \tilde{Q}_k \neq Q_1$, что для бесконечного набора простых p выполняется сравнение $p \equiv k \pmod{d}$.

Но тогда, с одной стороны, в силу леммы 3 и равенства $\forall i :\ x_i^d = 1$ все корни редукции по модулю p многочлена $\tilde{Q}_k$ совпадут с корнями Q_1 а коэффициенты редукции, в силу леммы 1 будут равны редукции по модулю p коэффициентов исходного $\tilde{Q}_k$.

С другой стороны, $Q_1 \neq \tilde{Q}_k$ и, следовательно, при всех достаточно больших p сравнение $Q_1 \equiv \tilde{Q}_k$ по модулю p место не имеет. Полученное противоречие доказывает теорему.

Упражнение. a) Воспользовавшись теоремой Лагранжа, утверждающей, что порядок элемента делит порядок группы, докажите что любой простой делитель значения многочлена $\Phi_d(n)$ при целом n имеет вид $kd + 1$.

b) По аналогии с доказательством леммы 2 докажите, что имеется бесконечно много простых делителей значений многочлена с целыми коэффициентами в целых точках, если этот многочлен отличен от константы. Выведите отсюда бесконечность множества простых чисел вида $dk + 1$.

Список литературы

[1] Б. Л. ван дер Варден. *Алгебра.* М.: Наука, 1976. Гл. 8, §60.

[2] В. Прасолов. *Многочлены.* М.: МЦНМО, 2000. П. 13.3.

По мотивам задачника «Математического просвещения»

В нашей постоянной рубрике «Задачник» было опубликовано уже почти 100 задач. Как мы предупреждали каждый раз, некоторые из этих задач очень трудны. Многие из опубликованных в «Задачнике» задач хорошо известны, некоторые имеют собственную историю.

Поэтому наряду с уже ставшей постоянной рубрикой «Решения задач из предыдущих выпусков» мы начинаем публикации статей, посвященных избранным задачам «Задачника».

В этом номере вы сможете прочитать увлекательный рассказ проф. А. Сойфера о хроматическом числе плоскости. Одна из связанных с этим сюжетом задач — задача 3.11 (№3, с. 233). Мы приводим сразу две заметки, посвященные задаче В. В. Произволова (6.9, №6, с. 134). Эти интересные статьи показывают, насколько разными могут быть рассказы об одном и том же математическом сюжете. Короткая заметка В. В. Доценко описывает решения трех родственных задач о метрических компактах, одна из которых — задача 4.9, №4, с. 217. И, наконец, статья А. Е. Ерошина описывает решение очень трудной задачи 3.10, №3, с. 233.

Возможно, кому-то наш выбор покажется не слишком удачным. Он во многом условный — задач, достойных подробного рассказа в «Задачнике» было намного больше. Ну что же, если появятся новые интересные статьи по сюжетам других задач из «Задачника», то мы их обязательно опубликуем (даже в том случае, когда короткое решение уже было напечатано).

Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее

А. Сойфер
Принстонский университет;
DIMACS (Центр дискретной математики и теоретической информатики), университет Ратгерса;
Университет штата Колорадо в Колорадо-спрингс
asoifer@Princeton.edu asoifer@uccs.edu http://www.uccs.edu/~asoifer/

Посвящается памяти Пауля Эрдёша
в честь его 90-летия

1. Постановка задачи

Я не могу предлагать деньги за красивые задачи, придуманные другими людьми, поскольку тогда я, право, разорюсь... Это очень красивая задача. Если бы я ее придумал, я бы предложил за нее 250 долларов.

Пауль Эрдёш
Бока Ратон, февраль 1992 г.

Быть может, высший класс в математике — когда понять задачу может любой, но никто не в силах ее одолеть. Сегодня мы обсудим именно такую задачу. Она сопротивляется всем усилиям уже более 50 лет. Вот она:

> *Какое наименьшее число цветов требуется для раскраски плоскости, при которой не существует отрезка длины* 1 *с концами одного цвета*?

Это число называется *хроматическим числом плоскости* и часто обозначается χ. (В дальнейшем *одноцветной парой* мы будем называть пару точек одинакового цвета.)

Обратите внимание, что рассматриваемые раскраски — не обязательно «правильные», с замкнутыми областями. *Мы раскрашиваем точки плоскости безо всяких ограничений.*

Не знаю, кто первый заметил следующий факт. Может быть, Адам или Ева? Говоря чуть более серьезно, я не думаю, что, например, древнегреческие геометры знали этот красивый факт. Они просто не задавали таких вопросов!

Задача 1. (Адам или Ева?) Если плоскость раскрашена в два цвета, то она содержит одноцветную пару на расстоянии 1, т. е. $\chi \geqslant 3$.

Решение. Бросим на данную плоскость, раскрашенную в два цвета, равносторонний треугольник T со стороной 1 (рис. 1). Цветов два, а вершин у треугольника три (надеюсь, что вы не забыли принцип Дирихле). Две вершины должны иметь одинаковый цвет. Расстояние между ними равно 1. $\square$

Задача 2. Если плоскость раскрашена в три цвета, то она содержит одноцветную пару на расстоянии 1, т. е.

$$\chi \geqslant 4.$$

Решение канадских геометров, братьев Лео и Уильяма Мозер (1961, [35]). На плоскость, раскрашенную в три цвета, бросим *мозеровское веретено*, т. е. фигуру, изображенную на рис. 2. Каждое ребро веретена имеет длину 1.

Предположим, что из семи вершин веретена нельзя выбрать одноцветную пару на расстоянии 1. Будем считать, что плоскость раскрашена в красный, белый и синий цвета. Решение по существу следует детской песенке «A B C D E F G...».

Пусть точка A красная. Тогда среди точек B и C одна белая и одна синяя, поэтому точка D красная. Аналогично среди точек E и F одна белая и одна синяя, поэтому точка G красная. Получаем одноцветную пару на расстоянии 1 вопреки нашему предположению. $\square$

Замечание. Веретено Мозера позволило решить задачу 2 благодаря тому, что среди любых трех его вершин найдутся две на расстоянии 1

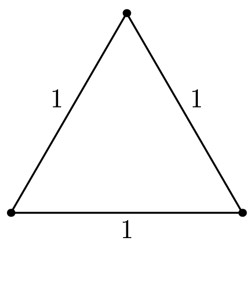


Рис. 1.

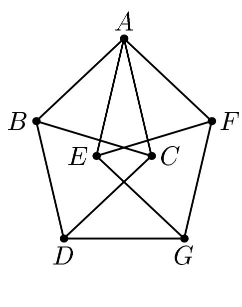


Рис. 2.

друг от друга. Как следствие, если в веретене нет одноцветной пары на расстоянии 1, то не более двух его вершин могут иметь одинаковый цвет. Запомним это наблюдение: оно пригодится нам позже.

Существует ли верхняя граница для χ? Сразу это не очевидно. Можете ли вы указать такую границу? Естественно было бы рассмотреть покрытие плоскости правильными многоугольниками — и это, действительно, помогает!

Задача 3. Существует раскраска плоскости в 7 цветов, не содержащая одноцветной пары на расстоянии 1, т. е.

$$\chi \leqslant 7.$$

Решение ([23]). Замостим плоскость правильными шестиугольниками со стороной 1. Покрасим один из шестиугольников в цвет номер 1, а шесть его соседей — в цвета с номерами $2, 3, \ldots, 7$ (рис. 3). Получившийся «цветок» — симметричный 18-угольник P. Его сдвиги (точнее, его образы при параллельных переносах) покрывают плоскость и определяют ее раскраску в 7 цветов.

Легко можно вычислить (советуем проделать это), что не существует одноцветных пар на расстоянии d при

$$2 < d < \sqrt{7}.$$

Если теперь сжать все линейные размеры, скажем, в 2,1 раза, то мы получим раскраску плоскости в 7 цветов, не имеющую одноцветных пар на

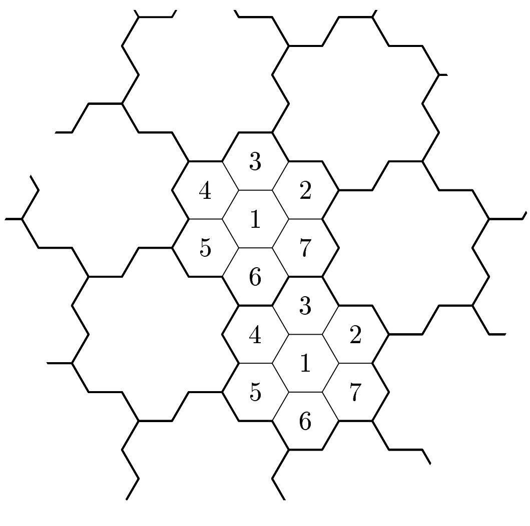


Рис. 3.

расстоянии 1. (Отметим, что в силу полученного неравенства у нас достаточный выбор, так что не имеет значения, в какой из двух прилегающих цветов покрашены границы шестиугольников.) □

В 1982 г. венгерский математик Ласло Секей сумел получить верхнюю границу для χ, не используя покрытие плоскости шестиугольниками.

Второе решение задачи 3 ([54]). (Чертеж из этой статьи требует небольшой поправки, и нужно указать раскраску границ, что я и делаю здесь.)

3	4	5	6	7	1	2	3	
5	6	7	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	1	

Рис. 4.

На рис. 4 мы строим цепочку квадратов с диагональю длины 1 и красим их в семь последовательно чередующихся цветов. Затем получаем новые цепочки раскрашенных квадратов, сдвигая предыдущую цепочку вправо на 2.5 стороны квадрата. Верхняя и правая границы квадрата имеют его цвет, за исключением верхнего левого и правого нижнего угла. □

В задаче 2 решение с веретеном также не единственное известное. Ниже приведено «фольклорное» решение, историю которого я проследил вплоть до Соломона Голомба, известного изобретателя полимино.

Второе решение задачи 2 (С. Голомб, частное сообщение). На плоскость, раскрашенную в три цвета (красный, белый и синий), бросим граф с ребрами длины 1, представленный на рис. 5; естественно будет назвать его *графом Голомба.* Допустим, что в нем никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. Центральную вершину покрасим в красный цвет. Она соединена ребрами со всеми вершинами правильного шестиугольника H, и потому все эти вершины следует покрасить в белый и синий цвет поочередно. Все вершины равностороннего треугольника T соединены ребрами с тремя вершинами шестиугольника, покрашенными в одинаковый цвет — скажем, белый. Но тогда T не может иметь белых вершин; все они — красные или синие, и потому две вершины должны быть одинакового цвета. Это противоречие показывает, что тремя цветами нельзя правильно раскрасить десять вершин графа Голомба, а тем более всю плоскость. □

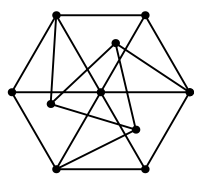


Рис. 5.

Поразительно, что довольно легкие задачи 2 и 3 приводят к наилучшим границам для χ, известным сегодня. Они были *опубликованы* свыше 40 лет назад (на самом деле они еще старше: см. исторический очерк в следующем параграфе). Однако до сих пор мы знаем лишь, что

$$\chi \text{ равно } 4,\ 5,\ 6 \text{ или } 7.$$

Весьма широкий промежуток! Чему же равно χ по вашему мнению? Пауль Эрдёш говорил мне, что наверняка $\chi \geqslant 5$.

В 1992 г. известный американский геометр Виктор Кли поведал мне занятную историю. В 1980–1981 г. он читал лекции в Швейцарии. Их посещал прославленный алгебраист Бартель Л. ван дер Варден, которому было около 80 лет. Когда профессор Кли рассказал о ситуации с нашей задачей, ван дер Варден очень заинтересовался и там же, прямо во время лекции занялся этой задачей. Он попытался доказать, что $\chi = 7$!

Пауль Эрдёш был уверен, что $\chi \geqslant 5$. Он любил говорить, что «*у Бога есть бесконечная Книга, содержащая все теоремы и их лучшие доказательства, и если Он благоволит к кому-либо, то на мгновение показывает ему Книгу*» [11]. Если бы я заслужил такую честь и имел выбор, то попросил бы дать взглянуть на страницу, посвященную хроматическому числу плоскости. А вы бы не попросили?

2. Взгляд в историю

Давно поставленная открытая проблема Эрдёша...

Хэлард Крофт, 1967

Не могу проследить происхождение этой задачи

Пауль Эрдёш, 1961

Часто бывает легче установить что-нибудь из истории древнего Египта, чем происшедшее с нашими современниками

Николаас Говерт де Брёйн,
Эйндховен, 5 июля 1995; электронное письмо А. Сойферу

Это было давно и неправда

Старинная русская шутка

Вполне естественно, что человек пытается выяснить происхождение своей любимой задачи. И я погрузился в тонны статей и книг. Часть найденных мной сведений представлена в таблице 1. Вы ошеломлены? Я тоже был ошеломлен!

Как видно из таблицы, Дуглас Вудолл ссылается на Мартина Гарднера, который в свою очередь упоминает Лео Мозера. Хэлард Крофт называет задачу «давно поставленной открытой проблемой Эрдёша», а сам Пауль Эрдёш «не может проследить происхождение этой задачи»! Позже он ссылается на «Хадвигера и Нельсона», а Вик Кли и Стэн Вэйгон пишут, что эта задача «была поставлена в 1960–61 гг. М. Гарднером и Хадвигером». Вновь появляется Крофт, и на этот раз Кеннет Фальконер и Ричард Гай вместе с ним осторожно предполагают, что постановка задачи, «очевидно, принадлежит Э. Нельсону» [3]. При этом Ричард Гай не смог сказать мне, кто такой «Э. Нельсон» и почему Гай и компания «с очевидностью» приписали ему эту задачу.

Таким образом, в связи с нашей задачей упоминаются не менее как пять математиков: Пауль Эрдёш, Мартин Гарднер, Гуго Хадвигер, Лео Мозер и Эдвард Нельсон. Какое выдающееся общество! Но трудно поверить, что все они придумали эту задачу, даже независимо. Я чувствовал себя как частный детектив, распутывающий хитросплетение противоречивых сведений. Через шесть месяцев я разгадал загадку! Хотел бы поблагодарить многих математиков, внесших свой вклад в это. Особой благодарности заслуживают Пауль Эрдёш, Виктор Кли, Мартин

Публикация	Год	Автор(ы)	Указание на автора или источник задачи
[19]	1960	Гарднер	«*Лео Мозер* ... пишет ...»
[23]	1961	Хадвигер (со ссылкой на Кли)	*Нельсон*
[5]	1961	Эрдёш	«Не могу проследить происхождение этой задачи»
[2]	1967	Крофт	«Давно поставленная открытая проблема *Эрдёша*»
[57]	1973	Вудолл	*Гарднер*
[8] [9] [10]	1980 – 1981	Эрдёш	*Хадвигер* и *Нельсон*
[3]	1991	Крофт, Фальконер и Гай	«Очевидно, принадлежит *Э. Нельсону*»
[34]	1991	Кли и Вэйгон	«Задача поставлена в 1960–61 *М. Гарднером* и *Хадвигером*»

Табл. 1. *Кто придумал задачу о хроматическом числе плоскости?*

Гарднер, Эдвард Нельсон и Джон Избелл. Разгадка стала возможной лишь благодаря их сообщениям, воспоминаниям и сотрудничеству.

Автор задачи родился 4 мая 1932 г. в Декейтуре, Джорджия. Сын секретаря итальянского отделения YMCA[1)], Джозеф Эдвард Нельсон учился в лицее (итальянской приготовительной школе) в Риме. В 1949 г. Эд вернулся в США и поступил в Чикагский университет. Дальновидный президент университета Роберт Хатчинс позволял студентам сокращать время пребывания в университете за счет сдачи обширных экзаменов. Эд Нельсон сдал их настолько хорошо, что был допущен к выполнению магистерской программы без прохождения бакалавриата. Журнал Time сообщил 26 декабря 1949 г. о блестящих успехах юного Нельсона на 14 (!) экзаменах.

Следующей осенью 18-летний Эдвард Нельсон придумал то, что он назвал «второй проблемой четырех красок» (в своем письме ко мне от 5 октября 1991 г. [37]):

> «Дорогой профессор Сойфер,
> осенью 1950 года я был студентом Чикагского университета и среди прочего интересовался проблемой четырех красок, т. е. проблемой раскраски графов, допускающих топологическое вложение в плоскость. Такие графы можно изобразить как узлы, соединенные проволочками. Я задался вопросом, нельзя ли представить достаточно богатый подкласс таких графов как подграфы одного большого графа, который можно раскрасить раз и навсегда — например, графа всех точек плоскости, находящихся на расстоянии 1 друг от друга (тогда «проволочки» становятся жесткими, прямыми, одинаковой длины, но могут пересекаться). Эта идея не осуществилась, однако новая задача представляла самостоятельный интерес, и я сообщил о ней нескольким людям.»

Одним из этих людей был Джон Избелл. Он до сих пор весьма живо вспоминает об этом (письмо ко мне от 26 августа 1991 г. [30]):

> «Эд Нельсон рассказал мне задачу и оценку $\chi \geqslant 4$ в ноябре 1950 г., если не в октябре — мы встретились в октябре. Я спросил, какую он знает верхнюю оценку. Он ответил, что никакой, и тогда я нашел оценку 7. Я был тогда на последнем курсе (и в 1951 г. получил степень бакалавра естественных наук). По-моему, Эд как раз тогда номинально стал второкурсником Чикагского университета и сдал экзамены, которые сразу поставили его впереди меня: его можно было сравнить с аспирантом первого года, имеющим один или два пробела в своей подготовке. Несомненно, в 1950 – 1957 гг. я обсуждал задачу с другими людьми. Один из них — Хью Спенсер Эверетт III, автор

[1)] Ассоциация христианской молодежи.

> интерпретации квантовой механики в терминах множества миров, а другой — Элмер Джулиан Броди, который писал диссертацию под руководством Фокса; он долго находился в Китайском университете Гонконга и, говорят, занялся классической китайской литературой. В 1958±1 г. я говорил об этой задаче с Виком Кли...»

Виктор Кли также вспоминал, что слышал об этой задаче от Джона Избелла в 1957–1958 г. Затем профессор Кли уехал в Европу (1958 г.), где он сообщил эту задачу Гуго Хадвигеру, собиравшему материал для книги «Открытые проблемы интуитивной геометрии», которую предполагали написать совместно Эрдёш, Фейеш Тот, Хадвигер и Кли (этот великий проект так и не осуществился).

Каковы роли Пауля Эрдёша, Мартина Гарднера и Лео Мозера в истории нашей задачи? Предоставляю другим ответить на единственный вопрос: когда и как познакомился с этой задачей Лео Мозер. Несомненно, он не придумывал ее независимо от Эдварда Нельсона (письмо Пауля Эрдёша ко мне от 16 июля 1991 г. [13]):

> «Не помню, говорил ли мне Мозер в 1958 г., каким образом он услышал про задачу о хроматическом числе плоскости. Помню только, что это была не его задача.»

Однако Лео Мозер оказал существенное влияние на дальнейшую судьбу этой задачи. Он дал ее Паулю Эрдёшу и Мартину Гарднеру. Последний благодаря своему безупречному вкусу осознал ее ценность и включил в свою колонку «Математические игры» в журнале «Сайентифик Американ» ([20]) с благодарностью Лео Мозеру из университета Альберты, от которого узнал эту задачу. Таким образом, честь ее первой *публикации* принадлежит Мартину Гарднеру. Не берусь судить, почему столь многие авторы статей и книг с 1973 по 1991 год приписывают Гарднеру честь *создания* задачи, чего он сам никогда не утверждал.

При этом некоторые авторы (например, Виктор Кли и Стэнли Вэйгон), знавшие о роли Нельсона, всё же указывали Гарднера и Хадвигера как авторов, поскольку они признают только письменное слово, преимущественно опубликованное.

Конечно, отдельное изолированное высказывание — слишком слабая основа для установления исторической истины. С другой стороны, такую основу — в не меньшей степени, чем публикация — составляют независимые объективные свидетельства, подтверждающие друг друга. Именно это и стало результатом моих изысканий. Вот лишь один пример объективности Нельсона и Избелла. 23 августа 1991 г. Эдвард Нельсон писал мне [36]:

> «Что касается этой задачи, то я не доказал ничего...»

Джон Избелл поправил Нельсона в письме ко мне от 3 сентября 1991 г. [31]:

> «Процитированное вами утверждение Эда Нельсона: „Что касается этой задачи, то я не доказал ничего...“ вызвано лишь забывчивостью. Он доказал мне, что обсуждаемое число не меньше четырех, используя рассуждение как в работе Хадвигера 1961 года. Когда Хадвигер приписывает это неравенство мне (со ссылкой на Кли), то это ошибка — либо Хадвигера, либо Кли.»

Всё это приводит нас к вопросу об авторстве неравенств

$$4 \leqslant \chi \leqslant 7.$$

И снова все источники дружно приписывают честь первых доказательств Хадвигеру и Мозерам. Да, в 1961 г. известный швейцарский геометр Гуго Хадвигер опубликовал ([23]) задачу о хроматическом числе плоскости вместе с доказательствами обоих неравенств. Но он пишет (и никто не читает!):

> «Мы благодарны мистеру В. Л. Кли (Сиэттл, США) за следующую информацию. Задача поставлена Э. Нельсоном; неравенства принадлежат Дж. Избеллу.»

И Хадвигер продолжает: «Несколько лет назад автор (т. е. Хадвигер) обсуждал с П. Эрдёшем вопросы такого рода.» Означает ли это, что он думал над задачей независимо от Нельсона? Мы никогда этого не выясним точно, но у меня есть сомнения. В 1955 г. Хадвигер вместе с Дебруннером опубликовал великолепную большую проблемную статью [24], которая в 1959 г. выросла в их замечательную книгу [25]; в 1964 г. вышел английский перевод Виктора Кли [27], а в 1965 — русский перевод [26] под редакцией Исаака Яглома. Все эти книги (и другие работы Хадвигера) содержат множество «вопросов такого рода», но только не задачу о хроматическом числе плоскости. Кроме того, мне кажется, что эта задача не подходит Хадвигеру «по характеру»: во всех подобных случаях он предпочитал рассматривать замкнутые, а не произвольные множества.

Своими сомнениями насчет независимого авторства Хадвигера я поделился с Паулем Эрдёшем. Это было особенно важно, поскольку Хадвигер ссылается на свидетельство Эрдёша (см. предыдущий абзац). Пауль ответил так (письмо ко мне от 16 июля 1991 г. [13]):

> «Я встречался с Хадвигером лишь после 1950 г. и потому полагаю, что приоритет принадлежит Нельсону (Хадвигер умер несколько лет назад, так что я не могу его спросить, но я думаю, что ситуация очевидна.)»

В своем выступлении на 25-й Юго-восточной международной конференции по комбинаторике, информатике и теории графов в Бока Ратон, Флорида (10 марта 1994 г.) Пауль подвел итог моим изысканиям в своем неповторимом стиле:

> «Есть математик по фамилии Нельсон, который в 1950 году, будучи в возрасте эпсилон, то есть 18 лет, поставил следующий вопрос. Допустим, вы соединили всевозможные точки плоскости, находящиеся на расстоянии 1 друг от друга. Получился бесконечный граф. Каково хроматическое число этого графа?
>
> [...]
>
> Эту задачу тоже часто приписывают мне. Бесспорно, я не имею к ней отношения. Впервые я узнал про задачу о хроматическом числе плоскости зимой 1958 г., когда посетил [Лео] Мозера. Он не сказал мне, откуда появились эта и другие задачи. Ее приписывали и Хадвигеру, но тщательное исследование Сойфера показало, что на самом деле она принадлежит Нельсону.»

Теперь мы можем, наконец, воздать должное Эдварду Нельсону, который первым доказал в 1950 г. нижнюю оценку $4 \leqslant \chi$. Как вспоминает Джон Избелл в письме ко мне [30], Нельсон, имея в виду эту оценку, «любил называть [свою задачу] второй проблемой четырех красок!»

Два известных канадских специалиста по задачам (problem people), братья Лео и Уильям Мозеры, также опубликовали в 1961 г. [35] доказательство нижней оценки $4 \leqslant \chi$ в связи с решением другой задачи. На мой взгляд, оба доказательства не отличаются, однако применение Мозерами конечного множества, ныне называемого веретеном Мозера, оказалось очень эффективным.

Джон Избелл первым доказал в 1950 г. верхнюю оценку $\chi \leqslant 7$. Он применил ту же шестиугольную раскраску плоскости в 7 цветов, которую опубликовал Хадвигер в 1961 г. [23]. Уместно отметить, что Хадвигер впервые применил такую раскраску в 1945 г. [22], но в другой задаче: он хотел показать, что существует замкнутое множество, которое не реализует все расстояния (см. определение ниже в разд. 3), а семью его сдвигами[2)] можно покрыть всю плоскость (он также доказал, что пятью сдвигами замкнутого множества, не реализующего все расстояния, нельзя покрыть плоскость). Сейчас профессор Джон Избелл работает в государственном университете штата Нью-Йорк в Буффало.

Пауль Эрдёш внес двоякий вклад в историю задачи о хроматическом числе плоскости. Во-первых, Эрдёш «разжег пламя» этой задачи, как это сделал Огастес де Морган в отношении проблемы четырех красок. Эрдёш сделал задачу о хроматическом числе плоскости хорошо известной, упоминая ее в своих бесчисленных докладах и во многих публикациях, например [5], [6], [7], [8], [10], [9] и [15].

Во-вторых, Эрдёш придумал множество популярных родственных задач. Одну из них мы обсудим в следующем разделе.

[2)] Напомним, что сдвиг — это образ множества при параллельном переносе.

Был получен ряд результатов при дополнительных ограничениях на монохроматические множества, т. е. множества точек одного цвета (см. обзоры в [34], [3] и [44]). Например, К. Фальконер показал [18], что

Число χ не меньше пяти, если монохроматические множества измеримы по Лебегу.

Для решения задачи о хроматическом числе плоскости применялись всевозможные средства: комбинаторика, теория графов, топология, абстрактная алгебра, теория меры и т. д. Но задача в общей формулировке, к удивлению, выдержала все атаки, и область значений для χ остается удручающе широкой — от 4 до 7. Почему на протяжении 53 лет задача не поддается никаким усилиям? В разделе 6 высказано предположение на этот счет; он возникло в итоге совместной работы автора с Сахароном Шелахом.

Профессор Эдвард Нельсон с 1959 г. постоянно работает в Принстонском университете; главные области его интересов — анализ и логика. Несколько лет назад он избран в Национальную академию наук. Профессору Нельсону сейчас 71 год; проведя год (2003 г.) в Принстоне, я стал его близким другом. В октябре 2003 г. меня пригласили выступить в Принстоне на тему хроматического числа плоскости. Я посвятил свой доклад «Эдварду Нельсону, который придумал эту знаменитую задачу к нашей общей радости». Это был итог моих 12-летних занятий этой задачей. Выступление было для меня особенно важно, поскольку на нем присутствовал Эдвард Нельсон.

Замечание. К сожалению, неточные ссылки на авторство этой задачи продолжают встречаться в литературе. Примером служит обзор А. М. Райгородского «Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств» (УМН, том 56, вып. 1, 2001, с. 107–146). Хотя автор и упоминает мою работу [43], но тем не менее приписывает постановку задачи о хроматическом числе плоскости «Нельсону и Избеллу и (независимо) Эрдёшу и Хадвигеру».

3. Полихроматическое число плоскости и результаты, близкие к верхней границе

Когда важная проблема сопротивляется всем атакам, математики придумывают множество родственных проблем. Это дает им возможность решить что-нибудь... Иногда этот процесс приносит реальную пользу: размышления над родственной задачей открывают новые способы одолеть исходную. В связи с хроматическим числом плоскости было поставлено много задач. Теми, которые больше всего мне нравятся, я хотел бы поделиться с вами.

Введем удобный термин: раскрашенное множество S *реализует расстояние* d, если S содержит одноцветную пару на расстоянии d.

Первое упоминание о задаче, рассматриваемой ниже, сделано в 1959 г. в знаменитой книге Гуго Хадвигера [25] и, соответственно, в ее переводах [26] и [27]. Хадвигер сообщает в этой книге, ссылаясь на венгерского математика А. Хеппеша, что Пауль Эрдёш поставил следующий вопрос: если плоскость разбита на три непересекающихся подмножества, то всегда ли верно, что одно из подмножеств реализует все расстояния. Вскоре задача приобрела свой нынешний «облик». Вот он:

> *Какое наименьшее число цветов требуется для раскраски плоскости, при которой никакой цвет не реализует все расстояния?*

Этому числу следовало дать имя, и в 1992 г. [44] я назвал его *полихроматическим числом плоскости* и обозначил χ_p. Название и обозначение оказались столь естественными, что сейчас они уже стали стандартными и применены в столь значительных книгах, как [33] и [21].

Так как я считал эту открытую проблему очень важной, то попросил Пауля Эрдёша подтвердить его авторство, вскользь упомянутое Хадвигером. Как всегда, Пауль в своем письме ко мне от 16 июля 1991 г. [13] был искренен и скромен:

> Я даже не вполне уверен, что я — автор этой задачи: найти наименьшее число цветов для раскраски плоскости, при которой никакой цвет не реализует все расстояния. Но если этому ничто явно не противоречит, то можно пока это предположить.

В задаче о хроматическом числе плоскости мы искали раскраски, при которых никакой цвет не реализует расстояние 1. В задаче о полихроматическом числе мы раскрашиваем плоскость так, что каждый цвет i не реализует некоторое расстояние d_i. Для различных цветов i и j соответствующие нереализованные расстояния d_i и d_j могут (но не обязаны) различаться. Разумеется,

$$\chi_p \leqslant \chi.$$

Согласно решению задачи 3

$$\chi_p \leqslant 7.$$

За первые 12 лет существования задачи ничего больше не было найдено. Затем в 1970 г. московский школьник (школа рабочей молодежи №105) Дмитрий Райский, участник кружка Н. Н. Константинова, опубликовал ([39]) нижнюю и верхнюю оценку для χ_p:

Задача 4 ([39]). $4 \leqslant \chi_p \leqslant 6$.

Пример с $\chi_p = 6$ был найден С. Б. Стечкиным и с его разрешения опубликован Д. Е. Райским в [39]. Этот пример приводится ниже, см. с. 201.

Между прочим, на Западе авторство Стечкина осталось неизвестным. Многочисленные статьи и книги, которые я видел, приписывают приоритет Райскому. Почему так случилось? Как любой на моем месте, я обратился к английскому переводу статьи Райского. Там сказано:

> *S. B. Stechkin noted* that the plane can be decomposed into six sets such that all distances are not realized in any one of them. A corresponding example is presented here with the *author's solution.*[3)]

Что за автор имеется в виду? Автор статьи (как решил бы любой)? Я заказал копию исходного русского текста и с удивлением прочел:

> «Соответствующий пример приведен здесь *с разрешения автора.*»

Переводчик перепутал близкие по написанию русские слова «разрешение» и «решение» и нечаянно создал миф.

В 1973 г., через три года после публикации Райского, британский математик Дуглас Р. Вудолл из университета Ноттингема опубликовал одну из лучших доныне статей [57] по вопросам, связанным с хроматическим числом плоскости. Кроме прочего, он дал собственные доказательства неравенств из задачи 4. Восемь лет спустя С. П. Таунсенд обнаружил тонкую ошибку в работе [57] и нашел свое доказательство теоремы Вудолла. Краткое сообщение об этом появилось в печати. Полный текст своей работы, по моему совету, Стивен поместил в интернете (см. [56]).

Доказательство Вудолла я организовал для вас здесь через троекратное применение двух идей Гуго Хадвигера ([27], задачи 54 и 59), которое я назову леммой Хадвигера.

Лемма Хадвигера 5. Пусть круг C диаметра d раскрашен в белый и синий цвет. Если белый цвет не реализует расстояние d_w ($d_w \leqslant d$), а синий цвет не реализует расстояние d_b ($d_b \leqslant d$), то C не содержит хорды длины d_w с концами одного цвета.

Доказательство. Ясно, что круг C не содержит хорды длины d_w с белыми концами, так как это расстояние не реализуется белым цветом. Предположим, что C содержит хорду XY длины d_w с синими концами. Повернем XY вокруг центра круга в новое положение $X'Y'$, такое что $|XX'| = d_b$ (рис. 6).

Точки X' и Y' не могут одновременно быть белыми ($X'Y'$ — хорда длины d_w). Поэтому хотя бы одна из хорд XX', YY' длины d_b имеет синие концы. Но синий цвет не реализует расстояние d_b — противоречие. □

Предложение 6. Пусть плоскость раскрашена в красный, белый и синий цвет, причем эти цвета не реализуют, соответственно, расстояния

[3)] *С. Б. Стечкин заметил*, что плоскость можно разбить на шесть множеств, ни одно из которых не реализует все расстояния. Соответствующий пример приводится здесь вместе с *авторским решением*.

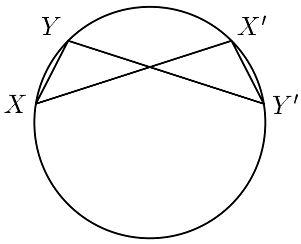


Рис. 6.

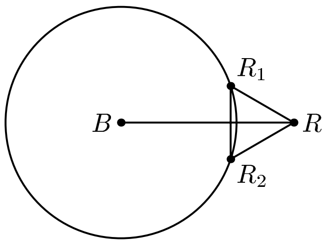


Рис. 7.

d_r, d_w, d_b; $d_r \leqslant d_w \leqslant d_b$. Тогда не существует отрезка длины d_{rb} с красным и синим концами, где

$$d_{rb} = \sqrt{d_b^2 - \left(\frac{1}{2}d_r\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}d_r\,.$$

Доказательство. Пусть RB — отрезок длины d_{rb}, причем точка R красная, а B синяя. Начертим окружность C радиуса d_b с центром B и равносторонний треугольник T со стороной d_r, одной из вершин которого является R, а высота лежит на отрезке RB (рис. 7). Легко проверить (проделайте это), что остальные две вершины R_1 и R_2 треугольника T лежат на окружности C (на самом деле выбор расстояния d_{rb} этим и определялся).

Так как на плоскости нет отрезка длины d_b с синими концами, а центр B окружности C синий, то вся окружность покрашена в красный и белый цвет. Окружность C не имеет хорды длины d_r с концами одного цвета в силу предложения 5. Поэтому один из концов хорды R_1R_2 — красный. Таким образом, равносторонний треугольник RR_1R_2 со стороной d_r имеет две красные вершины, тогда как красный цвет не реализует расстояние d_r. □

Доказав предложения 5 и 6, мы сможем доказать и нижнюю оценку для χ_p.

Задача 7. (Д. Е. Райский [39]). Доказать, что

$$\chi_p \geqslant 4,$$

т. е. при раскраске плоскости в три цвета хотя бы один из них реализует все расстояния.

Решение Д. Р. Вудолла [57]. Пусть плоскость раскрашена в красный, белый и синий цвета, причем каждый из них не реализует, соответственно, расстояние d_r, d_w, d_b; $d_r \leqslant d_w \leqslant d_b$. Без потери общности можно считать, что каждый цвет присутствует на плоскости (в противном случае выберем произвольную точку и покрасим в отсутствующий цвет).

Определим d следующим образом (d_{rb} определено в предложении 6):

$$d = \sqrt{d_{rb}^2 - \left(\frac{1}{2}d_w\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}d_w\,.$$

Покажем, что если один из концов отрезка длины d белый, то и другой также белый. В самом деле, пусть BW — отрезок длины d, причем точка B синяя, а точка W белая. Начертим окружность C радиуса d_{rb} с центром в точке B и равносторонний треугольник T со стороной d_w, одной из вершин которого является W, а высота лежит на отрезке BW (рис. 8). Легко проверить (проделайте это), что остальные две вершины W_1 и W_2 треугольника T лежат на окружности C (на самом деле этим и определялся выбор расстояния d).

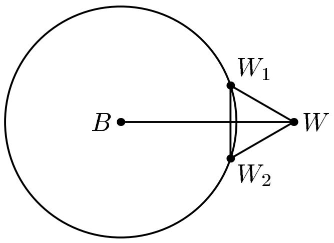


Рис. 8.

В силу предложения 6 на плоскости нет отрезка длины d_{rb}, у которого один конец красный, а другой синий. Поэтому на окружности C нет красных точек (ее центр B синий). Таким образом, окружность покрашена в белый и синий цвет. В силу предложения 5, любая хорда длины d_w в окружности C имеет один белый конец. Следовательно, одна из точек W_1 и W_2 белая, т. е. в равностороннем треугольнике WW_1W_2 со стороной d_w имеются две белые вершины, тогда как белый цвет не реализует расстояние d_w.

Аналогично доказывается, что на плоскости не существует отрезка RW длины d, у которого конец R красный, а конец W белый. (Начертите рис. 8 с тем изменением, что центр окружности находится в красной точке R.)

Итак, мы показали, что окружность радиуса d с центром в белой точке должна быть полностью белой. Но тогда и вся плоскость белая. Это противоречие завершает доказательство. □

В конце 2003 года Алексей Канель-Белов сообщил мне удивительно красивое решение задачи 6, которое было найдено Алексеем Мерковым, десятиклассником московской школы номер 91, и доложено Алексеем Рогинским и Даниилом Дименштейном в 1997 г. в Московском дворце научно-технического творчества молодежи (см. «Материалы конференции „Поиск–97“», М., 1997, с. 143–144).

Второе решение (А. Мерков). Пусть плоскость раскрашена в три цвета: красный, белый и синий, и они не реализуют расстояния r, w и b соответственно. Введем на этой плоскости декартовы координаты с началом O и построим три множества S_r, S_w и S_b, названные выше веретенами Мозера (см. рис. 2). Пусть при этом точка O является одной из 7 вершин каждого веретена, а их рёбра равны r, w и b соответственно. В результате получаем 6 «красных» векторов $v_1, \dots, v_6$ из точки O в каждую из остальных вершин веретена S_r, а также 6 «белых» векторов $v_7, \dots, v_{12}$ и 6 «синих» векторов $v_{13}, \dots, v_{18}$ из точки O в остальные вершины веретен S_w и S_b соответственно.

Рассмотрим теперь 18-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{18}$ и естественное отображение $M\colon \mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^2$, которое определяется по формуле $(a_1, \dots, a_{18}) \to a_1v_1 + \dots + a_{18}v_{18}$. Приписав каждой точке из $\mathbb{R}^{18}$ цвет соответствующей точки плоскости, получаем раскраску пространства $\mathbb{R}^{18}$ в три цвета. В соответствии с цветом рассмотренных выше векторов на плоскости, естественно назвать первые шесть координатных осей в $\mathbb{R}^{18}$ «красными», следующие шесть — «белыми», а последние шесть — «синими».

Пусть множество W содержит все те точки из $\mathbb{R}^{18}$, у которых не более чем одна координата каждого цвета равна 1, а остальные координаты (15 или больше) равны 0. Легко проверить (проделайте это), что W состоит из 7^3 точек. Если A — совокупность значений белых и синих координат некоторой точки из W, то найдутся еще 6 точек из W с тем же A. Образ $M(A)$ множества из этих 7 точек при отображении M соответствует некоторому параллельному переносу красного веретена S_r. Зафиксировав другие возможные значения белых и синих координат, получим другие 7 точек в $\mathbb{R}^{18}$ и, соответственно, другой сдвиг веретена S_r. В итоге W разбивается на 7^2 подмножеств, каждое из которых соответствует некоторому сдвигу веретена S_r.

Вспомним теперь замечание после задачи 2. Здесь оно означает, что любой сдвиг веретена Мозера S_r содержит не более двух красных точек из семи. Так как W разбито на сдвиги веретена S_r, то не более $2/7$ всех точек из W имеют красный цвет. Аналогично получаем, что не более $2/7$ всех точек — белые и не более $2/7$ — синие. Но $2/7 + 2/7 + 2/7$ меньше, чем 1! Это противоречие означает, что хотя бы один цвет реализует все расстояния, что и требовалось. □

Задача 8. (С. Б. Стечкин, [39]).

$$\chi_p \leqslant 6,$$

т. е. существует раскраска плоскости в 6 цветов, при которой никакой цвет не реализует все расстояния.

Решение С. Б. Стечкина, приведенное Д. Е. Райским в [39]. Основным элементом конструкции служит параллелограмм, состоящий из четырех правильных шестиугольников и восьми равносторонних треугольников, причем все они имеют стороны длины 1 (рис. 9). Раскрасим шестиугольники в цвета 1, 2, 3 и 4. Треугольники делятся на два

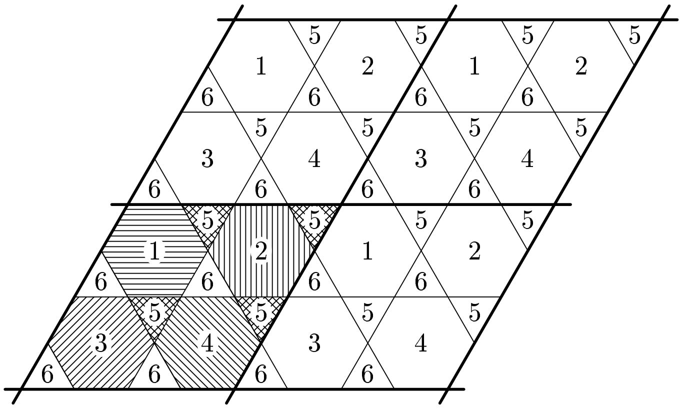


Рис. 9.

класса: если горизонтальное основание находится наверху, то используем цвет 5, а если внизу, то цвет 6. При раскраске считается, что каждый шестиугольник включает всю свою границу, за исключением самой правой и двух нижних вершин, а треугольники не включают никаких граничных точек.

Теперь замостим всю плоскость сдвигами исходного параллелограмма. Задача решена. □

Мы решили задачу 8 с помощью простой конструкции. Простой, после того как она найдена. Суть дела была в том, чтобы ее найти, и первым это сделал С. Б. Стечкин. Христофор Колумб тоже «прямо приплыл» в Америку! Меня захватила эта тема, и я погрузился в размышления о раскраске плоскости в 6 цветов. Я понял, что если наша конечная цель — найти хроматическое число плоскости χ или хотя бы усилить известные оценки $(4 \leqslant \chi \leqslant 7)$, то нужно научиться оценивать, насколько близка данная раскраска плоскости к искомой. В 1992 г. я научился это измерять.

Определение 9 (А. Сойфер [45]). Пусть дана раскраска плоскости в n цветов, причем цвет i не реализует расстояние d_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В этом случае будем говорить, что раскраска имеет *тип* $(d_1,\ d_2, \ldots, d_n)$.

Введенное понятие было столь естественным и полезным, что удостоилось высшей возможной чести, войдя в математический фольклор: оно всюду встречается без указания автора (см., например, с. 14 в фундаментальной 991-страничной монографии [21]).

Большим успехом в решении задачи о хроматическом числе плоскости стало бы отыскание раскраски в 6 цветов типа $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ либо доказательство ее несуществования. Выбрав подходящий исходный параллелограмм в раскраске Стечкина, можно получить тип $(1,1,1,1,1/2,1/2)$. Д. Р. Вудолл [57] сумел найти раскраску плоскости в 6 цветов, где каждый цвет является замкнутым множеством, не реализующим все расстояния. Однако в его примере «пропущенных расстояний» три: он имеет тип $\bigl(1,1,1,1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/(2\sqrt{3})\bigr)$.

В поисках «хорошей» раскраски я обратил внимание на замощение плоскости правильными восьмиугольниками и квадратами (рис. 10). Но и эта раскраска не годится! Убедитесь в этом сами.

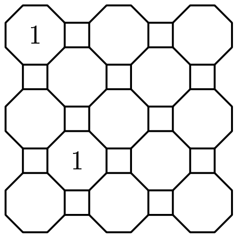


Рис. 10.

Задача 10. Докажите, что множество всех квадратов в замощении на рис. 10 (даже без учета их границ) реализует все расстояния.

Я стал сжимать квадраты, пока их диагональ не стала равной расстоянию между ближайшими квадратами. Одновременно (!) диагональ восьмиугольника (теперь уже неправильного) стала равной расстоянию между двумя восьмиугольниками, помеченными единицей на рис. 10. Я добился успеха!

Задача 11. (А. Сойфер [45]). Докажите, что существует раскраска плоскости в 6 цветов, имеющая тип $(1,1,1,1,1,1/\sqrt{5})$.

Решение. Возьмем два квадрата, один со стороной 2, а другой с диагональю 1 (рис. 11). С их помощью замостим плоскость квадратами и (неправильными) восьмиугольниками (рис. 13). Цвета $1,\ldots,5$ используем для восьмиугольников, а все квадраты покрасим в цвет 6. В каждый восьмиугольник и квадрат включается половина его границы (жирные линии на рис. 12) за вычетом ее концов. Легко проверить (проделайте это!), что расстояние $\sqrt{5}$ не реализуется цветами $1,\ldots,5$, а расстояние 1

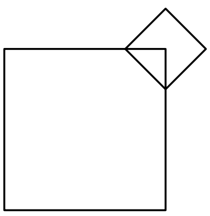


Рис. 11.

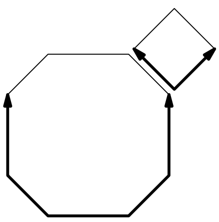


Рис. 12.

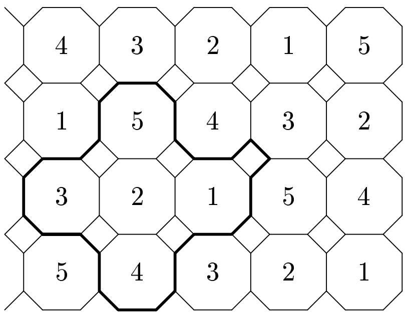


Рис. 13.

не реализуется цветом 6. Сжав все линейные размеры в $\sqrt{5}$ раз, получаем раскраску в 6 цветов, имеющую тип $(1,1,1,1,1,1/\sqrt{5})$. $\square$

Решив задачу 11 в августе 1992 г., я испытал смешанные чувства. С одной стороны, «„почти“ не считается»: раскраска в 6 цветов типа $(1,1,1,1,1,1)$ так и не была найдена. С другой стороны, я почувствовал, что ее, вероятно, и не существует, и тогда моя раскраска — наилучшая из возможных. Статья о решении задачи 11 составляла полторы страницы плюс страница рисунков. Она была отреферирована за один день [45]. При этом она породила новую открытую проблему.

Определение 12 (А. Сойфер [28]). *Почти хроматическое число плоскости* χ_a — это наименьшее число цветов в такой раскраске, когда почти все (т. е. все кроме одного) цвета не реализуют единичное расстояние, а оставшийся цвет не реализует некоторое (возможно другое) расстояние.

Число χ_a удовлетворяет следующим неравенствам:

$$4 \leqslant \chi_a \leqslant 6.$$

Нижняя оценка вытекает из работы Дмитрия Райского [39]. Верхняя доказана мной в задаче 11 [45]. Остается

Открытая проблема 13 (А. Сойфер [28]). Найти χ_a.

4. Континуум раскрасок в 6 цветов

Другую раскраску в 6 цветов нашли Илья Гофман и автор в 1993 г. ([28], [29]). Она имеет тип $(1,1,1,1,1,\sqrt{2}-1)$. Примечательна история этого открытия. Летом 1993 г. я посетил в Москве своего родственника, известного композитора новой венской школы Леонида Гофмана. Его 15-летний сын Илья тогда учился в Музыкальной школе имени Гнесиных. Илья желал узнать, чем я занимаюсь в математике, и не признавал общих ответов. Он хотел конкретности. Я показал ему свою раскраску в 6 цветов (задача 11). Илья заинтересовался. На следующий день он продемонстрировал мне... раскраску Стечкина (см. выше рис. 9), которую он нашел самостоятельно! «Замечательно», — ответил я, — «но ты опоздал на 23 года!» Вскоре он предложил новую идею: применить замощение квадратами двух размеров. Илья обладал интуицией виртуоза, но не имел математической культуры. Однако я вычислил, каковы должны быть размеры этих квадратов, чтобы раскраска обладала необходимыми свойствами. В результате родилась совместная работа необычной пары, состоявшей из математика и музыканта. (Сегодня Илье 25 лет, и он один из самых ярких российских альтистов, аспирант Московской консерватории по классу прославленного Юрия Башмета.)

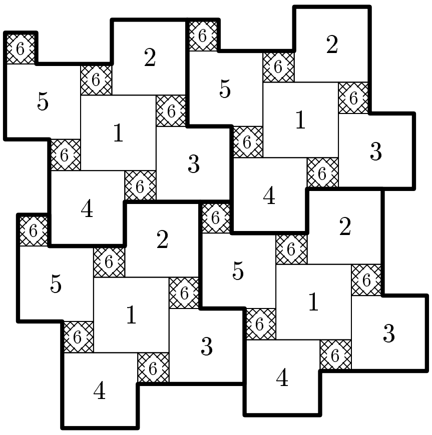


Рис. 14.

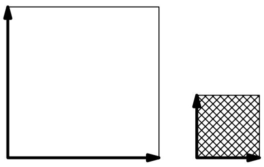


Рис. 15.

Задача 14 (И. Гофман и А. Сойфер [28], [29]). Построить раскраску плоскости в 6 цветов, имеющую тип $(1, 1, 1, 1, 1, \sqrt{2} - 1)$.

Решение. Замостим плоскость квадратами с диагональю 1 и с диагональю $\sqrt{2} - 1$ (рис. 14). Большие квадраты покрасим в цвета $1, \ldots, 5$, а маленькие — в цвет 6. При этом каждый квадрат включает половину своей границы, а именно левую и верхнюю сторону, исключая концы этой половины (рис. 15). □

Примеры, построенные в задачах 11 и 14, приводят к следующей открытой проблеме.

Открытая проблема 15 (А. Сойфер [46], [47]). Найти 6*-реализуемое множество* X_6, т. е. совокупность всех таких положительных чисел α, что существует раскраска в 6 цветов типа $(1, 1, 1, 1, 1, \alpha)$.

В этих новых терминах задачи 11 и 14 можно сформулировать следующим образом:

$$1/\sqrt{5}, \sqrt{2} - 1 \in X_6 .$$

Что общего между раскрасками из задач 11 и 14? Это не очевидно, не так ли? Поразмыслив, я понял, что это два крайних случая общей ситуации, и на самом деле справедливо гораздо более сильное утверждение.

Теорема 16 (А. Сойфер [47]).

$$\left[\sqrt{2} - 1, 1/\sqrt{5}\right] \subseteq X_6 ,$$

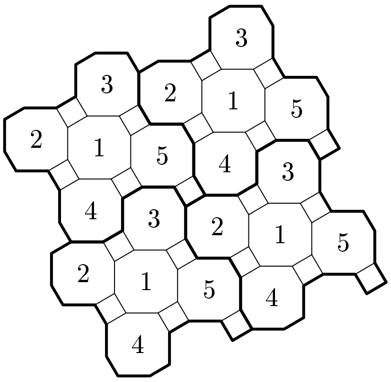


Рис. 16.

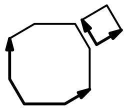


Рис. 17.

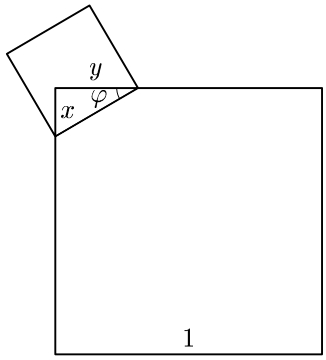


Рис. 18.

т.е. для каждого $\alpha \in \left[\sqrt{2}-1, 1/\sqrt{5}\right]$ существует раскраска в 6 цветов типа α.

Доказательство. Рассмотрим следующее замощение плоскости (рис. 16). Его порождают большой и малый квадрат, образующие угол величины φ (рис. 18). Раскрасим замощение на рис. 16 в шесть цветов. Пусть F обозначает фигуру, ограниченную жирной линией. Восьмиугольники внутри фигуры F раскрасим в цвета от 1 до 5, а все малые квадраты — в цвет 6. Пусть при этом каждый восьмиугольник или квадрат включает часть своей границы, обозначенную жирным на рис. 17. Требуется показать, что каждый цвет не реализует некоторое расстояние.

Пусть длина стороны большого квадрата равна 1. Отрезки его соседних сторон внутри малого квадрата обозначим x и y, $x \leqslant y$ (рис. 18). Легко видеть (рис. 19), что продолжения сторон четырех больших квадратов внутрь одного малого квадрата разрезают последний на четыре конгруэнтных прямоугольных треугольника со сторонами x и y и квадрат со стороной $y-x$.

Наложив условие, что каждый цвет не реализует некоторое расстояние, получаем следующую систему из двух неравенств (рис. 20):

$$\begin{cases} d_1 \geqslant d_2\,, \\ d_3 \geqslant d_4\,. \end{cases}$$

Рисунки 19 и 20 легко позволяют выразить все d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ через x и y. Приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{(1+y-x)^2 + (2x)^2} \geqslant \sqrt{1 + (1-2x)^2}, \\ \qquad\qquad\qquad 1 - x - y \geqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}. \end{cases}$$

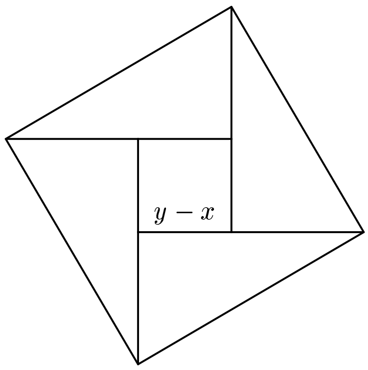


Рис. 19.

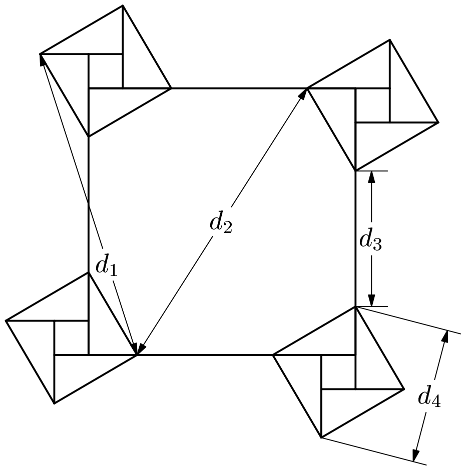


Рис. 20.

Решая отдельно каждое неравенство относительно x, находим *единственную* функцию, выражающую x через y, которая удовлетворяет обоим неравенствам:

$$x = \sqrt{2-4y} + y - 1, \qquad \text{где } 0 \leqslant y \leqslant 0{,}5\,. \tag{$*$}$$

Так как $0 \leqslant x \leqslant y$, то на самом деле границы для y более узки: $0{,}25 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}-1$. Если y лежит в этом промежутке, то формула $(*)$ однозначно определяет x, причем выполнены *равенства* $d_1 = d_2$ и $d_3 = d_4$.

Итак, мы показали, что при $y \in [0{,}25, \sqrt{2}-1]$ существует раскраска в 6 цветов типа $(1,1,1,1,1,\alpha)$; но какие значения может принимать α? Нетрудно видеть, что $\alpha = d_4/d_2$.

Сделав подстановку $Y = \sqrt{2-4y}$, где $Y \in [2-\sqrt{2}, 1]$, получаем:

$$\alpha^2 = \frac{Y^4 - 4Y^3 + 8Y^2 - 8Y + 4}{Y^4 - 8Y^3 + 24Y^2 - 32Y + 20}\,.$$

Сделаем подстановку $Z = Y - 2$, где $Z \in [-\sqrt{2}, -1]$:

$$\alpha^2 = 1 + \frac{4Z(Z^2+2Z+2)}{Z^4+4}\,.$$

Чтобы понять поведение функции α^2, вычислим ее производную:

$$(\alpha^2)' = -\frac{4}{(Z^2+4)^2}(Z^6 + 4Z^5 + 6Z^4 - 12Z^2 - 16Z - 8).$$

Нам явно повезло, так как этот многочлен шестой степени приводится к виду

$$(\alpha^2)' = -\frac{4}{(Z^2+4)^2}(Z^2-2)[(Z+1)^4 + 2(Z+1)^2 + 1]\,.$$

Это означает, что на отрезке $\left[-\sqrt{2}, -1\right]$, который нас интересует, экстремум функции α^2 достигается при $Z = -\sqrt{2}$. Возвращаясь от Z к Y и y, мы видим, что на отрезке $\left[0{,}25, \sqrt{2}-1\right]$ функция $\alpha = \alpha(y)$ убывает от $\alpha = 1/\sqrt{5} \approx 0{,}44721360$ (что отвечает раскраске из задачи 11) до $\alpha = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41421356$ (раскраска из задачи 14). Так как при этом функция $\alpha = \alpha(y)$ непрерывна, то она принимает *все* значения из отрезка $\left[\sqrt{2}-1, 1/\sqrt{5}\right]$, и только *по одному разу*.

Для каждого угла φ *между сторонами малого и большого квадрата на рис.* 18 *существуют и единственны длины этих сторон, при которых соответствующая раскраска имеет тип* $(1, 1, 1, 1, 1, \alpha)$, *причем* α *определяется однозначно*. Замечательный факт: решения существуют, но редки — они образуют нечто вроде кривой в трехмерном пространстве углов и двух линейных размеров! □

Замечание. Задача отыскания 6-реализуемого множества X_6 тесно связана с отысканием хроматического числа плоскости χ. Решение первой задачи прояснит ситуацию во второй, а может быть и приведет к ее решению:

$$\text{если } 1 \notin X_6, \text{ то } \chi = 7.$$
$$\text{если } 1 \in X_6, \text{ то } \chi \leqslant 6.$$

Открытая проблема 17 (A. Soifer [47]). Найти X_6.

Конечно, вы понимаете, что при всей простоте формулировки эта проблема исключительно трудна.

5. Вблизи нижней границы

Понятие хроматического числа можно ввести не только для плоскости, но и для любого ее подмножества S. *Хроматическое число* $\chi(S)$ множества S — это наименьшее число цветов в его раскраске, не содержащей одноцветной пары на расстоянии 1.

В 1951 г. Н. Г. де Брёйн и Пауль Эрдёш опубликовали очень полезный результат ([16]). В нашей ситуации он означает следующее.

Теорема компактности 18[4)] (Н. Г. де Брёйн, П. Эрдёш). Хроматическое число плоскости равно максимуму из хроматических чисел ее *конечных* подмножеств.

Как следствие, при отыскании хроматического числа плоскости основные усилия были направлены — и с успехом — на ее конечные подмножества[5)].

4) Здесь используется аксиома выбора.

5) Однако см. в следующем параграфе новейшие результаты.

Предлагаем решить самостоятельно следующие две задачи.

Задача 19. Найдите наименьшее число δ_3 точек в подмножестве плоскости, имеющем хроматическое число 3.

Задача 20 (Л. Мозер и У. Мозер, [35]). Найдите наименьшее число δ_4 точек в подмножестве плоскости, имеющем хроматическое число 4. (Подсказка: $\delta_4 = 7$.)

Виктор Кли и Стэн Вэйгон в книге [34] поставили следующую открытую проблему:

Открытая проблема 21. Пусть k равно 5, 6 или 7. Найдите наименьшее число δ_k точек в подмножестве плоскости, имеющем хроматическое число k.

Разумеется, этот вопрос имеет смысл только при $\chi > 4$. В этом случае он подсказывает путь отыскания хроматического числа плоскости: нужно строить конечные множества типа «веретен». Беда в том, что, несмотря на множество попыток, никому до сих пор не удалось построить пример конечного множества с хроматическим числом 5. Популярен был такой подход: построить 5-хроматический граф и попытаться вложить его в плоскость, превратив при этом каждое ребро в сегмент длины 1. Однако типичные примеры 4-хроматических множеств (см. рис. 2 и 5) строятся из не слишком гибких фигур — равносторонних треугольников. Вероятно, это и побудило Пауля Эрдёша в 1976 г. сформулировать следующую задачу.

Задача 22 (П. Эрдёш, [7]). Существует ли конечное подмножество плоскости S с хроматическим числом 4, не содержащее равносторонних треугольников со стороной 1?

В 1979 г. австралийский математик Николас Уормолд получил положительный ответ. В своей впечатляющей статье [58] Уормолд доказал существование множества S из 6448 точек с хроматическим числом 4. Это множество не содержит треугольников *и четырехугольников*, все стороны которых равны 1. Уормолду потребовалась помощь компьютера! Мне хотелось бы дать вам представление о первоначальной конструкции Уормолда, но эта длинная статья тогда стала бы еще длиннее. Так что лучше обратиться к [58] и [51]. Между прочим, Пауль Эрдёш — в своем характерном стиле — заплатил Нику за его решение 25 долларов.

Ожидая положительного ответа в задаче 22, Пауль Эрдёш прямо в следующей фразе сформулировал следующую проблему.

Задача 23 (П. Эрдёш, [7]). Пусть плоское множество S при $3 \leqslant n \leqslant t$ не содержит n-угольников, все стороны которых равны 1. Существует ли такое t, что хроматическое число множества S не может быть больше трех?

Выступая в 1992 г. на конференции в Бока Ратон, я вспомнил задачу 22, когда-то поставленную Паулем, и придал ей форму конкурсного задания:

Открытая проблема 24. Найдите наименьшее число точек σ_4 в плоском множестве с хроматическим числом 4, не содержащем равносторонних треугольников со стороной 1. Постройте такое множество S из σ_4 точек.

Многие молодые математики, включая аспирантов, вдохновились этим выступлением и приняли мой вызов. Так сложилось, что в том же академическом году при поддержке великого геометра Бранко Грюнбаума, а затем и Пауля Эрдёша, я основал журнал «Геомбинаторика», единственный в своем роде; он посвящен открытым проблемам в дискретной и комбинаторной геометрии и смежных областях. И у нас получилось соревнование мирового уровня. Лишь взгляните на следующие таблицы 2 и 3 (*обхват* графа — это наименьшее число ребер в каком-либо его цикле).

Графы, построенные рекордсменами, столь же содержательны математически, сколь и просто красивы. Все они будут включены в книгу [51]. Но я должен продемонстрировать вам хотя бы один граф — пусть это будет «Рыба Хохберга – О'Доннелла» (рис. 21).

Напомним, что *хроматическое число графа G* — это наименьшее число цветов в его правильной раскраске (когда соседние вершины покрашены в разные цвета). Возможно, вы знаете (если нет, то посмотрите в любой серьезной книге по теории графов), что наименьший граф с хроматическим числом 4, не содержащий треугольников, — это граф Грёцша с 11 вершинами. «Рыба» удовлетворяет всем условиям на граф Грёцша плюс еще одно: это граф единичных расстояний (т. е. каждое ребро имеет длину 1). Замечательно, что Роб и Пауль обошлись всего 23 вершинами. Является ли это число наименьшим? Не уверен. Но оно, несомненно, очень близко к наименьшему. Таким образом, на страницах «Геомбинаторики» мы продвинулись от 6448 до 23 — невероятный прогресс!

Многочисленные попытки усилить нижнюю оценку хроматического числа плоскости не увенчались успехом. Видя безнадежность ситуации (или из любознательности), знаменитый американский математик Роналд Л. Грэхем (ныне президент Американской математической ассоциации и казначей Национальной академии наук) установил высокую премию в 1000 долларов за решение нашей задачи.

6448	Н. Уормолд	1979	Austr. Math. Soc. A 28, 1–8
56	П. О'Доннелл	июль 1994	Geombinatorics IV(1), 23–29
47	К. Чилакамарри	январь 1995	Geombinatorics IV(3), 64–76
46	Р. Хохберг	1995	не опубликовано
40	П. О'Доннелл	июль 1995	Geombinatorics V(1), 31–34
23	Р. Хохберг и П. О'Доннелл	апрель 1996	Geombinatorics V(4),137–141

Табл. 2. *Мировые рекорды: наименьший граф единичных расстояний с хроматическим числом 4 и обхватом 4*

6448	Н. Уормолд	1979	Austr. Math. Soc. A 28, 1-8
45	Р. Хохберг и П. О'Доннелл	апрель 1996	Geombinatorics V(4),137-141

Табл. 3. *Мировые рекорды: наименьший граф единичных расстояний с хроматическим числом 4 и обхватом 5*

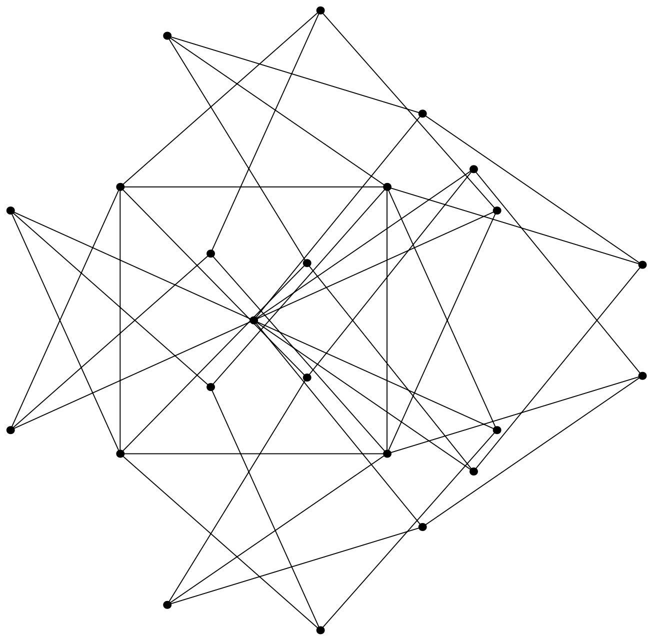


Рис. 21. *Рыба Хохберга – О'Доннелла: рекордный граф единичных расстояний с хроматическим числом 4, не содержащий треугольников*

Тысячедолларовая открытая проблема 25 (Р. Л. Грэхем, МТИ, лекция для участников американской математической олимпиады, май 2001 г.). Равно ли хроматическое число плоскости четырем?

Однако многое удалось узнать о 4-хроматических графах единичных расстояний. На мой взгляд, лучший из этих результатов содержится в упомянутой выше диссертации Пола О'Доннелла. Он полностью решает задачу Пауля Эрдёша 23 (см. выше).

Теорема О'Доннелла 26 ([38]). Существуют 4-хроматические графы единичных расстояний с произвольным конечным обхватом.

6. Взгляд в будущее: аксиома выбора и хроматическое число плоскости

Трудно предсказывать, особенно будущее

Старинная датская пословица

Однажды в начале 1984 г. в небольшом ренессансном городке Удино близ Венеции я познакомился с молодым израильским математиком Сахароном Шелахом, о котором тогда много говорили в математических кругах: он решил долго стоявшую проблему Уайтхеда. Сахарону понравились мои задачи и гипотезы из области абелевых групп, и он предложил совместно работать над ними. Результатом интенсивной работы в течение недели стали две содержательные статьи, которые появились в Journal of Algebra.

В конце 2002 г. Сахарон снова предложил работать совместно. Что было бы лучшей задачей для совместного решения? Ответ пришел немедленно. Шелах — один из крупнейших специалистов всех времен в логике и теории множеств, так что я решил обсудить с ним мои мысли по поводу знаменитого результата Эрдёша – де Брёйна, который насчитывал уже 50 лет. Ниже изложен итог наших рабочих встреч в 2002 г. и 2003 г. Некоторые из этих совместных результатов приведены в [40] (краткое резюме — в [41]), а другие пока не опубликованы [42].

6.1. Постановка вопроса

В своей фундаментальной работе 1951 г. [16] Пауль Эрдёш и Н. Г. де Брёйн показали, что хроматическое число плоскости достигается на некотором конечном подграфе (см. теорему компактности 18). Естественно, этот результат сориентировал большинство исследователей в направлении конечных графов единичных расстояний. На заднем плане, однако, осталось одно ограничение результата Эрдёша – де Брёйна:

в нем весьма существенно использовалась аксиома выбора. Естественно поэтому спросить: а если бы «выбора» не было? Его отсутствие — как в математике, так и в жизни — может существенно влиять на результат (российские читатели знают это особенно хорошо).

Ниже приведен пример графа расстояний на плоскости $\mathbb{R}^2$, хроматическое число которого зависит от системы аксиом теории множеств. Здесь рассмотрена иная ситуация, чем в задаче о хроматическом числе плоскости, но этот пример ярко демонстрирует зависимость хроматического числа от наличия или отсутствия аксиомы выбора.

В заключение мы сформулируем *условную теорему об хроматическом числе*, которая конкретно указывает условия, при которых хроматическое число плоскости принимает одно из двух возможных значений в зависимости от аксиом теории множеств.

6.2. Предварительные сведения

Вспомним основные теоретико-множественные определения и обозначения. В 1904 г. Эрнст Фридрих Фердинанд Цермело [59] формализовал аксиому выбора, которая до этого использовалась на интуитивном уровне.

Аксиома выбора (**AC**). Каждое семейство Φ непустых множеств обладает функцией выбора, т. е. существует такая функция f, что $f(S) \in$ $\in S$ для каждого S из Φ.

Во многих математических результатах в действительности требуется счетный вариант аксиомы выбора:

Счетная аксиома выбора ($\mathbf{AC}_{\aleph_0}$). Каждое счетное семейство непустых множеств обладает функцией выбора.

В 1942 г. Пауль Исаак Бернайс [1] ввел следующую аксиому:

Принцип зависимого выбора (**DC**). Пусть E — бинарное отношение на непустом множестве A, причем для каждого $a \in A$ существует такое $b \in A$, что aEb. Тогда существует такая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, что $a_n E a_{n+1}$ при всех $n < \omega$.

Из **AC** вытекает **DC** (см., например, теорему 8.2 из [32]), но не обратно. В свою очередь из **DC** вытекает $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$, но не обратно. Аксиома **DC** — слабая форма аксиомы **AC**; она достаточна для построения классической теории лебеговой меры. В частности, Роберт М. Соловэй сделал следующее замечание [53] в ответ на вопрос Сойфера: «Нужна ли аксиома **DC** для стандартного построения теории лебеговой меры (при отсутствии аксиомы выбора), или достаточно счетной аксиомы выбора?»

> «Я думал об этом в начале 60-х. Аксиома **DC** потребовалась только в теореме Радона – Никодима. Но я допускаю, что существует более тонкое доказательство этой теоремы, позволяющее обойтись счетной аксиомой выбора. Я лишь заметил, что обычное доказательство [см. Халмоша] использует **DC**.»

Нам понадобится следующая аксиома:

(**LM**) Любое множество вещественных чисел измеримо по Лебегу.

Как всегда, **ZF** означает систему аксиом теории множеств Цермело – Френкеля, а **ZFC** — ту же систему с добавлением аксиомы выбора.

Предположив существование недостижимого кардинала, Роберт М. Соловэй в 1964 г. построил (а в 1970 г. опубликовал) модель, доказывающую следующее утверждение [52]:

Теорема Соловэя 27. Система аксиом **ZF+DC+LM** непротиворечива.

Как отмечает Томас Йек [32], в модели Соловэя любое множество вещественных чисел отличается от борелевского на множество меры нуль.

6.3. Первый пример

Определим следующий граф U^2: его вершинами являются все точки плоскости $\mathbb{R}^2$, причем вершины соединены ребром, если и только если расстояние между ними равно 1. Такой граф можно назвать *плоскостью единичных расстояний*, и его хроматическое число совпадает с *хроматическим числом плоскости*, определенным выше. Конечные подграфы из U^2 называются *конечными плоскими графами единичных расстояний*.

В качестве множества «запрещенных» расстояний в данной ситуации можно использовать не только $\{1\}$, но и любое множество положительных чисел S. Мы будем получать различные графы на плоскости $\mathbb{R}^2$ — или на другом метрическом пространстве или его подмножестве. Будет естественно называть их *графами расстояний*.

Определим граф G_2 следующим образом: множеством его вершин служит множество $\mathbb{R}^2$ всех точек плоскости, а множество ребер состоит из объединения четырех множеств $\{(s,t) : s,t \in \mathbb{R}^2,\ s-t-\varepsilon \in Q^2\}$, где ε имеет вид $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ соответственно.

Утверждение 1. В теории **ZFC** хроматическое число графа G_2 равно 4.

Доказательство. Пусть $S = \{(q_1+n_1\sqrt{2}, q_2+n_2\sqrt{2}) : q_i \in Q, n_i \in Z\}$. Определим следующее отношение эквивалентности E на множестве $\mathbb{R}^2$: $sEt \Leftrightarrow s-t \in S$. Пусть Y — множество представителей классов этой эквивалентности. Для каждого $t \in \mathbb{R}^2$ существует единственное

$y(t) \in Y$, такое что $t - y(t) = (q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) \in S$. Искомая раскраска в 4 цвета $c(t)$ определяется следующим образом: $c(t) = (l_1, l_2)$, где $l_i = 0, 1$, $l_i \equiv n_i \pmod 2$. □

В отсутствие аксиомы выбора ситуация резко меняется:

Утверждение 2. В теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_{\aleph_0} + \mathbf{LM}$ хроматическое число графа G_2 не равно никакому натуральному n и даже не равно $\aleph_0$.

Утверждение 2 непосредственно вытекает из следующих предложений 1 и 2:

Предложение 1. Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — измеримые подмножества в $\mathbb{R}^2$, причем $\bigcup_{n<\omega} A_n = [0,1)^2$. Тогда хотя бы одно из множеств A_n содержит две соседние вершины графа G_2.

Предложение 2. Пусть $A \subseteq [0,1)^2$, причем A не содержит никаких двух соседних (т. е. соединенных ребром) вершин графа G_2. Тогда A имеет лебегову меру 0.

Доказательство. Сначала докажем предложение 2. Пусть, напротив, множество $A \subseteq [0,1)^2$ не содержит никаких двух соседних вершин, но имеет положительную меру. Тогда существует прямоугольник I, одна из сторон которого параллельна оси абсцисс и имеет, скажем, длину a, причем

$$\frac{\mu(A \cap I)}{\mu(I)} > \frac{9}{10}\,. \tag{0.1}$$

Возьмем такое $q \in Q$, что $\sqrt{2} < q < \sqrt{2} + a/10$. Рассмотрим следующий сдвиг множества A:

$$B = A - \left(q - \sqrt{2}, 0\right) = \left\{\left(x - q + \sqrt{2}, y\right) : (x, y) \in A\right\}.$$

Тогда

$$\frac{\mu(B \cap I)}{\mu(I)} > \frac{8}{10}\,. \tag{0.2}$$

В силу неравенств (0.1) и (0.2) найдется $v = (x, y) \in I \cap A \cap B$. Так как $(x, y) \in B$, то $w = \left[x + \left(q - \sqrt{2}\right), y\right] \in A$. Таким образом, $v, w \in A$ и $v - w - \left(\sqrt{2}, 0\right) = (-q, 0) \in Q^2$. Это означает, что $\{v, w\}$ — ребро графа G_2, оба конца которого лежат в A. Получено искомое противоречие.

Предложение 1 становится теперь очевидным. Поскольку $\bigcup_{n<\omega} A_n = [0,1)^2$, а мера Лебега счетно аддитивна в $\mathbf{AC}_{\aleph_0}$, то при некотором натуральном n множество A_n имеет ненулевую меру. Согласно утверждению 2, A_n содержит пару соседних вершин графа G_2, что и требовалось. □

6.4. Второй пример

Построим теперь граф G_3, несколько отличный от G_2: множеством его вершин служит множество $\mathbb{R}^2$ точек плоскости, а множество ребер состоит из объединения *двух* множеств $\{(s,t) : s,t \in \mathbb{R}^2,\ s - t - \varepsilon \in Q^2\}$, где $\varepsilon = (\sqrt{2}, 0)$ и $\varepsilon = (0, \sqrt{2})$ соответственно.

Утверждение 1. В теории **ZFC** хроматическое число графа G_3 равно 2.

Доказательство. Пусть $S = \{\, (q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) \ : \ q_i \in Q, n_i \in Z\}$. Определим следующее отношение эквивалентности E на множестве $\mathbb{R}^2$: $sEt \Leftrightarrow s - t \in S$. Пусть Y — множество представителей классов этой эквивалентности. Для каждого $t \in \mathbb{R}^2$ существует единственное $y(t) \in Y$, такое что $t - y(t) = (q_1 + n_1\sqrt{2}, q_2 + n_2\sqrt{2}) \in S$. Искомая раскраска в 2 цвета $c(t)$ определяется четностью суммы $n_1 + n_2$.

Утверждение 2. В теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{AC}_{\aleph_0} + \mathbf{LM}$ хроматическое число графа G_3 не равно никакому натуральному n и даже не равно $\aleph_0$.

Доказывается аналогично утверждению 2 из раздела 6.3.

Замечание. Может возникнуть вопрос, почему $\sqrt{2}$ играет такую роль в наших построениях. Конечно, $\sqrt{2}$ — древнейшее известное иррациональное число: по-видимому, его иррациональность была доказана пифагорейцами. Наши рассуждения и результаты не изменятся, если заменить $\sqrt{2}$ другим иррациональным числом.

6.5. Условная теорема о хроматическом числе плоскости

Существенна ли аксиома выбора в задаче о хроматическом числе плоскости χ? Ответ зависит от значения χ, которое, разумеется, нам пока неизвестно. Однако приведенные примеры показывают ситуации, в которых аксиома выбора становится весьма существенной. Мы можем сформулировать следующую теорему.

Условная теорема 28 (Шелах и Сойфер [40])[6]. Предположим, что хроматическое число любого плоского конечного графа единичных расстояний не превосходит 4. Тогда:

*) в теории **ZFC** хроматическое число плоскости равно 4;

**) в теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{DC} + \mathbf{LM}$ хроматическое число плоскости равно 5, 6 или 7.

[6] Предполагается существование недостижимого кардинала. Кардинал $\varkappa$ называется *недостижимым*, если он регулярен, является сильным пределом и при этом $\varkappa > \aleph_0$. Бесконечный кардинал $\aleph_a$ *регулярен*, если его начальный ординал не конфинален никакому меньшему ординалу. Кардинал $\varkappa$ является *сильным пределом*, если из $\lambda < \varkappa$ следует $2^\lambda < \varkappa$.

Доказательство. Утверждение *) следует из [16].

В теории $\mathbf{ZF} + \mathbf{DC} + \mathbf{LM}$ любое подмножество S плоскости $\mathbb{R}^2$ измеримо по Лебегу. Действительно, измеримость подмножества S равносильна существованию такого борелевского множества B, что симметрическая разность $S \Delta B$ имеет меру нуль. Значит, любое подмножество плоскости отличается от борелевского на множество меры нуль. Единичный отрезок $I = [0,1]$ можно представить как множество бесконечных двоичных дробей. Заметим, что биекция $I \to I^2\colon 0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots \mapsto (0.a_1a_3\ldots; 0{,}a_2a_4\ldots)$ сохраняет нулевую меру. Из результата Фальконера [18], сформулированного в разделе 2, вытекает теперь, что хроматическое число плоскости не меньше пяти. $\square$

Может быть, задача отыскания хроматического числа плоскости потому и выдержала все атаки, оставив возможными все значения от 4 до 7, что на самом деле ответ зависит от выбранной системы аксиом теории множеств?

7. Эпилог

«*Если буду жив через год, надеюсь проповедовать здесь снова. Если же нет, то надеюсь, что кто-нибудь прочтет лекцию в память обо мне.*» Такими словами Пауль Эрдёш закончил свое выступление 10 марта 1994 г. в Бока Ратон [15].

13 марта 2003 г. мы отпраздновали 90-летие со дня рождения Пауля Эрдёша. Пауль поставил столько крупных открытых проблем, что их хватит на века. Задача о хроматическом числе плоскости принадлежит не ему, но она очень ему нравилась. И только благодаря ему эта задача живет — подобно тому как Огастес де Морган спас гипотезу четырех красок (подробнее об этом см. [51]).

Изложенные результаты войдут в числе других в *Mathematical Coloring Book* [51]. Открытые проблемы Пауля Эрдёша войдут в *Problems of pgom Erdös* [17] (pgom — это аббревиатура poor great old man, так Пауль Эрдёш в шутку называл самого себя); над этой книгой мы вместе работали с конца 80-х до ухода Пауля в 1996 г. Полезные обзоры по затронутым вопросам содержатся в [34] и [3].

Здесь я попытался не только обрисовать содержательную математическую задачу, но и показать, что не обязательно излагать математику в непреклонно-формализованном стиле или подавлять читателя муштрой. По моему мнению, математику нужно излагать как волнующую драму человеческих устремлений и ярких характеров ее творцов.

Благодарю Бориса Френкина (переводчика этой статьи), Владимира Михайловича Тихомирова и Михаила Вялого за полезные замечания

и предложения. Я признателен Алексею Канель-Белову, который предложил — и чей энтузиазм вдохновил меня — написать эту статью, адресованную прежде всего молодым читателям «Математического просвещения». Когда-то и я родился в Москве, и я ценю эту возможность контактировать с вами, мои молодые коллеги. Буду благодарен вам за комментарии и дополнения к статье; направляйте их по адресу: до августа 2004 г. — Alexander Soifer, Department of Mathematics, Princeton University, Washington Rd, Princeton, NJ 08544, USA; с сентября 2004 г. — Alexander Soifer, University of Colorado, 1420 Austin Bluffs, Colorado Springs, CO 80918, USA.

Список литературы

[1] Bernays, P., A system of axiomatic set theory III, J. Symbolic Logic 7(1942), 65–89.

[2] Croft, H. T., Incidence incidents, Eureka (Cambridge) 30 (1967), 22–26.

[3] Croft, H. T., K. J. Falconer, and R. K. Guy, Unsolved Problems in Geometry, Springer, New York, 1991.

[4] de Bruijn, N. G., and P. Erdos, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indagationes Math., 13 (1951), 369–373.

[5] Erdös, P., Some unsolved problems, MTA MKI Kozl., 6 (1961), 221–254.

[6] Erdös, P., On some problems of elementary and combinatorial geometry, Ann. Math. Pure Appl., (4) 103 (1975), 99-108.

[7] Erdös, P., Задача из "Unsolved Problems", Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference 1975, p. 681, Utilitas Mathematica Pub., Winnipeg, 1976.

[8] Erdös, P., Some combinatorial problems in geometry, Geom. & Diff. Geom. Proc., Haifa, Israel, (1979); Lecture Notes in Math., 792, Springer (1980), 46–53.

[9] Erdös, P., Some applications of graph theory and combinatorial methods to number theory and geometry, Algebraic Methods in Graph Theory (Colloq. held in Szeged, Hungary 1978), Vol. I, Coll. Math Soc. J. Bolyai, 25 (1981), 137–148.

[10] Erdös, P., Some new problems and results in graph theory and other branches of combinatorial mathematics, Combinatorics and graph theory, Proc. Symp. Calcutta 1980, Lecture Notes Math., 885, Springer (1981), 9–17.

[11] Erdös, P., Интервью в документальном фильме Colorado mathematical Olympiad, 1989.

[12] Erdös, Paul, Письмо А. Сойферу от 12 июля 1991.

[13] Erdös, Paul, Письмо А. Сойферу от 16 июля 1991.

[14] Erdös, Paul, Письмо А. Сойферу от 14 августа 1991.

[15] Erdös, Paul, доклад "Twenty Five Years of Questions and Answers", 25th South-Eastern International Conference On Combinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic University, Boca Raton, March 10, 1994.

[16] Erdös, P., and de Bruijn, N. G., A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indag. Math. 13 (1951), 371–373.

[17] Erdös, P., and Soifer, A., Problems of pgom Erdös (будет опубликовано в CEME, Colorado Springs, или в Princeton University Press).

[18] Falconer, K. J., The realization of distances in measurable subsets covering Rn, Com. Theory (A), 31 (1981), 187–189.

[19] Gardner, M., The celebrated four-color map problem of topology, Scientific American, 206 (Sept. 1960), 218–226.

[20] Gardner, M., A new collection of brain teasers, Scientific American, 206 (Oct. 1960), 172–180.

[21] Goldman, J. E., and O'Rourke, J., Handbook of Discrete and Computational Geometry, CRC Press, Boca Raton, 1997.

[22] Hadwiger, H., Überdeckung des euklidischen Raum durch kongruente Mengen, Portugaliae Math., 4 (1945), 238–242.

[23] Hadwiger, H., Ungeloste Probleme, Nr. 11, Elemente der Mathematik, 16 (1961), 103–104.

[24] Hadwiger, H., and Debrunner, H., Ausgewahlte einzelprobleme der kombinatorishen geometrie in der ebene, L'Enseignement Mathematique, 1 (1955), 56–89.

[25] Hadwiger, H., and Debrunner, H., Kombinatorischen Geometrie in der Ebene, L'Enseignement Mathematique, Geneva, 1959.

[26] Хадвигер Г. и Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. Перевод под ред. с доп. и прил. И.М.Яглома. М.: Наука, 1965.

[27] Hadwiger, H., Debrunner, H., and Klee, V., Combinatorial Geometry in the Plane, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[28] Hoffman, I., and Soifer, A., Almost chromatic number of the plane, Geombinatorics III(2), 1993, 38–40.

[29] Hoffman, I., and Soifer, A., Another six-coloring of the plane, Discrete Mathematics 150 (1996), 427–429.

[30] Isbell, J., Письмо А.Сойферу от 26 августа 1991.

[31] Isbell, J., Письмо А.Сойферу от 3 сентября 1991.

[32] Jech, T. J., The Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[33] Jensen, T. R., and Toft, B., Graph Coloring Problems, Wiley, New York, 1995.

[34] Klee, V., and S. Wagon, Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, The Mathematical Association of America, 1991.

[35] Moser, L., and Moser, W., Solution to Problem 10, Can. Math. Bull., 4, (1961), 187–189.

[36] Nelson, E., Письмо А.Сойферу от 23 августа 1991.

[37] Nelson, E., Письмо А.Сойферу от 5 октября 1991.

[38] O'Donnell, P., High Girth Unit-Distance Graphs, Ph. D. Dissertation, Rutgers University, May 25,1999.

[39] Райский Д.Е., Реализация всех расстояний при разбиении пространства R^n на $n + 1$ часть, Матем. заметки 7:3(1970), 319–323. Англ. перевод: Math. Notes 7 (1970), 194–196.

[40] Shelah, S., and Soifer, A., Axiom of Choice and Chromatic Number of the Plane, J. Combin. Theory Ser. A 103(2003) 387–391.

[41] Shelah, S., and Soifer, A., Chromatic Number of the Plane & Its Relatives Part III: Its Future, Geombinatorics XIII(1), 2003, 41–46.

[42] Shelah, S., and Soifer, A., Axiom of Choice and Chromatic Number: An Example on the Plane, принято к печати в J. Combin. Theory Ser. A.

[43] Soifer, A., Chromatic number of the plane: A Historical Essay, Geombinatorics I(3), 1991, 13–15.

[44] Soifer, A., Relatives of Chromatic Number of the Plane, Geombinatorics I(4), 1992, 13–15.

[45] Soifer, A., A six-coloring of the plane, J. Combin. Theory Ser. A 61 (1992), 292–294.

[46] Soifer, A., Six-realizable set X_6, Geombinatorics III(4), 1994.

[47] Soifer, A., An infinite class of 6-colorings of the plane, Congressus Numrerantium 101 (1994), 83–86.

[48] Soifer, A., Competitions, Mathematics, Life, Mathematics Competitions 11(2), 1998, 20–41.

[49] Soifer, A., Chromatic Number of the Plane & Its Relatives. Part I: The Problem & Its History, Geombinatorics XII(3), 2003, 131–148.

[50] Soifer, A., Chromatic Number of the Plane & Its Relatives, Part II: Polychromatic Number & 6-Coloring, Geombinatorics XII(4), 2003, 191–216.

[51] Soifer, A., Mathematical Coloring Book (будет опубликовано в CEME, Colorado Springs или в Princeton University Press).

[52] Solovay, R. M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. Math. 92 Ser. 2 (1970), 1–56.

[53] Solovay, R. M., e-mail to A. Soifer of April 11, 2003.

[54] Szekely, L. A., Remarks on the chromatic number of geometric graphs, in Graphs and other Combinatorial Topics, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory, M., Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig, 1983, 312–315.

[55] Szekely, L. A., Erdös on unit distances and the Szemeredi – Trotter theorems, in Paul Erdös and his Mathematics II, G. Halasz, G. et al, eds, Janos Bolyai Mathematical Society, Budapest and Springer-Verlag, Berlin, 2002, 649-666.

[56] Townsend, S. P., Every 5-Colouring Map in the Plane Contains a Monochrome Unit, J. Combin. Theory, Ser. A, 30 (1981), 114–115. (Файл с полным текстом этой работы можно взять на `http://www.csd.abdn.ac.uk/~spt/document/mapcolour/`)

[57] Woodall, D. R., Distances realized by sets covering the plane, J. Combin. Theory, 14 (1973), 187–200.

[58] Wormald, N.C., A 4-chromatic graph with a special plane drawing, J. Austral. Math. Soc. Series A, 28(1979),1–8.

[59] Zermelo, E., Beweis dass jede Menge wohlgeordnet warden kann, Math. Ann. 59 (1904), 514–516.

Теоремы о покрывающих и непересекающихся треугольниках и их обобщения

Ф. В. Петров С. Е. Рукшин

На I Всесоюзной конференции по комбинаторной геометрии в 1985 году В. В. Произволовым была поставлена следующая задача (см. [1], [2]):

> *дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны). Рассматриваются треугольники, построенные на этих точках и соответствующих сторонах. Верно ли, что всегда можно установить соответствие между точками и сторонами так, чтобы получившиеся треугольники*
> (a) *не имели общих внутренних точек;*
> (b) *покрывали многоугольник.*

Задача сразу привлекла внимание многих специалистов по выпуклой и комбинаторной геометрии. Несмотря на элементарную формулировку, не был ясен даже ответ: появилось несколько неверных доказательств и контрпримеров к обеим задачам.

Ответ на оба вопроса оказался положительным. Доказательство появилось в 1987 году и опубликовано в статье [3]; там же были рассмотрены и возможности многомерных обобщений обеих задач.

Казалось бы, содержательная сторона вопроса исчерпана, однако в 1999 году на международной конференции по дискретной и вычислительной геометрии (Аскона, Швейцария) американский математик Andras Bezdek заметил, что прямой перенос методов статьи [3] на ситуацию, когда все точки лежат вне многоугольника (а тем более — когда часть точек лежит вне, а часть — внутри многоугольника) невозможен. Поэтому ситуация, в которой точки *не обязательно* лежат внутри многоугольника, требует отдельного изучения.

Вопрос Браздека оказался тем более интересным, что в *общей* ситуации ответы на вопросы (a) и (b) различны.

Полный ответ на поставленные вопросы получен в статье авторов [4] комбинаторно-геометрическими методами, в несколько упрощенном виде излагаемыми ниже. Там же рассмотрены и многомерные обобщения.

Независимо от них Р. Н. Карасёв [5] решил ту же задачу, применив неэлементарную топологическую технику.

Формулировка результатов

Теорема A. Для любого выпуклого $n-$угольника M на плоскости и любых k точек точек $X_1, X_2, \ldots, X_k$ плоскости при $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$ существует инъекция φ из множества $X = \{X_1, \ldots, X_k\}$ в множество Γ сторон многоугольника M такая, что треугольники T_i (возможно, вырожденные), образованные точками X_i и соответствующими им сторонами $G_i = \varphi(X_i)$, не имеют общих внутренних точек.

Теорема B. Для любого n-угольника M на плоскости и любых точек $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ плоскости существует биекция φ из множества $Y = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ на множество Γ сторон многоугольника M такая, что треугольники T_i, образованные точками Y_i и соответствующими им сторонами $F_i = \varphi(Y_i)$, покрывают M.

Для доказательства этих теорем нам понадобятся две комбинаторные леммы, представляющие и самостоятельный интерес (так, лемма A была использована на отборе команды РФ на международную олимпиаду 2000 г.)

Комбинаторные леммы

Лемма A. Даны k юношей и $K \geqslant 2k-1$ девушек, некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Тогда можно поженить *всех* юношей так, чтобы каждый юноша, незнакомый со своей женой, был знаком только с незамужними девушками.

Доказательство. Возьмем наибольшее натуральное $s \leqslant k$ такое, что найдутся s юношей, знакомых в совокупности не более чем с $(s-1)$ девушками (если такого s не существует, то можно по лемме Холла поженить всех юношей на знакомых девушках). Рассмотрим этих s юношей и назовем их *скромными*, а знакомых с ними девушек — *общительными*. В силу максимальности числа s, любые t нескромных юношей знают (в совокупности) хотя бы $t+1$ необщительную девушку. Пользуясь леммой Холла, поженим каждого нескромного юношу на знакомой необщительной девушке. Останется еще хотя бы $K-(k-s)-(s-1) = K+1-k \geqslant k \geqslant s$ необщительных девушек, не выданных замуж. Поженим скромных юношей на s из них произвольным образом. Нетрудно увидеть, что приведенная матримониальная процедура дает набор бракосочетаний, удовлетворяющий условиям леммы.

Замечание. Если $K = (2k-2)$, то утверждение леммы уже не выполняется. Действительно, если $k-1$ девушка знакома со всеми юношами, а остальные девушки не знакомы ни с одним юношей, поженить юношей требуемым образом невозможно.

Лемма В. Даны k юношей и k девушек. Каждый юноша знает хотя бы одну девушку. Тогда можно некоторых юношей поженить на знакомых девушках так, чтобы ни один женатый юноша не знал ни одной незамужней девушки.

Доказательство. Возьмем *наименьшее* $s \leqslant l$ такое, что найдутся s юношей, знакомых в совокупности не более чем с $(s-1)$ девушкой (если такого s не существует, то по лемме Холла можно поженить всех юношей на знакомых девушках). Назовем, как и в лемме A, этих юношей *скромными*, а их знакомых девушек — *общительными*. Заметим, что $s > 1$ по условию (каждый юноша знает хотя бы одну девушку).

Выберем $(s-1)$ юношу из этих s. В силу минимальности s любые h из этих $(s-1)$ юношей знакомы в совокупности не менее чем с h девушками. Поженим их, пользуясь леммой Холла, на всех общительных девушках.

Заметим, что построенный набор бракосочетаний удовлетворяет условиям леммы.

Доказательство теоремы А

Посадим в каждую точку X_i по юноше, а на каждую сторону Γ_j — по девушке. Познакомим юношу в точке X_i и девушку на стороне Γ_j, если X_i лежит по другую сторону от прямой, содержащей Γ_j, нежели многоугольник M.

Поженим юношей на девушках согласно лемме А (условия леммы А выполнены: если $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$, то $n \geqslant 2k-1$).

Назовем такое соответствие вершин сторонам допустимым.

Назовем *характеристикой* допустимого соответствия произведение расстояний от точек внутри M до соответствующих им сторон, деленное на произведение расстояний от точек вне M до соответствующих сторон.

Докажем, что допустимое соответствие с минимальной характеристикой удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Для этого нам понадобится следующая нехитрая тригонометрическая

Лемма. Если $0 < \theta < \pi$, то функция $h(\gamma) = \dfrac{\sin(\theta-\gamma)}{\sin\gamma}$ убывает на интервале $(0, \theta)$.

Для доказательства достаточно заметить, что $h(\gamma) = \sin\theta \operatorname{ctg}\gamma - \cos\theta$.

Предположим, что допустимое соответствие с минимальной характеристикой не удовлетворяет условиям теоремы А и, скажем, треугольники X_1AB и X_2CD пересекаются (точкам X_1 и X_2 сопоставлены стороны AB и CD соответственно). Не умаляя общности, можно считать, что лучи AB и DC пересекаются в точке P (в случае, когда прямые AB и CD параллельны, рассуждения лишь упрощаются). Из допустимости рассматриваемого соответствия следует, что если точка X_1 лежит по ту же сторону от прямой AB, что и многоугольник M, то она лежит и внутри угла APC; аналогично, если точка X_2 лежит по ту же сторону от прямой DC, что и многоугольник M, то она лежит и внутри угла APC.

Значит, либо обе точки X_1 и X_2 лежат внутри APC, либо обе внутри вертикального с ним угла (иначе треугольники X_1AB и X_2CD не пересекутся).

В первом случае имеем $\angle X_1PB > \angle X_2PB$, значит по тригонометрической лемме

$$(X_1P\sin X_1PB)\cdot(X_2P\sin X_2PC) > (X_1P\sin X_1PC)\cdot(X_2P\sin X_2PB),$$

стало быть, если юноши в точках X_1 и X_2 поменяются женами, то соответствие останется допустимым, а его характеристика уменьшится. Это противоречит выбору допустимого соответствия с минимальной характеристикой.

Второй случай разбирается аналогично первому.

Теорема А доказана.

Точность оценки в теореме А

Докажем, что оценка $[\frac{n+1}{2}]$ для числа точек из теоремы А точная. А именно, для любого натурального $n \geqslant 3$ существует n-угольник M на плоскости и $[\frac{n+1}{2}] + 1 = [\frac{n+3}{2}]$ точек на плоскости такие, что не существует соответствия, описанного в теореме А. Построим пример, в котором все точки X_i совпадают.

Рассмотрим для определенности случай $n = 2k$. Возьмем равносторонний треугольник A_1XA_{k+1}. Обозначим меньшую дугу A_1A_{k+1} описанной окружности через ω. Отметим на дуге w точки $A_2,\dots,A_k$ (расположенные в указанном порядке в направлении от A_1 к A_{k+1}). Пусть ω' — дуга, симметричную дуге ω относительно отрезка A_1A_{k+1}. Пусть лучи XA_i $(i = 1,\dots,(k+1))$ пересекают w' в точках $B_1,\dots,B_{k+1}$ $(B_1 = A_1$, $B_{k+1} = A_{k+1})$. Очевидно, $2k$-угольник $M = A_1A_2\dots A_{k+1}B_kB_{k-1}\dots B_2$ является выпуклым. Для каждого $i = 1,2,\dots,k$ треугольник XB_iB_{i+1} содержится в треугольнике XA_iA_{i+1}, поэтому при выборе системы непересекающихся по внутренним точкам треугольников с вершиной в точке X и основаниями, являющимися сторонами M, из двух треугольников

XB_iB_{i+1} и XA_iA_{i+1} выбрано не более одного, откуда следует, что всего таких треугольников можно взять не более $k = [\frac{n+1}{2}]$. Пример для нечетного $n = 2k+1$ получается из только что построенного добавлением вершины A_1', лежащей в сегменте, образованном отрезком A_1A_2 и дугой ω. Тогда из трех треугольников XA_1B_2, XA_1A_1' и $XA_1'A_2$ можно выбрать не более двух, а из каждой пары XB_iB_{i+1} и XA_iA_{i+1} для $i = 2, \dots, k$ по-прежнему не более одного, стало быть всего не более $2 + (k-1) = k+1 = [\frac{n+1}{2}]$ треугольников.

Доказательство теоремы B

Как и в доказательстве теоремы A, посадим в каждую вершину Y_i по юноше, а на каждую сторону Γ_j — по девушке. Познакомим юношу в точке Y_i и девушку на стороне Γ_j, если Y_i лежит по ту же сторону от прямой, содержащей Γ_j, что и многоугольник M.

Легко видеть, что выполнены условия леммы B (каждая точка лежит в одной полуплоскости с многоугольником M относительно хотя бы одной стороны M). Поженим некоторых юношей согласно этой лемме и назовем соответствующие этим бракам наборы треугольников допустимыми. Характеристикой допустимого набора будем называть произведение расстояний от точек, соответствующих женатым юношам до сопоставленных им сторон.

Выберем набор с максимальной характеристикой. Докажем, что треугольники этого набора покрывают многоугольник M полностью (таким образом, нам, вообще говоря, понадобится меньше, чем n треугольников).

Предположим, что некоторая точка Z многоугольника $M = A_1A_2\dots$ $\dots A_n$ не покрыта. Рассмотрим один из треугольников набора, скажем $Y_1A_1A_2$. Один из лучей A_1Z, A_2Z идет вне этого треугольника (иначе точка Z была бы покрыта). Предположим для определенности, что это луч A_2Z.

Как легко увидеть, юноша в вершине Y_1 знаком с девушкой на стороне A_2A_3. Из допустимости получаем, что девушка на стороне A_2A_3 выдана замуж. Не умаляя общности, ее муж находится в вершине Y_2. Повторим аналогичное рассуждение для треугольника $Y_2A_2A_3$.

Возможны уже два случая:

1) луч A_2Z идет вне треугольника $Y_2A_2A_3$. Тогда по тригонометрической лемме получаем

$$\frac{d(Y_1, A_1A_2)}{d(Y_1, A_2A_3)} < \frac{d(Z, A_1A_2)}{d(Z, A_2A_3)} < \frac{d(Y_2, A_1A_2)}{d(Y_2, A_2A_3)},$$

где через $d(X, l)$ обозначено расстояние от точки X до прямой l. Это означает, что если юноши в Y_1 и Y_2 поменяют жен, набор треугольников останется допустимым и будет иметь бо́льшую характеристику, что противоречит выбору допустимого набора с максимальной характеристикой.

2) луч A_3Z идет вне треугольника $Y_2A_2A_3$. Тогда продолжим наш процесс. Мы либо придем к случаю, аналогичному первому, либо получим цикл: лучи A_iZ идут вне треугольников $A_{i-1}A_iZ$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (нумерация вершин A_i циклическая по модулю n). Тогда перемножим неравенства

$$\frac{d(Y_{i-1}, A_{i-1}A_i)}{d(Y_{i-1}, A_iA_{i+1})} < \frac{d(Z, A_{i-1}A_i)}{d(Z, A_iA_{i+1})}$$

по всем $i = 1,\ 2, \dots, n$, в правой части полученного неравенства будет 1, а в левой — отношение характеристик двух наборов треугольников: исходного и набора треугольников $\{Y_iA_{i+1}A_{i+2}\}$. Заметим, что второй набор также допустимый, что опять же приводит к противоречию с выбором набора.

Точность оценки теоремы B

Очевидно, $(n-1)$ точку не всегда можно соединить со сторонами так, чтобы получающиеся треугольники покрыли весь n-угольник — достаточно поместить все эти точки в одну точку внутри многоугольника M.

На самом деле существует даже такой пример, в котором все точки лежат вне многоугольника. Действительно, рассмотрим вблизи середины каждой стороны выпуклого n-угольника M какую-нибудь точку, лежащую вне M. Тогда любые $(n-1)$ точки из этих n, как легко понять, подходят в качестве требуемого примера (иначе с каждой стороной должна быть соединена хотя бы одна из точек для того, чтобы покрыть внутренние точки M, близкие к сторонам).

Многомерные обобщения

Опираясь на те же леммы, читатель с легкостью докажет следующие обобщения теорем A и B:

Теорема A$'$. Для любого выпуклого n-гранника M в пространстве $\mathbb{R}^m$ и любых точек $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathbb{R}^m$ при $k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$ существует инъекция φ из множества $X = \{X_1,\ X_2, \dots, X_k\}$ в множество Γ граней многогранника M такая, что пирамиды $V_i = \mathrm{conv}(X_i, F_i)$, образованные вершинами X_i и соответствующими им гранями $F_i = \varphi(X_i)$, не имеют общих внутренних точек.

Теорема B$'$. Для любого выпуклого n-гранника M в пространстве $\mathbb{R}^m$ и любых точек $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in \mathbb{R}^m$ существует биекция φ из множества $Y = \{Y_1, \dots, Y_n\}$ на множество Γ граней M такая, что объединение пирамид $U_i = \mathrm{conv}(Y_i, F_i)$, образованных вершинами Y_i и соответствующими им гранями $F_i = \varphi(Y_i)$, полностью покрывает многогранник M.

Авторы признательны Д. Максимову и Н. Кушпель за техническую помощь при написании данной статьи.

Список литературы

[1] Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям, тезисы сообщений / Под ред. В. Г. Болтянского. Батуми, 1985.

[2] Математическое просвещение. Третья серия, вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 134.

[3] А. В. Богомольная, Ф. Л. Назаров, С. Е. Рукшин. *О покрытии выпуклого многоугольника треугольниками с фиксированными вершинами* // Математические заметки, 1988. Т. 44, №2. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы.

[4] Ф. В. Петров, С. Е. Рукшин. *Две теоремы о выпуклых многогранниках* // Труды Санкт-Петерб. Мат. Общ., 2001. №8

[5] R. N. Karasev. *On a Conjecture of A. Bezdek* // Discrete & Computational Geometry, 2002. V. 27, no 3. P. 419–439.

Геометрическое решение проблемы В. В. Произволова

Г. А. Гальперин

1. Проблема В. В. Произволова

В 1985 году, вскоре после завершения Батумской конференции по комбинаторной геометрии (см. [2]), известный математик В. В. Произволов ознакомил автора настоящей заметки с одной из его проблем, поставленной им в виде вопроса на только что прошедшей конференции, — о *покрытии* выпуклого n-угольника специальными треугольниками. Ее содержание составило в дальнейшем формулировку части (б) задачи 9, опубликованной В. В. Произволовым (на сей раз в утвердительной форме) в вып. 6 «Математического Просвещения» (см. [1]):[1)]

> *Дан выпуклый n-угольник и n точек внутри него. Каждой точке сопоставляется сторона n-угольника (разным точкам — разные стороны) и рассматриваются треугольники, построенные на точках и соответствующих сторонах. Докажите, что можно так установить соответствие, чтобы получившиеся треугольники покрывали внутренность многоугольника.*

Задача показалась мне тогда настолько привлекательной, что уже через короткое время (порядка месяца или даже менее того) я нашел простое и элементарное геометрическое ее решение, причем сразу в многомерном случае, когда вместо многоугольника рассматривается многогранник $\mathcal{M}$ в N-мерном пространстве, а вместо сторон многоугольника — грани $\mathcal{M}$ коразмерности 1. При этом интуиция с самого начала подсказывала мне, что ответ на исходный вопрос «Всегда ли существует искомое соответствие между точками и сторонами?» должен быть положительным, так что я сразу стал пытаться найти доказательство, а не строить контрпримеры к утверждению. Несколько позднее я выяснил,

[1)] Задачу (а) о *непокрытии* многоугольника специальными треугольниками мы здесь не рассматриваем; см. ее формулировку в [1] и решение в [4].

что расположение n точек по отношению к многограннику несущественно: они могут находиться как внутри, так и вне (а частично и на границе) многогранника (см. обобщение проблемы в разделе 7 настоящей статьи).

Полное решение этой проблемы и некоторых ее обобщений я представил в виде статьи в Доклады Академии Наук СССР в ноябре 1985 года; сама же статья появилась в печати лишь через два года — в 1987 году (см. [3]). Ниже я привожу решение проблемы Произволова для многоугольника, опуская все ее многомерные модификации (подробно изложенные в [3]). В отличие от комбинаторного решения, представленного в статье [4], приводимое мной решение чисто геометрическое, базирующееся на геометрической лемме из раздела 4. Сейчас же я начну с руководящей геометрической идеи, которая и составляет суть решения проблемы; все последующие рассмотрения и рассуждения (в том числе и основная геометрическая лемма) лишь оттеняют и детализируют эту основную идею.

2. Идея решения

Занумеруем от 1 до n как заданные точки, так и стороны многоугольника. Обозначим занумерованные точки латинскими буквами M_1, $M_2, \ldots, M_n$, а стороны многоугольника — греческими $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$. Если точке M_i сопоставлена сторона Γ_j, то треугольник $_\triangle M_i\Gamma_j$ будем обозначать для краткости α_{ij} и называть его «треугольником с вершиной M_i и основанием Γ_j». Мы будем мыслить бесконечное продолжение этого треугольника — угол с вершиной M_i — как прожектор, освещающий сторону Γ_j (а вместе с ней и сам треугольник $_\triangle M_i\Gamma_j$, и оставшуюся часть плоскости внутри угла). Этот прожектор будем обозначать тем же самым значком α_{ij}. Вопрос состоит в таком сопоставлении $k \leftrightarrow i_k$, чтобы все n прожекторов $\{\alpha_{ki_k}\}$ полностью осветили многоугольник.

Итак, каждой конфигурации прожекторов соответствует однозначно определенная перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, и наоборот, каждой такой перестановке отвечает ровно один набор прожекторов $(\alpha_{1i_1}, \alpha_{2i_2}, \ldots, \alpha_{ni_n})$. Всего имеется ровно $n!$ перестановок, и мы хотим доказать, что для какой-то одной из них весь многоугольник будет полностью освещен соответствующими этой перестановке прожекторами. Для этого хорошо бы найти какую-нибудь характеристику, или *качество*, перестановки (и, тем самым, соответствующего ей набора прожекторов), чтобы в дальнейшем перестановки можно было бы сравнивать друг с другом. Если такое сравнение удастся сделать, то затем можно будет постепенно улучшать перестановку, заменяя в предыдущем расположении некоторые из прожекторов на новые.

Замысел как раз именно в том и состоит, чтобы, научившись сравнивать перестановки, начать с какой-то одной из них — проще всего с тождественной (в которой сопоставление «номер точки $\leftrightarrow$ номер стороны» тождественное: $k \leftrightarrow k$) — и постепенно улучшать ее качество, делая «правильные» замены прожекторов, при которых ранее освещенные точки многоугольника оставались бы по-прежнему освещенными, но к ним добавлялись бы (т. е. оказывались бы освещенными) и некоторые ранее не освещенные точки (хотя бы одна!). Поскольку число перестановок конечно, имеется перестановка с *максимальным* качеством. Мы утверждаем, что отвечающий ей набор прожекторов искомый: прожектора из этого набора полностью освещают многоугольник. Почему? Если бы это было не так, мы смогли бы улучшить качество перестановки, увеличив множество освещенных точек многоугольника некоторой заменой прожекторов. Однако это невозможно, поскольку качество набора должно при такой замене увеличиться, а оно уже максимально возможное. Полученное противоречие и даст решение задачи.

Итак, замысел ясен, осталось придумать понятие «качество перестановки», увеличивающееся при одновременном увеличении множества освещенных точек. В качестве пробы я брал общую освещенную площадь многоугольника; сумму площадей освещенных треугольников; альтернированную сумму площадей; и др. Однако каждый раз находился какой-нибудь контрпример к идее замысла. В конце концов функцию качества перестановки удалось придумать, и она оказалось довольно хитрой и нелинейной: *для перестановки* $\pi = \{\alpha_{ki_k}\}$ *— это произведение* $F(\pi) = \prod_{k=1}^{n} h_{ki_k}$ *высот всех треугольников* $\{\alpha_{ki_k}\}$, *опущенных из вершин* M_k *на стороны* Γ_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots, n)$. (См. рис. 1.) Вместо произведения высот всех треугольников можно было бы взять эквивалентную ей функцию: *произведение площадей всех освещенных треугольников* $\{\alpha_{ki_k}\}$ (которая получается домножением функции $F(\pi)$ на произведение длин всех сторон

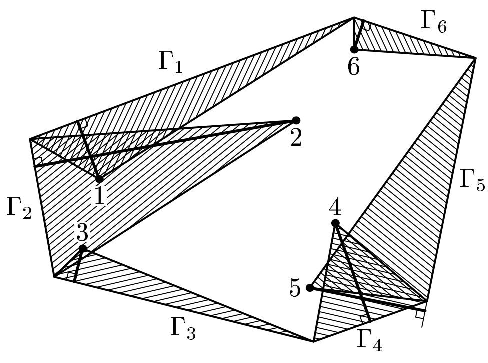


Рис. 1. *Качество перестановки прожекторов-пирамид: произведение высот всех n пирамид*

многоугольника), однако исходная функция $F(\pi)$ в дальнейшем доказательстве окажется более удобной для доказательства.

Теперь нужно только осуществить описанный выше замысел: для данного набора прожекторов и отвечающей ему перестановки придумать процедуру замены этого набора другим, но с лучшей функцией качества перестановки и с бо́льшим множеством освещенных внутри многоугольника точек.

3. Процедура улучшения качества перестановки

Без ограничения общности достаточно научиться «улучшать» качество тождественной перестановки ε. (Действительно, перестановку $\pi = \{k \leftrightarrow i_k\}$ можно, перенумеровав стороны многоугольника, превратить в тождественную $\varepsilon = \{k \leftrightarrow k\}$.)

Мы начинаем с набора прожекторов $\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}\}$, которые по предположению освещают лишь часть многоугольника. Пусть точка A внутри многоугольника не освещена ни одним из этих прожекторов.

Возьмем прожектор α_{11}. Он освещает сторону Γ_1 и не освещает точку A. Оставив его вершину M_1 неизменной, заменим основание Γ_1 треугольника $\triangle M_1\Gamma_1$ на основание Γ_{i_1}, для которого треугольник $\triangle M_1\Gamma_{i_1}$ содержит точку A (треугольник, как и угол-прожектор, считается замкнутым, т.е. стороны принадлежат ему; и если точка A принадлежит сразу двум треугольникам, то берем любой из них; в противном случае по точке A треугольник $\triangle M_1\Gamma_{i_1}$ определяется однозначно). Заменим прожектор $\alpha_{11} = M_1\Gamma_1$ на прожектор $\alpha_{1i_1} = M_1\Gamma_{i_1}$, которой уже освещает A, а исходный прожектор α_{11} временно уберем.

По индексу i_1 найдем тот прожектор $\alpha_{i_1i_1}$ из исходного набора, который освещает сторону Γ_{i_1}, но не освещает точку A. Уберем в сторону этот прожектор, заменяя его на новый (единственный, если точка A не лежит на общей стороне двух треугольников) $\alpha_{i_1i_2} = M_{i_1}\Gamma_{i_2}$, который теперь уже освещает точку A. Теперь сторона Γ_{i_2} принадлежит сразу двум прожекторам, $\alpha_{i_1i_2}$ и $\alpha_{i_2i_2}$, но первый из них освещает точку A, а второй — нет. Убираем в сторону этот второй, а для вершины M_{i_2} находим такую сторону Γ_{i_3} многоугольника, что прожектор $\alpha_{i_2i_3} = M_{i_2}\Gamma_{i_3}$ освещает точку A. Теперь убираем в сторону прожектор $\alpha_{i_3i_3}$, а для вершины M_{i_3} находим такую сторону Γ_{i_4}, что прожектор $\alpha_{i_3i_4} = M_{i_3}\Gamma_{i_4}$ освещает точку A.

Так поступаем и дальше, пока это возможно. Но описанный процесс принципиально конечный; на каком-то шаге k мы обнаружим, что прожектор $\alpha_{i_ki_k}$ следует заменить на прожектор $\alpha_{i_ki_p}$ с $p < k$, т.е. на прожектор, который освещает точку A, но освещает также и сторону Γ_{i_p}, участвовавшую в одном из предыдущих прожекторов, — а именно, в прожекторе $\alpha_{i_{p-1}i_p}$.

В этом случае поступаем так: первые p замененных прожекторов α_{1i_1}, $\alpha_{i_1i_2}, \ldots, \alpha_{i_{p-1}i_p}$ заменяем обратно на исходные прожектора $\alpha_{11}, \alpha_{i_1i_1}, \ldots, \alpha_{i_{p-1}i_{p-1}}$, а остальные $k-p+1$ замененных прожекторов $\alpha_{i_pi_{p+1}}, \alpha_{i_{p+1}i_{p+2}}, \ldots, \alpha_{i_ki_p}$ оставляем на месте.

Для этих $k-p+1$ прожекторов мы имеем следующее:

▷ каждый из них освещает точку A;

▷ основания соответствующих треугольников образуют цикл: прожектор $\alpha_{i_pi_{p+1}}$ с вершиной M_{i_p} освещает сторону $\Gamma_{i_{p+1}}$; прожектор $\alpha_{i_{p+1}i_{p+2}}$ с вершиной $M_{i_{p+1}}$ освещает сторону $\Gamma_{i_{p+2}}$; и так далее: прожектор $\alpha_{i_{k-1}i_k}$ с вершиной $M_{i_{k-1}}$ освещает сторону Γ_{i_k} и, наконец, прожектор $\alpha_{i_ki_p}$ с вершиной M_{i_k} освещает сторону Γ_{i_p}.

В результате возникает перестановка $\sigma = (i_p \to i_{p+1} \to i_{p+2} \to \ \ldots \ \to i_k \to i_p)$, которая совпадает с исходной ε (тождественной) везде, кроме идущих подряд позиций от p до k (напоминаем, что $k > p$).

Утверждение. *Качество перестановки σ лучше, чем качество исходной (тождественной) перестановки ε: $F(\sigma) > F(\varepsilon)$.*

Доказательство этого утверждения (см. раздел 5) будет легко следовать из центральной для всей заметки геометрической леммы, которой посвящен следующий раздел.

4. Геометрическая лемма

Лемма. *Пусть M и A — две произвольные точки внутри выпуклого многоугольника со сторонами $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, и пусть точка A содержится внутри треугольника $_\triangle M\Gamma_1$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — высоты треугольников $_\triangle M\Gamma_1, {}_\triangle M\Gamma_2, \ldots, {}_\triangle M\Gamma_n$, опущенные из вершины M на стороны многоугольника или их продолжения, а $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — расстояния от точки A до прямых, содержащих эти стороны. Тогда при всех $i = 2, 3, \ldots, n$ справедливо неравенство:*

$$\frac{h_1}{r_1} > \frac{h_i}{r_i} \quad (\textit{см. рис. } 2). \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку точка A лежит внутри треугольника $_\triangle M\Gamma_1$, она не лежит внутри треугольника $_\triangle M\Gamma_i$. Следовательно, луч $\overrightarrow{MA}$ с вершиной M пересекает сторону Γ_1 многоугольника и не пересекает его сторону Γ_i (рис. 2). Обозначим через B_1 точку пересечения луча $\overrightarrow{MA}$ со стороной Γ_1, а через M_1 и A_1, M_i и A_i — ортогональные проекции точек M и A на прямые, содержащие стороны Γ_1 и Γ_i, соответственно.

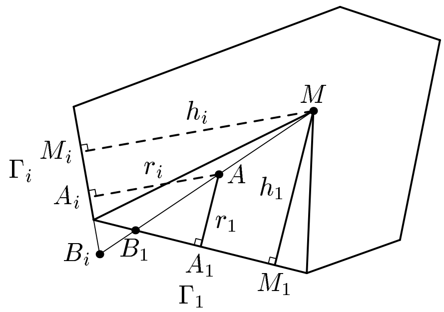


Рис. 2. *Геометрическая лемма:* $\dfrac{h_1}{r_1} > \dfrac{h_i}{r_i}$, $i = 2, \ldots, n$

Из подобных прямоугольных треугольников $_\triangle MM_1B_1$ и $_\triangle AA_1B_1$ находим, что

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{MB_1}{AB_1} = 1 + \frac{MA}{AB_1}\,. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь пересечение луча $\overrightarrow{MA}$ с прямой ℓ_i, содержащей сторону Γ_i. Может случиться так, что это пересечение пусто — такое произойдет либо когда $\overrightarrow{MA} \| \Gamma_i$, либо когда луч $\overrightarrow{MA}$ расходится с прямой ℓ_i (а, следовательно, обратный ему луч $\overrightarrow{AM}$ пересекается с прямой ℓ_i). В первом случае $h_i/r_i = 1$, а во втором $h_i/r_i < 1$, и неравенство (1) выполнено автоматически: левая его часть строго превосходит 1, а правая не превосходит 1.

Если же пересечение рассмотренных луча и прямой не пусто, то точку их пересечения обозначим $B_i = \overrightarrow{MA} \cap \Gamma_i$. Эта точка B_i лежит на продолжении отрезка MB_1, поэтому $AB_i > AB_1$. Далее рассуждаем как и раньше: из подобных прямоугольных треугольников $_\triangle MM_iB_i$ и $_\triangle AA_iB_i$ (рис. 2) имеем

$$\frac{h_i}{r_i} = \frac{MB_i}{AB_i} = 1 + \frac{MA}{AB_i}\,; \tag{3}$$

следовательно, сравнивая равенства (2) и (3), видим (с учетом $AB_i > AB_1$), что $h_1/r_1 > h_i/r_i$, что и требовалось доказать. □

5. Доказательство утверждения: $F(\sigma) > F(\varepsilon)$

В результате перестановки $\sigma = (i_p \to i_{p+1} \to i_{p+2} \to \cdots \to i_k \to i_p)$ все новые (замененные) прожектора $\alpha_{i_p i_{p+1}}$, $\alpha_{i_{p+1} i_{p+2}}$, …, $\alpha_{i_k i_p}$ начинают освещать точку A, которую исходные прожектора $\alpha_{p i_p}$, $\alpha_{p+1 i_{p+1}}$, …, $\alpha_{k i_k}$ до этого не освещали. Стало быть, к ним можно применить геометрическую лемму и записать:

$$\frac{h_{i_p i_{p+1}}}{r_{i_{p+1}}(A)} > \frac{h_{i_p i_p}}{r_{i_p}(A)}\,; \quad \frac{h_{i_{p+1} i_{p+2}}}{r_{i_{p+2}}(A)} > \frac{h_{i_{p+1} i_{p+1}}}{r_{i_{p+1}}(A)}\,; \quad \ldots; \quad \frac{h_{i_k i_p}}{r_{i_p}(A)} > \frac{h_{i_k i_k}}{r_{i_k}(A)}\,. \tag{4}$$

А тогда произведение левых частей неравенств (4) строго больше произведения их правых частей. Поэтому, если разделить произведение высот *всех* n треугольников перестановки σ на произведение *всех* n расстояний от точки A до сторон многоугольника, то полученное число будет больше, чем если разделить произведение высот *всех* n треугольников перестановки ε на то же произведение *всех* n расстояний от точки A до сторон многоугольника (мы добавили в произведение неравенств (4) оставшиеся аналогичные факторы, одинаковые для обеих перестановок):

$$\frac{F(\sigma)}{\prod_{k=1}^{n} r_{i_k}(A)} > \frac{F(\varepsilon)}{\prod_{k=1}^{n} r_{i_k}(A)}\,. \tag{5}$$

Осталось заметить, что в (5) знаменатели дробей одинаковы, откуда и вытекает искомое неравенство $F(\sigma) > F(\varepsilon)$. Утверждение полностью доказано. □

6. Завершение решения проблемы

Итак, мы доказали, что если точка A многоугольника не освещена, то в результате описанной в разделе 3 циклической перестановки прожекторов она уже будет освещена, причем качество $F(\sigma)$ новой перестановки будет строго превосходить качество $F(\varepsilon)$ исходной.

Возьмем теперь перестановку λ с *максимальным* качеством: $F(\lambda) = \max_\omega F(\omega)$, и докажем, что весь многоугольник освещен прожекторами, отвечающими этой перестановке.

Действительно, если какая-то точка A многоугольника не освещена, то ее можно осветить новым набором прожекторов, которому отвечает перестановка с лучшим чем у перестановки λ качеством, а это невозможно в силу определения перестановки λ. Следовательно, все точки многоугольника освещены, что и требовалось доказать. □

7. Обобщение

В приведенном выше доказательстве мы существенно использовали то обстоятельство, что все n исходных точек находились *внутри* многоугольника: на этом предположении базируется доказательство геометрической леммы (раздел 4).

Если же часть исходных точек находится снаружи многоугольника, то утверждение проблемы по-прежнему остается положительным, а ее решение может быть несколько модифицировано следующим образом.

Вместо того, чтобы рассматривать *все* $n!$ *возможных перестановок*, рассмотрим лишь их часть, Ω. В Ω включим только те наборы перестановок прожекторов α_{ki_k}, в которых число прожекторов, вовсе не освещающих многоугольник, *минимально возможное.* (Очевидно, что это минимально возможное число одно и то же для всех перестановок, входящих в Ω, потому что из двух неравных наборов в Ω остается меньший из них.)

Если набор прожекторов из Ω не покрывает полностью многоугольника и, например, точка A внутри него не освещена, то совершив, как и выше в разделе 3, циклическую перестановку $\sigma = (i_p \to i_{p+1} \to i_{p+2} \to \dots \to i_k \to i_p)$, после которой точка A уже освещена, мы видим, что все прожекторы из этой циклической перестановки пересекаются с многоугольником. А тогда каждый из прожекторов, замененный на какой-то прожектор из перестановки σ, также пересекался с многоугольником, так как в противном случае число прожекторов, не освещающих многоугольник, могло бы быть уменьшено за счет указанной циклической замены и тогда бы указанная циклическая перестановка не принадлежала бы множеству Ω, что давало бы противоречие с определением Ω. Следовательно, множество Ω инвариантно по отношению к процедуре улучшения качества перестановки.

Чтобы завершить доказательство модифицированной проблемы, достаточно усмотреть, что геометрическая лемма остается справедливой и для прожекторов, пересекающихся с многоугольником, что дает в дальнейшем неравенство (5), а с ним и неравенство $F(\sigma) > F(\varepsilon)$ (для перестановок из Ω). Тогда для перестановки $\lambda \in \Omega$ с *наилучшим качеством* соответствующий ей набор прожекторов осветит многоугольник целиком.

Список литературы

[1] Математическое просвещение. Третья серия, вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 134.

[2] Первая конференция по комбинаторной геометрии и ее приложениям, тезисы сообщений / Под ред. В. Г. Болтянского. Батуми, 1985.

[3] Г. А. Гальперин, *Решение задачи Произволова о покрытии многомерного многогранника пирамидами, и ее обобщение* // ДАН СССР, 1987. Т. 293, №2. С. 283–288.

[4] Ф. В. Петров, С. Е. Рукшин, *Теоремы о покрывающих и непересекающихся треугольниках и их обобщения* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 8. 2004. С. 222–228.

Задачи о метрических компактах

В. В. Доценко

Формулировки приведенных здесь задач весьма похожи, да и в решениях много общего: идея состоит в том, чтобы изучать орбиту точки при итерациях данного отображения. В каждой из задач (K, ρ) — компактное метрическое пространство.

Задача 1. Если отображение $f\colon K \to K$ не уменьшает расстояния[1)], то оно является изометрией.

Задача 2 (задача 4.9 из задачника «Математического просвещения», №4, с. 217). Если сюръекция $f\colon K \to K$ не увеличивает расстояния, то она является изометрией.

Задача 3. Изометричное отображение $f\colon K \to K$ является биекцией.

Решение задачи 1. Фиксируем точки $x, y \in K$ и рассмотрим последовательность $\{(f^k x, f^k y)\}$ точек компакта $K \times K$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $S = \{(f^{k_i} x, f^{k_i} y)\}$. У такой последовательности последовательность первых координат является сходящейся, поэтому $\lim\limits_{j>i\to\infty} \rho(f^{k_i}x, f^{k_j}x) = 0$, и тем более $\lim\limits_{j>i\to\infty} \rho(x, f^{k_j-k_i}x) = 0$ (раз отображение f не уменьшает расстояния). То же самое верно и для вторых координат. Поэтому точка (x, y) является предельной для последовательности S. Если бы оказалось, что верно неравенство $\rho(fx, fy) - \rho(x, y) > \varepsilon$, то при любом натуральном k было бы верно неравенство $\rho(f^k x, f^k y) - \rho(x, y) > \varepsilon$. Поскольку расстояние — непрерывная функция, то это противоречит тому, что (x, y) — предельная точка. Значит, все расстояния сохраняются, что и требовалось.

Решение задачи 2. Фиксируем положительное число ε и рассмотрим какую-либо конечную ε-сеть[2)] S. (Конечная ε-сеть существует в силу компактности.) Заметим, что для любого натурального числа k множество $f^k S$ будет ε-сетью (раз отображение f не увеличивает расстояния). Рассмотрим величины $A_k = \sum_{x,y\in S} \rho(f^k x, f^k y)$. Последовательность $\{A_k\}$

[1)] Т. е. $\forall x, y \in K \quad \rho(fx, fy) \geqslant \rho(x, y)$.

[2)] Подмножество S в метрическом пространстве (M, ρ) называется ε-сетью, если для любой точки $m \in M$ найдется точка $s \in S$, такая что $\rho(m, s) \leqslant \varepsilon$.

монотонна, рассмотрим ее точную нижнюю грань A. Пусть натуральное число k таково, что $A_k - A < \varepsilon$. Докажем, что расстояние между любыми двумя точками $a, b \in K$ не могло измениться (уменьшиться) более, чем на 5ε. В самом деле, найдем точки $\bar{a}, \bar{b} \in f^k S$: $\rho(a, \bar{a}) \leqslant \varepsilon$, $\rho(b, \bar{b}) \leqslant \varepsilon$. Тогда (используем неравенства типа $\rho(f\bar{a}, f\bar{b}) \leqslant \rho(f\bar{a}, fa) + \rho(fa, fb) + \rho(fb, f\bar{b})$, означающие, что сумма трех сторон четырехугольника не меньше четвертой) $\rho(a, b) - \rho(fa, fb) \leqslant \rho(a, \bar{a}) + \rho(b, \bar{b}) + \big(\rho(\bar{a}, \bar{b}) - \rho(f\bar{a}, f\bar{b})\big) + \rho(f\bar{a}, fa) + \rho(f\bar{b}, fb) \leqslant 5\varepsilon$. Поскольку действительное число $\varepsilon > 0$ произвольно, то все расстояния сохраняются, что и требовалось.

Решение задачи 3. Докажем, что отображение f сюръективно (инъективность очевидна). Фиксируем точку $x \in K$. Выделим сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{f^k x\}$, пусть это последовательность $\{f^{k_i} x\}$. Для такой последовательности $\lim\limits_{j > i \to \infty} \rho(f^{k_i} x, f^{k_j} x) = 0$, поэтому из изометричности f следует, что и $\lim\limits_{j > i \to \infty} \rho(x, f^{k_j - k_i} x) = 0$, т. е. x — предельная точка множества fK. Но изометрия — непрерывное отображение, а непрерывный образ компакта — компакт, значит, $x \in fK$, что и требовалось.

Замечание. Компактность в каждом из случаев играет ключевую роль. Если пространство некомпактно (пусть даже полно), то легко придумать контрпримеры: гомотетии на прямой опровергают первые два утверждения, параллельный перенос на луче $[0, \infty)$ — третье. (Впрочем, третье утверждение верно, если, к примеру, K — арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, поскольку все изометрии в этом случае можно перечислить: это суть композиции не более чем $n+1$ симметрий относительно гиперплоскостей.)

Периодические десятичные дроби

А. Е. Ерошин

Всем хорошо известны десятичные (а также m-ичные) дроби. Периодические m-ичные дроби могут быть представлены в виде обыкновенных и наоборот. Если знаменатель q правильной несократимой дроби p/q ($p < q$) взаимно прост с m, то m-ичная запись такой дроби будет *чисто периодической*, т. е. иметь вид $0,(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$, где $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ — период дроби; если же q не взаимно просто с p, то может наблюдаться и *предпериод* $\beta_1 \ldots \beta_s$:

$$p/q = 0,\beta_1 \ldots \beta_s(\alpha_1 \ldots \alpha_n).$$

В этом случае говорят, что дробь *условно периодическая*. Иррациональные числа не разлагаются в периодические дроби. Про их разложение почти ничего не известно. Например, неизвестно, бесконечное ли число «девяток» содержится в десятичном разложении $\sqrt{2}$.

То немногое, что известно о свойствах периодических дробей, связано с вращением (циклической перестановкой) цифр периода. Этому и посвящена настоящая статья. Мы покажем, что в десятичном разложении числа

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}, \quad \text{где } a_1 = 1 \text{ и } a_{k+1} = 9^{a_k},$$

встретится любая комбинация цифр.[1)]

Нас интересуют прежде всего *десятичные дроби* и, если не оговорено обратное, то подразумевается система счисления с основанием 10. Записи $\overline{a_1 \ldots a_n}$, $\overline{X}$, где $a_1 \ldots a_n$, X — последовательности цифр, обозначают числа, задаваемые этими последовательностями.

Автор приносит благодарность своему руководителю Алексею Яковлевичу Канелю–Белову за постановку задачи, полезные обсуждения и участие в редактировании. Данная работа докладывалась на научной конференции школьников Junior-98, организованной корпорацией INTEL в городе Fort Worth, и получила вторую премию.

[1)] Задача 3.10 из задачника «Математического просвещения», №3, с. 233.

1. Вращение цифр в периоде. Основная идея

Начнем с простейшего примера.

Задача 1. Требуется найти такое шестизначное число A, произведения которого на $2, 3, 4, 5, 6$ записываются циклическими перестановками его цифр.

Решение. Заметим, что последняя цифра числа A однозначно определяет последнюю цифру чисел $2A$, $3A$, $4A$, $5A$ и $6A$. Отсюда с помощью несложного перебора можно получить, что $A = 142857$.

Заметим, что $1/7 = 0{,}(142857)$. При этом

$$2/7 = 0{,}(285714), \quad 3/7 = 0{,}(428571), \quad 4/7 = 0{,}(571428),$$
$$5/7 = 0{,}(714285), \quad 6/7 = 0{,}(857142).$$

Таким образом, дроби вида $m/7$, где $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, получаются из дроби $1/7$ путем вращения цифр в периоде.

Задача 2. Последняя цифра числа двойка и ее перенесли в начало. В результате число удвоилось. Найти такое число.

Решение 1. Пусть искомое число записывается последовательностью цифр X. Последняя цифра числа $2\overline{X}$ четверка, поэтому X имеет вид $\ldots 42$ и число $2\overline{X}$ записывается как $\ldots 84$. Следовательно, X имеет вид $\ldots 842$, а $2\overline{X}$ записывается как $\ldots 684$, далее $X = \ldots 6842$, откуда $2\overline{X} = \ldots 3684$ и $X = \ldots 36842$ и т. д. Последовательность цифр строится однозначно, в итоге имеем:

$$X = 105263157894736842.$$

Последовательность $X = 105263157894736842$ можно продолжать дальше. Аналогично рассуждая, можно показать, что множество всех чисел, удовлетворяющих условию задачи, имеет вид $\overline{XX\ldots X}$.

Однако на эту задачу можно посмотреть и с несколько неожиданной точки зрения.

Решение 2. Пусть $X = Y2$. Тогда $\overline{Z} = 2\overline{X} = \overline{2Y}$. Рассмотрим бесконечную периодическую дробь $x = 0{,}(X)$. Тогда

$$(x+2)/10 = 0{,}2(X) = 0{,}2Y2Y2Y\ldots = 0{,}ZZZ\ldots = 0{,}(Z) = 2x.$$

Откуда x удовлетворяет уравнению $(x+2)/10 = 2x$ и $x = 2/19$. Таким образом, X есть период дроби $2/19$, и в результате вращения цифр в периоде этой дроби получаются дроби вида $1/19, 2/19, \ldots, 18/19$.

Задача на исследование. Исследуйте числа, которые при переносе последней цифры в начало увеличиваются в α раз.

Вращение цифр в периоде имеет интересный арифметический смысл, причем получаются дроби с тем же знаменателем.

Теорема 1. *Циклические перестановки периода дроби p/q, где $0 < p < q$, а q взаимно просто с 10 и с p, есть числа вида k/q.*

Доказательство. Поскольку q взаимно просто с 10, дробь p/q чисто периодическая. Пусть $p/q = 0{,}(a_1a_2\dots a_ka_{k+1}\dots a_n)$ и пусть $\alpha = 0{,}(a_{k+1}\dots a_na_1a_2\dots a_k)$ — результат циклической перестановки цифр периода. Тогда $10^kp/q = \overline{a_1a_2\dots a_k} + 0{,}(a_{k+1}\dots a_na_1a_2\dots a_k) = N+\alpha$, где $N = \overline{a_1a_2\dots a_k}$ — целое число. Поскольку q взаимно просто с 10 и с p, после приведения $\alpha = (10^kp - Nq)/q$ к виду обыкновенной дроби ее знаменателем будет q.

В качестве иллюстрации к вышесказанному рассмотрим циклические перестановки дроби $1/13 = 0{,}(076923)$. Имеем:

$$0{,}(076923) = 1/13;\quad 0{,}(230769) = 3/13;\quad 0{,}(307692) = 4/13;$$
$$0{,}(692307) = 9/13;\quad 0{,}(769230) = 10/13;\quad 0{,}(923076) = 12/13.$$

2. Вспомогательные сведения

Нам понадобятся несколько фактов и конструкций, которые очень полезны при решении теоретико-числовых задач. $\varphi(n)$ означает *функцию Эйлера*, то есть $\varphi(n)$ есть количество всех чисел, меньших n и взаимно простых с n, и $\varphi(1) = 1$. Если число n — простое, то $\varphi(n) = n-1$. Известно, что если $n = n_1n_2$ и числа n_1 и n_2 взаимно просты, то $\varphi(n) = \varphi(n_1)\varphi(n_2)$. Поэтому, разлагая число n в произведение степеней различных простых чисел $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$, получаем представление для $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1-1)p_2^{k_2-1}(p_2-1)\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s-1}(p_s-1).$$

Имеет место следующая

Теорема Эйлера. *Пусть числа x и n взаимно просты. Тогда*

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

Частным случаем теоремы Эйлера является

Малая теорема Ферма. *Пусть p — простое число и x не делится на p, тогда*

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Из малой теоремы Ферма следует, что наименьшее k такое, что $x^k \equiv 1 \pmod p$ делит $p-1$. Теорема о существовании первообразного корня (см. ниже) показывает, что при подходящем выборе x, такое k *в точности равно* $p-1$.

Предложение 1. *Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Тогда длина наименьшего периода дроби p/q в 10-ичном разложении равна такому минимальному k, что $10^k - 1$ делится на q.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $p < q$. Пусть $p/q = 0,(a_1 \dots a_n)$, $a = \overline{a_1 \dots a_n}$. Тогда

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{10^n - 1}$$

и q делит $10^n - 1$ в силу взаимной простоты p и q. И наоборот, если q делит $10^n - 1$, то n — период дроби p/q.

(Все рассуждения непосредственно переносятся на произвольные системы счисления.)

Из предложения 1 и теоремы Эйлера выводится следующее утверждение, нужное для дальнейшего:

Следствие 1. *Пусть число q взаимно просто с 10 и с p. Тогда длина наименьшего периода дроби p/q есть делитель числа $\varphi(q)$.*

Доказательство. Обозначим длину наименьшего периода дроби p/q через n. Разделим $\varphi(q)$ на n с остатком: $\varphi(q) = ns + r$, $0 \leqslant r < n$. Тогда

$$10^r \equiv 10^{ns+r} \equiv 10^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod q.$$

И, следовательно, $r = 0$.

Кроме того, нам понадобится

Теорема о существовании первообразного корня. *Существует такое x, что $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, а из сравнения $x^a \equiv 1 \pmod p$ следует, что a делит $p - 1$.*

Замечание. Из предложения 1 и теоремы о существовании первообразного корня вытекает любопытное следствие. Для любого простого q найдется такое m, что m-ичное разложение дроби p/q имеет длину периода, *в точности равную* $q - 1$. Однако из этого не следует, что таким числом m непременно должно быть 10. Более того, неизвестно, конечно ли множество таких p, что 10^q не сравнимо с 1 по модулю p при $q < p - 1$. И, соответственно, минимальный период дроби k/p имеет длину $p - 1$.

Хотя поведение периодов дробей с простым знаменателем p при различных p чрезвычайно сложное, остатки по модулю степеней фиксированного простого p поддаются изучению. И в этом помогает следующая

Лемма Гензеля[2]. *Пусть p — простое число.*

a) *Пусть $x \equiv 1 \pmod{p^k}$, $x \not\equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$. И, кроме того, либо $p > 2$, либо $k > 1$. Тогда для всякого натурального r*

$$x^{p^r} \equiv 1 \pmod{p^{k+r}}, \qquad x^{p^r} \not\equiv 1 \pmod{p^{k+r+1}}.$$

b) *Пусть, кроме того, p^s делит m, но p^{s+1} не делит m. Тогда*

$$x^m \equiv 1 \pmod{p^{k+r}}, \qquad x^m \not\equiv 1 \pmod{p^{k+r+1}}.$$

(Отметим, что если одновременно $p = 2$ и $k = 1$ утверждение п. a) места не имеет.)

Из леммы Гензеля вытекает такое

Следствие 2. *Пусть числа x и k удовлетворяют условиям леммы Гензеля. Тогда остатки от деления степеней x^r на p^q $(q \geqslant k)$ имеют вид $p^k s + 1$.*

Суммируя вышесказанное, имеем следующую лемму, удобную для дальнейшего:

Лемма 1.

a) $10^m \equiv 1 \pmod{3^q}$ *тогда и только тогда, когда* $m \equiv 0 \pmod{3^{q-2}}$.

b) *Длина периода дроби $p/3^n$, где $n > 1$ и p не делится на 3, равна 3^{n-2}.*

c) *Остатки от деления чисел вида 10^r на 3^s имеют вид $9m + 1$.*

Доказательство. П. a) вытекает из леммы Гензеля, п. c) есть частный случай предыдущего следствия, п. b) вытекает из п. a) и предложения 1.

3. Доказательство основного утверждения

Наша цель — доказать основную теорему:

Теорема. *Пусть последовательность $\{a_k\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$ и пусть*

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}\,.$$

Тогда в десятичном разложении числа X встретится любая комбинация цифр.

Замечание. Имеет место теорема Лиувилля: *Пусть t — иррациональный корень уравнения $a_0 x^n + \cdots + a_n = 0$, $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа.*

[2] А. Я. Канель–Белов. Устное сообщение.

Тогда при некотором N неравенство $|t-p/q| < 1/Nq^n$ не имеет решений в целых числах p и q.

Из этой теоремы следует, что число X трансцендентно, т. е. не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, так как приближается рациональными лучше, чем алгебраическое число любой фиксированной степени.

Нам понадобится

Лемма 2. *а) Пусть $p = 9k + 1 < 3^s$. Рассмотрим дробь $p/3^s$ и все дроби, которые из нее получаются путем циклической перестановки цифр периода. Тогда множество всех таких дробей суть $\{(9h+1)/3^s \mid 9h+1 < 3^s\}$.*

б) В общем случае, если p взаимно просто с 3, то множество указанных дробей суть $\{h/3^s | h \equiv p \pmod 9$ и $h < 3^s\}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что дробная часть числа $p10^m/3^s$ есть циклическая перестановка периода дроби $p/3^s$. Рассмотрим множество дробных частей чисел вида $p10^m/3^s, m = 0, \ldots, 3^{s-2}-1$. По лемме 1 это множество суть множество $\{p(9h+1)/3^s\}_{h=0}^{3^{s-2}-1}$, что и составляет утверждение леммы.

П. б) доказывается аналогично.

Следующее утверждение, которое нам потребуется при доказательстве основной теоремы, представляет самостоятельный интерес.

Предложение 2. *Пусть числа p и 3 взаимно просты. Тогда в десятичном разложении числа $x = p/3^s$ встретится любая последовательность из $[(s-2)\lg 3]$ цифр.*

Доказательство. Положим $N = [(s-2)\lg 3]$. Рассмотрим какую-нибудь последовательность цифр α длины N. Достаточно показать, что *некоторая циклическая перестановка цифр числа x может начинаться с α.*

Пусть $\alpha = a_1 \ldots a_N$. Множество вещественных чисел, у которых десятичная запись начинается с α, есть полуинтервал

$$\Delta = [0{,}a_1 \ldots a_N;\ 0{,}a_1 \ldots a_N + 10^{-N}).$$

Его длина равна 10^{-N}.

Рассмотрим множество дробей, получающихся путем вращения цифр в периоде исходной дроби. В силу леммы 2 это система точек отрезка $[0,1]$, идущих с шагом $1/3^{s-2}$:

$$\left\{\frac{1}{3^s}, \frac{10}{3^s}, \ldots, \frac{3^s-8}{3^s}\right\}.$$

И в любом подотрезке отрезка $[0,1]$ длины бо́льшей, чем $1/3^{s-2}$, находится дробь указанного вида.

Поскольку $N < (s-2)\lg 3$, то $|\Delta| = 10^{-N} > 3^{-(s-2)}$ и в отрезке Δ встретится нужная нам дробь, десятичное разложение которой начинается с участка α. Предложение доказано.

Доказательство основной теоремы. Обозначим через X_n частичную сумму ряда $\sum_{i=1}^{n} 1/a_i$. Это чисто периодическая дробь и t_n — ее период. В силу предложения 2 число X_n содержит все последовательности цифр длины ме́ньшей или равной $N_n = [a_n \lg 3/9]$.

Более того, в любом участке десятичной записи числа X_n, длина которого больше $N_n + t_n$, встретится каждая такая последовательность.

Нам надо показать, что остаточный член $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 1/a_k$ не испортит ситуацию. Прежде всего, период не может состоять из одних девяток, и если $0 < \varepsilon < 10^{-3t_n}$, то первые $2t_n$ знаков десятичного разложения чисел X_n и $X_n + \varepsilon$ совпадают (перенос разряда может происходить только на девятке и он остановится где-то внутри третьего периода дроби X_n). Поэтому любой участок длины N_n также встречается в десятичном разложении числа $X_n + \varepsilon$.

В силу леммы 1 длина периода t_n десятичного разложения числа X_n равна $t_n = a_n/9$. Легко получить оценку: $R_n < 2/a_{n+1} < 10^{-3t_n}$. Из этой оценки, в силу только что сказанного, вытекает, что в десятичном разложении числа $X = X_n + R_n$ встречается любая комбинация из N_n подряд идущих цифр.

А так как

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log_{10} 3}{9} a_n\right) = \infty,$$

параметр N с ростом n стремится к бесконечности и любая наперед заданная комбинация цифр встретится в десятичном разложении числа X.

Замечание. Назовем *частотой* появления последовательности ν в X величину: $W(X,\nu) = \lim_{p\to\infty} m/p$, где m — количество последовательностей ν в начальном куске X длины p. Из доказательства основной теоремы можно извлечь следующий результат: $W(X,\nu) = 10^{-l}$. Это означает, что все комбинации цифр в числе X равновероятны. Такие числа называются *нормальными*. Содержательных примеров нормальных чисел не так много.

Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Некоторые из этих задач (не обязательно самые сложные!) требуют знания «неэлементарной» математики — анализа, линейной алгебры и т. п.

Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Можно ли получить все возможные состояния кубика Рубика, последовательно выполняя некоторую комбинацию поворотов? (Учитываются только конечные, а не промежуточные состояния.)
   (*А. К. Ковальджи*)

2. Найти дискриминант многочлена $P(x) = x^{2003} + x + 1$.
   (*М. Л. Концевич*)

3. Можно ли круг с двумя дырками отобразить в себя без неподвижных точек? (*М. Л. Концевич*)

4. Доказать, что на описанной окружности каждого треугольника существует ровно три точки, для которых соответствующие прямые Симсона касаются окружности девяти точек треугольника, причем эти точки являются вершинами правильного треугольника.
   (*М. Ю. Панов*)

5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим $N(\alpha) = \{[n\alpha] | n \in N\}$. При каких k найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?
   (*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

6. Внутри единичного квадрата расположено бесконечное множество точек. Всегда ли найдется гладкая кривая, проходящая через бесконечное его подмножество? А бесконечно гладкая? (*Фольклор*)

7. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдется такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия $\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^{1/p} dx < 1$; $k = 0, \ldots \lfloor (n+p)/p \rfloor$ влекут условие $|f(0)| < C$. *(А. Я. Канель)*

8. В граничных клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы, чтобы каждое число равнялось бы среднему арифметическому своих соседей. *(М. З. Двейрин)*

9. Сфера раскрашена в 2 цвета. Докажите, что на ней найдется правильный треугольник с одноцветными вершинами. *(Л. А. Емельянов)*

10. Существует ли векторное пространство нильпотентных матриц некоторого порядка, произведения элементов которого порождают всю матричную алгебру? (Матрица A называется *нильпотентной*, если $A^k = 0$ для некоторого k.) *(П. Якобианов)*

11. Ряд $\sum a_n$ *сходится в среднем*, если существует предел средних арифметических его частных сумм $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n s_k)/n$, $s_k = \sum_{m=1}^k a_k$. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится в среднем и при этом а) $a_n = o(1/n)$ (т. е. $\lim na_n = 0$); б) $a_n = O(1/n)$ (т. е. $\exists C > 0 : |na_n| < C$).
Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится. *(А. Я. Белов)*

12. Идеальный солдат является конечным автоматом (т. е. принимает конечное число состояний и воспринимает конечное число сигналов). Солдат понимает «лево-право», воспринимает сигналы только от своих непосредственных соседей и понимает, является ли он крайним в шеренге. За один такт он обменивается сигналами с соседями. Можно ли так запрограммировать солдат, что если поставить в шеренгу солдат, находящихся в некотором одинаковом состоянии, то после того как первому будет дана команда, через некоторое время все они выстрелят одновременно? (Программа не должна зависеть от длины шеренги.) *(Задача Майхилла о стрелках)*

Исправления

В задачнике №3 «Математического Просвещения» условие задачи 3.9 (автор — С. Маркелов) было приведено неверно. Приводим правильное условие этой задачи и предлагаем читателям попробовать свои силы в ее решении.

3.9. Доказать, что на поверхности трехмерного выпуклого тела найдутся 5 точек, образующих вершины правильного 5-угольника.

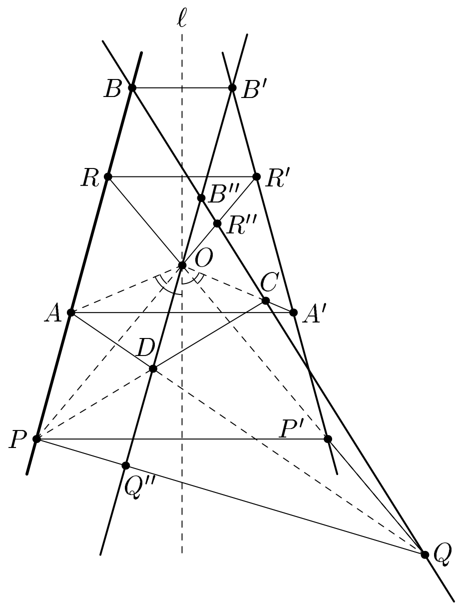
Решения задач из предыдущих выпусков

2.10. Условие. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята такая точка O, что $\angle AOP = \angle COQ$, где P и Q — точки пересечения лучей BA, CD и BC, AD соответственно. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны друг другу.

Решение. Обозначим биссектрису угла AOC через ℓ, точку пересечения прямых PB и OQ через R. Пусть, как показано на рисунке, точки B', P' и R' симметричны относительно ℓ точкам B, P и R соответственно. Еще нам потребуются точки B'' и Q'', которые являются точками пересечения прямой OB' с прямыми BQ и PQ соответственно.

Рассмотрим отображение $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, где f_1 — отражение относительно ℓ; f_2 — проекция из точки O на прямую BQ; f_3 — проекция из точки P на прямую OB'; f_4 — проекция из точки Q на прямую PB.

Из определения ясно, что f — проективное отображение прямой PB на себя. Докажем, что это отображение тождественное. Для этого укажем три его неподвижные точки:



$$P \xrightarrow{f_1} P' \xrightarrow{f_2} Q \xrightarrow{f_3} Q'' \xrightarrow{f_4} P$$

$$B \xrightarrow{f_1} B' \xrightarrow{f_2} B'' \xrightarrow{f_3} B'' \xrightarrow{f_4} B$$

$$R \xrightarrow{f_1} R' \xrightarrow{f_2} R'' \xrightarrow{f_3} O \xrightarrow{f_4} R$$

Отсюда следует, что

$$D = f_3 \circ f_2 \circ f_1(A) \in (OB').$$

Осталось заметить, что точки B и D лежат по одну сторону от биссектрисы угла AOC. (*М. Вялый*)

4.11. Условие. На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки пустые. Назовем расстановку *почти полной*, если найдется такое число C, что можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое) так, чтобы пустых клеток не осталось. Назовем расстановку *не слишком пустой*, если найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP, где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые.

Решение. Нам будет удобнее переформулировать определение не слишком пустой расстановки: мы считаем, что найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DN, где N — сторона квадрата. Эквивалентность определений очевидна. Заметим еще, что мы можем предполагать C и D натуральными.

Пусть расстановка почти полная. Рассмотрим любой квадрат со стороной N. Тогда, если все фишки передвинуть на расстояние не большее, чем N, то в этом квадрате могут появиться только фишки, которые изначально стояли в квадрате $(N+2C) \times (N+2C)$, имеющем тот же центр. Таким образом, в исходном квадрате пустых клеток было не больше, чем количество клеток в «бордюре» ширины C вокруг него, т. е. $(N+2C)^2 - N^2 = 4CN + 4C^2 \leqslant N(4C+4C^2)$. Таким образом, мы можем положить $D = 4C + 4C^2$.

Остаток решения посвящен доказательству обратного. Мы докажем, что можно положить $C = 4D$. Сформулируем сначала две известных леммы.

Лемма 1 (лемма Кёнига). Дано корневое дерево. Известно, что степень каждой вершины конечна, а количество вершин бесконечно. Тогда в нем найдется бесконечный путь.

Лемма 2 (теорема Менгера, вершинная форма). Дан конечный граф с выделенными вершинами B и E, несоединенными друг с другом. Известно, что при выкидывании любых $k-1$ вершин, отличных от B и E, в оставшемся графе существует путь от B до E. Тогда существует k путей от B до E, не имеющих общих вершин, отличных от B и E.

Сведем задачу к конечной. Покажем, что достаточно доказать следующий факт: *Для любого квадрата $2N \times 2N$ можно сдвинуть каждую фишку на расстояние, не большее C так, что все клетки центрального квадрата* $(2N - 2C) \times (2N - 2C)$ (далее мы его будем называть просто центральным квадратом) *будут заполнены.*

Пусть факт доказан. Построим следующий граф. Любая его вершина есть *квадрат $2N \times 2N$ с центром в начале координат* вместе со *способом передвижения фишек этого квадрата на расстояние, не превосходящее C* так, что все клетки центрального квадрата заполнены; ребро же будет соединять вершину, соответствующую квадрату $2N \times 2N$, с вершиной, соответствующей квадрату $(2N + 2) \times (2N + 2)$, если фишки, принадлежащие меньшему квадрату, двигаются одинаково. Корнем этого дерева будет вершина, обозначающая квадрат 0×0. Очевидно, что к этому графу применима лемма Кёнига; однако бесконечный путь в этом графе есть способ передвижения *всех* фишек так, что *все* клетки оказываются заполненными.

Докажем теперь наш факт. Для этого снова построим граф. Его вершинами будут являться клетки нашего квадрата $2N \times 2N$ и еще две вершины: «начальная» вершина B и «конечная» вершина E. Каждую клетку соединим со всеми клетками, находящимися от нее на расстоянии не большем, чем C. Кроме того, соединим B со всеми пустыми клетками, а любую клетку, находящуюся вне центрального квадрата $(2N - 2C) \times (2N - 2C)$ соединим с E. Пусть в нашем квадрате $P \leqslant 2DN$ пустых клеток. Мы хотим, применив теорему Менгера, построить P непересекающихся путей из B в E. Ясно, что эти пути пройдут через все пустые вершины, так как их вершины, следующие за B, различны. Тогда, если $BA_0A_1A_2 \ldots A_nE$ — один из таких путей (A_0 — пустая), то можно провести такое передвижение: $A_1 \to A_0$, $A_2 \to A_1$, $\ldots$, $A_n \to A_{n-1}$; при этом пустой окажется клетка A_n, находящаяся вне центрального квадрата, и такие цепочки, построенные для разных путей, не будут пересекаться; поэтому требуемое будет выполнено.

Осталось проверить выполнение условия теоремы Менгера. Именно, нужно доказать следующее: если выбросить менее P вершин, то найдется путь из B в E. Предположим противное. Пусть выброшены $P - 1$ вершина, из которых $P - x$ соответствуют пустым клеткам. Тогда вершина B осталась соединенной с x пустыми. Покрасим красным все вершины оставшегося графа, до которых теперь можно добраться из B, и синим — все выброшенные непустые вершины (их количество равно $x - 1$). Тогда любая красная вершина в исходном графе была соединена только с красными, синими и пустыми вершинами.

Рассмотрим индуцированный граф на красных вершинах. После выкидывания вершины B он распадается на несколько компонент связности

$S_1, \ldots, S_\ell$. Рассмотрим одну из них, скажем, S_j. Она полностью лежит в центральном квадрате, ибо иначе она связана с E. Пусть минимальный прямоугольник, в которых ее можно заключить, имеет размеры $U \times V$ (для определенности $U \geqslant V$); тогда в S_j не более UD пустых клеток. Отметим все некрасные клетки, удаленные от какой-то из клеток S_j не более, чем на $C/2$. Заметим, что все отмеченные клетки были синими или пустыми. Покажем, что синих среди них не меньше, чем $U(C-D)/2$.

Рассмотрим строчки прямоугольника $(U+C)\times(V+C)$, в центре которого лежит наш прямоугольник $U\times V$. Назовем строчку i-строчкой, если ближайшая к ней строчка, содержащая клетку из S_j, находится на расстоянии не больше i от нее. (В частности, 0-строчка содержит клетку из S_j.) Заметим, что в i-строчке находится не меньше, чем $2\,(C/2-i)$ отмеченных клеток.

0-строчки идут не реже, чем через C друг от друга, ибо S_j связна; поэтому их не меньше, чем $(U+C/2)\,/C$ (здесь учтено, что первые и последние $C/2$ строчек пустые). Аналогично, i-клетки расположены «блоками» хотя бы по $2i+1$ строчек, расстояния между которыми не больше, чем $C-2i-1$, поэтому их не меньше, чем $(U+C/2)\,(2i+1)/C$. Пусть s_i — количество i-строчек. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\frac{C}{2}-1} s_i \geqslant \left(U+\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{3}{C}+\ldots+\frac{2C-1}{2C}\right)=\left(U+\frac{C}{2}\right)\frac{C}{4}\,.$$

С другой стороны, если строчка посчитана в этой сумме j раз, то она является $(C/2-1)$-строчкой, $\ldots$, $(C/2-j)$-строчкой, поэтому в ней хотя бы $2j$ отмеченных клеток; отсюда количество отмеченных клеток не меньше, чем $(2U+C)C/4$.

Заметим, что все эти клетки лежат в квадрате $(U+C)\times(U+C)$, поэтому среди них не более $D(U+C)$ пустых. Поэтому *синих* среди наших отмеченных не меньше, чем

$$\frac{C(2U+C)-D(U+C)}{4} > U\frac{C-D}{2}\,,$$

что и требовалось.

Таким образом, если S_j содержит k пустых клеток, то $U \geqslant k/D$, и синих отмеченных клеток не меньше, чем $k(C-D)/(2D)$. Заметим, что отмеченные клетки *для разных компонент связности* различны. Действительно, если клетка A является отмеченной для S_i и S_j, т. е. удалена от каких-то клеток X_i и X_j не более, чем на $C/2$, то $X_iX_j \leqslant C$, и компоненты S_i и S_j связаны — противоречие. Таким образом, всего синих клеток не меньше, чем $x(C-D)/(2D) \geqslant x$, но мы предполагали, что их $x-1$. Противоречие, доказывающее задачу.

Замечание. Немного точнее проведя рассуждения, можно показать, например, что при $D = 1$ мы можем положить $C = 1$.

(*И. Богданов, Г. Челноков*)

5.5. Условие. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр.

Решение. Как известно, в додекаэдр можно вписать куб, вершины которого лежат в вершинах додекаэдра. У куба 12 ребер, а у додекаэдра 12 граней, каждое ребро куба лежит на своей грани, являясь ее диагональю.

Поскольку у каждой грани 5 диагоналей, имеется 5 различных кубов, вписанных в додекаэдр, к каждой вершине примыкают два куба (ибо сходятся 3 грани додекаэдра и 6 диагоналей граней — по две от каждой).

Любое движение додекаэдра переставляет эти кубы, а центральная симметрия — переставляет тождественно. Поскольку любую грань додекаэдра можно перевести в любую, а путем поворота вдоль оси, перпендикулярной паре противоположных граней, любая диагональ грани переводится в любую другую, все диагонали всех граней друг в друга переводятся. Поэтому любой куб можно перевести в любой другой. (Можно показать, что группа симметрий додекаэдра первого рода — т. е. сохраняющих ориентацию — изоморфна группе A_5 или группе четных перестановок пятиэлементного множества: этих кубов.)

В свою очередь, в куб с ребром a можно двумя способами вписать тетраэдр с ребром $a\sqrt{2}$, вершины которого лежат в вершинах куба, а ребра — диагонали граней. При центральной симметрии куба эти два тетраэдра переходят друг в друга, а их пересечение есть октаэдр — тело, двойственное к кубу. Утверждение задачи 5.5 есть аналог этого факта для додекаэдра с икосаэдром.

Итого имеются 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр. Все они содержат его центр и каждая грань тела B, являющегося их пересечением, образована плоскостью граней одного из этих тетраэдров. Тетраэдры разбиваются на пары центрально симметричных тетраэдров, вписанных в один куб, и центральная симметрия додекаэдра меняет местами тетраэдры в парах. Пересечение каждой пары есть октаэдр и утверждение о том, что пересечение 5 октаэдров есть икосаэдр, является двойственным аналогом утверждения о пяти кубах, вписанных в додекаэдр.

Поскольку любой куб можно перевести в любой, из этого следует, что любой тетраэдр можно перевести в любой движением додекаэдра.

Более того. Поворот на $2\pi/3$ относительно главной диагонали куба (которая совпадает с главной диагональю додекаэдра) переводит в себя додекаэдр, этот куб и каждый тетраэдр, вписанный в последний. При этом одна из граней тетраэдра переходит в себя, а три других переходят друг в друга по циклу. Поскольку плоскость грани B лежит в плоскости грани одного из тетраэдров, из этого также следует, что количество сторон у любой грани B делится на 3.

Суммируя сказанное, получаем, что любая грань любого тетраэдра переводится в любую грань любого тетраэдра движением додекаэдра. Соответственно, любая грань тела B также переводится в любую другую грань и все грани B имеют равное число сторон, делящееся на 3.

Поскольку одна из граней выпуклого многогранника обязана иметь менее 6 сторон (это легко выводится из формулы Эйлера), то все грани B — треугольники. А раз для каждой грани есть поворот относительно некоторой оси, переводящий ее в себя, то все эти треугольники правильные.

Вершину каждой грани B можно перевести движением B в любую другую вершину той же грани, а каждую грань B — в любую другую грань. Из этого следует, что и любая вершина B переводится в любую другую вершину. Поэтому B — правильный многогранник.

Исходный додекаэдр (а значит, и B) переходит в себя при повороте относительно некоторой оси (серединного перпендикуляра к паре противоположных граней). Поскольку все грани B — треугольники, при таком повороте ни одна из граней B в себя не переходит и потому количество граней B делится на 5.

Правильными многогранниками являются: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Куб и додекаэдр не подходят, потому что их грани не треугольники, а у тетраэдра и октаэдра количество граней не делится на 5. Поэтому B икосаэдр. Задача решена.

Замечание. Грани икосаэдра можно раскрасить (двумя способами) в 5 цветов так, чтобы одноцветные грани не имели бы общей вершины. Тогда продолжения граней одного цвета образуют правильный тетраэдр. Двум способам раскраски граней отвечает две пятерки правильных тетраэдров, описанных около икосаэдра. Все 10 вписаны в додекаэдр и образуют одну из звездчатых форм икосаэдра. Другая звездчатая форма есть объединение 5 октаэдров, каждый из которых образован пересечением пары тетраэдров из этих десяти.

Сечение додекаэдра плоскостью грани наших тетраэдров есть неправильный центрально симметричный шестиугольник, вершины которого образованы вершинами двух правильных треугольников, повернутых на некоторый угол относительно общего центра. Это множество вершин додекаэдра, которые можно соединить с данной вершиной путем из двух ребер. Длины сторон этого шестиугольника чередуются и равны стороне додекаэдра и диагонали его грани соответственно. Если провести все такие сечения, то получится многогранник, также являющейся звездчатой формой икосаэдра.

(*А. Я. Канель*)

5.10. Условие. Случайные величины X, Y, Z равномерно распределены на единичном отрезке. Докажите, что величина $(XY)^Z$ также равномерно распределена.

Решение. Введем новые переменные $U = X, V = XY$. Совместное распределение переменных U, V имеет плотность $dUdV/U$, поскольку якобиан перехода равен $1/U$. При этом $P(V \leqslant U) = P(XY \leqslant X) = 1$ (поскольку $Y \leqslant 1$); если $0 \leqslant w \leqslant 1$, то

$$P(V \leqslant w) = P(V \leqslant w, U \geqslant V) = P(XY \leqslant w) = \\ = \int_0^w dV \int_V^1 \frac{dU}{U} = \int_0^w (-\ln V) dV,$$

и плотность распределения величины V равна $f_V(w) = -\ln w$. Положим $\eta = -\ln V$. Тогда

$$P(\eta \leqslant w) = P(V \geqslant e^{-w}) = \int_{e^{-w}}^1 (-\ln V) dV.$$

Продифференцируем левую и правую часть по w:

$$f_\eta(w) = -(-\ln(e^{-w}))\frac{de^{-w}}{dw} = we^{-w}, \quad 0 < w < \infty.$$

Далее,

$$P(V^Z \leqslant t) = P(Z\eta \geqslant -\ln t) = P\left(-\frac{\ln t}{\eta} \leqslant Z\right),$$

причем $Z \leqslant 1$. Таким образом, при данном t переменное η пробегает значения от $-\ln t$ до бесконечности, и при каждом его значении Z равномерно распределено на отрезке $[-\ln t/\eta, 1]$. Следовательно,

$$P\left(-\frac{\ln t}{\eta} \leqslant Z\right) = \int_{-\ln t}^\infty we^{-w}\left(\int_{-\frac{\ln t}{w}}^1 dZ\right) dw = \\ = \int_{-\ln t}^\infty we^{-w}\left(1 + \frac{\ln t}{w}\right) dw = \int_{-\ln t}^\infty we^{-w} dw + \\ + \ln t \int_{-\ln t}^\infty e^{-w} dw = -t\ln t + t + t\ln t = t.$$

Значит, $P(V^Z \leqslant t) = t \quad (0 < t \leqslant 1)$, а это означает, что величина $(XY)^Z$ распределена равномерно.

(*М. Кельберт, переведено и отредактировано Б. Р. Френкиным*)

6.1. Условие. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдется один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдется цепочка из 12 вложенных людоедов.

Решение. Назовем людоеда *добрым*, если он никого не ел. Назовем людоеда *добрым первой степени*, если он никого не ел, кроме как добрых людоедов. Назовем людоеда *добрым второй степени*, если он никого не ел, кроме как добрых людоедов и людоедов первой степени доброты и т. д.

Из условия задачи следует, что для каждой степени доброты найдется не более 9 людоедов, а так как людоедов 100, то степеней доброты не менее 12.

Людоед 12 степени доброты обязательно съел людоеда 11 степени, тот — 10 степени и т. д. Мы получили цепочку вложенных людоедов.

Задача допускает двойственное решение (назовем людоеда *живым*, если его никто не съел, назовем людоеда *живым первой степени*, если его ели только живые людоеды...).

Замечание. Общий факт формулируется так. Имеется частично упорядоченное множество из $mn+1$ элемента. Тогда в нем найдется либо цепь из $n+1$ элемента, либо антицепь из $m+1$ элемента (*цепью* называется подмножество частично упорядоченного множества, в котором любые два элемента сравнимы, а *антицепью* — подмножество, в котором любые два элемента несравнимы). Подумайте над такой известной олимпиадной задачей. В ряду стоят $mn+1$ различное число. Тогда можно выбрать либо $n+1$ число, идущее в порядке возрастания, либо $m+1$ число в порядке убывания.

(*А. Я. Белов*)

6.6. Условие. t_k — бесконечная последовательность положительных чисел. Докажите, что ряд $\sum(1+t_{k+1})/(kt_k)$ расходится.

Решение. Пусть $S_k = \dfrac{1}{kt_k}$. Нужно доказать, что два ряда $\sum_k S_k$ и $\sum_k \dfrac{S_k}{(k+1)S_{k+1}}$ не могут сходиться одновременно. Ясно, что сходимость ряда $\sum_k \dfrac{S_k}{(k+1)S_{k+1}}$ равносильна сходимости ряда $\sum_k \dfrac{S_k}{kS_{k+1}}$, поскольку $1 < \dfrac{k+1}{k} \leqslant 2$ при $k = 1, \ldots, \infty$.

Предположим, что $\sum_k S_k < \infty$. Тогда $\lim_{k\to\infty} S_k = 0$. Покажем, что для любого n при всех достаточно больших m, $m > 2n$, выполнено

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{kS_{k+1}} > \frac{1}{2}\,.$$

Тогда остаточный член $R_k = \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{S_k}{kS_{k+1}}$ не будет стремиться к нулю, что обеспечит расходимость ряда $\sum_k \dfrac{S_k}{kS_{k+1}}$.

Поскольку $\lim_{k\to\infty} S_k = 0$, найдется такое $m > 2n$, что $\dfrac{S_{m+1}}{S_n} < 1$. Но тогда

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{kS_{k+1}} > \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{m-n+1}{m} \cdot \frac{1}{m-n+1} \sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} > \frac{1}{2}\,,$$

ибо $\dfrac{m-n+1}{m} > \dfrac{1}{2}$, а поскольку $\prod_{k=n}^{m} \dfrac{S_k}{S_{k+1}} = \dfrac{S_n}{S_{m+1}} > 1$, то

$$\frac{1}{m-n+1} \sum_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}} > \sqrt[m-n+1]{\prod_{k=n}^{m} \frac{S_k}{S_{k+1}}} > 1$$

в силу неравенства Коши.

Замечание. Эта задача была предложена на Всесоюзной олимпиаде по математике «Студент и научно-технический прогресс» для пединститутов в 1982 г. (г. Чернигов), в которой автор решения принял личное участие.

(*А. Я. Белов*)

6.8. Условие. Аналитическая функция (т. е. которая разлагается в каждой точке во всюду сходящийся ряд Тейлора) принимает в рациональных точках рациональные значения. Верно ли, что она — многочлен?

Решение. Ответ на вопрос: вообще говоря, нет.

Множество рациональных чисел счетно, занумеруем их и обозначим i-е в этой нумерации рациональное число через x_i.

Рассмотрим сумму

$$\alpha_0(x-x_0)+\alpha_1(x-x_0)(x-x_1)+\dots+\alpha_k(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)+\ldots, \quad (1)$$

где α_i — некоторые рациональные коэффициенты, значения которых будут подобраны ниже.

Если $x \in \mathbb{Q}$, то $x = x_i$ при некотором i и данная сумма оборвется; в силу рациональности коэффициентов α_i ее значение будет рационально.

Многочлен, принимающий во всех рациональных точках рациональные значения, имеет рациональные коэффициенты. Поэтому множество таких многочленов счетно. Осталось показать, что есть континуум последовательностей $\{\alpha_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых написанный выше ряд сходится к аналитической функции. Для этого докажем лемму.

Лемма 1. Для любой последовательности многочленов $R_k(x)$, для которых $\deg R_k(x) = k+1$, существует такая последовательность неотрицательных чисел r_k, что для любой последовательности α_k, удовлетворяющей неравенствам $0 \leqslant \alpha_k < r_k$, ряд $\sum_k \alpha_k R_k(x)$ сходится к аналитической функции.

Доказательство. Обозначим через M_n максимум $|R_k^{(j)}(x)|$ при условиях $|x| \leqslant n, k \leqslant n$, здесь $f^{(j)}(x)$ обозначает j-ю производную. Этот максимум существует, ибо $R^{(j)}(x) = 0$ при $j > k + 1$.

Возьмем последовательность $r_k = M_{n+1}^{-1}/(n+1)!$ и рассмотрим любую последовательность α_k такую, что $0 \leqslant \alpha_k < r_k$. Легко видеть, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(j)}(x)$ равномерно сходятся на ограниченных множествах. Поэтому сумма

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k(x)$$

есть бесконечно дифференцируемая функция и ее j-я производная равна

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(j)}(x)$$

в силу стандартной теоремы из курса матанализа.

Докажем, что ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в каждой точке (это и есть аналитичность). Запишем остаточный член в форме Лагранжа:

$$\varphi_m(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}, \quad |\xi| \leqslant |x|.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $m \to \infty$ поскольку, в силу выбора α_k имеем равномерную сходимость $f^{(m)}(x)$ к нулю при $m \to \infty$ на любом ограниченном множестве. $\square$

Применяя лемму, можно выбрать континуум различных последовательностей α_k рациональных чисел, для которых ряд (1) сходится к аналитической функции.

Комментарий. Аналогичным способом можно построить континуум различных аналитических функций, принимающих в алгебраических точках алгебраические значения вместе со всеми производными (а также в рациональных точках рациональные значения и т. д.).

Можно также обеспечить, чтобы функция осуществляла биекцию множества рациональных (алгебраических) чисел на себя. Кроме того, можно строить функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, аналитические относительно нескольких переменных, которые не являются многочленами, но все их ограничения, получаемые подстановкой $x_i = a$, $a \in \mathbb{Q}$, — многочлены.

(А. Я. Белов)

6.12. Условие. Докажите, что $\inf\limits_{x_i>0} S_n(2) = 6$, где

$$S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1} + x_{i+2}}{x_i + x_{i+3}}\,;\ x_i > 0;\ x_{i+n} = x_i;\ n \geqslant 6.$$

Решение. Возьмем набор чисел $x_k = a^{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-2$ и $x_{n-1} = x_n = 1$, где a — положительное число, меньшее 1. В этом случае $S_n(2) < 6 + 2(n-3)a$, ибо каждое из первых $(n-4)$-ех слагаемых меньше $2a$, а из оставшихся четырех два меньше 2 и два меньше $1 + a$. Устремив a к нулю получим, что $S_n(2) \leqslant 6$.

Покажем теперь, что $S_n(2) \geqslant 6$. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$X = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+3}} \geqslant 3.$$

Воспользуемся неравенством Коши – Буняковского для наборов чисел

$$\frac{x_2}{x_1+x_4}, \quad \frac{x_3}{x_2+x_5}, \quad \ldots, \quad \frac{x_n}{x_{n-1}+x_2}, \quad \frac{x_1}{x_n+x_3} \quad \text{и}$$

$$x_2(x_1+x_4), \quad x_3(x_2+x_5), \quad \ldots, \quad x_n(x_{n-1}+x_2), \quad x_1(x_n+x_3),$$

получим

$$X \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2)}\,.$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$S^2 \geqslant 3(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1) + 3(x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_nx_2) = 3Y,$$

где $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Положим для краткости $A_0 = x_3 + x_6 + \ldots$, $A_1 = x_1 + x_4 + \ldots$ и $A_2 = x_2 + x_5 + \ldots$. Тогда $S = A_0 + A_1 + A_2$ и $A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 \geqslant S^2/3$. Передвинув, если нужно, числа по циклу, можно добиться того, чтобы $x_3 \geqslant x_1$ и $x_3 \geqslant x_2$. Заметим, что

$$S^2 \geqslant \frac{3}{2}(S^2 - A_0^2 - A_1^2 - A_2^2) = 3 \sum_{i-k \not\vdots 3} x_ix_k = 3Z.$$

Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то все слагаемые из суммы Y содержатся и в сумме Z. Если $n \equiv 1 \pmod 3$, то в сумме Y недостает слагаемого x_nx_1, которое не превосходит содержащегося в ней слагаемого x_nx_3. Если же $n \equiv 2 \pmod 3$, то в сумме Y недостает слагаемых $x_{n-1}x_1$ и x_nx_2, которые не превосходят соответственно слагаемых $x_{n-1}x_3$ и x_nx_3. Стало быть, $S^2 \geqslant 3Y \geqslant 3Z$ и исходное неравенство доказано.

Замечание. Использование неравенства Коши – Буняковского часто помогает при доказательстве подобных неравенств. С его помощью можно получить неравенство Шапиро (Shapiro H. S., Amer. Math. Monthly, **61**, 1954, P. 571–572, Problem 4603)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}+x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{2}$$

при $n = 3$, 4, 5, и 6 или неравенство (А. Прокопьев, Квант, №6, 1982, задача М749)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k+x_{k+2}} \geqslant 2.$$

Многочисленные примеры использования неравенства Коши – Буняковского в подобных случаях приведены в статье *Храбров А. И.* Доказательство неравенств при помощи квазилинеаризации // Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 1999 год. Изд-во СПбГУ, 1999, С. 81–87.

(*А. И. Храбров*)

7.2. Условие. Допустим, что любую конечную карту на плоскости можно правильно раскрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда произвольную карту на плоскости также можно правильно раскрасить в 4 цвета. (Страны можно считать многоугольниками. Раскраска называется *правильной*, если любые две страны с общим участком границы раскрашены в разные цвета.)

Первое решение. Назовем правильную раскраску P множества стран S *неограниченно продолжаемой*, если для любого конечного множества S' она продолжается на $S \cup S'$. Если P не является неограниченно продолжаемой, то существует конечное *множество непродолжаемости* S' такое, что P не продолжается на $S \cup S'$.

Если P есть неограниченно продолжаемая раскраска множества S, C — страна, то существует неограниченно продолжаемая раскраска P' множества $S' = S \cup \{C\}$, продолжающая P. Действительно, существует не более 4 правильных раскрасок S', продолжающих P, и если они непродолжаемы, то объединение соответствующих множеств непродолжаемости есть множество непродолжаемости для P.

Множество стран счетно. Занумеруем страны $C_1, \ldots, C_n, \ldots$. По условию, раскраска пустого множества неограниченно продолжаема и она последовательно продолжается до неограничено продолжаемой раскраски первых n стран для любого n. Объединение всех таких раскрасок даст искомую раскраску всех стран.

Замечание. С помощью леммы Цорна можно доказать следующее обобщение задачи: допустим, каждый конечный подграф графа G

можно правильно раскрасить в k цветов. Тогда весь граф G также можно правильно раскрасить в k цветов.

(*А. Я. Белов*)

Второе решение. Занумеруем страны натуральными числами. Занумеруем цвета числами $1, 2, 3, 4$. Сопоставим раскраске первых n стран десятичную дробь $0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots$, где a_i — номер цвета i-й страны. Поскольку первые n стран можно правильно раскрасить, существует последовательность чисел $\{x_n\} \subset [0, 1]$ такая, что член x_n кодирует правильную раскраску первых n стран.

Из любой последовательности точек отрезка можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть X — предельная точка $\{x_n\}$, т. е. предел некоторой подпоследовательности. Легко видеть, что десятичное разложение числа X кодирует правильную раскраску всех стран.

(*Б. Шойхет*)

Новые издания

Книги издательства МЦНМО (2003 г.):

Д. В. Аносов. **Отображения окружности, векторные поля и их применения.** 120 с.

В книге доказывается теорема Жордана. С этой целью вводятся основные топологические понятия (степень отображения, векторные поля) и доказываются многие топологические утверждения (основная теорема алгебры, теорема о числе вещественных корней многочлена, критерий Эйленберга и др.). Для школьников и студентов физико-математических специальностей.

И. В. Аржанцев. **Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений.** 68 с.

Читатель знакомится с важным понятием современной алгебры — базисом Грёбнера идеала в кольце многочленов от многих переменных и приложениями этого понятия. От читателя требуются лишь начальные знания алгебры.

В. И. Арнольд. **Что такое математика?** 104 с.

Основным содержанием книги является статья академика Владимира Игоревича Арнольда, написанная в 2002 году. Книга содержит также «Доклад о девяти недавних математических открытиях» и задачи парижского семинара 2002 года.

Т. А. Баранова, А. Д. Блинков, К. П. Кочетков, М. Г. Потапова, А. В. Семёнов. **Олимпиада для 5–6 классов Весенний Турнир Архимеда.** 128 с.

В книге собраны материалы Весеннего Турнира Архимеда за все годы его проведения: задачи, решения, комментарии и рекомендации по проверке. Книга прежде всего предназначена для школьников и их родителей, а также будет интересна и полезна учителям математики, руководителям математических кружков и просто любителям головоломок.

О. Н. Василенко. **Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии.** 328 с.

М. Н. Вялый. **Линейные неравенства и комбинаторика.** 32 с.

Б. П. Гейдман. **Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.** Учебное пособие для учащихся ОЛ ВЗМШ. 48 с.

Ф. Груневальд, Й. Меннике, Ю. Эльстродт. **Группы, действующие на гиперболическом пространстве.** Пер. с англ. 640 с.

Е. Б. Гусев, В. Г. Сурдин. **Расширяя границы Вселенной: история астрономии в задачах.** 176 с.

В книге представлено 426 задач по истории астрономии. Задачам предшествует краткое историческое введение. Издание призвано помочь в преподавании астрономии в высших учебных заведениях и в школах.

С. В. Еременко, А. М. Сохет, В. Г. Ушаков. **Элементы геометрии в задачах.** 168 с.

Книга написана на основе занятий по геометрии, проводившихся авторами со школьниками физико-математической школы №27 г.Харькова в 1988–1991 годах.

А. А. Заславский. **Геометрические преобразования.** 88 с.

В книге изложены элементы теории геометрических преобразований. Рассмотрены движения плоскости, преобразования подобия, аффинные, круговые и проективные преобразования. Описано построение моделей геометрии Лобачевского с помощью проективных и круговых преобразований.

Э. М. Кларк, мл. О. Грамберг, Д. Пелед. **Верификация моделей программ: Model checking.** Пер. с англ. под ред. Р. Смелянского. 416 с.

В монографии всемирно известных специалистов в области математической логики и теории вычислений представлено полное и подробное изложение нового подхода к решению задачи проверки правильности функционирования сложных программных систем.

А. А. Марков. **Избранные труды. Т. II. Теория алгорифмов и конструктивная математика, математическая логика, информатика и смежные вопросы.** 626+XXII с.

Во второй том собрания сочинений выдающегося российского математика А. А. Маркова, выпускаемого к столетию со дня его рождения, включены работы по теории алгорифмов, конструктивной математике, математической логике, информатике.

С. С. Марченков. **Элементарные рекурсивные функции.** 112 с.

Книга написана на основе курсов лекций, которые автор читал на факультете Вычислительной математики и кибернетики МГУ.

С. М. Натанзон. **Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги.** 176 с.

Книга посвящена исследованию топологической структуры пространств модулей римановых поверхностей и близких к ним пространств: вещественных алгебраических кривых, пространств отображений и супераналогов всех этих пространств.

Б. А. Розенфельд. **Аполлоний Пергский.** 176 с.

Настоящая книга представляет собой попытку создания научной биографии Аполлония, содержащей анализ его трудов с точки зрения современной науки. Для широкого круга читателей, интересующихся математикой.

Жан-Пьер Серр. **Собрание сочинений. Том I.** (Совместно с НМУ) 512 с.

Жан-Пьер Серр — один из величайших математиков нашего времени. Собрание сочинений выпускается к 75-летию ученого. В первый том собрания сочинений включены работы 1949–1954 гг.

Фундаментальная математика сегодня. К десятилетию НМУ. 408 с.

Предлагаемая книга — сборник статей, посвященных активно развивающимся в настоящее время направлениям фундаментальной математики. Большинство авторов сборника — участники конференции «Фундаментальная математика сегодня» (декабрь 2001 года), посвященной 10-летию Независимого Московского Университета и собравшей многих ведущих математиков мира.

Дж. Хамфрис. **Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.** Перев. с англ. Б. Р. Френкина под редакцией Э. Б. Винберга. 216 с.

Данная книга является одним из лучших пособий для изучения теории алгебр Ли. Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

XXV Турнир им. М. В. Ломоносова (29 сентября 2002 года) 136 с.

Приводятся условия и решения заданий Турнира с подробными комментариями. Для участников Турнира, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»

Вып. 23. М. А. Шубин. **Математический анализ для решения физических задач.** 40 с.

В этой брошюре кратко объясняются основные понятия математического анализа (производная и интеграл) и даются простейшие приложения к физическим задачам, основанные на составлении и решении дифференциальных уравнений.

Вып. 24. А. И. Дьяченко. **Магнитные полюса Земли.** 48 с.

В брошюре рассказывается о магнитном поле Земли, об истории изучения магнитных полюсов, а также об истории перемещения полюсов и нынешнем их движении.

Вып. 25. С. М. Гусейн-Заде. **Разборчивая невеста.** 24 с.

В брошюре рассказывается, как из полушуточной задачи, придуманной М. Гарднером, вырос новый раздел математики — теория оптимальной остановки случайных процессов.

Вып. 26. К. П. Кохась. **Ладейные числа и многочлены.** 20 с.

Текст брошюры может рассматриваться как обзор элементарных результатов о ладейных многочленах.

Вып. 27. С. Г. Смирнов. **Прогулки по замкнутым поверхностям.** 28 с.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей: школьников, студентов, учителей.

Вып. 28. А. М. Райгородский. **Хроматические числа.** 44 с.

В брошюре рассказано об одной из самых коротко формулируемых и в то же время одной из самых ярких и трудных задач комбинаторной геометрии.

Переиздания

Д. В. Аносов. **Взгляд на математику и нечто из нее.** Б-ка «Матем. просв.» Вып. 3. 2-е изд. 24 с.

Р. К. Гордин. **Это должен знать каждый матшкольник.** 2-е изд. 56 с.

И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. **Функции и графики (основные приемы).** Библиотечка ОЛ ВЗМШ. 6-е изд., испр. 120 с.

С. М. Львовский. **Набор и верстка в пакете LaTeX.** 3-е изд. 448 с.

В. В. Прасолов. **Многочлены.** 3-е изд., испр. 336 с.

В. М. Тихомиров. **Великие математики прошлого и их великие теоремы.** Б-ка «Матем. просв.» Вып. 1. 2-е изд., испр. 16 с.

В. В. Ткачук. **Математика — абитуриенту.** 10-е изд., испр. и доп. 910 с. 9-е изд., испр. и доп. 904 с. 8-е изд., испр. и доп. 892 с.

М. А. Шубин. **Лекции об уравнениях математической физики.** 2-е изд., испр. 303 с.

* * * * * *

По вопросам приобретения этих книг обращаться по адресу: 119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11, магазин «Математическая книга».

Тел.: (095)-241-7285, факс: (095)-291-6501, e-mail: biblio@mccme.ru

Опечатки, замеченные в №7

Страница, Строка	Напечатано	Следует читать
16, 22 сверху	Коннес	Конн
20, 10 снизу	Воэна Джонса	Вогана Джонса
22, 3 сверху	Воэну Джонсу	Вогану Джонсу
22, 16 сверху	Зейберга	Зайберга
23, 19 снизу	Коннеса	Конна
23, 18 снизу	Коннесом	Конном
146, 8 сверху	с нечетной	на различные нечетные части с
176, 8 сверху	оператор $\mathbf{A}\|_U$ нильпотентен, а оператор $\mathbf{A}\|_W$ косоэрмитов.	ограничение оператора $\mathbf{A}$ на каждое из этих подпространств есть сумма нильпотентного оператора и оператора умножения на чисто мнимое число
176, 6 снизу	трех	четырех
190, 2 сверху	3.7	3.6

Редактор В. В. Ященко
Подготовка оригинал-макета: LaTeX2ε,
METAPOST, М. Н. Вялый

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.
Подписано в печать 09.02.2004 г. Формат 70 × 100/16.
Бумага офсетная №1. Печать офсетная. Печ. л. 16,5. Тираж 1000.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического
образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Облиздат»
248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5
Заказ №