МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 22

Москва
Издательство МЦНМО
2018

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@yandex.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 22. — М.: МЦНМО, 2018. — 256 с.
ISBN 978-5-4439-1270-7

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

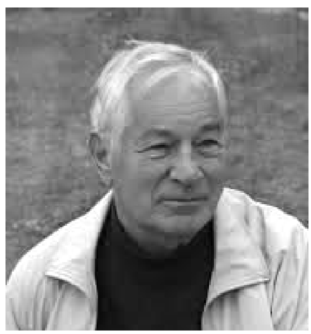
УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1270-7

Поздравляем с 80-летием членов редколлегии «Математического просвещения»:

Эрнеста Борисовича Винберга

Николая Христовича Розова



Алексея Брониславовича Сосинского

Содержание

Математический мир

Открытия, а не изобретения:
интервью с Эрнестом Борисовичем Винбергом 7

А. Б. Сосинский
Золотая эра мехмата (1957–1967) глазами приезжего 17

В. М. Тихомиров
Николай Христович Розов 35

Вик. С. Куликов, Г. Б. Шабат
Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель . . 37

В. Н. Дубровский
Андрей Александрович Егоров 64

Геометрия: классика и современность

В. М. Тихомиров
Планиметрия Евклида и Лобачевского от Евклида до Гильберта . . . 69

М. А. Горелов
Задачи с двумя известными 85

И. Х. Сабитов
Как быстро вычислить сумму углов многоугольника? 114

Наш семинар: математические сюжеты

К. А. Ваньков, В. М. Журавлёв
Правильные паркеты и производящие функции 127

П. П. Рябов
Дополнение к результатам Ф. А. Шарова 158

А. С. Ремизова, А. Б. Скопенков
Простое доказательство локальной леммы Ловаса 164
М. Д. Бронштейн, Э. Ю. Лернер
О счастливых билетах по-казански 170
Д. В. Фомин
Определение набора чисел по набору его кратных сумм 179

Нам пишут

М. А. Горелов
Неравенства для средних Джини 207
А. Б. Скопенков
Отклик на статью В. М. Журавлёва и П. И. Самовола «От школьной задачи к элементам высшей алгебры» 209

По мотивам задачника

Н. Н. Осипов
Знаменитый предел Арнольда 211
А. Я. Канель-Белов
Памяти Данияра Муштари (1945–2013) 216
Данияр Хамидович Муштари
О правильной раскраске 16-мерной сферы 218
Б. Р. Френкин
Минимизация числа пересадок и ствол дерева 220
А. В. Крупецков
Интересная сумма Гольдбаха 229

Задачник

Условия задач 231
Решения задач из прошлых выпусков 237

24 декабря 2017 года скончался замечательный лингвист, академик РАН Андрей Анатольевич Зализняк. Его деятельность была тесно связана с математикой и информатикой. В следующем выпуске будут опубликованы посвящённые ему материалы:

Успенский В. А. О русском языке, о дешифровке древних текстов, о «Слове».
Зализняк А. Истина существует.
Пиперски А. Андрей Анатольевич Зализняк (1935–2017).

Математический мир

Открытия, а не изобретения: интервью с Эрнестом Борисовичем Винбергом

Э. Б. Винберг выступает в качестве почётного докладчика Европейского математического общества

Эрнест Борисович Винберг в 2016 году был удостоен права выступить как почётный докладчик Европейского математического общества на 50-й сессии семинара «Софус Ли» в Бендлево (Польша). По этому случаю мы

Опубликовано на английском языке в EMS Newsletter, December 2016 (pp. 31–34). Интервьюеры: Алиса Фиаловски, Йоахим Хильгерт, Бент Эрстед, Владимир Сальников. Фотографии: Януш Грабовский. Перевод Б. Р. Френкина.

Публикация согласована с редакцией EMS Newsletter.

Эрнест Борисович Винберг, Бендлево, 2016

попросили его дать интервью для EMS Newsletter. Интервью состоялось в Бендлево (Польша) 27 сентября 2016 года.

Профессор Винберг, мы рады вашему приезду на 50-ю сессию семинара «Софус Ли» и хотели бы задать вам ряд вопросов.

Прежде всего, кто ввёл вас в область ваших будущих исследований?

По сути, у меня было два научных руководителя: Евгений Борисович Дынкин и Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро. Оба они являлись выдающимися математиками. Дынкин был блестящим лектором, привлекавшим множество молодёжи, а Пятецкий-Шапиро поставил задачу, ставшую своего рода вызовом. Задача относилась к однородным ограниченным областям. Эли Картан поставил вопрос, всегда ли такая область является симметрической, а Пятецкий-Шапиро построил контрпример в размерности 4. После этого возникла задача классификации однородных ограниченных областей в комплексных пространствах. И оказалось, что она связана с классификацией однородных выпуклых конусов в вещественных векторных пространствах. Это и стало темой моей кандидатской диссертации.

А когда это было?

Я поступил в аспирантуру в 1959 году, но моя научная работа началась несколько раньше. Моей первой публикацией стала дипломная работа об инвариантных линейных связностях в однородных пространствах, выполненная под руководством Дынкина в 1958/59 учебном году.

Продолжили ли вы работать с Дынкиным и Пятецким-Шапиро? Расскажите немного о своих научных руководителях.

На самом деле я никогда не работал с Дынкиным, так как к тому времени он полностью переключился на теорию вероятностей. До 1965 года я продолжал заниматься кэлеровыми многообразиями с Пятецким-Шапиро и другим его студентом, Семёном Гиндикиным. После этого я обратился к другим задачам. Некоторые из них были подсказаны моей предыдущей тематикой, другие нет, но примерно в 27 лет я стал более или менее самостоятельным. Тем не менее тема моей докторской диссертации также была связана с задачей Пятецкого-Шапиро. Она относилась к гипотезе Сельберга об арифметичности дискретных подгрупп, так называемых решёток, в полупростых группах Ли. Пятецкий-Шапиро интересовался этой задачей, но не смог её решить, хотя имел некоторые результаты в этом направлении. Я развил теорию гиперболических групп отражений, что позволило мне построить много контрпримеров в ранге 1. После этого Маргулис доказал свою знаменитую теорему, давшую положительный ответ на гипотезу Сельберга для высших рангов. Моя работа по гиперболическим группам отражений имела два источника: во-первых, теорию простых корней Дынкина, которая тесно связана с конечными группами отражений; во-вторых, теорию автоморфных форм для решёток в полупростых группах Ли, которая была любимой тематикой Пятецкого-Шапиро. Так что в некотором смысле я продолжал изучение вопросов, поставленных и Дынкиным, и Пятецким-Шапиро. В 1966 году в Москве проходил Международный конгресс математиков, и я сделал там два доклада. Один из них был посвящён нашей совместной работе с Пятецким-Шапиро и Гиндикиным, а второй — гиперболическим группам отражений.

Московская математическая школа в то время была поистине знаменита. Кто из ваших коллег принадлежал к тому же поколению?

Да, это было поистине замечательное время; иногда его называют золотым веком московской математики. Особенно сильным был наш курс. Многие из нас стали преподавателями мехмата в 1961 году по инициативе академика Колмогорова. Среди них были кроме меня Кириллов, Арнольд, вероятностники Шур и Тутубалин, топологи Архангельский, Пасынков и Пономарёв, а также некоторые другие. Мне очень повезло, что это произошло.

Интервью Эрнеста Борисовича

Как вы выбираете задачу, над которой будете работать? Иными словами, как вы решаете, надо ли тратить время на размышления об этой задаче? Как известно, вы решили много различных задач; вы не из тех исследователей, которые продвигаются только в одном направлении. Что должно вам понравиться в задаче, чтобы вы стали работать над ней?

Да, я работал над различными задачами, но они были как-то взаимосвязаны. Все области математики взаимосвязаны. Мне трудно сказать, как я выбираю задачу. Если мне что-то интересно и я чувствую, что могу что-то сделать в этом направлении, я пытаюсь это сделать. Если неинтересно — не пытаюсь.

Можете ли вы как-то сформулировать, что делает задачу интересной для вас?

На мой взгляд, есть два типа математических результатов: изобретения и открытия. Я осознаю важность изобретений, но предпочитаю открытия. Иногда, получив результат, я испытываю отчётливое ощущение открытия чего-то существующего в природе. А другие математические работы и результаты не вызывают у меня такого ощущения; мне представляется, что это скорее изобретения — создания человеческого мозга, — чем что-то реально существующее в природе.

Какое ваше открытие самое любимое?

Надеюсь, что я его ещё не сделал.

А из тех, что вы уже сделали?

На мой взгляд, это, во-первых, теория гиперболических групп отражений; во-вторых, мои результаты в теории инвариантов, которые я называю «эффективной теорией инвариантов» (они связаны с градуированными алгебрами Ли); а также, может быть, моя работа по инвариантным упорядочениям в полупростых группах Ли. Совсем недавно я начал заниматься так называемыми теоремами типа Шевалле. Существует известная теорема Шепарда — Тодда — Шевалле об условиях, при которых алгебра инвариантов конечной линейной группы свободна. Согласно этой теореме, это будет в точности тогда, когда группа порождена комплексными отражениями. Тот же вопрос можно поставить для бесконечных групп отражений. Естественная постановка задачи — рассматривать группы комплексных отражений в симметрических областях, а именно в комплексных шарах и так называемых трубах будущего: это единственные симметрические области, которые допускают отражения. Недавно я получил некоторые результаты в этом направлении совместно с Осипом Шварцманом, моим бывшим студентом. Пожалуй, на данный момент это мой самый любимый результат.

В течение нескольких десятилетий вы вели совместно с А. Л. Онищиком очень известный семинар и в итоге выпустили книгу. Не могли бы Вы подробнее рассказать об этом семинаре?

В действительности это было продолжение известного семинара Дынкина — нашего общего учителя, — после того как Дынкин переключился на теорию вероятностей. Он был учеником Колмогорова, внёсшего большой вклад в эту область, создателя аксиоматической теории вероятностей. Первая работа Дынкина относилась к теории вероятностей. Но затем он стал посещать семинар Гельфанда, и Гельфанд предложил ему сделать доклад о классификации простых алгебр Ли. Готовясь к этому докладу, Дынкин открыл свои знаменитые простые корни. Он тогда был студентом четвёртого курса (это было во время войны, в 1944 году). После этого Дынкин заинтересовался теорией простых алгебр Ли и написал свои знаменитые статьи, что сделало его классиком в теории Ли. Около 1955 года он переключился на теорию вероятностей и в итоге стал классиком и в этой теории. Кстати, интересно, что за несколько лет до своей кончины в 2014 году он сделал совместную работу по простым алгебрам Ли с моим учеником Андреем Минченко.

Вернёмся к вашему вопросу. Наш семинар начался в 1961 году, когда мы оба — Онищик и я — были молодыми преподавателями мехмата. Сначала мы пытались изучать всю математику, начиная с канторовской теории множеств. Но скоро мы осознали свою полную наивность и сосредоточились на теории групп Ли. В это время уже были доступны знаменитые записки семинара Шевалле и вышла монография Шевалле «Теория групп Ли». Мы поняли, что нужно изучать алгебраические группы в их связи с группами Ли.

Наш семинар посещали многие увлечённые молодые люди. Дело происходило следующим образом: мы (Онищик и я) излагали некий кусок теории, обычно в виде последовательности задач. Все участники — около 25 — делились на несколько групп, которые обсуждали задачи и их решения между заседаниями семинара. Самые интересные решения рассказывались на следующем заседании. Затем мы излагали некий новый кусок теории, и т. д.

В результате такой работы появилась книга «Семинар по группам Ли и алгебраическим группам» (в английском издании слово «семинар» было опущено). Она была написана при помощи некоторых участников нашего семинара, которые записывали задачи и то, что мы рассказывали. Мы с Онищиком всё это переписали заново, отредактировали, и так появилась наша книга. Она сохранила стиль семинара. Теория излагается в виде последовательности задач для самостоятельного решения читателем, однако в конце каждой главы есть некоторые указания. Имеются также упражнения. Эта книга использовалась несколькими поколениями студентов и аспирантов мехмата.

Затем мы переключились на теорию инвариантов. Мы изучали её вместе — руководители и участники. В итоге некоторые из нас стали специалистами в этой теории и внесли в неё свой вклад. В этот период В. Л. Попов присоединился к нам с Онищиком как руководитель семинара.

Кроме упомянутых, на семинаре были представлены и многие другие темы. Один год мы изучали суперматематику. Возможно, вы знаете, что одним из основателей суперматематики был Ф. А. Березин, наш старший коллега, ученик Гельфанда. Возникали и другие темы, например дискретные группы и применения теории Ли в математической физике. Дмитрий Алексеевский, один из участников нашего семинара, очень хорошо понимающий математическую физику, сделал ряд докладов на эту тему.

Семинар продолжался таким образом около 50 лет. Но сейчас Онищик уже не может больше участвовать в его проведении, и появились новые руководители — мои младшие ученики (а ныне коллеги) Д. Тимашёв и И. Аржанцев. К сожалению, сейчас дело идёт гораздо хуже, так как приходит всё меньше студентов изучать математику. Младшее поколение меньше этим интересуется, что весьма печально...

Вы основали журнал «Transformation Groups». Не могли бы вы рассказать о его первых шагах?

Во время интервью

Мы основали этот журнал вместе с моим бывшим учеником Владимиром Поповым при активном участии и поддержке Анн Костант, в то время математического редактора в издательстве Birkhäuser. И мы вели этот журнал (я надеюсь, успешно) в течение двадцати лет. Первыми ответственными редакторами были (кроме меня и Попова) К. Де Кончини, Г. Маргулис, А. Онищик, Дж. Шварц и М. Вернь. В целом редколлегия состоит из более чем 30 математиков и постепенно обновляется. В разное время ответственными редакторами были М. Брион, П. Этингоф, Э. Френкель, В. Гинзбург, В. Голдмен, М. Капович, А. Клещёв, И. Миркович, Х. Накадзима, А. Премет и А. Зелевинский. Мы отклоняем больше половины поступающих статей.

Как написано в предисловии к первому выпуску, понятие группы преобразований отражает симметрию мира, и мир познаваем настолько, насколько он симметричен (но мы не знаем, почему он столь замечательно симметричен). Вся моя работа связана с различными видами групп преобразований.

Я вначале познакомилась с вами как с преподавателем — в первые годы моего пребывания на мехмате МГУ. Поэтому мой вопрос таков: есть ли у вас какая-либо философия преподавания, какие-то принципы, которым вы стремитесь следовать?

Мой первый принцип: не так важно, чему учить, а главное — как учить. Ведь ясно, что большинство теорем, которые мы преподаём студентам, никогда им не потребуются после окончания университета. Но мы должны научить их мыслить. Второй принцип: нужно стараться избегать скучных вычислений, заменяя их идеями, позволяющими получить тот же результат без вычислений.

И мехмат — не единственное место в Москве, где можно учиться математике.

Прежде он был по существу единственным таким местом. Но затем появился Независимый московский университет (НМУ), а в последние годы и факультет математики Высшей школы экономики.

Не хотите ли вы сказать что-нибудь о Независимом университете?

Создание Независимого университета было очень важным и полезным делом. Но хотел бы сказать, что на самом деле он не независим. Я знаю только одного человека — Валентину Кириченко, — которая окончила НМУ и не училась на мехмате МГУ. Независимый университет — это скорее система специальных курсов: там не учат элементарным алгоритмам. Но я думаю, что НМУ был очень важен для нескольких поколений молодёжи, а также для талантливых математиков, которые не могли преподавать в Московском университете по каким-то причинам.

Вы были научным руководителем многих молодых математиков: под вашим руководством было защищено более 40 кандидатских и несколько докторских диссертаций. Есть ли у вас какая-то стратегия в этом вопросе? Каков ваш подход к руководству учениками?

Ну, у меня нет специальной стратегии. Я просто стараюсь заинтересовать их математикой. Я стараюсь найти интересные задачи, которые они смогут решить. Но боюсь, что я не уделяю достаточно внимания своим ученикам.

Вы были блестящим преподавателем и выдающимся исследователем в течение всей своей жизни. И вы один из тех, кто всё время оставался в Москве...

Да, я никогда не рассматривал возможность эмиграции. Я оставался в Москве. Но в течение последних двадцати лет я каждое лето езжу на два-три месяца в Германию, а именно в Билефельдский университет. Они положили начало этому, выдвинув меня на премию Александра фон Гумбольдта, которую я получил в 1997 году. После этого они продолжали приглашать меня по линии своего Центра совместных исследований. Кстати, этот университет с успехом выдвигал многих математиков из бывшего СССР на премию Гумбольдта: Александра Меркурьева, Сергея Адяна, Владимира Платонова и других. В Билефельде я сотрудничал с местными математиками Й. Меннике, Х. Хеллингом и Г. Абельсом, а также с другими гостями со всего мира. Посещение Билефельдского университета — это как бы моя вторая жизнь. В Москве я всё время занят множеством разных вещей; многие люди беспокоят меня и чего-то от меня хотят. А когда я приезжаю в Билефельд, я отдыхаю от этого и размышляю о проблемах, которые меня интересуют, разговариваю с коллегами и так далее. Так что моя жизнь разделена на две различные части, каждая из которых очень важна для меня.

Вы уже говорили, что в настоящее время вы занимаетесь группами комплексных отражений. Не могли бы вы назвать и другие вещи, которые вас сейчас интересуют? Может быть, какие-то проекты? В чём состоит ваша текущая деятельность?

Я всегда работаю одновременно над двумя-тремя темами. В данный момент я занимаюсь, как вы уже сказали, группами комплексных отражений, а также некоторыми «неабелевыми градуировками» простых алгебр Ли, о которых я собираюсь рассказывать на этой конференции. Я размышляю также о некоторых задачах эквивариантной симплектической геометрии, которые являются продолжением моих прежних результатов.

И мы слышали, что сейчас, как всегда, вы занимаетесь преподаванием. Студентов каких курсов вы учите?

Я читаю алгебру для второкурсников и специальный курс теории инвариантов для студентов начиная с третьего года обучения. Я также веду два семинара: один исследовательский — о нём мы уже говорили — и другой для студентов, он называется «Алгебра и геометрия». На этом семинаре мы стараемся показать взаимосвязи алгебры и геометрии. Например, в течение нескольких лет мы изучали взаимосвязи между алгебраической теорией инвариантов и теорией автоморфных форм. А именно, благодаря теоремам типа Торелли автоморфные формы можно изучать средствами геометрической теории инвариантов, реализуя арифметические факторы симметрических областей как пространства модулей некоторых классов алгебраических многообразий.

А в наши дни сколько студентов посещают эти семинары, если, как вы сказали, заинтересованных студентов стало меньше?

Да. К сожалению, лишь несколько студентов участвуют в нашем исследовательском семинаре, и лишь 10–12 посещают семинар «Алгебра и геометрия». Но время от времени ко мне всё же приходят талантливые студенты, которые хотят заниматься математикой, а не бизнесом, и некоторые из них даже не собираются эмигрировать.

Большое спасибо!

Спасибо за ваш интерес!

P. S. Вне этого интервью Эрнест Борисович сообщил нам о двух своих интервью, данных Дынкину в США в 1992 и 1999 годах. Огромная коллекция интервью Дынкина со многими российскими и западными математиками, посещавшими его в Соединённых Штатах, теперь доступна в онлайн-библиотеке Корнельского университета,
см. http://dynkincollection.library.cornell.edu/

© Noel Tovia Matoff

Интервьюеры:

Алиса Фиаловски — профессор математики в Институте математики университета г. Печ и в университете Лоранда Этвёша (Венгрия). Её научные интересы — теория Ли, когомологии, теория представлений, деформации, с приложениями к математической физике.

Иоахим Хильгерт — профессор математики в Институте математики Падерборнского университета (Германия). Его научные интересы — гармонический анализ, представления групп Ли, симплектическая геометрия и супермногообразия.

Бент Эрстед — профессор математики на математическом факультете университета в Аархусе (Дания). Его научные интересы — гармонический анализ, представления групп Ли, конформная геометрия, спектральная геометрия.

Владимир Сальников — старший исследователь-математик в отделении математических исследований Люксембургского университета (Люксембург). Его научные интересы — градуированная и обобщённая геометрия, динамические системы и интегрируемость, приложения к теоретической физике и механике.

Золотая эра мехмата (1957–1967) глазами приезжего

А. Б. Сосинский

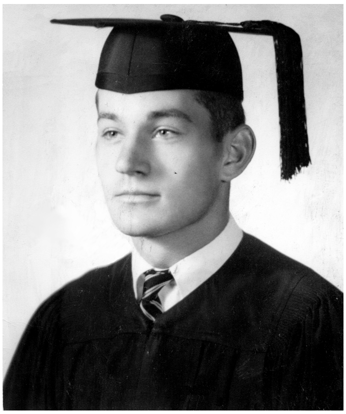
Эти воспоминания я решился предложить российской математической общественности лишь после некоторых колебаний. Конечно, более именитые выпускники и сотрудники мехмата наверняка написали бы историю этого замечательного десятилетия факультета более объективно и содержательно, но я думаю, что необычность моей точки зрения в какой-то мере оправдывает публикацию нижеследующего текста. Дело в том, что я приехал в Россию в 1957 году из другого мира, воспитанный на других, совсем не советских культурных ценностях, и потому на всё смотрел совсем не теми глазами, что другие свидетели мехматской жизни того времени.

Предупреждаю — мои воспоминания очень субъективны, я описываю здесь не кусок истории мехмата, а *историю моего восприятия* обстановки и событий мехмата того времени. Однако я старался не давать прямых оценок событиям и их участникам, а ограничиваться описанием фактов так, как я их тогда воспринимал.

Несколько слов о себе. Я родился в Париже в семье русских эмигрантов. Мой отец, Бронислав Сосинский, бравый кавалерийский офицер Белой Армии в гражданской войне, оказался там в 1923 году. В Париже он встретил мою маму, Ариадну Викторовну Чернову, дочь знаменитого эсера В. М. Чернова, которая приехала туда из Москвы через Прагу примерно тогда же. Они поженились в 1928 году, а я появился на свет в 1937 году. Во время Второй мировой войны мой отец ушёл добровольцем в Иностранный легион французской армии, был ранен, взят в плен, а после освобождения из плена (1943) создал и возглавил движение сопротивления на острове Олерон, куда наше семейство перебралось сразу после начала войны.

В 1947 году мои родители приняли советское гражданство и семья переехала из Парижа — но не в Москву, а в Нью-Йорк, где отец получил работу в секретариате ООН. Там я два года учился в американской средней школе, а потом во французском лицее в Нью-Йорке, который окончил в 1954 году со всяческими отличиями. Уже тогда, в возрасте 14–15 лет, я понял, что буду математиком (разумеется — великим). В 1954 году я поступил в NYU (Нью-Йоркский университет) и проучился там весь 1954/55 учебный год.

В 1955 году вся семья проводила двухмесячный отпуск в СССР, и я впервые оказался в России. В момент приезда мои родители считали, что я останусь в Советском Союзе и продолжу учёбу в Московском университете, но реалии российской жизни, разговоры с друзьями и родственниками, только что освобождёнными из сталинских лагерей, заставили их передумать.



Новоиспечённый бакалавр наук Нью-Йоркского университета, 1957 г.

Вернувшись в США осенью 1955 года, я за два года закончил NYU, получив степень бакалавра наук и искусств (опять со всяческими отличиями) и был рекомендован в аспирантуру в Институт Куранта (и был даже принят туда, после успешного собеседования с Липманом Берсом[1)]). Но не стал поступать. Я не буду здесь рассказывать о моей учёбе в NYU, я расскажу лишь об одном неприятном инциденте, произошедшем во время моей американской учёбы и послужившем своего рода полезной «прививкой» для будущей учёбы в СССР.

Дело было на лекции по экономике. Лектор, вещая о вреде марксизма, сказал, что Маркс пропагандировал принцип «цель оправдывает средства». Я поднял руку и спросил, в каких же это произведениях Маркс этот принцип высказывал (прекрасно зная, что таких произведений нет). Лектор сначала смутился, а потом спокойно сказал, что он мне это объяснит после лекции. Действительно, после лекции он меня подозвал и, убедившись, что народ разошёлся, тихо объяснил, что по существующей инструкции он обязан докладывать администрации о любых «антиамериканских» высказываниях со стороны студентов. Но он это не будет делать, однако просит меня больше не задавать подобных вопросов. Это было в 1956 году, т. е. в конце эпохи маккартизма, и я к этому отнёсся серьёзно — больше таких вопросов не задавал.

В 1956 году я принял советское гражданство (в советском посольстве в Вашингтоне), и в июле 1957 года я отправился в Москву. Вот здесь и начинается мой рассказ...

[1)] Липман Берс (1914–1993) — выдающийся американский математик, уроженец Риги, специалист по комплексному анализу, римановым поверхностям, группам Клейна, создатель теории псевдоаналитических функций.

Учёба на мехмате (1957–1961). Так девятнадцатилетний выпускник NYU, франко-американский молодой человек с русскими корнями, стал студентом мехмата МГУ. Этому предшествовала длительная бюрократическая возня, во время которой я познакомился с министром образования СССР Вячеславом Петровичем Елютиным и ректором МГУ Иваном Георгиевичем Петровским, и после долгих мытарств я был принят на третий курс механико-математического факультета МГУ в порядке перевода из Нью-Йоркского университета.

Это произошло в конце августа 1957 года, в начале «Золотых лет московской математики» [2]. После смерти Сталина (1953 г.) И. Г. Петровский, возглавлявший МГУ с 1951 года, сумел собрать на мехмате (где он возглавлял кафедру дифференциальных уравнений) уникальный коллектив математиков и способствовал поступлению на факультет лучших абитуриентов со всего Советского Союза, независимо от их национальности и социального происхождения. Деканом факультета в тот момент был Андрей Николаевич Колмогоров, отделение математики возглавлял Павел Сергеевич Александров, среди заведующих математических кафедр, кроме упомянутых Петровского, Колмогорова и Александрова, стоит отметить Д. Е. Меньшова, Н. В. Ефимова, А. Г. Куроша, А. А. Маркова. На мехмате работал целый ряд семинаров высочайшего уровня, среди которых выделялся знаменитый семинар Израиля Моисеевича Гельфанда. В это время студентами мехмата были Юра Манин, Яша Синай, Володя Алексеев, Дима Арнольд, Саша Кириллов, Дима Аносов, Митя Фукс, Галя Тюрина, Володя Тихомиров, Эрик Винберг, Саша Виноградов, Игорь Гирсанов, Серёжа Новиков. Думаю, что никогда, ни в каком университете мира, не училось одновременно подобное созвездие математиков. При этом на факультете царила удивительная атмосфера, это был уникальный оазис, существовавший под крылом Петровского почти независимо от внешнего тоталитарного советского мира.

Но тогда я — новоиспечённый студент мехмата, недавно приехавший из США, — всего этого не знал. А мой первый приход на факультет закончился крайне неудачно.

Меня вызвал на собеседование замдекана по учебной работе А. И. Ширшов. Я сразу ему объяснил, что хотя я свободно владею русским разговорным языком, я никогда не занимался математикой на русском, не читал

[2] «Golden Years of Moscow Mathematics» — название книги, выпущенной AMS (американским математическим обществом) в 1993 году. По мнению американских математиков, в этот период мехмат был бесспорно лучшим во всём мире местом для обучения математике. Для этой книги я написал, по заказу AMS, мемуарную статью под названием “In the Other Direction” (см. `https://www.mccme.ru/~merzon/mirror/abs-otherdir.txt.html`); этой статьёй я активно пользовался при написании настоящего текста.

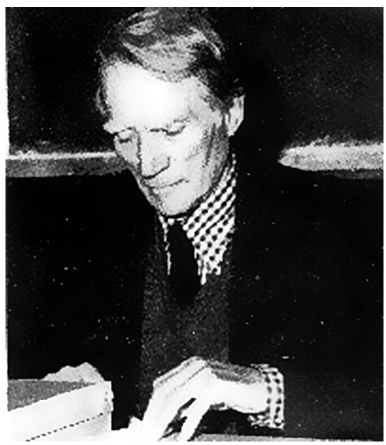
ни одной математической книги по-русски, не знаю русской математической терминологии и поэтому прошу его иметь это в виду во время беседы. И представляете, Ширшов начал с такого вопроса: что такое определитель? Нет чтобы спросить, что такое детерминант! Я ответил, что не знаю. Затем он меня спросил, что такое непрерывная функция. Я задумался. Через несколько секунд тягостного молчания, я решил — это, наверно, continuous function, и (довольно коряво) сформулировал ε-δ определение. Собеседование длилось достаточно долго, я плохо понимал вопросы, отвечал на них неуверенно, в том числе про вещи, которые я прекрасно знал. В конце разговора Ширшов сказал, что я произвёл на него странное впечатление: с одной стороны, я хорошо соображаю и знаю некоторые продвинутые разделы математики, но с другой стороны — у меня огромные лакуны в образовании, и мне будет совсем трудно на третьем курсе. Он мне предложил начать учёбу со второго курса. И я, отчасти из-за свойственной мне тогда застенчивости и неуверенности в себе, согласился.

Лишь лет пять спустя я понял, насколько это было необязательное и неудачное решение. Во-первых, я ещё не понимал иерархическую суть советской системы и не осознал, что я мог бы спокойно отказаться, сославшись на решение министра, которое какой-то там замдекана не в силах отменить. Во-вторых, я не попал на третий курс, где тогда учились Серёжа Новиков, Саша Виноградов, Митя Фукс (мои будущие соратники по науке) и Галя Тюрина, и занимались они именно тем, чем я должен был заниматься — учили алгебраическую топологию, на тот момент возможно наиболее актуальную часть математики, притом самостоятельно, вне рамок какого-либо официального семинара. А на втором курсе не было студентов такого калибра, и наиболее сильные мои будущие однокурсники (Фред Шмелькин, Алик Михалев, Миша Цаленко) занимались неинтересной мне абстрактной алгеброй.

В тот момент я не слишком расстроился, тем более, что обстановка и учёба на втором курсе, где я сразу почувствовал себя комфортно, мне очень понравилась, а мои однокурсники, доброжелательно (и с некоторым любопытством) принявшие как своего приезжего «американца», в своём большинстве разделяли мою любовь к математике и некоторые мои внематематические интересы. Правда, меня удивляла тональность часто задаваемого мне тогда вопроса (обычно тет-а-тет): «А зачем ты приехал в СССР?». Эти слова произносились с такой интонацией, что их смысл следовало понимать так: «Ты вроде неглупый парень, какого чёрта ты сюда приехал?». Я отшучивался от вопроса таким ответом: «По заданию ЦРУ. У меня каждый день прибавляются деньги на счету в швейцарском банке», и в итоге тема была закрыта.

Но, наверно, уместно именно здесь дать честный ответ на этот вопрос. Мой выбор был обусловлен тремя причинами. Во-первых, научными: я понимал (хоть и не до конца), в какой я попаду уникальный математический центр. Мне ещё в 1955 году это пытался объяснить друг нашей семьи Яков Семёнович Дубнов, известный математик, недавно вернувшийся на мехмат из мест не столь отдалённых. Во-вторых — культурных: из трёх культур (русской, французской и англосаксонской), в которых я вырос, сильней оказалась идущая от семьи именно русская культура. И наконец — политических: я тогда наивно полагал, что тупого мужика Хрущёва сменит более молодой, динамичный и демократичный лидер и воцарится «социализм с человеческим лицом». Сейчас, через много лет после резкого окончания «хрущёвской оттепели», такие надежды кажутся форменной глупостью, но нужно помнить, что тогда их разделяло большинство западноевропейской интеллигенции.

Вернёмся к моей учёбе. На обязательных лекциях и занятиях я тогда познавал мало чего нового — лекционный материал мне был в основном известен по курсам в NYU, притом в лучшем исполнении. В частности, скучный и архаичный курс анализа многих переменных Л. А. Тумаркина не выдерживал никакой конкуренции с замечательным курсом Жана ван Хейеноорта[3)] (по прекрасному учебнику Куранта). На лекциях Тумаркина я посылал лектору вежливые записки с указанием на ошибки и пробелы в доказательствах; он на записки не реагировал, и я вскоре перестал ходить на эти лекции. Систематически прогуливал я и другие, но ходил на весьма театральные лекции Куроша по алгебре и на лекции по истории КПСС (благо меня однокурсники предупредили, что их пропускать нельзя). Я ходил на все семинарские занятия по марксистским предметам и держал себя тихо — тут сыграл свою роль опыт, приобретённый в NYU. А вот на семинарские занятия по математике — новый для меня



Ж. ван Хейеноорт

[3)] Jean van Heijenoort, легендарная личность, француз (с голландской фамилией по отцу), в то время математический логик, но до этого защитивший блестящую диссертацию по функциональному анализу, во время войны работавший в США рука об руку с фон Нейманом и Винером над радиолокацией, создатель первого действующего стереофонического проигрывателя, а ещё до этого — личный секретарь и телохранитель Троцкого, был моим первым настоящим учителем.

жанр — я ходил охотно, выполнял все домашние занятия и таким образом по-настоящему научился пользоваться изучаемым материалом.

Конечно, и лекции, и практические занятия принципиально отличались от того, к чему я привык в США. Вместо часовых лекций в небольших аудиториях, которые я посещал в NYU, лекции читались «парами» (2×45 минут) в огромных амфитеатрах (аудитории 16-10 и 16-24) на две сотни студентов с лишним. Практические занятия мне были совсем внове, ничего подобного в NYU не было, решение задач происходило там только при выполнении (письменно) домашних заданий, которые задавались в конце каждой лекции[4)]. Выходить к доске по вызову преподавателя, однако, несмотря на мою застенчивость, мне не было в тягость — я к этому привык ещё в мою бытность французским школьником в лицее.

В свободное от обязательных занятий время я просиживал штаны в читальном зале, самостоятельно изучая топологию, и ходил на спецкурсы и спецсеминары. Я сразу стал постоянным участником знаменитого тогда топологического кружка Павла Сергеевича Александрова, и в рамках этого семинара получил задачу для курсовой работы от известного педагога, слепого математика Алексея Серапионовича Пархоменко. По его указаниям, я за тот учебный год изучил «Польскую топологию» (геометрическую топологию плоских континуумов), не понимая, что это была отмирающая наука. К концу учебного года я написал курсовую работу, в которой доказал, что некоторый класс отображений не может повысить размерность плоского континуума. Эту курсовую Пархоменко заставил меня переписать три или четыре раза, вникая во все детали, тем самым научив меня писать математические работы.

Защита моей курсовой состоялась в торжественной обстановке многолюдного семинара П. С. Александрова и длилась недолго: как только я сформулировал основную теорему, участник семинара В. И. Локуциевский сказал, что результат неверен, ибо есть контрпример американского тополога Р. Д. Андерсона. Представляете, в каком отчаянии будущий «великий математик» покинул аудиторию!

Впоследствии анализ работы показал, что в самом доказательстве не было ошибки (недаром Пархоменко всё проверил), она произошла из-за того, что я сослался на ошибочную лемму Ю. Рожанской, опубликованную в «Докладах Академии наук». И как учит нас математическая логика — из лжи следует всё что угодно!

[4)] В американских вузах, в том числе в NYU, бывают отдельные от лекций практические занятия, но они, как правило, сопровождают лекции по пресловутому Calculus'у (на этих лекциях материал излагается без каких-либо доказательств!) для студентов нематематических специальностей. При этом студента не полагается вызывать к доске, он/она может там оказаться лишь по собственной инициативе.

Кроме защиты курсовой работы, были зачёты и экзамены — тоже в совсем не обычном жанре для американского студента, привыкшего к письменным экзаменам. Наверно, стоит рассказать, как проходил мой самый первый экзамен. Это был экзамен по анализу, принимала его известный мехматский педагог Зоя Михайловна Кишкина. Я гладко ответил по билету, решил какую-то стандартную задачу, а при ответе на дополнительный вопрос у меня возник спор с экзаменатором: Зоя Михайловна грубо ошиблась, сказав, что некоторая функция не равномерно непрерывна, я стал ей вежливо объяснять, что она не права, она рассердилась и стала повышать голос, спор продлился довольно долго, на него обратили внимание присутствующие. При этом я говорил тихо, Кишкина кричала, создавалось впечатление, что я вот-вот получу «неуд», но когда спор закончился (в мою пользу), мои однокурсники удивились, узнав, что я получил «пятёрку». Этот первый успех очень повысил мой авторитет на курсе.

Нужно сказать, что я к этому времени потерял интерес к оценкам, в отличие от времени учёбы во французском лицее и в NYU, когда получение наивысших баллов было основным способом самоутверждения застенчивого не совсем французского школьника и не совсем американского студента. Главным я стал считать не оценки, а достижения в науке.

Я быстро привыкал к новым реалиям, к концу учебного года чувствовал себя как рыба в воде в учебном процессе и в общежитии в «зоне Б» главного корпуса, у меня появились друзья на моём курсе. Быть может, процесс освоения пошёл бы быстрее, если бы я поехал на целину вместе со всем курсом летом 1958 года, но меня оставили в Москве на сборах теннисной команды МГУ и вместе с ней отправили в Киев на Всесоюзные студенческие игры. Впрочем, в результате поездки в моей жизни появилась девушка, правда не с мехмата, а с физфака.

Осенью 1958 года встал вопрос о выборе кафедры, темы исследования и научного руководителя. Без колебаний я выбрал кафедру топологии. Я явно понравился П. С. Александрову, и он дал мне понять, что готов стать моим научным руководителем. Но к этому времени я уже понимал, что мне следует заниматься алгебраической топологией, а Павел Сергеевич безнадёжно отстал от неё (хотя когда-то имел в ней яркие достижения) и завяз в общей топологии, интерес к которой во всём мире ослабевал. И в этот момент в Москве не было ни одного человека, у которого можно было научиться алгебраической топологии, центром интереса лучших математиков мира того времени! Действительно, Л. С. Понтрягин ушёл из топологии в теорию оптимального управления, М. М. Постников на долгие годы прекратил научные исследования и стал писать книги, В. А. Рохлин находился в Иванове и в Москве не появлялся, М. Ф. Бокштейн работал в скромном московском пединституте и лекций по алгебраической топологии там не читал, А. С. Шварц, после стычки с Александровым, оказался в Воронеже.

И тут мне очень повезло: моим научным руководителем и главным Учителем стала Людмила Всеволодовна Келдыш. Во введении я обещал не давать оценок участникам событий и потому вместо потока хвалебных эпитетов ограничусь перечислением фактов. Л. В. Келдыш — специалист по теории множеств и геометрической топологии, доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Института Стеклова, прямая ученица Н. Н. Лузина, сестра президента Академии наук М. В. Келдыша, жена академика П. С. Новикова, мать пятерых детей, из которых двое стали академиками и ещё двое — докторами наук, единственная из учеников Лузина, не позволившая поставить свою фамилию под обвинительными документами против своего учителя во время его травли в зловещем 1937 году, а позднее подписант знаменитого «Письма 99» в защиту Есенина-Вольпина и автор резких публичных высказываний против своего брата и против антинаучных и антидемократических решений Академии наук.

Людмила Всеволодовна, как и Александров, уже не успевала следить за быстрым развитием алгебраической топологии, но, в отличие от него, требовала от своих учеников, чтобы они это делали. Под её руководством я как бы рассчитался за свой провал на защите курсовой работы, построив сложный пример монотонно-открытого отображения, повышающего размерность, в некотором смысле более сильный, чем тот самый пример Андерсона, из-за которого та курсовая провалилась. Я каждую неделю ходил на небольшой семинар Людмилы Всеволодовны в Институте Стеклова. Там я подружился с другими её учениками — Алексеем Чернавским, Лизой Сандраковой и Геной Зуевым. С Зуевым, который был слепым, я написал свою единственную (до 2012 года) совместную научную работу.

Но большинство своих друзей я приобрёл не в помещениях, где проводились семинары и занятия, а на свежем воздухе — в турпоходах, на футбольных и баскетбольных площадках, на горнолыжных склонах.

Особо хочется сказать о спортивном туризме. Тогда это было массовое увлечение студентов и аспирантов естественных факультетов. Пешие походы в лесах Подмосковья или по горам Кавказа, байдарочные походы по «белой воде» на Урале, зимние лыжные походы на Валдае или на Кольском полуострове дарили новые впечатления будущим учёным, в какой-то мере компенсировали невозможность вырваться за пределы железного занавеса. Турклуб МГУ был активным организмом, намного живее официозной комсомольской организации.

Справа налево — Ю. Чаповский, Г. Тюрина, Е. Мочигин, Д. Фукс, И. Гирсанов, А. Сосинский. Фанские горы, 1966 г.

Именно в походах я познакомился с Арнольдом, Фуксом, Тюриной, Кирилловым, Игорем Гирсановым, Толей Кушниренко, Наташей Светловой (впоследствии ставшей женой Солженицына), Мишей Белецким. Результатом зимнего похода в Карпаты 1968–69 года стала моя дружба на всю жизнь с Максимом Хомяковым и женитьба на моей однокурснице Марине Орловой.

Третий, четвёртый и пятый курс прошли спокойно, в развивающейся благоприятной атмосфере того мехмата, где бурлила научная жизнь и людей оценивали в первую очередь по их научному уровню. Эту атмосферу теперь вспоминают с восторженной ностальгией все студенты того времени. Расцветала золотая эра мехмата.

Учёба для меня и моих однокурсников завершалась государственным экзаменом — экзаменом по специальности (проверка математических знаний) и по истории партии (проверка на политическую благонадёжность). К этому времени я вполне освоился с мехматской жизнью во всех её проявлениях, в частности научился хорошо сдавать экзамены по марксизму-ленинизму. При этом я понимал, что по этим предметам совсем не трудно получить высокую оценку — для этого достаточно демонстрировать свою покорность и уважение к преподавателю, партии и правительству и знать совсем небольшой набор сведений, связанных с данным предметом. Но мне в силу характера и воспитания оказалось трудно играть в эту лицемерную игру, и, чтобы получить нужную мне оценку, мне приходилось выучивать и точно пересказывать большой объём материала. Такой пересказ я произносил нейтральным голосом, без пафоса и энтузиазма, но тщательно скрывал своё резко отрицательное отношение к предмету.

На госэкзамене по марксизму мне достались два билета, которые я хорошо знал, особенно второй — о философских воззрениях Ленина, изложенных в его книге «Материализм и эмпириокритицизм» — где он полемизировал... с моим дедом, В. М. Черновым. Я достаточно спокойно и подробно ответил по билету, мой ответ явно понравился «марксистке»-экзаменатору, и казалось, что она вот-вот поставит необходимую мне «пятёрку», но тут в экзамен вмешался профессор мехмата Л. А. Скорняков — его, как и других партийных математиков, партбюро мехмата направило на госэкзамен по марксизму, где он, в роли помощника экзаменатора, должен был следить за тем, чтобы сильных студентов (по математике) не «зарезали» экзаменаторы по марксизму. Однако Скорняков повёл себя прямо противоположным образом: он стал меня подробно расспрашивать о числовых параметрах тогдашнего двадцатилетнего плана развития СССР (например, сколько киловатт энергии будет вырабатываться ежегодно в конце двадцатилетнего срока); на них я отвечал не очень уверенно, и Скорняков явно высказал экзаменаторше своё резко отрицательное мнение о моих ответах. В результате я получил «четвёрку», которая должна была мне закрыть путь в аспирантуру.

Я не знаю, почему Скорняков меня таким образом зарезал, было ли прямое задание от партбюро или других инстанций не пропустить этого сомнительного Сосинского в аспирантуру, или какая-то личная неприязнь, в тот момент меня это не интересовало — я сильно переживал по поводу результата и его возможных последствий для моей дальнейшей жизни. Хочу отметить, что поведение Скорнякова было совершенно нехарактерно для других партийных математиков-экзаменаторов: пару лет спустя Женя Гайдуков, ученик Арнольда, мне рассказал, как А. А. Марков заставил экзаменатора по марксизму поставить ему «пятёрку» на госэкзамене, хотя ответ его был на самом деле очень слабым.

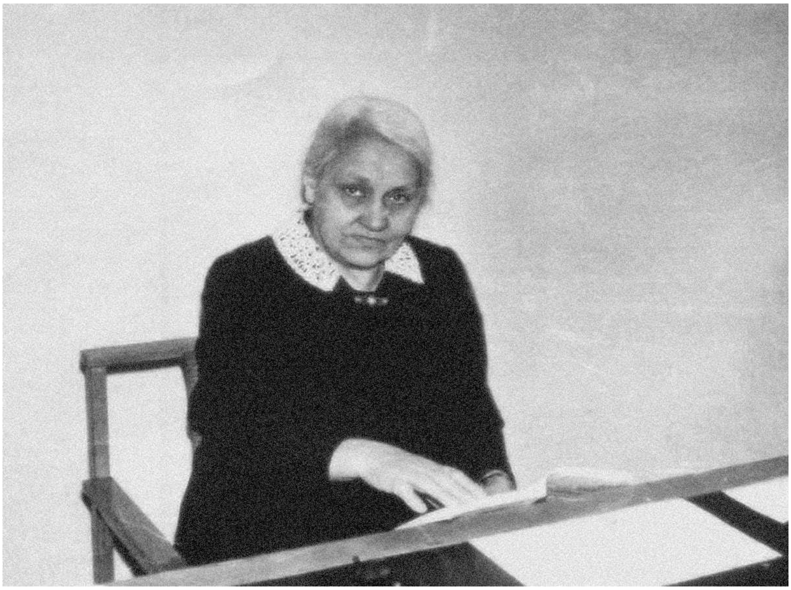
Но в аспирантуру я всё же был рекомендован кафедрой, аспирантские экзамены (в том числе по марксизму) я успешно сдал, так что мои мехматские студенческие годы завершились на мажорной ноте. Я глубоко благодарен Павлу Сергеевичу Александрову, который сумел пробить мне дорогу в аспирантуру, хотя я не был его прямым учеником и моё, как тогда говорили, «общественное лицо» было достаточно сомнительным. Но такова тогда была ситуация на мехмате — Александров обладал достаточным авторитетом и силой, чтобы отбирать в аспирантуру исключительно за математические заслуги.

Ещё одно обстоятельство, связанное с поступлением в аспирантуру в 1961 году и характеризующее рассвет золотой эры мехмата, следует упомянуть. За несколько дней перед «распределением» (своеобразным торгом между выпускниками и различными организациями: вузами, академическими и не академическими институтами, который заканчивался принудительным направлением на работу как минимум на два года) стало известно, что закрытые институты КГБ будут активно участвовать в этом процессе и, в частности, собираются забрать себе всех выпускников, рекомендованных в аспирантуру. В это время Николай Владимирович Ефимов был деканом мехмата, и ему удалось (наверняка не без помощи Петровского) защитить выпускников, рекомендованных в аспирантуру, от попадания в засекреченные институты. То, что Ефимов и Петровский оказались способными этого добиться, — ещё одна черта той золотой эпохи мехмата.

Немного о политике. Коммунистическая политика, конечно, влияла тогда на мехматскую жизнь, но до 1969 года не так сильно, как на других факультетах. В настоящей статье я не хочу рассказывать, как приехавший с Запада студент, а затем аспирант реагировал на различные проявления этой политики, будь то курсы марксизма-ленинизма и истории партии, роль комсомольской и партийной организации и КГБ, работа зимой на овощных базах и осенью на «картошке», распределение студентов по окончании учёбы, отбор в аспирантуру и на мехматские преподавательские ставки. Про себя скажу лишь, что я тщательно избегал конфликтов с советской и партийной властью и при необходимости шёл на уступки. Так, в конце третьего курса, против веления совести, я вступил в комсомол, когда мои друзья мне объяснили, что иначе у меня не будет никаких шансов поступить в аспирантуру.

Впрочем, совсем без политики в этом рассказе не обойтись, но о ней — позже.

Аспирантура (1961–1965). В первых числах октября 23-летний бакалавр NYU и дипломник МГУ оказался аспирантом кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского университета.



Людмила Всеволодовна Келдыш

И я сразу направился в «Стекловку» к своему научному руководителю Людмиле Всеволодовне Келдыш, чтобы обсудить тему будущей диссертации. Она сидела за своим письменном столом, как всегда одетая в чёрное платье с простым белым кружевным воротничком (см. фото). Поздравив меня с поступлением в аспирантуру, она сразу стала обсуждать тему моих дальнейших исследований. Её предложение меня удивило.

Людмила Всеволодовна мне объяснила, что моя (уже опубликованная) большая работа о монотонно-открытом отображении, повышающем размерность, вполне «диссертабельна», и потому я нахожусь в очень выгодной ситуации — я имею возможность три года работать не опасаясь неудачи. Она предложила мне трудную задачу, известную как «проблема Хопфа»: может ли нульмерное открытое отображение повысить размерность? Я с энтузиазмом взялся за работу, то придумывая изощрённые геометрические конструкции (построение примера), то изобретая хитрые инварианты (доказательство, что таких примеров нет). Ни то ни другое к успеху не приводило.

Кроме работы над решением этой задачи, я активно участвовал в семинаре Келдыш, часто делая там доклады по текущим работам (в основном американским) по геометрической топологии. Среди этих работ я с удивлением обнаружил в «Annals of Mathematics» статью Германа Глюка. Её автор мне был хорошо знаком — он учился вместе со мной в пятидесятые годы в NYU, и мы с ним подружились, играя в теннис за сборную университета и обсуждая наши занятия математикой. Находясь за «железным занавесом», я не имел возможности с ним связаться, но следил за его публикациями. Тридцать пять лет спустя, когда мы снова встретились в США, я узнал, что он тогда тоже следил за моими работами и даже написал мне письмо (которое, разумеется, до меня не дошло).

Семинар Людмилы Всеволодовны был небольшим, кроме меня постоянными участниками были Алёша Чернавский, Миша Штанько, Лиза Сандракова, в разное время в нём участвовали Серёжа Самборский, Серёжа Матвеев, Хайнер Цишанг (из Германии), Валентин Поэнару (из Румынии) и другие.

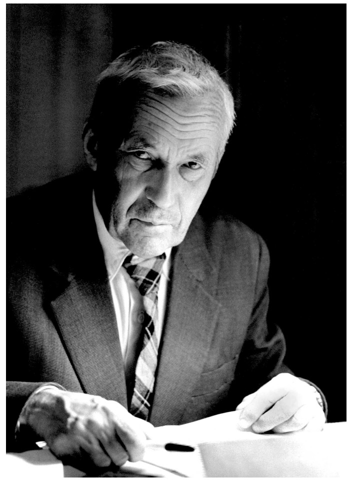
Параллельно семинару, по инициативе Чернавского, были организованы для постоянных участников неформальные курсы интенсивного самообучения, где мы друг другу рассказывали, так сказать, «всю новейшую математику», в основном за городом в каникулярное время.

Расскажу кратко о моей повседневной жизни. Ещё на четвёртом и пятом курсе я жил а отдельной комнате в двухкомнатном «блоке» в главном знании МГУ, в «зоне Б». Нарушая правила этого общежития, там же стала жить моя жена Марина. В конце 1960 года у нас родился сын, и некоторое время мы жили в этой комнате втроём. Чтобы продолжить это полулегальное существование, было необходимо, как мне объяснили, дать небольшую взятку дежурной по этажу. Но я оказался не в состоянии это сделать, и меня выгнали из общежития. Мы тогда переехали к моей тёще, где бывший американский студент познал прелести жизни в московской коммунальной квартире. Лишь в начале 1963 года мы сумели купить двухкомнатную кооперативную квартиру на Юго-Западе Москвы, тем самым удовлетворительно решив вопрос о месте проживания.

В аспирантские годы началась моя преподавательская деятельность. Тогда на мехмате аспирантов привлекали к проведению семинарских занятий на младших курсах, видимо для того, чтобы оценить их педагогические способности, наличие которых могло оказаться существенным, если рассматривалась возможность оставить человека на кафедре на ассистентской ставке по окончании аспирантуры. Так аспирант, который за пять лет до этого не имел ни малейшего представления о том, что такое семинарские занятия на мехмате, стал вести там упражнения по аналитической геометрии, а потом и по линейной алгебре.

Однако гораздо интереснее, чем преподавание на мехмате, оказалась работа школьным учителем в ФМШ № 18, специализированной школе-интернате для иногородних школьников двух последних классов. Но об этом отдельный рассказ.

Колмогоровский интернат. Я впервые увидел Андрея Николаевича Колмогорова в 1958 году. Он читал лекцию по теории информации на первом этаже главного здания в аудитории 01 (крупнейшей учебной аудитории МГУ) при огромном скоплении народа. Обстановка на лекции и сам Колмогоров произвели на меня сильное впечатление, но меня не заинтересовала ни шенноновская теория информации, ни полузапрещённая кибернетика, о которых на лекции шла речь.



Андрей Николаевич Колмогоров

Познакомился я с Колмогоровым только пару лет спустя на одной из знаменитых «топологических прогулок», организованных П. С. Александровым, где после купания в ледяном водохранилище (дело было в декабре) я сдавал Павлу Сергеевичу его спецкурс по комбинаторной топологии (такая неформальная устная сдача экзаменов, совсем не похожая на письменные компьютерно проверяемые экзамены в NYU, меня тогда уже не удивляла). Колмогоров слушал мои ответы очень внимательно и даже задал пару вопросов. Видимо, он тогда обратил на меня внимание и вспомнил обо мне, когда набирал преподавателей в школу-интернат.

Физико-математическая школа-интернат ФМШ № 18 начала свою работу в 1963 году в экспериментальном режиме (30 школьников) и заработала на полную мощность в следующем году. Я тогда стал вести занятия по анализу в одном из десятых (предвыпускных, тогда была одиннадцатилетка) классов вслед за лекциями Колмогорова.

Этот класс дал миру несколько выдающихся математиков (Лёня Левин, ныне профессор Бостонского университета, Саша Звонкин, профессор-эмеритус университета Бордо-I, Тарас Лукашенко, профессор мехмата МГУ), и несколько профессиональных математиков высокого класса (В. Дубровский, Е. Полецкий, В. Скляренко, А. Угланов, Ю. Осипов, А. Ендураев). Кроме этих занятий, на которых я впервые ощутил ту радость, которую приносит преподавание математики сильным и мотивированным школьникам и студентам, я вёл, совместно с Колмогоровым, факультативный кружок по решению геометрических задач. На него ходили и неплохо решали задачи будущие академики РАН Юра Матиясевич и Серёжа Матвеев.

Можно сказать, что шестидесятые годы — хрущёвская «оттепель», «шестидесятники», взлёт русской культуры — стали золотой эрой и для Колмогоровского интерната. Собственно говоря, интернат и был явлением культуры, сравнимым, я думаю, по своему уровню и значению с пушкинским лицеем. Наверно, знаменитый бард-шестидесятник, Юлий Ким, который в интернате вёл уроки литературы и обществоведения, думал об этом, когда написал песню, начинающуюся словами

В октябре багрянолистном, девятнадцатого дня...

Директором интерната была Раиса Аркадиевна Острая, удивительная женщина, выпускница ИФЛИ, фронтовик, член партии, преподаватель истории. Она оказалась в сложном положении: с одной стороны, она во многом симпатизировала молодым преподавателям математики, физики, литературы, весьма критично настроенным по отношению к существующему строю, но с другой стороны, как директору школы, ей надо было сдерживать наше необдуманное фрондёрство, из-за которого власти могли устроить «чистку» интерната (и устроили таки, но позже, за временны́ми границами настоящего рассказа).

Помимо учебного процесса, лекций и уроков математики и физики, школьники имели возможность разносторонне развиваться — слушать записи классической музыки с комментарием Колмогорова, участвовать в организованных учителем литературы Галиной Белоцкой вечерах-встречах с писателями (например с опальным поэтом Давидом Самойловым), петь и танцевать в любительских мюзиклах Юлия Кима, читать стихи на вечерах поэзии. Очень активной была и спортивная жизнь: на территории интерната было неплохое футбольное поле, где вместе, а иногда друг против друга, играли школьники и преподаватели; напротив входа в учебный корпус была баскетбольная площадка, пустовавшая только в учебное и ночное время, преподаватели (и я в том числе) нередко водили школьников в небольшие турпоходы по подмосковным лесам.

После курса анализа для школьников, поступивших в интернат в 1964 году, Колмогоров читал им оригинальный курс агебры (примеры групп, колец и полей, теория Галуа над конечным полем), а затем курс логики и теории алгоритмов. Слушая эти лекции, я стал свидетелем рождения последнего великого цикла работ Колмогорова: рассказывая школьникам теорию алгоритмов и задумываясь о том, как преподнести им теорию вероятности, он придумал понятие сложности, теперь носящее его имя. Первыми его последователями в развитии этой науки стали школьники из моего класса, а затем первокурсники мехмата Лёня Левин и Саша Звонкин.

О жизни в интернате, этом уникальном культурном оазисе в ту эпоху, с ностальгией и любовью вспоминают его тогдашние учащиеся и преподаватели. После изначального взлёта, наступил и период упадка, но это уже было в семидесятые годы.

Математический конгресс в Москве (1966 г.). Высшей точкой расцвета мехмата можно считать проведение Международного конгресса математиков в 1966 году. Это была яркая массовая встреча ведущих западных и советских математиков, до того разделённых «железным занавесом». Приезжие математики с энтузиазмом общались со своими советскими коллегами, преодолевая языковый барьер (тогда большинство советских математиков очень плохо владели английским и могли общаться с иностранцами только с помощью доски и мела, и я часто выступал в качестве переводчика при таком неформальном общении). Филдсовский медалист Стивен Смейл впоследствии вспоминал, какое сильное впечатление на него произвело знакомство с математиками моего поколения — Аносовым, Арнольдом, Новиковым, Синаем. Русская математическая школа, уровень обучения на мехмате и в других советских вузах получили заслуженное международное признание.

Для меня конгресс стал возможностью познакомиться с ведущими топологами мира — Джоном Милнором, Стивеном Смейлом, Кристофером Зиманом, Джоном Адамсом — и с математиками других специальностей, в частностью с Адриеном Дуади. К тому же я был рад снова увидеть своего парижского двоюродного брата Егора Резникова, приглашённого докладчика конгресса по секции математической логики. Но конгресс закончился, железный занавес снова упал, почти все ведущие математики (а моего поколения — все) оставались «невыездными». Что касается меня, то я понимал, что никаких шансов оказаться за границей в ближайшие годы у меня нет.

Высшая точка расцвета, как часто бывает, — начало упадка. В стране в 1964 году произошла смена власти, но вместо «тупого мужика Хрущёва» пришёл не «молодой, динамичный демократический лидер» (как я наивно надеялся в пятидесятые годы), а закостенелый рутинёр и циник Брежнев. Публикация в газете «Правда» о примате «принципа партийности в науке», прямо противоречившая идеологической основе мехмата эпохи расцвета («цель науки — поиск Истины»), а затем и приглаженная оценка Сталина в день его девяностолетия не сулили факультету ничего хорошего. Началась «эпоха застоя». Но в 1966 году на мехмате, где деканом оставался Н. В. Ефимов, это ещё не ощущалось.

Ассистент мехмата (1965–1967). Собственно говоря, когда происходил конгресс, я уже был ассистентом механико-математического факультета. Это произошло как-то очень спокойно: на кафедре была одна свободная ставка, Людмила Всеволодовна предложила П. С. Александрову меня на неё взять, тот согласился, а партийная организация, не проявив должной бдительности относительно сомнительного Сосинского (о чём потом ей пришлось пожалеть), не возражала.

К моменту моего зачисления на кафедру моя диссертация ещё не была готова. Дело в том, что проблему Хопфа я так и не решил (она и сейчас остаётся открытой) и на третий год аспирантуры стал заниматься многомерными узлами (т. е. вложениями в евклидово пространства сферы коразмерности два). Я доказал, что любой такой узел представляется в виде связной суммы конечного набора простых (т. е. не разложимых в связную сумму двух нетривиальных узлов). Для доказательства потребовалось использовать довольно серьёзный аппарат алгебраической топологии, и написание окончательного текста заняло много времени. На защите я выступил достаточно удачно, отзывы были хвалебные, и кто-то из членов учёного совета даже предложил признать диссертацию выдающейся. Но Людмила Всеволодовна, со свойственной ей принципиальностью, выступила против, объяснив, что в первоначальном тексте диссертации была серьёзная ошибка (я её устранил перед защитой), замеченная оппонентом, и потому диссертацию нельзя признать выдающейся. А я до сих пор остаюсь благодарным оппоненту, Мейеру Феликсовичу Бокштейну, заметившему ошибку и тут же сообщившему о ней диссертанту.

Работа была пусть и не выдающейся, но хорошей. Её заметил и оценил обычно скупой на похвалы В. А. Рохлин, её заметил и французский математик М. Розенфельд, пригласивший меня на годовую ставку в CNRS в Париж (но когда я принёс письмо с официальным приглашением в иностранный отдел, заведующий отделом просто рассмеялся, и мне стало стыдно за то, что я наивно надеялся на успех).

Мои ассистентские годы прошли спокойно, я не торопясь занимался теорией пространств толерантности, о которой узнал от Зимина на конгрессе, активно работал в семинаре Келдыш, стал регулярно ходить на семинар Гельфанда, научился хорошо вести упражнения по аналитической геометрии и линейной алгебре, продолжал преподавать в колмогоровском интернате и начал заниматься математическими олимпиадами. На факультете я чувствовал себя комфортно, меня в основном считали своим, а не приезжим чужаком.

* * *

Таким образом, русский мальчик, выросший во Франции и в Америке, попав в лучший математический центр мира, стал — нет, не «великим математиком», как он мечтал в детстве, — а математиком-исследователем неплохого класса и хорошим преподавателем.

Ничто тогда не предвещало событий, приведших к трагическому упадку мехмата и к моему вынужденному уходу с факультета, некогда так доброжелательно принявшего этого мальчика в свои ряды. Но это уже совсем другая история...

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ
asossinsky@yandex.ru

Николай Христович Розов

В. М. Тихомиров

20 февраля 2018 года исполняется 80 лет профессору кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, замечательному человеку, члену редколлегии нашего сборника от самого первого выпуска его нынешней серии, Николаю Христовичу Розову.

В 1953 году пятнадцатилетний мальчик Коля Розов стал студентом первого курса мехмата МГУ. Коля всегда очень хорошо учился, на мехмате у него не было ни одной четвёрки. Курс поступления 1953 года был одним из самых сильных во всей истории мехмата. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям читал на этом курсе Лев Семёнович Понтрягин, он же организовал тогда спецсеминар по теории дифференциальных уравнений. На лекциях и на семинаре помощь Понтрягину оказывал Евгений Фролович Мищенко. Несколько студентов курса, в том числе Д. В. Аносов, М. И. Зеликин и Н. Х. Розов, были активными участниками этого семинара. По окончании университета все они стали аспирантами. Научным руководителем Розова стал Е. Ф. Мищенко.

Мехмат в конце пятидесятых и в шестидесятые годы переживал золотую пору своего развития. Для тех, кто тогда был связан с мехматом, это была счастливая пора жизни. Мои светлые воспоминания о той поре неразрывно связаны с моей дружбой с Колей (Николаем Христовичем) Розовым. Наше знакомство произошло около шестидесяти лет тому назад. У нас всегда было очень много точек соприкосновения. В науке нас объединял интерес к теории управления и теории игр. Основной математической специальностью Н. Х. Розова является теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Мне не раз доводилось слушать обзорные доклады Николая Христовича, наполненные глубоким научным содержанием.

Мы много пересекались по общественной линии, ибо Николай Христович на протяжении всех лет был и остаётся активным общественником и администратором. Николай Христович принимал активное участие в организации Международного конгресса математиков в Москве в 1966 году. На протяжении последних двадцати лет Розов является деканом-организатором факультета педагогического образования МГУ и заведующим кафедрой образовательных технологий этого факультета. И вообще, когда на мехмате проводится какое-то мероприятие, обычно в его организационный комитет входит Н. Х. Розов. Мне много приходилось общаться с ним по административным вопросам. И всегда Коля был преисполнен дружеского участия.

Николай Христович Розов — единственный, кто входит в редколлегию журнала «Квант» с момента его создания по настоящее время.

Приведу несколько избранных публикаций Николая Христовича Розова, характеризующих необычайную широту его педагогических и общечеловеческих интересов.

Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Математика для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 2007. (Англ. перев.: *Dorofeev G., Potapov M., Rozov N.* Elementary mathematics. M.: Mir, 1988.)

Драгнев М. В., Жаров М. И., Розов Н. Х. Французско-русский математический словарь. Ок. 25 000 терминов. М.: Руссо, 1994.

Розов Н. Х. Традиции математической олимпиады в Грузии // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 204–205.

Розов Н. Х. Какой будет школьная математика в 2050 году? // Математическое образование. 2010. № 2(54). С. 2–7.

Моисеев Е. И., Розов Н. Х. О Соросовском образовательном журнале // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 5. С. 715–716.

Глейзер Г. Д., Розов Н. Х. Восьмой Международный конгресс по математическому образованию // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 1. М.: МЦНМО, 1997. С. 175–191.

Егоров Ю. В., Розов Н. Х. Пятидесятилетие кафедры дифференциальных уравнений Московского университета // УМН. 1986. Т. 41, вып. 3(249). С. 219–223.

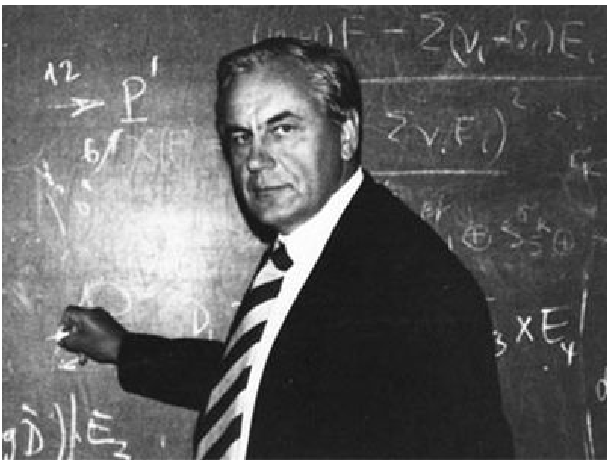
Мы не раз объединялись с Н. Х. Розовым в разговорах о нашей общей любви к Московскому университету и мехмату.

Хочу поздравить своего коллегу и друга с его юбилеем, выразить ему свои самые тёплые и дружеские чувства и пожелать здоровья, бодрости и счастья.

Владимир Михайлович Тихомиров, мехмат МГУ
`vmtikh@googlemail.com`

Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель

Вик. С. Куликов, Г. Б. Шабат



§ 0. Введение

Авторы этой статьи — уже немолодые математики[1], которым в юности выпало счастье начать профессиональную жизнь под руководством Игоря Ростиславовича Шафаревича. Первые темы исследований, предложенные нам нашим учителем, его идеи, его общее понимание математики, его серьёзность в отношении к научной работе — всё это определило содержание и стиль наших занятий на многие десятилетия. В данной статье мы хотим поделиться с читателем частью того, что вынесли из общения с Игорем Ростиславовичем и из чтения и продумывания написанных им текстов.

Выдающийся математик силён не столько способностью решать задачи, поставленные своими предшественниками, сколько непостижимым

[1] Мы дружим с 1967 года, с тех пор как оказались одноклассниками во *Второй школе* в пору её расцвета.

умением задавать ключевые вопросы; в ходе размышлений над ними его последователи развивают науку. К этому же умению примыкает получение результатов (иногда даже не полностью обоснованных), продумывание и обобщение которых привлекает исследователей последующих поколений и определяет направления развития математики. Великие математики прошлого — Эйлер, Гаусс, Риман, Пуанкаре, Гильберт — в высочайшей степени обладали упомянутыми выше свойствами, и Игорь Ростиславович вполне может быть поставлен в их ряд.

Игорь Ростиславович прожил долгую жизнь. Родившись в 1923 году, он умер совсем недавно, в возрасте 93 лет. Ещё больше впечатляет его профессиональное долгожительство: между первой журнальной публикацией в 1943 году ([4]) и последней в 2013 году ([11]) прошло 70 лет! Статьи посвящены весьма разнообразной тематике, и среди них нет ни одной малозначительной. Сколько-нибудь полный обзор математического наследия Шафаревича невозможен в рамках статьи разумных размеров, да и компетенция авторов вряд ли достаточна для такого обзора. Частичный анализ этого наследия проведён в [24] и [2]. Во вторую часть статьи мы включили несколько математических тем, которые затрагивались при нашем личном общении с ним, о которых можно рассказать достаточно широкому кругу математиков. Мы расскажем о нескольких поставленных им проблемах с весьма ограниченных и личных позиций — с точки зрения двух (из многих) его бывших студентов, получавших от научного руководителя темы для курсовых работ и диссертаций. Это ограничение не является принципиальным — Игорь Ростиславович щедро делился с учениками идеями на любой стадии продумывания и, видимо, не проводил границы между темами «для себя» и «для учеников».

К сожалению, Шафаревич имел возможность реализовывать свои идеи через научное руководство студентами лишь в течение трёх с небольшим десятилетий. Его первым учеником был его студенческий друг, Андрей Иванович Лапин, которого Игорь Ростиславович обогнал в «карьере», закончив мехмат за один год. Последними были авторы настоящей статьи: когда мы в 1974 году заканчивали МГУ, Шафаревич был уволен из МГУ за «антиобщественную» деятельность — он входил в созданный А. Д. Сахаровым Комитет защиты прав человека.

Первая часть статьи содержит наши личные воспоминания о Шафаревиче и о некоторых событиях, связанных с ним, свидетелями или участниками которых мы были. Из-за недостатка места мы в данной статье совершенно не касаемся общественно-политических статей и книг И. Р. Шафаревича (см. [12]) и наших разговоров с ним на эти темы, но общение с ним оказало огромное влияние на наше мировоззрение.

§ 1. Воспоминания

1.1. Шафаревич на мехмате МГУ

Наша студенческая юность, конец шестидесятых — начало семидесятых годов прошлого века, пришлась на разгар *застоя*. Возможности для самореализации у советских людей были весьма ограничены, и уход в науку, в частности в занятия чистой математикой, был одной из них. Утечка мозгов ещё только начиналась [2)]. Советские математики работали на родине, в основном — в нескольких больших городах. Концентрация математиков мирового класса в Москве была уникальной и не сравнимой с другими ведущими математическими державами — например, с Францией или США, где сильные математики были распределены по многим городам. При этом мехмат МГУ был единственным местом в Москве, где студенты получали «чистое» математическое образование. На доске объявлений о спецкурсах и спецсеминарах можно было найти имена Арнольда, Гельфанда, Кириллова, Манина, Синая... — глаза разбегались!

Но и на этом блистательном фоне Игорь Ростиславович был одним из самых «модных» профессоров мехмата. Спецкурсы, читаемые им, собирали полные аудитории. Слушателями этих спецкурсов были не только студенты и аспиранты, но и уже вполне состоявшиеся математики. Лекции Шафаревича отличались прозрачностью и ясностью изложения, обилием неформальных примеров и мотивировок, постепенным переходом от простейших ситуаций к более сложным. На его семинарах разбирались работы любого уровня сложности, и их участники, несмотря на *железный занавес*, не чувствовали себя оторванными от мировой науки.

Особую роль в нашей жизни сыграл спецкурс Шафаревича по теории алгебраических чисел, прочитанный им в 1970 году. Перед нами открывалась бездна классической математики, имена Кронекера, Вебера..., полученные ими фундаментальные результаты и остающиеся открытыми проблемы. Но наибольшее впечатление производил сам лектор, прекрасно владеющий материалом и последовательно, внешне неэмоционально передающий слушателям свою любовь к числам и к структурам, помогающим проникать в их тайны. Мы учились на втором курсе, и нам надо было выбирать научного руководителя; примерно к середине спецкурса сомнения, если и были, то развеялись.

[2)] Она тогда носила гораздо более трагический характер, чем в последующие десятилетия: с уезжающими, например, с нашим замечательным школьным учителем математики И. Х. Сивашинским, прощались навсегда.

1.2. Семинар по алгебраической геометрии

Семинар Шафаревича работал с самого начала шестидесятых годов (и продолжает работу по сегодняшний день, несмотря на уход Игоря Ростиславовича). Обстановка на семинаре была очень демократичной: любой участник, студент он или академик, если что-то не понял или что-то не знал, мог остановить в любой момент докладчика и попросить его пояснить более подробно непонятное место или дать необходимые ссылки.

Семинар работал на мехмате по вторникам на четвёртой паре вплоть до осени 1974 года. Осенью того года работа семинара на мехмате стала невозможной, так как Игорь Ростиславович был уже уволен из МГУ за «антиобщественную» деятельность и каждый раз минут через 15 после начала семинара в аудиторию заглядывал один из заместителей декана (фамилия забыта), прерывал работу семинара и говорил, что Игорь Ростиславович не может находиться в аудитории, так как он уволен. В итоге было решено перенести работу семинара в Стекловку[3], где он существует и по сей день.

В течение нескольких десятилетий мы были участниками этого семинара — слушали чужие доклады, иногда делали свои. Его роль в нашей жизни невозможно переоценить; открытость, уважительное отношение к докладчику в сочетании с требованием *понятности* (Игорь Ростиславович всегда понимал всё) навсегда останутся для нас идеалом сотрудничества математиков разных поколений, интересов и уровней.

Дальше мы будем делиться воспоминаниями по отдельности.

1.3. Воспоминания Куликова

Весной 1971 года, когда надо было выбирать кафедру и научного руководителя, я думал, что попасть в ученики к Шафаревичу будет очень просто, так как в моей «зачётке» были только одни отличные оценки и, кроме того, мой брат Валентин, студент пятого курса, был учеником Игоря Ростиславовича и к тому времени уже был рекомендован им в аспирантуру. Однако всё оказалось не так просто. При встрече Игорь Ростиславович спросил меня, что я знаю из области алгебраической геометрии. На мой ответ, что я слушаю его спецкурс и прочитал первые две главы его книги «Основы алгебраической геометрии», опубликованные в «Успехах математических наук» в 1969 году, он предложил мне сдать экзамен по этим двум главам, который через пару недель я успешно и сдал.

Как научный руководитель, Игорь Ростиславович старался вырастить из своих учеников самостоятельных математиков, способных самим нахо-

[3] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

дить конкретные темы своих исследований. Он никогда не ставил конкретную задачу для курсовых и дипломных работ своим ученикам. Обычно каждый год на протяжении моей учёбы на мехмате мы встречались в начале сентября на кафедре алгебры (ауд. 13-01), я сидел на диване, а он, стоя у небольшой доски, в течение нескольких часов рассказывал о тех теоретико-числовых и алгебро-геометрических проблемах, которые его интересовали в то время. Затем я несколько дней «переваривал» полученную информацию, пытаясь вспомнить всё, о чём рассказывал Игорь Ростиславович. Это было трудно сделать, особенно на третьем курсе, во-первых, из-за недостатка моей «образованности», а во-вторых, его рассказы было практически невозможно конспектировать, сидя на диване. После этих встреч Игорь Ростиславович как бы «забывал» обо мне, но если у меня возникали вопросы или если я хотел сообщить ему о ходе моей работы, то мы по телефону договаривались о встречах, которые затем обычно проходили у него дома. На четвёртом курсе одной из задач, предложенных Игорем Ростиславовичем, была задача исследования свойств $K3$-поверхностей[4]. Результатом моих исследований была курсовая работа, написанная от руки на четырёх листах ученической тетради «в клеточку», в которой доказывалось некоторое утверждение о $K3$-поверхностях. Однако в ночь перед подачей курсовой Игорю Ростиславовичу я заметил, что в доказательстве имеется «дыра», и из-за отсутствия времени переписать текст я только подчеркнул недоказанное место и сделал на полях соответствующую пометку. Через две недели была защита моей курсовой. Рецензентом был А. Н. Тюрин. Мы встретились втроём на кафедре алгебры и «защита» проходила следующим образом. Игорь Ростиславович и я сидели на диване, а Андрей Николаевич, стоя у доски, пытался «заклеить дыру» в моей курсовой. В течение двух часов я убеждал его, что недоказанное утверждение, скорее всего, неверно, и в итоге смог убедить. В результате моя курсовая работа была оценена на «отлично».

Когда в 1974 году встал вопрос о начале времени работы семинара в Стекловке, то было предложено начинать в то же время, что и на мехмате. Однако мне было это крайне неудобно, так как я тогда посещал и семинар В. И. Арнольда по теории особенностей, который тоже работал на мехмате по вторникам на пятой паре. Поэтому участники семинара, соблюдая демократию, решили начинать работу семинара в 11 часов, чтобы я мог успевать на семинар Арнольда. Несколько позже, так как один из активных участников семинара, Ф. А. Богомолов, обычно опаздывал на 15 минут, решили начинать работу семинара в 11:15, а уже в девяностые

[4] Определение $K3$-поверхностей см. в пункте 2.6.

годы было решено начинать в 15:15. Время окончания работы семинара не оговаривалось и зависело от количества материала, который хотел сообщить слушателям докладчик, и от физических возможностей слушателей воспринимать этот материал. Если количество материала было слишком велико, то в семидесятые — восьмидесятые годы прошлого века организовывались выездные сессии либо на даче Ф. А. Богомолова (платформа Семхоз Ярославского направления), либо на даче И. Р. Шафаревича (платформа Турист Савёловского направления).

В конце семидесятых годов в Москву на несколько дней приезжал Д. Мамфорд. Чтобы иметь больше времени для общения с ним, решили отвезти его на дачу Богомолова. Он очень боялся ехать (у него была виза, разрешавшая уезжать из Москвы не далее чем на 20 км, а Семхоз находится на расстоянии в два раза дальше), но мы всё-таки уговорили Мамфорда поехать. Для безопасности одели его в ватник, резиновые сапоги и посоветовали в электричке не разговаривать на английском (русского он не знал), чтобы не привлекать внимания других пассажиров. К сожалению, никто из нас тогда не догадался взять фотоаппарат, чтобы для истории запечатлеть Мамфорда в таком экстравагантном одеянии.

В те же годы мне также пришлось на даче Шафаревича в течение двух дней подробно рассказывать доказательство теоремы о перестройках вырождений $K3$-поверхностей, так как в некоторых работах, появившихся на Западе, утверждалось (безосновательно), что в моём доказательстве якобы имеется какая-то «дыра», и, кроме того, Игоря Ростиславовича очень интересовало, какие из полученных результатов о вырождениях $K3$-поверхностей, определённых над полем комплексных чисел, можно перенести на случай конечной характеристики.

1.4. Воспоминания Шабата

Хотя мой отец и Шафаревич хорошо друг друга знали, моё общение с Игорем Ростиславичем редко выходило за пределы довольно формальных контактов ученика и учителя; тем не менее, я не могу назвать никого другого, кто бы так сильно повлиял на меня.

В феврале 1971 года в возрасте 18 лет я отправился на первую в весеннем семестре лекцию вышеупомянутого спецкурса по алгебраической теории чисел — и вышел с неё с изменившимися взглядами на жизнь. На этой лекции я понял далеко не всё: не хватало математической культуры и базовых знаний. Но у доски я видел не только настоящего мастера, но и человека, *живущего* в мире *настоящей* математики (о внематематической деятельности Игоря Ростиславовича я тогда не знал). До того, поскольку я рос в семье математика, я воспринимал занятия математикой как очень естественный вид творческой деятельности — но лишь один из очень многих возможных; меня в те годы больше всего интересовали литературоведение и театр, и лишь благодаря советской власти я не задумывался о выборе соответствующих профессий. После лекции я уже знал, что постараюсь сделать математику главным делом своей жизни.

Научный руководитель был выбран, и оставалось получить его согласие руководить мной. Опираясь на опыт Куликова, я бегло просмотрел доступную тогда версию «Основ алгебраической геометрии». Затем была назначена встреча с Игорем Ростиславовичем. Но он был совершенно не удовлетворён моими «познаниями»! Так я узнал, что есть огромный разрыв между требованиями мехмата, позволяющими нам, выпускникам Второй школы, без особого труда получать пятёрки, научившись воспроизводить простые доказательства и решать стандартные задачи, — и требованиями Шафаревича. В то лето я впервые по-настоящему напряжённо занимался математикой, прорабатывая «Основы» параграф за параграфом и вдумываясь в многочисленные примеры. Осенью я был вознаграждён за эти труды принятием в ученики Игоря Ростиславовича.

Расскажу ещё об одном эпизоде, связанном с излечением Игорем Ростиславовичем меня от математической поверхностности. На третьем курсе я получил от него задание освоить теорию кэлеровых многообразий по доступному тогда переводу книги А. Вейля. Однажды он спросил меня об успехах, и я с юношеской искренностью пожаловался на то, что в конце книги — *очень громоздкие формулы с тета-функциями*. Игорь Ростиславович смерил меня ледяным взглядом (он вообще не был излишне разговорчив) и переспросил: **«Очень громоздкие?»** Мне стыдно за произнесённую мной глупость до сих пор, но именно со времени того полуминутного разговора я знаю, что тета-функции замечательны и что современный математик должен уметь обращаться с ними не хуже коллег XIX века.

Выбор темы курсовой происходил следующим образом. Игорь Ростиславович спросил меня, чтó, помимо алгебраической геометрии, мне нравится в математике. Я ответил, что в топологии мне нравится теория накрытий и, в частности, конструкция универсальных накрывающих — и этот ответ определил тематику моей работы на десяток лет. Игорь Ростиславович предложил мне заняться универсальными накрывающими комплексных алгебраических многообразий; в случае кривых эта теория была построена в XIX веке (Б. Риманом и несколькими его последователями), а в размерностях $\geqslant 2$ были известны лишь разрозненные примеры. (Главное отличие одномерной теории от многомерной заключается в том, что односвязных комплексно-аналитических многообразий в размерности один имеется всего три, тогда как в высших размерностях их класс совершенно необозрим.)

Меня это предложение вполне устроило — возможные трудности в 18 лет не рассматривались.

Игорь Ростиславович привёл класс примеров (симметрические квадраты кривых), в которых [5] происходит явление, невозможное в одномерном случае: *комплексная алгебраическая поверхность восстанавливается по своей универсальной накрывающей*. Мне было предложено выяснить, насколько это явление типично; точнее: со своей непостижимой интуицией Игорь Ростиславович предположил, что оно очень типично, и мне удалось это предположение подтвердить. Соответствующие результаты были опубликованы в [34] и составили содержание моей кандидатской диссертации.

Хотя в этой области осталось много открытых вопросов, интересующих меня и по сей день, в 80-е годы идеи Белого и Гротендика, которые будут упомянуты ниже, увлекли меня настолько, что я сменил тематику. Игорь Ростиславович прочёл нашу с В. А. Воеводским статью [43], являющуюся первой публикацией по теории детских рисунков [6], и одобрил мой выбор. Один комментарий Игоря Ростиславовича (он подчеркнул: *здесь надо рассматривать ВСЕ вложения алгебраического замыкания* $\overline{\mathbb{Q}}$ *поля рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ *в поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$!) на моём докладе на его семинаре об этой теории был очень важен для дальнейших моих работ и работ моих учеников.

В студенческие годы я занимался альпинизмом, и мне посчастливилось однажды участвовать в особом походе альпсекции МГУ — в нём принял участие 80-летний Борис Николаевич Делоне, учитель Игоря Ростиславовича. Он был очень бодр; у костра он, разумеется, был в центре внимания, рассказывая нам разнообразные истории, в основном весёлые. Потом почти все разошлись по палаткам, а Борис Николаевич, узнав, что в походе участвует ученик его любимого ученика, задержался, и в другом, более серьёзном, тоне говорил об Игоре Ростиславовиче — и как о математике, и как о человеке (в том числе — о трудных походах Игоря Ростиславовича). Б. Н. Делоне — автор классических трудов и по геометрии, и по теории чисел, и Игорь Ростиславович продолжал традиции учителя, всю жизнь изучая скрытые связи между разными разделами математики. В ту незабываемую ночь у костра мне было очень важно почувствовать причастность к математической школе двух выдающихся математиков, родившихся в XIX и XX веках и подтверждающих в своих работах *единство мира*. Остаётся пожелать научным «внукам» Игоря Ростиславовича и в XXI веке продолжать развивать его идеи и идеи его предшественников.

---

[5] За исключением римановой сферы.

[6] Основоположная работа Гротендика [39] не была опубликована до 1997 года.

§ 2. О математическом наследии Шафаревича

2.1. Алгебра и её место среди других разделов математики

При всей широте математических интересов Шафаревич был прежде всего *алгебраистом*. Своё понимание и самой алгебры, и её места среди других разделов математики он с особой ясностью выразил в своей книге [8] «Основные понятия алгебры». Уникален адресат этой книги: её с интересом могут читать и младшекурсники-математики, и учителя математики (которым мы бы это настоятельно порекомендовали), и учёные-нематематики, интересующиеся математикой. Правда, читателям всех этих категорий придётся пропускать некоторые тщательно разобранные примеры, поскольку они адресованы математикам-профессионалам, причём на весьма современном и высоком уровне! Однако читатель любого уровня, прочитавший и продумавший эту книгу, углубит своё понимание алгебры и математики в целом.

Приведём несколько цитат из этой книги:

Что такое алгебра? Является ли она областью математики, методом или психологической установкой?

Алгебра играет приблизительно ту же роль, что и язык или письменность при контакте человека с внешним миром.

Алгебро-геометрический дуализм занимает существенное место в этой книге. При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру — с музыкой.

Любые объекты, являющиеся предметом математического исследования, — кривые и поверхности, отображения, симметрии, кристаллы, квантово-механические величины и т. д. — могут быть «координатизованы» и «измерены». Однако для такой координатизации «обычных» чисел далеко не достаточно.

Одна из целей книги [8] — широкое обсуждение возможностей аксиоматических обобщений понятий числа. Это обсуждение начинается с *теории полей*; в согласии с приведёнными цитатами, эта теория — центральная в алгебре: в ней аксиоматизированы **четыре действия арифметики**.

2.2. Теория полей

В классических полях — таких как поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, поле $\mathbb{R}$ вещественных и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел — наряду с алгебраическими присутствуют и другие структуры, такие как топология, норма, а в первых двух — порядок. Первая работа Шафаревича [4] была посвящена изучению соотношений между этими дополнительными структурами. Удивительно, что она, опубликованная в 1943 году, была замечена мировым сообществом. В работе [41], опубликованной в 1948 году, известный канадско-американский математик И. Капланский пишет об *элегантном* результате Шафаревича, в котором на основе подходящим образом введённого понятия *ограниченного множества* охарактеризованы топологические поля, допускающие определение топологии через нормирование. В дальнейшем, защитив по этой тематике кандидатскую диссертацию в 19 лет, Игорь Ростиславович к ней не возвращался. Однако в теорию полей он в дальнейшем внёс огромный вклад; отечественное признание и мировую известность Шафаревичу принесли его результаты по *обратной задаче теории Галуа*.

Задача классификации (здесь и далее — с точностью до *изоморфизма*) «разумных» классов полей [7] обладает двумя важными преимуществами по сравнению с задачами классификации многих других алгебраических систем.

Во-первых, все поля из рассматриваемого класса, как правило, вкладываются в некоторое «универсальное» поле (обычно алгебраически замкнутое). Так, все *поля алгебраических чисел*, т. е. *конечные* расширения поля рациональных чисел [8] $\mathbb{Q}$, изоморфны подполям алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ поля $\mathbb{Q}$, а все поля рациональных функций на всех алгебраических кривых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или, что то же самое, поля мероморфных функций на компактных римановых поверхностях) — подполям *поля формальных рядов Пюизо*, т. е. (алгебраически замкнутого) поля [9] $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{C}((z^{1/N}))$, где $\mathbb{C}((u)) := \{\sum_{n \gg -\infty} c_n u^n \mid c_n \in \mathbb{C}\}$, с естественно определяемыми операциями; под $\sum_{n \gg -\infty}$ понимается сумма по всем неотрицательным и конечному множеству отрицательных целых чисел n.

Во-вторых, в любом поле имеется *самое маленькое подполе*, которое можно определить, например, как пересечение всех подполей. Это поле изоморфно одному из полей: $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \ldots, \mathbb{Q}$, где $\mathbb{F}_p$ — поле из простого числа p элементов, т. е. знакомое всем поле вычетов по модулю p.

---

[7] Разумеется, задачи классификации полей реалистичны лишь при каких-либо ограничениях на мощность рассматриваемых полей, на мощность *порождающих* их множеств или на тип расширений.

[8] Конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ состоит из чисел, которые получены из рациональных чисел и корней конечного числа многочленов с рациональными коэффициентами посредством четырёх действий арифметики. Так, например, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

[9] В рамках обсуждаемой ниже аналогии между полем $\mathbb{Q}$ и полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$ полю алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$ соответствует не всё поле формальных рядов Пюизо, а его подполе $\overline{\mathbb{C}(z)}$, состоящее из разложений в ряды Пюизо *алгебраических* (многозначных) «функций» от z, т. е. рядов $w = \sum_{n \gg -\infty} c_n z^{n/N}$, удовлетворяющих соотношениям $F(z, w) = 0$, где $F(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ — это многочлены, степень $\deg_w F$ по w которых больше 1 и $\partial F / \partial z \not\equiv 0$.

В силу приведённых двух замечаний задача классификации полей распадается на различные задачи классификации *промежуточных* полей, т. е. описания (частично упорядоченного включением) множества

$$[\Bbbk, \mathbb{K}] := \{\mathcal{K} \mid \Bbbk \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathbb{K}\}$$

при фиксированной паре полей $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$.

Далее в случае группы автоморфизмов поля $\Gamma \subseteq \operatorname{Aut} \mathbb{K}$ будет использоваться стандартное обозначение $\mathbb{K}^\Gamma := \{x \in \mathbb{K} \mid \Gamma \cdot x = \{x\}\}$ для множества элементов поля, неподвижных относительно действия этой группы. Например, $\mathbb{C}^{\{\mathrm{id}_\mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}\}} = \mathbb{R}$.

Если для пары $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ существует такая группа $\Gamma \subseteq \operatorname{Aut} \mathbb{K}$, что $\Bbbk = \mathbb{K}^\Gamma$ (такие расширения называются *нормальными*), то при некоторых дополнительных предположениях описание множества $[\Bbbk, \mathbb{K}]$ почти сводится к описанию подгрупп группы Γ. Точнее, на группе Γ обычно вводится топология (дискретная в случае конечных групп), и речь идёт о *замкнутых* подгруппах.

В любом случае, введя (частично упорядоченное включением) множество подгрупп

$$[\{1\}, \Gamma] := \{\text{замкнутые подгруппы } G \subseteq \Gamma],$$

можно определить (обращающее порядок) *соответствие Галуа*

$$\mathsf{gal}\colon [\{1\}, \Gamma] \longrightarrow [\Bbbk, \mathbb{K}]\colon G \mapsto \mathbb{K}^G,$$

и при упомянутых выше дополнительных предположениях это соответствие является биекцией.

Предположения заведомо выполняются в центральном для теории чисел случае, когда $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{Q}}$, и $\Gamma = \operatorname{Aut} \overline{\mathbb{Q}}$. Таким образом, классификация полей алгебраических чисел (и, тем самым, корней многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами) сводится к изучению замкнутых подгрупп конечного индекса одной-единственной группы $\operatorname{Aut} \overline{\mathbb{Q}}$.

Изучение *всех* расширений данного поля в значительной степени сводится к изучению его *нормальных* расширений. В случае $\Bbbk = \mathbb{Q}$ мы приходим к задаче описания нормальных подгрупп конечного индекса в $\operatorname{Aut} \overline{\mathbb{Q}}$.

Эта задача называется *обратной задачей теории Галуа*. Она не решена полностью и по сегодняшний день, и именно в неё Шафаревич довольно молодым человеком внёс вклад, поставивший его в ряд ведущих мировых специалистов по алгебраической теории чисел.

Задача имеет две традиционные переформулировки.

- Каковы конечные факторгруппы группы $\operatorname{Aut} \overline{\mathbb{Q}}$?
- Какие конечные группы реализуются как группы Галуа расширений поля $\mathbb{Q}$?

Предположительный ответ на оба вопроса — *все*. Доказательство этой гипотезы современной математике недоступно, и удаётся продвигаться в ней, лишь постепенно расширяя класс конечных групп, для которых обратная задача теории Галуа разрешима.

В случае *коммутативных групп* положительный ответ был известен уже в девятнадцатом веке. Требуемые поля получаются присоединением к $\mathbb{Q}$ подходящих корней из единицы.

Для *p-групп*, т. е. групп порядка p^k при простом p и натуральном k, положительный ответ был получен Шафаревичем в работе [5]. Работа была удостоена премии Московского математического общества, но это достижение оказалось лишь промежуточным.

Для *разрешимых групп* положительный ответ был получен Шафаревичем в работе [9], удостоенной Ленинской премии 10).

В связи с теорией Галуа в школе Шафаревича произошло ещё одно весьма важное событие, сыгравшее важную роль в математической жизни одного из авторов (ГШ). А именно, ученик Шафаревича Г. В. Белый в работе [22], посвящённой реализации некоторых серий групп Шевалле как групп Галуа расширений некоторых круговых полей, в качестве вспомогательной леммы привёл замечательный критерий определяемости алгебраической кривой над полем алгебраических чисел: *определённая над* $\mathbb{C}$ *алгебраическая кривая имеет модель* 11) *над* $\overline{\mathbb{Q}}$ *тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде накрытия проективной прямой, разветвлённого всего в трёх точках*. Этот результат произвёл сильнейшее впечатление на А. Гротендика, который использовал его для наглядного описания всех кривых над числовыми полями с помощью вложенных графов, разбивающих компактные ориентированные поверхности на клетки. В «самиздатской» 12) работе [39] Гротендик назвал такие графы *детскими рисунками*; разумеется, такие объекты под несколькими другими названиями изучались и до него, но Гротендик обнаружил совершенно неожи-

10) Существует миф об «ошибке» в статье [9]. Действительно, она содержала не вполне корректную ссылку на работу [33], хотя цитированных результатов из [33] было по существу достаточно для рассуждений в [9]. Однако в работе [6] (написанной Шафаревичем в контакте с Ж.-П. Серром, одним из самых «строгих» математиков своего поколения) все необходимые уточнения были произведены. Удивительно, что и после публикации статьи [6] некоторые авторитетные математики продолжают распространять мнение о том, что в доказательстве теоремы Шафаревича о разрешимых группах что-то не так.

11) Говорят, что алгебраическая кривая *имеет модель над полем* $\mathbb{k}$ (т. е. *определена над полем* $\mathbb{k}$), если поле рациональных функций на ней изоморфно полю рациональных функций на неприводимой плоской кривой, заданной уравнением с коэффициентами в $\mathbb{k}$.

12) Работа [39] была опубликована в 1997 году, через 13 лет после её появления, а до этого циркулировала в виде ксерокопий препринта, в том числе в Москве.

данную *связь* между арифметико-геометрическими и комбинаторно-топологическими объектами — точнее, эквивалентность подходящим образом определённых *категорий*[13)].

Эта эквивалентность определяет действие абсолютной группы Галуа $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}})$ на детских рисунках и, таким образом, даёт уникальную возможность *визуализации* абсолютной группы Галуа. Некоторое время после появления теории детских рисунков многие математики надеялись, что с её помощью будет решена обратная задача теории Галуа; однако за прошедшие десятилетия этого не произошло, несмотря на довольно интенсивную работу. По мнению авторов, результаты этой работы показывают, что на данный момент мы научились понимать в комбинаторно-топологических терминах действие лишь весьма специальных и, как правило, небольших групп; для общих же конечных групп требуется дальнейшее развитие теории. С её современным состоянием можно познакомиться по нескольким обзорам, например по [42].

2.3. Числа и функции

Аналогия между числовыми и функциональными кольцами известна с XIX века; Шафаревича эта аналогия вдохновила на первый из результатов, принёсших ему мировое признание и поставивших его в ряд классиков нашей науки.

Хотя речь идёт о весьма продвинутой математике, Игорь Ростиславович умел объяснять фундаментальное сходство между числами и функциями для широкой публики. В книге [8] он пишет: *…Коммутативное кольцо очень часто может быть интерпретировано как кольцо функций на множестве, «точки» которого соответствуют гомоморфизмам исходного кольца в поля. Исходным примером является кольцо $\Bbbk[V]$, где V — аффинное многообразие*[14)] *над полем $\Bbbk$, а с него геометрическая интуиция распространяется на более общие кольца. Таким образом, концепция, согласно которой «всякий геометрический объект координатизируем некоторым кольцом функций на нём», дополняется другой, согласно которой «любое кольцо координатизирует какой-то геометрический объект».*

Для Шафаревича приведённая пара концепций играла исключительно важную роль, позволяя как применять интуицию выдающегося алгебраического геометра к трудным теоретико-числовым задачам, так и ставить

[13)] Читатели, незнакомые с понятием категории, могут ограничиться представлением о том, что обсуждаемые объекты восстанавливаются друг по другу.

[14)] То есть множество решений системы полиномиальных уравнений с коэффициентами из поля $\Bbbk$.

алгебро-геометрические вопросы, отталкиваясь от теоретико-числовых аналогий. Мы здесь ограничимся иллюстрацией лишь одного применения Шафаревичем геометрической интуиции к теории чисел, кратко рассказав об упомянутом выше результате, принёсшем ему мировую известность — обнаружение *общего закона взаимности* в работе [7]; об алгебро-геометрических проблемах теоретико-числового происхождения мы поговорим ниже.

Законы взаимности имеют многовековую историю; они начинались с элементарных, чуть ли не развлекательных (см. название книги [35], первой в европейской теории чисел) арифметических наблюдений, в которых очень трудно было бы увидеть алгебро-геометрическое содержание.

В XVII веке Пьер Ферма интересовался представлением натуральных чисел в виде сумм двух квадратов. Простые делители таких чисел обладают некоторыми бросающимися в глаза свойствами, которые особенно ярко проявляются в важном частном случае (к которому с помощью *гауссовых чисел*, появившихся в XIX веке, сводится общая теория) простых делителей чисел вида n^2+1. Действительно, $1^2+1=2$, $2^2+1=5$, $3^2+1=2\cdot 5$, $4^2+1=17$, $5^2+1=2\cdot 13$ и т. д. — в ряду простых делителей этих чисел встречается только 2 и простые числа, дающие остаток 1 при делении на 4; это было замечено Ферма и век спустя доказано Эйлером. Введя конечные поля $\mathbb{F}_p$, этот факт можно переформулировать так: *уравнение* $x^2=-1$ *разрешимо в поле* $\mathbb{F}_p$ *для простого* p *тогда и только тогда, когда* $p=2$ *или* $p\equiv 1 \mod 4$. С помощью *символа Лежандра*

$$\left(\frac{c}{p}\right) := \begin{cases} 1, & \text{если } x^2=c \text{ разрешимо в } \mathbb{F}_p, \\ -1, & \text{если } x^2=c \text{ неразрешимо в } \mathbb{F}_p, \end{cases}$$

наблюдение Ферма можно сформулировать для нечётного простого p в виде

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2};$$

в последующие столетия эта формула неуклонно обобщалась.

Квадратичный *закон взаимности* устанавливает далеко не очевидную связь между $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$: как заметил Эйлер и доказал Гаусс[15)], для нечётных простых p и q

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Этот результат можно интерпретировать как связь между разложимостью многочлена x^2-p в поле $\mathbb{F}_q$ и разложимостью x^2-q в поле $\mathbb{F}_p$ (разумеется,

[15)] Точнее, Гаусс, называвший квадратичный закон взаимности *золотой теоремой*, в течение своей долгой жизни привёл 8 существенно разных доказательств.

в обоих случаях имеются в виду редукции многочленов по соответствующим модулям). В такой форме закон взаимности был распространён на некоторые многочлены 3-й и 4-й степени самим Гауссом и Эйзенштейном, а на циклотомические многочлены — Куммером. Сравнительно современный обзор соответствующих результатов можно найти в [47].

В дальнейшем выяснилось, что для получения обобщённых законов взаимности важны не столько многочлены, сколько расширения поля $\mathbb{Q}$, получаемые присоединением их корней; существенным ограничением, не преодолённым и на сегодняшний день, оказалось условие *абелевости* этих расширений, т. е. коммутативности соответствующих групп Галуа. Именно в этом контексте работа И. Р. Шафаревича [7] завершила трёхвековой цикл исследований выдающихся математиков.

Квадратичный закон взаимности оказался частным случаем общего, при $n=2$, а поле $\mathbb{Q}$ оказалось возможным заменить на поле алгебраических чисел Ω, содержащее все корни n-й степени из единицы. Символ Лежандра $\left(\dfrac{p}{q}\right)$, принимающий значения ± 1, стал интерпретироваться (при переходе от уравнений вида $x^2=c$ к уравнениям вида $ax^2+by^2=1$) как частный случай *символа норменного вычета* $\left(\dfrac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, определённого для $\alpha,\beta\in\Omega$ и для простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца целых поля Ω и принимающего значения в группе корней n-й степени из 1. Центральным результатом теории[16] является *формула произведения*

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)=1,$$

и именно в её осознании сходство между числами и функциями играет решающую роль[17]. Как пишет сам Шафаревич в [7], *идея о глубокой аналогии между полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций была подготовлена работами Гаусса и Куммера и впервые вы-*

[16] Даже понимание точных *формулировок* упомянутых результатов требует довольно глубоких знаний алгебраической теории чисел; обзор для неспециалистов можно найти в [45]. Современное изложение теории см. в [31].

[17] При $\Omega=\mathbb{Q}$ и $n=2$ символ норменного вычета превращается в *символ Гильберта*, который определяется формулой

$$(a,b)_p:=\begin{cases}\ \ 1, & \text{если уравнение } ax^2+by^2=1 \text{ разрешимо в } \mathbb{Q}_p,\\ -1 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Для $a,b\in\mathbb{Q}^\times$ формула произведения принимает вид $\prod_p(a,b)_p=1$, где произведение берётся по множеству простых чисел p, к которому добавлен символ ∞ (подразумевается $\mathbb{Q}_\infty:=\mathbb{R}$); произведение имеет смысл, поскольку в нём лишь конечное число сомножителей отлично от 1.

сказана, видимо, Кронекером. Было замечено, что простые идеалы в теории алгебраических чисел играют такую же роль, как точки римановых поверхностей в полях алгебраических функций, простым делителям дискриминанта соответствуют точки ветвления римановой поверхности и т. д. Далее Шафаревич пишет о желательности перенесения в теорию алгебраических чисел результатов теории абелевых интегралов и чуть-чуть «поправляет» Гильберта, указав, что формула произведения *является аналогом не интегральной формулы Коши, а теоремы... о сумме вычетов абелева дифференциала*. Это простое замечание приводит Шафаревича к одной из ключевых идей работы:

символ норменного вычета $\left(\dfrac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ *аналогичен вычету абелева дифференциала* $\alpha \cdot \mathrm{d}\beta$ *в точке* $\mathfrak{p}$.

Работа [7] обладает характерным для наиболее известных работ Шафаревича свойством: завершая некоторый этап классических исследований, она содержит понятия и идеи, которые будут развиваться многими математиками в работах будущего.

2.4. Теоремы конечности

В рамках аналогии, которой был посвящён предыдущий раздел, Игорь Ростиславич в [10] сформулировал алгебро-геометрический аналог теоремы Эрмита [40], утверждающей конечность числа полей алгебраических чисел с заданным дискриминантом (современное доказательство см. в [23]). Формулировка Шафаревича в [10] такова: *Конечно ли число расслоений*[18] *на кривые рода* $g > 1$, *если фиксирована базисная кривая и множество критических точек расслоения?* (В дальнейшем эти точки будут называться точками *плохой редукции*). Шафаревич получил утвердительный ответ на свой вопрос в некоторых частных случаях и отметил, что *доказательство в общем случае должно быть значительно труднее... аналогично тому как конечность числа расширений с заданными точками ветвления поля алгебраических чисел доказывается гораздо труднее, чем теорема Эрмита в теории алгебраических чисел* — мы видим аналогию между числами и функциями в действии! Предположение оказалось правильным: гипотеза была доказана лишь два десятилетия спустя в результате напряжённой работы ряда выдающихся математиков, многие из которых принадлежали к школе Шафаревича.

Гипотеза Шафаревича сыграла решающую роль в доказательстве *гипотезы Морделла* — одном из центральных результатов математики два-

[18] Здесь исключаются из рассмотрения *изотривиальные семейства*, т. е. становящиеся тривиальными после подъёма на конечное накрытие базы.

дцатого века, сформулированной Л. Морделлом в 1922 году и доказанной Г. Фальтингсом в 1983 году. Гипотеза формулируется просто: *пусть дана произвольная алгебраическая кривая над числовым полем*; *если её род равен* 1, *то группа рациональных точек на ней конечно порождена*, *а если её род больше* 1, *то множество рациональных точек на ней конечно*. Однако доказательство гипотезы Шафаревича растянулось на два десятилетия и потребовало огромных усилий, а также развития многих понятий, которые оказались важны и полезны сами по себе.

Почти одновременно с [10] появилась работа [30] одного из первых учеников Шафаревича Ю. И. Манина, в ней был установлен *функциональный аналог* гипотезы Морделла; хотя напрямую в доказательстве гипотезы Морделла этот результат не использовался, психологически он был очень важен: после довольно продолжительного затишья стали появляться недоступные ранее теоремы конечности; кроме того, это был один из первых результатов несомненно мирового класса, полученных в Москве учениками Шафаревича.

Далее ученик Шафаревича А. Н. Паршин в [32] доказал, что гипотеза Морделла вытекает из гипотезы Шафаревича; для этого он изобрёл так называемый трюк Паршина, состоящий в построении (с помощью остроумной геометрической конструкции) по каждой рациональной точке кривой рода $\geqslant 2$ над полем алгебраических чисел другой кривой над расширением этого поля[19]. Род этой новой кривой существенно больше исходного, а множество *простых чисел плохой редукции* (это и есть числовой аналог *критических точек* в формулировке Шафаревича) контролируется. Некоторые геометрические соображения вместе с *теоремой де Франкиса* о конечности множества непостоянных отображений любой кривой в кривую рода $\geqslant 2$ позволяют свести одну гипотезу к другой.

Существенный вклад в доказательство гипотезы Морделла внесли ученик Шафаревича С. Ю. Аракелов ([21]) и ученик Манина Ю. Г. Зархин ([25]); их идеи и конструкции слишком специальны, чтобы обсуждать их здесь; отметим лишь, что заложенная в работе [21] *геометрия Аракелова* — огромный раздел современной математики, вышедший далеко за пределы решённых в этой работе задач.

Наконец, сильнейшее средство изучения арифметики и геометрии алгебраических кривых ввёл американский математик Дж. Тейт[20]. *Модуль*

[19] Если дана кривая $\mathbf{X}$ над числовым полем $\mathbb{K}$ и точка $P \in \mathbf{X}(\mathbb{K})$, то сначала строится накрытие $\alpha\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ по подгруппе $\ker\bigl(\pi_1(\mathbf{X} \setminus \{P\}) \to \mathrm{H}_1(\mathbf{X} \setminus \{P\}, \mathbb{F}_2)\bigr)$, а затем накрытие $\mathbf{X}' \to \mathbf{Y}$ по подгруппе $\ker\bigl(\pi_1(\mathbf{Y} \setminus \alpha^{-1}(P)) \to \mathrm{H}_1(\mathbf{Y} \setminus \alpha^{-1}(P), \mathbb{F}_2)\bigr)$.

[20] Соавтор Шафаревича — они опубликовали в 1967 работу [19] в «Докладах Академии Наук СССР». Группа *Тейта — Шафаревича* эллиптической кривой $\mathbf{E}$ на всех языках обозначается Ш$(\mathbf{E})$.

Тейта абстрактной кривой [44] извлекается из якобиана этой кривой и представляет собой конечнопорожденный модуль над кольцом ℓ-адических чисел. Он отчасти играет роль первых гомологий римановой поверхности, но несёт в себе гораздо больше информации о кривой — на нём определено действие группы Галуа поля определения кривой.

Г. Фальтингс в статье [38] завершил работу своих предшественников. Он доказал теорему о полупростоте действия группы Галуа на модуле Тейта, ещё одну (несколько более техническую) теорему и — главное для нас — гипотезу конечности Шафаревича. Для вывода гипотезы Морделла из этих результатов всё уже было подготовлено.

Так завершился примерно двадцатилетний период математики прошлого века, начавшийся с работ И. Р. Шафаревича и Ю. И. Манина. Исследования продолжаются: изучаются количественные и алгоритмические проблемы диофантовой геометрии, ищутся многомерные обобщения и т. д.

2.5. Классическая алгебраическая геометрия

Классификация гладких проективных алгебраических[21)] кривых была получена к середине XIX века благодаря работам Римана, Клебша, М. Нётера, Бриля и др. Проективные кривые распадаются на три класса в зависимости от числа g линейно независимых регулярных дифференциальных 1-форм на них (*рода* кривой): $g = 0$, $g = 1$ и $g > 1$. С точностью до изоморфизма имеется единственная кривая рода $g=0$ — это проективная прямая $\mathbb{P}^1$ (*рациональная* кривая). Кривые рода $g = 1$ — это *эллиптические кривые*, т. е. кривые, на которых существует единственная с точностью до умножения на константу регулярная нигде не обращающаяся в нуль дифференциальная 1-форма. С точностью до изоморфизма эллиптические кривые образуют одномерное семейство и могут быть заданы однородным уравнением третьей степени в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Для каждого $g>1$ кривые рода g зависят от $3g - 3$ параметров (так называемых *модулей*). Кривые рода $g = 2$ могут быть представлены в виде двулистного накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$, разветвлённого в шести точках (другими словами, эти кривые бирационально изоморфны кривым в $\mathbb{C}^2$, заданным уравнениями вида $w^2 = f(z)$, где $f(z)$ — это многочлены степени шесть без кратных корней), а при $g > 2$ это либо также двулистные накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$, разветвлённые в $2g + 2$ точках, либо с точностью до проективного преобразования это кривые степени $2g - 2$, вложенные в проективное

[21)] Алгебраическое многообразие называется *проективным,* если при некотором $n > 1$ оно может быть задано как множество в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ решений системы однородных полиномиальных уравнений от n переменных.

пространство $\mathbb{P}^{g-1}$ с помощью дифференциальных 1-форм на этих кривых. Для каждой кривой рода $g > 1$ регулярные сечения кратного канонического класса mK (т. е. дифференциальные формы вида $f(\mathrm{d}z)^m$) при $m \geqslant 2$ (если $g = 2$, то $m \geqslant 3$) задают вложение кривой в $\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)}$.

В конце девятнадцатого — начале двадцатого веков благодаря работам Клебша, Нётера, Пуанкаре, а также блестящей плеяды итальянских алгебраических геометров: Кремоны, Сегре, Бертини, Кастельнуово, Энриквеса, Севери и др. — была получена классификация алгебраических поверхностей, основные положения которой были изложены в книге [36] Энриквеса. Основным инвариантом в этой классификации является κ — максимум размерности образов поверхности X при её отображениях в проективные пространства, задаваемых регулярными сечениями кратных канонических классов mK_X (т. е. дифференциальными формами вида $f \cdot (\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2)^m$). Инвариант κ может принимать следующие значения: $-1, 0, 1, 2$ ($\kappa = -1$, если для любого $m > 0$ кратный канонический класс mK_X не имеет регулярных нетривиальных сечений). После этого в классификации для каждого значения κ даётся характеристика поверхностей с данным значением κ в терминах так называемых численных инвариантов (индекса самопересечения канонического класса K_X, кратных родов P_m, равных размерностям пространств регулярных сечений кратных канонических классов mK, и иррегулярности q, равной размерности пространства регулярных дифференциальных 1-форм на X), и даётся конструктивное описание таких поверхностей. Так, например, поверхности с $\kappa = -1$ — это рациональные поверхности (т. е. поверхности, бирационально изоморфные проективной плоскости) и иррегулярные линейчатые поверхности (т. е. поверхности, расслоённые на рациональные кривые над кривой положительного рода).

Следует отметить, что доказательства многих утверждений, содержащихся в [36] неполны, по обычаям того времени Энриквес часто ограничивается рассмотрением «общего» случая, не разбирая наиболее неприятные случаи, которые могут представиться.

В 1961–1963 годах на семинаре по алгебраической геометрии, работавшем на мехмате в МГУ, И. Р. Шафаревич совместно со своими учениками Б. Г. Авербухом, Ю. Р. Вайнбергом, А. Б. Жижченко, Ю. И. Маниным, Б. Г. Мойшезоном, Г. Н. Тюриной и А. Н. Тюриным разбирали результаты по теории алгебраических поверхностей, полученные итальянской школой. Итогом этой работы стало написание книги [20], в которой даны строгие (основанные на появившейся в то время теории когерентных пучков и теории Ходжа) доказательства основных положений классификации алгебраических поверхностей, а также доказательство теоремы М. Нётера о структуре группы всех бирациональных преобразований проективной плоскости, изложены теория бирациональных преобразований поверхностей и теория минимальных моделей. Кроме этого, в [20] был изложен и ряд оригинальных результатов, относящихся к теории поверхностей с пучком эллиптических кривых и теории $K3$-поверхностей. Книга [20] стала настольной книгой для целого поколения алгебраических геометров. Она оказала большое влияние на дальнейшие исследования алгебраических поверхностей во всём мире и долгое время служила единственным систематическим изложением теории поверхностей, соединив красоту классических геометрических методов итальянской школы с мощью новейших аналитических и топологических методов.

2.6. Теорема Торелли для $K3$-поверхностей

Один из важнейших и интереснейших классов алгебраических поверхностей, исследованию свойств которого, начиная с Куммера, уделяли огромное внимание (и уделяют до сих пор) многие выдающиеся алгебраические геометры, в том числе и И. Р. Шафаревич, — это поверхности типа $K3$ (названные так в честь Куммера, Кэлера и Кодаиры). По определению, гладкая комплексная компактная односвязная поверхность X, на которой существует нигде не обращающаяся в нуль голоморфная 2-форма ω, называется поверхностью типа $K3$ (или просто $K3$-поверхностью). Примерами $K3$-поверхностей являются гладкие квартики в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, гладкие пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$ и гладкие пересечения трёх квадрик в $\mathbb{P}^5$. Ещё одним важным примером $K3$-поверхностей являются *куммеровы поверхности* — комплексные поверхности, которые получаются в результате разрешения шестнадцати особых точек фактора двумерной абелевой поверхности (двумерного комплексного тора) по действию инволюции $x \mapsto -x$.

Прежде чем сформулировать теорему Торелли для $K3$-поверхностей, напомним классическую теорему Торелли для алгебраических кривых. Как хорошо известно, с топологической точки зрения неособая проективная кривая C рода g, определённая над полем $\mathbb{C}$, — это двумерная сфера с g «ручками». Поэтому первая группа гомологий $H_1(C,\mathbb{Z})$ — это свободная абелева группа ранга $2g$. На $H_1(C,\mathbb{Z})$ определена унимодулярная кососимметрическая билинейная целочисленная форма

$$(\cdot,\cdot)\colon H_1(C,\mathbb{Z})\times H_1(C,\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$$

(индекс пересечения одномерных циклов), относительно которой можно выбрать базис в $H_1(C,\mathbb{Z})$, состоящий из «меридианов» $\gamma_1,\dots,\gamma_g$ и «параллелей» $\gamma_{g+1},\dots,\gamma_{2g}$, т. е. из таких элементов, что $(\gamma_i,\gamma_{g+i})=1$ для

$i = 1, \ldots, g$ и $(\gamma_i, \gamma_j) = 0$, если $|i - j| \neq g$. Если также выбран базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ пространства одномерных голоморфных форм на кривой C, то $(2g \times g)$-матрица

$$\Omega(C) = \Bigl(\int\limits_{\gamma_i} \omega_j \Bigr)$$

называется *матрицей периодов* кривой C. Классическая теорема Торелли ([46]) гласит, что две кривые C_1 и C_2 изоморфны тогда и только тогда, когда на C_1 и C_2 можно выбрать такие базисы пространств одномерных голоморфных форм, что $\Omega(C_1) = \Omega(C_2)$.

Классическая теорема Торелли даёт ключ к исследованию пространств модулей кривых рода g. Аналоги этой теоремы, в которых утверждается, что многообразия, принадлежащие к некоторому классу алгебраических многообразий, однозначно определяются матрицами периодов базиса пространства дифференциальных (p, q)-форм на этих многообразиях (рассматриваемыми с точностью до некоторой эквивалентности), играют ту же роль в многомерной геометрии, что и классическая теорема Торелли, и также называются *теоремами Торелли.*

Вернёмся к $K3$-поверхностям. Как известно, все $K3$-поверхности, как вещественные четырёхмерные многообразия, диффеоморфны друг другу (Кодаира). Индекс пересечения во второй группе гомологий $H_X = H_2(X, \mathbb{Z})$ $K3$-поверхности X определяет на H_X такое целочисленное скалярное произведение, что скалярный квадрат любого элемента $\gamma \in H_X$ чётен, его определитель Грама равен -1 и сигнатура псевдоевклидова пространства $H_X \otimes \mathbb{R}$ равна $(3, 19)$. Как известно, решётка, т. е. свободная абелева группа H, на которой определено целочисленное скалярное произведение, обладающее перечисленными свойствами, определяется однозначно с точностью до изоморфизма этими свойствами.

В [14] Шафаревичем было введено понятие отмеченной $K3$-поверхности типа l. Зафиксируем в H элемент l, $l^2 > 0$. По определению, *отмеченной $K3$-поверхностью* называется тройка (X, φ, ξ), где $\varphi\colon H_X \to H$ — изоморфизм евклидовых решёток и $\xi \in H_X$ — такой класс гиперплоского сечения $K3$-поверхности X (т. е. поверхность X рассматривается вместе с некоторым её вложением в проективное пространство), что $\varphi(\xi) = l$.

Пусть $E = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$ — множество линейных функций на H со значениями в $\mathbb{C}$. Скалярному произведению в H соответствует скалярное произведение в E, $\omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathbb{C}$ для $\omega_1, \omega_2 \in E$. Пусть $\mathbb{P}^{21} = \mathbb{P}(E)$ — проективизация векторного пространства E над полем $\mathbb{C}$, и пусть

$$K_{20} = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}^{21}\colon \omega^2 = 0\} \quad \text{и} \quad K_{20}^0 = \{\mathbb{C}\omega \in K_{20}\colon \omega \cdot \bar{\omega} > 0\}.$$

Элемент $l \in H$ определяет гиперповерхность (обозначим её той же буквой) $l = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}^{21} : \omega(l) = 0\}$. Комплексное многообразие $D_l = K_{20}^0 \cap l$ называется *пространством периодов отмеченных $K3$-поверхностей типа l*. Каждая отмеченная $K3$-поверхность X типа l определяет точку $\tau(X) \in D_l$ следующим образом. На $K3$-поверхности X существует единственная с точностью до умножения на константу голоморфная форма

$$\omega \in H^{2,0}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C}).$$

Композиция

$$H \xrightarrow{\varphi^{-1}} H_X \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}$$

определяет точку в $K_{20} \subset \mathbb{P}^{21} = \mathbb{P}(E)$, где

$$\omega(\lambda) = \int\limits_{\lambda} \omega \quad \text{для } \lambda \in H_2(X, \mathbb{Z}).$$

Так как ξ — алгебраический класс, имеем $\omega(\xi) = 0$ и, следовательно, эта точка лежит в D_l. Получаем *отображение периодов* τ из множества отмеченных $K3$-поверхностей типа l в D_l.

В [14] И. Р. Шафаревич и И. И. Пятецкий-Шапиро доказали теорему Торелли для отмеченных $K3$-поверхностей. А именно, ими было доказано, что существует семейство $\mathcal{X} \to S$ отмеченных $K3$-поверхностей [22)], содержащее (с точностью до изоморфизма) все отмеченные $K3$-поверхности типа l, $\dim S = 19$, отображение периодов $\tau\colon S \to D_l$ инъективно и $\tau(S)$ является открытым всюду плотным множеством в D_l. Доказательство этой теоремы основано на доказанной ранее участницей семинара Шафаревича по алгебраической геометрии Г. Н. Тюриной локальной теореме Торелли для $K3$-поверхностей, утверждающей, что дифференциал отображения периодов τ невырожден (см. [20]), а также на детальном исследовании периодов отмеченных куммеровых поверхностей. В кандидатской диссертации одного из авторов этой статьи (см. [26] и [29]), написанной под руководством Шафаревича, была получена классификация полустабильных вырождений комплексных $K3$-поверхностей, из которой следовала эпиморфность отображения периодов τ для отмеченных $K3$-поверхностей. Впоследствии Шафаревич уделил большое внимание исследованию вырождений $K3$-поверхностей, определённых над полями конечной характеристики (см. [17, 18]).

22) То есть слои X_s голоморфного отображения $\mathcal{X} \to S$ над точками $s \in S$ — это отмеченные $K3$-поверхности типа l.

2.7. Бесконечномерные алгебраические многообразия

Конечно, Игорю Ростиславовичу на протяжении его долгой жизни удалось решить не все математические проблемы, которые вызывали у него интерес. Тем не менее, его идеи и подходы к решению этих проблем имеют большую самостоятельную ценность и могут быть применены к решению многих других задач. Одной из таких проблем является так называемая *проблема якобиана*, которая состоит в следующем. Пусть якобиан

$$J(F) = \det\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)$$

полиномиального отображения

$$F = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$

аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в себя, определённого над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль, нигде не обращается в нуль. Легко видеть, что тогда $J(F) \in \Bbbk^*$, т. е. является ненулевой константой. *Верно ли, что в этом случае отображение F обратимо, т. е. является изоморфизмом аффинных пространств?*

Очевидно, что проблема якобиана имеет положительное решение при $n = 1$. Также легко видеть, что её аналоги имеют отрицательное решение в случае, когда $\Bbbk$ является полем положительной характеристики p (пример: $F = (x + x^p)\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$) и в случае, когда F задано целыми аналитическими функциями (пример: $F = (xe^y, e^{-y})\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$).

Впервые проблема якобиана была сформулирована в 1939 году Келлером (O.-H. Keller). Ввиду простоты формулировки эта проблема привлекала (и привлекает до сих пор) внимание огромного числа математиков, однако она остаётся открытой для $n \geqslant 2$.

Размышляя над проблемой якобиана, Шафаревич предложил рассматривать не отдельные отображения $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ с якобианом $J(F) \in \Bbbk^*$, а сразу всю полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ пространства $\mathbb{A}^n$ с якобианами $J(F) = c \in \Bbbk^*$ и естественное вложение группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ пространства $\mathbb{A}^n$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$. Для этого он в [13] ввёл понятия бесконечномерных алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$ как индуктивных пределов X направленных систем $\{X_i, f_{i,j}\}$ алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$, причём морфизмы $f_{i,j}\colon X_i \to X_j$, $i < j$, являются замкнутыми вложениями, рассмотрел морфизмы между ними и в [3] исследовал основные свойства этих многообразий. Для аффинных бесконечномерных многообразий X (т. е. когда все X_i в $\{X_i, f_{i,j}\}$ являются аффинными многообразиями) он определил понятие кольца регулярных функций $\Bbbk[X]$ на X, понятие касательного пространства $T_{X,x}$ в точках $x \in X$ и понятие гладкости многообразия X в точке, а также доказал следующие утверждения. Во-первых, если $f\colon Y \to X$ — замкнутое вложение бесконечномерных аффинных многообразий, X неприводимо, Y гладко в точке $y \in Y$ и дифференциал $(df)_y\colon T_{Y,y} \to T_{X,x}$ вложения f в точке y является изоморфизмом, то f тоже является изоморфизмом. Во-вторых, бесконечномерная алгебраическая группа, определённая над полем характеристики 0, является гладким многообразием, и, в-третьих, дифференциал $(df)_{\mathrm{id}}$ естественного вложения группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ в точке, соответствующей тождественному отображению $\mathrm{id}\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, является изоморфизмом. Поэтому для положительного решения проблемы якобиана осталось доказать, что естественное отображение из $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ является замкнутым вложением. В своём докладе [1] на семинаре в Стекловке 17 июня 2008 года Шафаревич наметил пути проверки замкнутости вложения в двумерном случае[23].

Список литературы

[1] *Шафаревич И. Р.* Бесконечномерные группы и проблема якобиана для аффинной плоскости A(2). http://www.mi.ras.ru/~shafarev/doklad_17_06_2008.pdf

[2] Шафаревич Игорь Ростиславович. Математическая биография. http://www.mi.ras.ru/~shafarev/biogr.html

[3] *Шафаревич И. Р.* О некоторых бесконечномерных группах. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 214–226.

[4] *Шафаревич И. Р.* О нормируемости топологических полей // ДАН СССР. 1943. Т. 40, № 1. С. 133–135.

[5] *Шафаревич И. Р.* О построении полей с заданной группой Галуа порядка ℓ^α // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18, № 3. С. 261–296.

[6] *Шафаревич И. Р.* О факторах одного убывающего центрального ряда // Матем. заметки. 1989. Т. 45, вып. 3. С. 114–117.

[7] *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26, № 1. С. 113–146.

[8] *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Алгебра-1 // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 11. С. 5–279.

[9] *Шафаревич И. Р.* Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18, № 6. С. 525–578.

[23] О некоторых других подходах к решению проблемы якобиана см. в [27] и [28]; общий обзор результатов по этой проблеме можно найти в [37].

[10] *Шафаревич И. Р.* Поля алгебраических чисел // Proc. Internat. Congr. Math. (Stockholm, 1962). Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963. P. 163–176.

[11] *Шафаревич И. Р.* Проблема десятого дискриминанта // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, вып. 4. С. 260–277.

[12] *Шафаревич И. Р.* Собрание сочинений. Т. 1, 2. М.: Феникс, 1994.

[13] *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups // Rend. Mat. Appl. (5). 1966. Vol. 25, № 1–2. P. 208–212.

[14] *Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р.* Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 3. С. 530–572.

[15] *Рудаков А. Н., Цинк Т., Шафаревич И. Р.* Влияние высоты на вырождения алгебраических поверхностей типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46, № 1. С. 117–134.

[16] *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа К3 // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1050–1052.

[17] *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа К3 // Совр. пробл. мат. Дифф. уравнения, матем. анализ и их прил. Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 222–234.

[18] *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа К3 над полями конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 3. С. 646–661.

[19] *Тэйт Дж. Т., Шафаревич И. Р.* О ранге эллиптических кривых // ДАН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 770–773.

[20] *Авербух Б. Г., Вайнберг Ю. Р., Жижченко А. Б., Манин Ю. И., Мойшезон Б. Г., Тюрина Г. Н., Тюрин А. Н.* Алгебраические поверхности / Ред. И. Р. Шафаревич, И. Г. Петровский // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 75.

[21] *Аракелов С. Ю.* Семейства алгебраических кривых с фиксированными вырождениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 6. С. 1269–1293.

[22] *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 2. С. 267–276.

[23] *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.

[24] *Демушкин С. П., Кострикин А. И., Новиков С. П., Паршин А. Н., Понтрягин Л. С., Тюрин А. Н., Фаддеев Д. К.* Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1984. Т. 39, вып. 1(235). С. 167–174.

[25] *Зархин Ю. Г.* Эндоморфизмы абелевых многообразий над полями конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 2. С. 272–277.

[26] *Куликов Вик. С.* Вырождения $K3$ поверхностей и поверхностей Энриквеса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 5. С. 1008–1042.

[27] *Куликов Вик. С.* Гипотеза о якобиане и нильпотентные отображения. Алгебраическая геометрия — 11 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 2001, Т. 70. С. 120–133.

[28] *Куликов Вик. С.* Обобщённая и локальная проблемы якобиана // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, № 5. С. 1086–1103.

[29] *Куликов Вик. С.* Эпиморфность отображения периодов для поверхностей типа К3 // УМН. 1977. Т. 32, вып. 4(196). С. 257–258.

[30] *Манин Ю. И.* Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27, № 6. С. 1395–1440.

[31] *Манин Ю. И., Панчишкин А. А.* Введение в современную теорию чисел. М.: МЦНМО, 2013.

[32] *Паршин А. Н.* Алгебраические кривые над функциональными полями, I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 5. С. 1191–1219.

[33] *Скопин А. И.* Факторгруппы одного верхнего центрального ряда // ДАН СССР. 1950. Т. 74. С. 425–428.

[34] *Шабат Г. Б.* О комплексной структуре областей, накрывающих алгебраические поверхности // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 2. С. 67–75.

[35] *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres*, par Claude Gaspar Bachet, Sr. de Méziriac. (1612). Переиздание: A. Blanchard, Paris, 1993. Рус. перев.: *Баше де Мезирьяк К.-Г.* Игры и задачи, основанные на математике. М., 1877.

[36] *Enriques F.* Le superficie algebriche. Bologna: N. Zanichelli Ed., 1949.

[37] *Van den Essen A.* Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Birkhauser, 2000.

[38] *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.

[39] Geometric Galois actions. 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242).

[40] *Hermite Ch.* Extrait d'une lettre de M. C. Hermite à M. Borchardt sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés // J. Reine Angew. Math. 1857. Vol. 53. P. 182–192.

[41] *Kaplansky I.* Topological rings // Bull. AMS. 1948. Vol. 54, № 9. P. 809–826.

[42] *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. науч. сем. ПОМИ. СПб.: ПОМИ, 2016. Т. 446. С. 182–220.

[43] *Shabat G. B., Voevodsky V. A.* Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. Boston, MA: Birkhäuser, 1990. (Progr. Math.; Vol. 88). P. 197–227.

[44] *Tate J.* Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // Invent. Math. 1966. Vol. 2. P. 134–144.

[45] *Taylor R.* Reciprocity laws and density theorems // Shaw Prize Book 2007. Cambridge, USA: Harvard University, 2007.

[46] *Torelli R.* Sulle varietà di Jacobi // Rendiconti della Reale accademia nazionale dei Lincei. 1913. Vol. 22, № 5. P. 98–103.

[47] *Wyman B. F.* What is a reciprocity law? // Amer. Math. Monthly. 1972. Vol. 79, № 6. P. 571–586. Correction, ibid. Vol. 80. P. 281.

Виктор Степанович Куликов,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
kulikov@mi.ras.ru

Георгий Борисович Шабат,
Российский государственный гуманитарный университет, Москва
george.shabat@gmail.com

Андрей Александрович Егоров

В. Н. Дубровский

23 апреля 2017 года не стало Андрея Александровича Егорова, замечательного математика, просветителя, педагога, старейшего преподавателя математики СУНЦ МГУ.

Андрей Александрович родился в Москве 11 октября 1939 года. Он окончил мехмат и аспирантуру МГУ под научным руководством выдающегося математика И. М. Гельфанда. Но случилось так, что научной карьере он предпочёл работу в области математического образования, которое в то время, по праву называемое золотой эпохой советской математики, также переживало бурный расцвет. На этом поприще судьба свела его с другим легендарным математиком — Андреем Николаевичем Колмогоровым. Можно сказать, что А. А. Егоров был одним из тех энтузиастов, которые, реализуя идеи Колмогорова, сыграли огромную роль в формировании завоевавшей признание во всём мире системы советского математического образования. Прежде всего мы говорим здесь о поиске и воспитании юных математических талантов, чему в то время уделялось огромное внимание.

Учить детей математике Андрей Александрович начал, когда сам был ненамного старше своих учеников — на втором курсе университета. Вдвоём со своим ближайшим другом Николаем Борисовичем Васильевым он стал вести одну из секций школьного математического кружка при мехмате. Многие воспитанники этого кружка, такие как С. И. Гельфанд, Д. Каждан, И. Д. Новиков, впоследствии стали известными математиками.

Тесное и плодотворное сотрудничество двух друзей продолжалось до последних дней жизни Николая Борисовича, раннюю смерть которого Андрей Александрович глубоко переживал. А. А. Егоров и Н. Б. Васильев принимали непосредственное участие в организации замечательного и необычного учебного заведения — Всесоюзной заочной математической школы, начавшей работу в 1964 году по инициативе И. М. Гельфанда: помогали в разработке её программы, первых заданий, затем — в обучении проверяющих на выездных конференциях, семинарах на мехмате; участвовали в обсуждении и составлении вступительных заданий. В дальнейшем Николай Борисович сыграл особенно важную роль в развитии ВЗМШ, а Андрей Александрович больше времени уделял преподаванию в физико-математической школе-интернате № 18 при МГУ (ныне СУНЦ МГУ), куда он был приглашён основателем школы А. Н. Колмогоровым почти сразу после её открытия в 1963 году. Формально он работал в интернате по совместительству, но считал эту работу одним из основных дел своей жизни. Даже когда ему пришлось практически отказаться от чтения лекций по состоянию здоровья, он продолжал вести свой любимый курс математического анализа, подробно обсуждая содержание лекций и занятий с заменявшим его коллегой.

Другим направлением деятельности Андрея Александровича была работа в «Кванте», знаменитом физико-математическом журнале для школьников, созданном основателями интерната № 18 — академиками А. Н. Колмогоровым и И. К. Кикоиным. Журнал начал выходить с января 1970 года, а уже в майском номере появилась первая написанная для него статья А. А. Егорова. Она была посвящена арифметике остатков, одной из его излюбленных тем, к которой он впоследствии ещё не раз возвращался. Статьи А. А. Егорова в «Кванте», которых вышло несколько десятков, отличает ясность, прекрасный стиль, доступность в сочетании с глубоким содержанием. Многие из них родились из опыта работы в ФМШ. С 1995 по 2008 год Андрей Александрович руководил математическим отделом редакции «Кванта», поддерживая высокий уровень математических статей в эти сложные для журнала годы.

Велика роль А. А. Егорова в развитии математических олимпиад и конференций школьников. Многие годы он руководил мехматским «десантом» на областные и республиканские олимпиады; это была колоссальная работа (и при этом у него были ещё аспирантура и преподавание). В 1967 году он вошёл в состав методической комиссии первой всесоюзной олимпиады (эту комиссию также возглавлял А. Н. Колмогоров) и оставался в ней до её переформирования в конце 70-х годов. Совместно с Н. Б. Васильевым он издал сборник задач всесоюзных олимпиад, который стал классической настольной книгой всех «олимпиадников». Наверное, ни одно крупное математическое соревнование 70–90-х годов не обходилось без активного участия Андрея Александровича. Это и «Турнир городов», и Соросовские олимпиады, и международная олимпиада, проходившая в 1992 году в Москве. Отметим ещё одно, менее масштабное, но очень интересное международное соревнование — олимпиаду «Интеллектуальный марафон», отмечающую в 2017 году своё 25-летие. А. А. Егоров имел самое прямое отношение к её проведению, являясь основным составителем заданий её математической компоненты. Сборник задач этих олимпиад вышел отдельным изданием в Библиотечке «Квант» (вып. 97).

Андрей Александрович входил в жюри множества научных конференций школьников: популярнейшего «Праздника юных математиков», проводившегося в Батуми в 70–80 годы, Международной конференции юных учёных (ICYS), в которой он участвовал с момента её создания, и др. Многие годы он возглавлял жюри конференции «Потенциал», проводимой лицеем при МЭИ.

Что отличало Андрея Александровича как лектора, преподавателя, учителя? Прежде всего, его умение очень внятно и понятно преподносить материал. Его стиль изложения был естественным и лишённым вычурности. Его было легко слушать, и он сам получал удовольствие от чтения лекций. Продуманность курса в целом и каждой отдельной лекции сочетались у него с любовью к импровизации — его широчайшая математическая эрудиция позволяла ему украшать лекции отступлениями, увлекавшими и слушателей, и его самого так, что порой лекция продолжалась на семинаре. А при подготовке устных олимпиад он всегда запасался гораздо большим числом задач, чем могло быть использовано, чтобы иметь возможность на ходу подбирать очередную задачу в соответствии с тем, как решались предыдущие. При этом многие задачи он придумывал сам.

Таланты Андрея Александровича не ограничивались математикой. Он увлекался историей и прекрасно её знал, благодаря чему его рассказы о многочисленных поездках — а он любил путешествовать, побывал во всех уголках нашей страны и объездил почти всю Европу — были особенно интересны. Это увлечение помогало ему в течение двух десятков лет придумывать оригинальные задания по истории научных идей и открытий для «Интеллектуального марафона».

Друзьям, коллегам, ученикам запомнились доброта и расположенность к людям Андрея Александровича, его демократизм, сочетавшийся с чувством собственного достоинства. Он не переносил людскую непорядочность, мог легко вспылить, сталкиваясь с ней, но в то же время был отходчив. Он был человеком, о которых говорят «светлая личность». Его любили. И когда ему потребовалось делать операцию за границей, на просьбу «Клуба выпускников ФМШ» о помощи мгновенно откликнулись многие десятки его друзей и учеников; необходимую сумму собрали за пару недель.

К сожалению, передать словами харизму и мастерство уходящих от нас учителей, как и театральных актёров, почти невозможно. Но россыпь блестящих статей и книг, оставленных Андреем Александровичем Егоровым, ещё многие годы будет служить источником знаний и идей для новых поколений увлечённых математикой школьников и их наставников.

Владимир Натанович Дубровский, СУНЦ МГУ
`vndubrovsky@gmail.com`

Геометрия: классика и современность

Планиметрия Евклида и Лобачевского от Евклида до Гильберта

В. М. Тихомиров

Цель этой статьи — построить геометрии Евклида и Лобачевского и на аксиоматической основе, и с помощью моделей этих геометрий, а также доказать непротиворечивость этих геометрий и полноту аксиоматик. Этим будет совершён переход от Евклида, жившего в третьем веке до нашей эры, к Гильберту, который на пороге двадцатого века завершил построение геометрии как дедуктивной теории, доказав полноту и непротиворечивость построенной им системы аксиом. В этой статье осуществляется то же самое на базе другой аксиоматической системы.

Попытку построить геометрию как дедуктивную науку предпринял в третьем веке до нашей эры Евклид. Он изложил это построение в одной из величайших книг в истории науки, которая известна всем под названием «Начала» [1]. Замысел дедуктивного построения какого-то раздела математики восходит к Аристотелю. Он состоит в том, что доказательство математического утверждения должно последовательно, шаг за шагом, опираясь на набор начальных понятий (которые описываются без определений), логически выводиться из некоей системы утверждений, принимаемых за истину без доказательства.

Евклид построил геометрию, основываясь на пяти таких утверждениях, которые он назвал постулатами.

При формулировке постулатов им не определялись понятия «точка», «прямая», «отрезок» (Евклид называет его «ограниченной прямой»), «радиус» и «угол». Перечислим постулаты Евклида (сейчас их обычно называют аксиомами).

1. *От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.*
2. *Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.*
3. *Из всякого центра всяким радиусом может быть циркулем описана окружность.*
4. *Все прямые углы равны между собой.*
5. *Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых углов, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.*

Этот постулат, более похожий на формулировку теоремы и тем сильно отличающийся от остальных, можно заменить следующим, эквивалентным ему:

$5'$. *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с исходной прямой.*

Прямая, отличная от другой и не пересекающаяся с ней, называется *параллельной прямой*, а аксиома $5'$ называется *аксиомой о параллельных*.

Содержание «Начал» удовлетворяло почти всех (за ничтожным исключением) читателей на протяжении почти двадцати двух веков. Но всё же иногда отмечались некоторые пробелы в этой книге — не все теоремы в книге можно было логически вывести, исходя из евклидовых постулатов. Так, например, Лейбниц указал, что первая теорема евклидовых «Начал» о существовании равностороннего треугольника не может быть выведена из приведённых постулатов. В девятнадцатом веке математики стали задумываться о непротиворечивости аксиоматических систем, а также о возможности вывести пятый постулат Евклида из остальных. Гаусс, Лобачевский и Я. Бойяи почти достигли такой цели в начале XIX века, а в конце века Клейн, Кэли и Пуанкаре доказали непротиворечивость новой геометрии, получившей имя Лобачевского. Окончательно разрешил все проблемы Давид Гильберт (1862–1943) в своём замечательном труде «Основания геометрии», вышедшем в 1899 году. Там тоже были некоторые пробелы, которые были потом им устранены (см. [2]).

Книга Гильберта произвела большое впечатление на весь математический мир. Аксиоматическое построение геометрии стало входить в математическое образование. В педагогических вузах и в университетах на математических отделениях стали включаться в программу общие и/или специальные (полугодовые или годовые) курсы под названием «Основания геометрии». Появилось множество книг с изложением оснований геометрии, были сделаны попытки объяснить непротиворечивость геометрии

Лобачевского для неспециалистов. Но нельзя сказать, что такие попытки были удачными.

Однако в действительности суть дела проста, и далее строится полная непротиворечивая аксиоматика евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского (с отличием лишь в одной аксиоме), строятся их арифметические модели и доказывается тем самым непротиворечивость геометрий и Евклида и Лобачевского (при условии, что непротиворечива сама арифметика). Основные идеи построения такой аксиоматики принадлежат Андрею Николаевичу Колмогорову (1903–1987), они изложены в учебнике [3] в первом разделе главы «Приложения», озаглавленном «О логическом строении геометрии», см. с. 373–376.

Вопрос о том, стоит ли школьников этому учить, здесь не обсуждается. Наверное, учить всех не стоит, но люди, интересующиеся математикой, не обязательно только школьники, пусть проделают здесь с нами 24-вековой путь от Евклида до Гильберта.

Прежде чем переходить к формулировке нашей системы аксиом, напомним уже сказанное об идеях Аристотеля относительно построения дедуктивной теории. Строение такой теории (обозначим её $\mathcal{T}$) складывается из четырёх компонентов: списка *элементарных* (*неопределяемых*) *понятий* ($\mathrm{Elem}_{\mathcal{T}}$), набора утверждений об этих объектах, которые принимаются без доказательства, — *аксиом* ($\mathrm{Ax}_{\mathcal{T}}$), *определений новых объектов* ($\mathrm{Def}_{\mathcal{T}}$) и *теорем* ($\mathrm{Thm}_{\mathcal{T}}$).

Мы будем описывать две геометрические теории: более подробно — Евклида и несколько схематично — Лобачевского. Обозначим планиметрию Евклида E, планиметрию Лобачевского — L. Опишем аксиоматики обеих геометрий.

Списки элементарных (неопределяемых) понятий у обеих геометрий (Elem_E и Elem_L) одинаковы и почти совпадают с евклидовыми. В нашей аксиоматической системе (которая лишь немного отличается от колмогоровской) это *точка, прямая, расстояние* и *величина угла*. Плоскость $\mathcal{P}$ у нас — это точечное множество, являющееся *метрическим пространством.* Это значит, что для любых двух точек A и B определена величина $|AB|$, называемая *расстоянием между A и B*, — неотрицательное вещественное число, которое равно нулю, если и лишь если A и B совпадают, и которое удовлетворяет условию симметрии: $|AB| = |BA|$ и неравенству треугольника: $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$ для любого $C \in \mathcal{P}$. Прямая — непустое подмножество плоскости, причём существует хотя бы одна прямая и точка вне неё. Подмножества плоскости называются *линиями и фигурами.* Основных линий — два типа: прямые и окружности, среди важнейших школьных фигур — угол и треугольник. Понятие прямой входит в число элементарных понятий, а окружность, угол и треугольник будут определены.

Наборы аксиом в геометриях Евклида и Лобачевского — Ax_E и Ax_L — совпадают за исключением одной, последней аксиомы. Приведём сначала все аксиомы, кроме этой последней, по ходу дела вводя некоторые определения. Читатель увидит, что приводимая система аксиом представляет собой лишь небольшое уточнение евклидовых постулатов.

Вообще говоря, аксиоматика не требует чертежей. Но мы приводим их, возвращая читателя к тем далёким временам, когда такие мыслители, как Евклид или Архимед, сидели на песке и чертили циркулем и линейкой. А мы будем чертить или мысленно, или на листе бумаги, строя «графическую модель» евклидовой плоскости.

Аксиома 1 (рис. 1). *Через две различные точки A и B плоскости $\mathcal{P}$ проходит единственная прямая*; *причём если $|AB| = |AC| + |CB|$, то точка C лежит на этой прямой.*

В этом случае будем говорить, что точка *C лежит между A и B*, а множество точек, лежащих между A и B, вместе с самими точками A и B будем называть *отрезком* с концами A и B. Такой отрезок будем обозначать $[A, B]$. Точки, лежащие между A и B, будем называть *внутренними точками отрезка* $[A, B]$ (см. рис. 1). Эту аксиому следует сравнить с первым постулатом Евклида.

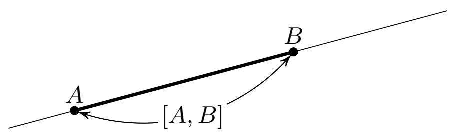


Рис. 1

Плоская фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя точками A и B, ей принадлежащими, она содержит весь отрезок $[A, B]$.

Аксиома 2 (рис. 2). *Точка O на прямой делит точки этой прямой на две выпуклые совокупности*, называемые *лучами с вершиной в O*, и при этом

а) *если A и B принадлежат разным лучам, не совпадая с O, то O — внутренняя точка отрезка $[A, B]$*;

б) *каждый из лучей изометричен совокупности неотрицательных вещественных чисел* (что это значит, будет пояснено чуть позже).

Это значит, что если выбран некоторый масштаб (в нашем наглядном представлении — фиксированный раствор циркуля), то любая точка луча выражается в виде десятичной дроби $k{,}k_1k_2\ldots$, где k — натуральное

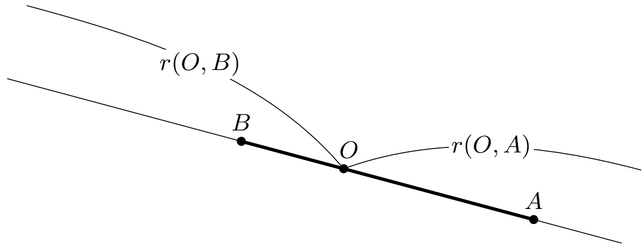


Рис. 2

число или нуль, а k_i — одно из чисел от нуля до девяти (причём эта дробь не должна оканчиваться на одни девятки, т. е. бесконечный хвост десятичной дроби не должен состоять из одних девяток). Пусть O — некоторая точка плоскости и $R > 0$. Совокупность точек C плоскости, для которых $|OC| \leqslant R$, назовём *кругом с центром O радиуса R*.

Поясним сказанное и изображённое на рисунке. Мы видим на рисунке два луча. Точка O выполняет роль «пропускного пункта» на прямой: если обе точки принадлежат одному из лучей, то можно «проехать из пункта A в пункт B» и вас никто не остановит (это и означает, что лучи выпуклы). А если точки принадлежат разным лучам, то придётся остановиться в пункте O и предъявить документ, обосновывающий ваше право на пересечение пункта O.

Вопрос об изометрии много сложнее. Греческую цивилизацию во времена Пифагора постиг страшный удар: было доказано, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. На нашем арифметико-алгебраическом языке это означает, что $\sqrt{2}$ не является дробью m/n, где m и n — целые числа. И древние греки не стали развивать понятие числа. В частности, у Евклида в его «Началах» нет понятия числа, хотя фактически число $\sqrt{2}$ у самого Евклида представлено (когда он доказывает несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной) как бесконечная непрерывная дробь.

Непрерывная дробь (или цепная дробь) — это конечное или бесконечное выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

где a_0 есть целое число, а все остальные a_n — натуральные числа (положительные целые).

Любое вещественное число можно представить в виде цепной дроби (конечной или бесконечной). Число представляется конечной цепной дробью тогда и только тогда, когда оно рационально. А если бы Евклид захотел записать длину диагонали квадрата со стороной единица, то получил бы дробь $[1; 2, 2, 2, 2, \ldots]$, равную $\sqrt{2}$.

Древние не стали возиться с непрерывными дробями. Но! Как мы видели, у Евклида есть понятие радиуса (см. третий постулат). Но радиус — это ведь вещественное число, и более того, оба постулата дают возможность задать таким числом «всякий радиус». А заодно и для себя уточним то, что было выше сказано: «на плоскости можно измерить расстояние между точками».

Евклид пользовался линейкой и циркулем. И мы мысленно будем пользоваться теми же приборами с одним (как уже было сказано) отличием: у нас в мыслях будет не «простая» линейка, а *масштабная*.

И теперь выберем наш обычный, действующий с XIX века (когда измерили диаметр Земли) масштаб в 1 метр (1 м) и будем откладывать его (по второму постулату Евклида) от точки O по одному из лучей. Далее (опять-таки по Евклиду) поставим ножку циркуля в точку O и проведём окружность какого-то радиуса. Эта окружность пересечёт луч в некоторой точке, которую обозначим буквой A. Если она совпадёт со, скажем, k-й точкой, отмеченной на луче, то тогда расстояние $|OA|$ от O до A будет k метров. Как поступать, если расстояние не исчисляется целым числом метров, продемонстрируем на том же примере диагонали квадрата со стороной, равной одному метру. Обнаружится, что точка, удалённая от O на длину диагонали этого квадрата, находится между 1 м и 2 м, а переходя к дециметрам (десятым долям метра), получим, что искомая длина лежит между 1,4 м и 1,5 м.

Дальше обнаружится, что выполнены неравенства $1{,}41\text{ м}<\sqrt{2}\text{ м}<1{,}42\text{ м}$. Мы вычислили наше число с точностью до одной сотой. Вот вычисление нашего числа с точностью до одной миллиардной:

$$1{,}414213562\text{ м} < \sqrt{2}\text{ м} < 1{,}414213563\text{ м}.$$

Этот процесс никогда не кончится. Корень из двух будет представлен бесконечной непериодической десятичной дробью. (Недавно корень из двух был вычислен с точностью до 200 миллиардов десятичных знаков после запятой.)

А вещественные числа — это *все* бесконечные десятичные дроби (для определённости, не оканчивающиеся на одни девятки). Их совокупность обозначают ныне символом $\mathbb{R}$. А проведённый нами процесс сопоставления «радиусу окружности с центром в точке O» вещественного числа и означает изометрию геометрического объекта, описываемого аксиомами 2 и 3 из «Начал» Евклида, с числами из $\mathbb{R}$: каждой точке прямой при выборе единичного отрезка соответствует вещественное число, и расстояние между точками равно расстоянию между числами. Поэтому $\mathbb{R}$ называют ещё *вещественной прямой.*

Следующей аксиомы у Евклида не было, но он ею многократно пользуется в своей книге. Она сходна с нашей аксиомой 2а.

Аксиома 3. *Прямая на плоскости* (*обозначим её* l) *делит точки плоскости на две выпуклые совокупности*, называемые *полуплоскостями с границей* l, и при этом *если* A *и* B *принадлежат разным полуплоскостям и не лежат на* l, *то существует точка* C, *принадлежащая* l *и внутренняя для отрезка* $[A, B]$ (рис. 3). (Полуплоскость, ограниченная прямой l и содержащая точку A, обозначена $h(l, A)$.)

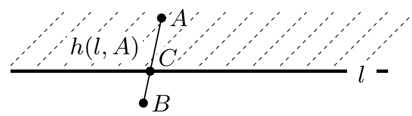


Рис. 3

Теперь нам надо определить одно важное понятие.

Общую часть двух полуплоскостей, границы которых пересекаются (т. е. не совпадают и не параллельны), назовём *углом*.

Общая точка O границ называется *вершиной угла*. Угол ограничен двумя лучами, имеющими общую вершину O.

Если $r(O, A)$ и $r(O, B)$ — два разных луча, с вершиной O, то угол, состоящий из общих точек полуплоскостей $h(l(O, A), B)$ и $h(l(O, B), A)$ (т. е. полуплоскости, содержащей B, граница которой порождена лучом $r(O, A)$, и полуплоскости, содержащей A, граница которой порождена лучом $r(O, B)$), обозначим AOB. Каждый угол определяется своим пересечением с кругом с центром O радиуса для определённости равного единице (точки A и B удалены от O на расстояние единица в каком-то масштабе).

Для любого угла AOB определена *величина угла* $\widehat{AOB}$. Величина угла измеряется числом градусов, изменяющимся в пределах от $0°$ до $180°$. Величина нулевого угла по определению равна нулю, а развёрнутого — ста восьмидесяти градусам. Будем говорить, что луч $r(O, C)$ *лежит между лучами* $r(O, A)$ *и* $r(O, B)$, *если*

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}.$$

Через некоторое время будет рассказано, как найти величину угла (подобно тому как мы научились вычислять величину расстояния от одной точки до другой).

Для формулировки следующей аксиомы надо определить понятие изометрии геометрических фигур. Скажем, что *две фигуры* $\mathcal{C}_1$ *и* $\mathcal{C}_2$ *изометричны*, если существует взаимно однозначное отображение $\mathcal{F}$ точек фигуры $\mathcal{C}_1$ на точки фигуры $\mathcal{C}_2$, при котором для любых двух точек A и B из $\mathcal{C}_1$ выполнено равенство $|AB| = |\mathcal{F}(A)\mathcal{F}(B)|$. Если фигуры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ изометричны, будем обозначать это так: $\mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2$.

Аксиома 4 (об изометрии; рис. 4). *Если величины двух углов равны, то сами углы изометричны* (точнее: если $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$, то существует изометрическое отображение одного угла на другой, при котором луч $r(OA)$ совместится с лучом $r(O_1A_1)$, а луч $r(OB)$ совместится с лучом $r(O_1B_1)$).

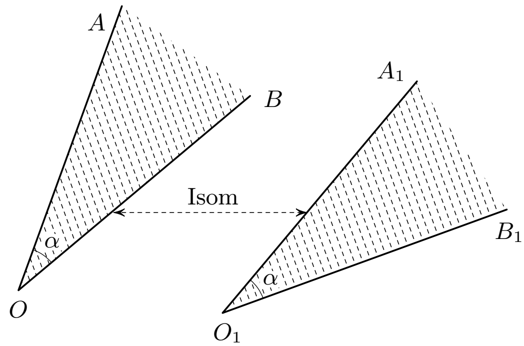


Рис. 4

Основное отличие приводимой здесь аксиоматики от колмогоровской, построенной в учебнике [3], заключено именно в этой аксиоме. Колмогоровская аксиома, которую он называет *аксиомой подвижности*, звучит так:

Если расстояние $|AB|$ положительно и равно расстоянию $|A_1B_1|$, то существует ровно два перемещения, каждое из которых отображает точку A в точку A_1, а точку B в точку B_1.

Если α — полуплоскость, ограниченная прямой AB, то она этими двумя перемещениями отображается на две различные полуплоскости α_1 и β_1, ограниченные прямой A_1B_1. Колмогоровское перемещение — изометрия *всей плоскости*. Приведённая аксиома имеет генетическую связь с Эрлангенской программой Ф. Клейна, о которой речь пойдёт дальше. Но у неё есть недостаток, о котором говорится в учебнике [3] на с. 388. Там сказано, что «точного определения величины угла [в учебнике] не дано. Полное изложение теории измерения углов, опирающееся только на принятые нами основные понятия и перечисляемые далее аксиомы, является довольно трудным делом, но оно может быть проведено с полной строгостью. Поэтому мы и не считаем величину угла ещё одним основным понятием».

Автор этой статьи решил сблизить аксиому 4 с четвёртым евклидовым постулатом: у Евклида «прямые углы равны» (что можно толковать как их изометрию), у нас изометричны углы, величины которых равны. Для этого пришлось ввести понятие величины угла в основные понятия.

Аксиома 5 (рис. 5). *Через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с исходной прямой.*

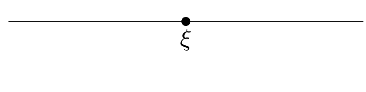


Рис. 5

Геометрию, основанную на аксиомах 1–5, мы, собственно, и обозначили буквой E. Она и есть планиметрия Евклида: все теоремы из «Начал» можно строго обосновать в нашей аксиоматической системе, ибо все постулаты Евклида входят в нашу аксиоматическую систему (хотя многие теоремы, сформулированные Евклидом, нельзя доказать, пользуясь лишь его постулатами, а пользуясь нашими аксиомами — можно).

В геометрии Лобачевского пятая аксиома звучит так: *через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с исходной.*

На протяжении двух тысячелетий делались попытки вывести пятый постулат Евклида из остальных. Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) убедил самого себя, что вывести пятый постулат из остальных невозможно (в одном из писем Гаусс указал дату, когда это произошло — 1792 год). Но он не стал публиковать свои мысли об этом. Два гения трагической судьбы — профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856) и Янош Бойяи (1802–1860) — математик-любитель, живший в Австрийской империи, очень далеко развили геометрию, в которой евклидов пятый постулат заменён на противоположный. Первая публикация Лобачевского на эту тему «О началах геометрии» вышла в «Казанском вестнике» за 1829–30 гг., Бойяи опубликовал свой текст как приложение к книге по геометрии своего отца, которая вышла в 1832 году. Впоследствии Лобачевский вывел аналог теоремы косинусов в новой геометрии, где тригонометрические функции заменялись гиперболическими. Это ли не доказательство непротиворечивости новой геометрии? Ведь противоречие в геометрии привело бы к противоречию в арифметике. Аналог теоремы синусов получил Бойяи. Они верили в то, что создали новую геометрию, новый математический мир, однако не дожили до момента, когда их усилия были признаны. Но когда это произошло, новая геометрия получила имя Лобачевского (иногда Бойяи — Лобачевского).

В 1838–40 гг. профессор Дерптского университета Фердинанд Готлибович Миндинг (1806–1885) получил формулы для выражения стороны треугольника на поверхности постоянной отрицательной кривизны через длины двух других сторон и угол между ними, а в 1868 г. Эудженио Бельтрами (1835–1900) заметил, что эти формулы совпадают с формулами Лобачевского. Всё это стало толчком для Клейна (1849–1925) создать в 1871 г. (на базе проективной метрики Артура Кэли (1821–1895)) проективную модель плоскости Лобачевского (и тем установить невозможность вывода пятого постулата Евклида из остальных). Более доступную модель предложил Пуанкаре (1854–1912). Историю обоснования геометрий, как уже было сказано, завершил в 1899 году Давид Гильберт[1)].

Рассуждать о геометрии Лобачевского мы будем в конце статьи, а сейчас закончим разговор о геометрии Евклида. Сначала докажем несколько теорем из евклидовых «Начал», используя нашу аксиоматику. Но прежде всего нужно сказать кое-что о доказательствах.

Первая из теорем будет сформулирована и доказана дважды. В первый раз будет дословно приведён текст из учебника [4] Андрея Петровича Киселёва (1852–1940) — учебника, который сыграл несравненную роль

[1)] С долгой историей признания неевклидовой геометрии, которая не закончилась с публикацией книги Гильберта, читатель может познакомиться по статье А. Пападопулоса [5].

в геометрическом образовании в нашей стране и по которому автора учили геометрии.

Теорема. *Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны*[2].

Это формулировка теоремы из учебника Киселёва, а вот

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (приводится рисунок), у которых $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$. Требуется доказать, что треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1. Здесь даётся сноска: «Для выполнения указанных в этом параграфе наложений иногда приходится накладываемый треугольник перевернуть другой стороной». Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка C совместится с точкой C_1, вследствие равенства $\angle A = \angle A_1$ сторона AB пойдёт по стороне A_1B_1, а вследствие равенства этих сторон точка B совпадёт с B_1, поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (так как две точки можно соединить только одной прямой) и треугольники совпадут, значит, они равны. □

Приведём другую формулировку и доказательство того же результата, используя построенную систему аксиом.

Но прежде всего надо дать определение понятия «треугольник» в нашей системе аксиом. *Треугольником* назовём[3] совокупность точек, общих для некоторого угла и полуплоскости, граница которой пересекает обе стороны угла и содержит его вершину (см. рис. 6).

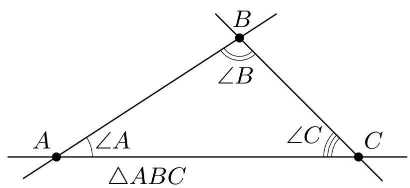


Рис. 6

Если вершину исходного угла обозначить буквой A, а буквами B и C обозначить точки пересечения полуплоскости и сторон угла, то сам треугольник будем обозначать $\triangle ABC$, точки A, B и C будем называть *вершинами*, а отрезки $[A, B]$, $[A, C]$ и $[B, C]$ — *сторонами* треугольника ABC; углы BAC, CBA и BCA (их называют *внутренними* углами треугольника) будем иногда обозначать $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$. Нетрудно понять, что треугольник определяется своими вершинами.

---

[2] Под равенством фигур подразумевается их совпадение при наложении.

[3] Определить понятие «треугольник» можно по-разному. Данное определение удобно для наших целей.

Теорема (признак изометрии треугольников по сторонам и углу между ними). *Если длины двух сторон и величины углов, заключённых между ними, у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны, то сами треугольники совпадают при наложении (или, что то же, — эти треугольники изометричны).*

Доказательство. По условию $\widehat{A} = \widehat{A}_1$. Следовательно (из аксиомы 4), $\angle A \simeq \angle A_1$. Это значит, что при наложении угла $\angle A_1$ на угол $\angle A$ луч $r(A_1, B_1)$ наложится на луч $r(A, B)$, а луч $r(A, C)$ наложится на луч $r(A_1, C_1)$. Ввиду равенства длин сторон $|AB| = |A_1B_1|$, точки B и B_1 (в силу аксиомы 2) при наложении совпадут; аналогично доказывается, что точки C и C_1 также совпадут. То есть при наложении совпали вершины, а значит (вспомним, что треугольник определяется вершинами), и сами треугольники наложились один на другой. □

Надо подчеркнуть разницу между двумя доказательствами признака равенства треугольников. Во втором доказательстве все логические ходы мотивированы отсылкой либо на условие теоремы, либо на аксиому, либо на определение, либо на уже объяснённый факт. В первом доказательстве этого не было (там вообще только одна ссылка на аксиому 1). Хорошо это или нет, как надо преподавать геометрию, чему надо учить школьников на уроках геометрии и как следует писать школьные учебники по этому предмету, — каждому нужно находить ответы на эти вопросы самостоятельно, а обсуждаться они должны в другом месте.

Следствие (теорема о равнобедренном треугольнике). *Величины углов при основании равнобедренного треугольника равны.*

Доказательство. Действительно, пусть у треугольника ABC сторона $[B, C]$ — основание, а $[A, B]$ и $[A, C]$ — равные по длине боковые стороны. По теореме 2 треугольники ABC и ACB совпадают при наложении, и значит, $\angle A = \angle B$. □

Именно такое доказательство (вырежем, перевернём и наложим обратно) приводил преподаватель математики Чарльз Лютвидж Доджсон, известный всем как Льюис Кэрролл. Но его смущало то, что он не понимал, на что надо сослаться. А мы сослались на аксиому об изометрии.

Пусть точка D стороны $[B, C]$ треугольника ABC делит эту сторону пополам. Тогда отрезок $[A, D]$ называется *медианой* треугольника ABC; точка H прямой $l(B, C)$ называется основанием высоты треугольника ABC, если величины углов AHB и AHC равны; в этом случае отрезок $[A, H]$ называется *высотой* треугольника ABC.

Теорема (о медиане равнобедренного треугольника). *Медиана равнобедренного треугольника совпадает с его высотой.*

Доказательство. Действительно, пусть треугольник ABC равнобедренный ($|AB| = |AC|$) и D — середина $[B, C]$, т. е. $[A, D]$ — медиана. Тогда по признаку изометрии по сторонам и углу между ними треугольники ADB и ADC изометричны (так как $|AB| = |AC|$ по условию, $|BD| = |DC|$ по определению медианы, $\widehat{B} = \widehat{C}$ по теореме о равнобедренном треугольнике), а значит, $\widehat{BDA} = \widehat{CDA}$. □

Можно последовательно доказывать все теоремы «Начал» одну за другой, и тогда будет построена без пробелов вся геометрия из «Начал» Евклида.

А теперь нам надлежит построить «модель» евклидовой геометрии — объект, в котором имеются и точки, и прямые, и расстояния, и углы, и величины углов, но при этом все аксиомы становятся арифметическими теоремами. Эту модель изучают на первых лекциях в институтах и университетах. Её называют аналитической геометрией. С элементами аналитической геометрии учеников знакомят и в школе.

Аналитический подход к геометрии Декарта — Ферма

Основная мысль этого подхода состоит в том, что *геометрию можно строить на языке арифметики и анализа.* Геометрия Евклида, изложенная на «арифметико-аналитическом языке», получила название *аналитической геометрии*. Её создателями были два выдающихся учёных XVII века — Рене Декарт (1596–1650), Пьер Ферма (1607–1665). Аналитическую планиметрию Декарта — Ферма обозначим DF.

Чтобы разобраться с этой геометрией, вернёмся к истокам, чуть ли не к нашим дошкольным годам. Возьмём лист бумаги, отточенный карандаш, масштабную линейку, угольник и начнём чертить. Пусть начерченная прямая будет параллельна длинной верхней стороне листа, и далее мы будем называть её горизонтальной прямой. Выберем на горизонтальной прямой точку, которую обозначим буквой O. С помощью угольника или теоремы о медиане проведём через эту точку перпендикулярную прямую. Горизонтальную прямую назовём осью Ox_1, вторую прямую — вертикальной осью или осью Ox_2. В школе эти оси называют осями Ox и Oy, но нам удобнее, чтобы были Ox_1 и Ox_2. Ткнём мысленно или карандашом в любое место бумаги и обозначим эту точку буквой X. С помощью угольника и линейки (или в воображении с помощью пятой аксиомы) проведём через X прямую, параллельную оси Ox_2, и точку пересечения с осью Ox_1 обозначим X_1. Аналогично на оси Ox_2 получим точку X_2. С помощью масштабной линейки (или в силу наличия расстояния) вычислим расстояния $|OX_1|$ и $|OX_2|$. Эти расстояния будут состоять из числа дециметров, сантиметров, миллиметров и т. д. На этом придётся расстаться с дошкольниками, но чуть постарше человек может вообразить, что линейка имеет деления любых долей метра. Тогда числа $|OX_i|$, $i = 1, 2$, которые обозначим x_i, будут представлены в долях метра бесконечными десятичными дробями, т. е., как было сказано, вещественными числами.

Теперь нам надлежит разобраться с углами. Проведём полуокружность в «верхней полуплоскости» радиуса единица с центром в точке O. Пусть она пересекает ось Ox_1 в точках B с координатами $(-1, 0)$ и A с координатами $(1, 0)$, а ось Ox_2 — в точке C с координатами $(0, 1)$. Величину $\widehat{AOB}$ развёрнутого угла AOB по определению объявляют обычно либо числом π, либо $180°$. Мы остановимся на π. Углы AOC и COB по построению изометричны, и, значит, их величины равны $\pi/2$. Угол AOC разделим с помощью теоремы о равнобедренном треугольнике AOC пополам. Луч, идущий из точки O и содержащий высоту треугольника AOC, делит угол AOC пополам. Каждый из получившихся углов имеет величину, равную $\pi/4$. Аналогично получим четыре угла величины $\pi/8$ и т. д. Это позволяет вычислить величину любого угла, образованного лучом $r(O, A)$ и лучом с вершиной в O, пересекающим нашу полуокружность в точке D.

Линейное уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ задаёт прямую (причём числа, определяющие прямую, определены с точностью до множителя, отличного от нуля). Эту прямую можно изобразить на бумаге, и наоборот: если нарисована прямая на бумаге, то её можно задать в виде линейного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. (Этому тоже учат в школе.) Мы получили копию евклидовой геометрии на бумаге, причём расстояния между точками и величины углов получают арифметико-аналитические выражения. А именно: если произвольным «бумажным» точкам A, B и C соответствуют «числовые» точки $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ и $c = (c_1, c_2)$, то $\cos\widehat{ABC} = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$, где $(\xi_1, \xi_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$, $(\eta_1, \eta_2) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$.

И теперь — важнейший факт, о котором уже было сказано: *все аксиомы от первой до пятой — это теоремы построенной аналитической геометрии*! (Отсюда следует непротиворечивость E.)

Убедимся в этом (автор обращается здесь к интересующимся школьникам старших классов).

1) Выбрав две точки $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, проведём через них прямую. Она задаётся параметрической формулой

$$x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \quad x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2).$$

А что других прямых, проходящих через точки a и b, нет, докажите сами.

2) Выберем любую прямую и на ней точку O, а её «арифметический» образ обозначим o. Уравнение прямой в параметрической форме имеет вид $x = o + \lambda a$, где $a = (a_1, a_2)$, $a_1^2 + a_2^2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда один луч описывается этой формулой с $\lambda \geqslant 0$, а другой с $\lambda \leqslant 0$.

3) Запишем уравнение выбранной прямой в виде $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Она делит плоскость на две полуплоскости $a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant b$ и $a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b$ со свойствами, нужными в евклидовой геометрии.

4) Выбрав два угла, величины которых одинаковы, переведём сдвигом вершины каждого из углов в начало координат, а затем поворотом совместим перенесённые углы.

5) Наконец, если задана прямая $a_1x_1+a_2x_2=b$ и точка $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, на ней не лежащая ($a_1\xi_1 + a_2\xi_2 \neq b$), то прямая $a_1x_1 + a_2x_2 = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$ не будет пересекаться с исходной. Единственность докажите самостоятельно.

Остался последний вопрос, связанный с построенными двумя геометриями: каково взаимоотношение между этими двумя геометриями E и DF? Мы доказали, что всё, что мог бы доказать Евклид, можно доказать и в аналитической геометрии. Но может быть, в аналитической геометрии можно доказать больше? Оказывается, что нет: обе геометрии изоморфны (т. е. равносильны). Для доказательства изоморфизма надо совершить переход от E к DF. Сделаем это.

При описании аксиоматики было сказано, что в E существует хотя бы одна прямая l, и эта прямая — непустое множество точек. Возьмём на l одну из них и обозначим буквой A. Снова: из описания аксиоматики следует, что существует точка B вне l. Найдём (по аксиоме 2) на l такую точку C, что $|AB| = |AC|$. Получили равнобедренный треугольник ABC. Из теоремы о равнобедренном треугольнике получаем, что $\widehat{B} = \widehat{C}$. Пусть O — середина стороны $[B, C]$. По теореме о медиане равнобедренного треугольника $[A, O]$ — высота треугольника ABC. Прямые l_1 и l_2 (по аксиоме 1 проходящие через точки B и C и через точки A и O), таким образом, перпендикулярны. Сопоставим прямым l_1, l_2 оси Ox_1, Ox_2 в DF. Внутри угла AOB возьмём произвольную точку X, не лежащую ни на l_1, ни на l_2. Точки пересечения прямых l_1 и l_2 с прямыми, по аксиоме 5 проходящими через X параллельно l_2 и l_1, обозначим X_1 и X_2. Сопоставление $F\colon X \to (|OX_1|, |OX_2|)$ приводит к взаимно однозначному соответствию точек угла AOB и первого квадранта на координатной плоскости. Аналогично строится соответствие точек других углов между l_1 и l_2 с точками других квадрантов в DF. С помощью теоремы Пифагора из E читатель сможет доказать равенство $|AB| = |F(A), F(B)|$ и возможность отобразить изометрично любой угол BAC из E в угол из DF, образованный лучами $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 = 0\}$ и лучом в верхней полуплоскости, наклонённым к оси Ox_1 под углом величины $\widehat{BAC}$.

Итак, обе геометрии E и DF — одна определённая аксиоматически, а другая — арифметическая модель этой аксиоматической теории, — одинаковы, как математики говорят, изоморфны. Поэтому, в частности, теоремы можно доказывать и синтетически (по Аристотелю и Евклиду), и аналитически.

Осталось последнее — построить модель плоскости Лобачевского. Опишем модель Пуанкаре, которая задаётся четвёркой $(\mathbb{C}_+, \mathcal{P}_{\mathbb{C}_+}, d_{\mathbb{C}_+}, \angle_{\mathbb{C}_+})$, где $\mathbb{C}_+$ — «точки» модели — это совокупность комплексных чисел $z = x + iy$, у которых мнимая часть положительна (т. е. $y > 0$). Совокупность прямых $\mathcal{P}_{\mathbb{C}_+}$ модели состоит из вертикальных лучей полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и из полуокружностей, центры которых расположены на вещественной оси, т. е. это либо множества точек с фиксированной вещественной частью, либо совокупность таких z из $\mathbb{C}_+$, для которых $|z-\alpha|=R$ при заданных $\alpha\in\mathbb{R}$ и $R>0$. Легко видеть, что через любую пару различных точек z и z' из $\mathbb{C}_+$ проходит ровно одна такая полуокружность. Для определения расстояния на полуплоскости $\mathbb{C}_+$ необходимо дать сначала определение *двойного отношения* $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ комплексных чисел $z_i\in\mathbb{C}$, $1\leqslant i\leqslant 4$, равного $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$. Так вот, расстояние между точками $A = z$ и $B = \zeta$ из $(z, \zeta \in \mathbb{C}_+)$, не лежащих на одном вертикальном луче, определяется модулем логарифма двойного отношения $[z, \zeta, a, b]$, где a и b — точки пересечения вещественной оси с окружностью, содержащей прямую AB модели, т. е. $d(A, B)=|\ln[z, \zeta, a, b]|$. Расстояние на вертикальных лучах определяется так: если $A = x + i\alpha$, $b=x+i\beta$, то $d(A, B) = |\ln(\alpha/\beta)|$. Наконец, $\angle_{\mathbb{C}_+}$ — это угол между прямыми в $\mathbb{C}_+$, величина которого понимается в обычном евклидовом смысле.

Давайте в заключение немного пофилософствуем. Сначала назовём имена тех, кто повстречался на нашем пути. Это Аристотель, Евклид, Рене Декарт, Пьер Ферма, Карл Фридрих Гаусс, Николай Иванович Лобачевский, Янош Бойяи, Фердинанд Готлибович Миндинг, Эудженио Бельтрами, Артур Кэли, Феликс Христиан Клейн, Анри Пуанкаре, Давид Гильберт, Андрей Петрович Киселёв и Андрей Николаевич Колмогоров.

А время, отделяющее Аристотеля и Евклида от Гильберта и Колмогорова, огромно: в него фактически уложилось время всей науки, созданной человечеством. А как в сущности близки начала и концы: едва изменив начальные постулаты Евклида, мы достигли конечной точки.

Но напомним, в чём состояли изменения. Во-первых, сразу была введена *метрика* в геометрию (а понятие метрического пространства было введено Морисом Фреше в 1906 году), во-вторых, использовалось понятие *вещественной прямой* (это понятие формировалось — усилиями Больцано, Вейерштрасса, Дедекинда, Кантора, Коши и некоторых других математиков — весь XIX век), наконец, в-третьих, было использовано понятие *изометрии*, в котором нашёл отражение общий взгляд Клейна на все геометрии (аффинную, проективную, Евклида, Лобачевского, Римана и другие, выраженный в его Эрлангенской программе), согласно которому геометрия характеризуется многообразием с действующей на нём группой отображений).

Все эти идеи внёс в аксиоматику Колмогоров, но они в зародыше были и у Евклида.

Гильберт писал свою книгу в пору, когда все эти понятия не устоялись. К тому же он старался избежать понятия числа, которого не было у Евклида. Это и привело к громоздкости его аксиоматики и в некотором смысле удалённости её от евклидовской.

А замечательный учебник Киселёва [4] при очень незначительной корректировке (где давалось бы понятие о вещественном числе, делались различия между геометрической фигурой, такой как отрезок и угол, и её величиной — длиной отрезка и величиной угла, где вводилось бы понятие наложимости или изометрии, а аксиомы 1–5, представленные в чуть упрощённой форме, объявлялись свойствами линий и углов — чтобы не пугать детей словами «постулат» и «аксиома»), — такой учебник был бы доступен школьникам. При этом доказательства приобрели бы ту форму, которую задумал Аристотель и к которой не смог бы прицепляться придирчивый математик нашего времени (конечно, мы всерьёз не касались проблем «логического вывода», считая это простительным). А после курса аналитической геометрии можно было бы сказать, что эта геометрия изоморфна той, что учили в школе. Читателю предоставляем судить о том, выполнен замысел, объявленный в аннотации, или нет.

Список литературы

[1] «Начала» Евклида. Книги I–VI. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.

[2] *Hilbert D.* Grundlagen der Geometrie. Leipzig und Berlin: Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1930. (Русс. пер.: *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.)

[3] *Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С.* Геометрия. М.: МЦНМО, 2011.

[4] *Киселёв А. П., Рыбкин Н. А.* Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. М.: Дрофа, 1995.

[5] *Пападопулос А.* О гиперболической геометрии и истории её признания // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 10–29.

Владимир Михайлович Тихомиров, мехмат МГУ
`vmtikh@googlemail.com`

Задачи с двумя известными

М. А. Горелов

Оптимизационные задачи в геометрии треугольника изучаются начиная с античных времён. Типичная формулировка выглядит следующим образом. Задано значение одной величины, связанной с треугольником. Требуется найти такой треугольник, у которого другая величина максимальна (или минимальна). Например, среди всех треугольников с данным периметром найти тот, у которого площадь максимальна. Или при заданном радиусе вписанной окружности найти минимальный периметр треугольника.

Но ведь треугольник задаётся тремя параметрами. Значит, если зафиксировать две величины, то всё ещё останется свобода для варьирования треугольника. И можно искать «экстремальные» треугольники. Задачи такого рода в литературе практически не встречаются. О некоторых из них будет рассказано далее[1].

Основные результаты получаются средствами старой доброй синтетической геометрии. Но уместиться в рамки школьной программы категорически не удаётся. Поэтому напомним формулировки некоторых теорем, которые понадобятся в дальнейшем. По непонятной пока причине все они относятся к числу наиболее красивых результатов элементарной геометрии.

§ 1. Золотые теоремы

Пусть вокруг треугольника описана окружность Ω радиусом R с центром O и в тот же треугольник вписана окружность ω радиусом r с центром I. Тогда расстояние между их центрами $d = OI$ удовлетворяет равенству $d^2 = R^2 - 2Rr$. Это равенство называют формулой Эйлера. Из него

[1] Во многих местах я оставляю «зацепки», отправляясь от которых можно провести маленькое самостоятельное исследование. Иногда это делается с явным указанием на такую возможность, а иногда — без оного. Вообще, в статье предлагается некая новая точка зрения. А смена точки зрения зачастую позволяет относительно легко получать новые результаты. Поэтому стоит для каждого полученного ниже результата поискать аналоги, обобщения и т. п.

немедленно следует неравенство

$$2r \leqslant R. \tag{1}$$

Поскольку для равностороннего треугольника выполняется равенство $2r = R$, этот результат можно сформулировать как решение двух оптимизационных задач. Среди всех треугольников с заданным радиусом описанной окружности наибольший радиус вписанной окружности имеет равносторонний треугольник. А среди всех треугольников с заданным радиусом вписанной окружности наименьший радиус описанной окружности имеет правильный треугольник.

Формула Эйлера даёт необходимые условия того, чтобы для двух заданных окружностей существовал треугольник, для которого меньшая окружность является вписанной, а большая — описанной. Это утверждение можно обратить.

А именно, если радиусы r и R двух окружностей и расстояние d между их центрами удовлетворяют условию Эйлера, то для любой точки A на окружности радиусом R найдётся такой треугольник с вершиной A, что для него одна окружность является вписанной, другая — описанной. Это утверждение является простейшим вариантом теоремы Понселе.

Отметим середины M_a, M_b и M_c сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. Окружность, проходящая через точки M_a, M_b и M_c, называется окружностью Эйлера[2)] треугольника ABC.

Карл Вильгельм Фейербах установил, что вписанная окружность треугольника касается внутренним образом его окружности Эйлера.

И ещё один, более простой результат, также принадлежащий Эйлеру.

Точка M пересечения медиан треугольника ABC лежит на отрезке, соединяющем центр описанной окружности O и ортоцентр H того же треугольника, причём $OM : MH = 1 : 2$. Прямая, на которой лежат точки O, M и H, называется прямой Эйлера.

Доказательства этих результатов можно найти, например, в [2, 3, 6, 7].

§ 2. Основные результаты

Придадим этим классическим теоремам более современную динамическую форму. Предположим, в наших руках есть математический конструктор, позволяющий проводить геометрические построения «циркулем и линейкой».

[2)] Эйлер доказал, что этой окружности принадлежат основания H_a, H_b и H_c высот AH_a, BH_b и CH_c треугольника ABC, а также середины отрезков AH, BH и CH, где H — ортоцентр треугольника. По этой причине окружность Эйлера часто называют окружностью девяти точек.

Отметим три точки A_0, B_0 и C_0, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками и построим вписанную окружность ω и описанную окружность Ω треугольника $A_0B_0C_0$. Отметим на окружности Ω точку A. Проведём из этой точки касательные к окружности ω и зафиксируем точки B и C их пересечения с окружностью Ω. Соединив точки B и C, получим треугольник ABC.

Теперь можно «зацепить» мышкой точку A и протащить её по окружности Ω (см. рис. 1). Треугольник ABC будет скользить между окружностями ω и Ω, оставаясь всё время описанным вокруг меньшей окружности и вписанным в большую[3)].

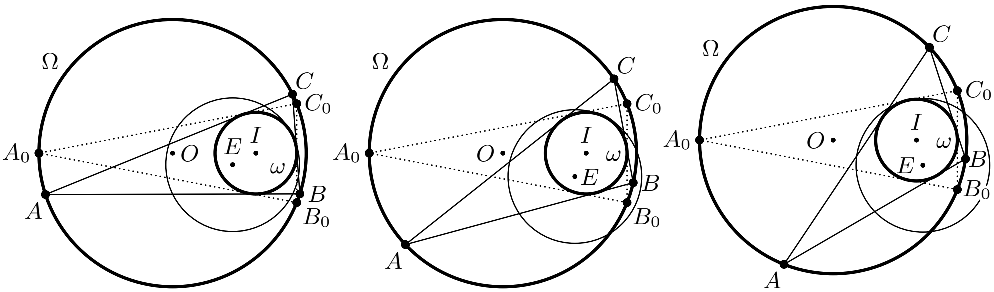


Рис. 1

Добавим теперь на эту картинку окружность Эйлера. При движении точки A по окружности Ω окружность Эйлера будет катиться по вписанной окружности ω, как обруч по талии гимнастки.

Треугольник $M_aM_bM_c$ гомотетичен треугольнику ABC с коэффициентом гомотетии $-1/2$ и центром M. Следовательно, радиус окружности Эйлера равен $R/2$. А значит, при движении точки A по окружности Ω центр E окружности Эйлера будет двигаться по окружности ϖ с центром I и радиусом $R/2 - r$.

Чуть позже мы подробнее изучим характер движения окружности Эйлера. Пока же нам понадобятся два следующих утверждения.

- При любом положении точки A центр окружности Эйлера принадлежит окружности ϖ.
- Когда точка A попадает на прямую OI, центр окружности Эйлера тоже лежит на этой прямой, причём обе точки пересечения окружности ϖ с прямой OI оказываются «задействованными».

[3)] Меняя точки A_0, B_0 и C_0, можно убедиться, что всё сказанное выполняется при любых соотношениях радиусов окружностей.

Первое из этих утверждений было только что доказано. Второе почти очевидно, поскольку в данной ситуации получается равнобедренный треугольник.

А теперь взглянем на точку пересечения медиан M. В силу упомянутой выше гомотетичности, она всегда находится на отрезке OE и делит его в отношении $OM : ME = 2 : 1$. При движении точки A по окружности Ω точка O остаётся на месте, а центр окружности Эйлера движется по окружности ϖ. Поэтому точка M движется по окружности, центр которой расположен на отрезке OI на расстоянии $\frac{2}{3}d$ от точки O, а радиус равен $\frac{1}{3}(R-2r)$ (см. рис. 2).

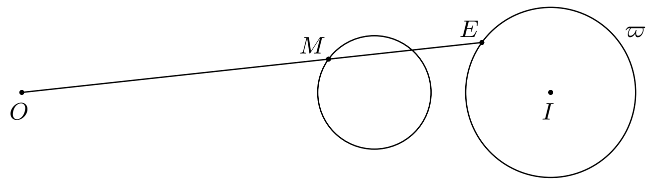


Рис. 2

Этот красивый результат пока не вошёл в учебники, но не является новым (см., например, [1, 2]).

Из доказанного результата получим четыре неравенства, представляющих определённый интерес:

$$\frac{2d-R+2r}{3} \leqslant OM \leqslant \frac{2d+R-2r}{3}$$

и

$$\frac{d-R+2r}{3} \leqslant IM \leqslant \frac{d+R-2r}{3}.$$

А теперь можно вспомнить теорему о прямой Эйлера. Пусть точка A движется по окружности Ω. Точка O при этом остаётся на месте. Точка M, как только что установлено, движется по окружности. Значит, и ортоцентр H треугольника ABC движется по окружности. Центр этой окружности лежит на прямой OI. Расстояние от точки O до центра этой окружности равно $2d$, а радиус окружности равен $R-2r$.

Из неравенства (1) и формулы Эйлера следует, что $R-2r \leqslant d$ и тем более $R-2r < 2d$, т. е. точка O лежит вне окружности, по которой движется точка H. Поэтому $2d-R+2r \leqslant OH \leqslant 2d+R-2r$ или

$$2\sqrt{R^2-2Rr}-R+2r \leqslant OH \leqslant 2\sqrt{R^2-2Rr}+R-2r.$$

Упражнение 1. Получите аналогичные оценки для расстояния IH.

Упражнение 2 (American Mathematical Monthly, problem 11306). Докажите неравенства

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{4r-R}{R}\leqslant\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant\frac{a}{2}.$$

В каких случаях они обращаются в равенства? (Как обычно, a, b, c — стороны, p — полупериметр треугольника.)

Упражнение 3 («Математика в школе», задача 260). Докажите, что $OH \geqslant \sqrt{2}\, IH$.

Упражнение 4 [11, 2004 г., 1927]. Пусть ABC — неравносторонний треугольник, O и I — центры описанной и вписанной окружностей, H — точка пересечения высот треугольника. Могут ли точки O, I и H быть вершинами равнобедренного треугольника?

В терминах оптимизационных задач полученный результат может быть сформулирован следующим образом. Если радиус описанной около треугольника окружности равен R, а радиус его вписанной окружности равен r, то наибольшее возможное расстояние между центром описанной окружности и ортоцентром этого треугольника равно $2\sqrt{R^2-2Rr}+R-2r$, а наименьшее составляет $2\sqrt{R^2-2Rr}-R+2r$. В обоих случаях оптимальными являются равнобедренные треугольники.

И ещё один результат, получающийся из той же картинки. Рассмотрим треугольник OIH. Если радиусы вписанной и описанной окружностей заданы, то основание $OI = d$ этого треугольника фиксировано. А вершина H лежит на окружности, центр которой принадлежит прямой OI. Значит, высота треугольника не превосходит радиуса $2R - r$ этой окружности. Следовательно, площадь треугольника не превосходит $d(R/2 - r)$.

На первый взгляд, полученные результаты «тянут» на олимпиадные задачки. Может быть, даже не очень хорошие, поскольку использованный аппарат довольно сложен, а полученные ответы довольно громоздки. Но следствия из них заставляют думать иначе.

§ 3. Первые следствия

А теперь поиграем в формулы. Известно, что

$$OM^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2), \tag{2}$$

где a, b, c — стороны треугольника (см., например, задачу 490б из [6] или статью [1]). Следовательно,

$$4R^2+12Rr-4r^2-4d(R-2r)\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 4R^2+12Rr-4r^2+4d(R-2r).$$

Согласно другой формуле (см., например, задачу 490а из [6]),

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8Rr. \tag{3}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 8R^2+40Rr-4r^2-8d(R-2r)\leqslant \\ \leqslant (a+b+c)^2\leqslant 8R^2+40Rr-4r^2+8d(R-2r). \end{aligned} \tag{F}$$

Два других доказательства этих неравенств, аналитическое и алгебраическое, можно найти в [5]. Первое из них интересно, пожалуй, только очень точным выбором независимой переменной. Второе будет полезно изучающим элементарную алгебру многочленов. А вместе все три доказательства хорошо демонстрируют тезис о единстве математики.

Доказанное неравенство (F) названо в [10] основным (fundamental). Это обусловлено большим числом его следствий. Приведём примеры.

Хорошо известно, что среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный. Это утверждение эквивалентно неравенству $(a+b+c)^2\leqslant 27R^2$. Данное неравенство является следствием только что полученного. Для того чтобы доказать это, достаточно установить, что

$$8R^2+40Rr-4r^2+8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r)\leqslant 27R^2. \tag{4}$$

Изолируем радикал:

$$8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r)\leqslant 19R^2-40Rr+4r^2,$$

возведём обе части полученного неравенства в квадрат и разложим на множители разность правой и левой частей [4)]. Получим

$$(353R^2-60Rr+4r^2)(R-2r)^2\geqslant 0.$$

Это неравенство уже очевидно, поскольку $R\geqslant 2r$.

Неравенство $(a+b+c)^2\leqslant 27R^2$, так же как и неравенство (4), из которого оно было получено, является точным в том смысле, что для некоторых треугольников оно обращается в равенство. Но неравенство (4) всё-таки в некотором смысле «точнее». А именно, для любых R и r (таких, что $R\geqslant 2r$) найдётся треугольник с такими радиусами описанной и вписанной окружностей, для которого неравенство обращается в равенство. Для неравенства $(a+b+c)^2\leqslant 27R^2$ это не так. Оно обращается в равенство только при условии $R=2r$, т. е. для равностороннего треугольника.

---

4) Вручную выполнять эти и подобные выкладки, может быть, и затруднительно. Но если есть программа для символьных вычислений, то все они становятся совсем элементарными.

Упражнение 5. Докажите, что среди всех треугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьший периметр имеет правильный.

Рассмотрим чуть более тонкий результат (задача 619 из [6]):

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt{6Rr}.$$

Очевидно, достаточно доказать, что

$$54Rr \leqslant 8R^2+40Rr-4r^2-8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r).$$

Изолируем радикал:

$$8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r) \leqslant 8R^2-14Rr-4r^2.$$

Дальше можно воспользоваться предложенной выше стандартной схемой. А можно заметить[5)], что

$$8R^2-14Rr-4r^2 = 2(4R+r)(R-2r).$$

Дальнейшее уже совсем просто.

Упражнение 6 (задача 10.34 из [3]). Докажите, что

$$64Rr-20r^2 \leqslant (a+b+c)^2 \leqslant 16R^2+16Rr+3r^2.$$

Взглянем на ситуацию под несколько иным углом. Для пущей конкретности будем говорить о неравенстве (4) или, что то же самое, о неравенстве

$$(a+b+c)^2 \leqslant 8R^2+40Rr-4r^2+8\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r).$$

Перепишем его в безразмерной форме:

$$\left(\frac{a+b+c}{R}\right)^2 \leqslant 8+20\frac{2r}{R}-\left(\frac{2r}{R}\right)^2+8\sqrt{1-\frac{2r}{R}}\left(1-\frac{2r}{R}\right).$$

Параметр $2r/R$ можно назвать коэффициентом правильности треугольника: если этот коэффициент равен единице, то треугольник правильный; чем меньше значение этого коэффициента, тем более «вытянутым» будет треугольник.

Поскольку при гомотетии с коэффициентом k и стороны треугольника, и радиусы его вписанной и описанной окружностей меняются в k раз, полученный выше результат можно сформулировать следующим образом: если коэффициент правильности треугольника равен μ, то максимальное

[5)] Можно было бы поступить так же и в предыдущем случае. Поэтому становится понятно, почему $(R-2r)^2$ вынеслось за скобки.

значение квадрата отношения его периметра к радиусу описанной окружности равно
$$8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

Рассмотрим функцию
$$f(\mu)=8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

Очевидно, что её производная
$$f'(\mu)=20-2\mu-12\sqrt{1-\mu}$$
при $\mu\leqslant 1$ положительна. Значит, функция $f(\mu)$ возрастает.

А тогда тот же результат можно сформулировать следующим образом: если коэффициент правильности треугольника не превосходит μ, то максимальное значение квадрата отношения его периметра к радиусу описанной окружности равно
$$8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

При $\mu=1$ получим безусловный результат: для любого треугольника отношение периметра к радиусу описанной окружности не превосходит $3\sqrt{3}$. Таким образом, этот классический результат является не просто следствием, а частным случаем результата, полученного в начале параграфа.

§ 4. Тождества и многочлены

Теперь мы вышли на оперативный простор. Дело в том, что радиус описанной окружности R, радиус вписанной окружности r и полупериметр p уже однозначно определяют треугольник. А значит, через них можно выразить любую величину, связанную с треугольником, и как следствие получить оценку этой величины в терминах R и r.

Например, из равенств (3) и
$$(2p)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ac)$$
получается тождество
$$ab+bc+ac=r^2+4Rr+p^2.$$
Поэтому из полученных выше оценок p^2 через R и r следуют аналогичные оценки для $ab+bc+ac$:
$$2R^2+6Rr-2r^2-2d(R-2r)\leqslant ab+bc+ac\leqslant 2R^2+6Rr-2r^2+2d(R-2r).$$

Из теоремы синусов несложно получить тождество $abc=4pRr$. Отсюда моментально находятся наибольшее и наименьшее значения произведения abc при заданных R и r.

Два использованных тождества вместе с равенством $a+b+c=2p$ можно суммировать в виде соотношения

$$(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-2pt^2+(r^2+4Rr+p^2)t-4pRr.$$

Вполне естественно, что многие элементы треугольника встречаются тройками. Поэтому можно образовать кубический многочлен, корнями которого являются элементы тройки. Регулярный способ вычисления коэффициентов таких многочленов предложен в [4, с. 31–33]. Таким образом можно доказывать новые неравенства.

Например, тройке $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где α,β,γ — углы треугольника, соответствует многочлен

$$t^3-\Big(1+\frac{r}{R}\Big)t^2+\Big(\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}\Big)t-\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}.$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}\leqslant\frac{3}{2},$$

многократно предлагавшееся на различных олимпиадах. Но можно получить и ещё много интересного.

Мы не будем останавливаться на дальнейших следствиях подробно, лишь перечислим несколько троек и соответствующих им многочленов.

- Тройка $(\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma)$ и многочлен

$$t^3-\frac{p}{R}t^2+\Big(\frac{p^2+r^2+4Rr}{4R^2}\Big)t-\frac{pr}{2R^2}.$$

- Тройка $(\operatorname{tg}\alpha,\operatorname{tg}\beta,\operatorname{tg}\gamma)$ и многочлен

$$t^3-\bigg(\frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2}\bigg)t^2+\bigg(\frac{p^2-4Rr-r^2}{p^2-(2R+r)^2}\bigg)t-\frac{2pr}{p^2-(2R+r)^2}.$$

- Тройка $\Big(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2},\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2},\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\Big)$ и многочлен

$$t^3-\Big(\frac{4R+r}{p}\Big)t^2+t-\frac{r}{p}.$$

- Тройка высот треугольника (h_a,h_b,h_c) и многочлен

$$t^3-\Big(\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}\Big)t^2+\Big(\frac{2p^2r}{R}\Big)t-\frac{2p^2r^2}{R}.$$

Большое число готовых результатов можно найти в [10].

Дальнейшее оставляем на усмотрение читателя. Значительное число «прототипов» можно найти в [3], а ещё большее — в [9, 10].

Упражнение 7 (Международная олимпиада, 1964 г.). Обозначим через a, b, c длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

Упражнение 8. Докажите для углов треугольника α, β, γ неравенство

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma\leqslant\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha).$$

На самом деле, два предыдущих неравенства — это в точности неравенство (1). Но, согласитесь, узнать его нелегко!

§ 5. Упрощения

В классической математике доказательство неравенств далеко не всегда является самоцелью. Гораздо чаще доказанное неравенство служит инструментом для решения других задач. Но чтобы инструмент было удобно применять, он должен быть простым.

Выше в § 3 была получена (см. (F)) следующая оценка для полупериметра треугольника:

$$p\leqslant\sqrt{2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R^2-2Rr}\,(R-2r)}. \tag{5}$$

Она довольно точная, но вот простой её назвать трудно. Поэтому естественно попробовать получить более грубые, но и более простые оценки. Выше несколько таких примеров было приведено. Они получались доказательством верхней оценки для правой части этого неравенства. Читатель мог убедиться, что когда такая оценка найдена, доказать её в общем-то несложно. А вот как её найти?

Попробуем разобраться в этом. Здесь нам будет полезен компьютер. Начнём с линейных оценок, т. е. будем искать неравенства вида

$$p\leqslant\lambda R+\sigma r.$$

Разделим неравенство (5) на R и выразим правую часть получившегося неравенства через параметр $\mu=2r/R$. Получим

$$\frac{p}{R}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{8+20\mu-\mu^2+8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu)}=f(\mu).$$

На рис. 3 приведён[6] график[7] функции $f(\mu)$ на отрезке $[0, 1]$. Глядя на него, можно почти сразу получить нужные результаты.

Прежде всего, видно, что функция $f(\mu)$ монотонно возрастает[8], значит, её значение не превосходит значения $3\sqrt{3}/2$ на правом конце отрезка. Отсюда немедленно получается уже доказанный результат $p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R$.

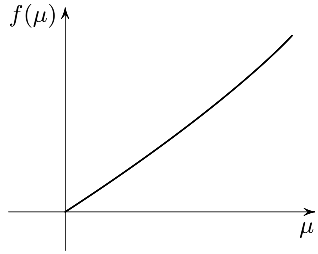


Рис. 3

Но можно получить гораздо более точную оценку, заметив, что график функции $f(\mu)$ на отрезке $[0, 1]$ лежит ниже хорды, соединяющей его концы. Содержащая эту хорду прямая является графиком функции

$$g(\mu) = 2 + \Big(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\Big)\mu.$$

Поэтому возникает гипотеза, что $f(\mu) \leqslant g(\mu)$. Доказать её уже несложно.

Возведём последнее неравенство в квадрат, изолируем член, содержащий радикал, и снова возведём получившееся неравенство в квадрат. Получим неравенство

$$\Big(\Big(2 + \Big(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\Big)\mu\Big)^2 - 2 - 5\mu + \frac{1}{4}\mu^2\Big)^2 \geqslant 4(1-\mu)^3.$$

Разность левой и правой частей этого неравенства — многочлен четвёртой степени. Но мы знаем, что графики функций $f(\mu)$ и $g(\mu)$ пересекаются в двух точках. Поэтому интересующий нас многочлен имеет два корня 0 и 1. А значит, он разлагается в произведение двух линейных множителей и квадратного трёхчлена, который, в свою очередь, нетрудно разложить на множители. Сделав это, придём к неравенству

$$\frac{1}{169}(229 - 132\sqrt{3})\mu(1-\mu)^2(169\mu + 334 + 216\sqrt{3}) \geqslant 0,$$

которое уже очевидно.

Таким образом, получаем неравенство $p \leqslant 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$. В § 3 фактически показано, что для любых R и r найдётся треугольник, для которого

---

[6] Здесь и далее важна качественная картина. Поэтому масштаб по оси ординат и сдвиг графика вдоль этой оси выбираются так, чтобы картина была наиболее наглядной. В данном случае был выбран сдвиг, равный 2, и фактически нарисован график функции $\frac{2\sqrt{3}}{9}(f(\mu) - 2)$.

[7] Этот и следующий графики я бы советовал читателю нарисовать в большем размере, маленький график не очень информативен.

[8] Ссылка на график, разумеется, не является доказательством. Но в данном случае картинка нужна только для того, чтобы сформулировать гипотезу. А для этого все средства хороши. Позже гипотеза будет строго доказана.

неравенство (5) обращается в равенство. Поэтому понятно, что это наилучшая из линейных оценок для полупериметра. Если кому-то кажется, что коэффициент при r слишком сложный, то это неравенство можно ещё огрубить, например, так: $p < 2(R+r)$.

Обратимся к более сложным, но и более точным квадратичным оценкам. Для этого запишем доказанное неравенство (см. (5))

$$p^2 \leqslant 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R^2 - 2Rr}\,(R - 2r)$$

в «безразмерной» форме

$$\frac{4p^2}{R^2} \leqslant 8 + 20\mu - \mu^2 + 8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu) = f(\mu).$$

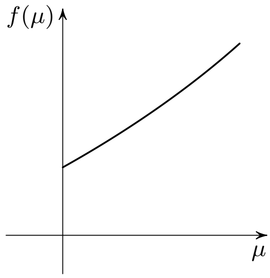


Рис. 4

Глядя на график функции $f(\mu)$ (см. рис. 4), можно прийти к гипотезе, что для любой точки $\mu_0 \in [0, 1]$ существует такой квадратный трёхчлен $g(\mu)$, что $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ для всех $\mu \in [0, 1]$ и $g(\mu_0) = f(\mu_0)$, а, значит, квадратичной оценки, которая лучше других одновременно для всех μ, не существует.

Попробуем найти наилучшую оценку в более узком классе квадратных трёхчленов. А именно, потребуем, чтобы для искомого квадратного трёхчлена g выполнялись равенства $g(0) = f(0)$ и $g(1) = f(1)$.

Поскольку $f(0) = 16$, а $f(1) = 27$, такой многочлен можно записать в виде $g(\mu) = 16 + 11\mu + \lambda\mu(\mu - 1)$, где λ — некоторый параметр. Для того чтобы неравенство $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ выполнялось для всех μ из отрезка $[0, 1]$, необходимо, чтобы $g'(0) \geqslant f'(0)$, т. е. $11 - \lambda \geqslant 8$, и $g'(1) \leqslant f'(1)$, или $11 + \lambda \leqslant 18$. Отсюда $\lambda \leqslant 3$. Но чем больше λ, тем более сильное неравенство мы получим. Поэтому естественно рассмотреть случай $\lambda = 3$.

Тогда придём к неравенству

$$16 + 11\mu + 3\mu(\mu - 1) \geqslant 8 + 20\mu - \mu^2 + 8\sqrt{1-\mu}\,(1-\mu).$$

Доказать его уже несложно.

Таким образом, имеем

$$\frac{4p^2}{R^2} \leqslant 3\mu^2 + 8\mu + 16,$$

откуда $p^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Упражнение 9. Найдите наилучшую оценку вида $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ в классе квадратных трёхчленов $g(\mu)$, удовлетворяющих условию

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right).$$

Упражнение 10. Докажите сформулированную выше гипотезу: для любой точки $\mu_0 \in [0, 1]$ существует такой квадратный трёхчлен $g(\mu)$, что $g(\mu) \geqslant f(\mu)$ для всех $\mu \in [0, 1]$ и $g(\mu_0) = f(\mu_0)$.

Полученная выше оценка $f(\mu) \leqslant 3\mu^2 + 8\mu + 16$ «лучше» других, но в некотором специальном смысле: графики функций $f(\mu)$ и $g(\mu) = 3\mu^2 + 8\mu + 16$ не только касаются в одной точке при $\mu = 0$, но ещё и пересекаются в другой точке при $\mu = 1$.

Аналогичным образом можно упрощать нижние оценки для полупериметра, а также получать «простые» оценки для других величин, связанных с треугольником.

§ 6. Некоторые обобщения

В данном параграфе[9)] будет намечено одно из возможных направлений для небольшого самостоятельного исследования. Я ограничусь лишь изложением основных идей (с картинками) и формулировкой некоторых вопросов. Для получения конкретных результатов останется лишь проделать кое-какие выкладки.

Молодым читателям я настоятельно советую повозиться с формулами. Навык работы с формулами весьма важен для профессионального математика. И, видимо, это тот случай, когда учиться надо «не по учебникам». В средней школе этому уделяется большое внимание. Но именно это повышенное внимание часто напрочь отбивает желание заниматься такого рода задачами. По-видимому, это связано с тем, что школьные упражнения связаны с преобразованиями ради преобразований и лишены содержательного смысла. В данном случае это не так, и поиск оптимального пути решения может оказаться весьма интересным.

В этом параграфе нас будут интересовать неравенства вида

$$uR^k + vr^k + wp^k \geqslant 0,$$

которые справедливы для всех треугольников. Здесь k — фиксированный параметр, а коэффициенты u, v, w мы будем искать. Начнём со случая $k = -2$, которому соответствуют неравенства вида

$$\frac{u}{R^2} + \frac{v}{r^2} + \frac{w}{p^2} \geqslant 0.$$

Данное неравенство однородно: при умножении всех переменных R, r, p на одно и то же число t неравенство превращается в эквивалентное (такому

[9)] Здесь я использовал некоторые идеи и результаты С. В. Маркелова (см. `http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=207461` и `http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=211278`), обсуждавшиеся также с А. А. Заславским. Выражаю им свою признательность.

умножению соответствует переход от треугольника к подобному ему). Поэтому можно провести «нормировку» задачи, чтобы уменьшить число переменных, ограничить их значения и сделать возможным использование картинок. Поскольку коэффициент k отрицателен, ограничимся рассмотрением треугольников, у которых $r=1$. Это позволит рисовать графики на конечном интервале.

Тогда основное неравенство (F) перепишется в виде

$$2R^2+10R-1-2\sqrt{R^2-2R}\,(R-2)\leqslant p^2\leqslant 2R^2+10R-1+2\sqrt{R^2-2R}\,(R-2).$$

Сделаем замену переменных $x=4/R^2$, $y=1/p^2$ (коэффициент 4 выбран для того, чтобы рисовать графики на отрезке $[0,1]$, что будет удобно для сравнения результатов при разных k). Получим

$$\frac{8}{x}+\frac{20}{\sqrt{x}}-1-2\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}\Bigl(\frac{2}{\sqrt{x}}-2\Bigr)\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{8}{x}+\frac{20}{\sqrt{x}}-1+2\sqrt{\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}}\Bigl(\frac{2}{\sqrt{x}}-2\Bigr),$$

или

$$\frac{1}{x}\Bigl(8+20\sqrt{x}-x-8\Bigl(\sqrt{1-\sqrt{x}}\Bigr)^3\Bigr)\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{x}\Bigl(8+20\sqrt{x}-x+8\Bigl(\sqrt{1-\sqrt{x}}\Bigr)^3\Bigr),$$

что эквивалентно двойному неравенству

$$\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x+8\bigl(\sqrt{1-\sqrt{x}}\bigr)^3}\leqslant y\leqslant\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x-8\bigl(\sqrt{1-\sqrt{x}}\bigr)^3}$$

Выше было доказано неравенство $R\geqslant 2r$, поэтому представляет интерес случай $x\leqslant 1$.

Построим на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 5) графики функций

$$\varphi_{-2}(x)=\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x+8\bigl(\sqrt{1-\sqrt{x}}\bigr)^3}\quad\text{и}\quad\psi_{-2}(x)=\frac{x}{8+20\sqrt{x}-x-8\bigl(\sqrt{1-\sqrt{x}}\bigr)^3}.$$

Как было доказано выше, точки (x,y), соответствующие реальным треугольникам, лежат в области Π_{-2}, ограниченной графиками этих функций.
треугольник [10].

[10] Это утверждение верно, но в полном объёме здесь не используется. Нам нужно лишь понять, что неравенства, получаемые ниже, обращаются в равенство для некоторых треугольников. Для этого достаточно установить, что каждой точке границы области Π_{-2} соответствует треугольник. Это можно сделать прямым вычислением, имея в виду, что точкам границы соответствуют равнобедренные треугольники. Остальное следует из «соображений непрерывности». Уточнение последнего утверждения и идеи его доказательства содержатся в следующем параграфе.

Нас интересуют неравенства вида

$$\frac{u}{R^2}+\frac{v}{r^2}+\frac{w}{p^2}\geqslant 0,$$

чему в новых переменных соответствуют линейные неравенства. Таким образом, задача сводится к поиску полуплоскостей, которые целиком содержат область Π_{-2}.

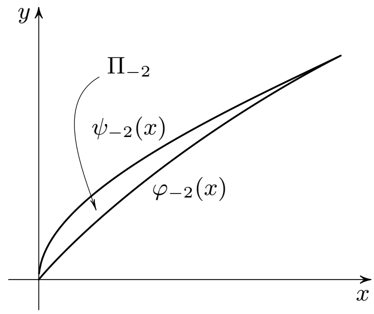


Рис. 5

Одна из них лежит выше хорды, соединяющей точки $(0,0)$ и $(1,1/27)$ графика функции $\varphi_{-2}(x)$. Это не очень интересно, поскольку соответствующее неравенство легко сводится к уже доказанному неравенству $p\leqslant 3\sqrt{3}R$.

А ещё бесконечное число «хороших» неравенств получается, если провести касательные к графику функции $\psi_{-2}(x)$ при различных $x_0\in(0,1]$. Все эти неравенства независимы, поскольку обращаются в равенство для разных треугольников.

Стоит поискать те из них, у которых коэффициенты попроще.

Обратимся к уже хорошо разобранному случаю $k=1$. В данном случае k положительно, поэтому нормировку лучше провести условием $R=1$. Сделаем замену переменных $x=2r$, $y=p$. В этих переменных основное неравенство (F) примет вид

$$\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2-2\big(\sqrt{1-x}\big)^3}\leqslant y\leqslant\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2+2\big(\sqrt{1-x}\big)^3}.$$

Нарисуем на отрезке $[0,1]$ (см. рис. 6) графики функций

$$\varphi_1(x)=\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2-2\big(\sqrt{1-x}\big)^3}$$

и

$$\psi_1(x)=\sqrt{2+5x-\frac{1}{4}x^2+2\big(\sqrt{1-x}\big)^3}.$$

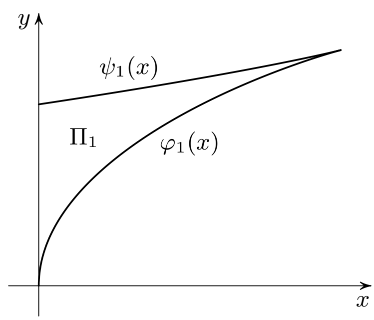


Рис. 6

Точки (x,y), соответствующие треугольникам, лежат в области Π_1, ограниченной графиками этих функций и осью ординат.

Здесь сразу виден новый качественный эффект. Выпуклая оболочка множества Π_1 — это треугольник. Поэтому существует три «самых сильных» неравенства вида $uR+vr+wp\geqslant 0$, справедливых для всех треугольников (они соответствуют сторонам выпуклой оболочки множества Π_1). Это уже известные нам неравенства $r \geqslant 0$, $p \geqslant 3\sqrt{3}r$ и $2R + (3\sqrt{3} - 4)r \geqslant p$. Все остальные такие неравенства являются следствиями этих трёх. Естественно назвать такие три неравенства базисными.

Возникает вопрос: а при каких ещё значениях k выпуклая оболочка множества Π_k является многоугольником и, соответственно, существует конечная система базисных неравенств? Выше мы видели, что при $k = -2$ каждой точке отрезка $[0, 1]$ соответствует «своё» базисное неравенство, т. е. их бесконечно много.

В случае когда выпуклая оболочка множества Π_k — многоугольник, нетрудно выписать явное условие на коэффициенты u, v, w, при которых неравенство вида $uR^k + vr^k + wp^k \geqslant 0$ выполняется для всех треугольников.

При $k = 1$ это делается так. Треугольник содержится в некоторой полуплоскости тогда и только тогда, когда в этой полуплоскости содержатся все его вершины. Поэтому для того, чтобы неравенство $uR + vr + wp \geqslant 0$, или, что то же самое, неравенство

$$u + \frac{1}{2}vx + wy \geqslant 0,$$

выполнялось для всех треугольников, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $u \geqslant 0, u + 2v \geqslant 0$ и $2u + v + 3\sqrt{3}w \geqslant 0$ (первое соответствует вершине $(0, 0)$ выпуклой оболочки множества Π_1, второе — вершине $(0, 2)$, третье — оставшейся вершине).

Интересная задача: описать все аналогичные тройки коэффициентов u, v, w при других k, например, при $k = -2$.

Наконец, рассмотрим случай $k = 2$. Используем нормировку $R = 1$ и замену переменных $x = 4r^2$, $y = p^2$. Графики функций

$$\varphi_2(x) = 2 + 5\sqrt{x} - \frac{1}{4}x - 2\left(\sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^3$$

и

$$\psi_2(x) = 2 + 5\sqrt{x} - \frac{1}{4}x + 2\left(\sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^3$$

приведены на рис. 7. Этот рисунок стоит рассмотреть подробнее. Нас интересует, в частности, выпуклость функции $\psi_2(x)$. Поэтому «уберём линейный тренд», вычтя, например, $2x$ (это на выпуклость не влияет). На рис. 8 приведена часть полученного графика. Теперь хорошо видно, что при малых x функция $\psi_2(x)$ вогнута, а при больших — выпукла.

Вернёмся к рис. 7. Граница выпуклой оболочки множества Π_2 выглядит следующим образом. В неё входит отрезок, соединяющий концы $(0, 1)$ и $(1, 27/4)$ графика функции $\varphi_2(x)$. Далее идёт отрезок прямой, проходящей через точку $(1, 27/4)$ и касающейся графика функции $\psi_2(x)$ ещё

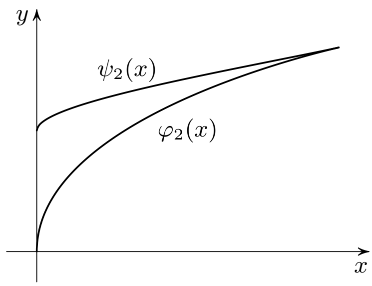


Рис. 7

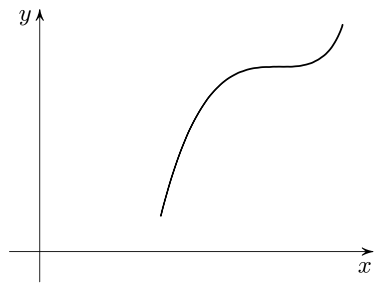


Рис. 8

в одной точке (x_0, y_0) (найдите эту прямую и эту точку[11]). Далее идёт дуга графика функции $\psi_2(x)$. И, наконец, часть оси ординат.

Первому отрезку соответствует уже не раз упоминавшееся неравенство $p \geqslant 3\sqrt{3}r$. Второму отрезку соответствует гораздо более интересное и в некотором смысле уникальное неравенство (какое?). Это неравенство обращается в равенство сразу для двух треугольников: правильного и равнобедренного, но неравностороннего (какого?). В каждой точке дуги графика функции $\psi_2(x)$ можно провести касательную, которой соответствует своё неравенство, обращающееся в равенство и не следующее из других.

Разумеется, стоит рассмотреть и какие-то другие значения k. Особый интерес представляет случай $k = -1$. Этому случаю, по сути, соответствуют неравенства вида $upr + vpR + wrR \geqslant 0$. Поэтому можно попытаться поискать ответ и на такой вопрос: при каких значениях коэффициентов u, v, w, u', v', w' справедливо общее квадратичное неравенство вида

$$uR^2 + vr^2 + wp^2 + u'pr + v'pR + w'rR \geqslant 0?$$

И ещё один круг вопросов. При изменении k от 0 до 1 происходит качественная перестройка границы выпуклой оболочки множества Π_k. Вначале график функции $\psi_k(x)$ лежит ниже хорды, соединяющей его концы, а в какой-то момент начинает «высовываться» выше. В какой именно момент это происходит? А может быть, ещё при каких-то значениях k происходят подобные перестройки? Как они выглядят? Эти «критические» значения k и соответствующие неравенства заслуживают особого внимания.

§ 7. Уточнение теоремы Фейербаха

Вернёмся к «динамической» формулировке теоремы Фейербаха. Пусть вписанная окружность ω и описанная окружность Ω треугольника фик-

[11] Здесь может помочь следующая «хорошо забытая» идея. Для того чтобы найти кратный корень многочлена, можно найти с помощью алгоритма Евклида наибольший общий делитель этого многочлена и его производной.

сированы, а его вершина A движется по окружности Ω. Эксперимент показывает, что *когда точка A совершает один оборот по окружности Ω, центр E окружности Эйлера*[12] *совершает три оборота по окружности ϖ.* Попробуем доказать этот факт.

Пусть прямая, проходящая через центры I и O вписанной и описанной окружностей, пересекает окружность Ω в точках M и N (см. рис. 9). Будем считать, что точка I лежит между точками M и O. Обозначим точки пересечения отрезков IM и IN с окружностью ω через X и Y соответственно. Через точки X и Y проведём хорды X_0X_1 и Y_0Y_1 окружности Ω, перпендикулярные диаметру MN (считаем, что точки X_0 и Y_0 лежат по одну сторону от диаметра, а точки X_1 и Y_1 — по другую).

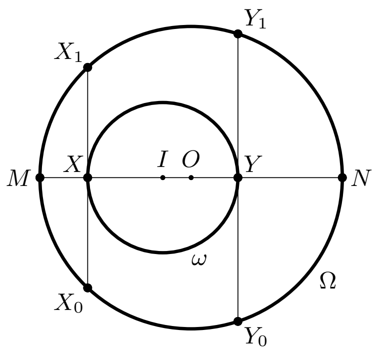


Рис. 9

На дуге Y_0NY_1 может лежать не более одной вершины треугольника, вписанного в Ω и описанного вокруг ω (это и следующие утверждения будут точными, если считать, что дуге принадлежит ровно один из концов). Действительно, если бы этой дуге принадлежали две вершины B и C треугольника, то его сторона BC и вписанная окружность ω лежали бы по разные стороны от прямой Y_0Y_1, а потому не могли бы касаться.

По аналогичным причинам на дугах Y_1X_1, X_1MX_0 и X_0Y_0 лежит не более одной вершины треугольника. Более того, дуги Y_1X_1 и X_0Y_0 не могут содержать вершины треугольника одновременно (иначе сторона треугольника пересекала бы окружность ω).

Таким образом, на каждой из дуг Y_0NY_1 и X_1MX_0 лежит по одной из вершин треугольника, а третья вершина принадлежит одной из дуг Y_1X_1 и X_0Y_0.

Зафиксируем расстояние x от точки M до некоторой точки A_* на отрезке YN. Этому расстоянию соответствует единственная точка A на дуге NY_1, для которой отрезок AA_* перпендикулярен MN. По теореме Понселе существует единственный треугольник ABC с данной вершиной A, вписанный в Ω и описанный вокруг ω, а значит, однозначно определён его полупериметр p.

Обратно: если заданы радиусы R и r окружностей Ω и ω и полупериметр треугольника p, то стороны треугольника являются корнями уравнения

$$t^3 - 2pt^2 + (r^2 + 4Rr + p^2)t - 4pRr = 0,$$

[12] Вырожденный случай, когда центры окружностей ω и Ω совпадают, мы рассматривать не будем.

и потому определены однозначно. Но существует только два симметричных относительно MN треугольника с заданными сторонами, для которых окружности Ω и ω являются описанной и вписанной соответственно. Следовательно, если A_* — проекция на отрезок YN вершины этого треугольника, принадлежащей дуге Y_0NY_1, то расстояние x от A_* до точки M определено однозначно.

В двух предыдущих абзацах определены две функции $p(x)$ и $x(p)$.

Упражнение 11. Проверьте, что функции $p(x)$ и $x(p)$ непрерывны.

Если точка A_* совпадает с точкой Y или N, то соответствующий треугольник ABC будет равнобедренным и, как установлено выше, его периметр соответственно минимален или максимален среди возможных.

Итак, функция $p(x)$ определена на некотором отрезке, непрерывна, принимает каждое своё значение не более одного раза и минимальна на левом конце области определения. Значит, она монотонно возрастает.

Упражнение 12. Докажите это.

Таким образом, если точка A движется по дуге Y_0N от точки Y_0 к точке N, то периметр соответствующего треугольника монотонно возрастает. Но из формул (2) и (3) видно, что при этом будет монотонно убывать расстояние от точки O до точки пересечения медиан треугольника. А значит, будет убывать и расстояние OE между центрами описанной окружности и окружности Эйлера. Но в силу теоремы Фейербаха точка E всё время находится на окружности ϖ, следовательно, она пробегает монотонно половину этой окружности, когда точка A пробегает дугу Y_0N.

Аналогично: когда точка А пробежит дугу NY_1, точка E пробежит вторую половину окружности ϖ. Далее, если вершина A движется по дуге Y_1X_1, то какая-то другая вершина движется по дуге Y_0N, а потому точка E вновь пробегает первую половину окружности ϖ. Продолжая эти рассуждения, убедимся в справедливости доказываемого факта.

Разумеется, хотелось бы иметь элементарно-геометрическое доказательство этого факта. Но я таковым не располагаю. Более того, есть основания сомневаться, что такое доказательство вообще существует.

В частности, можно заметить, что если точка A движется по окружности Ω с постоянной скоростью, то движение точки E по окружности ϖ неравномерно[13)]. Действительно, точка E проходит половину окружности и когда точка A пробегает дугу NY_1, и когда она пробегает дугу X_1M. Но эти две дуги имеют разные длины!

[13)] Поэтому аналогия с обручем и гимнасткой не совсем точна: в данном случае обруч движется по талии гимнастки «с проскальзыванием».

Читатель, знакомый с основами теории Галуа, может попробовать выяснить, всегда ли можно построить циркулем и линейкой треугольник, у которого заданы периметр и радиусы вписанной и описанной окружностей.

§ 8. Неравенства для остроугольных треугольников

Применим полученные результаты для доказательства следующего факта: треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда $p > 2R + r$.

Начнём с рассмотрения случая, когда центр O описанной окружности лежит вне вписанной окружности ω, т. е. $d = \sqrt{R^2 - 2Rr} > r$. Проведём через точку O две касательные к окружности ω (см. рис. 10). Внутри одного из углов, ограниченных этими прямыми, лежит окружность ω. Вертикальный угол высекает на описанной окружности дугу QT. Треугольник является остроугольным, если центр описанной окружности лежит внутри него. А для этого необходимо и достаточно, чтобы одна из его вершин лежала на дуге QT. Как было установлено, периметр треугольника тем меньше, чем дальше его вершина от середины N дуги QT. Поэтому достаточно доказать, что для треугольника с вершиной Q выполняется равенство $p = 2R + r$. Но этот треугольник прямоугольный, и соответствующий факт хорошо известен (и доказывается совсем просто).

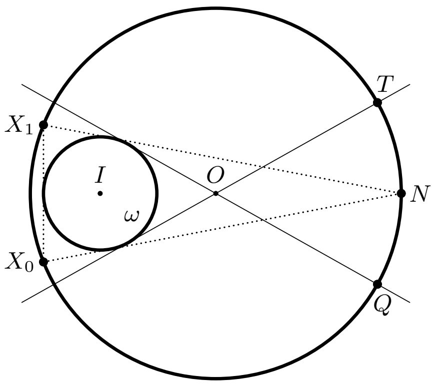


Рис. 10

В случае $d < r$ все треугольники, описанные вокруг окружности радиуса r и вписанные в окружность радиуса R, являются остроугольными, так как содержат центр описанной окружности. Поэтому достаточно доказать, что неравенство $p > 2R + r$ выполняется для треугольника с наименьшим периметром, т. е.

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2d(R - 2r) > (2R + r)^2 = 4R^2 + 4Rr + r^2.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2r(R - 2r) > 4R^2 + 4Rr + r^2,$$

или $2Rr + r^2 > R^2$. А это в точности условие $d < r$.

Случай $d = r$ оставим читателю.

Доказанное утверждение характеризует остроугольные треугольники «в терминах положения точки A». Можно характеризовать их и «в терминах положения точки E».

Упражнение 13. Докажите, что треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$.

Докажем следующий результат, принадлежащий П. Эрдёшу: если h — длина наибольшей высоты нетупоугольного треугольника, то $h \geqslant R + r$. Его можно доказать методами элементарной геометрии ([3, задача 10.79], [6, задача 663]). Покажем, что этот результат можно получить и методами, развитыми выше.

Воспользуемся обозначениями рис. 9. Треугольник X_0NX_1 имеет максимальный периметр, а значит, и наибольшую площадь, ведь она равна произведению полупериметра на постоянный радиус вписанной окружности. Кроме того, у него самая маленькая сторона X_0X_1, следовательно, самая большая высота NX. Будем двигать вершину треугольника по дуге NY_1. Площадь его будет уменьшаться, а противоположная выбранной вершине сторона будет увеличиваться. (Убедитесь сами, что при таком движении увеличивается угол между лучом OI и перпендикуляром, опущенным на рассматриваемую сторону из точки O, а следовательно, уменьшается расстояние от точки O до этой стороны.)

Если центр описанной окружности O лежит вне вписанной, то такое движение можно продолжать до тех пор, пока одна из сторон не пройдёт через точку O, т. е. треугольник не станет прямоугольным. В этом случае наибольшая высота треугольника равна его наибольшему катету. А длина этого катета равна сумме радиуса r и длины наибольшего отрезка от точки касания гипотенузы и вписанной окружности до конца гипотенузы, которая больше или равна R (рис. 11).

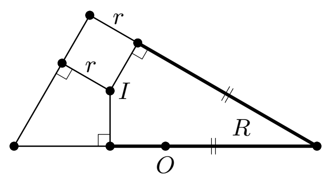


Рис. 11

Если же точка O лежит внутри окружности ω, то движение можно продолжать до тех пор, пока выбранная высота не перестанет быть наибольшей. Это произойдёт, когда её длина станет равна длине другой высоты, т. е. для равнобедренного треугольника Y_0MY_1 (рис. 12). Остаётся доказать неравенство для этого треугольника.

Будем характеризовать треугольник радиусом R и углом 2φ при вершине M. Тогда угол между основанием и высотой, проведённой к боковой стороне, равен φ, основание треугольника равно $2R \sin 2\varphi$, а высота к боковой стороне

$$h = 2R \sin 2\varphi \cos \varphi = 4R \sin \varphi \cdot (1 - \sin^2 \varphi).$$

Кроме того,

$$r = MI\sin\varphi = (R-d)\sin\varphi = \left(R - \sqrt{R^2-2Rr}\right)\sin\varphi,$$

откуда находим $r = 2R(\sin\varphi - \sin^2\varphi)$. Следовательно, нужно доказать неравенство

$$4R(\sin\varphi - \sin^3\varphi) \geqslant R + 2R(\sin\varphi - \sin^2\varphi),$$

или

$$-4\sin^3\varphi + 2\sin^2\varphi + 2\sin\varphi - 1 \geqslant 0.$$

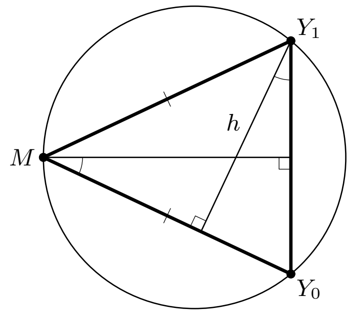


Рис. 12

При этом не надо забывать, что 2φ — острый угол, поэтому $\sin\varphi \leqslant \sqrt{2}/2$. Кроме того, в интересующем нас случае высота равнобедренного треугольника, проведённая к боковой стороне, не меньше высоты того же треугольника, проведённой к основанию. Значит, основание не меньше боковой стороны и, следовательно, угол при вершине не меньше углов при основании. А тогда $2\varphi \geqslant \pi/3$ и $\sin\varphi \geqslant 1/2$.

Заменой $t = \sin\varphi$ задача сводится к доказательству неравенства

$$-4t^3 + 2t^2 + 2t - 1 = -(2t-1)(2t^2-1) \geqslant 0$$

при $1/2 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}/2$. Это уже очевидно. Задача решена.

Упражнение 14. Докажите, что для остроугольных треугольников выполняется неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma > 2$.

Упражнение 15. Докажите, что для тупоугольных треугольников выполняется неравенство

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{4}.$$

Упражнение 16 [11, 1989 г., 1178]. а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника выполняется неравенство $2(R+r) \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?

§ 9. Немного алгебры

В дальнейшем нам понадобится выражение площади Σ треугольника OHI через стороны треугольника ABC. По свидетельству [10], этот результат был получен ещё в 1890 г. Но найти доказательство в общедоступном источнике мне не удалось. Поэтому приведу его полностью.

По теореме Эйлера площадь треугольника OHI втрое больше площади треугольника OMI. Стороны последнего можно найти. По формуле Эйлера сторона $d = OI$ удовлетворяет условию $d^2 = R^2 - 2Rr$. Из формул (2) и (3) получим условие для стороны $e = OM$:

$$e^2 = R^2 - \frac{1}{9}(2p^2 - 2r^2 - 8Rr).$$

Наконец, известно и соотношение для стороны $f = IM$:

$$f^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$

(см. [6, задача 490в]).

Поэтому можно воспользоваться формулой Герона, которую удобно использовать в развёрнутой форме:

$$16\left(\frac{\Sigma}{3}\right)^2 = 2(d^2e^2 + d^2f^2 + e^2f^2) - (d^4 + e^4 + f^4).$$

Подставляя, получим

$$16\Sigma^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2) - (64R^3r + 48R^2r^2 + 12Rr^3 + r^4),$$

или

$$16\Sigma^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R + r)^3. \qquad (6)$$

Умножим эту формулу на r^2:

$$16\Sigma^2r^2 = -p^4r^2 + 2(2R^2r^2 + 10Rr^3 - r^4)p^2 - (4Rr + r^2)^3$$

и выразим радиусы вписанной и описанной окружностей через площадь, полупериметр и стороны треугольника ABC: $r = \frac{S}{p}$ и $R = \frac{abc}{4S}$. Получим

$$16\Sigma^2r^2 = -p^2S^2 + 2\left(\frac{(abc)^2}{8p^2} + 5\frac{abc}{2p}\cdot\frac{S^2}{p^2} - \frac{S^4}{p^4}\right)p^2 - \left(\frac{abc}{p} + \frac{S^2}{p^2}\right)^3. \qquad (7)$$

Теперь, воспользовавшись формулой Герона для площади S, нетрудно увидеть, что в правой части последней формулы стоит однородный симметрический многочлен шестой степени от переменных a, b, c. Обозначим его через $F(a, b, c)$.

Рассмотрим множество Δ троек (a, b, c) положительных чисел, удовлетворяющих условиям $a < 2b$, $b < 2a$, $a < 2c$, $c < 2a$, $b < 2c$, $c < 2b$, и фиксируем произвольную точку (a, b, c) из множества Δ. Пусть $\varphi(x) = F(x, b, c)$.

Теперь обратимся к геометрии. Для равнобедренных треугольников ABC треугольник OHI вырождается, поэтому его площадь Σ становится равной нулю. Следовательно, $\varphi(b) = F(b, b, c) = 0$. Но если x достаточно близко к b, то из отрезков x, b и c можно составить треугольник. Следовательно, левая часть формулы (7) будет неотрицательна. Значит, $x = b$ — корень многочлена $\varphi(x)$, причём чётной кратности. Тогда этот многочлен делится на $(x - b)^2$.

По аналогичным причинам он делится и на $(x - c)^2$.

Следовательно, $F(a, b, c) = \Phi(a, b, c)(a - b)^2(a - c)^2$, где $\Phi(a, b, c)$ — однородный многочлен второй степени. Но многочлен $F(a, b, c)$ — симметрический, поэтому $\Phi(a, b, c) = k(b - c)^2$, где k — некоторая константа. Отсюда

$$F(a, b, c) = k(b - c)^2(a - b)^2(a - c)^2.$$

Константу k можно найти, вычислив левую и правую части равенства

$$-p^2S^2 + 2\left(\frac{(abc)^2}{8p^2} + 5\frac{abc}{2p} \cdot \frac{S^2}{p^2} - \frac{S^4}{p^4}\right)p^2 - \left(\frac{abc}{p} + \frac{S^2}{p^2}\right)^3 = k(a - b)^2(a - c)^2(b - c)^2$$

для какого-нибудь неравнобедренного треугольника. Удобен, например, египетский треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Для него $S = 6$ и $p = 6$. Отсюда находим $k = 1$.

Итак, для $(a, b, c) \in \Delta$ установлено равенство

$$F(a, b, c) = (b - c)^2(a - b)^2(a - c)^2.$$

Но в левой и правой частях этого равенства стоят многочлены, а множество Δ открыто. Поэтому данное равенство справедливо для всех a, b, c.

Только что доказанное равенство

$$\Sigma = \frac{|(a - b)(b - c)(c - a)|}{4r} \tag{8}$$

вместе с установленным в конце § 2 неравенством $\Sigma \leqslant d(R/2 - r)$ даёт следующий результат:

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| \leqslant 4dr\left(\frac{R}{2} - r\right). \tag{9}$$

Было бы интересно охарактеризовать в геометрических терминах треугольники, для которых неравенство (9) обращается в равенство. Впрочем, не ясно, возможно ли это? Читатели, знакомые с основами теории Галуа, могут попробовать выяснить, при всех ли значениях R и r такой треугольник можно построить с помощью циркуля и линейки.

Упражнение 17. Докажите, что $IH^2 = 2r^2 + 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$.

Упражнение 18. Докажите, что $\Sigma = 2R^2\left|\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} \sin\frac{\beta - \gamma}{2}\right|$.

Большое число интересных следствий основного неравенства (F) может натолкнуть на мысль, что любое неравенство для элементов треугольника следует из основного. Неравенство (9) опровергает эту точку зрения. Действительно, основное неравенство обращается в равенство для равнобедренных треугольников, а неравенство (9) тоже обращается в равенство, но для совсем других треугольников.

В алгебраических терминах объясняется это тем, что неравенство (9) слишком сложное. В частности, в формуле (6) стоит квадратный трёхчлен относительно переменной p^2, максимум которого достигается не на конце отрезка, а в вершине параболы.

По той же причине рушится, к сожалению, ещё одна надежда. Можно было бы ожидать, что из неравенства (9) следуют другие «интересные» циклические неравенства для сторон треугольника. На практике «очевидные» простые оценки неравенства (9) оказываются слишком грубыми. А «хорошие» оценки найти непросто.

§ 10. Знакопеременные неравенства

Несмотря на только что сказанное, иногда развитую выше технику удаётся использовать. Вот пример.

Задача М559 из «Задачника „Кванта“» ([11, 1979 г., 559]): доказать неравенство

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right|<1.$$

Избавившись от знаменателя, перепишем это неравенство в виде

$$|a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b|<abc.$$

Выражение под модулем равно нулю, когда какие-то две переменные становятся равными. Поэтому оно должно делиться на $(a-b)(b-c)(c-a)$. Но поскольку и исходное выражение, и это произведение — многочлены третьей степени, частное должно быть константой. Эту константу можно найти, сравнив значения выражений, например, при $a=0, b=1, c=-1$. Таким образом, доказываемое неравенство приводится к виду

$$\big|(a-b)(b-c)(c-a)\big|<abc.$$

Чтобы избавиться от модуля, возведём обе части в квадрат:

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<(abc)^2.$$

Воспользовавшись формулами (6), (8) и $abc=4pRr$, запишем

$$4r^2\big(-p^4+(4R^2+20Rr-2r^2)p^2-64R^3r-48R^2r^2-12Rr^3-r^4\big)<16R^2r^2p^2,$$

или после сокращения

$$-p^4 + (20Rr - 2r^2)p^2 - 64R^3r - 48R^2r^2 - 12Rr^3 - r^4 < 0. \qquad (10)$$

В левой части этого неравенства стоит квадратный трёхчлен относительно переменной p^2. Поэтому достаточно установить (что уже совсем не трудно) отрицательность дискриминанта

$$-256R^3r + 208R^2r^2 - 128Rr^3 = -16Rr(16R^2 - 13Rr + 8r^2).$$

Задача решена. Обсудим некоторые детали.

Начнём с простого следствия. Заменой переменных $a = x + y$, $b = x + z$, $c = y + z$ доказанное неравенство приводится к виду

$$\left|\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}\right| < 1,$$

или

$$\big|(x-y)(y-z)(z-x)\big| < (x+y)(y+z)(z+x).$$

Эти неравенства верны уже для всех положительных значений переменных. Их доказательство — непростая задача. Приведённое выше решение этой задачи можно рассматривать как доказательство методом замены переменных. Вот только вряд ли можно считать «очевидной» такую замену.

Решённую задачу заметно усложняет наличие модуля. Избавиться от него можно двумя способами. Можно заменить доказанное неравенство системой из двух неравенств

$$-1 < \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c} < 1.$$

Но мы теряем симметрию задачи: выражение $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}$ будет не симмметрическим, а кососимметрическим по любой паре переменных.

Второй способ состоит в возведении в квадрат, как мы делали выше. При этом вдвое повышается степень неравенства. В данном случае такое усложнение оказалось оправданным. Не в последнюю очередь это связано с тем, что переменная p входит в получившееся неравенство в чётных степенях. Это обстоятельство не случайно (сообразите почему).

Появление произведения $(a-b)(b-c)(c-a)$ в решении задачи тоже не случайно. Справедливо следующее утверждение: любой кососимметрический многочлен $P(a, b, c)$ представим в виде

$$P(a, b, c) = (a-b)(b-c)(c-a)\Psi(a, b, c),$$

где $\Psi(a, b, c)$ — симметрический многочлен.

Упражнение 19. Докажите это утверждение.

В случае трёх переменных циклическая группа их перестановок совпадает со знакопеременной. Отсюда вытекает следующий факт: всякий многочлен $P(a, b, c)$, не меняющийся при циклических перестановках переменных a, b, c, представим в виде $P(a, b, c) = \Phi(a, b, c) + \Psi(a, b, c)$, где $\Phi(a, b, c)$ — кососимметрический, а $\Psi(a, b, c)$ — симметрический многочлены.

Упражнение 20. Докажите это утверждение.

Читателю могло показаться, что приведённое решение предыдущей задачи основано на ряде счастливых совпадений. Комментарии показывают, что это не так. В чём здесь действительно повезло, так это в том, что в формулу (10) переменная p входит в четвёртой, а не в шестой степени. Впрочем, повозившись с максимизацией кубических многочленов, можно решить с помощью развитых выше идей и задачи, приведённые ниже. Такое решение этих задач вполне алгоритмично, хотя и не очень эстетично. Здесь мы подходим к границе области применимости развитых выше идей.

Упражнение 21 [11, 1984 г., 852б]. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}.$$

Упражнение 22 [11, 1983 г., 840]. а) Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Выясните, в каких случаях оно обращается в равенство.

б) Докажите, что для любых $x, y, z > 0$ выполнено неравенство

$$x^3y + y^3z + z^3x \geqslant x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

§ 11. Ещё одна картинка

Не хочется заканчивать статью на минорной ноте. Поэтому приведём ещё одну динамическую картинку. Но сначала два давно известных факта.

Известно, что описанная окружность делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей (см. [3, задача 5.109б]). Следовательно, центр вневписанной окружности треугольника лежит на окружности, гомотетичной описанной окружности с коэффициентом 2 и центром гомотетии в центре I вписанной окружности.

Вторая часть теоремы Фейербаха утверждает, что вневписанная окружность касается окружности девяти точек. Теперь представим себе, что вписанная и описанная окружность треугольника фиксированы, а сам треугольник «скользит» между ними. Тогда центр (любой) вневписанной окружности будет тоже двигаться по окружности, а сама вневписанная окружность будет всё время касаться окружности девяти точек (которая катится по вписанной окружности и имеет фиксированный радиус).

На основе этой картинки тоже можно получить ряд интересных результатов. Я оставляю это читателю. Сформулирую лишь некоторые известные утверждения, которые могут подсказать постановки новых задач и, возможно, пути их решения.

Далее I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника (касающихся сторон BC, AC и AB соответственно), а r_a, r_b, r_c — их радиусы.

Упражнение 23 [8, задача 46]. Вершины треугольника ABC обозначены так, что $r_a \leqslant r_b \leqslant r_c$. Какие значения могут принимать r_a, r_b, r_c, если треугольник ABC

а) описан вокруг окружности радиуса 1;

б) вписан в окружность радиуса 1?

Упражнение 24 [3, задача 5.2]. Докажите, что точки A, B и C — основания высот треугольника $I_aI_bI_c$.

Упражнение 25 [3, задача 5.109а]. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью девяти точек треугольника $I_aI_bI_c$.

Упражнение 26 [11, 1982 г., 769в]. Докажите, что площадь треугольника $I_aI_bI_c$ равна $\frac{2R}{r}S$.

Упражнение 27 [3, задача 10.41б]. Докажите неравенство

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Упражнение 28 [11, 1992 г., 1356]. Докажите, что если $abc = 4Rrr_c$, то треугольник прямоугольный.

Другие интересные картинки можно найти в [2].

Список литературы

[1] *Дубровский В., Сендеров В.* Ловушка для треугольника // Квант. 1999. №3. С. 46–50.

[2] *Заславский А., Косов Д., Музафаров М.* Траектории замечательных точек треугольника Понселе // Квант. 2003. №2. С. 22–25.

[3] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: Наука, 1991.

[4] *Прасолов В. В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. М.: МЦНМО, 2017.

[5] *Солтан В. П., Мейдман С. И.* Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинёв: Штиинца, 1982.

[6] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. 9–11 кл. От учебной задачи к творческой. М.: Дрофа, 1996.

[7] *Шарыгин Г. И.* Лекции по элементарной геометрии. М.: МЦНМО, 2017.

[8] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970.

[9] *Bottema O., Djorjević R. Ž., Janić R. R., Mitrinović D. S., Vasić P. M.* Geometric inequalities. Groningen: Wolters — Noordhoff, 1969.

[10] *Mitrinović D. S., Pečarić J. E., Volenec V.* Recent advances in geometric inequalities. Dordrecht — Boston — London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[11] Задачник «Кванта» по математике. `http://www.kvant.info/zkm_main.htm`

Михаил Александрович Горелов, ВЦ ФИЦ ИУ РАН

griefer@ccas.ru

Как быстро вычислить сумму углов многоугольника?

И. Х. Сабитов

Эту статью можно считать продолжением нашей работы [1]. Напомним вкратце её содержание.

Ориентированным многоугольником мы называем замкнутую ломаную с указанием направления её обхода (допускаются самопересечения). Вершины многоугольника нумеруются последовательно по его обходу, начиная с произвольной вершины. Для данного направления обхода многоугольника P при каждой его вершине M_i определяется *внутренний угол* по следующему соглашению: внутренним называется тот угол при вершине, который остаётся слева при обходе многоугольника; его величина α_i обычно измеряется в радианах и она всегда положительна и меньше 2π (это значит, что никакая сторона многоугольника не может идти назад по предыдущей стороне).

Для многоугольника вводится также понятие его *индекса*. Определяется он так: в каждый угол вписывается круговая дуга γ_i достаточно малого радиуса, и таким образом многоугольник превращается в некоторую гладкую кривую L, состоящую из прямолинейных отрезков и гладко сопряжённых с ними круговых дуг; затем единичные касательные к L векторы, идущие по направлению обхода, откладываются все параллельно себе из некоторой точки O плоскости, так что их концы N описывают окружность Γ радиуса единица. При обходе кривой L ориентированный угол θ между радиусом ON и некоторым фиксированным направлением, изменяясь непрерывно, при окончательном возвращении радиуса в исходное положение получает некоторое приращение $\Delta\theta$, кратное 2π. Целое число, равное отношению $\Delta\theta/(2\pi)$, и называется индексом кривой L с обозначением Ind_L. Так как при достаточно малых изменениях радиусов дуг γ_i значение Ind_L не изменяется, оно принимается за значение индекса самого многоугольника P с обозначением Ind_P.

В упомянутой статье для суммы внутренних углов многоугольника с числом сторон n была установлена формула

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi(n - 2\,\mathrm{Ind}_P), \tag{1}$$

позволяющая найти сумму углов, даже не зная их значений, с использованием одного эффективного метода вычисления индекса, пригодного только для многоугольников.

Для вычисления индекса гладкой кривой существует свой способ, использующий информацию о числе и расположении точек её самопересечения, но его доказательство, во-первых, доступно только в журнальном варианте [2] (по крайней мере, нам неизвестно ни одного учебного пособия с таким доказательством), во-вторых, хотя оно и не очень сложное, но фактически требует привлечения новых понятий об особых точках векторного поля на плоскости (которые, например, можно найти в книге [3, гл. 1]). В данной статье мы покажем, что для индекса многоугольника тоже верна формула, аналогичная установленной в [2] для гладких кривых, но наше доказательство, опирающееся на формулу (1), будет вполне элементарно и доступно школьникам, а затем уж повторное использование формулы (1) даст возможность быстрого вычисления суммы углов любого многоугольника.

Рассмотрим этот способ. Возможны два случая: (1) многоугольник не имеет самопересечений и (2) в многоугольнике есть точки самопересечения.

Случай 1. Многоугольник без самопересечений называется *жордановым*, по имени французского математика XIX века К. Жордана. Он доказал, что такой многоугольник P разбивает плоскость на две многоугольные области, для которых многоугольник P является общей границей, причём одна из областей ограниченна (пусть она обозначена как D^+), а другая неограниченна (с обозначением D^-). Доказательство этой теоремы можно найти, например, в главе V книги [4], а как наглядные примеры можно рассмотреть треугольник, или параллелограмм, или любой правильный многоугольник: все они ограничивают две области — внутренность и внешность, из которых одна ограниченна, другая простирается неограниченно. Примем эту теорему как известную и продолжим рассмотрение нашего вопроса об индексе жорданова многоугольника. Нетрудно доказать, что ограниченная многоугольная область D с жордановой границей допускает *триангуляцию*, т. е. разбиение на треугольные области, расположенные с соблюдением следующих условий: (1) всякие два треугольника (имеются в виду не «проволочные», а плоские треугольники) имеют или общую вершину, или общую сторону, или вообще не пересекаются; (2) все вершины границы входят в число вершин треугольников; (3) объединение всех треугольников совпадает со всей областью D, т. е., в частности, в этих треугольниках нет ни одной точки, не принадлежащей области D (доказательство существования триангуляции для любой данной жордановой многоугольной области проводится индукцией по числу вершин или сторон

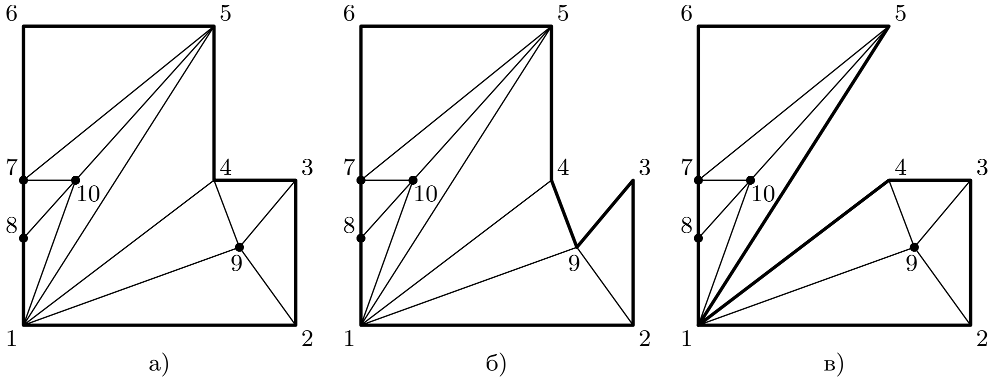


Рис. 1

её жордановой границы — проведите это доказательство самостоятельно). Обратим внимание, что при построении триангуляции на границе области, кроме уже имеющихся вершин, могут появиться и новые вершины.

Далее, для любой триангуляции жордановой многоугольной области верна следующая формула Эйлера:

$$N - E + T = 1, \tag{2}$$

где N — число вершин треугольников, E — число сторон треугольников, T — число треугольников триангуляции. Докажем эту формулу индукцией по числу треугольников. База индукции очевидна: для треугольной области $N=3$, $E=3$, $T=1$ и $N-E+T=1$. Пусть формула верна для многоугольников с триангуляцией из $T=n\geqslant 1$ треугольников. В этой триангуляции обязательно есть треугольники, у которых одна или две стороны лежат на границе области. Пусть есть треугольник $\Delta_{5,6,7}$ с двумя сторонами на границе (рис. 1а). Третья его сторона должна лежать внутри области. Когда мы уберём этот треугольник, оставив только его третью сторону вместе с её концевыми вершинами, получим новый жорданов многоугольник D_1, составленный из $T_1=n-1$ треугольников исходной триангуляции. Но в этом случае по индукционному предположению формула (2) верна, т. е. $N_1 - E_1 + T_1 = 1$. Однако мы знаем, что $T_1 = T - 1$, $E_1 = E - 2$, $N_1 = N - 1$, значит, $N - E + T = 1$, что и утверждалось.

Пусть теперь не знаем, есть ли треугольник, две стороны которого лежат на границе области. Тогда обязательно есть некоторый треугольник Δ, одна сторона которого лежит на границе, а две стороны, обозначим их L_1 и L_2, лежат внутри области. Удалим этот треугольник вместе со стороной, лежащей на границе, оставив, однако её концевые вершины. Тогда возможны два варианта: (1) ни одна из сторон L_1 и L_2 не является диагональю (например, треугольник $\Delta_{3,4,9}$ на рис. 1а); (2) обе эти стороны являются диагоналями, т. е. третья вершина треугольника Δ находится на границе области (например, треугольник $\Delta_{1,4,5}$ на рис. 1а). В первом случае после удаления треугольника Δ получится новая жорданова многоугольная область с триангуляцией из $T_1 = T - 1$ треугольников с $E_1 = E - 1$ сторонами и $N_1 = N$ вершинами (рис. 1б). Снова индукционное предположение приводит к требуемому равенству (2). Во втором случае область D распадётся на две триангулированные области с N_i вершинами, E_i сторонами и $T_i < n$ $(i = 1, 2)$ треугольниками (рис. 1в). По предположению индукции

$$N_1 - E_1 + T_1 = 1, \quad N_2 - E_2 + T_2 = 1,$$
$$N_1 + N_2 - 1 = N, \quad E_1 + E_2 + 1 = E, \quad T_1 + T_2 = T - 1,$$

откуда и получаем формулу (2).

Замечание. На самом деле, формула (2) верна и в более общем случае. Пусть многоугольная область D с жордановой границей разбита на конечное число не пересекающихся своими внутренностями многоугольных областей, примыкающих друг к другу по целой стороне или в вершинах. Тогда для числа Г этих областей, числа В их вершин и числа Р их рёбер верна такая же формула $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 0$. Далее, уберём из внутренности D некоторую жорданову многоугольную область D_0; получим двусвязную область D_1, граница которой состоит из двух непересекающихся жордановых многоугольников. Разобьём эту область на непересекающиеся своими внутренностями многоугольники. Тогда для числа этих многоугольников, их вершин и их рёбер получим равенство $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 0$. Действительно, добавив к новому разбиению удалённый многоугольник, получим разбиение исходной многоугольной области, для которой в формуле Эйлера справа стоит 1. А для разбиения области D_1 мы имеем то же количество рёбер и вершин, но число граней на одну меньше, т. е. справа будет 0.

Задача 1. Пусть из внутренности жордановой многоугольной области удалили $k > 1$ жордановых многоугольных областей, лежащих каждая вне остальных. Получим $(k+1)$-связную область D_k, граница которой состоит из $k + 1$ многоугольников (включая исходный). Пусть область D_k разбита на многоугольники. Какой вид в этом случае будет иметь формула Эйлера?

Теперь с использованием формулы Эйлера мы вычислим сумму углов жорданова многоугольника, а отсюда уже получим, что индекс жорданова многоугольника равен $+1$ (если его внутренняя область остаётся слева от направления обхода).

Итак, пусть нам дан n-угольник P без самопересечений, и пусть область D — внутренность этого многоугольника — разбита на T треугольников (рис. 1a). Пусть $n_{\text{вн}}$ вершин этих треугольников расположены внутри области D, а на границе, кроме n вершин самого многоугольника, имеется ещё $n_{\text{гр}}$ вершин. Тогда число E всех сторон треугольников триангуляции равно сумме $n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}$, где $E_{\text{вн}}$ — число рёбер внутри D (на рис. 1a имеем $n = 6$, $n_{\text{гр}} = 2$, $n_{\text{вн}} = 2$, $E_{\text{вн}} = 10$, $T = 10$). Сумма углов всех треугольников равна πT, и она складывается из $2\pi n_{\text{вн}}$ — суммы углов при внутренних вершинах, $\pi n_{\text{гр}}$ — суммы углов при добавленных вершинах на границе, и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ — суммы внутренних углов при вершинах многоугольника. Поэтому, с учётом формулы Эйлера (2) и значений $N = n + n_{\text{гр}} + n_{\text{вн}}$ и $E = n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi(T - 2n_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}) = \pi(1 - 3n_{\text{вн}} + E_{\text{вн}} - n_{\text{гр}}). \tag{3}$$

Теперь вычислим число сторон по-другому. В T треугольниках имеется $3T$ сторон, но каждая сторона внутри области считается два раза, так как к ней примыкают два треугольника. Поэтому $3T = n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}$. Подставим это значение T в (2) и получим

$$3(n + n_{\text{гр}} + n_{\text{вн}}) - 3(n + n_{\text{гр}} + E_{\text{вн}}) + (n + n_{\text{гр}} + 2E_{\text{вн}}) = 3,$$

откуда $E_{\text{вн}} = 3n_{\text{вн}} + n + n_{\text{гр}} - 3$. Теперь из (3) получаем $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi(n-2)$, что вместе с (1) даёт искомое равенство $\mathrm{Ind}_P = 1$.

Задача 2. Пусть жорданов многоугольник обходится в противоположном направлении, т. е. его внутренность остаётся справа. Получите рассуждениями, аналогичными вышепроведённым, что его индекс равен -1.

Случай 2. Пусть многоугольник с данной ориентацией (т. е. с данным направлением обхода) имеет конечное число точек самопересечения. Будем предполагать, что в каждой из них пересекаются только две стороны, так что, в частности, точки самопересечения не являются вершинами многоугольника и пересечение сторон происходит в их внутренней точке. Такие многоугольники будем называть *нормальными*. Для задачи вычисления индекса или суммы углов это ограничение несущественно, так как любой «ненормальный» многоугольник с самопересечениями может быть приведён к нормальному виду сколь угодно малым смещением вершин (с возможным изменением количества точек самопересечения [1]), а при этом сумма углов многоугольника и его индекс не изменятся. Действительно, при малом изменении положений вершин, а значит, и положений сторон,

[1] Приведите примеры смещений вершин, при которых происходит увеличение, уменьшение или сохранение количества точек самопересечения.

углы изменятся на малую величину, а сумма углов всегда кратна 2π и при малом изменении углов она может изменяться только на малую величину, оставаясь кратной 2π. Следовательно, коэффициент кратности должен оставаться постоянным, иначе изменение будет не меньше чем на 2π. (Это очень важное свойство дискретнозначных функций: если функция может принимать только дискретное множество значений и непрерывна на связном множестве, то она на нём постоянна. В нашем случае индекс многоугольника является согласно формуле (1) непрерывной функцией углов α_i, определённой в n-мерном открытом кубе, заданном условиями $0 < \alpha_i < 2\pi$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Значит, при достаточно малом изменении значений этих углов индекс остаётся постоянным.)

Далее, найдём такую прямую L, чтобы весь многоугольник располагался по одну сторону от неё, имея на самой прямой одну или несколько вершин и сторон. Такая прямая, называемая *опорной* к многоугольнику, строится следующим способом: берём любую прямую, не пересекающуюся с многоугольником, и сдвигаем её параллельно самой себе в сторону многоугольника до первой встречи с многоугольником. Это первое пересечение произойдёт или только в одной вершине многоугольника (тогда полученная прямая называется *строго опорной*), или в нескольких вершинах, или по одной или нескольким сторонам, или в комбинации «несколько вершин и несколько сторон» (нарисуйте для каждой возможности соответствующий рисунок). Если есть вершина, лежащая на опорной прямой, а выходящие из неё стороны составляют с прямой ненулевой угол, то эта прямая называется *локально строго опорной* в этой вершине (таким образом, опорная к многоугольнику прямая является локально строго опорной в каждой отдельно лежащей на ней вершине, а если есть сторона, лежащая на опорной прямой, то в её точках эта опорная прямая не является локально строго опорной).

Задача 3. (1) Докажите, что для всякого многоугольника существует строго опорная к нему прямая. (2) Приведите пример вершины, через которую не проходит ни одна опорная прямая. (3) Приведите пример вершины, через которую проходит единственная опорная прямая.

Пусть опорная прямая L построена. Ради технического упрощения предположим, что на ней есть отдельно лежащая вершина, так что в ней прямая L является локально строго опорной. Начнём с неё обход многоугольника, и пусть вершины получили обозначения $M_1, M_2, \ldots, M_n$ при данном направлении обхода. Выберем точку M_1 началом координат. За ось Ox примем опорную прямую и выберем на ней положительное направление так, чтобы многоугольник оставался от неё слева при движении в этом направлении, а ось Oy направим в сторону расположения многоугольника, так что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy будет против часовой стрелки. Каждой стороне многоугольника приписываем номер, совпадающий с номером её начальной точки при данном обходе многоугольника. Каждую точку самопересечения считаем началом двух векторов — первый вектор идёт по направлению первой пришедшей к этой точке стороны, а второй — по направлению обхода другой стороны. Эти два вектора не параллельны, так что наименьший геометрический угол между ними всегда меньше π. Если этот наименьший угол описывается вращением от первого вектора ко второму *по* часовой стрелке, тогда мы этой точке самопересечения приписываем знак $(+)$, а в противном случае — знак $(-)$. Назовём это условие *правилом выбора знака.* Пусть при таком правиле расстановки знаков оказалось, что есть N^+ точек самопересечения со знаком $(+)$ и N^- точек со знаком $(-)$. Тогда утверждается, что *индекс многоугольника равен*

$$\mu + (N^+ - N^-), \quad \mu = \pm 1, \tag{4}$$

где $\mu = +1$, *если в вершине с номером 1 вращение от продолжения стороны* M_nM_1 *к стороне* M_1M_2 *идёт против часовой стрелки, и* $\mu = -1$ *в противном случае.* В частности, если точек самопересечения нет (т. е. многоугольник жорданов), то $N^+ = N^- = 0$ и $\mathrm{Ind}_P = \pm 1$ в соответствии с ориентацией жорданова многоугольника (заметьте, что зависимости от числа сторон многоугольника нет).

Доказательство этого утверждения проведём индукцией по числу точек самопересечения. Формально база индукции уже есть: если число точек самопересечения равно нулю, то формула верна (см. случай 1). Для большей ясности изложения сначала выполним индукционный переход при наличии только одного самопересечения.

Итак, пусть нам даны многоугольники P_0 с одним самопересечением, как на рис. 2а и 3а.

Поступаем следующим образом: отправляемся от вершины M_1 в направлении обхода (в нашем примере — по стороне M_1M_2) и отмечаем, когда мы впервые пересекаем сторону, которую уже прошли. Пусть мы впервые вернулись к уже пройденной стороне в некоторой точке M_0, которая в первый раз лежала на стороне M_iM_{i+1}, а во второй раз на стороне M_jM_{j+1} (в нашем случае мы проходим стороны M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5 без возвращения к пройденным сторонам и первый раз возвращаемся к уже пройденной стороне M_2M_3, когда идём по стороне M_5M_6). Участок многоугольника от точки M_0 до M_{i+1} и далее до M_j и по отрезку $M_jM_0 \in M_jM_{j+1}$ представляет собой жорданов $(j - i + 2)$-угольник. На рис. 2а и 3а около точки M_0 вектором со знаком (1) отмечены первые направления прихода, а вектором со знаком (2) — вторые. Видим, что

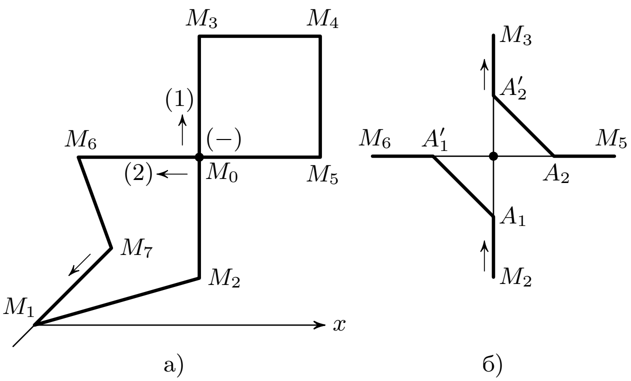


Рис. 2

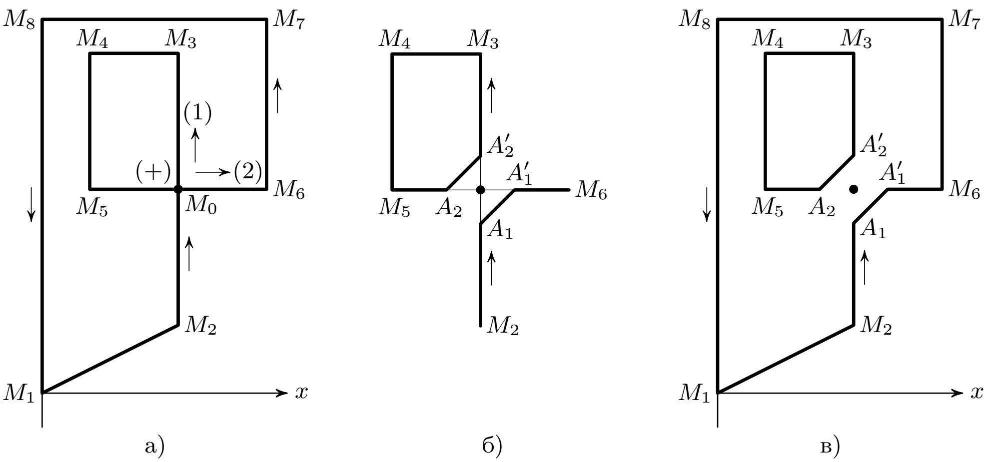


Рис. 3

в первом случае кратчайшее вращение от первого вектора к второму идёт против часовой стрелки, и поэтому согласно условию доказываемого утверждения мы должны поставить в точке M_0 знак $(-)$, что на рис. 2а и сделано. А на рис. 3а такое же вращение идёт по часовой стрелке, и поэтому там поставлен знак $(+)$. Отметим (см. рис. 2б и 3б) на отрезках M_0M_i, M_0M_{j+1}, M_0M_{i+1}, M_0M_j на достаточно малом равном расстоянии d от M_0 соответственно точки A_1, A'_1, A'_2, A_2 (с условием, чтобы на этих отрезках не было новых точек самопересечения многоугольника) и заменим участок $A_1M_0A'_1$ отрезком $A_1A'_1$, обходимым от A_1 к A'_1. Аналогично заменим участок $A_2M_0A'_2$ отрезком $A_2A'_2$ с обходом от A_2 к A'_2.

Тогда исходный многоугольник распадётся на два многоугольника P_1: $A_2A'_2M_{i+1} \ldots M_jA_2$ и P_2: $M_1 \ldots A_1A'_1M_{j+1} \ldots M_nM_1$, все стороны которых обходятся ровно в тех же направлениях, как и на исходном многоугольнике P_0, поэтому внутренние углы этих многоугольников при всех вершинах M_k будут те же самые, что и в P_0. При этом первый многоугольник P_1 будет по его построению жордановым (ни одна его сторона не встречается с предыдущими и последующими его же сторонами, кроме встречи стороны M_jA_2 со стороной A_2A_2' в их общей вершине A_2, где многоугольник P_1 и замыкается). Важно также отметить, что участок исходного многоугольника от вершины M_1 до точки M_0 является жордановой дугой (т. е. без самопересечений), к тому же без пересечения и с многоугольником P_1.

Всякий «проволочный» жорданов многоугольник является общей границей двух областей — ограниченной и неограниченной, и точки из одной области характеризуются тем, что их можно соединить ломаной, не пересекающей границу области, а никакие две точки из разных областей нельзя соединить без пересечения границы. Этот признак позволяет установить, что в нашем случае точки, лежащие вблизи отрезка A_2A_2' по ту сторону, где нет точки M_0, принадлежат ограниченной (внутренней) многоугольной области. Действительно, точку M_0 можно соединить с начальной вершиной M_1, не пересекая многоугольник P_1, а именно, идя по жордановой дуге $M_0M_iM_{i-1}\ldots M_2M_1$, а точка M_1 соединяется со всеми точками полуплоскости $y<0$, поэтому точка M_0 принадлежит внешней по отношению к P_1 области. Следовательно, точки, лежащие вблизи отрезка A_2A_2' с противоположной стороны от M_0, находятся во внутренности жорданова многоугольника P_1, и обход этого многоугольника в направлении от A_2 к M_{i+1} есть обход вокруг границы жордановой многоугольной области. Тогда индекс многоугольника, соответствующий этому обходу, как мы установили выше, равен ± 1, а именно, $+1$, если область остаётся слева, и -1, если область остаётся справа.

Ситуация на рис. 2б соответствует случаю, когда кратчайший поворот от приходящего первым направления к приходящему вторым происходит против часовой стрелки, и по правилу выбора знака мы в этой точке имеем $N^-=1$. С другой стороны, обход жорданова многоугольника P_1 по направлению от A_2 к A_2' оставляет эту область справа, значит, $\mathrm{Ind}_{P_1}=-1$. Тогда сумма внутренних углов многоугольника P_1 равна

$$\Sigma_1+\alpha_1+\alpha_2=\pi(j-i+2-2\,\mathrm{Ind}_{P_1})=\pi(j-i+4),$$

где Σ_1 — сумма внутренних углов при вершинах $M_{i+1},\ldots,M_j$, а α_1 и α_2 — внутренние углы при вершинах A_2 и A_2', каждый равный $\pi+\gamma$, где γ — геометрическая величина углов $M_0A_2A_2'$ и $M_0A_2'A_2$ (в нашем примере $i=2$, $j=5$ и $\gamma=\pi/4$).

Оставшаяся часть многоугольника образует новый многоугольник P_2, см. рис. 2в (в нашем случае он тоже жорданов, так как точка самопересечения была только одна). В его вершине M_1 значение μ такое же, как у исходного многоугольника, поэтому $\operatorname{Ind}_{P_2} = \mu$.

Число сторон нового многоугольника равно $n+2+i-j$. Следовательно, сумма его углов равна $\Sigma_2 + \beta_1 + \beta_2 = \pi(n+2+i-j-2\mu)$, где через Σ_2 обозначена сумма углов при вершинах M_k, а β_1 и β_2 — углы при вершинах A_1 и A_1', каждый равный $\pi - \delta$, где δ — геометрическая величина углов $M_0A_1A_1'$ и $M_0A_1'A_1$ (в нашем примере $n = 7$ и $\delta = \pi/4$). Сложив эти уравнения и учитывая, что значения γ и δ равны (так как четырёхугольник $A_1A_1'A_2'A_2$ — всегда прямоугольник), получим, что сумма всех углов при вершинах многоугольника P_0 равна

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = -4\pi + \pi(n+6-2\mu) = \pi(n - 2\operatorname{Ind}_{P_0}),$$

откуда

$$\operatorname{Ind}_{P_0} = \mu - 1.$$

Это полностью соответствует утверждаемой формуле (4), так как $N^+ = 0$, $N^- = 1$ (в нашем примере $\mu = 1$, так как кратчайшее вращение от продолжения последней стороны M_7M_1 в сторону оси Ox идёт против часовой стрелки, и можем проверить полученную формулу непосредственным вычислением суммы углов данного на рис. 2в многоугольника).

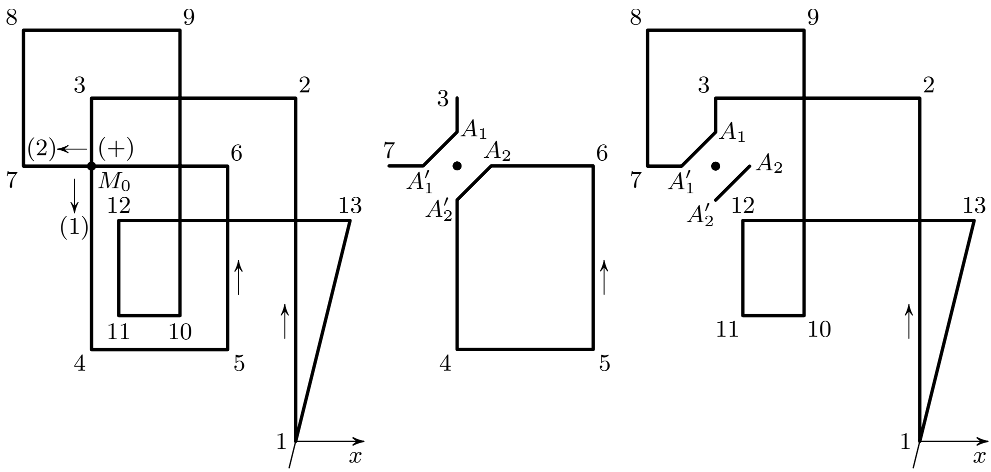
Пример на рис. 3в рассматривается аналогично. Существенно только то, что на этот раз обход жорданового многоугольника $A_2A_2'M_{i+1}\ldots M_jA_2$ оставляет область слева, и поэтому его индекс равен $+1$, а расположение первого и второго направлений, приходящих в точку самопересечения, даёт значения $N^+ = 1$, $N^- = 0$ (что отображено на рис. 3а). В итоге получаем формулу

$$\operatorname{Ind}_{P_0} = \mu + 1,$$

снова в полном соответствии с формулой (4). Заметим, что значения участвующих в этих вычислениях углов $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ могут меняться, но главное то, что их сумма всегда равна 4π. Отметим также для дальнейшего, что обход «проволочного» жорданова многоугольника $A_2A_2'M_{i+1}\ldots M_jA_2$ оставляет этот плоский многоугольник справа, если знак при точке самопересечения M_0 отрицательный, и слева, если знак при M_0 положительный. Действительно, на участке $M_jA_2A_2'M_{i+1}$ происходит поворот от второго пришедшего в M_0 направления к первому. При знаке $(+)$ этот поворот происходит против часовой стрелки, поэтому жорданов многоугольник оказывается слева, и аналогично при знаке $(-)$ он оказывается справа.

Теперь на примере рис. 4а рассмотрим случай наличия нескольких точек самопересечения.

Чтобы не загромождать рисунки множеством обозначений вершин многоугольника как точек M_i, мы поставили только номера этих точек, но в тексте



а) б) в)

Рис. 4

будем использовать обозначения M_i. Пусть при обходе многоугольника в направлении от вершины M_1 к вершине M_2 движущаяся точка впервые возвращается к пройденному положению при пересечении сторон с начальными вершинами M_i и M_j, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $j - i \geqslant 2$; в нашем примере $i = 3$, $j = 6$ (напомним, номер стороны совпадает с номером её начальной вершины при обходе). Обозначим эту точку как M_0 и выберем на отрезках M_iM_0, M_0M_{i+1}, M_jM_0, M_0M_{j+1} соответственно точки A_1, A'_2, A_2, A'_1 на некотором равном расстоянии d от точки M_0, достаточно малом, чтобы между ними и точкой M_0 не было точек самопересечения многоугольника (но дальше d на этих отрезках точки самопересечения могут быть — например, у нас на рисунке на отрезке M_6A_2 есть точка его пересечения со стороной M_9M_{10}). Уберём отрезки $A_1A'_2$ и $A_2A'_1$, но добавим новые стороны $A_1A'_1$ и $A_2A'_2$. Получим два отдельных многоугольника P_1: $A_2A'_2M_{i+1} \ldots M_jM_2$ и P_2: $M_1 \ldots M_iA_1A'_1M_{j+1} \ldots M_nM_1$ (у нас они изображены соответственно на рис. 4б и рис. 4в). Стороны этих многоугольников обходятся в таком же направлении, как в исходном многоугольнике, поэтому внутренние углы при всех вершинах M_k остаются теми же, что и в исходном многоугольнике. Многоугольник P_1 по построению жорданов. Как было показано выше, если точке M_0 приписан по указанному выше правилу знак $+$, то обход многоугольника P_1 будет в положительном направлении (т. е. ограниченная им область остаётся слева) и его индекс равен $+1$.

Дальнейшие рассуждения проводятся по такой схеме: сумма углов в жордановом многоугольнике P_1 аналогично вышепроведённому рассуждению вычисляется по формуле $\Sigma_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi(j - i + 2 - 2\,\mathrm{Ind}_{P_1})$, где через Σ_1 обозначена сумма углов многоугольника P_1 при вершинах

$M_{i+1}, \ldots, M_j$, а α_1 и α_2 — углы при вершинах A_2 и A'_2, каждый равный $\pi - \gamma$, где γ — геометрическая величина углов $\angle M_0A_2A'_2$ и $\angle M_0A'_2A_2$ (в нашем примере $n = 13$, $i = 3$, $j = 6$, $\operatorname{Ind}_{P_1} = 1$ и $\gamma = \pi/4$). Индекс многоугольника P_2 по индукционному предположению равен $\mu + N_2^+ - N_2^-$, где N_2^+ и N_2^- — соответственно число плюсов и минусов в точках самопересечения, оставшихся в многоугольнике P_2. Значит, сумма внутренних углов при его вершинах равна $\Sigma_1 + \beta_1 + \beta_2 = \pi(n + 2 + i - j - 2\mu - 2N_2^+ + 2N_2^-)$. Сложив эти две суммы и учитывая вышеприведённое равенство $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 4\pi$, получим общую сумму внутренних углов исходного многоугольника P_0:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \pi(n - 2\mu - 2\operatorname{Ind}_{P_1} - 2(N_2^+ - N_2^-)). \tag{5}$$

Теперь заметим, что число точек самопересечения в многоугольнике P_2, вообще говоря, меньше, чем в исходном многоугольнике P_0 (в нашем примере на рис. 4в при переходе к многоугольнику P_2 «исчезли» пересечения сторон M_6M_7 с M_9M_{10} и M_5M_6 с $M_{12}M_{13}$). Поскольку в построении многоугольника P_2 не участвуют стороны жорданова многоугольника P_1, то исчезают именно пересечения с ними. Участок $M_1M_2 \ldots M_iA_1$ многоугольника P_2 не пересекается с P_1, иначе точка M_0 не была бы *первой* точкой самопересечения при движении от начальной вершины M_1, значит, «исчезающие» точки самопересечения получаются при пересечении жорданова многоугольника P_1 с ломаной $A'_1M_{j+1} \ldots M_nM_1$. Но эта ломаная начинается и заканчивается во внешности жорданова многоугольника, значит, у неё должно быть чётное число пересечений с ним, с одинаковым числом точек входа вовнутрь многоугольника и выхода из него. В точках входа и выхода знаки, которые мы договорились расставлять в точках самопересечения, должны быть противоположными. Действительно, первым направлением всегда будет направление стороны жорданового многоугольника (она имеет меньший номер), а вторым — направление вектора, идущего соответственно внутрь или вовне этого многоугольника и потому дающего противоположные знаки этой паре направлений. Пусть будет N_1^+ точек со знаком $(+)$ и $N_1^- = N_1^+$ точек со знаком $(-)$. Тогда всего будет $N_1^+ + N_2^+$ вершин со знаком $(+)$ и $N_1^- + N_2^- = N_1^+ + N_2^-$ вершин со знаком $(-)$, и ещё вершина M_0, знак ± 1 при которой совпадает с Ind_{P_1}. В итоге формулу (5) можно переписать следующим образом:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \pi(n - 2\mu - 2(N^+ - N^-)), \tag{6}$$

так как если $\operatorname{Ind}_{P_1} = 1$, то при M_0 должен быть знак $(+)$, значит,

$$\operatorname{Ind}_{P_1} + N_1^+ + N_2^+ = N^+;$$

если же $\operatorname{Ind}_{P_1} = -1$, то при M_0 должен быть знак $(-)$, значит,

$$N^- = 1 + N_1^- + N_2^- \quad \text{и} \quad -\operatorname{Ind}_{P_1} + N_1^- + N_2^- = N^-.$$

Вспоминая равенство (1), связывающее сумму углов многоугольника с его индексом, получаем требуемую формулу (4) для индекса. Таким образом, формула (6) является конкретизацией формулы (1) и позволяет легко вычислить сумму углов многоугольника.

Задача 4. Вычислите индексы многоугольников в рассмотренных примерах для случая их обхода в противоположном направлении, т. е. в направлении от M_1 к M_n.

Замечание. Конечно, формулу (4) можно обобщить на случай, когда пересечения сторон многоугольника происходят более сложным образом (см. введённое на с. 118 понятие нормального многоугольника). Легче всего это сделать в случае, когда допускаются пересечения в вершинах (сторона проходит через «чужую» вершину или даже в одной вершине встречаются четыре стороны). Используя работу [5], вопрос о быстром вычислении индекса и суммы углов можно надеяться решить и для многоугольников на плоскости Лобачевского.

Список литературы

[1] *Сабитов И. Х.* Чему равна сумма углов многоугольника? // Квант. 2001. № 3. С. 7–12.

[2] *Whitney H.* On regular closed curves in the plane // Comp. Math. 1937. Vol. 4, № 2. P. 276–284.

[3] *Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.

[4] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2017.

[5] *Сабитов И. Х.* Об одном методе вычисления объёмов тел // Сибирские электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 615–626.

Иджад Хакович Сабитов, мехмат МГУ

isabitov@mail.ru

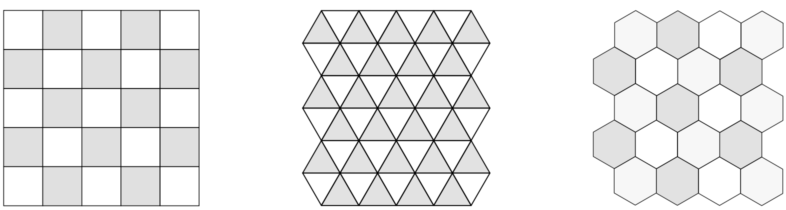
Наш семинар: математические сюжеты

Правильные паркеты и производящие функции

К. А. Ваньков, В. М. Журавлёв

§ 1. Введение

С давних времён известны три правильные мозаики (рис. 1). В качестве элементов этих мозаик используются квадрат, правильный треугольник и правильный шестиугольник. Определения, относящиеся к мозаикам, см. в § 2. В популярной математической литературе некоторые мозаики называются паркетами.



(а) полимино (б) полиамонд (в) полигекс

Рис. 1. Три правильные мозаики

В комбинаторной геометрии рассматриваются конечные фигуры, составленные из одинаковых квадратов — полимино, из одинаковых правильных треугольников — полиамонды и из одинаковых правильных шестиугольников — полигексы (см., например, [1]). Ф. Харари называл n-мино (полимино, состоящих из n единичных квадратов) «монстрами, составленными из n ячеек». По аналогии полиамонды и полигексы называются треугольными и шестиугольными монстрами. Фактически эти фигуры можно рассматривать как связные конечные подмножества соответствующих правильных мозаик (паркетов).

Трансляционный тип полимино (полиамондов, полигексов) получается, если мы считаем одинаковыми фигуры, совпадающие при параллельном переносе. *Вращательный* (ротационный) тип возникает, если считать одинаковыми любые два монстра, эквивалентные относительно группы собственных движений плоскости — поворотов и параллельных переносов. *Изометрический* тип возникает, если считать одинаковыми (эквивалентными) любые два конгруэнтных монстра.

Трансляционное полимино называют *горизонтально-выпуклым* (соответственно *вертикально-выпуклым*), если пересечение любой горизонтальной (вертикальной) прямой с полимино либо пусто, либо состоит только из одного отрезка.

Пусть s_n обозначает количество различных горизонтально-выпуклых n-мино. Начальные члены этой последовательности $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 6$, $s_4 = 19$, $s_5 = 61$, $s_6 = 196$ (см. [14]). Известно, что эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению третьего порядка

$$s_n = 5s_{n-1} - 7s_{n-2} + 4s_{n-3} \quad \text{для } n \geqslant 5. \tag{1}$$

Производящей функцией для последовательности будет рациональная функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1 - 5x + 7x^2 - 4x^3}. \tag{2}$$

Производящей функцией для количества выпуклых по строкам полигексов будет

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1 - 6x + 10x^2 - 7x^3 + x^4}. \tag{3}$$

Как следствие, последовательность для количества выпуклых по строкам полигексов удовлетворяет рекуррентному соотношению четвёртого порядка

$$h_n = 6h_{n-1} - 10h_{n-2} + 7h_{n-3} - h_{n-4} \quad \text{для } n \geqslant 5. \tag{4}$$

Начальные члены этой последовательности $1, 3, 11, 42, 162, 626, 2419, \ldots$ (см. [15]).

Доказано, что количество выпуклых по строкам полиамондов удовлетворяет рекуррентному соотношению седьмого порядка

$$t_n = 3t_{n-1} - 4t_{n-3} + t_{n-4} + t_{n-5} + 3t_{n-6} - t_{n-7} \quad \text{для } n \geqslant 8. \tag{5}$$

Начальные члены этой последовательности $2, 3, 6, 14, 34, 84, 208, 515, \ldots$ (см. [16]). Производящей функцией для этой последовательности будет рациональная функция

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n = \frac{x(1-x)(2-x-4x^2+2x^4+3x^5)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7}. \tag{6}$$

Рекуррентное соотношение (1) впервые было обнаружено Д. Пойа в 1938 году, но не было им опубликовано до 1969 года, см. [12]. Производящие функции $S(x)$ и $H(x)$, см. (2), (3), были получены Д. Кларнером в [11] с помощью комбинаторной интерпретации интеграла Фредгольма. В [9] приведено ещё одно доказательство формулы (2), полученное И. Гессель с помощью метода трансфер-матрицы. Комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (1), использующее элементарные выкладки, предложено Д. Хикерсоном в работе [10]. Подсчёт горизонтально-выпуклых полимино с использованием техники частных производных рядов производящих функций многих переменных предложен в книге [3]. С горизонтально-выпуклыми полиамондами история немного затянулась. Тем не менее, в статье [4] доказана формула (6) и найдено несколько других рациональных производящих функций. Там же предложено комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (5). Нам известно комбинаторное доказательство соотношения (4), найденное школьником Гаем Штотландом.

Рассмотрим теперь однородные мозаики (рис. 2). Мы также можем рассмотреть связные конечные подмножества этих мозаик. Назовём их мозаичными монстрами. По аналогии введём определения горизонтально-выпуклых мозаичных монстров. Оказывается, в этом случае можно определить соответствующие последовательности, которые будут удовлетворять рекуррентным соотношениям. Более того, преодолев технические сложности, удаётся вычислить несколько производящих функций для этих последовательностей.

В этой статье мы будем в основном использовать технику из книги [3], но, в отличие от книги, мы предпочитаем маркировать строки, а не столбцы. Иногда мы будем упрощать выкладки с помощью комбинаторных рассуждений, построив биекции между некоторыми множествами мозаичных монстров. Для одной из мозаик будет предложено комбинаторное доказательство соответствующего рекуррентного соотношения.

§ 2. Мозаики и правильные паркеты

Мозаика — это семейство $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots\}$ замкнутых множеств T_i (элементов мозаики), покрывающих плоскость без существенных (имеющих ненулевую площадь) пробелов и перекрытий (см. [2]).

Мозаика называется *правильной*, если группа симметрии мозаики действует транзитивно на флаги мозаики, где *флаг* — это тройка, состоящая из взаимно смежных вершин, рёбер и плиток мозаики. Это означает, что для любой пары флагов существует операция симметрии, переводящая первый флаг во второй, что эквивалентно мозаике соединённых ребро к ребру конгруэнтных правильных многоугольников. Получаем, что в каждой вершине должно быть или шесть правильных треугольников или четыре квадрата или три правильных шестиугольника.

Паркетом называется покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника не имеют общих внутренних точек. Паркет называется *правильным*, если его можно наложить на себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую наперёд заданную вершину (и каждый многоугольник паркета целиком наложится на некоторый многоугольник паркета).

Всего имеется 11 правильных[1)] паркетов (см., например, [8]). Они соответствуют трём правильным и восьми однородным мозаикам и изображены на рис. 1 и 2.

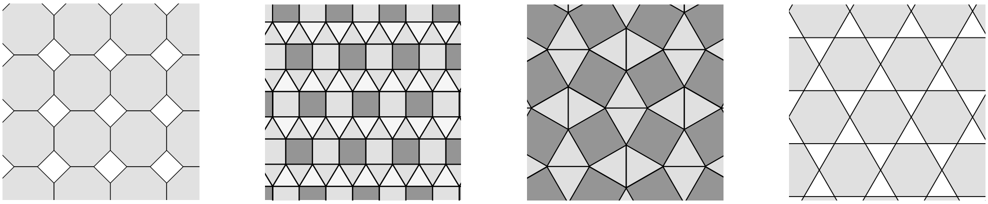
Для обозначения паркетов мы используем наборы чисел, указывающих на состав правильных многоугольников в вершине паркета.

Вершинная транзитивность означает, что для любой пары вершин существует параллельный перенос или симметрия, отображающая первую вершину во вторую. Если требование транзитивности флагов ослаблено до транзитивности вершин, но условие соединения плиток «ребро к ребру» сохраняется, то существует восемь дополнительных мозаик, которые известны как *архимедовы*, *однородные* или *полуправильные*.

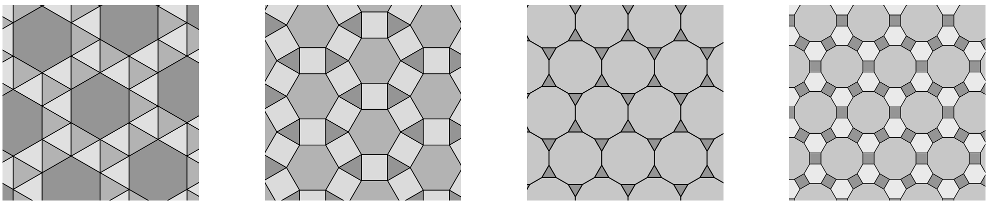
Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ — (конечное) семейство таких замкнутых множеств, что каждый элемент T_i мозаики (T_i) конгруэнтен одному из множеств P_j. Тогда $\mathcal{P}$ называется множеством *прототипных элементов* или *прототипов* мозаики $\mathcal{T}$, и говорят, что $\mathcal{P}$ *реализуется* в виде мозаики $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{P}$ содержит ровно k различных фигур и все эти фигуры используются в $\mathcal{T}$, то мозаика $\mathcal{T}$ называется *k-эдрической*.

При $k = 1$ мозаика называется *моноэдрической*. Примерами являются правильные мозаики.

[1)] Иногда такие паркеты называют полуправильными, но мы предпочитаем определение А. Н. Колмогорова.



(а) $(4, 8^2)$ (б) $(3^3, 4^2)$ (в) $(3^2, 4, 3, 4)$ (г) $(3, 6, 3, 6)$



(д) $(3^4, 6)$ (е) $(3, 4, 6, 4)$ (ж) $(3, 12^2)$ (з) $(4, 6, 12)$

Рис. 2. Однородные мозаики

Однородные мозаики (рис. 2) были знакомы ещё Кеплеру. Они подразделяются на 2-эдрические и 3-эдрические. Одна из мозаик $(3^4, 6)$ может иметь два зеркально-симметричных друг другу вида.

Для паркетов мы используем определения, предложенные А. Н. Колмогоровым в статье [6].

§ 3. Горизонтально-выпуклые, штабельные, слоёные

В случае полимино или полиамондов недостаточно обычной геометрической связности составленной фигуры. Необходимо, чтобы каждый правильный многоугольник с длиной стороны 1 имел общую сторону с каким-нибудь другим правильным многоугольником с длиной стороны 1. В вышеупомянутой книге [1] С. Голомб отмечает, что поставленная на любую клетку полимино ладья сможет за конечное число ходов перейти на любую другую клетку того же полимино. Термин «ход ладьи» не является общепринятым для случая фигур, составленных из правильных треугольников и шестиугольников. В этой ситуации мы можем каждой такой фигуре сопоставить граф. Каждому правильному многоугольнику с длиной стороны 1 будет соответствовать вершина графа. Если два таких многоугольника имеют общую сторону, то соединим соответствующие им вершины ребром. Таким образом, требование связности составленной фигуры заменяется более сильным требованием связности соответствующего этой фигуре графа.

Если не будет оговорено иное, под связностью мы понимаем именно связность соответствующего конечного или бесконечного графа.

По-видимому первым, кто начал рассматривать трансляционные n-мино, составленные из горизонтальных полосок, был М. Иден[2]. Поскольку по виду они напоминают штабеля досок, их можно было бы называть *штабельными* n-мино. Несколько позже Д. Кнут предложил называть штабельные n-мино *выпуклыми по строкам* или *горизонтально-выпуклыми*. *Выпуклыми* называют полимино, которые одновременно выпуклы по строкам и по столбцам. Отметим, что выпуклое полимино не обязано быть выпуклой геометрической фигурой.

В множестве трансляционных мозаичных монстров мы рассмотрим подмножество горизонтально-выпуклых. Для определения горизонтально-выпуклых мозаичных монстров нам понадобится разбить правильные паркеты на бесконечные слои. *Бесконечным слоем* мы считаем связное бесконечное подмножество паркета, переходящее в себя при некотором параллельном переносе. Слою соответствует некоторый бесконечный связный граф. С геометрической точки зрения толщина слоя нигде не равна 0.

Прямую, которая целиком принадлежит слою и пересекает каждый правильный многоугольник, принадлежащий слою, назовём *направляющей*. Отметим, что при таком определении **не** всякая горизонтальная прямая будет направляющей.

Количество и форма горизонтально-выпуклых мозаичных монстров у нас будет зависеть от разбиения паркета на слои. Иногда для удобства горизонтально-выпуклые мозаичные монстры мы будем называть слоёными мозаичными монстрами.

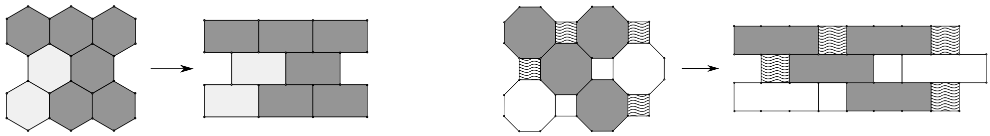
Итак, пусть у нас есть паркет с разбиением на бесконечные слои и каждый слой содержит хотя бы одну направляющую.

Определение. Горизонтально-выпуклыми (слоёными) называются такие мозаичные монстры, что каждая направляющая либо не пересекает мозаичный монстр, либо пересекает его по отрезку или точке.

Наше определение согласуется с определениями для горизонтально-выпуклых полимино и горизонтально-выпуклых полиамондов. В этих случаях любая горизонтальная прямая будет направляющей какого-нибудь слоя. При определении горизонтально-выпуклых полигексов мы видим, что не всякая горизонтальная прямая пересекает горизонтально-выпуклый полигекс по отрезку. Однако прямая, проходящая через центры шестиугольников слоя, пересекает такой полигекс по отрезку, т. е. такую прямую можно рассматривать в качестве направляющей.

[2] См. [5, с. 313–314].

Существует естественное отображение гексагонального паркета в кирпичную кладку (рис. 3а), см., например, [13].



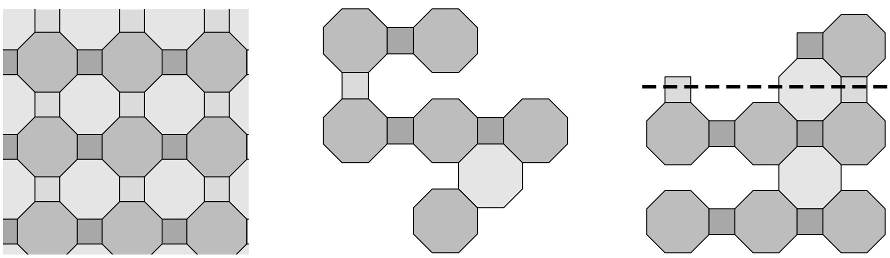
(а) (б)

Рис. 3. Отображения паркетов в слоёную кладку из блоков

Очевидно, что любая горизонтальная прямая либо не пересекает образ горизонтально-выпуклого полигекса на кирпичной кладке, либо пересекает его по отрезку.

Перейдём теперь к примерам для паркетов. Выберем естественные разбиения паркетов на слои. Если это необходимо, повернём паркеты так, чтобы направляющие были горизонтальны.

Мозаичные монстры, располагающиеся на паркете рис. 2а, состоят из правильных восьмиугольников и квадратов. Для простоты будем называть такие монстры полиоктами. Как видим, паркет можно разбить на одинаковые бесконечные слои (рис. 4а). Как мы условились, на рисунке паркет повёрнут так, чтобы направляющие были горизонтальны.



(а) паркет $(4, 8^2)$ (б) слоёный полиокт (в) неслоёный полиокт

Рис. 4. Бесконечный паркет и конечные полиокты

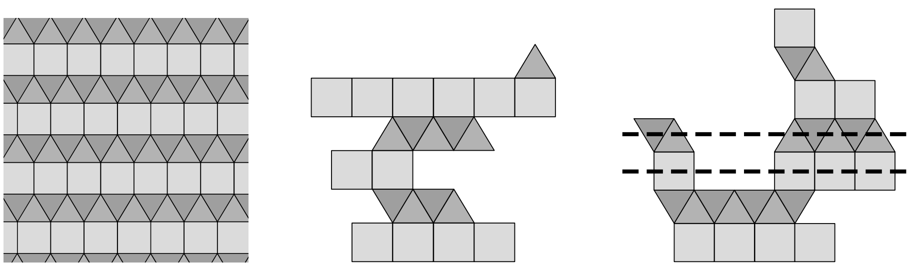
Нетрудно видеть, что в каждом слое есть бесконечно много направляющих и в то же время есть горизонтальные прямые, не принадлежащие ни одному слою, т. е. не являющиеся направляющими. В качестве одной из направляющих можно рассматривать прямую, проходящую через центры всех квадратов и восьмиугольников слоя.

На рис. 4б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) полиокта. На рис. 4в приведён пример полиокта, не являющегося горизонтально-выпуклым, поскольку существует направляющая, которая пересекает слой по двум отрезкам.

При таком разбиении паркета на слои мы можем построить отображение паркета $(4, 8^2)$ в кладку из блоков (рис. 3б). В отличие от кирпичной кладки, в кладке из блоков мы имеем два типа блоков, а именно: квадратные блоки и блоки размером 1×3. В этой кладке квадратные блоки располагаются строго над (под) серединой блоков размером 1×3.

Упражнение 1. Найдите другое такое разбиение паркета $(4, 8^2)$ на бесконечные слои, что каждый слой содержит хотя бы одну направляющую.

Мозаичные монстры на паркете рис. 2б состоят из правильных треугольников и квадратов. Для простоты будем их называть политайлы[3]. Как видим, паркет $(3^3, 4^2)$ можно разбить на бесконечные слои (рис. 5а). При этом слои из квадратов чередуются со слоями из правильных треугольников. При таком разбиении на бесконечные слои любая горизонтальная прямая является направляющей некоторого слоя. На рис. 5б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета $(3^3, 4^2)$. На рис. 5в приведён пример политайла, не являющегося слоёным, поскольку существует направляющая, которая пересекает слой по двум отрезкам.



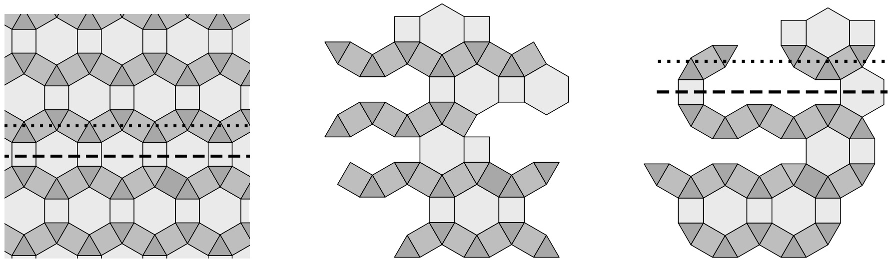
(а) паркет $(3^3, 4^2)$ (б) слоёный политайл (в) неслоёный политайл

Рис. 5. Бесконечный паркет $(3^3, 4^2)$ и конечные политайлы

Упражнение 2. Найдите другие разбиения паркета $(3^3, 4^2)$ на бесконечные слои, когда каждый слой содержит хотя бы одну направляющую, но не всякая горизонтальная прямая является направляющей.

Паркет $(3, 4, 6, 4)$ можно разбить на бесконечные слои двух видов (рис. 6а). Слои из квадратов и правильных шестиугольников чередуются со слоями из квадратов и правильных треугольников. На рис. 6б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета $(3, 4, 6, 4)$.

[3] Англ. tile — плитка, кафель, мозаика.

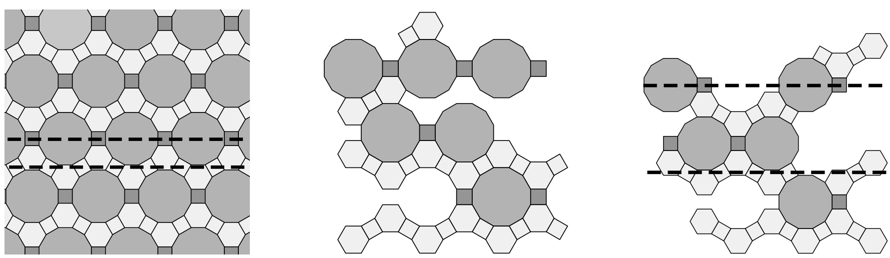


(а) паркет $(3, 4, 6, 4)$ (б) слоёный политайл (в) неслоёный политайл

Рис. 6. Бесконечный паркет $(3, 4, 6, 4)$ *и конечные политайлы*

Примерами направляющих служат прямые, проходящие через центры всех квадратов соответствующих слоёв. На рис. 6в приведён пример политайла, не являющегося слоёным.

Паркет $(4, 6, 12)$ можно разбить на бесконечные слои двух видов (рис. 7а). Слои из квадратов и правильных двенадцатиугольников чередуются со слоями из квадратов и правильных шестиугольников. На рис. 7б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета $(4, 6, 12)$. Примерами направляющих служат прямые, проходящие через центры всех квадратов соответствующих слоёв. На рис. 7в приведён пример неслоёного политайла.

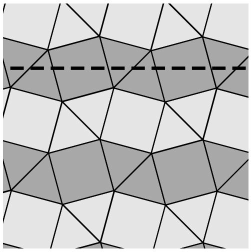


(а) паркет $(4, 6, 12)$ (б) слоёный политайл (в) неслоёный политайл

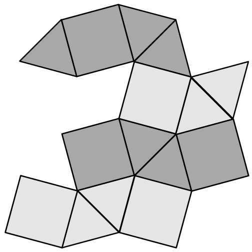
Рис. 7. Бесконечный паркет $(4, 6, 12)$ *и конечные политайлы*

Паркет $(3^2, 4, 3, 4)$ можно разбить на бесконечные слои (рис. 8а). На рис. 8б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета $(3^2, 4, 3, 4)$. Примерами направляющих служат прямые, проходящие через центры всех квадратов соответствующих слоёв. На рис. 8в приведён пример неслоёного политайла.

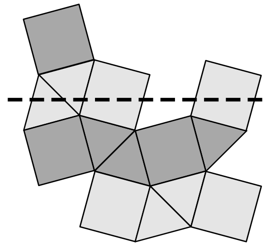
Паркет $(3^4, 6)$ можно разбить на бесконечные слои двух видов (рис. 9а). Слои из правильных треугольников чередуются со слоями из правильных



(а) паркет $(3^2, 4, 3, 4)$

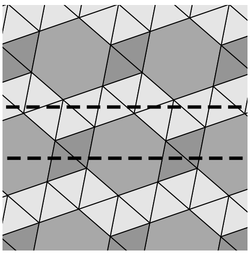


(б) слоёный политайл

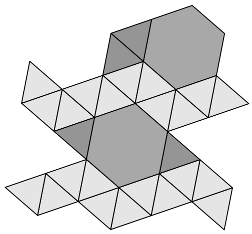


(в) неслоёный политайл

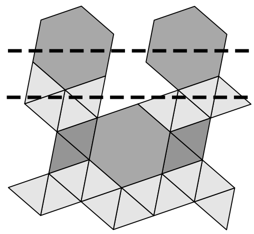
Рис. 8. Бесконечный паркет $(3^2, 4, 3, 4)$ *и конечные политайлы*



(а) паркет $(3^4, 6)$



(б) слоёный политайл

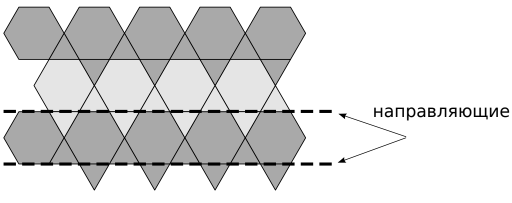


(в) неслоёный политайл

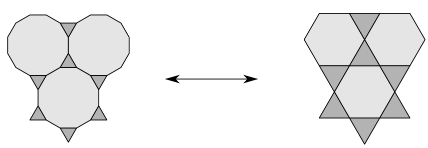
Рис. 9. Бесконечный паркет $(3^4, 6)$ *и конечные политайлы*

треугольников и правильных шестиугольников. На рис. 9б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета $(3^4, 6)$. На рис. 9в приведён пример неслоёного политайла.

Паркет $(3, 6, 3, 6)$ можно разбить на одинаковые бесконечные слои (см. рис. 10а). Каждому слою принадлежит только одна направляющая. Однако в этом случае определение горизонтально-выпуклых мозаичных монстров потребует дополнительных оговорок. Предоставим читателям возможность самим поразмышлять над этим случаем.



(а) паркет $(3, 6, 3, 6)$



(б) отображение паркета $(3, 12^2)$ в паркет $(3, 6, 3, 6)$

Рис. 10. Паркеты $(3, 6, 3, 6)$ *и* $(3, 12^2)$

Остался неохваченным паркет $(3, 12^2)$. Этот паркет, конечно же, можно разбить на слои. Но нельзя найти направляющие в каждом слое, т. е. прямые, которые лежали бы в слое и пересекали каждый многоугольник из слоя. На первый взгляд, получается, что построение горизонтально-выпуклых мозаичных монстров этого паркета невозможно. С другой стороны, существует взаимно однозначное соответствие между мозаичными монстрами паркета $(3, 12^2)$ и паркета $(3, 6, 3, 6)$ (рис. 10б). Таким образом, задачу про горизонтально-выпуклые мозаичные монстры для паркета $(3, 12^2)$ мы, с некоторыми оговорками, можем считать эквивалентной задаче про горизонтально-выпуклые мозаичные монстры для паркета $(3, 6, 3, 6)$.

§ 4. Рекуррентное соотношение для паркета $(4, 8^2)$. Комбинаторное доказательство

В этом параграфе мы предложим комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения для горизонтально-выпуклых полиоктов.

Хотим обратить внимание, что комбинаторные доказательства доступны школьникам. Более того, при правильной постановке задачи они даже могут быть найдены школьниками. Так произошло с комбинаторным доказательством рекуррентного соотношения (4) для горизонтально-выпуклых полигексов. Школьнику Гаю Штотланду было сообщено об имеющихся комбинаторных доказательствах формул (1) и (5) и поставлена задача нахождения комбинаторного доказательства для полигексов. Он успешно справился с этой задачей и сделал доклад на 27-й Европейской конференции молодых учёных[4)] в Италии в 2015 г. Предлагаем читателям самостоятельно найти это доказательство (см. упражнение в конце этого параграфа).

Однако вернёмся к полиоктам.

Пусть множество G состоит из всех горизонтально-выпуклых полиоктов, а его подмножество G_n — из тех из них, которые состоят из n правильных многоугольников (квадратов и восьмиугольников). Положим $g_n = |G_n|$.

Теорема 1. *Для $n \geqslant 6$ выполняется рекуррентное соотношение*

$$g_n = 5g_{n-1} - 3g_{n-2} - 5g_{n-3} + 7g_{n-4} - g_{n-5}. \tag{7}$$

Предлагаемое комбинаторное доказательство теоремы состоит из ряда лемм, которые связывают рекуррентными соотношениями количества полиоктов в определённых подмножествах и фактически устанавливают взаимно однозначное соответствие между несколькими подмножествами полиоктов. Вывод итогового соотношения представляет собой техническое упражнение.

[4)] 27 European Union Contest for Young Scientists, 17–22 September 2015 — Milan, Italy.

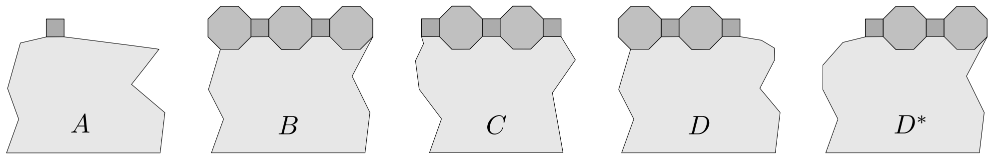


Рис. 11. Множества полиоктов в зависимости от вида верхнего слоя

Разобьём горизонтально-выпуклые полиокты на множества A, B, C, D и D^* в зависимости от формы их верхнего слоя (рис. 11):

а) если верхний слой состоит только из одного квадрата, то отнесём полиокт к множеству A;

б) если в верхнем слое количество восьмиугольников на единицу больше чем квадратов, то отнесём полиокт к множеству B;

в) если верхний слой содержит хотя бы один восьмиугольник и количество восьмиугольников на единицу меньше, чем квадратов, то отнесём полиокт к множеству C;

г) если в верхнем слое восьмиугольников и квадратов поровну, то отнесём полиокт к множествам D или D^*, если первая фигура справа квадрат или восьмиугольник соответственно.

К множеству H отнесём полиокты, которые в верхнем слое содержат хотя бы один восьмиугольник, т. е. множество H является объединением множеств B, C, D и D^*. Множество G является объединением множеств A и H.

Через A_n, B_n, C_n, D_n, D_n^* и H_n обозначим подмножества множеств A, B, C, D, D^* и H, в которых полиокты состоят из n правильных многоугольников. Положим $a_n = |A_n|$, $b_n = |B_n|$, $c_n = |C_n|$, $d_n = |D_n|$, $d_n^* = |D_n^*|$ и $h_n = |H_n|$.

По соображениям симметрии, полиоктов в множестве D_n ровно столько же, сколько в множестве D_n^*. Следовательно, для любого n выполнено $d_n = d_n^*$.

Из наших определений следует, что

$$h_n = b_n + c_n + d_n + d_n^* = b_n + c_n + 2d_n, \tag{8}$$

$$g_n = a_n + b_n + c_n + d_n + d_n^* = a_n + h_n. \tag{9}$$

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Для $n \geqslant 2$ выполняются соотношения*

$$\text{а) } d_n = b_{n-1}, \quad \text{б) } c_n = d_{n-1}.$$

Доказательство. а) Если мы добавим квадрат справа в верхний слой полиокта из множества B, то получим полиокт из множества D. Эта процедура обратима, и из каждого полиокта из множества D, удаляя правый квадрат из верхнего слоя, мы получим полиокт из множества B (рис. 12).

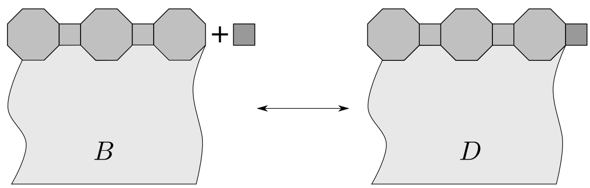


Рис. 12. Соответствие между множествами B и D

б) Проведём аналогичные рассуждения, только манипуляции выполним с квадратом с левой стороны верхнего слоя. Получим, что для $n \geqslant 2$ выполняются соотношения $c_n = d_{n-1}$. □

Учитывая результат леммы 1, для $n \geqslant 3$ перепишем (8) в виде

$$h_n = b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2}. \tag{10}$$

Далее используем отображение паркета $(4, 8^2)$ в кладку из блоков, см. рис. 3б. Восьмиугольники на рисунках и в тексте будут заменены блоками размером 1×3, которые мы будем называть *кирпичами*.

Рассмотрим ещё несколько подмножеств слоёных полиоктов.

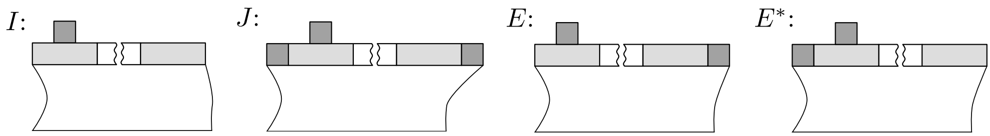


Рис. 13. Подмножества полиоктов из множества A

В множестве A определим подмножества горизонтально-выпуклых полиоктов I, J, E и E^* в зависимости от формы их второго сверху слоя (рис. 13):

а) если во втором сверху слое полиокта количество кирпичей (восьмиугольников) на единицу больше, чем квадратов, то отнесём его к множеству I;

б) если второй сверху слой содержит хотя бы один кирпич и количество кирпичей на единицу меньше, чем квадратов, то отнесём его к множеству J;

в) если второй сверху слой содержит кирпичей и квадратов поровну, то отнесём его к множествам E или E^*, если первая фигура справа квадрат или кирпич соответственно.

Через I_n, J_n, E_n, E_n^* обозначим подмножества множеств I, J, E, E^*, полиокты которых состоят из n элементов паркета (т. е. квадратов и кирпичей). Положим $i_n = |I_n|$, $j_n = |J_n|$, $e_n = |E_n|$, $e_n^* = |E_n^*|$.

Соображения симметрии опять показывают, что количество полиоктов в множестве E_n такое же, как в множестве E_n^*. Следовательно, для любого n выполнено равенство $e_n = e_n^*$.

Множество A является объединением непересекающихся подмножеств I, J, E и E^*. Следовательно, для $n \geqslant 2$

$$a_n = i_n + j_n + e_n + e_n^* = i_n + j_n + 2e_n. \tag{11}$$

Лемма 2. *Для $n \geqslant 2$ выполняются соотношения*

$$\text{а) } e_n = i_{n-1}, \quad \text{б) } j_n = e_{n-1}.$$

Доказательство. а) Если мы добавим квадрат справа во второй сверху слой полиокта из множества I, то получим полиокт из множества E. Эта процедура обратима, и из каждого полиокта из множества E, удаляя правый квадрат из второго сверху слоя, мы получим полиокт из множества I (рис. 14). Следовательно, для $n \geqslant 2$ выполнено равенство $e_n = i_{n-1}$.

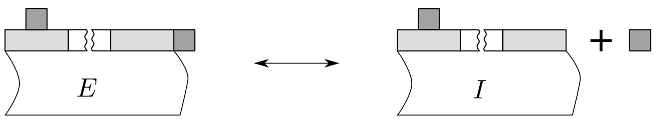


Рис. 14. Соответствие между множествами E_n и I_{n-1}

б) Проведём аналогичные рассуждения, только манипуляции выполним с квадратом с левой стороны второго сверху слоя. Получим, что для $n \geqslant 2$ выполнено равенство $j_n = e_{n-1}$. □

Учитывая результат леммы 2, перепишем (11) для $n \geqslant 3$ в виде

$$a_n = i_n + 2i_{n-1} + i_{n-2}. \tag{12}$$

Наконец, нам понадобятся ещё три подмножества горизонтально-выпуклых полиоктов (см. рис. 15).

К множеству P отнесём полиокты из множества B, у которых крайний правый кирпич верхнего слоя расположен над самым левым элементом паркета (т. е. квадратом или кирпичом) второго слоя.

К множеству Q отнесём те полиокты из I, у которых квадрат из верхней строки не расположен над самым правым кирпичом второй строки.

К множеству R отнесём те полиокты из Q, у которых крайний правый кирпич второго сверху слоя расположен над самым левым элементом паркета третьего сверху слоя. Таким образом, полиокты из множества R состоят не менее чем из трёх слоёв.

На рис. 15 крестиком обозначена позиция, запрещённая для расположения квадрата.

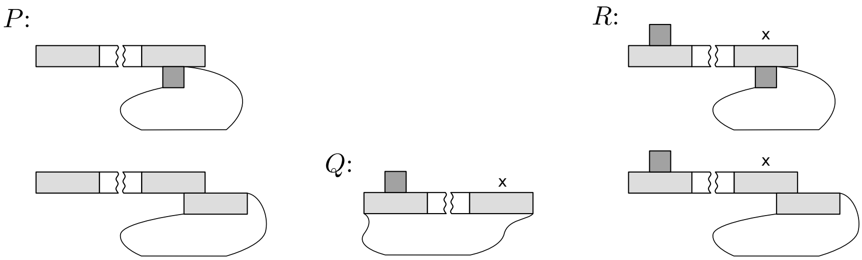


Рис. 15. Дополнительные подмножества

Через P_n, Q_n, R_n обозначим подмножества множеств P, Q, R, полиокты которых состоят из n элементов паркета. Положим $p_n = |P_n|$, $q_n = |Q_n|$, $r_n = |R_n|$.

Лемма 3. *Для $n \geqslant 3$ выполнено равенство $p_n = p_{n-2} + g_{n-1}$.*

Доказательство. Если верхний слой полиокта из множества P_n состоит из не менее чем трёх элементов паркета, то уберём из него слева кирпич и квадрат и получим полиокт из множества P_{n-2} (рис. 16). В случае когда в верхнем слое полиокта из множества P_n только один кирпич, этот кирпич расположен строго над крайним левым элементом паркета второго слоя. Удаляя этот кирпич, получаем полиокт из множества G_{n-1}. Эта процедура обратима. Следовательно, для $n \geqslant 3$ выполнено равенство $p_n = p_{n-2} + g_{n-1}$. $\square$

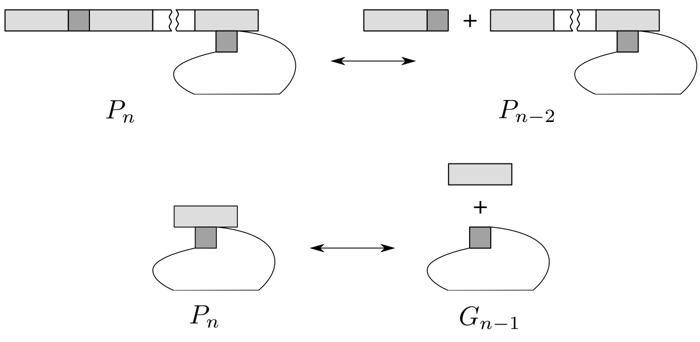


Рис. 16. К лемме 3

Лемма 4. *Для $n \geqslant 3$ выполнено равенство $i_n = q_n + b_{n-1}$.*

Доказательство. В полиоктах из множества $I_n \backslash Q_n$ единственный квадрат верхнего слоя расположен на самом правом кирпиче второго слоя. Если мы уберём этот квадрат, то получим полиокт из множества B_{n-1} (рис. 17). Эта процедура обратима, и из каждого полиокта из множества B_{n-1}, добавляя квадрат сверху на самый правый кирпич верхнего слоя,

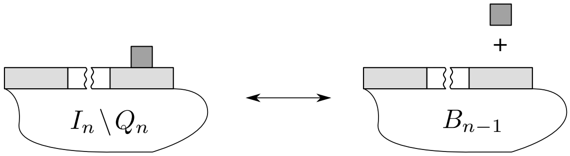


Рис. 17. К лемме 4

получим полиокт из множества $I_n \setminus Q_n$. Поэтому для $n \geqslant 3$ выполнено равенство $i_n - q_n = b_{n-1}$. □

Лемма 5. *Для $n \geqslant 3$ выполнено равенство $q_n = r_n + i_{n-2}$.*

Доказательство. Множество $Q_n \setminus R_n$ состоит из полиоктов, у которых можно вырезать квадрат и кирпич справа из второго слоя; при этом мы получим полиокт из множества I_{n-2} (рис. 18). Эта процедура обратима, и из каждого слоёного полиокта из множества I_{n-2}, добавляя квадрат и кирпич справа во второй сверху слой, получим слоёный полиокт из множества $Q_n \setminus R_n$. Следовательно, для $n \geqslant 3$ выполнено равенство $q_n - r_n = i_{n-2}$. □

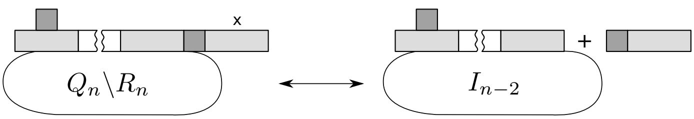


Рис. 18. К лемме 5

Лемма 6. *Для $n \geqslant 4$ выполнено равенство $r_n = r_{n-2} + p_{n-3}$.*

Доказательство. Если квадрат из первого слоя полиокта из множества R_n находится в точности над самым левым кирпичом, то уберём из полиокта квадрат верхнего слоя и слева из второго слоя кирпич и квадрат. Получим полиокт из множества P_{n-3}. В случае когда квадрат в верхнем

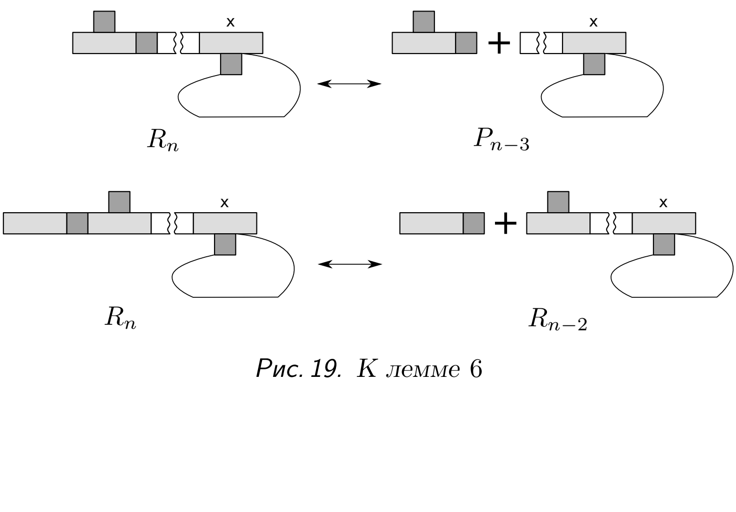
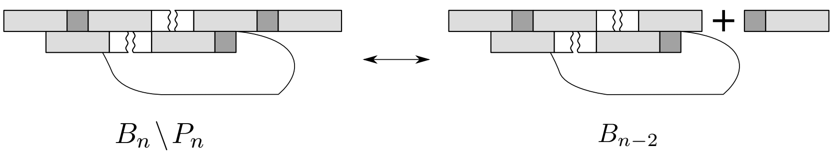


Рис. 19. К лемме 6

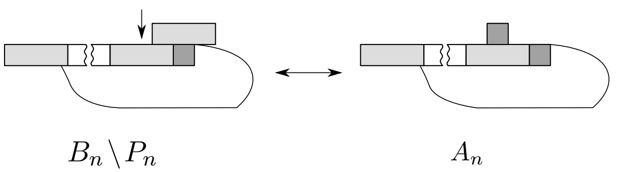
слое полиокта не находится над самым левым кирпичом второго слоя, уберём из полиокта слева из второго слоя кирпич и квадрат. Получим полиокт из множества R_{n-2} (рис. 19). Эта процедура обратима. Следовательно, для $n \geqslant 4$ выполнено равенство $r_n = r_{n-2} + p_{n-3}$. □

Лемма 7. *Для $n \geqslant 4$ выполнено равенство $b_n = p_n + b_{n-2} + a_n$.*

Доказательство. Как следует из определения, в самом верхнем слое полиокта из множества B содержится нечётное число элементов паркета. Рассмотрим полиокты из множества $B_n \backslash P_n$. Если в самом верхнем слое полиокта содержится три или более элементов, то, вырезав квадрат и кирпич справа из верхнего слоя, получим полиокт из множества B_{n-2} (рис. 20а). Эта операция обратима, т. е. всегда к полиокту из множества B_{n-2} можно добавить в верхний слой квадрат и кирпич.



(а) Верхний слой содержит три и более элементов



(б) верхний слой содержит только один кирпич

Рис. 20. К лемме 7

Пусть верхний слой полиокта из множества $B_n \backslash P_n$ состоит только из одного кирпича. Поскольку этот полиокт не принадлежит множеству P_n, заменив самый верхний кирпич на квадрат, расположенный левее, мы получим полиокт из множества A_n (рис. 20б). Таким образом, у нас есть взаимно однозначное соответствие между полиоктами из множества A_n и полиоктами из множества $B_n \backslash P_n$, у которых верхний слой состоит только из одного кирпича. Понятно, что количество таких полиоктов равняется a_n.

Следовательно, для $n \geqslant 4$ выполнено $b_n - p_n = b_{n-2} + a_n$, что и требовалось. □

Доказательство теоремы 1. *Первый способ.* Сведём полученные рекуррентные соотношения вместе:

$$\begin{cases} g_n = a_n + h_n, & \text{из (9)} \\ h_n = b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2}, & \text{из (10)} \\ a_n = i_n + 2i_{n-1} + i_{n-2}, & \text{из (12)} \\ p_n = p_{n-2} + g_{n-1}, & \text{из леммы 3} \\ i_n = q_n + b_{n-1}, & \text{из леммы 4} \\ q_n = r_n + i_{n-2}, & \text{из леммы 5} \\ r_n = r_{n-2} + p_{n-3}, & \text{из леммы 6} \\ b_n = p_n + b_{n-2} + a_n, & \text{из леммы 7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_n = a_n + h_n, \\ h_n = b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2}, \\ a_n = i_n + 2i_{n-1} + i_{n-2}, \\ p_n - p_{n-2} = g_{n-1}, \\ i_n - i_{n-2} = r_n + b_{n-1}, \\ r_n - r_{n-2} = p_{n-3}, \\ b_n - b_{n-2} = p_n + a_n. \end{cases}$$

Получим из них некоторые другие рекуррентные соотношения.

Имеем для $n \geqslant 4$:

$$h_n - h_{n-1} = p_n + a_n + p_{n-1} + a_{n-1}.$$

Следовательно, $g_n - g_{n-1} = 2a_n + p_n + p_{n-1}$. Тогда

$$g_n - g_{n-1} - (g_{n-1} - g_{n-2}) = 2a_n - 2a_{n-1} + g_{n-1}.$$

Получаем для $n \geqslant 4$

$$g_n - 3g_{n-1} + g_{n-2} = 2a_n - 2a_{n-1}. \tag{13}$$

С другой стороны, $a_n - a_{n-1} = r_n + b_{n-1} + r_{n-1} + b_{n-2}$. Тогда для $n \geqslant 5$

$$a_n - a_{n-1} - (a_{n-2} - a_{n-3}) = p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-1} + a_{n-1} + p_{n-2} + a_{n-2}.$$

Следовательно,

$$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3} + p_{n-4}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} - (a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-4}) = \\ = p_{n-1} - p_{n-3} + p_{n-3} - p_{n-5} = g_{n-2} + g_{n-4}. \end{aligned}$$

Тогда $g_{n-2} + g_{n-4} = a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-3} - a_{n-4}$. Преобразуем правую часть последнего соотношения и используем (13). Получаем для $n \geqslant 6$:

$$\begin{aligned} g_{n-2} + g_{n-4} &= a_n - a_{n-1} - 2(a_{n-1} - a_{n-2}) - 2(a_{n-2} - a_{n-3}) + a_{n-3} - a_{n-4} = \\ &= \frac{g_n - 3g_{n-1} + g_{n-2}}{2} - (g_{n-1} - 3g_{n-2} + g_{n-3}) - \\ &\qquad - (g_{n-2} - 3g_{n-3} + g_{n-4}) + \frac{g_{n-3} - 3g_{n-4} + g_{n-5}}{2} = \\ &= \frac{g_n - 5g_{n-1} + 5g_{n-2} + 5g_{n-3} - 5g_{n-4} + g_{n-5}}{2}. \end{aligned}$$

Значит, $2g_{n-2} + 2g_{n-4} = g_n - 5g_{n-1} + 5g_{n-2} + 5g_{n-3} - 5g_{n-4} + g_{n-5}$. В итоге имеем $g_n = 5g_{n-1} - 3g_{n-2} - 5g_{n-3} + 7g_{n-4} - g_{n-5}$. Теорема 1 доказана. □

В таблице 1 собраны начальные значения рассмотренных последовательностей.

Таблица 1

Первые члены последовательностей из теоремы 1

n	a	b	c	d	i	j	e	p	q	r	h	g
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
2	1	3	0	1	1	0	0	2	0	0	5	6
3	5	12	1	3	3	0	1	6	0	0	19	24
4	20	49	3	12	13	1	3	26	1	0	76	96
5	83	197	12	49	54	3	13	102	5	2	307	390
6	337	802	49	197	216	13	54	416	19	6	1245	1582
7	1370	3251	197	802	884	54	216	1684	82	28	5052	6422
8	5559	13 199	802	3251	3575	216	884	6838	324	108	20 503	26 062
9	22 561	53 558	3251	13 199	14 527	884	3575	27 746	1328	444	83 207	105 768

Упражнение 3. Используя стратегию доказательства теоремы 1, найдите комбинаторное доказательство формулы (4) для количества горизонтально-выпуклых полигексов.

§ 5. О вспомогательных вычислениях

В этом и следующих разделах мы будем рассматривать формальные степенные ряды от одной или нескольких переменных, не вдаваясь в вопросы их сходимости. Операции сложения, умножения, дифференцирования рядов мы рассматриваем как соответствующие операции над формальными степенными рядами. Решения упражнений и часть выкладок опущены; они приведены в электронной версии статьи
`https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22_poly.pdf`

Упражнение 4. Докажите формулы для сумм бесконечных геометрических прогрессий

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \frac{v}{1-v}, \qquad \text{б) } (2+2u)\sum_{k=1}^{\infty} u^{2k} = \frac{2u^2}{1-u}.$$

Упражнение 5. Используя интегрирование и дифференцирование формальных рядов, докажите, что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)v^k=\frac{v^2}{(1-v)^2}, \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty}kv^k=\frac{v}{(1-v)^2}, \quad \text{в) } \sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)v^k=\frac{2v^2}{(1-v)^3}.$$

Упражнение 6. Используя результаты упражнений 4 и 5, докажите, что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} ku^kv^{k-1} = \frac{u}{(1-uv)^2}, \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty}(kv+1)u^kv^{k-1} = \frac{u+uv-u^2v}{(1-uv)^2},$$

$$\text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} k^2u^kv^{k-1} = \frac{u+u^2v}{(1-uv)^3}, \quad \text{г) } \sum_{k=1}^{\infty} k(kv+1)u^kv^{k-1} = \frac{u(1+v-uv+uv^2)}{(1-uv)^3}.$$

Упражнение 7. Докажите, что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty}(ku+(2+u)(k-1))u^{2k} = \frac{u^3}{(1-u)^2},$$

$$\text{б) } \sum_{k=1}^{\infty}(u+2k+2uk)u^{2k} = \frac{u^2(2-u)}{(1-u)^2},$$

$$\text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} \big(k^2u+(k-1)(2k+u(k+1))\big)u^{2k} = \frac{u^3(1+2u-u^2)}{(1+u)(1-u)^3}.$$

Пусть

$$H(u,v,y) = \sum_{p,q,m} h(p,q,m)u^pv^qy^m$$

— некоторая производящая функция от трёх переменных. Для значения частной производной по y степенного ряда $H(u,v,y)$ при $y=1$ введём обозначение

$$\chi(u,v) = \frac{\partial}{\partial y}H(u,v,y)\Big|_{y=1}.$$

При почленном дифференцировании формального ряда получим

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^kH(u,v,y))\big|_{y=1} = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{p,q,m} h(p,q,m)u^pv^qy^{m+k}\Big)\Big|_{y=1} =$$

$$= \sum_{p,q,m}(m+k)h(p,q,m)u^pv^q = \sum_{p,q}\Big(\sum_{m}(m+k)h(p,q,m)\Big)u^pv^q,$$

для всех целых $k \geqslant 0$.

По формуле для производной произведения функций получим

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^k H(u,v,y))\big|_{y=1} = kH(u,v,1) + \chi(u,v).$$

Следовательно, для всех целых $k \geqslant 0$

$$kH(u,v,1) + \chi(u,v) = \sum_{p,q}\Big(\sum_m (m+k)h(p,q,m)\Big)u^p v^q. \tag{14}$$

В частности, при $k=0$

$$\chi(u,v) = \sum_{p,q}\Big(\sum_m mh(p,q,m)\Big)u^p v^q. \tag{15}$$

В двух следующих параграфах мы применим найденные соотношения.

§ 6. Производящие функции для паркета $(4, 8^2)$

Теорема 2. *Производящими функциями для множеств горизонтально-выпуклых (слоёных) полиоктов будут рациональные функции*

$$G(u,v,1) = (1-uv)^3(u+v+2uv)\cdot\big(1 - 2u - 9uv + 4u^2v - 4uv^2 - \\ - u^3v + 14u^2v^2 - uv^3 - 6u^3v^2 + 4u^2v^3 - 13u^3v^3 - 4u^3v^4 + u^4v^4\big)^{-1}$$

и

$$G(x) = \sum_n g_n\, x^n = \frac{2x(1-x)^3(1+x)}{1 - 5x + 3x^2 + 5x^3 - 7x^4 + x^5},$$

где переменная u маркирует количество восьмиугольников, v — количество квадратов, x — общее количество правильных многоугольников.

Для доказательства теоремы потребуется детализация полиоктов по количеству составляющих их восьмиугольников и квадратов. Более того, для нас будет важно, сколько восьмиугольников расположено в самом верхнем слое полиокта.

Определим множества слоёных полиоктов A, B, C, D, D^*, H и G как в § 4.

Пусть $a(p,q,0)$, $b(p,q,m)$, $c(p,q,m)$, $d(p,q,m)$, $d^*(p,q,m)$, $h(p,q,m)$ — количества таких полиоктов из множеств A, B, C, D, D^*, H соответственно, которые состоят из p восьмиугольников и q квадратов, а верхний слой которых содержит m восьмиугольников.

Отметим, что самый верхний слой полиокта из B содержит m восьмиугольников и $m-1$ квадратов, $m \geqslant 1$. В самом верхнем слое полиокта из C

содержится m восьмиугольников и $m+1$ квадрат, $m \geqslant 1$. В самом верхнем слое полиоктов из множеств D и D^* содержится m восьмиугольников и m квадратов, $m \geqslant 1$. Из соображений симметрии можно заключить, что полиоктов в множестве D столько же, сколько и в множестве D^*, при этом $d(p,q,m) = d^*(p,q,m)$. Следовательно, производящие функции множеств D и D^* равны.

Рассмотрим производящие функции от трёх переменных. Считаем, что переменная u маркирует количество восьмиугольников, v — количество квадратов, а y — количество восьмиугольников в верхнем слое.

Производящие функции для полиоктов типов A, B, C, D и D^*:

$$A(u,v,y) = \sum_{p,q} a(p,q,0)u^p v^q,$$
$$B(u,v,y) = \sum_{p,q,m} b(p,q,m)u^p v^q y^m,$$
$$C(u,v,y) = \sum_{p,q,m} c(p,q,m)u^p v^q y^m,$$
$$D(u,v,y) = D^*(u,v,y) = \sum_{p,q,m} d(p,q,m)u^p v^q y^m.$$

Заметим, что $A(u,v,y)$ не зависит от y, поэтому $A(u,v,y) = A(u,v,1)$ и

$$\frac{\partial}{\partial y} A(u,v,y) = 0.$$

Лемма 8. *Для всех $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ выполняется равенство*

$$b(p,q,m) = d(p,q+1,m) = c(p,q+2,m).$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 1 (рис. 12). □

Из леммы 8 получаем следующие равенства для производящих функций:

$$D(u,v,y) = vB(u,v,y), \quad C(u,v,y) = v^2 B(u,v,y).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H(u,v,y) &= B(u,v,y) + C(u,v,y) + D(u,v,y) + D^*(u,v,y) = \\ &= (1+2v+v^2)B(u,v,y), \qquad (16) \\ G(u,v,y) &= A(u,v,y) + H(u,v,y) = A(u,v,y) + (1+2v+v^2)B(u,v,y). \end{aligned}$$

Отметим, что для доказательства теоремы 2 не требуется находить функцию от трёх переменных $G(u,v,y)$. Достаточно найти её выражение при $y = 1$, т. е. найти $G(u,v,1)$.

Как и прежде, используем обозначение

$$\chi(u,v) = \frac{\partial}{\partial y} H(u,v,y)\Big|_{y=1}.$$

Доказательство теоремы 2. Мы получим рекуррентные соотношения на коэффициенты $a(p,q,m)$, $b(p,q,m)$, $h(p,q,m)$ и затем составим соотношения для производящих функций.

Посмотрим, как получаются полиокты из A. Возьмём квадрат и начнём прикладывать его сверху к некоторому полиокту (назовём его исходным) так, чтобы получился новый полиокт. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный полиокт был из A. Если исходный полиокт из H и в его верхней строке содержится m восьмиугольников, то такую операцию можно проделать m способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все полиокты подмножества A, кроме собственно квадрата. Следовательно, для всех p, q выполняются равенства

$$a(p,q+1,0) = \sum_m mh(p,q,m).$$

Для квадрата имеем $a(0,1,0) = 1$.

Получаем соотношение для производящих функций

$$A(u,v,y) = v + v\Big(\frac{\partial H(u,v,y)}{\partial y}\Big)\Big|_{y=1} = v + v\chi(u,v). \tag{17}$$

Действительно, вспоминая (15), получаем

$$\begin{aligned} v + v\chi(u,v) &= v + \sum_{p,q}\Big(\sum_m mh(p,q,m)\Big)u^p v^{q+1} = \\ &= v + \sum_{p,q} a(p,q+1,0)u^p v^{q+1} = A(u,v,y). \end{aligned}$$

Посмотрим, как получаются полиокты из B. Возьмём полиокт из B с одной строкой, состоящий из k восьмиугольников и $k-1$ квадрата, и начнём прикладывать его сверху к некоторому исходному полиокту так, чтобы получился новый полиокт. Если исходный полиокт был из A, то такую операцию можно проделать k способами. Если исходный полиокт из H и в его верхней строке содержится m восьмиугольников, то такую операцию можно проделать $m+k$ способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все полиокты подмножества B, кроме тех, которые состоят из одной строки. Следовательно, для всех p, q выполняются равенства

$$b(p+k, q+k-1, k) = ka(p,q,0) + \sum_m (m+k)\, h(p,q,m).$$

Для полиоктов подмножества B, состоящих из одной строки, получаем $b(k, k-1, k) = 1$.

Используя равенства (14)–(17), можно вывести искомые формулы для производящих функций. Полное доказательство приводится на `https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22_poly.pdf` □

При помощи онлайн-калькулятора (например, [17]) нетрудно получить разложения производящих функций в степенной ряд от двух переменных:

$$\begin{aligned} A(u, v, 1) = v + uv + 2u^2v + 3uv^2 + 4u^3v + 13u^2v^2 + 3uv^3 + \\ + 8u^4v + 41u^3v^2 + 33u^2v^3 + uv^4 + \ldots \\ G(u, v, 1) = u + v + 2u^2 + 4uv + 4u^3 + 14u^2v + 6uv^2 + \\ + 8u^4 + 42u^3v + 42u^2v^2 + 4uv^3 + \\ + 16u^5 + 113u^4v + 192u^3v^2 + 68u^2v^3 + uv^4 + \ldots \end{aligned}$$

Аналогично получаем разложение в ряд производящих функций от одной переменной:

$$\begin{aligned} A(x) = x + x^2 + 5x^3 + 20x^4 + 83x^5 + 337x^6 + 1370x^7 + \\ + 5559x^8 + 22\,561x^9 + 91\,554x^{10} + \ldots \\ G(x) = 2x + 6x^2 + 24x^3 + 96x^4 + 390x^5 + 1582x^6 + 6422x^7 + \\ + 26\,062x^8 + 105\,768x^9 + 429\,228x^{10} + \ldots \end{aligned}$$

Понятно, что эти разложения согласуются с таблицей 1.

Теперь нетрудно получить ещё одно доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. *Второй способ.* Используя результат теоремы 2, для $G(x)$ имеем

$$(1 - 5x + 3x^2 + 5x^3 - 7x^4 + x^5) \sum_n g_n x^n = 2x(1-x)^3(1+x).$$

Поскольку правая часть равенства — многочлен, и левая должна быть многочленом. Следовательно, последовательность $\{g_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению пятого порядка:

$$g_{n+5} = 5g_{n+4} - 3g_{n+3} - 5g_{n+2} + 7g_{n+1} - g_n. \qquad \square$$

Характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения будет следующим (см. [7]): $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0$. Это уравнение имеет действительные корни, наибольший из них $x_{\max} \approx 4{,}058206109671$.

Поскольку $x_{\max}$ не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку $4{,}0582^n \leqslant g_n \leqslant 4{,}05821^n$.

Обратим внимание на производящую функцию, полученную при подстановке $v = 1$:

$$G(u, 1, 1) = \frac{(1-u)^3(1+3u)}{1-16u+22u^2-24u^3+u^4} = \sum_n w_n u^n.$$

Член последовательности $\{w_n\}$ равен количеству горизонтально-выпуклых полиоктов, в составе которых ровно n восьмиугольников.

При этом мы полагаем $w_0 = 1$, т. е. полиокт состоит только из одного квадрата. Следующие члены этой последовательности таковы:

$$w_1 = 16, \quad w_2 = 228, \quad w_3 = 3328, \quad w_4 = 48\,612, \quad w_5 = 710\,032.$$

Последовательность $\{w_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению четвёртого порядка:

$$w_{n+4} = 16w_{n+3} - 22w_{n+2} + 24w_{n+1} - w_n.$$

Этой последовательности отвечает характеристическое уравнение

$$u^4 - 16u^3 + 22u^2 - 24u + 1 = 0.$$

Уравнение имеет действительные корни, наибольший из них

$$u_{\max} \approx 14{,}6059427255653.$$

Поскольку $u_{\max}$ не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку $14{,}6059^n \leqslant w_n \leqslant 14{,}606^n$.

Остаётся отметить, что количество горизонтально-выпуклых полиоктов, содержащих ровно n квадратов, бесконечно.

§ 7. Производящие функции для паркета $(3^3, 4^2)$

Пусть множество F состоит из всех горизонтально-выпуклых политайлов для паркета $(3^3, 4^2)$. Через F_n обозначим подмножество множества F, в котором политайлы состоят из n правильных многоугольников (треугольников и квадратов). Положим $f_n = |F_n|$.

Определим следующие многочлены от двух переменных:

$$\begin{aligned} S(u,v) = {} & 2u + v - 4u^2 - 9uv - 3v^2 + 17u^2v + 17uv^2 + 3v^3 + 4u^4 - 3u^3v - \\ & - 26u^2v^2 - 15uv^3 - v^4 - 2u^5 - 17u^4v - 4u^3v^2 + 17u^2v^3 + \\ & + 5uv^4 + 9u^5v + 35u^4v^2 + 15u^3v^3 - 6u^2v^4 - 5u^5v^2 - 29u^4v^3 - \\ & - 4u^3v^4 - 9u^6v^2 - 11u^5v^3 + 9u^4v^4 + u^7v^2 + 10u^6v^3 + 3u^5v^4 + \\ & + 4u^7v^3 - 3u^6v^4 - u^7v^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(u,v)=1&-3u-4v+2u^2+12uv+6v^2+2u^3-10u^2v-18uv^2-4v^3-3u^4-\\&-6u^3v+12u^2v^2+12uv^3+v^4+u^5+12u^4v+16u^3v^2-6u^2v^3-\\&-3uv^4-4u^5v-16u^4v^2-14u^3v^3+2u^2v^4-4u^5v^2+8u^4v^3+\\&+2u^3v^4+4u^6v^2+8u^5v^3-u^4v^4-u^6v^3-u^5v^4-u^7v^3.\end{aligned}$$

Теорема 3. *Производящие функции множества горизонтально-выпуклых политайлов для паркета $(3^3,4^2)$ — это рациональные функции*

$$F(u,v,1)=\frac{S(u,v)}{R(u,v)}$$

и

$$F(x)=\sum_n f_nx^n=\frac{x(1-x)(3-13x+24x^2-17x^3-18x^4+35x^5-3x^6-14x^7+x^9)}{1-7x+20x^2-30x^3+16x^4+20x^5-32x^6+6x^7+11x^8-2x^9-x^{10}},$$

где многочлены $S(u,v)$ и $R(u,v)$ определены выше, при этом переменная u маркирует количество треугольников, v — количество квадратов, x — общее количество правильных многоугольников.

Для доказательства используем детализацию политайлов по количеству составляющих их треугольников и квадратов.

Разобьём горизонтально-выпуклые политайлы на множества A, B, C, D, D^* и E в зависимости от формы их верхнего слоя (рис. 21):

а) если верхний слой состоит из одного треугольника $\triangle$, то отнесём политайл к множеству A;
б) если верхний слой является трапецией, у которой нижнее основание — большее, то отнесём политайл к множеству B;
в) если верхний слой является трапецией, у которой нижнее основание — меньшее, то отнесём политайл к множеству C. К этому же множеству отнесём единственный «перевёрнутый» треугольник $\bigtriangledown$;
г) если верхний слой — параллелограмм, то отнесём политайл к множествам D или D^*, если первая фигура справа треугольник типа $\bigtriangledown$ или $\triangle$ соответственно;
д) если верхний слой состоит из квадратов, то отнесём политайл к множеству E.

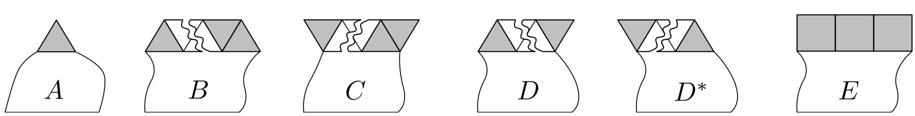


Рис. 21. Множества горизонтально-выпуклых политайлов в зависимости от формы их верхнего слоя

Пусть множество H является объединением множеств B, C, D и D^*. Таким образом, множество F является объединением множеств A, H и E.

Доказательство теоремы 3. Введём вспомогательные функции от трёх переменных. Считаем, что переменная u маркирует общее количество треугольников, v — общее количество квадратов, а y — количество «контактных площадок» (контактов) в верхнем слое (т. е. длину самого верхнего отрезка; сторона квадрата и треугольника равна 1).

Пусть $a(p,q,0)$ — количество политайлов типа A, которые состоят из p треугольников и q квадратов. Обозначим количество политайлов типов B, C, D, D^* и E соответственно, которые состоят из p треугольников и q квадратов, а верхний слой которых содержит m контактов, через $b(p,q,m)$, $c(p,q,m)$, $d(p,q,m)$, $d^*(p,q,m)$ и $e(p,q,m)$. Из соображений симметрии можно заключить, что политайлов в множестве D столько же, сколько и в множестве D^*, при этом $d(p,q,m) = d^*(p,q,m)$. Следовательно, производящие функции множеств D и D^* равны.

Рассмотрим производящие функции от трёх переменных для политайлов типов A, B, C, D, D^* и E:

$$A(u,v,y) = \sum_{p,q} a(p,q,0)u^p v^q,$$

$$B(u,v,y) = \sum_{p,q,m} b(p,q,m)u^p v^q y^m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Заметим, что $A(u,v,y)$ не зависит от y (в верхнем слое отсутствуют контактные площадки). Следовательно,

$$A(u,v,y) = A(u,v,1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y}A(u,v,y) = 0.$$

Нам понадобится

Лемма 9. *Для всех $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ выполняются равенства*

$$\text{а) } d(p+1,q,m+1) = a(p,q,0) + b(p,q,m),$$

$$\text{б) } c(p+2,q,m+2) = a(p,q,0) + b(p,q,m).$$

Доказательство. а) Если мы добавим треугольник типа $\triangledown$ справа в верхний слой политайла из множеств A или B, то получим слоёный политайл из множества D. При такой операции количество контактов увеличивается на 1. Эта процедура обратима: из каждого политайла из множества D, удаляя правый треугольник типа $\triangledown$ из верхнего слоя, мы получим

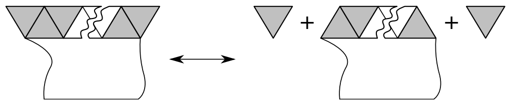


Рис. 22. Пояснения к доказательству леммы 9

политайл из множеств A или B. Следовательно, для всех $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ выполняется соотношение $d(p+1, q, m+1) = a(p, q, 0) + b(p, q, m)$.

б) Если мы добавим по треугольнику типа $\bigtriangledown$ справа и слева в верхний слой политайла из множеств A или B, то получим слоёный политайл из множества C (рис. 22). При такой операции количество контактов увеличивается на 2. И обратно, из каждого слоёного политайла из множества C (за исключением единственного треугольника $\bigtriangledown$), удаляя по треугольнику типа $\bigtriangledown$ справа и слева из верхнего слоя, мы получим слоёный политайл из множеств A или B. Имеем взаимно однозначное соответствие между множествами $A \cup B$ и $C \setminus \bigtriangledown$. Следовательно, для всех $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ выполнено $c(p+2, q, m+2) = a(p, q, 0) + b(p, q, m)$. □

Из леммы 9а получаем следующее соотношение для производящих функций:
$$D(u, v, y) = uy(A(u, v, y) + B(u, v, y)).$$

Учитывая, что треугольнику $\bigtriangledown$ соответствует моном uy, из леммы 9б получаем соотношение для производящих функций
$$C(u, v, y) = uy + u^2y^2(A(u, v, 1) + B(u, v, y)) = uy + uyD(u, v, y).$$

Поскольку
$$H(u, v, y) = B(u, v, y) + C(u, v, y) + D(u, v, y) + D^*(u, v, y),$$
имеем
$$H(u, v, y) = uy + B(u, v, y) + (2 + uy)D(u, v, y), \tag{18}$$
$$F(u, v, y) = A(u, v, y) + H(u, v, y) + E(u, v, y). \tag{19}$$

Отметим, что нам достаточно найти выражение функции $F(u, v, y)$ при $y = 1$. Рассуждениями того же типа, как выше, можно получить рекуррентные соотношения на коэффициенты $a(p, q, m)$, $b(p, q, m)$, $d(p, q, m)$, $e(p, q, m)$ и затем составить соотношения для производящих функций. Полное доказательство приводится на
`https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22_poly.pdf` □

При помощи онлайн-калькулятора нетрудно получить разложения производящих функций в степенной ряд от двух переменных. Приведём, например, разложение для $F(u, v, 1)$ со слагаемыми степени не выше 7:

$$
\begin{aligned}
F(u,v,1) &= 2u+v+2u^2+2uv+v^2+2u^3+5u^2v+4uv^2+v^3+\\
&+2u^4+10u^3v+14u^2v^2+6uv^3+v^4+\\
&+2u^5+18u^4v+34u^3v^2+29u^2v^3+8uv^4+v^5+\\
&+2u^6+30u^5v+74u^4v^2+88u^3v^3+52u^2v^4+10uv^5+v^6+\\
&+2u^7+47u^6v+146u^5v^2+228u^4v^3+194u^3v^4+85u^2v^5+12uv^6+v^7+\ldots
\end{aligned}
$$

Можно получить разложения в ряд производящих функций от одной переменной:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= x+2x^2+5x^3+13x^4+34x^5+94x^6+\\
&\qquad +266x^7+751x^8+2093x^9+5793x^{10}+\ldots,\\
H(x) &= x+2x^2+4x^3+11x^4+32x^5+92x^6+255x^7+\\
&\qquad +698x^8+1925x^9+5362x^{10}+\ldots,\\
A(x) &= x+x^2+3x^3+9x^4+26x^5+71x^6+194x^7+\\
&\qquad +539x^8+1511x^9+4222x^{10}+\ldots,\\
F(x) &= 3x+5x^2+12x^3+33x^4+92x^5+257x^6+\\
&\qquad +715x^7+1988x^8+5529x^9+15\,377x^{10}+\ldots
\end{aligned}
$$

Напомним, что f_n — количество горизонтально-выпуклых политайлов паркета $(3^3, 4^2)$, состоящих из n правильных многоугольников.

Следствие. *Последовательность $\{f_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению десятого порядка:*

$$
\begin{aligned}
f_{n+10} &= 7f_{n+9}-20f_{n+8}+30f_{n+7}-16f_{n+6}-20f_{n+5}+\\
&\qquad +32f_{n+4}-6f_{n+3}-11f_{n+2}+2f_{n+1}+f_n. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Доказательство. Для $F(x)$ имеем по теореме 3:

$$
\begin{aligned}
(1-7x+20x^2-30x^3+16x^4+20x^5-32x^6+6x^7+11x^8-2x^9-x^{10})\sum_n f_n x^n =\\
= x(1-x)(3-13x+24x^2-17x^3-18x^4+35x^5-3x^6-14x^7+x^9).
\end{aligned}
$$

Поскольку правая часть равенства — многочлен, и левая часть должна быть многочленом. Поэтому выполняется рекуррентное соотношение (20). □

Характеристическое уравнение (см. [7]) имеет вид

$$x^{10}-7x^9+20x^8-30x^7+16x^6+20x^5-32x^4+6x^3+11x^2-2x-1=0.$$

У него есть действительные корни, наибольший из них $x_{\max}\approx 2{,}77906203737$.

Поскольку $x_{\max}$ не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку $2{,}779^n \leqslant f_n \leqslant 2{,}7791^n$.

Мы не пытались найти комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (20). По всей видимости, это доказательство будет слишком перегружено техническими подробностями.

§ 8. Задачи для исследования

Итак, рекуррентные формулы для количества горизонтально-выпуклых мозаичных монстров и производящие функции найдены для 5 из 11 правильных паркетов. Тем самым оставлено поле для дальнейшего исследования.

Задача. Найдите рекуррентное соотношение и производящую функцию для паркета а) $(3, 4, 6, 4)$; б) $(3^4, 6)$; в) $(3^2, 4, 3, 4)$; г) $(4, 6, 12)$.

Для умножения многочленов, нахождения корней и разложения в ряды авторами использовался онлайн-портал [17].

Благодарности

Авторы благодарят П. И. Самовола за внимание к работе.

Список литературы

[1] *Голомб С. В.* Полимино. М.: Мир, 1975.

[2] *Грюнбаум Б., Шепард Дж. Ч.* Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками // Математический цветник. Сост. Д. А. Кларнер. М.: Мир, 1983. С. 220–252.

[3] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. С. 69 (задача 2.3.15), с. 336–337 (решение задачи).

[4] *Журавлёв В. М.* Горизонтально-выпуклые полиамонды и их производящие функции // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 107–129.

[5] *Кларнер Д. А.* Моя жизнь среди полимино // Математический цветник. Сост. Д. А. Кларнер. М.: Мир, 1983. С. 303–328.

[6] *Колмогоров А. Н.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант. 1970. № 3. С. 24–27. `http://kvant.mccme.ru/1970/03/parkety_iz_pravilnyh_mnogougol.htm`

[7] *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. 3-е изд. М.: Наука, 1983.

[8] *Михайлов О.* Одиннадцать правильных паркетов // Квант. 1979. № 2. С. 9–14. `http://kvant.mccme.ru/1979/02/odinnadcat_pravilnyh_parketov.htm`

[9] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 1990. Задача 4.7.18. С. 375–383.

[10] *Hickerson D.* Counting horizontally convex polyominoes // Journal of Integer sequences. 1999. Vol. 2. Article 99.1.8.

[11] *Klarner D. A.* Cell growth problems // Canad. J. Math. Vol. 19. 1967. P. 851–863.

[12] *Pólya G.* On the number of certain lattice polygons // J. Combinatorial Theory. 1969. Vol. 6, № 1. P. 102–105.

[13] *Vöge M., Guttmann A. J.* On the number of hexagonal polyominoes // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 307, № 2. P. 433–453.

[14] http://oeis.org/A001169

[15] http://oeis.org/A059716

[16] http://oeis.org/A238823

[17] https://cocalc.com

Кирилл Анатольевич Ваньков, Гренобль (Франция)
kirill.vankov@gmail.com

Валерий Михайлович Журавлёв, ПАО «Туполев», Москва
zhuravlevvm@mail.ru

Дополнение к результатам Ф. А. Шарова

П. П. Рябов*

В данной работе рассматривается вопрос о замощении прямоугольника меньшими прямоугольниками, отношения сторон которых принадлежат заданному набору квадратных иррациональностей. Эта проблема ранее была изучена Ф. А. Шаровым в работе [1]. Сформулируем её основной результат.

Теорема 1 (Ф. Шаров, 2016). *Пусть*

$$x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$$

— такие числа, что $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *и* $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. *Тогда:*

1) *если существуют такие числа i и j, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и*

$$(a_i - b_i\sqrt{p})(a_j - b_j\sqrt{p}) < 0,$$

то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда

$$z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q}\};$$

2) *если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнено неравенство $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ e > 0,\ \frac{|f|}{e} \leqslant \max_i \frac{|b_i|}{a_i}\right\};$$

3) *если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнено неравенство $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ f > 0,\ \frac{|e|}{f} \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{b_i}\right\}.$$

* Автор частично поддержан грантом Президента РФ МК-6137.2016.1.

В статье [1] доказано существование требуемых замощений, однако нет их явного построения. Здесь мы приведём такую конструкцию и получим близкий новый результат.

§ 1. Простое доказательство части «тогда» пункта 3 теоремы 1

Без ограничения общности можно положить

$$\max_i \frac{|a_i|}{b_i} = \frac{|a_1|}{b_1}$$

и $a_1, b_1, e, f \geqslant 0$. Действительно, из неравенств $a_1 - b_1\sqrt{p} < 0$, $a_1 + b_1\sqrt{p} > 0$ следует, что $b_1 > 0$. Если, например, $a_1 < 0$, то

$$\frac{1}{a_1 + b_1\sqrt{p}} = \frac{-a_1}{b_1^2 p - a_1^2} + \frac{b_1}{b_1^2 p - a_1^2}\sqrt{p} = a_1' + b_1'\sqrt{p}$$

— отношение сторон того же прямоугольника, и уже $a_1', b_1' \geqslant 0$.

Теперь рисунок 1 даёт явную конструкцию замощения прямоугольника $1 \times (e + f\sqrt{p})$ прямоугольниками с отношением сторон $a_1 + b_1\sqrt{p}$.

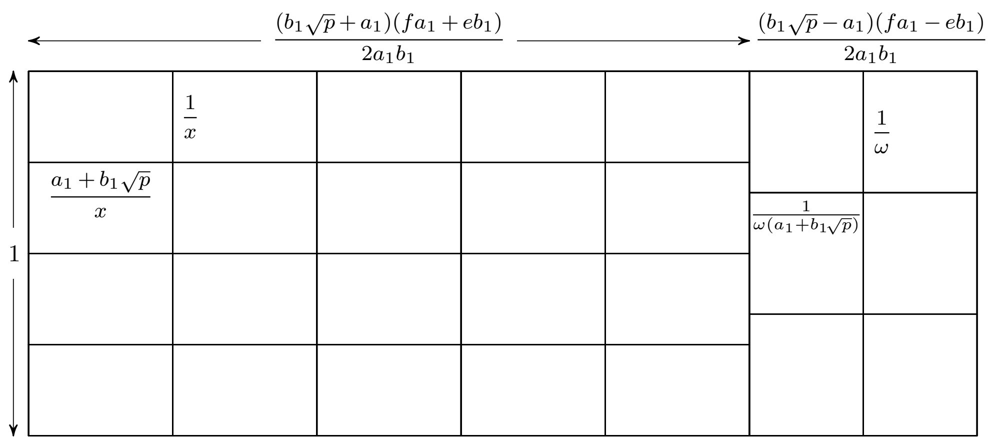


Рис. 1. Замощение в теореме 1 для $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $e = \frac{7}{24}$, $f = \frac{23}{24}$, $p = 5$

Замощаемый прямоугольник разрезается на два прямоугольника R_1 и R_2 размерами

$$1 \times \frac{(b_1\sqrt{p} + a_1)(fa_1 + eb_1)}{2a_1b_1} \quad \text{и} \quad 1 \times \frac{(b_1\sqrt{p} - a_1)(fa_1 - eb_1)}{2a_1b_1}.$$

Положим
$$\frac{fa_1+eb_1}{2a_1b_1}=\frac{y}{x},\qquad \frac{(pb_1{}^2-a_1{}^2)(fa_1-eb_1)}{2a_1b_1}=\frac{u}{w},$$
где $x, y, u, w \in \mathbb{Z}_+$. Прямоугольник R_1 замостим xy равными прямоугольниками
$$\frac{1}{x}\times\frac{a_1+b_1\sqrt{p}}{x},$$
разделив его на x равных частей по вертикали и на y равных частей по горизонтали. Прямоугольник R_2 аналогично замостим uw прямоугольниками
$$\frac{1}{w}\times\frac{1}{w(a_1+b_1\sqrt{p})}.$$

Замощение в пунктах 1 и 2 теоремы 1 строится похожим образом.

§ 2. Новый результат

Хотя в рассматриваемой задаче речь идёт о *наборе* квадратичных иррациональностей, фактически в замощении используется только одна из них (см. § 1). А что если потребовать, чтобы для каждого числа из набора в замощении нашёлся хотя бы один прямоугольник с таким отношением сторон?

Назовём разрезание прямоугольника на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ *разнообразным*, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ в замощении *найдётся хотя бы один прямоугольник с отношением сторон* x_i. Мы покажем, что тогда выполняется следующая теорема (по сравнению с теоремой 1 добавлено слово *разнообразно*, усилены условия на набор отношений сторон, а в конце пунктов 2 и 3 неравенство заменено на строгое).

Теорема 2. *Пусть $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, ..., $x_n = a_n + b_n\sqrt{p}$ — такие числа, что x_i/x_j; $x_ix_j \notin \mathbb{Q}$ при $i \neq j$; $x_i > 0$, $a_i, b_i, p \in \mathbb{Q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $p \geqslant 0$, $n \geqslant 2$. Тогда:*

1) *если существуют такие числа i и j, что $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и*
$$(a_i - b_i\sqrt{p})(a_j - b_j\sqrt{p}) < 0,$$
то прямоугольник с отношением сторон z можно разнообразно *разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ тогда и только тогда, когда*
$$z \in \{e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q}\};$$

2) *если для всех i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполнено неравенство $a_i - b_i\sqrt{p} > 0$, то прямоугольник с отношением сторон z можно* разнообразно *разрезать*

на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ e > 0,\ \frac{|f|}{e} < \max_i \frac{|b_i|}{a_i} \right\};$$

3) *если для всех* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *выполнено неравенство* $a_i - b_i\sqrt{p} < 0$, *то прямоугольник с отношением сторон* z *можно* разнообразно *разрезать на прямоугольники с отношениями сторон* $x_1, \ldots, x_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$z \in \left\{ e + f\sqrt{p} > 0 \mid e, f \in \mathbb{Q},\ f > 0,\ \frac{|e|}{f} < \max_i \frac{|a_i|}{b_i} \right\}.$$

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство пункта 1 теоремы 2. Необходимость следует из теоремы 1, п. 1. Докажем достаточность. Разделим прямоугольник $1 \times z$ на n прямоугольников $A_1, \ldots, A_n$ размера $1/n \times z$. К меньшей стороне прямоугольника A_k изнутри приставим большей стороной прямоугольник с отношением сторон x_k так, чтобы эти стороны совпали. Оставшуюся часть прямоугольника A_k замостим прямоугольниками с отношениями сторон x_i $(i \neq k)$, по теореме 1, п. 1 это возможно. Теперь для каждого k в замощении найдётся прямоугольник с отношением сторон x_k. □

В теореме 2 доказательства пунктов 2 и 3 аналогичны. Поэтому приведём только доказательство пункта 2.

Доказательство части «тогда» в пункте 2 теоремы 2. Пусть $z = e + f\sqrt{p}$, где $e, f \in \mathbb{Q}$. Без ограничения общности будем считать, что $|f|/e < |b_1|/a_1$. Если $k \in \mathbb{N}$ достаточно велико, то

$$\frac{|f|}{e} < \frac{|kb_1 + b_2 + \ldots + b_n|}{ka_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

так как

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|kb_1 + b_2 + \ldots + b_n|}{ka_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{|b_1|}{a_1} > \frac{|f|}{e}.$$

При этом

$$ka_1 + a_2 + \ldots + a_n - (kb_1 + b_2 + \ldots + b_n)\sqrt{p} > 0.$$

Прямоугольник с отношением сторон

$$r = ka_1 + a_2 + \ldots + a_n + (kb_1 + b_2 + \ldots + b_n)\sqrt{p}$$

состоит из k прямоугольников с отношением сторон x_1 и из прямоугольников с отношением сторон $x_2, \ldots, x_n$. Прямоугольник $1 \times z$ замостим прямоугольниками с отношением сторон r, это возможно по теореме 1, п. 2 (а параграф 1 даёт явную конструкцию замощения). □

Доказательство части «только тогда» в пункте 2 теоремы 2. По теореме 1, п. 2, если прямоугольник $1 \times z$ можно замостить прямоугольниками с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$, то $z = e + f\sqrt{p}$ для некоторых таких $e, f \in \mathbb{Q}$, что

$$\max_i \frac{|b_i|}{a_i} \geqslant \frac{|f|}{e}.$$

Остаётся доказать, что если

$$\max_i \frac{|b_i|}{a_i} = \frac{|f|}{e},$$

то прямоугольник $1 \times z$ невозможно *разнообразно* разрезать на прямоугольники с отношениями сторон $x_1, \ldots, x_n$.

Без ограничения общности будем считать a_1, b_1, e, f неотрицательными, и для $i = 2, \ldots, n$ пусть $|b_i|/a_i \leqslant b_1/a_1 = f/e$ (аналогично § 1). На самом деле неравенство здесь строгое. Пусть, например, $|b_2|/a_2 = b_1/a_1$. Тогда при $b_2 \geqslant 0$ отношение x_1/x_2 будет рационально, а при $b_2 < 0$ рациональным будет $(a_1 - b_1\sqrt{p})/(a_2 + b_2\sqrt{p})$, но в этом случае рационально x_1x_2 — противоречие с условием теоремы.

Предположим, что нужное *разнообразное* разрезание существует. Измельчим его следующим образом. Для каждого $i = 2, \ldots, n$ замостим каждый прямоугольник разбиения с отношением сторон x_i прямоугольниками с отношением сторон x_1. Это возможно по теореме 1, п. 2, причём в явной конструкции такого замощения в § 1, см. рис. 1, найдутся прямоугольники с обоими возможными направлениями сторон.

Дальнейшее доказательство существенно использует понятия и факты, приведённые в [1, с. 209–210].

Стороны всех прямоугольников измельчения представляются в виде $\alpha + \beta\sqrt{p}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ (см. [1, с. 210]).

Рассмотрим «площади» [1, определение 5 на с. 209] прямоугольников измельчения, положив

$$A = f, \quad B = -e, \quad C = \frac{2fa_1^2}{b_1^2} - pf.$$

«Площадь» прямоугольника $(\alpha + \beta\sqrt{p}) \times x_1(\alpha + \beta\sqrt{p})$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, в данном случае равна

$$\beta^2\Big(\frac{2fa_1^3}{b_1^2} - pfa_1 - peb_1\Big) = \beta^2 \cdot \frac{2fa_1(a_1^2 - pb_1^2)}{b_1^2} \geqslant 0$$

([1, с. 210, формула для S_M]).

Если хотя бы у одного прямоугольника $\beta \neq 0$, то общая сумма «площадей» прямоугольников измельчения строго больше 0. Однако «площадь» замощаемого прямоугольника равна 0 ([1, с. 210, формула для $S_{\text{Б}}$]), противоречие.

Остаётся рассмотреть случай, когда все прямоугольники измельчения имеют вид $\alpha \times x_1\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Q}$. Будем считать, что у измельчаемого прямоугольника сторона 1 вертикальна. Рассмотрим прямоугольник A_1, у которого сторона αx_1 вертикальна (такой найдётся, так как в измельчении есть прямоугольники с обоими возможными направлениями сторон). Выберем прямоугольник A_2 над A_1, имеющий с A_1 общий отрезок (если над A_1 есть прямоугольник), затем выберем прямоугольник A_3 над A_2, имеющий с A_2 общий отрезок, и т. д. Аналогично выберем прямоугольники под A_1. Сумма всех их вертикальных сторон будет равна вертикальной стороне измельчаемого прямоугольника, т. е. 1. Эта же сумма будет равна $x_1 w + u$ для некоторых $w, u \in \mathbb{Q}$, $u \geqslant 0$, $w > 0$. Получим равенство $1 = w(a_1 + b_1\sqrt{p}) + u$. Противоречие, так как $b_1 > 0$ по доказанному выше строгому неравенству $|b_2|/a_2 < b_1/a_1$. $\square$

Благодарности

Этой работы не было бы без наставлений М. Б. Скопенкова. Автор благодарен Ф. А. Шарову за ценные замечания.

Список литературы

[1] *Шаров Ф. А.* Разрезания прямоугольника на прямоугольники с заданными отношениями сторон // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 200–214.

Павел Павлович Рябов, НИУ ВШЭ

pavel_ryabov_98@mail.ru

Простое доказательство локальной леммы Ловаса*

А. С. Ремизова, А. Б. Скопенков†

В этой заметке приводится простое доказательство локальной леммы Ловаса в симметричной форме. Оно основано на [1] и более просто, чем предложенное в [3], [2, § 6.2].

Обсуждение понятия независимости, его применения к доказательствам существования, а также обсуждение вероятностного языка в комбинаторике см. в [3], [2, § 6.2]. Здесь мы сразу приведём окончательные формулировки.

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля $|A \cap B|/|B|$ множества $A \cap B$ в B равна доле $|A|/|M|$ множества A в M.

Локальная лемма Ловаса в симметричной форме. *Пусть даны $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества M. Пусть для некоторого натурального d и любого натурального k*

- *доля подмножества A_k в M не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$,*
- *из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно вычеркнуть не более d множеств, среди которых есть A_k, так, что пересечение любого набора из оставшихся множеств независимо с A_k.*

Тогда $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

---

* Эта заметка возникла из обсуждений на семинарах по дискретному анализу на факультете информатики и вычислительной техники МФТИ и из спецкурса А. Скопенкова и Л. Шабанова в Московской выездной олимпиадной школе. Благодарим Р. Карасёва, Л. Шабанова и участников семинара и спецкурса за полезные замечания.

† А. Скопенков поддержан стипендией Саймонса и грантом фонда Д. Зимина «Династия».

Приведём ряд задач, которые покажут, как можно придумать лемму Ловаса и её доказательство (см. также [3]). Указания и решения, а также само доказательство, приведены далее.

Задача 1. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т. е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдётся богатый здоровый горожанин?

Задача 2. (а) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин?

(б) В городе доля богатых горожан больше 3/4, доля здоровых больше 3/4 и доля умных больше 3/4. Обязательно ли среди здоровых умных большинство богаты?

(в) В городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин. Богатство, здоровье и ум попарно независимы (т. е., например, доля богатых здоровых среди богатых такая же, как и доля здоровых среди всех жителей). Доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее условие называется *независимостью в совокупности*.) Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин?

(г) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

(д) В городе доля богатых горожан больше 2/3, доля здоровых больше 2/3 и доля умных больше 2/3. Богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Может ли доля богатых здоровых умных быть меньше 1/5?

(е) В городе доля богатых горожан больше 5/8, доля здоровых больше 5/8 и доля умных больше 5/8. Богатство и здоровье независимы. Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин?

Задача 3. (а) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 5/6. Пусть подмножество A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \dfrac{7}{9}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(б) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 5/7. Пусть A_1 независимо с $A_3 \cap A_4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(в) Пусть $n \geqslant 3$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 3/4. Пусть A_k независимо с $A_{k+2} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Задача 4. Пусть $n \geqslant 5$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше 7/8.

(а) Тогда $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| > \frac{4}{5}|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$.

(б) Если A_1 независимо с $A_4 \cap A_5$, то $|A_1 \cap \ldots \cap A_5| > \frac{5}{6}|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.

(в) Пусть A_k независимо с $A_{k+3} \cap \ldots \cap A_n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n-4$. Тогда $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Указания и решения к задачам

Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Черта над множеством обозначает его дополнение в исходном конечном множестве M, т. е. $\overline{A} := M - A$.

2. Обозначим через У, Б, З, Г множества умных, богатых, здоровых и всех горожан соответственно.

(б) Имеем $\text{УЗ}\overline{\text{Б}} \leqslant \overline{\text{Б}} \leqslant \text{Г}/4 < \text{УЗ}/2$.

(г) Забудьте про глупых людей!

Замечание. Для решения задачи достаточно наличия одного умного человека. Не обязательно, чтобы умных было большинство.

Приведём более сложное решение. Зато оно подводит к п. (д), (е) и лемме Ловаса. Имеем $\text{УБ} > \text{У}/2 < \text{УЗ}$. Значит,

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} > \frac{\text{У}}{2} - \text{У}\overline{\text{З}} > \Big(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\Big)\text{У} = 0.$$

(д) Нет, доля больше 2/9.

(е) Приведём более сложное решение, чем, вероятно, нашли вы. Зато оно подводит к лемме Ловаса. Имеем

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} \geqslant (\text{У} + \text{Б} - \text{Г}) - \text{Б}\overline{\text{З}} = \text{У} - \text{Г} + \text{БЗ} > \Big(\frac{5}{8} - 1 + \frac{25}{64}\Big)\text{Г} = \frac{1}{64}\text{Г} > 0.$$

Обозначим $X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n$. Тогда X_{n+1} — исходное конечное множество.

3. (а) Обозначим через M исходное конечное множество. Тогда аналогично утверждению 2(б) получаем

$$\overline{A}_2 A_3 A_4 \leqslant \overline{A}_2 < \frac{M}{6} < \frac{A_3 A_4}{4}.$$

Так как A_1 не зависит от $A_3 A_4$, то и $\overline{A}_1$ не зависит от $A_3 A_4$. Поэтому

$$A_2 A_3 A_4 = A_3 A_4 - \overline{A}_2 A_3 A_4 > \frac{3}{4} A_3 A_4 > \frac{9}{2} \overline{A}_1 A_3 A_4 \geqslant \frac{9}{2} \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4.$$

Отсюда

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_2 A_3 A_4 - \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4 > \frac{7}{9} A_2 A_3 A_4.$$

(в) Докажем неравенства:

$$X_1 > \frac{1}{2}X_2 > \frac{1}{4}X_3 > \ldots > \frac{1}{2^{n-2}}X_{n-1} > \frac{1}{2^{n-1}}X_n.$$

Из них следует утверждение задачи, т. е. $X_1 \neq \varnothing$. (Аналогично утверждению 2(б) в последнем неравенстве можно взять X_{n+1} вместо X_n, а в условии задачи заменить $n-2$ на $n-3$.)

Достаточно доказать лишь первое неравенство в этой цепочке, остальные получаются из него заменой набора $A_1, \ldots, A_n$ на набор $A_k, \ldots, A_n$.

Так как $X_1 = X_2 - \overline{A}_1 X_2$, неравенство $X_1 > \frac{1}{2}X_2$ равносильно неравенству $\overline{A}_1 X_2 < \frac{1}{2}X_2$. Докажем последнее неравенство индукцией по n.

База индукции $n = 1$ вытекает из соотношения

$$\overline{A}_1 = X_2 - A_1 < \frac{1}{4}X_2 < \frac{1}{2}X_2.$$

Докажем шаг индукции. По предположению индукции для набора $A_2, \ldots, A_n$ имеем $\overline{A}_2 X_3 < \frac{1}{2}X_3$. Условие задачи говорит, что A_k независимо с X_{k+2} для любого $k=1, 2, \ldots, n-3$. Так как A_1 не зависит от X_3, получаем, что и $\overline{A}_1$ не зависит от X_3. Значит, $\overline{A}_1 X_3 < \frac{1}{4}X_3$. Поэтому

$$X_2 = X_3 - \overline{A}_2 X_3 > \frac{1}{2}X_3 > 2\overline{A}_1 X_3 \geqslant 2\overline{A}_1 X_2.$$

4. Пункты (а), (б), (в) аналогичны утверждениям 2(б), 3(а) и 3(б) соответственно.

(а) Обозначим через M исходное конечное множество. Тогда

$$\overline{A}_1 A_2 A_3 A_4 \leqslant \overline{A}_1 < \frac{M}{8} < \frac{A_2 A_3 A_4}{5}.$$

(б) Используем для $n = 5$ обозначения X_k, введённые перед решением задачи 3. По п. (а) $\overline{A}_2 X_3 < X_3/5$. Так как A_1 не зависит от X_3, получаем, что и $\overline{A}_1$ не зависит от X_3. Поэтому

$$X_2 = X_3 - \overline{A}_2 X_3 > \frac{4}{5}X_3 > \frac{32}{5}\overline{A}_1 X_3 > 6\overline{A}_1 X_3 \geqslant 6\overline{A}_1 X_2.$$

Отсюда

$$X_1 = X_2 - \overline{A}_1 X_2 > \frac{5}{6}X_2.$$

(в) Достаточно доказать, что $X_1 > \frac{3}{4}X_2$. Так как $X_1 = X_2 - \overline{A}_1 X_2$, неравенство $X_1 > \frac{3}{4}X_2$ равносильно неравенству $\overline{A}_1 X_2 < \frac{1}{4}X_2$. Докажем последнее неравенство при помощи индукции по n.

База индукции $n=1$ вытекает из

$$\overline{A}_1 = X_2 - A_1 < \frac{1}{8}X_2 < \frac{1}{4}X_2.$$

Докажем шаг индукции. По предположению индукции для усечённых наборов

$$\overline{A}_2 X_3 < \frac{1}{4}X_3, \quad \overline{A}_3 X_4 < \frac{1}{4}X_4.$$

Так как A_1 не зависит от X_4, то и $\overline{A}_1$ не зависит от X_4. Поэтому

$$X_2 = X_4 - (\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3)X_4 \geqslant X_4 - \overline{A}_2 X_4 - \overline{A}_3 X_4 > \frac{1}{2}X_4 > 4\overline{A}_1 X_4 \geqslant 4\overline{A}_1 X_2.$$

Доказательство локальной леммы Ловаса. Положим

$$X_k := A_k \cap A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n.$$

Достаточно доказать, что

$$|X_1| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2d}\right)|X_2| \quad \text{для любого } n. \tag{I}$$

Из этого будет вытекать, что

$$|X_1| \geqslant \left(1 - \frac{1}{2d}\right)^{n-1}|X_n| > 0.$$

Так как $|X_1| = |X_2| - |\overline{A}_1 \cap X_2|$, утверждение (I) равносильно утверждению

$$|\overline{A}_1 \cap X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2| \quad \text{для любого } n.$$

Докажем последнее утверждение при помощи индукции по n. База индукции $n=1$ вытекает из[1)]

$$|\overline{A}_1| = |X_2| - |A_1| \leqslant \frac{1}{4d}|X_2| \leqslant \frac{1}{2d}|X_2|.$$

Докажем шаг индукции. Без ограничения общности, будем считать, что A_1 не зависит от X_{d+1}. Тогда и $\overline{A}_1$ не зависит от X_{d+1}. Для каждого $j \in \{2, 3, \ldots, d\}$ применим предположение индукции к системе подмножеств $A_j, A_{d+1}, A_{d+2}, \ldots, A_n$. Получим

$$|\overline{A}_j \cap X_{d+1}| \leqslant \frac{1}{2d}|X_{d+1}|.$$

[1)] Здесь X_2 — пересечение пустого семейства множеств и, значит, совпадает с M.

Значит,

$$|X_2| = |X_{d+1}| - |(\overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_d) \cap X_{d+1}| \geqslant$$
$$\geqslant |X_{d+1}| - \sum_{j=2}^{d} |\overline{A}_j \cap X_{d+1}| \geqslant \Big(1 - \frac{d-1}{2d}\Big)|X_{d+1}| > \frac{1}{2}|X_{d+1}|.$$

Так как A_1 и X_{d+1} независимы и доля подмножества A_1 в M не меньше $1 - \frac{1}{4d}$, получаем:

$$\frac{1}{2}|X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A}_1 \cap X_{d+1}| \geqslant 2d|\overline{A}_1 \cap X_2|,$$

что и требовалось. □

Список литературы

[1] *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II. Amsterdam: North-Holland, 1975. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; Vol. 10). P. 609–627. http://www.cs.elte.hu/~lovasz/scans/LocalLem.pdf

[2] *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г. и др.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016. http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf

[3] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177. http://arxiv.org/abs/1411.3171

Анастасия Сергеевна Ремизова, МФТИ

remizova.as@phystech.edu

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

http://www.mccme.ru/~skopenko

О счастливых билетах по-казански

М. Д. Бронштейн, Э. Ю. Лернер

И, потихоньку набирая ход,
Слегка искрящий жёлтенький трамвайчик
Бредёт туда, где неуклюжий мальчик
Опять за три копейки счастья ждёт...

Леонид Сергеев

Следующая задача предложена авторами для студенческой олимпиады, посвящённой 225-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского.

Задача 1. Номер билета на городской транспорт — произвольная последовательность из n цифр. Билет называется счастливым по-питерски, если сумма его цифр, стоящих на чётных местах, совпадает с суммой цифр, стоящих на нечётных местах. Назовём билет счастливым по-казански, если все его цифры можно разбить на две непересекающиеся группы так, что сумма цифр в одной совпадает с суммой цифр в другой.

а) Пусть $\mathbb{P}_{\Pi}(n)$ — вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-питерски. Найти $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\Pi}(n)$.
б) Пусть $\mathbb{P}_{\text{K}}(n)$ — вероятность того, что случайно взятый n-значный билет является счастливым по-казански. Найти $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\text{K}}(n)$.

Во избежание недоразумений поясним, что номера в катушке с билетами могут начинаться с цифры 0. Например, для $n = 3$ множество всех билетов имеет вид: $\{000, 001, 002, \ldots, 999\}$. В частности, $\mathbb{P}_{\Pi}(2)=\mathbb{P}_{\text{K}}(2)=0{,}1$.

Основной целью этой заметки является обобщение этой задачи, в котором вместо цифр $\{0, 1, \ldots, 9\}$ рассматривается произвольное целочисленное множество с каким угодно вероятностным распределением на нём.

Пункт а) этой задачи совсем не оригинален: вероятности приобретения случайного билета, счастливого по-питерски или по-московски, посвящено много литературы (см. [1, с. 147–148], [5, 7]). Ниже мы дадим сначала решение задачи 1а с помощью центральной предельной теоремы. Последняя не часто используется в этой задаче, хотя может быть применена и для получения точной асимптотики (см. упражнение 1). Мы также дадим второй способ решения этой задачи. Он чуть длиннее предыдущего, но использует только элементарный математический аппарат. Этот способ обобщается на случай билетов, «цифры» которых берутся из бесконечного подмножества в $\mathbb{Z}$ (см. упражнение 4а).

Решение задачи 1а, первый способ. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — цифры рассматриваемого билета. Обозначим через ξ_i разности $x_{2i} - x_{2i-1}$, $i = 1, \ldots, [n/2]$. Очевидно, что ξ_i — независимые случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией, обозначим её через V. Центральная предельная теорема (см. [2]) утверждает, что в этом случае для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i\right| < \varepsilon\sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]V}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx. \tag{1}$$

Для чётного n билет является счастливым, если

$$\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i = 0.$$

Для нечётного n билет является счастливым, если

$$\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i = x_n.$$

В любом случае вероятность того, что билет является счастливым, меньше

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{[n/2]}\xi_i\right| \leqslant \mathrm{const}\right), \tag{2}$$

где $\mathrm{const} = \max|x_n|$ (т. е. $\mathrm{const} = 9$ в данном случае).

Зафиксируем в (1) сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Сравнивая левую часть этого неравенства с (2) при

$$n > \frac{2}{V}\left(\frac{\mathrm{const}}{\varepsilon}\right)^2,$$

получаем, что $\mathbb{P}_{\Pi}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Упражнение 1. Пользуясь центральной предельной теоремой, вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}_{\Pi}(n)}{1/\sqrt{n}}.$$

Решение задачи 1а, второй способ. Зафиксируем произвольно большое натуральное число N и докажем, что $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\Pi}(n) \leqslant 1/N$. Рассмотрим случайные величины $Z(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(-1)^{i-1}$ в кольце остатков от деления на N. Обозначим через $A(n,k)$ событие: $Z(n) = k \bmod N$. Билет $(x_1, \ldots, x_n)$ будет счастливым по-питерски только тогда, когда произойдёт событие $A(n,0)$. Мы докажем, что вероятности событий $A(n,k)$ стремятся к $1/N$ для любого $k = 0, \ldots, N-1$ при $n \to \infty$.

Обозначим для краткости вероятность $\mathbb{P}(A(n,k))$ через $p(n,k)$. В силу формулы полной вероятности имеем

$$p(n+m,k) = \sum_{j=0}^{N-1} p(n,j)p(m,(k-j)(-1)^n),$$

здесь N событий $A(n,j)$ образуют полную группу событий с вероятностями $p(n,j)$, а $p(m,(k-j)(-1)^n)$ — соответствующие им условные вероятности перехода из состояния $A(n,j)$ в состояние $A(n+m,k)$.

Положим $\varepsilon_m = \min_{0\leqslant j<N} p(m,j)$. При использовании $p(m,j)$ в дальнейших рассуждениях нам достаточно знать, что все они неотрицательны, $\sum_{j=0}^{N-1} p(\ell,j) = 1$, $\ell \in \mathbb{N}$, а также что $\varepsilon_m > 0$ при $m > [N/9]$ (поскольку $Z(m)$ принимает значения от $-9[m/2]$ до $9\lceil m/2\rceil$).

Пусть $\Delta(n,j) = p(n,j) - (1/N)$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$|\Delta(n+m,k)| = \left|\sum_{j=0}^{N-1} \Delta(n,j)\; p(m,(k-j)(-1)^n)\right| \leqslant \max_{0\leqslant j<N} |\Delta(n,j)|.$$

Заметим, что $\sum_{j=0}^{N-1} \Delta(n,j) = 0$. Зафиксируем $m_N = [N/9]+1$ и $\delta_N = \varepsilon_{m_N}$ и усилим предыдущее неравенство:

$$|\Delta(n+m_N,k)| = \left|\sum_{j=0}^{N-1} \Delta(n,j)\big(p(m,(k-j)(-1)^n) - \delta_N\big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant j<N} |\Delta(n,j)| \sum_{j=0}^{N-1} \left|\big(p(m,(k-j)(-1)^n) - \delta_N\big)\right| = (1-N\delta_N) \max_{0\leqslant j<N} |\Delta(n,j)|.$$

Отсюда следует, что $\max_j |\Delta(n,j)|$ при $n\to\infty$ стремится к нулю быстрее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $(1-N\delta_N)^{8/N}$. Получаем, что $\lim_{n\to\infty} p(n,k) = 1/N$ при всех k и, в частности, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\Pi}(n) \leqslant 1/N$.

Приведённое выше доказательство по сути устанавливает, что любая конечная марковская цепь с циркулянтной матрицей перехода имеет предельное распределение с равными вероятностями для всех достижимых состояний.

Решение задачи 1б. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — цифры рассматриваемого билета, $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$ — их сумма. Легко проверить, что с вероятностью $1/2$ сумма S нечётна. Очевидно, что в этом случае рассматриваемый билет не является счастливым по-казански.

Прежде чем рассматривать случай чётной суммы S, оценим долю билетов, содержащих по крайней мере 8 единичек. Обозначим рассматриваемое событие через A. Для грубой оценки $\mathbb{P}(A)$ снизу разобьём набор из n цифр на непересекающиеся группы по 8 цифр. Для каждой такой группы вероятность того, что она отлична от «11111111», равна $1 - 0{,}1^8$, поэтому

$$\mathbb{P}(A) \geqslant 1 - (1 - 0{,}1^8)^{[n/8]} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Таким образом, для любого заранее заданного $\varepsilon > 0$ мы можем считать n настолько большим, что доля билетов, среди цифр которых не содержится 8 единичек, меньше ε. «Счастливость по-казански» таких билетов нам сложно анализировать. Зато остальные билеты удобны для дальнейшего рассмотрения.

Среди билетов с чётной суммой S возьмём только такие удобные для рассмотрения билеты. Докажем, что все они являются счастливыми по-казански. Очевидно, что нам достаточно представить алгоритм выбора цифр, дающих в сумме $S/2$.

Вычеркнем сначала из рассматриваемого билета 8 единичек. Будем включать в искомый набор по очереди все невычеркнутые цифры до тех пор, пока они либо не закончатся, либо их сумма после взятия следующей цифры не станет больше $S/2$ (очевидно, что если сумма станет в точности равной $S/2$, то искомый набор найден). Если взятый набор содержит все невычеркнутые цифры, то их сумма S' меньше $S/2$, а сумма вычеркнутых единичек соответственно больше $S/2$, т. е. $S/2 < 8$, тем более $S/2 - S' < 8$. Если же взятый набор содержит не все невычеркнутые цифры, то его сумма S' отличается от $S/2$ не более чем на 8 по построению. В обеих ситуациях дополнив взятый набор необходимым числом единиц (из тех, что были вычеркнуты вначале), мы получим искомый набор.

Таким образом, мы доказали, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n выполнено $1/2 - \varepsilon \leqslant \mathbb{P}_{\text{К}}(n) \leqslant 1/2$, а значит,

$$\mathbb{P}_{\text{К}}(n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Таблица на с. 174 иллюстрирует изменение точных значений вероятностей $\mathbb{P}_{\Pi}(n)$ и $\mathbb{P}_{\text{К}}(n)$ с ростом n. Обратим внимание читателей на небольшие осцилляции $\mathbb{P}_{\Pi}(n)$, в то время как $\mathbb{P}_{\text{К}}(n)$ монотонно стремится к своему предельному значению с ростом n.

n	$\mathbb{P}_{\text{П}}(n)$	$\mathbb{P}_{\text{К}}(n)$
2	0,10	0,10
3	0,055	0,136
n	$\mathbb{P}_{\text{П}}(n)$	$\mathbb{P}_{\text{К}}(n)$
4	0,0670	0,2056
5	0,04840	0,29246
6	0,055252	0,376414
7	0,0436975	0,4366881
8	0,04816030	0,47111408
9	0,040051495	0,487875964
10	0,0432457640	0,4951921240
11	0,03715101654	0,49815780829
12	0,039581170420	0,499304300676
13	0,0347847754670	0,4997363405880
14	0,03671331273480	0,49989815235610
15	?	?
16	0,0343900019857310	0,4999832460244272
17	0,03113537578058979	0,49999282163551040
18	0,032458256583753952	0,499996822399017380
19	0,0296896918816556380	0,4999985554326500949
20	0,03081918923741896840	0,49999932964605448756
21	0,028426639840832015685	0,499999684083134646700

Упражнение 2. Вычислите (написав компьютерную программу) точные значения $\mathbb{P}_{\text{П}}(15)$ и $\mathbb{P}_{\text{К}}(15)$.

Оставшаяся часть заметки посвящена обобщению задачи 1, в котором вместо цифр билета, равномерно распределённых на множестве $\{0, \ldots, 9\}$, рассматриваются произвольные одинаково распределённые независимые случайные величины x_i. Эти величины будут принимать значения в конечном целочисленном множестве $Y = \{y_1, \ldots, y_r\}$, $r > 1$. Вероятностное распределение на этом множестве обозначим через $\mathbf{p}$: $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_r)$, $p_j > 0$; набор из n экземпляров таких независимых случайных величин x_i обозначим через $\mathbf{x}(n)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{P}_\Pi(n)$ — *вероятность того, что для случайного набора* $\mathbf{x}(n)$ *выполняется равенство*

$$\sum_{i\colon i=0 \bmod 2} x_i = \sum_{i\colon i=1 \bmod 2} x_i.$$

Пусть $\mathbb{P}_\mathrm{K}(n)$ — *вероятность того, что индексы* $\langle n\rangle = \{1, \ldots, n\}$ *элементов набора* $\mathbf{x}(n)$ *можно разбить на части* I *и* $J = \langle n\rangle \backslash I$ *так, что*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i$$

(*назовём такие наборы* $\mathbf{x}(n)$ *счастливыми по-казански*). *Тогда*

а) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\Pi(n) = 0$;

б) $\lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}_\mathrm{K}(n) + \mathbb{P}_\mathrm{K}(n+1))/2 = 1/2$.

Доказательство утверждения пункта а) дословно совпадает с первым решением задачи 1а.

Наличие суммы $\mathbb{P}_\mathrm{K}(n) + \mathbb{P}_\mathrm{K}(n+1)$ в формулировке пункта б) отличает теорему 1 от задачи 1.

Упражнение 3. Приведите пример множества Y (определение см. перед теоремой 1), для которого $|Y| = 2$ и $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mathrm{K}(n)$ не существует.

Очевидно, что в условии теоремы 1 *без ограничения общности можно считать, что наибольший общий делитель чисел* $y_1, \ldots, y_r$ *равен единице.* Далее мы считаем выполненным это предположение.

Подчеркнём, что рассматриваемое множество Y конечно. Представляет интерес аналог теоремы 1 для различных распределений на счётном целочисленном множестве.

Упражнение 4. Пусть случайные величины x_i принимают счётное множество значений.

а) Докажите, что по-прежнему $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\Pi(n) = 0$.

б) Приведите пример распределения, для которого $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\mathrm{K}(n) = 0$.

Пункт б) теоремы 1 имеет непосредственное отношение к проблеме разбиения. Напомним точную постановку этой компьютерной проблемы ([3, 6]).

Компьютерная задача 1 (проблема разбиения). Имеется произвольный набор натуральных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$. Существует ли такое разбиение $\langle n \rangle$ на части I и $J = \langle n \rangle \backslash I$, что $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in J} x_i$?

Эта проблема относится к классу NP-полных задач, если на значения x_i не накладывается никаких условий. Если они ограничены, как в теореме 1, то существуют квадратичные и даже линейные алгоритмы для решения задачи о разбиении (см., в частности, [6, раздел 17.3]). Ниже мы приведём простой критерий, который даёт необходимое условие существования разбиения (см. лемму 1). Кроме того, если натуральные числа $x_1, \ldots, x_n$ представляют собой реализацию случайного вектора $\mathbf{x}(n)$ из теоремы 1, то, как мы докажем в лемме 2, вероятность ошибки в случае прохождения критерия стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Важную роль в дальнейшем изложении играет наибольший общий делитель чисел из набора $\mathbf{x}(n)$, *обозначим его через* $d(\mathbf{x})$. Нам также удобно ввести *обозначение* $S(\mathbf{x})$ *для суммы* $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Лемма 1 (критерий несуществования разбиения). *Если $S(\mathbf{x})$ в нечётное число раз больше $d(\mathbf{x})$, то набор $\mathbf{x}(n)$ не является счастливым по-казански.*

Доказательство. Сокращение всех x_i на $d(\mathbf{x})$ сводит всё к случаю $d(\mathbf{x}) = 1$. В этом случае необходимо разбить нечётное $S(\mathbf{x})$ на две равные целые части, что невозможно. □

Ключевая идея доказательства теоремы 1 основана на следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть для набора $\mathbf{x}(n)$ из теоремы 1 выполнено условие: «$S(\mathbf{x})$ в чётное число раз больше $d(\mathbf{x})$». Тогда для любого сколь угодно малого ε можно найти такое $N = N(\varepsilon, Y, \mathbf{p})$, что при всех $n > N$ набор $\mathbf{x}(n)$ является счастливым по-казански с вероятностью, большей $1 - \varepsilon$.*

Прежде чем доказывать лемму 2, обсудим вероятность выполнения ограничения «$S(\mathbf{x})$ в чётное число раз больше $d(\mathbf{x})$» из её условия.

Очевидно, что если все y_j, $j = 1, \ldots, r$, нечётны, то событие «$S(\mathbf{x})$ в чётное число раз больше $d(\mathbf{x})$» является достоверным при чётном n и невозможным при нечётном n. Следовательно, в данной ситуации согласно лемме 1 имеем $\mathbb{P}_{\mathrm{K}}(2n-1) = 0$, а согласно лемме 2, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{K}}(2n) = 1$. Сейчас мы рассмотрим более типичный случай.

Лемма 3. *Допустим, что в множестве Y содержится хотя бы одно чётное число y. Тогда вероятность того, что для случайного набора $\mathbf{x}(n)$ выполнено ограничение «$S(\mathbf{x})$ чётно», стремится к $1/2$ при $n \to \infty$.*

Доказательство леммы 3. Пусть a_n — вероятность рассматриваемого события для случайного набора $\mathbf{x}(n)$ и $b_n = 1 - a_n$ — вероятность противоположного события. Заметим, что $1 > a_1$, иначе единица не могла бы быть наибольшим общим делителем элементов множества Y. В силу условия леммы $a_1 > 0$. Поэтому $0 < a_1 < 1$, тем более $|a_1 - b_1| < 1$.

Имеем

$$a_n = \sum_{\ell\colon \ell=0 \bmod 2} \binom{n}{\ell} b_1^\ell a_1^{n-\ell}, \qquad b_n = \sum_{\ell\colon \ell=1 \bmod 2} \binom{n}{\ell} b_1^\ell a_1^{n-\ell}.$$

Следовательно, $a_n - b_n = (a_1 - b_1)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

Заметим, что в силу конечности r в случайном наборе $\mathbf{x}(n)$ со сколь угодно близкой к единице вероятностью $1-\delta$ будут присутствовать все значения y_j, $j=1, \ldots, r$, если только n достаточно велико. Соответственно, доля тех наборов $\mathbf{x}(n)$, для которых $d(\mathbf{x})$ отлично от единицы, меньше δ. Следовательно, лемма 3 остаётся верной при замене в её формулировке события $A =$ «$S(\mathbf{x})$ чётно» на событие $A' =$ «$S(\mathbf{x})$ в чётное число раз больше $d(\mathbf{x})$». Аналогично и в лемме 2 событие A' можно заменить на событие A, поскольку $A' \subseteq A$ и вероятность события $A \setminus A'$ составляет асимптотически нулевую долю от вероятности события A.

Доказательство леммы 2. В соответствии с только что сказанным, в условии леммы вместо события «$S(\mathbf{x})$ в чётное число раз больше $d(\mathbf{x})$» будем рассматривать событие «$S(\mathbf{x})$ чётно».

Расширенный алгоритм Евклида позволяет представить наибольший общий делитель чисел y_j (единицу) в виде их целочисленной линейной комбинации с некими коэффициентами c_j [4, с. 965–967]. Пусть $M = \max_j |y_j|$. Нам будут удобны наборы $\mathbf{x}(n)$, в которых найдётся по крайней мере $M|c_j|$ чисел, равных y_j, $j=1, \ldots, r$. Назовём такие наборы *удобными по-казански*.

Доказательство того, что доля удобных по-казански наборов среди всех наборов стремится к единице при n, стремящемся к бесконечности, легко получается тем же приёмом, что и доказательство аналогичного факта о доле билетов, содержащих 8 единичек (см. решение задачи 1б). Таким образом, нам остаётся предъявить явный алгоритм построения множеств I и J из формулировки теоремы 1 в ситуации, когда $S(\mathbf{x})$ чётно и рассматриваемый набор $\mathbf{x}(n)$ является удобным по-казански.

Упражнение 5. Модифицируя решение задачи 1б, докажите, что если набор $\mathbf{x}(n)$ является удобным по-казански и сумма его цифр $S(\mathbf{x})$ чётна, то этот набор является счастливым по-казански.

Упражнение 5 завершает доказательство леммы 2. □

Утверждение теоремы 1, очевидно, следует из доказанных лемм. Попутно мы построили простой алгоритм решения задачи о разбиении. Он эффективно работает при достаточно больших n, если статистика исходных данных удовлетворяет нашим предположениям. Как и во многих других задачах, вероятностный взгляд на мир позволил дать простое решение нетривиальной проблемы «почти для всех типичных случаев».

Список литературы

[1] *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

[2] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Едиториал УРСС, 2005.

[3] *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

[4] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2013.

[5] *Ландо С. К.* Счастливые билеты // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 2. М.: МЦНМО, 1998. С. 127–132.

[6] *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1984.

[7] *Финк Л. М.* Ещё раз о счастливых билетах // Квант. 1976. № 12. С. 68–70.

Михаил Давидович Бронштейн,
Казанский национальный исследовательский технологический университет
bronmich@gmail.com

Эдуард Юльевич Лернер,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
eduard.lerner@gmail.com

Определение набора чисел по набору его кратных сумм

Д. В. Фомин

В статье дан обзор всей доступной информации по тематике, связанной с замечательной задачей из комбинаторной теории чисел, поставленной Лео Мозером в 1957 году. Обобщённая задача Мозера такова: если нам дан набор всех сумм по s различных элементов неизвестного набора (мультимножества) из n чисел, то возможно ли однозначно восстановить исходный набор? В данном обзоре обсуждаются результаты и методы, использовавшиеся за последние 60 лет. Также представлены некоторые новые факты, предложены важные нерешённые задачи и гипотезы. Английский вариант статьи см. в [10].

Посвящается памяти
Олега Ижболдина (1963–2000)

§ 1. Введение

Ровно шестьдесят лет назад, в 1957 году, журнал «American Mathematical Monthly» опубликовал следующую сравнительно несложную задачу по теории чисел, предложенную Лео Мозером (см. [16]).

Задача 1.1. (а) Десять чисел $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{10}$ являются попарными суммами набора из пяти неизвестных чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_5$. Найдите числа x_i.

(б) Некоторые шесть различных чисел $s_1 < s_2 < \ldots < s_6$ получены как набор попарных сумм набора из четырёх чисел. Докажите, что существует другой набор из четырёх чисел, попарные суммы которых образуют тот же самый набор из шести чисел.

После того как эта задача была быстро решена, она была переформулирована и обобщена. В результате возникла весьма интересная и нетривиальная проблема, сочетающая аддитивную теорию чисел и комбинаторику.

Задача 1.2. Пусть A является набором (мультимножеством) из n чисел a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим набор $A^{(2)}$, состоящий из $\binom{n}{2}$ чисел, являющихся 2-суммами набора A, т. е. набор всех сумм вида $a_{i_1} + a_{i_2}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$. Для каких значений n всегда можно однозначно восстановить набор A по набору $A^{(2)}$?

Числа, упомянутые здесь, могут быть вещественными, комплексными или даже принадлежать произвольному полю характеристики нуль. Как мы вскоре узнаем, это не имеет никакого значения.

Таким образом, в этом обобщении проблемы Мозера спрашивается, можно ли однозначно восстановить набор чисел по набору его попарных сумм.

Немного позже эта же задача была представлена (см., например, [6]) с использованием несколько отличной терминологии.

Задача 1.3. Зловредный подручный мельника, которому было поручено взвесить n мешков с мукой, решил вместо этого взвешивать их по два. После этого он записал в некоем произвольном порядке все полученные $n(n-1)/2$ чисел. Можно ли по этому списку определить веса самих мешков (с точностью до перестановки)?

Хочется отметить, что подручный был не только зловреден, но и туповат: вместо того, чтобы выполнить лишь n взвешиваний, он зачем-то произвёл гораздо большее количество этих операций.

Как видим, задача опять была поставлена как вопрос о возможности «восстановления набора чисел»: может ли неизвестный набор быть однозначно восстановлен по набору своих попарных сумм?

Безусловно, любая интересная задача, теорема или гипотеза заслуживает, чтобы ей было дано симпатичное имя, которое удобно для использования в лекциях и научных дискуссиях. «Последняя теорема Ферма», «Гипотеза Римана», «P = NP», «$(3k+1)$-гипотеза Коллатца» — все эти названия коротки и вполне информативны. Мне кажется, что в нашем случае вполне уместно название «Задача Мозера» (а если хочется сделать название длиннее и подробнее, то «Задача Мозера о восстановлении набора чисел»).

Итак, исходная задача 1.1 была и в самом деле совсем проста. Однако этого нельзя сказать о её обобщении 1.2. Тем не менее и оно было довольно быстро решено, и, как следствие, возникла ещё более обобщённая задача.

Обозначение. Для любой пары таких натуральных чисел n и s, что $n \geqslant s$, будем обозначать через $A^{(s)}$ набор всех s-сумм набора A, т. е. набор всех сумм вида $a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_s}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$.

Задача 1.4 (обобщённая задача Мозера). Натуральные числа n и s таковы, что $n > s$. Существуют ли такие два разных n-набора A и B, что $A^{(s)} = B^{(s)}$?

Подобная пара наборов представляла бы пример невозможности однозначного восстановления.

Определение. Если два набора A и B таковы, что наборы их s-сумм совпадают — то есть $A^{(s)} = B^{(s)}$, — то мы будем называть такие наборы *s-эквивалентными* и обозначать это отношение как $A \overset{s}{\sim} B$.

Определение. Назовём пару натуральных чисел (n, s) *сингулярной*, если она допускает нетривиальную «невозможность восстановления набора», т. е. $n > s$ и при этом существуют два различных s-эквивалентных набора A и B из n чисел ($A \neq B$ и $A \overset{s}{\sim} B$).

Таким образом, все упомянутые выше задачи можно переформулировать как вопросы о сингулярных парах. Главная цель состоит в том, чтобы описать все такие пары неким «легко вычислимым» способом.

Обозначение. Для произвольного натурального числа s обозначим через $\mathcal{M}_s$ множество всех таких натуральных чисел $n > s$, что пара (n, s) сингулярна.

Например, множество $\mathcal{M}_1$ пусто. А вот задача 1.1 может быть переформулирована так: содержит ли множество $\mathcal{M}_2$ числа 10 и 4? (хотя это и не совсем точно в отношении второй половины этой задачи).

В этой статье мы перечислим все известные на данный момент результаты по обобщённой проблеме Мозера, равно как и основные методы исследования. Мы также представим некоторые новые факты и перечислим несколько важных нерешённых вопросов и гипотез.

§ 2. Историческая справка

(1957)

Начнём с предположения о том, чем именно был вызван интерес Мозера к данной тематике. За несколько лет до того, в 1954 году, Лео Мозер и Джим Ламбек опубликовали статью [14] о разбиениях множества натуральных чисел. В ней они доказали известную теорему Ламбека — Мозера о связи разбиений натурального ряда $\mathbb{N}$ на два подмножества и последовательностей вида $\{f(n) + n\}$, где $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ — произвольная монотонно неубывающая и неограниченная сверху функция.

Это исследование было посвящено некоторым, весьма схожим с проблемой Мозера, задачам о том, как множества (конечные или бесконечные) натуральных чисел накладываются или дополняют друг друга при сдвигах.

Скорее всего, именно так Мозер натолкнулся на вопрос о восстановлении набора чисел для случая $s = 2$ — но, разумеется, это лишь предположение. Однако стоит отметить, что в своей более поздней короткой заметке [15] Ламбек и Мозер упоминают, причём буквально на одной и той же странице, как проблему восстановления, так и вопросы, связанные с дополняющими друг друга последовательностями целых чисел.

(1958)

В 1958 году, почти сразу же после публикации исходной задачи, Джон Селфридж и Эрнст Штраус в своей статье [18] решили задачу 1.2 и ответили на некоторые вопросы, возникшие по ходу дела. Начали они с того, что доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. *Набор A из n чисел однозначно определяется набором своих 2-сумм тогда и только тогда, когда n не является степенью двойки.*

Другими словами, пара $(n, 2)$ сингулярна в точности тогда, когда n есть степень двойки. Или, с использованием введённых нами обозначений,

$$\mathcal{M}_2 = \{4, 8, 16, 32, \ldots\} = \{2^k \colon k > 1\}.$$

Во-вторых, они исследовали случай $s = 3$ обобщённой проблемы Мозера 1.4 и показали, что для $n = 6$ существуют многочисленные и легко конструируемые примеры различных наборов A и B из n чисел, для которых $A \overset{3}{\sim} B$. Вот один из них:

$$A = \{1^5, -5\},\ B = \{(-1)^5, 5\} \quad \Rightarrow \quad A \neq B,$$
$$A^{(3)} = \{3^{10}, (-3)^{10}\},\ B^{(3)} = \{(-3)^{10}, 3^{10}\} \quad \Rightarrow \quad A^{(3)} = B^{(3)},$$

где 1^5 это не 1, как вы могли бы подумать. В стандартных обозначениях мультимножеств (наборов) a^b обозначает элемент a с кратностью b (т. е. b-кратное вхождение числа a в соответствующий набор). Стало быть, имелось в виду вот что:

$$A = \{1, 1, 1, 1, 1, -5\}, \quad B = \{-1, -1, -1, -1, -1, 5\}.$$

Что касается других значений n, то авторы работы [18] доказали, что примеры 3-эквивалентных n-наборов могут существовать, только если $n^2 - (2^k + 1)n + 2 \cdot 3^{k-1}$ обращается в нуль для некоторого натурального

$k \leqslant n$. Не очень сложно доказать, что остальные нетривиальные (превосходящие s) значения n, для которых это возможно, это $n = 27$ (при $k = 5, 9$) и $n = 486$ ($k = 9$) (см. статьи [2, 18]).

Таким образом, эти авторы доказали, что

$$\{6\} \subset \mathcal{M}_3 \subset \{6, 27, 486\}.$$

В-третьих, с помощью подобной же техники для $s = 4$ было доказано, что единственные нетривиальные значения n, при которых восстановление набора может быть невозможно, это $n = 8, 12$.

Найти пример для случая $n = 8$ совсем несложно. Вообще говоря, нетрудно построить пример «невозможности восстановления» для обобщённой проблемы Мозера 1.4, если $n = 2s$ (мы продемонстрируем это несколько позже в § 3). Опять-таки, этот результат можно записать как

$$\{8\} \subset \mathcal{M}_4 \subset \{8, 12\}.$$

Всё это привело авторов работы [18] к нескольким дополнительным вопросам и предположениям.

Вопрос 2.2. *В самом ли деле пары* $(27, 3)$ *и* $(486, 3)$ *сингулярны? Другими словами, можно ли найти два таких различных набора* A *и* B *из* n *чисел, что* $A^{(3)} = B^{(3)}$ *для* $n = 27$ *и* $n = 486$?

Вопрос 2.3. *Тот же вопрос для пары* $(12, 4)$. *То есть существуют ли два таких различных* 12*-набора* A *и* B, *что* $A^{(4)} = B^{(4)}$?

На момент написания статьи [18] ответа на эти вопросы у авторов не было. Приведём ещё один важный вопрос из той же статьи.

Вопрос 2.4. *В случаях когда восстановление набора невозможно, могут ли существовать более чем два* n*-набора с идентичными наборами* s*-сумм?*

Селфридж и Штраус предположили, что ответ на этот вопрос отрицателен.

(1959)

Вскоре после публикации Селфриджа и Штрауса появилась небольшая заметка Мозера и Ламбека [15]. Начиналась она с упоминания результатов статьи [18], но затем авторы двинулись в другом направлении.

А именно, они задались вопросом о том, можно ли разбить всё множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ на два таких подмножества $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$, что $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ совпадают как мультимножества. Было доказано, что это сделать можно, причём такое разбиение единственно. Доказательство использовало производящую функцию мультимножества.

Определение. Для любого конечного набора A неотрицательных целых чисел вида $\{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots, a_m^{k_m}\}$ определим его производящую функцию (многочлен) $f_A(x)$ при помощи формулы

$$f_A(x) = \sum_{i=1}^{m} k_i x^{a_i}.$$

Аналогичной формулой эта производящая функция может быть определена и для бесконечного набора $A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \ldots\}$ в том случае, если последовательность $\{k_i^{1/a_i}\}$ ограничена сверху.

Авторы доказали, что в интересовавшем их случае производящие функции удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} f_A(x) + f_B(x) = \dfrac{1}{1-x}, \\ f_A^2(x) - f_A(x^2) = f_B^2(x) - f_B(x^2). \end{cases}$$

Они также доказали, что аналогичное разбиение множества $Z_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ возможно тогда и только тогда, когда n является степенью двойки. Это разбиение также единственно.

Интересно, что и в конечном, и в бесконечном случае разбиение определяется так называемой *последовательностью Морса — Туэ* $\{\alpha_n\}$, определённой как $\alpha_n = s_2(n) \pmod 2$, где $s_2(n)$ есть *двоичный* вес числа n, т. е. сумма цифр в двоичном представлении n. Например, если $n = 2^p$ и мы определим множества $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ следующим образом:

$$A = \{k \in Z_n \colon \alpha_k = 0\}, \quad B = \{k \in Z_n \colon \alpha_k = 1\},$$

то $A^{(2)} = B^{(2)}$. И в самом деле, если положить

$$f_A(x) = \sum_{i=1}^{m} x^{a_i} \quad \text{и} \quad f_B(x) = \sum_{i=1}^{m} x^{b_i},$$

то мы получим

$$f_A(x) + f_B(x) = u(x) = \frac{1 - x^{2^p}}{1-x},$$

$$f_A(x) - f_B(x) = v(x) = \prod_{i=0}^{p-1} (1 - x^{2^i}).$$

Тогда $f_A = (u+v)/2$ и $f_B = (u-v)/2$, откуда можно вывести равенство

$$f_A^2(x) - f_A(x^2) = f_B^2(x) - f_B(x^2).$$

Осталось только заметить, что выражения слева и справа от знака равенства есть не что иное, как производящие функции для наборов $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$ соответственно.

Впоследствии похожий подход с использованием производящих функций (в сочетании с некоторыми другими идеями) был использован в статьях [11], [6] и [2].

(1962)

Следующая статья по этой теме появилась в 1962 году, когда Френкель, Гордон и Штраус опубликовали статью [11], доказав, что ответ на вопрос 2.4 положителен. Это был лишь первый, но отнюдь не последний раз, когда одна из гипотез, касающихся проблемы Мозера, была опровергнута.

Авторы нашли многочисленные примеры кратной сингулярности для простейшего случая $s=2$. Более точно: они показали, как сконструировать три таких различных набора A, B и C из 8 чисел, что $A^{(2)} = B^{(2)} = C^{(2)}$. Вот один из этих контрпримеров:

$$A = \{0, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 16\};$$
$$B = \{1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 15\};$$
$$C = \{2, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 14\}.$$

После этого исходный вопрос был «подправлен» — новый вариант спрашивал, сколь много различных n-наборов могут порождать один и тот же набор s-сумм. Максимальное возможное количество таких наборов было обозначено $\mathcal{F}_s(n)$. Конечно, тогда пара (n, s) должна быть как минимум сингулярной — что эквивалентно неравенству $\mathcal{F}_s(n) > 1$.

В статье [11] было доказано несколько неравенств для чисел $\mathcal{F}_s(n)$. Например, $\mathcal{F}_2(16) \leqslant 3$, $2 \leqslant \mathcal{F}_3(6) \leqslant 6$, $\mathcal{F}_4(12) \leqslant 2$.

Однако никаких других примеров сингулярностей тройной или более высокой кратности найдено не было. Это привело к постановке очередного вопроса.

Вопрос 2.5. а) *Существует ли число $n = 2^p > 8$ и такие три различных n-набора, что любые два из этих наборов 2-эквивалентны (то есть $\mathcal{F}_2(n) > 2$)?*

б) *Более общо, существует ли сингулярная пара (n, s), отличная от $(8, 2)$, и такие три различных n-набора, что любые два из этих наборов s-эквивалентны (то есть $\mathcal{F}_s(n) > 2$)?*

В той же статье были доказаны ещё два интересных факта. Во-первых, оказалось, что в вопросах, относящихся к восстановлению наборов чисел по наборам их кратных сумм, достаточно работать с кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$; нет никакой нужды рассматривать экзотические случаи произвольных полей с нулевой характеристикой или абелевых групп без кручения. Во-вторых, был разрешён важный вопрос о количестве элементов в $\mathcal{M}_s$: авторы доказали, что множество $\mathcal{M}_s$ конечно для любого $s > 2$.

В том же самом году первая часть исходной задачи Мозера 1.1 была предложена на заключительном туре Московской математической олимпиады. Вполне возможно, что один из советских математиков ознакомился с публикацией [11] и, решив, что задача Мозера заслуживает более широкого распространения, предложил её жюри олимпиады. Задача попала в варианты 8 и 9 классов и оказалась одной из самых трудных задач в этих параллелях. Со всеми задачами московских олимпиад тех лет можно ознакомиться в книгах [1, 4].

(1968)

Среди двух вопросов о «подозрительных» парах (вопросы 2.2, 2.3) последний ($n = 12$, $s = 4$) выглядел более простым. Так что никого не удивило, что «всего» через десять лет после работы [18] Джон Юэлл опубликовал статью [9], в которой доказывалось, что пара $(12, 4)$ не является сингулярной — набор из 12 чисел всегда можно восстановить по набору его 4-сумм. Он также нашёл чисто комбинаторное и более прямое доказательство важной формулы (3) (см. ниже, в § 4).

Много лет спустя дополнительное исследование выявило ошибку в проведённых им вычислениях для пары $(12, 4)$. Однако другой факт в той же статье был абсолютно верен. А именно, Юэлл показал, что ответ на вопрос 2.5 б положителен. Он сделал это, доказав, что $\mathcal{F}_3(6) = 4$, после чего дал полное описание всех возможных четвёрок попарно различных, но 3-эквивалентных наборов из 6 чисел.

Вот один примеров Юэлла:

$$A = \{0, 5, 9, 10, 11, 13\}; \quad B = \{1, 5, 8, 9, 10, 15\};$$
$$C = \{1, 6, 7, 8, 11, 15\}; \quad D = \{3, 5, 6, 7, 11, 16\}.$$

Проверку их эквивалентности мы оставим читателю в качестве несложного упражнения.

(1981)

Ричард Гай включил вопрос о восстановлении набора чисел по набору его кратных сумм в свой сборник нерешённых проблем теории чисел [12, задача C5]. Вопрос сопровождался разъяснением, что задача решена для $s = 2$, но её уточнение, касающееся значений функции $\mathcal{F}_2$, всё ещё не исследовано до конца. Случаи $s = 3$ для $n = 27$ и $n = 486$ представлены в качестве открытых вопросов.

(1991)

Насколько нам известно, после статьи Юэлла проблема Мозера была отложена в сторону примерно до 1991 года, когда Боман, Болкер и О'Нил попробовали подойти к ней с несколько другой стороны в статье [6].

Если даны точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и произвольное подмножество $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ из s элементов в $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, то определим x_A как сумму $x_{a_1} + \ldots + x_{a_s}$. Далее, обозначая $\binom{n}{s} = m$, определяем линейный оператор

$$R_{n,s}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad R_{n,s}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{A_1}, x_{A_2}, \ldots, x_{A_m}),$$

где $A_1, \ldots, A_m$ — последовательность всех s-подмножеств I_n. Это не что иное, как комбинаторная (дискретная) версия интегрального преобразования Радона.

Очевидно, что отображение $R_{n,s}$ может быть перенесено из евклидовых пространств на их факторпространства по модулю стандартного действия симметрических групп S_n и S_m на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$: любой перестановке $s \in S_n$ соответствует перестановка координат $T_s\colon (x_1, \ldots, x_n) \to (x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$ и т. д. Следовательно, мы получаем отображение $R_{n,s}\colon \mathbb{L}_n \to \mathbb{L}_m$, где $\mathbb{L}_k = \mathbb{R}^k / S_k$. Тогда проблема Мозера может быть представлена как вопрос о том, является ли $R_{n,s}$ инъекцией. Или более общо: как вопрос о размере прообраза $R_{n,s}^{-1}(x)$ для $x \in \mathbb{L}_m$.

С использованием этой терминологии и соответствующей техники авторы доказали, что при восстановлении n-набора по набору его 2-сумм нельзя получить более $n - 2$ различных наборов. В дополнение к этому они доказали, что для любого $n \neq 8$ эта оценка сверху может быть понижена до 2 и почти всегда до 1. Таким образом, был получен ответ на вопрос 2.5 а.

Стоит также отметить, что, судя по списку сформулированных в статье вопросов, на момент публикации авторы не знали о статье Юэлла [9].

(1992)

Совершенно случайно в 1991 году задача 1.2 была предложена на математическом конкурсе для студентов-математиков Санкт-Петербургского государственного университета. Увидев её, автор этого обзора был увлечён — как и многие математики до него — интересной и на первый взгляд несложной задачей. Этот интерес и последовавшее исследование привели к появлению статьи Фомина и Ижболдина [2], поданной для публикации в «Записках Санкт-Петербургского отделения МИАН России» в 1992 г. (английский перевод был опубликован в 1995 г.).

Бо́льшая часть этой статьи была посвящена доказательству результатов, давно полученных в [18] и [11] — к сожалению, в то время доступ к зарубежным публикациям был ограничен, а ни о каких сетевых архивах и речи не могло идти. Несмотря на это, статья содержала один новый и важный результат: примеры сингулярных пар, которые дали положительный ответ на вопрос 2.2 для обоих «подозрительных» случаев. Пары $(27, 3)$ и $(486, 3)$ и в самом деле оказались сингулярными.

Так было закрыто исследование обобщённой проблемы Мозера 1.4 для случая $s = 3$.

(1996)

По прошествии нескольких лет Боман и Линуссон независимо построили те же примеры сингулярности для пар $(27, 3)$ и $(486, 3)$ в статье [7]. Также они исследовали вопрос о построении всех возможных пар эквивалентных наборов для $s=3$. Увы, они посчитали, что вопрос о сингулярности пары $(12, 4)$ был уже разрешён Юэллом в [9] — в конце статьи они упоминают, что были проинформированы об этом факте буквально в последний момент перед публикацией.

(1997)

Росс Хонсбергер посвятил главу «A Gem from Combinatorics» своей книги [13] случаю $s = 2$ обобщённой проблемы Мозера. Любопытно, что имя Мозера там не упоминается — Хонсбергер пишет, что излагаемые результаты были переданы ему от Пала Эрдёша и Джона Селфриджа. Это единственное упоминание имени Эрдёша в контексте проблемы Мозера. Честно говоря, не очень ясно, в самом ли деле великий венгерский математик имел какое-то отношение к этим результатам, или это просто нечаянная ошибка атрибуции.

(2003)

В главе 46 своей увлекательной книги [17] Савчев и Андрееску излагают решение задачи 1.2, равно как и результаты из статьи [15], с привлечением последовательности Морса — Туэ.

(2008)

Несколько расширенная версия задачи 1.3 с добавлением некоторых фактов из [11] и [6] была опубликована как задача [8] в «American Mathematical Monthly» под авторством Элизабет Чен и Джеффри Лагариаса.

Некоторые из решений были впоследствии размещены и обсуждены на веб-сайте «Cut-The-Knot», см. [5].

(2016)

На протяжении двадцати лет с проблемой Мозера не происходило ничего содержательного, и вдруг в 2016 году Исомуродов и Кохась ([3]) обнаружили, что Джон Юэлл сделал ошибку в своих вычислениях для пары $(12, 4)$. Теперь мы уже никогда не узнаем, как именно это случилось, но в любом случае в наши дни математикам не нужно проводить столь сложные полиномиальные выкладки на бумаге — авторы статьи [3] использовали для этого алгебраический пакет MAPLE™. После этого авторы построили пару 4-эквивалентных 12-наборов — тем самым был полностью разрешён вопрос 2.3 и завершено исследование случая $s = 4$ задачи 1.4 (подробности далее в § 4).

§ 3. Несколько простых примеров

Этот короткий параграф продемонстрирует построение нескольких простых примеров сингулярных пар и s-эквивалентных наборов.

Случай $s = 2$, $n = 2^k$. Самый тривиальный случай — это пара $(2, 2)$; если нам известна лишь сумма двух чисел, то, конечно же, мы не можем однозначно восстановить сами числа. Хотя эта пара и не является настоящей сингулярной парой (так как $n = s$), но мы можем использовать её как базис для построения других, уже нетривиальных примеров.

А именно, если нам даны два 2-эквивалентных набора из n чисел A и B, то для любого числа d имеем

$$A' = A \cup (B + d) \overset{2}{\sim} B' = B \cup (A + d), \tag{1}$$

где $X + d$ обозначает набор, полученный из X прибавлением d ко всем его элементам. Поэтому если мы начнём с наборов

$$A = \{1, 1\}, \quad B = \{0, 2\}, \quad A \overset{2}{\sim} B,$$

и выберем $d = 1$, то получим

$$A' = \{1, 1, 1, 3\}, \quad B' = \{0, 2, 2, 2\}, \quad A' \overset{2}{\sim} B'.$$

Продолжая в том же духе, можно легко построить примеры 2-эквивалентных n-наборов для каждого n, являющегося степенью двойки. Оставим доказательство эквивалентности (1) читателю в качестве несложного упражнения.

Случай $n = 2s$. Помните пример сингулярности для $n = 6$, $s = 3$ из § 2? Он может быть легко обобщён для любой пары (n, s) при $n = 2s$.

А именно, возьмём произвольный $2s$-набор A и вычислим его среднее арифметическое a. Затем отразим A относительно a и получим *зеркальную копию*, набор $\tilde{A} = 2a - A$. Если исходный набор A не был симметричен, то $\tilde{A}$ отличен от A и при этом $A \overset{s}{\sim} \tilde{A}$. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно заметить, что для каждого s-набора $M \subset A$ зеркальная копия его дополнения $A \backslash M$ (которая является s-набором в $\tilde{A}$) имеет ту же самую сумму элементов.

В качестве простейшего примера можно взять набор $A = \{1^{2s-1}, 1 - 2s\}$ и его зеркальную копию $\tilde{A} = \{(-1)^{2s-1}, 2s - 1\}$.

Все s-суммы чисел из A — их всего имеется $\binom{2s}{s}$ — распадаются на две группы. Одна состоит из сумм наборов, которые включают в себя $(1 - 2s)$, и количество таковых равно $\binom{2s-1}{s-1}$. Каждая из этих сумм равна

$$(s-1)\cdot 1 + (1 - 2s) = -s.$$

Другая группа включает в себя $\binom{2s-1}{s}$ сумм наборов, состоящих только из единиц, — каждая такая сумма равна s. Следовательно, мы получаем $A^{(s)} = \{(-s)^m, s^m\}$, где $m = \binom{2s-1}{s-1} = \binom{2s-1}{s}$. Очевидно, что набор $A^{(s)}$ зеркально симметричен относительно нуля, а значит, $\tilde{A}^{(s)} = A^{(s)}$.

Двойственность $(n, s) \longleftrightarrow (n, n - s)$

Если нам даны два s-эквивалентных n-набора A и B, то эти наборы и $(n - s)$-эквивалентны. Чтобы доказать это, достаточно убедиться в том, что сумма всех элементов A совпадает с суммой всех элементов B. Короткое вычисление показывает, что

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n} (a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_s}) = \binom{n-1}{s-1} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i.$$

Таким образом, сумма чисел в A равна сумме чисел в B, и, обозначив это число через σ, получаем

$$A^{(n-s)} = \sigma - A^{(s)}, \quad B^{(n-s)} = \sigma - B^{(s)},$$

что доказывает двойственность. Отсюда в частности следует, что можно считать $n \geqslant 2s$; если $s < n < 2s$, то можно перейти к паре (n, s'), где $s' = n - s$ и $n > 2s'$.

Эта двойственность позволяет нам построить «новые» примеры сингулярных пар. Скажем, поскольку пара $(8, 2)$ сингулярна, то сингулярной является и пара $(8, 6)$. Как мы вскоре увидим, пары $(27, 3)$, $(486, 3)$ и $(12, 4)$ сингулярны, а значит, то же можно сказать и про пары $(27, 24)$, $(486, 483)$ и $(12, 8)$.

Далее в § 5 мы несколько подробнее исследуем эту двойственность и некоторые её вариации.

Линейные преобразования

Под занавес упомянем один очевидный, но весьма полезный факт. Если наборы A и B s-эквивалентны и $f(x) = px + q$ — произвольная линейная функция, то наборы $f(A)$ и $f(B)$ также s-эквивалентны. Это означает, что мы можем сдвигать, а также подвергать сжатию-растягиванию пары эквивалентных наборов, снова получая эквивалентные наборы.

Так, если взять наборы $A = \{0, 5, 9, 10, 11, 13\}$ и $B = \{1, 5, 8, 9, 10, 15\}$, то $A \overset{3}{\sim} B$. Применяя функцию $f(x) = 2x - 13$, мы получим новую пару 3-эквивалентных наборов $A_1 = \{-13, -3, 5, 7, 9, 13\}$ и $B_1 = \{-11, -3, 3, 5, 7, 17\}$.

Конечно же, все подобные примеры, которые получаются друг из друга линейными преобразованиями, можно считать идентичными в рамках изучаемой нами тематики.

§ 4. Симметрические многочлены. Полное решение для случаев $s = 2, 3, 4$

Давайте теперь углубимся в изучение некоторых конкретных методов, применяемых для решения задачи Мозера. Главный из них основан на применении симметрических многочленов.

По данному n-набору $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ построим последовательность сумм k-х степеней его элементов для $k = 1, \ldots, n$:

$$\sigma_k(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i^k.$$

Хорошо известно, что набор A может быть однозначно восстановлен по этой последовательности — ведь значения $\sigma_k(A)$ определяют коэффициенты многочлена $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ и, значит, однозначно определяют набор его корней.

Итак, если значения $\sigma_k(A)$ для $k = 1, \ldots, n$ могут быть получены из значений $\sigma_k(A^{(s)})$, то набор A однозначно определён набором $A^{(s)}$.

Начнём с небольших значений k. Для $k = 1$ мы уже вычислили, что

$$\sigma_1(A^{(s)}) = \binom{n-1}{s-1} \sigma_1(A),$$

и следовательно, если $A^{(s)} = B^{(s)}$, то $\sigma_1(A) = \sigma_1(B)$. Это означает, что сумма $\sigma_1(A)$ всегда может быть вычислена по набору $A^{(s)}$.

Далее, если $k = 2$, то

$$\begin{aligned}
\sigma_2(A^{(s)}) &= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_s\leqslant n} (a_{i_1} + \ldots + a_{i_s})^2 = \\
&= \binom{n-1}{s-1}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + \binom{n-2}{s-2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2a_ia_j = \\
&= \binom{n-1}{s-1}\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + \binom{n-2}{s-2}\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} a_ia_j = \\
&= \left(\binom{n-1}{s-1} - \binom{n-2}{s-2}\right)\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2 + \binom{n-2}{s-2}\sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} a_ia_j = \\
&= \binom{n-2}{s-1}\sigma_2(A) + \binom{n-2}{s-2}\sigma_1(A)^2.
\end{aligned}$$

Мы уже вычислили $\sigma_1(A)$, и потому можем теперь вычислить и $\sigma_2(A)$, разве что коэффициент $\binom{n-2}{s-1}$ обращается в нуль. Это невозможно при $n > s > 0$ — значит, сумма $\sigma_2(A)$ всегда может быть восстановлена по набору $A^{(s)}$.

Теперь обратимся к общему случаю. Поскольку $\sigma_k(A^{(s)})$ является симметрическим многочленом от $a_1, \ldots a_n$, он может быть выражен в форме

$$\sigma_k(A^{(s)}) = \alpha(s,k,n)\sigma_k(A) + \mathcal{P}\big(\sigma_1(A), \sigma_2(A), \ldots, \sigma_{k-1}(A)\big). \tag{2}$$

Здесь $\alpha(s,k,n)$ — некая константа (относительно переменных a_i), однозначно определяемая тремя числами n, s, k, а $\mathcal{P}$ — некий многочлен от $k-1$ переменных, чьи коэффициенты также полностью определены той же самой тройкой чисел. Например, как следует из вычислений в предыдущем абзаце, при $k = 2$ мы имеем $\alpha(s,2,n) = \binom{n-2}{s-1}$ и $\mathcal{P}(x) = \binom{n-2}{s-2}x^2$.

Из этого общего рассуждения ясно, что если ни один из коэффициентов $\alpha(s,k,n)$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ не равен нулю, то пара (n, s) не сингулярна, т. е. набор A всегда однозначно восстанавливается по набору $A^{(s)}$.

Теорема 4.1.

$$\alpha(s,k,n) = \sum_{p=1}^{s}(-1)^{p-1}p^{k-1}\binom{n}{s-p}. \tag{3}$$

Таким образом, коэффициент $\alpha(s,k,n)$ оказался многочленом от n.

Определение. Будем называть правую часть уравнения (3) *многочленом Мозера* и обозначать его $F_{s,k}(n)$.

Теорема 4.1 была доказана в статье [11] путём преобразований другой формулы, взятой из [18]. Позже более прямое комбинаторное доказательство было дано в статье [9]. Через много лет эта теорема была опять заново «открыта» и доказана (при помощи экспоненциальных производящих функций) в работе [2].

В качестве не очень сложного упражнения читателю предлагается доказать, что для $k = 2$ формула (3) даёт равенство $F_{s,2}(n) = \binom{n-2}{s-1}$.

Кстати, даже и без этой формулы случай $s = 2$ (задача 1.2) может быть теперь разрешён буквально за несколько секунд. Вычисляя $\sigma_k(A^{(2)})$ напрямую, мы получим (с использованием обозначений из (2))

$$\alpha(s, 2, n) = n - 2^{k-1}.$$

Это означает, что n-набор всегда восстанавливается по набору своих 2-сумм, если n не является степенью двойки. Как мы уже знаем (§ 3), для всех степеней двойки 2^p, $p > 1$, существуют примеры, доказывающие сингулярность пар $(2^p, 2)$.

Случай $s = 3$. Уравнение (3) даёт

$$F_{3,k}(n) = \binom{n}{2} - 2^{k-1}\binom{n}{1} + 3^{k-1},$$
$$2F_{3,k}(n) = n^2 - n(2^k + 1) + 2 \cdot 3^{k-1}.$$

Исследование этого случая также довольно прямолинейно. Сначала мы доказываем, что $F_{3,k}(n)$ не обращается в нуль для натурального n, если $k > 12$. Затем проверяем все случаи $k \leqslant 12$ и убеждаемся, что многочлены $F_{3,k}$ обладают целочисленными корнями тогда и только тогда, когда $k \in \{1, 2, 3, 5, 9\}$. Для этих пяти специальных случаев имеем

$$F_{3,1}(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2), \quad F_{3,2}(n) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3),$$
$$F_{3,3}(n) = \frac{1}{2}(n-3)(n-6), \quad F_{3,5}(n) = \frac{1}{2}(n-6)(n-27),$$
$$F_{3,9}(n) = \frac{1}{2}(n-27)(n-486).$$

Из § 3 мы уже знаем, что пара $(6, 3)$ сингулярна. Чтобы доказать то же самое для пар $(27, 3)$ и $(486, 3)$, приведём здесь следующие примеры:

$$\begin{aligned}
n = 27 \qquad & A'_{27} = \{0, 1^{16}, 2^{10}\},\\
& A''_{27} = \{0^5, 1^{10}, 2^{10}, 3^2\},\\
& A'''_{27} = \{0, 1^5, 2^{10}, 3^6, 4^5\},\\
n = 486 \qquad & A_{486} = \{0^{22}, 1^{176}, 2^{231}, 3^{56}, 4\}.
\end{aligned}$$

Проверку того, что каждый из этих наборов 3-эквивалентен своему зеркальному отражению, мы оставим читателю. В наше время это можно сделать за несколько минут при помощи одного из стандартных вычислительных пакетов. Впрочем, при наличии соответствующего опыта можно обойтись и без специального программного обеспечения.

Итог: $\mathcal{M}_3 = \{6, 27, 486\}$.

Случай $s = 4$. Из уравнения (3) получаем

$$F_{4,k}(n) = \binom{n}{3} - 2^{k-1}\binom{n}{2} + 3^{k-1}\binom{n}{1} - 4^{k-1},$$

$$6F_{4,k}(n) = n^3 - n^2(3 + 3 \cdot 2^{k-1} + 1) + n(2 + 3 \cdot 2^{k-1} + 2 \cdot 3^k) - 6 \cdot 4^{k-1}.$$

Затем, используя стандартные приёмы элементарной теории чисел, можно доказать, что при $k > 7$ многочлены $F_{4,k}$ не имеют натуральных корней. И наконец,

$$\begin{aligned}
F_{4,1}(n) &= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3),\\
F_{4,2}(n) &= \frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4),\\
F_{4,3}(n) &= \frac{1}{6}(n-3)(n-4)(n-8),\\
F_{4,4}(n) &= \frac{1}{6}(n-4)(n^2-23n+96),\\
F_{4,5}(n) &= \frac{1}{6}(n-8)(n^2-43n+192),\\
F_{4,6}(n) &= \frac{1}{6}(n-12)(n^2-87n+512),\\
F_{4,7}(n) &= \frac{1}{6}(n-8)(n^2-187n+3072).
\end{aligned}$$

Случай $n = 8$ (то есть ситуация $n = 2s$) нам уже хорошо знаком. Единственный другой нетривиальный корень многочленов $F_{4,k}$ равен 12. Как уже упоминалось ранее, этот вариант оказался крепким орешком — пара 4-эквивалентных 12-наборов была найдена только в 2016 году Исомуродовым и Кохасем. Если мы рассмотрим наборы

$$\begin{aligned}
A &= \{1^2, 4, 6, 7, 8^2, 9, 10, 12, 15^2\},\\
B &= \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 16\},
\end{aligned}$$

то не так уж и трудно проверить, что $A \overset{4}{\sim} B$.

В статье [3] авторы доказали, что данная пара является единственным (с точностью до линейных преобразований) примером двух различных наборов с указанными свойствами.

Итог: $\mathcal{M}_4 = \{8, 12\}$.

§ 5. Поиск корней многочленов Мозера

Мы теперь знаем, что пара (n, s) может быть сингулярной, только если n является корнем многочлена $F_{s,k}$. Поэтому обратим более пристальное внимание на эти корни. (Этот параграф представляет собой развёрнутый пересказ и комментарий доказательства теоремы 7 из работы [18].)

Вычислим многочлены Мозера для нескольких первых значений k.

Случай $k = 1$. Нам уже известно, что

$$F_{s,1}(n) = \binom{n-1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)!}(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1) = \frac{1}{(s-1)!}\prod_{p=1}^{s-1}(n-p).$$

Значит, корнями являются числа от 1 до $s-1$, и они нам не интересны: n должно быть больше s, чтобы пара (n, s) имела шансы на сингулярность.

Случай $k = 2$. И этот многочлен был уже вычислен:

$$F_{s,2}(n) = \binom{n-2}{s-1} = \frac{1}{(s-1)!}\prod_{p=2}^{s}(n-p).$$

Опять-таки, нужных нам корней здесь нет. Продолжим...

Случай $k = 3$. По-прежнему не очень сложно вычислить, что

$$F_{s,3}(n) = \frac{1}{(s-1)!}(n-2s)\prod_{p=3}^{s}(n-p),$$

и здесь (наконец-то!) мы находим нетривиальный корень $n = 2s$. Впрочем, о нём мы уже знаем — пара $(2s, s)$ всегда сингулярна.

Случай $k = 4$. Это вычисление может занять у вас немного больше времени, но оно опять не особенно сложно. При $s > 2$ мы имеем

$$F_{s,4}(n) = \frac{1}{(s-1)!}(n^2-(6s-1)n+6s^2)\prod_{p=4}^{s}(n-p). \tag{4}$$

Получаем квадратное диофантово уравнение, решения которого дадут нам нетривиальные корни многочленов $F_{s,k}$:

$$n^2-(6s-1)n+6s^2 = 0. \tag{5}$$

Оно может быть записано и как уравнение для s:

$$s^2 - sn + \frac{n(n+1)}{6} = 0. \tag{6}$$

Сумма корней уравнения (6) равна n — следовательно, если пара (n, s), где $n > s$, даёт корень уравнения (4), то это же верно и для пары $(n, n-s)$.

Это прямой аналог двойственности, описанной нами в § 3. Мы будем называть такие пары $\langle n, 4\rangle$-*сопряжёнными* или просто n-сопряжёнными.

Точно такое же рассуждение для уравнения (5) показывает, что если пара (n, s) — решение уравнения (4), то пара $(6s-1-n, s)$ также является его решением. Эти две пары мы будет называть $\langle s, 4\rangle$-*сопряжёнными*.

Ясно, что каждое сопряжение симметрично. Также очевидно, что для любого положительного решения (n, s) мы имеем $6s-1>n$ и $n>s$ — иначе левые стороны уравнений (6) и (5) были бы положительны. Поэтому сопряжённая пара также состоит из положительных целых чисел.

Рассмотрим теперь минимальное возможное решение уравнения (5), а именно, $r=(2,1)$ (поскольку речь идёт о натуральных числах, мы имеем право говорить о минимальных решениях). Сама по себе эта пара нам не годится, так как s должно быть не меньше 3, чтобы формула (4) имела смысл. Однако эта пара всё же удовлетворяет уравнению (5), и её можно использовать, чтобы построить из неё другие корни.

Отметим, что пара r является n-самосопряжённой $(2-1=1)$, и потому от неё мы можем перейти к другому корню только через s-сопряжение. Так и сделаем — получаем пару $(3,1)$, затем через n-сопряжение переходим к паре $(3,2)$, потом к $(8,2)$, к $(8,6)$ и т. д.

Продолжая этот процесс, получаем бесконечную цепочку решений уравнения (5):

$$\begin{gathered}\underline{(2,1)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(3,1)} \overset{n}{\longleftrightarrow} \underline{(3,2)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(8,2)} \overset{n}{\longleftrightarrow} (8,6) \overset{s}{\longleftrightarrow} (27,6) \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ \overset{n}{\longleftrightarrow} (27,21) \overset{s}{\longleftrightarrow} (98,21) \overset{n}{\longleftrightarrow} (98,77) \overset{s}{\longleftrightarrow} (363,77) \overset{n}{\longleftrightarrow} (363,286) \overset{s}{\longleftrightarrow} \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

Мы отметили стрелки буквами «n» и «s», чтобы указать, какое именно сопряжение используется в каждом переходе; также мы подчеркнули «непригодные» пары — они являются решениями (5), но не дают корни многочлена $F_{s,k}$ для $s>2$ (пара $(8,2)$ сингулярна, но мы её не рассматриваем из-за требования $s>2$). Итак, начиная с $(8,6)$, пары в этой цепочке дают полностью пригодные корни многочленов $F_{s,4}$. Потому они все представляют собой возможные сингулярности для проблемы Мозера.

Случай $k=5$. И тут вычисление не так уж сложно. При $s>3$ получаем

$$F_{s,5}(n)=\frac{1}{(s-1)!}(n^2-(12s-5)n+12s^2)(n-2s)\prod_{p=5}^{s}(n-p).$$

Опять мы имеем дело с квадратным диофантовым уравнением, которое можно записать так:

$$n^2-(12s-5)n+12s^2=0, \tag{8}$$

или

$$s^2 - sn + \frac{n(n+5)}{12} = 0. \tag{9}$$

Как и ранее, уравнение (9) даёт нам n-сопряжение (двойственность) $(n, s) \leftrightarrow (n, n-s)$. А уравнение (8) даёт $\langle s, 5\rangle$-сопряжение — а именно, $(n, s) \leftrightarrow (12s - 5 - n, s)$.

Совершенно так же, как и в предыдущем случае, мы приходим к цепочке решений:

$$\underline{(3,1)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(4,1)} \overset{n}{\longleftrightarrow} \underline{(4,3)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(27,3)} \overset{n}{\longleftrightarrow}$$
$$\overset{n}{\longleftrightarrow} (27,24) \overset{s}{\longleftrightarrow} (256,24) \overset{n}{\longleftrightarrow} (256,232) \overset{s}{\longleftrightarrow} (2523,232) \overset{n}{\longleftrightarrow} \ldots$$

Однако в этом случае имеется небольшое отличие. «Минимальное решение», которым является пара $(3, 1)$, таково, что его n-сопряжённая пара $(3, 2)$ с ним не совпадает. Поэтому цепочка решений может быть продолжена и в другую сторону:

$$\underline{(3,2)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(16,2)} \overset{n}{\longleftrightarrow} (16,14) \overset{s}{\longleftrightarrow} (147,14) \overset{n}{\longleftrightarrow}$$
$$\overset{n}{\longleftrightarrow} (147,133) \overset{s}{\longleftrightarrow} (1444,133) \overset{n}{\longleftrightarrow} (1444,1311) \overset{s}{\longleftrightarrow} \ldots$$

и обе цепочки могут быть объединены в одну, бесконечную в обоих направлениях:

$$\ldots \overset{n}{\longleftrightarrow} (1444,1311) \overset{s}{\longleftrightarrow} (1444,133) \overset{n}{\longleftrightarrow} (147,133) \overset{s}{\longleftrightarrow} (147,14) \overset{n}{\longleftrightarrow} (16,14) \overset{s}{\longleftrightarrow}$$
$$\overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(16,2)} \overset{n}{\longleftrightarrow} \underline{(3,2)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(3,1)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(4,1)} \overset{n}{\longleftrightarrow} \underline{(4,3)} \overset{s}{\longleftrightarrow} \underline{(27,3)} \overset{n}{\longleftrightarrow}$$
$$\overset{n}{\longleftrightarrow} (27,24) \overset{s}{\longleftrightarrow} (256,24) \overset{n}{\longleftrightarrow} (256,232) \overset{s}{\longleftrightarrow} (2523,232) \overset{n}{\longleftrightarrow} \ldots \tag{10}$$

В обоих случаях $s = 4$ и $s = 5$ нетрудно проверить, что все натуральные решения уравнений (5) и (8) принадлежат к цепочкам (7) и (10) соответственно. Мы оставим это читателю в качестве несложного упражнения.

Случай $k = 6$. Было бы просто замечательно, если бы мы могли применять тот же метод и далее. Увы, вычисляя многочлен $F_{s,6}$, мы получаем (при $s > 4$)

$$F_{s,6}(n) = \frac{1}{(s-1)!} g_{s,6}(n) \prod_{p=6}^{s} (n - p),$$

где

$$g_{s,6}(n) = n^4 - (30s - 16)n^3 + (150s^2 - 90s + 11)n^2 - (240s^3 - 90s^2 + 4)n + 120s^4.$$

Некоторые из многочленов $g_{s,6}$ имеют целочисленные корни. Например,

$$
\begin{aligned}
g_{8,6}(n) &= (n-12)(n^3 - 212n^2 + 6347n - 40\,960),\\
g_{10,6}(n) &= (n-32)(n^3 - 252n^2 + 6047n - 37\,500),\\
g_{22,6}(n) &= (n-32)(n^3 - 612n^2 + 51\,047n - 878\,460),\\
g_{30,6}(n) &= (n-32)(n^3 - 852n^2 + 105\,047n - 3\,037\,500).
\end{aligned}
$$

И на этом наше исследование случая $k = 6$ заканчивается. Нет ни квадратных уравнений, ни цепочек сопряжённых решений. Весьма вероятно, что многочлены $g_{s,6}$ не имеют корней, кроме перечисленных выше.

Ну а что касается бóльших значений k — увы, никаких надежд на простые решения у нас пока что нет.

В завершение этого параграфа приведём несколько сравнительно несложных фактов о многочленах Мозера, для краткости изложения опуская их доказательства.

Упражнение 5.1. Докажите, что при $k > 1$ многочлен $F_{s,k}(n)$ делится на $\prod_{p=k}^{s}(n-p)$. «Пустое» произведение, как обычно, равно 1.

Упражнение 5.2. Докажите (не пользуясь уравнением (3)), что выполнены равенства

$$
\begin{aligned}
F_{s,k}(n+1) - F_{s,k}(n) &= F_{s-1,k}(n),\\
F_{s,k}(n) &= sF_{s,k-1}(n) - nF_{s-1,k-1}(n-1).
\end{aligned}
$$

Упражнение 5.3. Докажите, что при $n > s+1$ и $n \geqslant k > 1$ выполнена рекуррентная формула $F_{s,k}(n) = (-1)^k F_{n-s,k}(n)$.

Упражнение 5.4. Докажите равенство $F_{s,k}(k) = (-1)^{s-1}\left\langle {k-1 \atop s-1} \right\rangle$. Выражение $\left\langle {k-1 \atop s-1} \right\rangle$ обозначает здесь так называемое число Эйлера 1-го рода, которое равно количеству перестановок порядка $k-1$ с $s-1$ подъёмами (подъём в перестановке $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ — это такой индекс $0 < j < m$, что $\pi_j < \pi_{j+1}$).

§ 6. Компьютерный эксперимент

Корни $F_{s,k}$

В попытках отыскать корни многочленов Мозера (отличные от уже найденных), которые могли бы навести нас на догадки о природе сингулярных пар, я написал не очень длинную программу на языке Sage, которая была затем запущена на веб-сервере сайта `CoCalc.com` для $s = 3, 4, 5, 6, 7$ и т. д., до тех пор пока сервер не начал запинаться (это произошло где-то в окрестности значения $s = 40$). После этого я переключился на тот же пакет, установленный на моём персональном компьютере, и продолжил вычисления вплоть до значения $s = 200$, когда каждое следующее значение s стало требовать около дня работы компьютера (и примерно тогда же мой компьютер стал жаловаться на исчерпание операционной памяти).

Вот что делала эта программа. Для каждого фиксированного значения s она запускала цикл по k от 1 до 1000; на каждом шагу цикла она вычисляла многочлен $F_{s,k}$, раскладывала его на множители над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и в случае нетривиального разложения распечатывала корни многочлена. В конце цикла программа также выдавала величину $k_{\max}(s)$ — максимальное значение переменной k, для которой многочлен $F_{s,k}$ обладал хотя бы одним целочисленным корнем.

В таблице приведены итоги этого эксперимента — список всех нетривиальных корней (исключая пары $(2s, s)$), найденных этой программой.

Нетривиальные корни многочленов Мозера для $3 \leqslant s \leqslant 200$

s	3	4	6	8	10	14	21
n	27[5], 486[9]	12[6]	8[4], **27**[4]	12[6]	**32**[6]	16[5], **147**[5]	**27**[4], **98**[4]
s	22	24	30	62	77	126	133
n	**32**[6]	27[5], **256**[5]	32[6]	64[7]	**98**[4], **363**[4]	128[8]	**147**[5], **1444**[5]

Я пометил каждый корень n минимальным значением переменной k, для которого $F_{s,k}(n) = 0$: например, метка [4] соответствует цепочке (7), а метка [5] — цепочке (10).

Для всех других значений s от 3 до 200 корни, найденные программой, были либо $n = 2s$ (они были бы помечены в таблице меткой [3]), либо тривиальны $(1, 2, \ldots, s)$ и потому нам не нужны.

Те корни $F_{s,k}$, про которые на данный момент не известно, представляют ли они настоящие сингулярности проблемы Мозера, выделены **жирным шрифтом**. Это — наши главные «подозреваемые».

Ещё один важный результат эксперимента состоял в том, что для всех $3 < s \leqslant 200$ вычисленное значение $k_{\max}(s)$ совпало с $2s - 1$. На основании этого факта была выдвинута $k_{\max}$-гипотеза — см. гипотезу 7.6 ниже, в § 7.

Следующее предложение можно рассматривать как весьма простую «половину» этой гипотезы.

Предложение 6.1. *Для любых $s > 2$, $n = 2s$ и любого нечётного k такого, что $1 < k < n$, верно равенство $F_{s,k}(n) = 0$.*

Доказательство. Это равенство можно переписать с использованием (3), и после добавления слагаемого с $p=0$ и обращения порядка суммирования мы получим для произвольного чётного числа $0<r<n$

$$\sum_{p=0}^{s}(-1)^p(s-p)^r\binom{n}{p}=0.$$

Поскольку при этом

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p},\qquad (s-p)^r=(s-(n-p))^r,$$

уравнение выше эквивалентно такому:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p(s-p)^r\binom{n}{p}=0.$$

Любой многочлен от p степени меньше n (например, $(s-p)^r$) может быть выражен как линейная комбинация многочленов $p^{[j]}$, $j=0,\ldots,n-1$, где $p^{[j]}=p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-j+1)$ (это выражение часто обозначается также через $(p)_j$). Тогда наше предложение следует из хорошо известного равенства

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p p^{[j]}\binom{n}{p}=0,$$

которое легко доказать, использовав производящую функцию

$$\lambda(x)=(1+x)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p.$$

Многочлен $\lambda(x)$ имеет корень $x_0=-1$ кратности n, и потому x_0 является корнем его j-й производной

$$\lambda^{(j)}(x)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}p^{[j]}x^{p-j}$$

для любого $0\leqslant j<n$. □

Взяв $k=2s-1$, из равенства $F_{s,2s-1}(2s)=0$ выводим

Следствие 6.2. *Для любого $s>2$ верно неравенство $k_{\max}(s)\geqslant 2s-1$.*

Поиск сингулярности

Раз уж мы связались с компьютерами, то давайте попробуем использовать их и дальше. Следующая идея состоит в том, чтобы вместо поиска корней $F_{s,k}$ заняться поиском собственно s-эквивалентных наборов.

Можно надеяться, что нам удастся найти такие примеры для минимальных решений из нашего списка «подозреваемых» пар: $(27, 6)$ и $(32, 10)$. Числа в других парах, которые не n-сопряжены с этими двумя, слишком велики, чтобы подобный компьютерный поиск имел какие-либо шансы на успех.

Для начала ограничим область поиска наборов. А именно, рассмотрим все $\binom{n+m-1}{m-1}$ *разбиений* числа n на m упорядоченных неотрицательных целочисленных слагаемых, т. е. нас интересуют представления числа n как суммы m неотрицательных целых чисел k_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\mathcal{P}\colon n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m, \quad k_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Каждое такое разбиение будет восприниматься нами как строка кратностей мультимножества — то есть разбиению $\mathcal{P}$ соответствует n-набор

$$A_{\mathcal{P}} = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \ldots, m^{k_m}\}. \tag{11}$$

К сожалению, в обоих случаях $(27, 6)$ и $(32, 10)$ нет никакой надежды на то, что мы сможем найти n-набор X, который, подобно примерам для $(27, 3)$ и $(486, 3)$, s-эквивалентен своему зеркальному образу $\widetilde{X}$. В самом деле, если $X \overset{s}{\sim} \widetilde{X}$, то без потери общности можно считать, что $\sigma_1(X) = 0$. Из нашего эксперимента мы уже знаем (это можно доказать простым перебором), что $F_{6,k}(27) = 0$ тогда и только тогда, когда $k = 4$, а $F_{10,k}(32) = 0$ тогда и только тогда, когда $k = 6$. Следовательно, для любого такого X, что $X^{(s)} = \widetilde{X}^{(s)}$, имеем $\sigma_k(X) = \sigma_k(\widetilde{X})$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$. Ведь единственные возможные исключения — это числа 4 и 6 (для $n = 27$ и $n = 32$ соответственно), а для них равенство $\sigma_k(X) = \sigma_k(\widetilde{X})$ выполняется просто потому, что они чётны и $\widetilde{X} = -X$.

Что же нам теперь делать и каковы трудности, стоящие на пути этого эксперимента?

Во-первых, мы не можем накопить массив всех возможных разбиений (или наборов типа (11)) и затем заняться анализом этих данных — нам просто не хватит компьютерной памяти. Например, при $n = 27$ и $m = 10$ количество всех разбиений близко к ста миллионам (точное значение 94 143 280).

Следовательно, алгоритм должен быть итеративным. Не очень сложно написать итератор, который будет генерировать следующее разбиение, отталкиваясь от предыдущего. *Подсказка:* найдите последнее ненулевое слагаемое, увеличьте предыдущее слагаемое на единицу, а все последующие слагаемые сделайте нулями, кроме самого последнего. При необходимости то же самое можно сделать для итеративного перечисления всех s-подмножеств в n-наборе.

Во-вторых, проверочная функция, которая выясняет, эквивалентны ли два данных набора A и B, должна быть написана очень аккуратно и эффективно, поскольку она будет вызываться очень много раз. Необходимо использовать в ней так называемые методы «быстрого отказа» (quick rejection). Например, сумма первых s чисел в A (можно считать, что набор упорядочен) совпадает с минимальным элементом в $A^{(s)}$; поэтому такие суммы для A и B обязаны совпадать. Чем больше подобных «быстрых отказов» использовано в коде такой функции, тем лучше. Ведь полностью вычислять и сравнивать между собой наборы $A^{(s)}$ и $B^{(s)}$ весьма накладно, и делать это надо только тогда, когда деваться уже некуда.

В-третьих, вызывать такую проверочную функцию для каждой пары построенных наборов — это, конечно же, совершенно нереально. Поэтому вместо прямого грубого перебора нужно вычислять одну или несколько простых «сигнатур» каждого набора $A_{\mathcal{P}}$. *Сигнатурой* мы называем здесь такую функцию $\mathcal{S}$ на множестве всех наборов, что $A \overset{s}{\sim} B \ \Rightarrow\ \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$. Найденные таким образом значения мы затем сравним между собой, и это должно заменить гораздо более громоздкую проверку на полное совпадение наборов типа $A_{\mathcal{P}}^{(s)}$. Этот способ позволяет выполнить требуемую проверку в два этапа. А именно — сначала для всех наборов $A_{\mathcal{P}}$ вычисляем несколько простейших сигнатур (сумма всех чисел, сумма первых s чисел и т. п.), находим дубликаты, а на втором этапе для наборов, соответствующих этим дубликатам, производим вычисление более сложных сигнатур или даже полную проверку.

Но даже и с использованием такого «трюка» трудно продвинуться дальше, чем $m = 10$, и причина всё та же — приходится хранить в памяти (и потом обрабатывать) огромные массивы данных. Один из способов продвинуться ещё дальше по этому пути — попробовать разбить наборы $A_{\mathcal{P}}$ на группы меньшего размера (например, по сумме всех чисел набора и т. п.).

Мой эксперимент не дал положительного результата — ни одного примера 6-эквивалентных 27-наборов не было найдено среди наборов типа (11) при $m < 10$. В качестве проверки я прогнал свою первую программу (прямой перебор) для пары $(12, 4)$ с $m = 17$, и менее чем через час работы она выдала мне тот же самый уникальный пример двух 4-эквивалентных 12-наборов, который был найден Исомуродовым и Кохасем. Аналогичная функция, построенная по схеме двухэтапного поиска, нашла этот же пример за четыре минуты.

Понятно, что отсутствие результатов в таком вычислительном эксперименте не влечёт никакого содержательного вывода относительно сингулярности пары $(27, 6)$. Вполне возможно, что для нахождения примера надо взять существенно большее значение m. И конечно же, всегда есть вероятность того, что такого примера попросту не существует. Этот вопрос по-прежнему остаётся открытым.

Если кого-то из читателей заинтересует этот подход к отысканию примеров сингулярности в проблеме Мозера, то я с удовольствием поделюсь кодом своих программ — наверняка, эти функции могут быть написаны в более эффективном виде, и по скорости исполнения, и по необходимому количеству памяти. И тогда кто знает — может быть, следующее значение m даст нам заветный пример эквивалентных наборов.

§ 7. Открытые вопросы и гипотезы

Вопрос 7.1. *Верно ли, что* $\mathcal{M}_5 = \{10\}$?

Вопрос 7.2. *Какие из новых «подозрительных» пар* (n, k), *найденных в* § 6, *являются сингулярными*?

Речь здесь, конечно же, идёт о парах, выделенных жирным шрифтом в таблице (см. с. 199). Не исключено, что какая-то «хитрая» компьютерная программа поможет ответить на этот вопрос хотя бы для пар $(27, 6)$ и $(32, 10)$.

Вопрос 7.3. *Верно ли, что наличие корня многочлена* $F_{s,k}$ *гарантирует наличие сингулярной пары*? *То есть верно ли, что для любых таких натуральных чисел* s, k, n, *что* $n > s$, $n \geqslant k$ *и* $F_{s,k}(n) = 0$, *обязательно существует пара различных* s-*эквивалентных* n-*наборов* A *и* B?

Результаты, накопленные по проблеме Мозера за последние шестьдесят лет, пока что подтверждают эту гипотезу; однако, судя по всему, эта задача крайне трудна. Следующий вопрос мог бы, возможно, послужить небольшим шагом к её решению.

Вопрос 7.4. *Сингулярная пара* $P = (n, s)$ *такова, что* $F_{s,k}(n) = 0$ *для* $k = 4$ *или* 5. *Верно ли, что пара* $P' = (m, s)$, *полученная из* P *путём* $\langle s, k\rangle$-*сопряжения, также сингулярна*?

Мы знаем, что n-сопряжение корней многочленов $F_{s,k}$ имеет прямой аналог в двойственности между сингулярными парами $(n, s) \longleftrightarrow (n, n - s)$. Однако вопрос об s-сопряжении совсем не так прост.

Вопрос 7.5. *Существует ли какое-то «неслучайное» объяснение хотя бы одной сингулярной пары с* $n \neq 2s$, $s > 2$?

На данный момент все немногочисленные примеры подобных сингулярных пар были найдены полуслучайным образом, путём довольно запутанных вычислений и удавшихся попыток решения систем уравнений $\sigma_k(A^{(s)}) = \sigma_k(B^{(s)})$ для тех случаев, когда получавшиеся в итоге полиномиальные уравнения имели более или менее разумный размер. Возможно, что хотя бы для одной сингулярной пары найдётся некое «менее случайное», комбинаторное или алгебраическое, объяснение этой сингулярности.

По моему мнению, следующая гипотеза является наиболее важным из открытых вопросов по проблеме Мозера — по крайней мере из тех, которые не кажутся чрезмерно сложными.

Гипотеза 7.6 ($k_{\max}$-гипотеза). *Верно ли, что* $k_{\max}(s) = 2s - 1$ *для всех* $s > 3$? *Другими словами, докажите или опровергните предположение о том, что многочлен* $F_{s,k}$ *может иметь целочисленные корни только если* $k \leqslant 2s - 1$.

Положительный ответ на этот вопрос был бы крайне полезен для любого — ручного или на компьютере — поиска корней многочленов Мозера.

Как минимум, мы могли бы сразу же доказать, что $\mathcal{M}_s = \{2s\}$ для многих малых значений s. Вот как выглядело бы доказательство этого факта для $s = 5$ (то есть решение вопроса 7.1).

«Доказательство». Если $n > 5$ и $n \neq 10$, то $F_{5,k}(n) \neq 0$ для любого $k > 0$. В самом деле, $k_{\max}$-гипотеза позволяет не проверять значения $k \geqslant 10$. Из параграфа 5 мы знаем, что то же самое верно и для $k \leqslant 5$. Осталось лишь проверить $F_{5,6}$, $F_{5,7}$, $F_{5,8}$ и $F_{5,9}$:

$$\begin{aligned}
F_{5,6}(n) &= \frac{1}{24}(n^4 - 134n^3 + 3311n^2 - 27\,754n + 75\,000),\\
F_{5,7}(n) &= \frac{1}{24}(n^4 - 262n^3 + 9527n^2 - 107\,570n + 375\,000),\\
F_{5,8}(n) &= \frac{1}{24}(n^4 - 518n^3 + 27\,791n^2 - 420\,490n + 1\,875\,000),\\
F_{5,9}(n) &= \frac{1}{24}(n^4 - 1030n^3 + 81\,815n^2 - 1\,653\,650n + 9\,375\,000).
\end{aligned}$$

Как же это сделать? Здесь нам опять будет полезен компьютер, причём с его помощью можно предложить проверяемое формальное доказательство. В качестве примера докажем, что $F_{5,6}$ не имеет целочисленных корней в промежутке $[5; \infty)$. Пара строчек кода в пакете Matlab™ или в Sage даст приблизительные значения корней этого многочлена

$$\begin{aligned}
x_1 &= 6{,}014875\ldots, & x_2 &= 7{,}745287\ldots,\\
x_3 &= 15{,}348149\ldots, & x_4 &= 104{,}891687\ldots
\end{aligned}$$

Мы не можем использовать это в качестве доказательства. Однако, глядя на эти свалившиеся с потолка числа, можно вручную вычислить значения $F_{5,6}(x)$ для $x = 6$, 7, 8, 15, 16, 104 и 105. Получаем числа 1, -25, 15, 85, -199, $-31\,065$ и 3895 и сразу видим, что внутри каждого из четырёх отрезков $[6; 7]$, $[7; 8]$, $[15; 16]$, $[104; 105]$ должен находиться корень нашего многочлена, который, конечно же, не может быть целым числом. Следовательно, эти четыре нецелых числа составляют набор всех корней многочлена четвёртой степени $F_{5,6}$.

Точно такие же рассуждения (только вычисления будут подлиннее) годятся и для многочленов $F_{5,7}$, $F_{5,8}$ и $F_{5,9}$ (впрочем, $F_{5,7}$ и $F_{5,9}$ имеют один целочисленный корень, но он равен 10).

Поскольку $F_{5,k}(n) \neq 0$, из теоремы 4.1 следует, что n-набор A можно однозначно восстановить по набору $A^{(5)}$. □

Наша последняя гипотеза «обновляет» вопрос 2.5. Назовём *магической тройкой* три различных n-набора чисел, которые попарно s-эквивалентны.

Гипотеза 7.7 (магических троек не существует). *Если $s > 2$ и $n > 2s$, то среди любых трёх различных n-наборов найдутся два, которые не s-эквивалентны друг другу.*

Данная гипотеза утверждает, что за исключением специальных случаев ($s = 2$ или $n = 2s$) *магические тройки в природе не встречаются* — другими словами, при попытке восстановить n-набор чисел по набору его s-сумм вариантов восстановления не может быть больше двух.

Список литературы

[1] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[2] *Ижболдин О. Т., Фомин Д. В.* Наборы кратных сумм // Труды Санкт-Петербургского математического общества. 1995. Т. 3. С. 244—259.

[3] *Исомуродов Ж. Э., Кохась К. П.* Набор из 12 чисел не восстанавливается однозначно по своим 4-суммам // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 448. С. 135–142.

[4] *Прасолов В. В., Голенищева-Кутузова Т. И., Канель-Белов А. Я., и др.* Московские математические олимпиады 1958–1967 г. М.: МЦНМО, 2013.

[5] *Bogomolny A.* A Property of the powers of 2. 2011. `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/CombiGem.shtml`

[6] *Boman J., Bolker E., O'Neil P.* The combinatorial Radon transform modulo the symmetric group // Adv. Appl. Math. 1991. Vol. 12. P. 400–411.

[7] *Boman J., Linusson S.* Examples of non-uniqueness for the combinatorial Radon transform modulo the symmetric group // Math. Scand. 1996. Vol. 78. P. 207–212.

[8] *Chen E. R., Lagarias J. C.* Problem E11389 // Amer. Math. Monthly. 2008. Vol. 115(8). P. 758.

[9] *Ewell J. A.* On the determination of sets by sets of sums of fixed order // Canad. J. Math. 1968. Vol. 20. P. 596–611.

[10] *Fomin D. V.* Is the multiset of n integers uniquely determined by the multiset of its s-sums? 2017. `https://arxiv.org/abs/1709.06046`

[11] *Gordon B., Fraenkel A. S., Straus E. G.*. On the determination of sets by the sets of sums of a certain order // Pacific J. Math. 1962. Vol. 12. P. 187–196.

[12] *Guy R. K.* Unsolved problems in number theory. New York: Springer, 1981.

[13] *Honsberger R.* In Pólya's footsteps. Miscellaneous problems and essays. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997. (Dolciani Mathematical Expositions; Vol.19).

[14] *Lambek J., Moser L.* Inverse and complementary sequences of natural numbers // Amer. Math. Monthly. 1954. Vol. 61. P. 454–458.

[15] *Lambek J., Moser L.* On some two way classifications of integers // Canad. Math. Bull. 1959. Vol. 2. P. 85–89.

[16] *Moser L.* Problem E1248 // Amer. Math. Monthly. 1957. Vol. 64. P. 507.

[17] *Savchev S., Andreescu T.*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2003. (Anneli Lax New Mathematical Library; Vol. 43).

[18] *Selfridge J. L., Straus E. G.* On the determination of numbers by their sums of a fixed order // Pacific J. Math. 1958. Vol. 8. P. 847–856.

Дмитрий Владимирович Фомин, Бостон (США)

fomin@hotmail.com

Нам пишут

Неравенства для средних Джини

М. А. Горелов

В статье [4] приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть среди положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть различные. Если выполнены условия $p_1 > q_1$, $p_2 > q_2$, $p_2 \geqslant p_1$, $q_2 \geqslant q_1$ и хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то справедливо неравенство*

$$\left(\frac{a_1^{p_1} + a_2^{p_1} + \ldots + a_n^{p_1}}{a_1^{q_1} + a_2^{q_1} + \ldots + a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1 - q_1}} < \left(\frac{a_1^{p_2} + a_2^{p_2} + \ldots + a_n^{p_2}}{a_1^{q_2} + a_2^{q_2} + \ldots + a_n^{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2 - q_2}}.$$

Можно предложить более простое и более концептуальное доказательство этого результата. Оно основано на следующем простом утверждении.

Лемма. *Если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, A$ положительны, B — вещественное число, то квазимногочлен*

$$f(t) = b_1 a_1^t + b_2 a_2^t + \ldots + b_n a_n^t - BA^t$$

имеет не более двух нулей. Если при этом действительно имеется два нуля t_1 и t_2 (где $t_1 < t_2$), то $f(t) < 0$ при $t_1 < t < t_2$.

Для доказательства этой леммы заметим, что ни число нулей, ни знак функции $f(t)$ в любой точке не изменятся, если эту функцию разделить на A^t. А функция

$$\frac{f(t)}{A^t} = \left(\frac{a_1}{A}\right)^t + \left(\frac{a_2}{A}\right)^t + \ldots + \left(\frac{a_n}{A}\right)^t - B$$

строго выпукла, поэтому для неё всё очевидно.

Теперь можно приступать к доказательству теоремы. Достаточно доказать два «однопараметрических» неравенства

$$\left(\frac{a_1^{p_1}+a_2^{p_1}+\ldots+a_n^{p_1}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_1-q_1}}<\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_1}}<$$
$$<\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_2}+a_2^{q_2}+\ldots+a_n^{q_2}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_2}}.$$

Для доказательства первого рассмотрим функцию

$$f(t)=\frac{a_1^{t}+a_2^{t}+\ldots+a_n^{t}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}-$$
$$-\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{-q_1}{p_2-q_1}}\left(\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_1}}\right)^{t}.$$

Она имеет нули $t{=}p_2$ и $t{=}q_1$, поэтому $f(p_1){<}0$, за исключением случая $p_1{=}p_2$.

Второе неравенство может быть доказано аналогично, с использованием функции

$$f(t)=\frac{a_1^{t}+a_2^{t}+\ldots+a_n^{t}}{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}-$$
$$-\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{-p_2}{p_2-q_1}}\left(\left(\frac{a_1^{p_2}+a_2^{p_2}+\ldots+a_n^{p_2}}{a_1^{q_1}+a_2^{q_1}+\ldots+a_n^{q_1}}\right)^{\frac{1}{p_2-q_1}}\right)^{t}.$$

У неё два нуля $t=p_2$ и $t=q_1$. Поэтому $f(q_2)<0$, за исключением случая $q_2=q_1$. Так как равенства $p_1=p_2$ и $q_1=q_2$ по условию не выполняются одновременно, теорема доказана.

Таким методом может быть доказано много других неравенств (см. [1–3]).

Список литературы

[1] *Горелов М. А.* Правило Декарта // Квант. 2005. №3. С. 40–43, 61–62.

[2] *Горелов М. А.* Простые задачи оптимизации. Правило Декарта. М.: ВЦ РАН, 2010. http://www.mccme.ru/nir/seminar/files/gor1.pdf

[3] *Горелов М. А.* Простые задачи оптимизации. Правило Декарта и мажоризация. М.: ВЦ РАН, 2011. http://www.mccme.ru/nir/seminar/files/gor2.pdf

[4] *Певный А. Б., Ситник С. М.* Средние Джини // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2015. С. 135–142.

Михаил Александрович Горелов, ВЦ ФИЦ ИУ РАН
griefer@ccas.ru

Отклик на статью В. М. Журавлёва и П. И. Самовола «От школьной задачи к элементам высшей алгебры»

А. Б. Скопенков

Возможно, читателям статьи В. М. Журавлёва и П. И. Самовола, опубликованной в выпуске 21 «Математического просвещения» (М.: МЦНМО, 2017), будет интересен близкий сюжет «От школьной задачи к элементам теории гомологий»:

теорема 1 из `https://arxiv.org/pdf/1412.8078.pdf`

и задача 2.2.6 из книги *Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г. и др.* Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016.

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ
`http://www.mccme.ru/~skopenko`

По мотивам задачника

Знаменитый предел Арнольда

Н. Н. Осипов

Эта заметка посвящена одной учебной задаче В. И. Арнольда, опубликованной в «Математическом просвещении» [2]: найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x} \tag{1}$$

(см. также, например, [3, задача 2]). Учитывая довольно высокую популярность данной задачи в широких студенческих и преподавательских массах, этот предел вполне можно было бы назвать третьим замечательным пределом [1)].

Конечно, задачу нетрудно решить с помощью разложений в ряды, что можно проделать даже вручную (и что наверняка было проделано многими студентами по просьбе их преподавателей — см., например, [6]). Можно ли это проделать за один час (в статье [4] 1986 года В. И. Арнольд пишет: «редко кто из современных математиков справляется с вычислением этого предела за час») — вопрос чисто спортивного характера, в наше время довольно бессмысленный ввиду широкого распространения систем компьютерной алгебры.

[1)] На научном форуме `http://dxdy.ru` задача о нахождении предела (1) обсуждалась несколько раз за последний десяток лет (см., например, [8]). Напомним, что первым и вторым замечательными пределами в советских, а затем и российских учебниках по математическому анализу традиционно называются соответственно пределы

$$\lim\nolimits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim\nolimits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Столь же ясно, что автор задачи рассчитывал не на такой «компьютерный» подход, а на изящное решение из «геометрических соображений» в стиле эпохи Ньютона. Каких именно соображений? У В. И. Арнольда об этом очень скупо сказано на с. 90 его книги [1]: «Если графики несовпадающих аналитических функций f и g касаются прямой $y=x$ в нуле... (рис. 1), то отношения $|AB|/|BC|$ и $|BC|/|ED|$ стремятся к единице, когда A стремится к нулю. Поэтому искомый предел отношения $|AB|/|D'E'|$ равен единице».

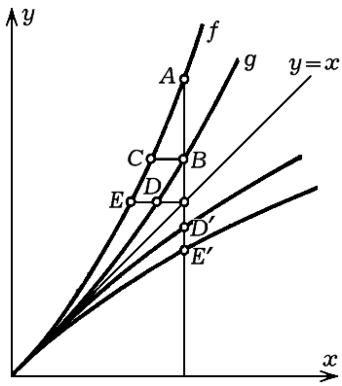


Рис. 1. Рисунок на с. 90 книги [1]

Автор этих строк был явно не первым, кому пришла в голову мысль сделать этот короткий текст более понятным для широкой публики (к которой автор причисляет прежде всего себя), т. е. снабдить приведённое выше рассуждение В. И. Арнольда необходимыми подробностями[2]. К сожалению, печатных публикаций на эту тему быстро отыскать не удалось, что, собственно, и привело к написанию настоящей заметки[3].

Итак, пусть $f(x)=x+o(x)$ и $g(x)=x+o(x)$ — две различные *аналитические* в точке $x=0$ функции. (В рассматриваемом частном случае функции $f(x)=\sin \operatorname{tg} x$ и $g(x)=\operatorname{tg}\sin x$ именно таковы.) Требуется доказать, что предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)} \tag{2}$$

равен единице.

Для доказательства запишем

$$\frac{f(x)-g(x)}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=\frac{|AB|}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|D'E'|}=\frac{f(x)-g(x)}{x-f^{-1}(g(x))}\cdot\frac{x-f^{-1}(g(x))}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=A(x)\cdot B(x).$$

[2] На XXIII Летней конференции международного математического «Турнира городов» в 2011 году был представлен сюжет «Дробные итерации функций», в рамках которого предлагалось вычислить предел (1). Авторы сюжета дают своё решение, схожее с тем, что предлагается ниже (подробности можно узнать по ссылке [9]). Интересное обсуждение задачи Арнольда, а также ещё один вариант её решения можно найти на форуме профессиональных математиков `https://mathoverflow.net` в теме [10].

[3] На самом деле как сама задача о вычислении предела (1), так и её решение в общем случае — для предела (2) с произвольными аналитическими функциями $f(x)$ и $g(x)$ — были опубликованы в сборнике «Математическое просвещение» (см. [2] и [5] соответственно). Кроме того, в [7] также приводится решение задачи о вычислении предела (2), но при довольно искусственных ограничениях на аналитические функции $f(x)$ и $g(x)$.

Нам нужно доказать, что каждая из дробей $A(x)$, $B(x)$ стремится к единице.

А. Имеем

$$A(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x-f^{-1}(g(x))}=\frac{f(x)-f(f^{-1}(g(x)))}{x-f^{-1}(g(x))}=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\to f'(0)=1,\quad x\to 0,$$

где $y=y(x)=f^{-1}(g(x))$. Тот факт, что дробь $(f(x)-f(y))/(x-y)$ стремится к $f'(0)$, можно обосновать, например, с помощью теоремы Лагранжа о конечном приращении.

Вот детали. Пусть $f(x)>g(x)$, как на рис. 1. Тогда $x>f^{-1}(g(x))=y$. Имеем

$$f(x)-f(y)=f'(\theta)(x-y),$$

где $x>\theta=\theta(x)>y$. Ясно, что $\theta\to 0$ при $x\to 0$. Но тогда и $f'(\theta)\to f'(0)$ при $x\to 0$.

Важно подчеркнуть, что в этом рассуждении функции $f(x)$ и $g(x)$ совсем не обязаны быть слишком хорошими (аналитическими, как у нас) — достаточно, например, их непрерывной дифференцируемости.

В. Пусть $h(x)=g^{-1}(x)-f^{-1}(x)=ax^k+O(x^{k+1})$, где $k>1$ и $a\neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}B(x)&=\frac{x-f^{-1}(g(x))}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=\frac{g^{-1}(g(x))-f^{-1}(g(x))}{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}=\frac{h(g(x))}{h(x)}=\\&=\frac{ag(x)^k+O(g(x)^{k+1})}{ax^k+O(x^{k+1})}=\frac{a(g(x)/x)^k+O(g(x)^{k+1}/x^k)}{a+O(x)}\to\frac{a\cdot g'(0)^k}{a}=1,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Отметим, что в задаче Арнольда $h(x)=-\frac{1}{30}x^7+O(x^9)$. Не слишком маленькое значение $k=7$ говорит о том, что «компьютерный» подход, реализованный вручную, потребует значительных волевых усилий.

Важно ли, что участвующие в задаче функции $f(x)$ и $g(x)$ являются аналитическими? Мы действительно воспользовались их аналитичностью в п. **В** — она гарантировала существование числа k. Но, как пишет сам В. И. Арнольд (см. [1, с. 23–24]), «во времена Ньютона под словом функция понимали только очень хорошие вещи. Иногда это были многочлены, иногда рациональные функции, но во всяком случае все они были аналитическими в своей области определения и разлагались в ряды Тейлора». Зачем же лишний раз об этом упоминать?

Возможно, затем, что для просто хороших (например, бесконечно дифференцируемых, но не аналитических) функций $f(x)$ и $g(x)$ предел (2) может оказаться отличным от единицы.

Наш контрпример таков. Пусть $x > 0$ и функции $f(x)$, $g(x)$ таковы, что

$$g^{-1}(x) = x - \psi(x), \quad f^{-1}(x) = x - \psi(x) - \psi(\psi(x)),$$

где функция $\psi(x) = \exp(-1/x)$. Последняя функция обладает следующим свойством: каково бы ни было натуральное n, отношение $\psi(x)/x^n$ будет бесконечно малым при $x \to 0$. В частности, $\psi(x)$ нельзя аналитически продолжить ни в какую окрестность точки $x = 0$.

По-прежнему первая дробь $A(x)$ будет стремиться к единице при $x \to 0$ (доказательство п. **A** остаётся в силе). Однако вторая дробь $B(x)$ будет уже бесконечно большой при $x \to 0$, как будет показано ниже.

В нашем случае $h(x) = \psi(\psi(x))$. Кроме того, $g(x) > x + \psi(x)$. В самом деле, это неравенство равносильно неравенству

$$x > g^{-1}(x + \psi(x)) = x + \psi(x) - \psi(x + \psi(x)),$$

которое сводится к неравенству $\psi(x+\psi(x)) > \psi(x)$, что верно, ибо функция $\psi(x)$ возрастает и положительна. Теперь имеем

$$\begin{aligned} B(x) = \frac{h(g(x))}{h(x)} > \frac{h(x+\psi(x))}{h(x)} = \\ = \exp\left(\frac{\psi(x+\psi(x)) - \psi(x)}{\psi(x)\psi(x+\psi(x))}\right) = \exp\left(\frac{\psi'(\theta)}{\psi(x+\psi(x))}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $x < \theta = \theta(x) < x + \psi(x)$. Далее оценим аргумент экспоненты:

$$\frac{\psi'(\theta)}{\psi(x+\psi(x))} = \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{\psi(\theta)}{\psi(x+\psi(x))} > \frac{1}{(x+\psi(x))^2} \cdot \frac{\psi(x)}{\psi(x+\psi(x))}.$$

Поскольку

$$\frac{\psi(x)}{\psi(x+\psi(x))} = \exp\left(-\frac{\psi(x)}{x(x+\psi(x))}\right) \to 1,$$

величина в правой части (3) будет бесконечно большой при $x \to 0$.

Можно также привести контрпример, в котором предел (2) конечен, но не равен единице. Читателю в качестве упражнения предлагается проверить, что предел (2) будет равен числу $e = \exp(1)$ в случае

$$g^{-1}(x) = x - x^2, \quad f^{-1}(x) = x - x^2 - \psi(x).$$

Таким образом, на основе только лишь рис. 1 значение предела (2) в общем случае найти нельзя — требуется дополнительная информация о поведении функций $f(x)$ и $g(x)$ в окрестности точки $x = 0$. Приходится признать, что геометрическое объяснение В. И. Арнольда без сопутствующих аналитических вычислений мало что объясняет. Примерно к такому же выводу постепенно пришли[4)] и участники обсуждения задачи о вычислении предела (2) на форуме `https://mathoverflow.net`

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: МЦНМО, 2013.

[2] *Арнольд В. И.* Задача 2 // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 272.

[3] *Арнольд В. И.* Математический тривиум // УМН. 1991. Т. 46, вып. 1(277). С. 225–232.

[4] *Арнольд В. И.* Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения // Квант. 1986. № 2. С. 13–20.

[5] *Кудык Н.* Решение задачи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 16. М.: МЦНМО, 2012. С. 235–236.

[6] *Пислярук А. В.* Предел-монстр Арнольда // Избранные доклады 60-й университетской научно-технической конференции студентов и молодых учёных. Томск: Изд-во ТГАСУ, 2015. С. 405–408.

[7] *Bényi A., Martin M.* Problem 1672 // Mathematics Magazine. 2004. Vol. 77, № 3. P. 234–235.

[8] `http://dxdy.ru/topic101522.html`

[9] `http://www.turgor.ru/lktg/2011/3/index.php`

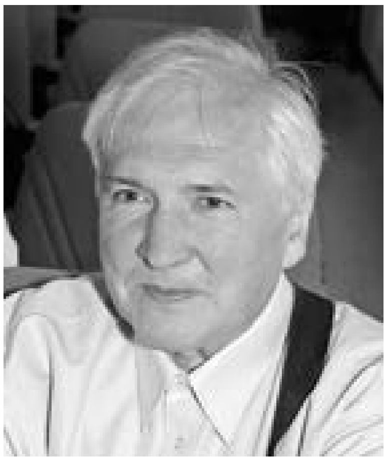
[10] `https://mathoverflow.net/questions/20696`

4) Подробности дискуссии (в ней поучаствовал и такой известный математик, как Теренс Тао) читатель может узнать по ссылке [10]. Вот реплика одного из участников: «На первый взгляд, это прекрасное геометрическое объяснение. К сожалению, я его не понимаю».

Николай Николаевич Осипов,
Сибирский федеральный университет, Красноярск
`nnosipov@rambler.ru`

Памяти Данияра Муштари (1945–2013)

А. Я. Канель-Белов



Я познакомился с Данияром Хамидовичем в конце 1990-х в Казани, на Всероссийской олимпиаде школьников. Он оставил самое светлое впечатление и самые светлые воспоминания. Он был сыном известного математика Хамида Музафаровича Муштари, принадлежал к древнему персидскому роду, уходящему корнями вглубь истории более чем на 12 веков. Местные организаторы при его появлении ничего не могли с собой поделать — создавалось впечатление, что они как бы вытягивались в струнку.

Данияр Хамидович был крупным математиком, чьи заслуги были отмечены: доктор физико-математических наук, членкор АН Республики Татарстан, заведующий отделом теории вероятностей и математической статистики НИИ математики и механики при КГУ, профессор кафедры математического анализа Казанского государственного университета, заслуженный деятель науки Республики Татарстан. Д. Муштари решил проблему описания класса банаховых пространств, для которых справедлив аналог теоремы Бохнера. При решении этой и близких к ней задач разработал топологический метод исследования вероятностных мер в банаховых пространствах. В области линейных топологических пространств им получен ряд вероятностных характеризаций класса ядерных пространств Фреше. В сотрудничестве со своим учеником А. Н. Чупруновым Д. Муштари создал теорию достаточных топологий в банаховых пространствах. По материалам этих исследований Д. Х. Муштари написал монографию «Вероятности и топологии в линейных пространствах». В области проблем некоммутативной теории меры он исследовал заряды, определённые на классе всех непрерывных линейных проекций на гильбертовом пространстве. В ряде случаев получено полное математическое описание всех таких зарядов. (Подробнее см. `http://www.antat.ru/tt/staff/6517/`)

Помимо исследовательских заслуг, Данияр Хамидович был выдающимся педагогом (под его руководством четверо математиков защитили кандидатские, один из них докторскую диссертации), деятелем школьного образования, что в наши дни, увы, встречается далеко не часто. Он проделал большую работу в области подготовки школьников к олимпиадам. Его сборник задач для школьников (на мой взгляд, замечательный) «Подготовка к математическим олимпиадам: книга для учащихся» (Казанское математическое общество, 2000) опубликован также на польском языке. Представляется необходимым его новое издание на русском языке, например в издательстве МЦНМО.

Алексей Яковлевич Канель-Белов,
МФТИ, университет Бар-Илана (Израиль)
`kanelster@gmail.com`

О правильной раскраске 16-мерной сферы

Данияр Хамидович Муштари

Не существует правильной раскраски 16-мерной [рациональной] сферы в 16 цветов[1)].

Решение. Точкам 16-мерной рациональной [единичной] сферы поставим в соответствие векторы (a_i) с целочисленными координатами или функции с целыми значениями на множестве $\{1, 2, \ldots, 16\}$. Мы считаем, что наибольший общий делитель всех a_i равен 1. Тогда точки единичной рациональной сферы получаются, если разделить все a_i на $\left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}$, при этом $\sum_i a_i^2$ — квадрат целого числа. Положим[2)] $e_i = I_{\{i\}}$. Раскраска сферы называется *правильной*, если два любых ортогональных вектора имеют разный цвет. Пусть можно правильно раскрасить сферу в 16 цветов. Поскольку все e_i попарно ортогональны, они все покрашены в разные цвета. Будем считать, что вектор e_i имеет цвет i. Цвет произвольного вектора a обозначим через $c(a)$.

Лемма 1. *Рассмотрим элемент* $a = (1, 1, \ldots, 1)$. *Пусть* $|B| = 4$, *и пусть* $c(a) \in B$. *Положим* $b = I_B$. *Тогда* $c(b) = c(a)$.

Доказательство. Рассмотрим четыре ортогональных вектора $b^{(1)} = b, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)}$, где все координаты векторов $b^{(i)}$ с номерами из B равны ± 1. Пусть $B = \{1, 2, 3, 4\}$, тогда можно положить

$$b^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots), \quad b^{(2)} = (1, 1, -1, -1, 0, \ldots),$$
$$b^{(3)} = (1, -1, 1, -1, 0, \ldots), \quad b^{(4)} = (1, -1, -1, 1, 0, \ldots).$$

Перевод неопубликованной заметки Данияра Хамидовича Муштари (1945–2013), написанной на английском языке и предоставленной А. Я. Канель-Беловым. Название дано при публикации. Заметка содержит решение задачи, которая родственна задаче 11.9 из «Математического просвещения». Перевод и примечания Б. Р. Френкина.

1) Определение правильной раскраски см. ниже.

2) Здесь и далее I_M обозначает вектор, координаты которого с номерами из множества M равны 1, а остальные координаты равны 0.

Очевидно, B совпадает[3] с множеством $\{c(b^{(1)}), c(b^{(2)}, c(b^{(3)}), c(b^{(4)})\}$. Но $b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)}$ ортогональны вектору a, поэтому $c(b^{(2)}), c(b^{(3)}), c(b^{(4)}) \neq c(a)$. Значит, $c(b^{(1)}) = c(a)$. $\square$

Лемма 2. *Более общо: если* $a = \{\pm1, \ldots, \pm1\}$, $|B| = 4$, $c(a) \in B$, $b = aI_B$[4], *то* $c(b) = c(a)$.

Лемма 3. *Пусть* $a = (a_i)$ *и* $b = (b_i)$ *таковы, что:*

i) $a_i = \pm1$ *для всех* i;

ii) $b_i = \pm1$ *для всех* i;

iii) $|\{i\colon a_i = b_i\}| \geqslant 4$, $|\{i\colon a_i \neq b_i\}| \geqslant 4$.

Тогда если $a_{c(a)}b_{c(a)} = a_{c(b)}b_{c(b)}$, *то* $c(a) = c(b)$.

Доказательство. Пусть для определённости $c(a), c(b) \in \{i\colon a_i = b_i\}$. Выберем такое $B \subset \{i\colon a_i = b_i\}$, что $|B| = 4$, $c(a), c(b) \in B$. Тогда $aI_B = bI_B$, откуда $c(a) = c(aI_B) = c(bI_B) = c(b)$. $\square$

Отсюда вытекает

Лемма 4. *Пусть a и b, удовлетворяющие условиям* i) *и* ii), *взаимно ортогональны. Тогда их координаты с одним из номеров* $\{c(a), c(b)\}$ *имеют одинаковый знак, а с другим — противоположный.*

Теперь легко определить цвета следующей ортогональной системы $r^{(0)}$, $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, $r^{(1)}r^{(2)}$:

0) $r^{(0)}(i) = 1$ при всех i;

1) $r^{(1)}(i) = 1$ при $i \in [1, 8]$, $r^{(1)}i = -1$ при $i \in [9, 16]$;

2) $r^{(2)}(i) = 1$ для $i \in [1, 4] \cup [9, 12]$, $r^{(2)}(i) = -1$ для $i \in [5, 8] \cup [13, 16]$.

Пусть для определённости $c(r^{(0)}) \in [1, 4]$ и $c(r^{(1)}) \in [9, 12]$[5]. В этом случае $c(r^{(2)}) \in [13, 16]$ и $c(r^{1)}r^{(2)}) \in [5, 8]$. Но тогда мы не сможем раскрасить вектор b, для которого $b(i) = 1$ при $i \in [1, 4]$ и $b(i) = -1$ при $i \in [5, 16]$.

Если $c(b) \in [1, 4]$, то $c(b)$ по лемме 3 должен быть равен одновременно $c(r^{(0)}), c(r^{(1)}), c(r^{(2)}), c(r^{(1)})c(r^{(2)})$, что невозможно.

Если $c(b) \in [5, 8]$, то $c(b)$ и $c(r^{(2)})$ принадлежат множеству [номеров координат, для которых] $\{b = r^{(2)}\}$, откуда $c(b) = c(r^{(2)}) \in [13, 16]$.

Если $c(b) \in [9, 12]$, то $c(b)$ и $c(r^{(1)}r^{(2)})$ принадлежат множеству $\{b = r^{(1)}r^{(2)}\}$, откуда $c(b) = c(r^{(1)}r^{(2)}) \in [5, 8]$.

Если $c(b) \in [13, 16]$, то $c(b)$ и $c(r^{(1)})$ принадлежат множеству $\{b = r^{(1)}\}$, откуда $c(b) = c(r^{(1)}) \in [9, 12]$.

---

[3] Векторы e_j, $j \notin B$, ортогональны векторам b_i, поэтому b_i не могут иметь цвета, не принадлежащие B.

[4] Здесь и далее: если $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, то $xy = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots)$.

[5] Используется лемма 4.

Минимизация числа пересадок и ствол дерева

Б. Р. Френкин

В «Математическом просвещении» № 21 (с. 272) опубликована следующая задача 3:

Сеть железных дорог представляет собой дерево (неориентированный конечный связный граф без циклов). По сети проходят маршруты электричек, посредством которых можно проехать от любой станции до любой (возможно, с пересадками). Электричка может повернуть назад лишь на конечных станциях маршрута. Количество тупиков (висячих вершин, т. е. вершин степени 1) в данной сети равно n.

а) Каково наименьшее возможное количество маршрутов, если от любой станции до любой можно проехать, возможно с пересадками?

(*Фольклор*)

б) Каково наименьшее возможное количество маршрутов, если от любой станции до любой можно проехать не более чем с одной пересадкой?

(*Б. Р. Френкин*)

Ниже рассмотрена эта задача и связанные с ней результаты.

§ 1. Пересадки и тупики

Вначале обсудим пункт (а). Ясно, что в каждом тупике должен быть конец какого-то маршрута. А так как у маршрута два конца, то при чётном n получается не меньше $n/2$ маршрутов, а при нечётном — не меньше $(n+1)/2$. Эта величина равна $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$, т. е. наибольшему целому числу, не превосходящему $(n+1)/2$. *Дальше мы для краткости обозначаем её через m.* Но всегда ли хватит такого количества маршрутов?

Ответ хорошо известен, и он положителен (см. ниже раздел «Решения»). Однако при этом может потребоваться много пересадок. Хотелось бы от них избавиться.

Чтобы в случае n тупиков можно было проехать между любыми двумя станциями без пересадки, потребуется, очевидно, $n(n-1)/2$ маршрутов.

Например, уже при 10 тупиках нужно 45 маршрутов, что многовато. Поэтому мы допустим одну пересадку, т. е. перейдём к пункту (б).

Ясно, что ответ пункта (б) «зажат» между m и $n(n-1)/2$. Однако он оказывается довольно неожиданным: достаточно m маршрутов — как в пункте (а)! Таким образом, если разрешить более одной пересадки, то выигрыша в количестве маршрутов не будет.

§ 2. Некоторые понятия и термины

Приведём пояснения для читателей, незнакомых с терминологией теории графов. Можно представлять граф как совокупность точек (*вершин*) и отрезков (*рёбер*), соединяющих некоторые вершины. Нам потребуются только *конечные* графы (с конечным количеством вершин и рёбер), причём *неориентированные* (на рёбрах не указано направление). И мы рассматриваем только *деревья*, т. е. графы, в которых между любыми двумя вершинами есть ровно один путь.

Количество рёбер, выходящих из данной вершины, называется *степенью* этой вершины. *Висячая вершина* графа — это вершина степени 1. Нетрудно убедиться, что *если в дереве больше одной вершины, то в нём не меньше двух висячих вершин*. Если висячих вершин ровно две, то дерево является *цепью*, т. е. в нём нет развилок. В этой заметке мы говорим о графах на языке дорог и станций, термин «висячие вершины» здесь неестествен, поэтому будем, как и выше, называть их *тупиками*.

Тупики — это «окраины» дерева. А что является его «серёдкой»? Нам этот вопрос интересен, поскольку пересадки целесообразно устроить где-то «посредине». Это понятие можно определить по-разному. Например: «*центр дерева*» состоит из таких вершин, для которых максимум расстояний до других вершин минимален. (Расстоянием до вершины считается количество рёбер в пути к этой вершине; если же каждому ребру приписана некоторая длина, расстоянием считается сумма длин рёбер в этом пути.) Нетрудно проверить, что центр всегда состоит из одной или двух соседних вершин.

Однако в нашей задаче существенны не все вершины дерева, а только тупики и развилки. Задача «не замечает» вершины степени 2. В то же время эти вершины влияют на положение центра! Видимо, потребуется другое понятие.

§ 3. «Удобные» вершины и ствол

Из каждой вершины дерева в каждый тупик идёт ровно один путь, и он начинается с некоторого ребра, смежного с этой вершиной. Будем для краткости говорить, что это ребро *ведёт* в данный тупик, а он с данной вершиной *соединён через это ребро*. Например, если сама вершина — тупик, то единственное выходящее из неё ребро ведёт во все остальные тупики.

Нас интересует, наоборот, «серёдка» дерева. Поэтому будем называть вершину *удобной*, если каждое смежное с ней ребро ведёт не более чем в m тупиков (напомним, что m — наибольшее целое, не превосходящее $(n+1)/2$). Остальные вершины назовём *неудобными*.

Упражнение 1. В любом ли конечном дереве существуют удобные вершины?

Упражнение 2. Докажите, что при $n > 3$ множество удобных вершин либо состоит из одной вершины, либо является цепью, у которой степени концов не меньше 3. Остальные её вершины (если они есть) имеют степень 2, с тем исключением, что при нечётном $n > 3$ одна вершина может иметь степень 3, и тогда к ней примыкает ещё одна цепь (уже без развилок). При $n \leqslant 3$ все вершины дерева — удобные.

Совокупность всех удобных вершин и соединяющих их рёбер, с учётом такого её строения, назовём *стволом*. В задаче 21.3(б) оказывается важен именно ствол.

§ 4. Оптимальные сети

Совокупность маршрутов будем называть *оптимальной сетью*, если между любыми станциями можно проехать, сделав не более одной пересадки, причём количество маршрутов минимально возможное. Как отмечено в конце § 1, это количество равно m. При чётном n это означает, что маршруты оптимальной сети попарно соединяют тупики. Если n нечётно, то $m-1$ маршрутов попарно соединяют $n-1$ тупиков, а оставшийся маршрут выходит из n-го тупика и может дойти до какого-либо другого тупика (который тогда принадлежит двум маршрутам), а может и не дойти.

Упражнение 3. (а) Докажите, что для любой оптимальной сети найдётся вершина ствола, через которую проходят все её маршруты.

(б) Назовём маршрут *полным*, если он содержит все вершины ствола, и *неполным* в противном случае. Каковы возможные количества неполных маршрутов в оптимальной сети: а) при чётных n, б) при нечётных n?

В заключение рассмотрим задачу, в некотором смысле противоположную. Сосредоточение пересадок на стволе имеет и положительную сторону (упрощается организация проезда), и отрицательную (возникает «узкое место»). Попробуем рассредоточить пересадки.

Упражнение 4. (а) Приведите пример дерева и оптимальной сети маршрутов на нём, где все пересадки можно осуществить вне ствола.

(б) Докажите, что в любом примере для п. (а) ствол состоит из единственной вершины степени 3.

Решения

Задача 21.3(а). *Ответ:* $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, т. е. $n/2$ *при чётном* n *и* $(n+1)/2$ *при нечётном.*

Вначале разобьём тупики на пары произвольным образом и соединим маршрутом тупики одной пары. При нечётном n один тупик останется без пары — соединим его с одним из остальных тупиков. Количество маршрутов будет как в ответе, но они не обязательно охватывают всё дерево.

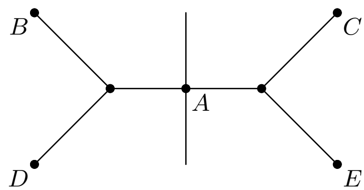


Рис. 1. К задаче 21.3(а)

Пусть через некоторую станцию A не проходит никакой маршрут. Она не является тупиком (все тупики охвачены). Проведём из A пути по двум разным рёбрам и продолжим эти пути до каких-то тупиков B и C (рис. 1). Эти тупики соединены маршрутами с какими-то тупиками D и E соответственно. Отменим маршруты BD и CE и введём маршруты BC и DE. Новая сеть маршрутов охватывает всё, что охватывали прежние маршруты, и при этом содержит станцию A. Если остались станции вне сети маршрутов, повторяем сделанный шаг, и т. д. Рано или поздно все станции будут охвачены, при этом количество маршрутов не изменится. □

Задача 21.3(б). *Ответ:* m, т. е. $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ — как в пункте (а). Причём *все пересадки можно устроить на одной станции, и для этого подходят все удобные станции* (определение см. в § 3) *и только они.*

Пусть A — некоторая удобная станция. Проведём пути из A во все тупики и назовём эти пути *лучами*. Занумеруем их. При этом лучи, выходящие из A по одному и тому же ребру, будем нумеровать подряд.

Вначале пусть n чётно. Если номера двух лучей отличаются на $n/2$, то лучи выходят из A по разным рёбрам. Действительно, если они проходят по одному ребру, то по тому же ребру проходят все лучи с промежуточными номерами. Но тогда по этому ребру проходит более $n/2$ лучей, что невозможно, поскольку A — удобная станция. Значит, любые два луча с разницей номеров $n/2$ можно объединить в маршрут. Всего таких маршрутов получится $n/2$, они проходят через A и образуют оптимальную сеть (определение см. в § 4).

Пусть теперь n нечётно. Если по какому-то ребру из A выходит ровно $(n+1)/2$ лучей (такое ребро может быть только одно), то один из этих лучей временно «забудем». Если по любому ребру выходит меньше лучей, то «забудем» произвольно выбранный луч. Останется чётное количество лучей, причём по любому ребру из A выходит не больше $(n-1)/2$ лучей. Поэтому их можно объединить в маршруты попарно, как выше. Объявим «забытый» луч отдельным маршрутом (можно произвольно продолжить его за вершину A). Мы получили оптимальную сеть, и все её маршруты проходят через A.

Если же некоторая станция B — неудобная, то устроить там «всеобщую пересадку» в оптимальной сети маршрутов невозможно. В самом деле, некоторое ребро e, смежное с B, ведёт более чем в m тупиков. Но оптимальная сеть состоит из m маршрутов, и если все они проходят через B, то какие-то два луча, содержащие e, принадлежат одному и тому же маршруту, что невозможно.

Осталось недоказанным только одно: существование удобной станции. Это тема упражнения 1. □

Упражнение 1. *Ответ: да.* Решение. Выберем некоторый тупик. Из него выходит единственное ребро. Если из его конца какое-то ребро ведёт больше чем в m тупиков, пойдём по нему. В следующей вершине поступим так же, и т. д. Мы ни в какой момент не повернём назад. Действительно, в момент поворота по каждую сторону от пройденного ребра находилось бы больше половины всех тупиков, что невозможно.

Поскольку мы не можем повернуть назад, продолжать путь до бесконечности или замкнуть его, то рано или поздно остановимся. Но это означает, что мы пришли в удобную вершину. □

Упражнение 2. Случай $n \leqslant 3$ очевиден. Пусть $n > 3$ и в стволе (множестве удобных вершин) нашлись две различные вершины A и B. Пройдём по единственному пути из A в B. Пусть нам встретилась неудобная вершина C. Какое-то выходящее из неё ребро e ведёт в более чем m тупиков. Предположим, что мы пришли в C по этому ребру (рис. 2а). Тогда следующее ребро пути, если пройти по нему в обратном направлении, тоже ведёт более чем в m тупиков. Поэтому следующая вершина тоже окажется неудобной, и т. д. вплоть до вершины B. Но тогда B не принадлежит стволу — противоречие. Если же мы пришли в C по некоторому ребру f, отличному от e (рис. 2б),

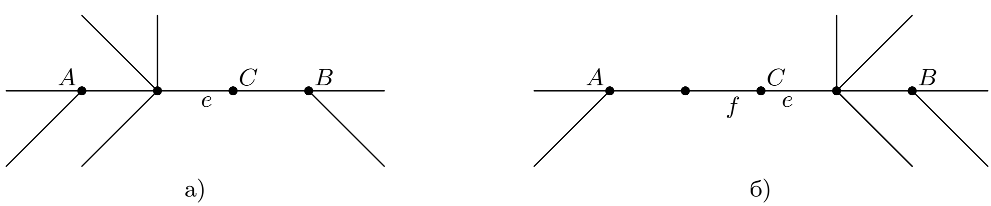


Рис. 2. К упражнению 2

то f тоже ведёт более чем в m тупиков, поэтому предыдущая вершина пути — неудобная, и т. д. вплоть до вершины A — снова противоречие.

Мы доказали, что совокупность удобных вершин и соединяющих их рёбер связна и, значит, является деревом, которое мы обозначим T. Пусть T содержит более одной вершины, и пусть C и D — два его тупика. Если, скажем, C является тупиком в исходном дереве, то единственное выходящее из него ребро ведёт в $n-1$ тупиков. Но оно не может вести в более чем $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ тупиков, поэтому $n \leqslant 3$. Значит, при $n > 3$ вершина C не является тупиком в исходном дереве. Если её степень равна 2, то обе соседние с ней вершины — удобные, что невозможно. Следовательно, в вершине C имеется развилка. То же верно и для D (рис. 3).

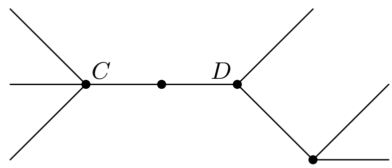


Рис. 3. *К упражнению 2*

Пройдём по пути, соединяющему C с D. Пусть n чётно. Первое ребро пути ведёт не более чем в $n/2$ тупиков, и каждое последующее ребро ведёт в не большее количество тупиков, чем предыдущее. Если последнее ребро пути ведёт менее чем в $n/2$ тупиков, то в обратную сторону оно ведёт более чем в $n/2$ тупиков, что невозможно, так как D — удобная вершина. Значит, каждое ребро пути из C в D ведёт ровно в $n/2$ тупиков, поэтому в промежуточных вершинах нет развилок. Как следствие, ствол является цепью. С каждой стороны от него расположено по $n/2$ тупиков.

Пусть теперь n нечётно. Аналогично получаем, что первое ребро пути ведёт не более чем в $(n+1)/2$ тупиков, а последнее — не менее чем в $n-(n+1)/2=(n-1)/2$ тупиков. Эти величины отличаются на 1, поэтому возможна лишь одна промежуточная развилка F, где от пути из C в D отходит *отросток* — путь, ведущий в единственный тупик (и значит, не имеющий развилок). Любая вершина отростка, кроме F, не принадлежит стволу, поскольку ребро, выходящее из неё в сторону F, ведёт в $n-1>m$ тупиков (рис. 4). Разумеется, отростка может и не быть (рис. 5). В обоих случаях ствол является цепью, с одной стороны от которой расположено $(n-1)/2$

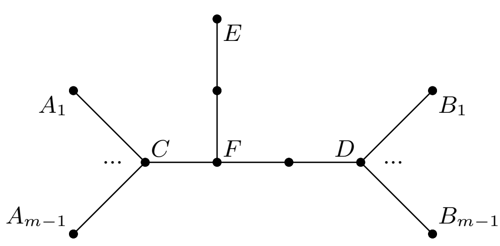


Рис. 4. *К упражнениям 2, 3(б)*

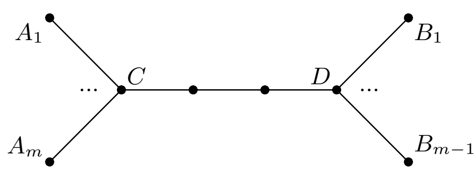


Рис. 5. *К упражнениям 2, 3(б)*

тупиков, а с другой — $(n-1)/2$ при наличии отростка или $(n+1)/2$ при его отсутствии. □

Упражнение 3. (а) Доказываемое утверждение означает, что любая оптимальная сеть строится по некоторой вершине ствола, как в решении задачи 21.3(б). Достаточно показать, что через некоторую вершину дерева проходят все маршруты сети, поскольку такая вершина заведомо принадлежит стволу. Но здесь можно воспользоваться известным фактом: *если по дереву проходит несколько путей и любые два пересекаются, то найдётся вершина, общая для всех путей* (докажите!).

Можно и не использовать этот общий факт. Пусть S — вершина ствола, не принадлежащая некоторому маршруту μ из данной оптимальной сети (рис. 6). Тогда существует (единственный) путь, соединяющий S с μ. Пусть он начинается с ребра e и заканчивается в вершине T. Рёбра, выходящие из S и отличные от e, ведут суммарно не менее чем в $m-1$ тупиков. Маршруты, выходящие из этих тупиков, должны пересекаться с μ согласно § 4. Поэтому все они различны и проходят через T. Так как их количество не меньше $m-1$ (на самом деле и не больше), то вместе с μ они составляют всю сеть. Таким образом, все маршруты сети проходят через T.

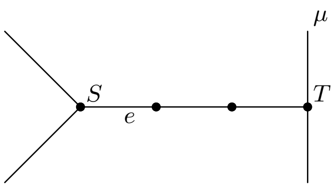


Рис. 6. К упражнению 3(а)

(б) *Ответ:* 0 *при чётном* n; 1 *или* 2 *при нечётном* n *и наличии отростка* (см. решение упр. 2); 0 *или* 1 *при нечётном* n *и отсутствии отростка*. Пусть ствол содержит более одной вершины. Если n чётно, то согласно решению упр. 2 с каждой стороны от ствола расположено $n/2$ тупиков, а согласно § 4 оптимальная сеть попарно соединяет тупики. Если соединены два тупика с одной стороны от ствола, то соединены и два тупика с другой стороны. Но соответствующие маршруты не пересекаются, а это невозможно согласно § 4. Значит, каждый маршрут оптимальной сети соединяет тупики с разных сторон от ствола и потому полон (содержит весь ствол).

Пусть теперь n нечётно и имеется отросток (рис. 4). Пусть тупики $A_1, \ldots, A_{m-1}$ расположены со стороны вершины C, а тупики $B_1, \ldots, B_{m-1}$ — со стороны вершины D. Маршруты A_1E, B_1E, A_2B_2, …, $A_{m-1}B_{m-1}$ образуют оптимальную сеть, причём два маршрута A_1E и B_1E неполны, а остальные полны. Количество неполных маршрутов здесь можно уменьшить до 1: заменим, например, маршрут A_1E на A_1B_1. До нуля это количество уменьшить не удастся: маршрут, содержащий E, не может содержать весь ствол.

Покажем, что больше двух неполных маршрутов здесь быть не может. Рассмотрим какую-нибудь оптимальную сеть на данном дереве. Проходящий по отростку маршрут μ начинается (в обозначениях рис. 4) в E и либо заканчивается в F, либо идёт от F в направлении одного из концов ствола, например C. Так как маршрут μ пересекается с остальными, то из тупиков $B_1, \ldots, B_{m-1}$, расположенных за вершиной D, исходят $m-1$ маршрутов сети, содержащих F. Вместе с μ они составляют всю сеть. Тогда до $m-1$ тупиков $A_1, \ldots, A_{m-1}$, расположенных за вершиной C, доходит не менее $m-1$ маршрутов. Если туда доходят все маршруты или не доходит только μ, то только μ неполон. Если же туда не доходит какой-то другой маршрут, то он может быть полным или неполным, маршрут μ заведомо неполон, а остальные полны. Таким образом, количество неполных маршрутов равно 1 или 2.

Предположим теперь, что отросток отсутствует (рис. 5). Тогда с одной стороны от ствола находится m тупиков, а с другой $m-1$. Ясно, что возможна оптимальная сеть из полных маршрутов. Пусть в оптимальной сети некоторый маршрут ν неполон. Если он соединяет два тупика, то они расположены с одной стороны от ствола. Все маршруты, исходящие из тупиков с другой стороны ствола, пересекаются с ν и поэтому содержат весь ствол. Вместе с ν они составляют всю сеть. Если же каждый неполный маршрут содержит лишь один тупик, то, как мы видели в § 4, такой маршрут единствен. Таким образом, если n нечётно и отростка нет, то либо неполный маршрут один, либо таких нет совсем. □

Упражнение 4. (а) Пусть ствол состоит из одной вершины S степени 3 (отметим, что в этом случае тупиков больше трёх, так как иначе ствол совпадал бы со всем деревом, см. упр. 2). Согласно упражнению 3, в оптимальной сети все маршруты проходят через S. Пусть каждый из них соединяет два тупика (это заведомо верно при чётном n, см. начало § 4). Тогда любые два маршрута имеют общее ребро, смежное с S, и пересадку между ними можно устроить на другом конце этого ребра.

(б) Пусть все пересадки в оптимальной сети можно устроить вне ствола. Тогда $n > 3$ (иначе ствол совпадал бы со всем деревом). Вначале предположим, что ствол состоит из одной вершины S степени выше трёх (рис. 7). Согласно упр. 3(а) все маршруты сети проходят через S. Если один из них кончается в S (что возможно при нечётном n, см. § 4), то продолжим его произвольным образом. Ясно, что сеть останется оптимальной и пересадки будут возможны вне ствола.

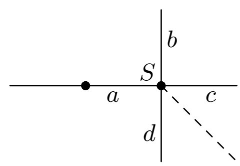


Рис. 7.
К упражнению 4(б)

Пусть некоторый маршрут № 1 проходит через рёбра a и b, смежные с S. К S примыкают ещё два ребра c и d (и, возможно, ещё какие-то рёбра). По ребру c проходит некоторый маршрут № 2. Пересадка с него на маршрут № 1 вне ствола возможна, если маршрут № 2 проходит через одно из рёбер a, b — например, через a.

Предположим, что некоторый маршрут № 3 не содержит ребро a. Так как с него можно пересесть вне ствола на маршруты № 1 и № 2, он содержит рёбра b и c. По ребру d проходит некоторый маршрут № 4. С него можно пересесть вне ствола на маршрут № 1 (аналогично на маршрут № 2), поэтому маршрут № 4 содержит ребро a или b (аналогично получаем a или c). Это означает, что маршрут № 4 содержит ребро a. Но если он проходит через a и d, то с него нельзя пересесть вне ствола на маршрут № 3 — противоречие.

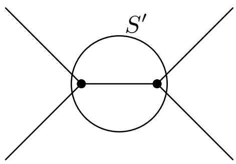


Рис. 8. К упражнению 4(б)

Таким образом, все маршруты проходят через ребро a. Но тогда его конец, отличный от S, принадлежит стволу — противоречие.

Пусть теперь ствол содержит более одной вершины. Заменим его одной вершиной S' (рис. 8) и преобразуем маршруты естественным образом. Стволом нового дерева является S', оптимальная сеть остаётся оптимальной, и по-прежнему все пересадки можно сделать вне ствола. По доказанному, вершина S' должна иметь степень 3. Но на каждом конце прежнего ствола была развилка, поэтому S' имеет степень не ниже 4 — противоречие. □

Борис Рафаилович Френкин, МЦНМО

frenkin@mccme.ru

Интересная сумма Гольдбаха

А. В. Крупецков

В этой заметке мы представляем короткое доказательство следующей формулы Гольдбаха, см. [1], а также [2, Formula].

Теорема. *Пусть* $A := \{x^m : x, m \geqslant 2$ *— натуральные числа*$\}$. *Тогда*

$$\sum_{a\in A} \frac{1}{a-1} = 1.$$

Следующая лемма очевидна.

Лемма. *Для любого* $a \in A$ *существует такая единственная пара чисел* $b, k \in \mathbb{N}$, *что* $b \notin A$, $b, k \geqslant 2$ *и* $b^k = a$.

Эта лемма имеется в [3, Comments].

Доказательство теоремы.

$$\sum_{a\in A} \frac{1}{a-1} \overset{(1)}{=} \sum_{b,k\geqslant 2,\, b\notin A} \frac{1}{b^k-1} \overset{(2)}{=} \sum_{k\geqslant 2} \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^k} \overset{(3)}{=} \sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Здесь

- (1) следует из леммы.
- (2) верно, потому что для каждого $b, k \geqslant 2$, $b \notin A$

$$\frac{1}{b^k-1} = \sum_{r\geqslant 1} \frac{1}{b^{rk}} = \frac{1}{b^k} + \sum_{r\geqslant 2} \frac{1}{b^{rk}}.$$

И по лемме при $k = r$ для каждого k

$$\sum_{b\geqslant 2,\, b\notin A} \left(\frac{1}{b^k} + \sum_{r\geqslant 2} \frac{1}{b^{rk}}\right) = \sum_{b\geqslant 2,\, b\notin A} \frac{1}{b^k} + \sum_{a\in A} \frac{1}{a^k} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^k}.$$

- (3) верно, потому что для каждого n

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{n^k} = \left(\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{n^k}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}. \qquad \square$$

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить А. Храброва за подсказку поиска последовательности в [2], А. Скопенкова за помощь в оформлении заметки, а также моего учителя математики Д. Трущина.

Список литературы

[1] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. Задача 9.7. М.: МЦНМО, 2005. С. 224.

[2] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `https://oeis.org/A001597`

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, `https://oeis.org/A007916`

Александр Всеволодович Крупецков, школа № 444 г. Москвы

vfn67@yandex.ru

Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Пусть функция $g(x)$ такова, что при всех $x \geqslant 1$ выполняется равенство $g(x)^{g(x)} = x$. Найдите такую элементарную функцию $h(x)$, что $\lim_{x\to\infty}(g(x) - h(x)) = 0$. *(А. Я. Канель-Белов)*

2. а) Людям житья не стало от вампиров. Чтобы спасти поголовье людей, добрый волшебник наложил заклятие: 1) каждую ночь может выходить на охоту только один вампир; 2) если вампир ест человека, то следующим днём он превращается в человека и следующей ночью может быть съеден другим вампиром.

   Вампир готов стать человеком, но риск быть съеденным другим вампиром ему неприемлем, при этом всем известно, что вампиры бесконечно умные и доверяют интеллектуальным качествам своих товарищей. Изначально имеется n вампиров. При каких n вампир выйдет на охоту?

   б) Пусть вампиры умеют организовываться в банды по $n_1, \ldots, n_k$ вампиров. Если банда решает ночью выйти на охоту, то каждый ест по своему человечку и утром они становятся людьми. Число n называется *экологически равновесным* или просто *экологичным*, если никто из вампиров не собирается выйти на охоту.

Рассмотрим игру: имеется n фантиков, разрешается брать по $n_1, \ldots, n_k$ фантиков. Тот, кто не может сделать ход, — проигрывает. Докажите, что множество экологичных чисел в задаче про вампиров совпадает с множеством чисел в задаче о фантиках, проигрышных для начинающих.

(*А. Я. Канель-Белов*)

3. а) Для какого максимального N можно расположить N точек на плоскости, соединить их попарно отрезками и раскрасить отрезки в синий и красный цвет так, чтобы отрезки одного цвета не имели внутренних точек пересечения, а каждый отрезок имел не более одной точки пересечения с отрезком другого цвета?

   б) Вопрос для исследования. Оцените N для k разрешённых точек пересечения с отрезком другого цвета. (*Л. Радзивиловский*)

4. Дана кососимметрическая матрица A. Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны.

   (*И. В. Митрофанов*)

5. а) Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий биекцию между точками с неотрицательными целыми координатами и целыми неотрицательными числами? (*Фольклор*)

   б) Задача на исследование. Какова его возможная степень?

   (*И. Г. Царьков*)

   в) Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства.

   (*А. Я. Канель-Белов*)

6. Неправильный октаэдр — это многогранник, в котором шесть вершин и в каждой вершине сходятся 4 треугольные грани. Таким образом, для каждой вершины есть ровно одна вершина, не соединённая с ней ребром. Отрезок, соединяющий вершины, не связанные ребром, назовём диагональю. Дан неправильный выпуклый октаэдр. Докажите, что если существует эллипсоид, касающийся всех рёбер, то диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что если диагонали пересекаются в одной точке, то существует поверхность второго порядка, касающаяся всех рёбер или их продолжений. (*Л. Радзивиловский*)

7. а) Дан равносторонний треугольник и квадрат на плоскости. Доказать, что расстояние между хотя бы одной парой вершин (одна — квадрата, вторая — треугольника) иррационально. (*Фольклор*)

   б) Дан квадрат с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1)$. Существует ли на оси OX точка, расстояния от которой до всех его вершин рациональны? (*Н. С. Келлин*)

8. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные, одинаково ориентированные равнобедренные треугольники ABC', BCA', CAB'. Докажите, что существует коника, касающаяся прямых AB', $B'C$, CA', $A'B$, BC', $C'A$, и найдите геометрическое место центров таких коник. (*А. А. Заславский*)

9. а) Дана решётка R из единичных кубов с целочисленными вершинами. В сечении плоскостью $2016x + 2017y + 2018z = 0$ образуется паркет из многоугольников. Сколько из них различных (с точностью до центральных симметрий и параллельных переносов)?

   б) Что получается в сечении R плоскостью $x + y + z = 0$? В сечении четырёхмерной решётки плоскостью $x + y + z + t = 0$? (*А. Я. Белов*)

10. Пусть $K(n)$ — наибольшее число слагаемых в разложении натурального числа n в сумму таких натуральных чисел, что каждое следующее делится на предыдущее и строго его больше. Докажите, что $K(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. (*Фольклор*)

11. В точках целочисленной прямой случайным и независимым образом расставлены стрелки (направления равновероятны). Рассматривается случайное блуждание, при котором вероятность идти по стрелке 51 %, а против стрелки 49 %. Докажите, что для некоторой константы C расстояние от начальной точки после n шагов не превосходит $C(\ln n)^2$ с вероятностью 0,99. (*Фольклор*)

12. а) Любую ли фигуру из зеркального стекла можно осветить изнутри одной лампочкой?

    б) Любой ли многоугольник из зеркального стекла можно осветить изнутри одной лампочкой? (*Фольклор*)

Дополнение к задачнику

Хорошая задача обычно существует не сама по себе. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

В предыдущем выпуске обсуждалась знаменитая задача о прожекторах. В процессе развития этой темы возникла задача В. В. Произволова о многоугольнике, а также задача о прожекторах на неевклидовой плоскости. Этой теме было посвящено несколько статей в нашем сборнике, а также дополнение к задачнику, опубликованное в предыдущем выпуске.

Сейчас мы публикуем дополнения к другим задачам.

В первом выпуске третьей серии «Математического просвещения» опубликована

Задача 1.2. Доказать, что существует бесконечно много N таких, что 2^N оканчивается на N.

Её развитием служит

Задача 1.2$'$. Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на 36. Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что 2^{N_k} оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична. (*А. Я. Канель-Белов*)

Во втором выпуске опубликована

Задача 2.4. Можно ли числа от 1 до 2^{1000} раскрасить в два цвета так, чтобы не существовало арифметических прогрессий длины 2000, составленных из чисел одного цвета?

Её решение (выпуск 4) основывалось на вероятностном методе. В этой связи возникает

Задача 2.4$'$. Привести явные конструкции в задаче 2.4. (*А. Я. Канель-Белов*)

Дальнейшем развитием этого сюжета является

Задача 2.4$''$. Можно ли раскрасить более половины (вариант — более 99 %) вершин какого-нибудь правильного n-угольника так, что объединение любых десяти поворотов раскраски не закроет весь n-угольник? Постарайтесь получить по возможности лучшие оценки на n, а также явные конструкции.

В третьем выпуске была опубликована

Задача 3.8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены [все] диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (*Д. Любшин*)

В этой связи возникает

Задача 3.8′. Дан выпуклый пятиугольник M. Проводятся все его диагонали и внутри возникает выпуклый пятиугольник M', с ним проделывается та же процедура, получается пятиугольник M'' и т. д. Можно ли циркулем и линейкой построить точку пересечения всех этих пятиугольников? (*Ф. К. Нилов*)

В десятом выпуске опубликована

Задача 10.11. Последовательность непрерывных функций $\{F_n\}$, где n-я функция зависит от n переменных, называется *средней*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1) Для любого натурального n функция F_n симметрична, однородна (т. е. при перестановке переменных значение F_n не меняется и

$$F_n(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot F_n(x_1, \ldots, x_n)$$

для любых чисел $\lambda, x_1, \ldots, x_n$), кроме того, $F_n(x, \ldots, x) = x$ для любого x, $F_2(1, 0) = 1/2$.

2) Для любых натуральных n и k равенство

$$F_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = F_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, Y, \ldots, Y),$$

где $Y = F_k(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$, выполнено для любых чисел $x_1, \ldots, x_{n+k}$.

Докажите, что функция F_n есть среднее арифметическое:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$ (*А. Я. Канель*)

В этой связи возникает

Задача 10.11′. Семейство непрерывных симметрических функций $\{F_n\}$ таково, что

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{n-1}(x_1 + x_2, \ldots, x_n) + F_2\left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_1 + x_2}\right) \cdot (x_1 + x_2).$$

При этом все переменные области определения F_n положительны, а их сумма равна 1. Докажите, что

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ln(x_1) + \ldots + x_n \cdot \ln(x_n).$$ (*А. Я. Канель*)

Представляется целесообразным сперва решить более лёгкую задачу:

Задача 10.11″. Дана строго возрастающая последовательность целых чисел $\{U_n\}$. Известно, что $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ и $U_{mn} = U_m U_n$. Докажите, что $U_k = k$ при всех k.

Задача 10.11‴. Предыдущую задачу можно усилить: требовать выполнения равенства $U_{mn} = U_m U_n$ только при $(m, n) = 1$. (*В. А. Сендеров*)

В выпуске 15 была опубликована

Задача 15.4. Во все точки целочисленной решётки на плоскости вбиты гвозди. На плоскость положили отрезок длины 2011, не задевающий ни одного из этих гвоздей.

а) Можно ли передвинуть отрезок, не задевая ни одного гвоздя, так, чтобы в результате он развернулся на 180°?

б) Существует ли такое начальное положение отрезка, при котором его можно повернуть вокруг некоторой точки на 180° так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

(Авторам неизвестно, верно ли утверждение пункта б) для произвольного начального положения отрезка.) (*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

Эта задача возникла в связи с размышлением над следующим сюжетом:

Задача 15.4′. Каково наименьшее возможное значение площади многоугольника, внутри которого можно развернуть на 180° единичный отрезок? (*Фольклор*)

Решения задач из прошлых выпусков

8.3. Условие. Можно ли круг с двумя дырками отобразить в себя без неподвижных точек? (*М. Л. Концевич*)

Решение. Круг с двумя дырками — это сфера с тремя дырками, ибо круг есть сфера с одной дыркой. Рассмотрим сферу и три дырки с центрами на экваторе, так что поворот вдоль экватора на 120 градусов переводит их друг в друга. Композиция этого поворота с симметрией относительно плоскости экватора не имеет неподвижных точек (*М. Л. Концевич*)

Комментарии 1. Конструкция проходит для любого числа дырок. Для числа дырок, отличного от двух, проходит и другая конструкция, до которой психологически проще додуматься: дырки расположены вдоль кольца и переходят друг в друга при повороте.

2. Если дырок нет, то *теорема Брауэра о неподвижной точке* (верная в любой размерности) утверждает, что *непрерывное отображение шара в себя имеет неподвижную точку.* Если число дырок больше одной и отображение переводит границу каждой дырки в себя, то существует неподвижная точка (а кольцо, т. е. круг с одной дыркой, можно проворачивать без неподвижной точки). Число неподвижных точек симплициального отображения (с учётом кратностей) выражает знаменитая *формула Лефшеца* (см. `https://ru.wikipedia.org/wiki/Число_Лефшеца`). (*А. Я. Канель-Белов*)

8.6. Условие. Внутри единичного квадрата расположено бесконечное множество точек. Всегда ли найдётся гладкая кривая, проходящая через бесконечное его подмножество? А бесконечно гладкая? (*Фольклор*)

Решение. Бесконечное множество точек квадрата имеет предельную точку O. Из данного множества выберем счётную последовательность A_i, сходящуюся к O. Можно считать, что $\forall\, n\ A_n \neq O$.

Положим $\bar{e}_i = \overline{OA}_i/|\overline{OA}_i|$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Поскольку $\bar{e}_i$ принадлежат единичной окружности, из них можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору $\bar{e}$. Векторы $\bar{e}_i$ при больших i попадают в некоторую ε-окрестность вектора $\bar{e}$, в которой можно говорить о том, что один вектор относительно другого расположен либо *по часовой стрелке*, либо *против часовой стрелки*. В какую-то сторону от $\bar{e}$ лежит бесконечное множество $\bar{e}_i$. Дальше рассматриваем только их, причём можно считать, что расстояние между $\bar{e}_i$ и $\bar{e}$ монотонно убывает с ростом i.

Можно также считать, что $|\overline{OA_i}|$ монотонно и достаточно быстро убывает с ростом i. Тогда точки A_i являются вершинами некоторой выпуклой ломаной L. Очевидно, что через вершины выпуклой ломаной можно провести гладкую кривую, причём выпуклую. При $n \to \infty$ единичный касательный вектор к этой кривой стремится к $\bar{e}$, поэтому кривая будет гладкой и в точке O.

Теперь покажем, что бесконечно гладкой (и даже дважды гладкой) кривой может и не быть. Пусть $O=(0,0)$ — начало декартовой системы координат на плоскости. Рассмотрим множество точек $A_n=(n^{-2},n^{-3})$, $n\in\mathbb{N}$. Гладкая кривая S, содержащая все A_n, обязана проходить через O по непрерывности. Пусть S дважды гладкая. Её касательная в O направлена по оси OX. Поэтому в некоторой окрестности точки O кривая S — это график дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$. Тогда $f(x)=\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot x^2$ для некоторого x_0, где $0\leqslant x_0\leqslant x$. Отсюда $f(x)\leqslant Kx^2$ в окрестности точки O для некоторой константы K. Однако $n^{-3}=n\cdot(n^{-2})^2$, противоречие.

Комментарии. 1. Мы доказали, что *из бесконечного множества точек квадрата можно выбрать бесконечное подмножество, лежащее на выпуклой кривой*. Аналогично доказывается, что *из достаточно большого конечного множества точек можно выбрать k, образующие выпуклый k-угольник.* Эти утверждения следуют также из следующей теоремы.

Обобщённая теорема Рамсея. *Пусть дано множество M, все его m-элементные подмножества раскрашены в k цветов, и пусть $\ell\geqslant m$; тогда если k,ℓ,m фиксированы, а множество M достаточно велико, то найдётся ℓ-элементное подмножество, в котором все k-элементные подмножества раскрашены в один цвет. Если же множество M бесконечно* (*а k,m фиксированы*), *то в M найдётся и бесконечное подмножество с указанным свойством.*

При $n=2$ отсюда получается обычная теорема Рамсея для графов: если рёбра полного графа раскрашены в несколько цветов, а число вершин достаточно велико, то найдётся полный подграф из (например) 2018 вершин, все рёбра которого одного цвета.

Покажем, как наше утверждение про точки следует из обобщённой теоремы Рамсея для $m=4$, $\ell\geqslant 5$. Если четыре отмеченные точки образуют выпуклый четырёхугольник, то назовём эту четвёрку *красной*, а в противном случае — *синей*. При достаточно большом количестве точек в силу обобщённой теоремы Рамсея найдётся либо такой ℓ-угольник, что каждая четвёрка его вершин красная, либо такой, что каждая четвёрка его вершин синяя. Но второй случай невозможен, так как среди пяти точек общего положения на плоскости найдутся четыре, образующие выпуклый четырёхугольник.

2. Рассматривая бесконечно удаляющиеся от начала координат последовательности точек, можно обобщить задачу на произвольные (не обязательно ограниченные) множества точек.

3. Задача и комментарии 1 и 2 обобщаются на пространство любой размерности. (*А. Канель-Белов*)

8.11. Условие. Ряд $\sum a_n$ *сходится в среднем*, если существует предел средних арифметических его частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n}, \quad s_k = \sum_{m=1}^{k} a_k.$$

Пусть ряд $\sum a_n$ сходится в среднем и при этом

а) $a_n = o(1/n)$ (т. е. $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$);

б) $a_n = O(1/n)$ (т. е. $\exists\, C > 0\colon \forall\, n\ |na_n| < C$).

Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится. (*А. Я. Белов*)

Решение. Положим

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k, \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} M_n.$$

(а) Поскольку последовательность $\{M_n\}$ сходится, имеем $|M_n| \leqslant M$ для некоторого M. Для любого натурального k существует такое N, что если $n > N$, то $|a_n| \leqslant 1/(k^2 n)$. Следовательно, если $n \leqslant m \leqslant kn$, то

$$|s_m - s_{kn}| \leqslant \frac{1}{k}. \qquad (*)$$

Далее,

$$M_{kn} = \frac{n}{kn}M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}) = \frac{1}{k}M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}).$$

Отсюда

$$\left|M_{kn} - \frac{k-1}{k}\cdot s_{kn}\right| = \left|\frac{1}{k}M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}) - \frac{kn-n}{kn}s_{kn}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{k} + \left|\frac{1}{kn}\cdot\sum_{m=n+1}^{kn}(s_m - s_{kn})\right| \leqslant \frac{M}{k} + \left|\frac{1}{kn}\cdot\frac{1}{k}(k-1)n\right| \leqslant \frac{M+1}{k}.$$

При достаточно большом n можно сделать M_{kn} сколь угодно близким к α, поэтому при достаточно большом k можно сделать $\dfrac{k-1}{k}\cdot s_{kn}$ сколь угодно близким к α, а тогда и s_{kn} становится сколь угодно близким к α. В силу $(*)$ величина s_m также становится сколь угодно близкой к α при росте m, что и требовалось.

(б) Сведём п. (б) к п. (а). Для этого достаточно построить такое преобразование исходной последовательности, при котором не затрагивается сходимость s_k и M_k, но величина a_n из $O(n)$ становится $o(n)$.

Главную роль в преобразовании играет добавление нулей. Добавление нуля в позиции n будет означать замену последовательности a_n на последовательность

$$\tilde{a}_1 = a_1,\ \tilde{a}_2 = a_2,\ \tilde{a}_{n-1} = a_{n-1},\ \tilde{a}_n = 0,\ \tilde{a}_{n+1} = a_n,\ \tilde{a}_{n+2} = a_{n+1}, \ldots$$

Теперь посмотрим, меняется ли $\lim\bigl(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k\bigr)$ при добавлении нулей в позициях $p, 2p, 3p, \ldots$ (для наглядности можно выбрать какое-то большое p). При большом n величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k$ является взвешенным средним прежней суммы $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m s_k$ (где $m \approx \dfrac{p-1}{p}n$ и вес близок к $p-1$) и новой суммы $\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} s_{kp}$ (где $\ell \approx n/p$ и вес близок к 1). Первая сумма стремится к α согласно условию задачи. Вторую сумму представим как

$$\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{L} s_{kp} + \frac{1}{\ell}\sum_{k=L+1}^{\ell} s_{kp}$$

для некоторого фиксированного L и устремим ℓ к бесконечности. Первое слагаемое стремится к нулю, а второе приближается к $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$, поскольку при $|kp-n| < p,\ kp > L,\ n > L$ имеем $|s_{kp} - s_n| < Cp/L$. С другой стороны, величина $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$ при росте ℓ приближается к α.

Добавление нулей в позициях $p, 2p, 3p, \ldots$ будем называть p-разрежением. Мы показали, что при p-разрежении величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k$ имеет прежний предел. После p-кратного p-разрежения плотность исходной последовательности в полученной равна $(1-1/p)^p$.

Положим $p_n = 10^{10n}$. Произведём p_1 раз p_1-разрежение, затем p_2 раз p_2-разрежение и т. д. Пусть $N > p_{k+1}$. Коэффициент разрежения последовательности на начальном отрезке длины N приближается к e^k при росте k. Поэтому оценка C/n превращается в $|a_n| < C/(e^k n)$, где k — наибольшее такое число, что $N > p_{k+1}$. Но $k \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому в итоге мы получаем $a_n = o(n)$.

С другой стороны, каждый член исходной последовательности сдвигается лишь конечное число раз, поэтому сходимость s_k не меняется. В силу п. (а) предел s_k конечен. (*А. Я. Белов, Л. Радзивиловский*)

10.8. Условие. Можно ли покрасить сферу белой и красной красками так, чтобы любые три исходящих из центра сферы взаимно перпендикулярных луча пересекали её в одной красной и двух белых точках?

(*S. Kochen, M. Specker*)

Ответ. Нет[1)].

Решение. *Реализацией* конечного графа на сфере S^2 назовём такое вложение множества его вершин в S^2, при котором расстояние между концами любого ребра равно $90°$.

Лемма 1. *Пусть α, β — такие точки на S^2, что синус угла между их радиус-векторами содержится в* $[0, 1/3]$. *Тогда существует реализация графа* Γ_1 (см. рис. 1)*, при которой a_0 переходит в α, a_9 в β.*

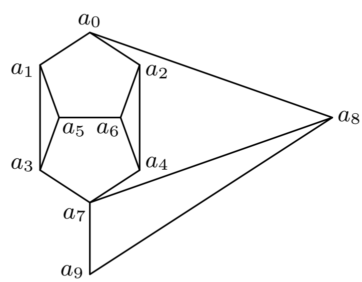


Рис. 1. Граф Γ_1

Доказательство. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — ортогональный репер на S^2. Переведём a_5 в $\bar{x}$, a_6 в $\bar{z}$. Положим далее для некоторых $\xi, \eta \geqslant 0$

$$a_1 \mapsto \frac{\bar{y} + \xi\bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad a_2 \mapsto \frac{\bar{x} + \eta\bar{y}}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Тогда образы a_3 и a_4 определяются с точностью до знаков по ортогональности к (a_1, a_5), (a_2, a_6), и мы выберем

$$a_3 \mapsto \frac{\xi\bar{y} - \bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad a_4 \mapsto \frac{\eta\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{1+\eta^2}}.$$

Затем аналогично положим

$$a_0 \mapsto \frac{\xi\eta\bar{x} - \xi\bar{y} + \bar{z}}{\sqrt{1+\xi^2+\xi^2\eta^2}}, \quad a_7 \mapsto \frac{\bar{x} + \eta\bar{y} + \xi\eta\bar{z}}{\sqrt{1+\eta^2+\xi^2\eta^2}},$$

и, наконец, с точностью до знака определяются a_8 и a_9. Синус угла между a_0 и a_9 равен

$$\frac{\xi\eta}{\sqrt{(1+\xi^2+\xi^2\eta^2)(1+\eta^2+\xi^2\eta^2)}}$$

и может принимать все значения между 0 и $1/3$. □

Лемма 2. *Рассмотрим граф* Γ_2 (см. рис. 2)*, который получается из картинки отождествлениями вершин $a = p_0$, $b = q_0$, $c = r_0$ (видимые пересечения рёбер внутри окружности не являются вершинами). Этот граф реализуется в S^2.*

[1)] Заметим, что рациональные точки сферы S^2 можно раскрасить таким образом, см. задачу 11.9 и её решение в выпуске 21, с. 278. Родственная задача рассмотрена в заметке Д. Х. Муштари «О правильной раскраске 16-мерной сферы», см. настоящий выпуск, с. 218–219. — *Прим. А. Я. Канель-Белова.*

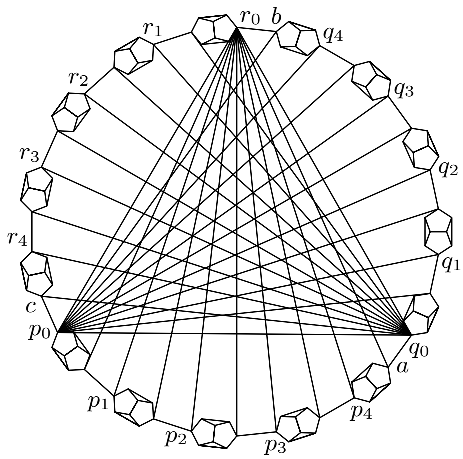


Рис. 2. *Граф* Γ_2

Доказательство. При $0 \leqslant k \leqslant 4$ положим

$$p_k \mapsto \cos\frac{\pi k}{10}\,\bar{x} + \sin\frac{\pi k}{10}\,\bar{y}, \quad q_k \mapsto \cos\frac{\pi k}{10}\,\bar{y} + \sin\frac{\pi k}{10}\,\bar{z}, \quad r_k \mapsto \cos\frac{\pi k}{10}\,\bar{z} + \sin\frac{\pi k}{10}\,\bar{x}.$$

Так как $\sin(\pi/10) < 1/3$, это отображение можно сначала продолжить до реализации подграфа между вершинами p_0, p_1 и r_0, воспользовавшись предыдущей леммой. Вращая полученную реализацию вокруг r_0 так, чтобы пара (p_0, p_1) перешла в (p_1, p_2), (p_2, p_3), $\ldots$, получаем реализацию «нижней дуги» и r_0. Аналогичные вращения вокруг образов p_0, q_0 доставляют реализацию остальных двух дуг.

Рассмотрим произвольное отображение f вершин графа Γ_2 в $\{0, 1\}$. Допустим, что ровно одна вершина каждого треугольника переходит в 1 и хотя бы одна из вершин каждого ребра переходит в 0. Пусть в треугольнике $\{p_0, q_0, r_0\}$ вершина p_0 переходит в 1. Рассмотрим копию графа Γ_1 между вершинами p_0, r_0, p_1, отождествив их с a_0, a_8, a_9 соответственно. Мы должны иметь $f(p_1) = f(a_9) = 1$. Действительно, так как $f(a_0) = 1$, получаем $f(a_8) = 0$. Поэтому если $f(a_9) = 0$, то $f(a_7) = 1$. Тогда $f(a_3) = f(a_4) = 0$. Аналогично $f(a_1) = f(a_2) = 0$. Значит, $f(a_5) = f(a_6) = 1$ — противоречие.

Теперь вернёмся к Γ_2. Используя равенство $f(r_0) = f(p_1) - 1$, аналогично находим $f(p_2) = 1$ и затем $f(p_3) = f(p_4) = f(q_0) = 1$. Но $f(q_0) = 1$ противоречит тому, что $f(p_0) = 1$. Этим завершается доказательство. $\square$

(*По книге Ю. И. Манина «Доказуемое и недоказуемое». М.: Советское радио, 1979. С. 95–97.*)

13.11. Условие. Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не представимо в виде разности $x^2 - y^3$ (x, y — целые). (*Фольклор*)

Решение. Поменяем местами x и y и будем рассматривать уравнение $y^2 = x^3 + a$ с целым параметром a (поскольку это стандартный вид уравнения эллиптической кривой).

Утверждение. *Если целое число t не делится на 3, то $6t^6$ не представимо в виде $y^2 - x^3$.*

Доказательство. Действительно, рассмотрим рациональные решения уравнения $y^2 = x^3 + 6$. Легко видеть, что $x = r/t^2$, $y = s/t^3$, где r, s, t — целые числа, r, t взаимно просты и s, t также взаимно просты. Уравнение приводится к виду $s^2 = r^3 + 6t^6$, где r, s, $6t$ попарно взаимно просты. В этом случае r и s не делятся на 3. Приведём теперь уравнение к виду

$$r^3 = s^2 - 6t^6 = (s + t^3\sqrt{6})(s - t^3\sqrt{6}).$$

Кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ является областью главных идеалов[2)], а множители правой части взаимно просты. Следовательно, существуют целые a и b, для которых $s + t^3\sqrt{6} = (a + b\sqrt{6})^3$ или $s + t^3\sqrt{6} = (5 \pm 2\sqrt{6})(a + b\sqrt{6})^3$. Мы воспользовались тем, что $5 - 2\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^{-1}$ и $5 + 2\sqrt{6}$ порождает группу всех обратимых элементов в $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$. Из второго уравнения получаем с точностью до знака при a: $t^3 = 2a^3 + 36ab^2 + 15b(a^2 + 2b^2)$. Все решения этого уравнения по модулю 9 делятся на 3, что невозможно. Из первого уравнения получаем $t^3 = 3b(a^2 + 2b^2)$, откуда следует, что t должно делиться на 3. Поэтому если t не делится на 3, то уравнение $s^2 = r^3 + 6t^6$ неразрешимо в целых числах. $\square$

Замечание 1. Отметим, что мы использовали только делимость на степени тройки; фактически мы доказали, что уравнение нельзя разрешить в 3-адических числах r, s, t, где t является 3-адической единицей.

Замечание 2. Более развитыми методами можно показать, что уравнение $y^2 = x^3 + 6$ неразрешимо в рациональных числах, поэтому ограничение на t в доказанном утверждении излишне. Известно также, что уравнение $y^2 = y^3 + a$ не имеет рациональных решений для бесконечно многих натуральных a, свободных от квадратов.

(*М. Штолль*)

17.3. Условие. а) На плоскости дано множество M, площадь которого меньше 1, и n точек. Доказать, что множество M можно сдвинуть на вектор, длина которого меньше $\sqrt{n/\pi}$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$, так, что множество, полученное в результате сдвига, не будет покрывать ни одной из данных n точек. (*В. А. Сендеров*)

б) (Задача на исследование.) Постарайтесь получить оценки для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

---

2) В этом месте решение неэлементарно, но не исключено, что без этого можно обойтись.

Решение. а) Выберем начало координат O на плоскости. С каждой из точек A_i можно связать множество всех таких точек M_i, что при сдвиге на любой вектор $\vec{v} \in M_i$ множество $M + v$ закроет точку A_i. Легко видеть, что множество M_i получается из M при центральной симметрии относительно A_i и последующем сдвиге на вектор $-A_i$. Поэтому его площадь меньше 1, а площадь объединения всех M_i меньше n.

Теперь рассмотрим круг K с центром O радиуса, меньшего чем $\sqrt{n/\pi}$. Если радиус близок к этой величине, то площадь круга близка к n, и тогда $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Значит, K содержит вектор $\vec{v}$, при сдвиге на который M не закрывает ни одну из точек A_i. Длина этого вектора не превосходит радиус круга, т. е. меньше $\sqrt{n/\pi}$.

б) В k-мерном пространстве величина сдвига оценивается как радиус шара объёма n. Беря в качестве M куб, рассматривая клетки решётки, приближающие шар объёма n, и беря в качестве A_i образы узлов этой решётки при центральной симметрии относительно центра M, убеждаемся, что получившаяся оценка при $n \to \infty$ и фиксированном k асимптотически точна. (*А. Я. Канель-Белов*)

Упражнения к задаче 17.3

Упражнение 1. На клетчатой плоскости дана фигура площади меньше 1. Докажите, что эту фигуру можно параллельно перенести так, чтобы внутри неё не оказалось ни одного узла решётки.

Упражнение 2. Дана фигура площади больше натурального числа k. Докажите, что в ней найдутся k точек, разности соответствующих координат которых — целые числа. (*А. Я. Канель-Белов*)

Упражнение 3. Из выпуклого многогранника с 9 вершинами, одна из которых A, параллельными переносами, переводящими A в каждую из остальных вершин, образуется 8 равных ему многогранников. Докажите, что хотя бы два из этих 8 многогранников пересекаются по внутренним точкам.
(*В. А. Сендеров, 57-я Московская математическая олимпиада, 1994, 11 класс, задача 4*)

20.10. Условие. Дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, e — основание натуральных логарифмов. Докажите, что

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x)| > e^{-n}.$$

(*Г. Кош, Международная студенческая олимпиада, 2015*)

Первое решение. Прежде всего отметим, что в силу трансцендентности числа e равенство невозможно.

Предположим, что $\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=e^{-c^2n}$, где $c>1$. Тогда для любого чётного k имеем

$$e^{-c^2nk}\geqslant\int\limits_0^1 P(x)^k dx\geqslant\frac{1}{L_{nk+1}},$$

где L_m есть наименьшее общее кратное чисел от 1 до n. В этом можно убедиться, раскладывая $P(x)^k$ по степеням x и интегрируя почленно: мы видим, что интеграл положителен и может быть представлен как дробь со знаменателем L_{nk+1}. Поэтому $L_{nk+1}\geqslant e^{c^2nk}$ для всех чётных k. Отсюда следует, что $L_m\geqslant e^{cm}$ для всех достаточно больших m. В самом деле: выберем такое чётное k, что $nk+1\leqslant m\leqslant nk+2n$. Тогда

$$L_m\geqslant L_{nk+1}\geqslant e^{c^2(m-2n)}\geqslant e^{cm}$$

для всех m, превосходящих m_0. Но, как известно, L_m асимптотически растёт как e^m, что следует из закона распределения простых чисел.

Задача решена, но мы хотим теперь обойтись без использования оценки на число простых чисел, меньших n.

Покажем, что для всех достаточно больших N имеет место неравенство

$$N!\geqslant\prod_{k\leqslant N}L_k^{N/(k(k+1))}.$$

В самом деле,

$$\prod_{k\leqslant N}L_k^{N/(k(k+1))}=\prod_{k=1}^{N}L_k^{N/k-N/(k+1)}=$$
$$=L_N^{-N/(N+1)}\prod_{k=2}^{N}\Bigl(\frac{L_k}{L_{k-1}}\Bigr)^{N/k}=L_N^{-N/(N+1)}\prod_{p^s\leqslant N<p^{s+1}}p^{N/p^s},$$

где последнее произведение берётся по всем простым $p\leqslant N$. Для каждого простого $p\leqslant N$ рассмотрим такое максимальное s, что $p^s\leqslant N$. Тогда p входит в наше произведение в степени

$$\frac{-sN}{N+1}+\sum_{i=1}^{s}\frac{N}{p^i}=\sum_{i=1}^{s}\Bigl(\frac{N}{p^i}-\frac{N}{N+1}\Bigr)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\frac{N-p^i+1}{p^i}\leqslant\sum_{i=1}^{s}\Bigl[\frac{N}{p^i}\Bigr],$$

последнее выражение есть степень, в которой p входит в $N!$. Итак,

$$N^N\geqslant N!\geqslant\prod_{k=1}^{N}L_k^{N/(k(k+1))}\geqslant\prod_{k=m_0}^{N}e^{cN/(k+1)},$$

откуда

$$\ln N \geqslant c \sum_{k=m_0}^{N} \frac{1}{k+1},$$

что при достаточно больших N неверно. (*Ф. В. Петров*)

Второе решение. Достаточно доказать неравенство

$$\int\limits_0^1 \ln |P(x)|\, dx \geqslant -n.$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни многочлена $P(x)$, а m — его старший коэффициент. Тогда

$$\int\limits_0^1 \ln |P(x)|\, dx = \ln m + \sum_{i=0}^{n} \int\limits_0^1 \ln |x - \alpha_i|\, dx.$$

Для любого $\alpha \in [0; 1]$ имеем

$$\int\limits_0^1 \ln |x-\alpha|\, dx = \int\limits_0^\alpha \ln |x-\alpha|\, dx + \int\limits_\alpha^1 \ln |x-\alpha|\, dx = \int\limits_0^\alpha \ln x\, dx + \int\limits_0^{1-\alpha} \ln x\, dx =$$
$$= \alpha \ln \alpha - \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - (1-\alpha) = \alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - 1.$$

В частности, при $\alpha = 0, 1$ интеграл равен -1. Значит, если 0 или 1 — корень, то можно разделить $P(x)$ соответственно на x или $x-1$, и обе части неравенства увеличатся на 1. Поэтому дальше можно считать $\alpha \neq 0, 1$.

Лемма. *Для всякого комплексного $\alpha \neq 0, 1$ верно неравенство*

$$\int\limits_0^1 \ln |x-\alpha|\, dx \geqslant \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} - 1.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0; 1)$. Положим

$$f(\alpha) := \int\limits_0^1 \ln|x-\alpha|\, dx - \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} + 1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\ln \alpha + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ln(1-\alpha).$$

В этой сумме больший из двух логарифмов всегда имеет положительный коэффициент, а меньший — отрицательный, причём эти коэффициенты равны по абсолютной величине. Поэтому $f(\alpha) \geqslant 0$ при $\alpha \in (0; 1)$.

Пусть теперь $|\alpha| = R$ — большое положительное число. Тогда

$$f(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx - \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} + 1 =$$

$$= \int\limits_0^1 \ln|\alpha|\,dx + O\Big(\frac{1}{R}\Big) - \frac{\ln|\alpha| + \ln|\alpha|}{2} + O\Big(\frac{1}{R}\Big) + 1 \sim O\Big(\frac{1}{R}\Big).$$

Заметим, что $f(\alpha) \to \infty$ при $\alpha \to 0, 1$, а значит, $f(\alpha) > 1$ в некоторой ε-окрестности нуля или единицы.

Рассмотрим теперь область $B(0,R) \setminus ([0;1] \cup B(0,\varepsilon) \cup B(1,\varepsilon))$, где $B(x,r)$ обозначает круг радиусом r с центром x. Функция $f(\alpha)$ — гармоническая в этой области, включая её границу, поскольку $\ln|\alpha|$ — гармоническая функция на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. По известной теореме $f(\alpha)$достигает минимума на границе указанной области. Но там функция неотрицательна по доказанному выше, поэтому $f(\alpha) \geqslant 0$ во всей области. Объединение таких областей при различных $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ даёт $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Значит, $f(\alpha) \geqslant 0$ для любого комплексного $\alpha \neq 0, 1$. $\square$

Теперь докажем нужное нам неравенство:

$$\ln m + \sum_{i=0}^{n} \int\limits_0^1 \ln|x-\alpha_i|\,dx \geqslant \ln m + \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln|1-\alpha_i| + \ln|\alpha_i|}{2} - n =$$

$$= \ln\Big| m \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \Big| + \ln\Big| m \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i) \Big| - n = \ln|P(0)| + \ln|P(1)| - n \geqslant -n,$$

что и требовалось (последнее неравенство следует из того, что $P(x)$ имеет целые коэффициенты). (*О. Солан*)

Третье решение (близкое по идеям ко второму). Достаточно показать, что

$$\int\limits_0^1 \ln|P(x)|\,dx \geqslant -n.$$

Пусть 0 и 1 — корни многочлена $P(x)$ кратностей соответственно $k \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$. Тогда $P(x) = x^k(1-x)^m q(x)$, где $q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $|q(0)| \geqslant 1$, $|q(1)| \geqslant 1$. Нам нужно доказать, что

$$\int\limits_0^1 \ln|q(x)|\,dx \geqslant k + m - n = -\deg q(x).$$

Более общее неравенство (для всех многочленов q с комплексными коэффициентами) таково:

$$\int_0^1 \ln|q(x)|\,dx \geqslant \frac{\ln|q(0)\cdot q(1)|}{2} - \deg q(x).$$

Разлагая многочлен q на множители $q(x) = C\prod(x-\alpha_i)$, мы сводим задачу к многочлену $q(x) = x - \alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = u + iv$ для $u \leqslant 1/2$, $v \geqslant 0$ (в противном случае достаточно применить преобразования $\alpha \to \overline{\alpha}$, $\alpha \to 1-\alpha$). На отрезке $[0;1]$ при любом α имеем:

$$\int \ln|x-\alpha|\,dx = \int \operatorname{Re}\ln|x-\alpha|\,dx = \operatorname{Re}[(x-\alpha)\ln(x-\alpha)] - x.$$

Поэтому неравенство, которое нам нужно доказать:

$$\int_0^1 \ln|x-\alpha|\,dx \geqslant \frac{\ln|1-\alpha| + \ln|\alpha|}{2} - 1,$$

можно переписать в виде

$$\operatorname{Re}((1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha\ln(-\alpha)) \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\ln(1-\alpha) + \ln\alpha)$$

или в виде

$$\operatorname{Re}(1-2\alpha)(\ln(1-\alpha) - \ln(-\alpha)) \geqslant 0.$$

Но последнее неравенство вытекает из формул $1-2\alpha = (1-2u) - 2iv$, $1-2u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и

$$\ln(1-\alpha) - \ln(-\alpha) = \ln\left|\frac{1-\alpha}{\alpha}\right| + i\varphi,$$

где $\varphi \in [0;\pi]$ есть угол между векторами $-\alpha$ и $1-\alpha$ (таким образом, вещественная и мнимая части величины $\ln(1-\alpha) - \ln(-\alpha)$ обе неотрицательны).

(*О. Солан, Ф. Петров*)

Хотя оценка e не точна, удивительно, что совершенно разные подходы приводят к одной и той же константе e! Известно, что наилучшая оценка находится между 0,4213 и 0,4232. (См. *Pritsker I. E.* The Gelfond — Schnirelman method in prime number theory // Canad. J. Math. 2005. Vol. 57. P. 1080–1101.)

21.1. Условие. Какая из двух кривых длиннее:

$$\text{эллипс } \left\{(x,y)\colon \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\right\} \text{ или синусоида } \{(x,\sin(x))\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}?$$

(*Л. Радзивиловский*)

Первое решение. Начертим график синуса на листе бумаги и свернём его в цилиндр радиуса 1, склеивая каждую точку $(0, y)$ с точкой $(2\pi, y)$. Синусоида превратится в эллипс в плоскости, пересекающей цилиндр под углом 45°. Полуоси этого эллипса равны $\sqrt{2}$ и 1, как в условии задачи. Длина при таком преобразовании сохраняется, поэтому рассматриваемые длины равны.

Второе решение. Можно вычислить длину обеих кривых. Эллипс удобно задать параметрически: $(\sqrt{2}\cos t, \sin t)$. Тогда длина его бесконечно малого участка равна по теореме Пифагора

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{2\sin^2 t \cdot dt^2 + \cos^2 t \cdot dt^2} = \sqrt{\sin^2 t + 1} \cdot dt.$$

Следовательно, длина всего эллипса равна $\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + 1} \cdot dt$.

Теперь рассмотрим синусоиду. Снова применим теорему Пифагора и выразим длину бесконечно малого участка в виде

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (\cos\ x \cdot dx)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x} \cdot dx.$$

Длина одной волны синусоиды оказывается равной $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} \cdot dt$, что очевидно равно предыдущему интегралу (положим $t = x + \pi/2$). Любители анализа могут также записать его в виде эллиптического интеграла второго рода. (*Л. Радзивиловский*)

21.2. Условие. Докажите равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n - \sum_{j=1}^{n}(x_1 + \ldots + \widehat{x}_j + \ldots + x_n)^n +$$
$$+ \sum_{j_1<j_2}(x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_2} + \ldots + x_n)^n +$$
$$+ \ldots + (-1)^{|J|} \sum_{j_1<\ldots<j_{|J|}} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^n\right) = n! \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

где $\widehat{x}_j$ означает, что соответствующее слагаемое опускается.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Решение 1. Покажем, что получившийся многочлен делится на x_i для произвольного i, тогда он делится на моном $\prod_{i=1}^n x_i$, степень которого n. В первом слагаемом оно присутствует с коэффициентом $n!$, а в остальных отсутствует. Поэтому правая часть окажется равной $n! \prod_{i=1}^n x_i$.

Для доказательства подставим $x_i = 0$. Тогда каждому слагаемому вида

$$(-1)^{|J|} \sum_{j_\alpha \in J} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n$$

при $J \not\ni i$ отвечает слагаемое

$$(-1)^{|J'|} \sum_{j_\alpha \in J'} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J'|}} + \ldots + x_n)^n,$$

где $J' = J \cup \{i\}$. При этом $|J'| = |J| + 1$, так что $(-1)^{|J'|} = -(-1)^{|J|}$ и соответствующие члены сократятся, так как $x_i = 0$.

Решение 2. Достаточно показать, что в случае не обязательно коммутирующих переменных имеет место *поляризационное равенство*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n &- \sum_{j=1}^n (x_1 + \ldots + \widehat{x}_j + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \sum_{j_1<j_2} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_2} + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \ldots + (-1)^{|J|} \sum_{j_1<\ldots<j_{|J|}} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n + \\ &+ \ldots + (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^n\right) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},\end{aligned}$$

где S_n — группа всех перестановок на множестве из n элементов. Действительно, можно с каждым слагаемым вида

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{|J|}} (x_1 + \ldots + \widehat{x}_{j_1} + \ldots + \widehat{x}_{j_{|J|}} + \ldots + x_n)^n$$

связать множество мономов, которые там встречаются, и для подсчёта их общего количества применить формулу включения-исключения. В результате останутся только мономы вида $\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$. В самом деле, в первом члене встречаются все мономы по разу; в членах с $|J| = 1$ встречаются мономы, в которых участвуют не более $n - 1$ переменной; после вычитания по формуле включения-исключения окажется, что мономы, в которых участвуют не более $n - 2$ переменных, вычтены дважды и это нужно скомпенсировать, и т. д.

Замечание. Из поляризационного равенства вытекает следующий факт. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k) \equiv 0$ — тождество в алгебре (вообще говоря, некоммутативной) над ассоциативно-коммутативным кольцом, однородное по совокупности переменных. Тогда в ней выполняется и его полная *линеаризация*: в каждом мономе, содержащем k_i вхождений переменной x_i, каждое вхождение x_i заменяется на вхождение новой переменной $x_{i,j}$, $j = 1, \ldots, k_i$, причём j для разных вхождений выбирается различным, а затем берётся симметрическая сумма по всем перестановкам $\sigma(j)$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

21.6(а). Условие (по мотивам задачи М. Патерсон и Д. Стинсона). По кругу стоят n мудрецов, у каждого на голове шапка одного из k цветов. Каждый мудрец видит всех оставшихся. Мудрецы по порядку (по часовой стрелке) говорят либо «пас», либо предполагаемое название своего цвета (в зависимости от того, что они видят и сколько кругов прошло). Все распределения цветов равновероятны. Мудрецы могут заранее согласовать свои ответы. Их цель — чтобы первый, назвавший свой цвет, не ошибся. Какую максимальную вероятность этого они могут обеспечить?

(*И. В. Митрофанов*)

Решение.

Вспомогательная задача. На доску выписываются n-буквенные слова над k-буквенным алфавитом. Очередное слово можно выписать, если существуют $(n-1)$ позиция, в которой это слово не совпадает ни с одним предыдущим. Каково может быть наибольшее число выписанных слов?

Доказательство эквивалентности задачи 21.6(а) и вспомогательной задачи. Всевозможные k^n наборов цветов шапок будем записывать как слова, а все ходы занумеруем натуральными числами. На первом ходу говорит первый мудрец, на втором — второй, на $(n+1)$-м снова первый, и так далее.

Сначала выпишем на доску в произвольном порядке те наборы, на которых мудрецы приходят к успеху на первом ходу, потом — те наборы, на которых мудрецы приходят к успеху на втором ходу, и так далее. Допустим, мудрецов всего 4, и на шестом ходу один из выписанных наборов — это 1123. Это значит, что если второй мудрец видит 1?23, где знак вопроса заменяет цвет его шапки, то он на шестом ходу говорит «1». Очевидно, никакой набор, выписанный после шестого хода, не совпадает с набором 1123 в позициях 1, 3 и 4 сразу. Также понятно, что все наборы, выписанные на шестом ходу (если их несколько), отличаются хотя бы в одной из позиций 1, 3 или 4.

Выписывая числа в обратном порядке, получим последовательность слов, удовлетворяющую условию задачи 2.

Обратно: по последовательности слов понятным образом строится стратегия для мудрецов.

Ответ к вспомогательной задаче: $k^n - (k-1)^n$.

Ответ к задаче 21.6(а): $1 - \left(\dfrac{k-1}{k}\right)^n$. □

Решение вспомогательной задачи. Пусть алфавит — это множество $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Пример для $k^n - (k-1)^n$: первым выпишем слово, состоящее из одних единиц. Затем в произвольном порядке — все слова, в которых $n-1$ единиц, потом — все слова, в которых $n-2$ единиц, и так далее. Закончим словами, в которых по одной единице, и невыписанными останутся $(k-1)^n$ слов совсем без единиц. Эта процедура соответствует условию задачи 2. В самом деле, вычеркнем в произвольном выписанном слове некоторую позицию, в которой стоит 1, и вычеркнем эту же позицию в любом из предыдущих слов. Тогда первое из двух полученных слов содержит меньше единиц, чем второе. Обозначим полученное множество слов M.

Оценка. Рассмотрим линейное пространство над $\mathbb{Z}_2$ размерности nk^{n-1}. Каждая координата в этом пространстве обозначается последовательностью длины n, состоящей из одного знака вопроса в произвольной позиции, и символов нашего алфавита на остальных местах.

Каждому из k^n слов длины n из букв алфавита соответствует в этом пространстве вектор, имеющий n единичных координат, а остальные координаты у него нулевые. Например, при $n = 4$ слову 1231 соответствует вектор, у которого четыре ненулевые координаты обозначаются как ?231, 1?31, 12?1, 123?. Вектор, соответствующий слову u, обозначим $V(u)$.

Очевидно, размерность пространства, порождённого $V(M)$, не превосходит $k^n - (k-1)^n$ (на самом деле — равна). Покажем, что для любого слова u вектор $V(u)$ лежит в этом пространстве. В самом деле, если в u есть единица, то это очевидно. Если же нет, то рассмотрим $2^n - 1$ слов, полученных из u заменой части символов на единицы. Вместе с u получается 2^n слов, и на любых $n-1$ позициях все слова повторяются по два раза, поэтому сумма всех соответствующих векторов равна нулю и вектор $V(u)$ является линейной комбинацией остальных.

Вернёмся к нашей задаче. Если на доску выписано больше чем $k^n-(k-1)^n$ слов, то эти векторы линейно зависимы. Значит, есть несколько таких слов, что все подпоследовательности длины $(n-1)$ встречаются в них чётное число раз. А значит, если на доску уже выписаны все эти слова, кроме одного, то ещё одно написать не удастся. (*И. В. Митрофанов*)

21.9. Условие. В выпуклом многограннике M степень каждой вершины равна 5, а у всех граней, кроме, может быть, грани A, число сторон делится на 3. Докажите, что число сторон грани A тоже делится на 3.

(*И. В. Митрофанов*)

Первое решение. Пусть в многограннике M вершина M_1 смежна с вершиной M_2, а M_2 смежна с M_3. Из M_2 выходят 5 рёбер, пронумеруем их по часовой стрелке остатками по модулю 5. Тогда разность номера M_3 и M_1 назовём *числом поворота* ребра M_2M_3 относительно ребра M_1M_2 в точке M_2.

Пусть многогранник N — икосаэдр. В нём степень каждой вершины тоже равна пяти, и можно аналогично определить для любых двух смежных рёбер число поворота. Пусть $M_0, \ldots, M_k$ и $N_0, \ldots, N_k$ — ориентированные пути по рёбрам многогранников M и N соответственно. Будем говорить, что эти пути *локально изоморфны*, если при $i = 1, \ldots, k-1$ число поворота ребра $M_{i+1}M_i$ относительно M_iM_{i-1} в точке M_i совпадает с соответствующим числом для пути по рёбрам N. Легко видеть, что для любого пути по M существует единственный путь по N с фиксированным первым ребром, локально изоморфный ему.

Рассмотрим обход контура грани A против часовой стрелки. Это ориентированный путь, в котором все числа поворота следующего ребра относительно предыдущего равны 1. Любой локально изоморфный ему путь по рёбрам икосаэдра N будет идти по периметру одной из треугольных граней, возможно, обходя её несколько раз. Если число сторон грани A не делится на 3, то путь по икосаэдру будет незамкнутым. Покажем, что это невозможно, доказав следующее утверждение.

Пусть $M_0, \ldots, M_k$ — замкнутый (т. е. $M_0 = M_k$) путь по рёбрам M, не проходящий ни по какой вершине два раза (кроме $M_0 = M_k$). Тогда локально изоморфный ему путь по рёбрам N также замкнут, а его первое и последнее ребро дают такое же число поворота относительно общей вершины, как в первом пути.

Доказательство. Замкнутый путь разбивает поверхность M на две части — содержащую грань A (назовём её внешней) и не содержащую (назовём её внутренней). *Размером* пути будем называть число граней во внутренней части. Проведём индукцию по размеру пути.

База. Пусть размер равен 1, тогда путь — это обход грани в M, отличной от A, число рёбер в нём делится на 3, а все числа поворота — это единицы. Тогда локально изоморфный путь в N — обход какого-то треугольника несколько раз с возвращением в исходную точку.

Переход. Пусть размер пути $M_0, \ldots, M_k$ больше 1. Тогда существует простой путь, лежащий во внутренней части и соединяющий какие-то две его вершины M_i и M_j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Обозначим этот путь P, а пути $M_0 \ldots M_i$, $M_iM_{i+1} \ldots M_j$, $M_j \ldots M_k$ — соответственно P_1, P_2 и P_3. Тогда исходный путь имеет вид $P_1P_2P_3$, и есть два замкнутых пути P_1PP_3 и $P^{-1}P_2$, к которым применимо предположение индукции (минус первая степень обозначает проход в обратном направлении).

Рассмотрим путь $P_1PP^{-1}P_2P_3$ в M и локально изоморфный ему путь $Q_1QQ^{-1}Q_2Q_3$ в N (части Q_i содержат столько же рёбер, сколько пути $P_1, P, \ldots$ соответственно.) Путь $Q^{-1}Q_2$ локально изоморфен пути $P^{-1}P_2$ и по предположению индукции замкнут, значит, можно рассмотреть путь Q_1QQ_3.

Из одной вершины икосаэдра выходят три ребра: конец пути Q_2, конец пути Q и начало пути Q_3. Первое из этих рёбер повёрнуто относительно второго и относительно третьего так же, как соответствующие рёбра в M. Значит, начало Q_3 повёрнуто относительно конца Q так же, как начало P_3 повёрнуто относительно конца P. Следовательно, пути P_1PP_3 и Q_1QQ_3 локально изоморфны. По предположению индукции, путь Q_1QQ_3 замкнут и конец Q_3 повёрнут относительно начала Q_1 так же, как конец пути P_3 относительно начала P_1.

Аналогично доказывается, что начало Q_2 повёрнуто относительно конца Q_1 так же, как начало P_2 повёрнуто относительно конца P_1. Отсюда следует, что замкнутый путь $Q_1Q_2Q_3$ локально изоморфен замкнутому пути $P_1P_2P_3$, ч. т. д. $\square$

(*И. В. Митрофанов*)

Второе решение (набросок). Перейдём к двойственному многограннику. В нём все грани — пятиугольники и степени всех вершин, кроме одной, делятся на три. Нужно доказать, что её степень тоже делится на три.

Приложим наш многогранник к додекаэдру одной гранью, содержащей исключительную вершину, и будем катать додекаэдр по нему. При прокатывании вокруг любой вершины, кроме исключительной, додекаэдр возвращается в исходное положение. Но тогда то же верно при прокатывании вокруг исключительной, так как путь вокруг неё гомотопен композиции путей вокруг остальных. Значит, её степень тоже делится на 3. (Это решение идейно совпадает с предыдущим.) (*И. В. Изместьев*)

Опечатки, замеченные в выпуске 21

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
218	6 снизу	Алексеевич	Алексей

Информация для авторов

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным областям математики, а также по проблемам её истории и преподавания, интересные и доступные указанной аудитории.

2. Сборник «Математическое просвещение» не публикует существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

3. Материалы принимаются по электронной почте на адрес `matpros@yandex.ru` в виде двух файлов (`pdf` и `tex`) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в `Word`.

4. Просим обратить внимание, что материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

5. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

6. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

7. В конце статьи необходимо указать для каждого из авторов:

— фамилию, имя, а также отчество (если есть) полностью,

— место работы/обучения,

— электронный адрес для дальнейшей переписки.

8. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение (хотя бы набросок).

9. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый, просим обращаться по адресу `matpros@yandex.ru`

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 14.03.2018 г. Формат $70\times100\,{}^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 16. Тираж 900 экз. Заказ №