МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 25

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@yandex.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 25. —
М.: МЦНМО, 2020. — 192 с.
ISBN 978-5-4439-1461-9

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

12+

ISBN 978-5-4439-1461-9

Содержание

Эрнесту Борисовичу Винбергу от редколлегии «Математического просвещения»

Дорогой Эрнест Борисович!

На протяжении многих лет Вы возглавляли редколлегию «Математического просвещения». Вы умело и тактично решали спорные вопросы, возникавшие в её работе. Ваши взвешенные оценки и советы играли важнейшую роль в обеспечении достойного уровня публикаций в нашем сборнике.

Ныне Вы сочли целесообразным покинуть должность главного редактора. Благодарим Вас за Вашу многолетнюю плодотворную деятельность в этом качестве. Приветствуем Ваше намерение остаться в составе редколлегии. Не сомневаемся, что и в дальнейшем Ваше участие в её работе будет благотворным для нашего сборника.

С уважением и наилучшими пожеланиями,
Редколлегия «Математического просвещения»

Математический мир

Краткая история Анненшуле — ФМЛ 239

Д. Г. Ефимов, М. Я. Пратусевич

Вступление

В центре Санкт-Петербурга между двумя улицами — Фурштатской и Кирочной — располагается Президентский физико-математический лицей № 239. Он является одним из выдающихся учебных заведений Санкт-Петербурга и имеет богатую историю, состоящую из двух ветвей: истории собственно 239-й школы г. Ленинграда, отметившей столетие со дня основания в 2018 г., и истории той школы, в здании которой он размещается, — одного из знаменитейших не только в дореволюционном Санкт-Петербурге, но и во всей России училища Святой Анны (Анненшуле).

Школа № 239 была организована в 1918 г. и первоначально располагалась в особняке Лобановых-Ростовских, знаменитом «доме со львами»[1)] на углу Адмиралтейского проспекта и Исаакиевской площади.

Школа несколько раз меняла свой адрес и в 1975 г. вселилась в здание по адресу Кирочная, 8, которое ранее было построено для училища Св. Анны.

[1)] Это здание упомянуто в поэме А. С. Пушкина «Медный всадник»:

> …Тогда, на площади Петровой,
> Где дом в углу вознёсся новый,
> Где над возвышенным крыльцом
> С подъятой лапой, как живые,
> Стоят два льва сторожевые….

Исторический обзор училища Святой Анны

В 1720–1722 гг. на окраине Немецкой слободы Санкт-Петербурга была построена деревянная лютеранская церковь, освящённая 18 марта 1722 г. Её первым настоятелем стал Иоганн Леонард Шатнер. По своей инициативе Шатнер стал обучать немецкой грамоте и Закону Божьему нескольких мальчиков — детей прихожан. Вскоре популярность учителя возросла: многие из прихожан захотели отдать учиться своих детей к пастору. Места в церкви для занятий стало не хватать, поэтому Шатнер начал добиваться у общины согласия на постройку отдельного школьного здания. Помощь в этом деле ему оказал граф Яков Вилимович Брюс[2)]. В 1734 г. последовало его распоряжение о строительстве первого здания для школы. И вот 3 января 1736 г. в отдельном деревянном здании около церкви была торжественно освящена школа. Этим было положено начало Анненшуле.

В 1740 г. умерла императрица Анна Иоанновна, пожертвовавшая в своё время большую сумму денег на строительство нового храма. Церковный совет на заседании 16 октября решил, что новая церковь будет носить имя Святой Анны (до этого она называлась церковью Св. Петра или кирхой на Литейном дворе). Одновременно это название получила и школа при церкви. С тех пор она стала называться Училищем Святой Анны (по-немецки Annenschule).

В 1775–1779 гг. неподалёку от здания школы знаменитым петербургским архитектором, немцем по происхождению, Юрием Матвеевичем Фельтеном (автором великолепной решётки Летнего сада), была возведена каменная лютеранская церковь Святой Анны. Этот храм существует до сих пор.

В 30-е годы XIX века школа Св. Анны ввела в свой курс естественную историю, технологию, английский язык. В 1833–1839 гг. новый директор доктор Эрихсен (был директором с 1833 г. по 1845 г., причём первым штатным) преобразовал школу в заведение с классическим характером. С этого момента был окончательно введён гимназический курс для мальчиков и девочек. В результате этого школа стала очень престижной. Сорок её выпускников стали студентами Петербургского, Московского, Дерптского и Гельсингфорского университетов, а 33 выпускницы сдали экзамен на гувернанток.

[2)] Я. В. Брюс (1670–1735) — генерал-фельдцейхмейстер, герой битвы при Лесной и Полтавской битвы, сенатор, учёный, президент ряда коллегий, был одним из образованнейших людей своего времени. Он занимался математикой, физикой, астрономией, внёс существенный вклад в развитие русской артиллерии и артиллерийской науки.

Достижения школы высоко оценил император Николай I, он присвоил ей 3 ноября 1852 г. статус государственной гимназии. В 1862 г. выпускники школы получили право без сдачи вступительных экзаменов, только по аттестату об окончании гимназии, поступать в университет.

К 1860-м годам Анненшуле настолько разрослась, что ей стало не хватать помещений. Поэтому в 1868 г. по проекту архитектора А. И. Дютака было возведено новое каменное здание. В нём сейчас и находится ФМЛ № 239. Монументальное здание вобрало в себя всё передовое по тем временам в области строительства помещений для учебных заведений. Новый дом был построен в очень короткий срок — за год большое здание в три этажа с подвалами расположили на церковном дворе между Кирочной и Фурштатской улицами. Главный фасад нового училищного дома был обращён к церкви Святой Анны.

Особенностями этого здания являлись водопровод, воздушное отопление, специальная классная мебель — парты шести различных размеров для учеников разного роста. Всё в новом здании было просто, строго и практично, оно действительно удачно отвечало своему назначению.

Своего наивысшего расцвета Училище Св. Анны достигло в 1884–1910 гг., когда его директором был талантливый педагог Иосиф Кёниг.

Иосиф Кёниг заведовал школой 26 лет с блестящим успехом. Ежегодно увеличивалось число учащихся, при нём расширились размеры школьных помещений. В 1889 г. на деньги, пожертвованные выпускниками, по проекту архитектора В. А. Шрётера (тоже выпускника Анненшуле) к зданию школы был пристроен гимнастический зал арочного типа со стальным каркасом, удостоенный на Всероссийской гигиенической выставке 1893 года Золотой медали как не имеющий себе равных в Европе[3)].

Это был первый специализированный спортивный зал в школах Российской империи. До сих пор этот зал используется учащимися физико-математического лицея № 239. Большой гимнастический зал особой оригинальной конструкции, с полукруглой крышей, был долгое время лучшим спортивным залом в городе. Сюда в 1908–1914 гг. ходил заниматься даже академик Иван Петрович Павлов с учениками.

В 1905–1906 гг. было выстроено новое школьное здание на противоположной стороне от церкви Св. Анны. Архитекторы А. Ф. Бубырь и Л. А. Ильин возвели пятиэтажное каменное здание с двумя выходами: для мальчиков и для девочек. Это здание до сих пор служит образцом для школьного строительства. Теперь в этом здании расположен второй

[3)] Интересно, что именно в этом зале прошёл в 1906 г. первый в России матч по баскетболу. Может быть, поэтому ученики лицея так любят играть в баскетбол?

корпус ФМЛ № 239, в котором учатся лицеисты 5–8 классов, а также расположены помещения для дополнительного образования: изостудия, лаборатории робототехники, химические и физические лаборатории.

Через год после Октябрьской революции, 18 октября 1918 г., училище Св. Анны было национализировано и постановлением Наркома народного просвещения зачислено в разряд правительственных учебных заведений, на его базе была организована 11-я советская трудовая школа. Начался новый этап в жизни одного из известнейших учебных заведений города. Преподавание предметов на немецком языке было сокращено, а затем полностью прекращено. Постепенно был заменён педагогический персонал.

* * *

Училище Св. Анны просуществовало 182 года. За этот период оно прошло огромный путь от любительского кружка по изучению письма и счёта до одного из самых престижных учебных заведений Санкт-Петербурга и России. Выпускниками Анненшуле являлись известный путешественник Н. Миклухо-Маклай, учёный и врач П. Ф. Лесгафт, скульптор А. Бах, академик-востоковед В. В. Струве, известнейший врач и организатор первого в мире института усовершенствования врачей Р. Эйхвальд, знаменитый лингвист и исследователь фольклора Р. Я. Пропп и многие другие известные учёные, художники, артисты, предприниматели. И после революции в этих зданиях учились многие известные личности: великий поэт Иосиф Бродский, известный шахматист Виктор Корчной, народный артист СССР Василий Меркурьев и многие другие.

Несмотря на то что училища Святой Анны давно уже не существует, что отсутствует какая-либо прямая, существенная преемственность в кадрах педагогов[4)] между Анненшуле и физико-математическим лицеем № 239, в лицее хранят и помнят прошлое Анненшуле. В лицейских стенах витает некий дух, объединяющий прошлых и нынешних воспитанников.

239-я школа в довоенный период и во время блокады

Одним из важнейших событий в истории 239-й школы, впрочем как и всей страны, стала Великая Отечественная война и, прежде всего, блокада Ленинграда.

[4)] Одним из немногочисленных исключений являлся Д. Лобысевич, учившийся в 1910–1918 гг. в Анненшуле, а затем преподававший в ФМШ № 239. Другим любопытным примером является знаменитая династия артистов Фрейндлих. Бруно Фрейндлих учился в Анненшуле в 1918–1919 гг., его дочь Алиса Фрейндлих окончила школу № 239.

Для того чтобы собирать детей вместе, обеспечить им помощь, дать им хоть какой-нибудь шанс на жизнь, поздней осенью 1941 г. было решено открыть некоторые школы. Среди вновь функционирующих школ была и школа № 239. В школе было печное отопление, т. е. она могла работать автономно. Существовало и бомбоубежище. Занятия было приказано начать 4 ноября, но в двести тридцать девятой не стали дожидаться этого срока. 27 октября 1941 г. школа распахнула свои двери перед 700 учащимися семи школ Октябрьского района. Всего получилось 19 классов.

Уроки в школе начинались в 11 часов, каждый длился 30 минут. В день было всего 4 урока, учились 6 дней. После второго урока давали бесплатный суп (горячую воду с плавающими сверху жиринками), причём за детьми следили, чтобы они сами съедали этот обед, а не уносили с собой, так как у многих дома были родители и братья с сёстрами. Но всё же некоторые после еды сливали со всех тарелок капельки в одну, чтобы потом отнести родным. Сначала кормили только обедами, но приказом Городского отдела народного образования в 1943 г. было введено трёхразовое питание. Как вспоминали учащиеся, в школу ходили не только за знаниями, но и чтобы пообедать.

Учиться было трудно. Очень мешал холод. Довольно часто было так холодно, что замерзали чернила. Стёкол в школе не было, окна заделывали чем попало.

Вариант выпускного экзамена по математике составлялся непосредственно в Ленинграде и состоял всего из трёх заданий, поскольку обессиленные учащиеся просто физически не смогли бы написать полный вариант.

Каждый выпускник 1942 г. получил благодарность исполкома Ленсовета просто за то, что сумел закончить школу в условиях блокады.

Многие учителя покидали школу: умирали, уходили на фронт. Но приходили новые педагоги. Так, например, в январе 1942 г. к работе классным руководителем и учителем математики старших классов вместо своего отца, умершего во время блокады, приступил отозванный с фронта Владимир Васильевич Бакрылов, ставший впоследствии одним из ярчайших учителей школы № 239 и города Ленинграда.

Во время Великой Отечественной войны многие учителя 239-й школы были на фронте. Среди них и учитель физической культуры Дмитрий Александрович Лобысевич, проработавший в школе с 1930 г. по 1941 г. и с 1946 г. по 1985 г. Он закончил войну в Берлине. У Рейхстага он попросил солдат соорудить гимнастическую пирамиду и, взобравшись на неё, написал на колонне: «Лобысевич. Ленинград. 239 школа».

Физико-математическая школа № 239

Одной из важнейших вех в истории 239-й школы стал 1961 г. Именно тогда школа стала специализированной математической. В неё начали принимать в 10 класс[5)] по конкурсу учащихся, проявивших повышенные способности в области естественно-математических дисциплин. Учёные из Ленинградского государственного университета и Ленинградского отделения математического института Академии наук СССР (прежде всего директор ЛОМИ Г. И. Петрашень и тогда молодой учёный-геометр В. А. Залгаллер) помогли организовать учебный процесс, разработать и составить учебные программы по математике, физике, способствовали техническому оснащению школы и на первом этапе участвовали в учебном процессе[6)].

Во многом эти изменения были связаны с директором 239-й школы М. В. Матковской, занимавшей эту должность с 1950 г. по 1976 г. Именно ей удалось сделать школу лучшей в городе и известной далеко за пределами Ленинграда.

Школа выделялась и своими учителями, педагогическим коллективом. В 1961 г. в неё вернулся Вл. В. Бакрылов, здесь он проработал учителем математики до своей кончины в январе 1997 г. Продолжал работать учитель физкультуры Д. А. Лобысевич.

С 1961 г. по 2008 г. в школе работал учитель физики Ю. Л. Слуцкий, многие годы руководивший шахматным кружком. Шахматисты школы с успехом выступали в соревнованиях. Одним из выпускников школы является чемпион мира по шахматам Александр Халифман.

В 1960-е гг. была развёрнута и широкая научная деятельность учителей и учащихся. В 1963 г. под руководством учителя физики Г. П. Посецельского был создан научный клуб «Тензор». В этом клубе проводились бои по математике и физике, учителя и учащиеся выступали с научными докладами, устраивались научно-практические конференции. Благодаря Г. П. Посецельскому удалось установить связи со многими физическими и математическими школами Советского Союза. С 1969 г. стали проходить научные конференции. На них съезжались с территории всей страны. Первая конференция прошла в Москве, а в 1972 г. гостей принимала ФМШ № 239.

В тот же период были заложены и многие традиции, существующие до сих пор. Их ярчайшим примером являются ежегодные летние и осенние,

---

[5)] С 1958 г. было введено 11-летнее образование. — *Прим. ред.*

[6)] Интересно, что уже в 1963 г. у школы была своя ЭВМ и уже тогда преподавался курс информатики. А интернет появился в школе в 1993 г.

зимние и весенние туристические походы. Туризм — это отличный способ решения многих проблем. Походы и многодневные поездки воспитывают и сплачивают коллектив на основе интересного общего дела. Они не только способствуют самоутверждению учащихся среди своих друзей, учат их преодолевать трудности, воспитывают психологию победителя, но и дают отличные деловые навыки, учат людей быть терпимыми друг к другу, работать единой командой ради достижения поставленной цели. Любой поход позволяет преподавателю лучше узнать, оценить ребят, показать себя, увлечь своей личностью. В тот период в школе сложился и старейший на сегодняшний день туристический клуб «Шаги», существующий с 1964 г. Любопытен и выбор названия клуба. Его на одном из заседаний клуба предложил знаменитый бард Александр Городницкий. Тогда же традиционными, наиболее массовыми и самыми любимыми в среде учащихся стали лыжные весенние походы в Хибины, которые до сих пор проводятся ежегодно в марте, и лодочные походы по Вуоксе, устраиваемые в июне–июле.

Под руководством учителя математики В. И. Рыжика в школе стало развиваться спортивное ориентирование. Многие ученики школы стали мастерами спорта, чемпионами мира и СССР по спортивному ориентированию[7)].

В 1961 г. появился и знаменитый литературный клуб «Алые паруса», названием обязанный произведению Александра Грина.

Клуб «Алые паруса» проводил большую работу. В нём устраивались встречи с интересными людьми, в том числе писателями и поэтами, организовывались походы, путешествия, его силами проводились многие общешкольные мероприятия, участники клуба писали рассказы, стихи, состояли в переписке с другими литературными объединениями, существовавшими в школах на территории Советского Союза.

По инициативе клуба были открыты два музея Александра Грина в нашей стране.

В 1990 г. 239 школа одной из первых в стране получила статус лицея.

С 1961 г. по 1987 г. в ФМШ № 239 учились школьники только двух последних классов. С 1987 г. до 2009 г. в этой школе могли учиться школьники четырёх последних классов. С 2009 г. в лицее обучаются школьники 5–11 классов.

Выпускниками 239 школы являются многие известные люди страны. Это учёные: лауреаты премии Филдса Г. Я. Перельман, С. К. Смирнов, академик РАН Ю. В. Матиясевич, бывший ректор СПбГУ, академик РАО

[7)] В 1970-х годах проводились даже соревнования по ориентированию между сборной Ленинграда и сборной 239-й школы, в которых сборная школы неизменно одерживала верх.

ПОБЕДИТЕЛИ МЕЖДУНАРОДНЫХ ОЛИМПИАД

ФИЗИКА

1983 АЛЕКСЕЙ ГНИЛОВСКОЙ
1983- АНТОН
1984 АЛЕКСЕЕВ
1984 ДМИТРИЙ ГЛУЩЕНКОВ
1992 ДМИТРИЙ АРБАТСКИЙ
1993 ДЕНИС КИСЛОВСКИЙ
1997 ВАСИЛИЙ ПЕСТУН
1997 АЛЕКСЕЙ КОЖЕМЯК

МАТЕМАТИКА

1964 ЮРИЙ МАТИЯСЕВИЧ
1965 НИКОЛАЙ ШИРОКОВ
1966 ГРИГОРИЙ РОЗЕНБЛЮМ
1967 АЛЕКСАНДР ЛИВШИЦ
1968 ВАЛЕРИЙ ФЕДОТОВ
1971 АЛЕКСАНДР ЧИСТОВ
1982 ГРИГОРИЙ ПЕРЕЛЬМАН
1983 КОНСТАНТИН КОХАСЬ
1983 ИГОРЬ ЖУКОВ
1984 ФЕДОР НАЗАРОВ
1985 ОЛЬГА ЛЕОНТЬЕВА
1986 ВИКТОР ПОРОШИН
1986- СТАНИСЛАВ
1987 СМИРНОВ
1987 ИЛЬЯ БИНДЕР
1987- СЕРГЕЙ
1989 ИВАНОВ
1988 СЕРГЕЙ БЕРЛОВ
1989 МАРИЯ РОГИНСКАЯ
1989- ЕВГЕНИЯ
1991 МАЛИННИКОВА
1990- АЛЕКСАНДР
1991 ПЕРЛИН
1991 ВСЕВОЛОД ЖУХОВИЦКИЙ
1992 ДМИТРИЙ КАРПОВ
1992 РУСЛАН ИСМАИЛОВ
1993 ЕЛИЗАВЕТА РОЗЕНБЛЮМ
1993- МИХАИЛ
1994 БОНДАРКО
1994 СЕРГЕЙ НОРИН
1994 АННА ДЮБИНА
1995- ВЕРОНИКА
1996 ЕСАУЛОВА
1995 ДМИТРИЙ ЗАПОРОЖЕЦ
1996 ЕЛЕНА РУДО
1996- НИКОЛАЙ
1998 ДУРОВ
1997 СЕРГЕЙ УЗДИН
1997 МИХАИЛ МИТРОФАНОВ

ИНФОРМАТИКА

1989 ИЛЬЯ ДОГОЛЯЦКИЙ
1992 ДМИТРИЙ ДАВЫДОК
1993 ИЛЬЯ МИРОНОВ
1996- НИКОЛАЙ
1998 ДУРОВ

ХИМИЯ

1981- НИКОЛАЙ
1982 ШУБИН
1996 ВЛАДИМИР МОЛОДОЖЕН

ПОБЕДИТЕЛИ ВСЕСОЮЗНЫХ И ВСЕРОССИЙСКИХ ОЛИМПИАД

ФИЗИКА

1967 ИВАН ОВЧИННИКОВ
1968 МИХАИЛ ВЫДРЕВИЧ
1969 ЮРИЙ ЛУК
1974 СЕРГЕЙ ЧЕРЕМШАНЦЕВ
1974- ЮРИЙ
1976 ТЕТЕРИН
1974- ВЛАДИМИР
1976 ВЕЧИРКО
1976 ВЛАДИМИР ПРОСИХИН
1977 ИГОРЬ КОНДРАШКИН
1977 ЛЕОНИД ВОЛКОВ
1978 ВАЛЕРИЙ СМЫШЛЯЕВ
1979 АНДРЕЙ ЗАНЕВСКИЙ
1980 АЛЕКСЕЙ ЖЕЛЬВИС
1980- ПАВЕЛ
1981 РОДИН
1981 СЕРГЕЙ САШОВ
1982- СТАНИСЛАВ
1983 АМШИНСКИЙ
1983 ПЕТР ВОРОТНЕВ
1984 АЛЕКСАНДР ТЕПЛЯЕВ
1986 ОЛЕГ АРХАНГЕЛЬСКИЙ
1986 ЕКАТЕРИНА КИРИЛЛОВА
1987 АНДРЕЙ БЫЦКО
1988- ЮРИЙ
1989 УВАРОВ
1991 АНДРЕЙ ШИРЯЕВ
1991- ДМИТРИЙ
1992 КОВАЛЕВСКИЙ
1993 ЮРИЙ БАЗЛОВ
1994- ИЛЬЯ
1997 АНИЧКИН
1994- МИХАИЛ
1995 ГУБАНОВ
1994- АНДРЕЙ
1995 КОМАРОВСКИХ
1994- КОНСТАНТИН
1995 КОСЕНКОВ
1994- АЛЕКСЕЙ
1995 САДОВСКИЙ
1994- МИХАИЛ
1997 ФОМИЧЕВ
1996 МИХАИЛ УЛАНОВ
1997 СТАНИСЛАВ НАРИВОНЧИК
1997- АЛЕКСАНДР
1998 ШАПИРО

МАТЕМАТИКА

1968 ВИКТОР ЗЫГАРЬ
1968 ВЛАДИМИР МАКАРЫЧЕВ
1970 ГРИГОРИЙ ШИФРИНОВИЧ
1972 АНДРЕЙ МАКАРОВ
1973- ВЛАДИМИР
1974 ДУБИЦКИЙ
1980- МИХАИЛ
1981 ОРЕЛ
1980- МИХАИЛ
1981 ОРЕЛ
1980- ГРИГОРИЙ
1981 ПЕРЕЛЬМАН
1981 АНДРЕЙ МИНАРСКИЙ
1981 ЛЕОНИД ЛАПШИН
1981- АЛЕКСАНДР
1982 ЛЕВИН
1982- АННА
1984 БОГОМОЛЬНАЯ
1982 АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВ
1982- ИГОРЬ
1983 ЖУКОВ
1982- КОНСТАНТИН
1983 КОХАСЬ
1983- ФЕДОР
1984 НАЗАРОВ
1984 ТИМУР ОЙХБЕРГ
1984- ОЛЬГА
1985 ЛЕОНТЬЕВА
1984- СТАНИСЛАВ
1987 СМИРНОВ
1985 ИЛЬЯ ДОНДАШАНСКИЙ
1985- АЛЕКСАНДР
1986 ГИЛЬ
1985- ГЛЕБ
1986 КАЛИНИН
1985- ВИКТОР
1986 ПОРОШИН
1985- АНТОН
1986 ПЕТРУНИН
1986- СЕРГЕЙ
1989 ИВАНОВ
1986- ИЛЬЯ
1987 БИНДЕР
1987- СЕРГЕЙ
1988 БЕРЛОВ
1987- АЛЕКСАНДР
1989 ВИРО
1987- МАРИЯ
1989 РОГИНСКАЯ
1987- АЛЕКСАНДР
1989 ШУМАКОВИЧ
1988- ЕВГЕНИЯ
1991 МАЛИННИКОВА
1988- ГЕОРГИЙ
1990 АБРАМОВ
1989- АЛЕКСАНДР
1991 ПЕРЛИН
1990- ВСЕВОЛОД
1991 ЖУХОВИЦКИЙ
1990- ЮЛИЯ
1992 ПЕВЦОВА
1991- ЕЛИЗАВЕТА
1993 РОЗЕНБЛЮМ
1991- МИХАИЛ
1994 БОНДАРКО
1991- РУСЛАН
1992 ИСМАИЛОВ
1992- АННА
1994 ДЮБИНА
1992 ДМИТРИЙ КАРПОВ
1993 ЮРИЙ БАЗЛОВ
1993 ИЛЬЯ МИРОНОВ
1993- СЕРГЕЙ
1994 САЙ
1993- ЛЕВ
1994 ЕВДОКИМОВ
1993- ВЕРОНИКА
1996 ЕСАУЛОВА
1993- МАРАТ
1996 КОЗЛОВ
1993- ЕЛЕНА
1996 РУДО
1994- ДМИТРИЙ
1996 ЗАПОРОЖЕЦ
1994 МАТВЕЙ КАЗАКОВ
1994 МАХМУД МАМЕДОВ
1994- СЕРГЕЙ
1996 НОРИН
1994- СЕРГЕЙ
1997 УЗДИН
1994 ВАДИМ БОЙЦОВ
1994 ДАНИЛА МЕДВЕДЕВ
1994 АЛЕКСАНДР ОРЛОВ
1994- НИКОЛАЙ
1996 СЛОБОДЯНИК
1995- НИКОЛАЙ
1998 ДУРОВ
1995- АЛЕКСАНДР
1996 ЕГОРОВ
1995- АНДРЕЙ
1996 СИМАНОВСКИЙ
1996 ОЛЬГА ВАНЮШИНА
1996 АНДРЕЙ УГЛОВОЙ
1996 ВИКТОР ПЕТРОВ
1996 ПАВЕЛ ГИНЗБУРГ
1996 МИХАИЛ РЫБИН
1996- ФЕДОР
1998 БАХАРЕВ
1997 МИХАИЛ МИТРОФАНОВ
1997- ФЕДОР
1998 ПЕТРОВ
1997- СЕРГЕЙ
1998 ТИХОМИРОВ
1997- АЛЕКСЕЙ
1998 БЕЛЕНЬКИЙ
1997- ЕКАТЕРИНА
1998 СОПКИНА
1997- ЮРИЙ
1998 ЛИФШИЦ
1997- ОЛЕГ
1998 ЕТЕРЕВСКИЙ
1997- АЛЕКСАНДР
1998 ЖЕЛЕЗНЯК
1998 АЛЕКСЕЙ ФЕДОТОВ
1998 ФИЛИПП СМИРНОВ
1998 АНДРЕЙ ВОРОБЬЕВ
1998 СЕРГЕЙ МЕЛЬНИК

ИНФОРМАТИКА

1988 АНДРЕЙ ВАЩИЛЛО
1989 ИЛЬЯ ДОГОЛЯЦКИЙ
1989 ЛЕВ НОВИК
1990 ГРИГОРИЙ ЕСЬКОВ
1991 АННА ПРАТУСЕВИЧ
1991 АЛЕКСАНДРА КОСОВСКАЯ
1991- ИЛЬЯ
1993 МИРОНОВ
1992 ДМИТРИЙ ДАВЫДОК
1993 ДЕНИС КИСЛОВСКИЙ
1995 ЛЕВ ЕВДОКИМОВ
1996- НИКОЛАЙ
1998 ДУРОВ
1996 ДЕНИС КУЗНЕЦОВ
1996 АЛЕКСЕЙ ЛОПАТИН
1996 СЕРГЕЙ МАРКОВ
1997- НИКИТА
1998 ЗИНОВЬЕВ

АСТРОНОМИЯ

1995 ГЕРА ГЛАЗОВ
1997 ВАСИЛИЙ ПЕСТУН
1997- АЛЕКСАНДР
1998 ШАПИРО

ХИМИЯ

1995- ВЛАДИМИР
1996 МОЛОДОЖЕН
1997 ВАСИЛИЙ ПЕСТУН

Л. А. Вербицкая и др., артисты А. Б. Фрейндлих, О. А. Волкова, Б. Б. Гребенщиков, А. Ю. Толубеев и др., политики и общественные деятели Н. Левичев, С. Фурсенко, М. Зурабов и др., спортсмены: чемпион мира по шахматам А. Халифман, олимпийская чемпионка по спортивной гимнастике Н. Кучинская и др.

Сегодняшний день

В 2014 г. 239 школа стала единственным в стране Президентским физико-математическим лицеем. Этот статус, разумеется, предусматривает наличие возможности для учеников из других городов учиться в лицее. И в 2016 г. на базе третьего здания лицея открыт интернат «Формула успеха». Сейчас в интернате проживают 77 учащихся из 35 регионов России, а также Украины и Белоруссии. Для отбора в интернат ученики девятых классов должны успешно пройти два онлайн-курса либо успешно участвовать в региональных сменах центра «Сириус». Предпочтение отдаётся ребятам из небольших городов и сёл.

Сейчас в лицее 30 классов, в которых учатся 866 учеников. Все классы являлись классами с углублённым изучением физики и математики, пока в 2019 г. не открылся биолого-химический класс, созданный во взаимодействии с компанией BioCad и призванный готовить учеников к деятельности в области современных биотехнологий[8]. Действует и отделение дополнительного образования детей (ОДОД), включающее в себя 252 учебные группы (более 2500 воспитанников), в которых проводятся занятия по 82 программам 5 направлений. При этом большая часть учащихся ОДОД не является учениками лицея.

В составе ОДОД — всемирно известные математические кружки, ведущие свою родословную от первых в стране математических кружков 1934 г., кружки городских физического и химического центров. Несколько лет назад в лицее открылся и биологический центр.

В лицее работают уникальные лаборатории робототехники, микроэлектроники, физической электроники и оптики, нанотехнологий, две химические лаборатории, кабинет компьютерной музыки, издательский центр.

В 2019 г. в лицее открыто уникальное подразделение — Центр производства массовых открытых онлайн-курсов (lektorium.tv). Выпущены несколько курсов по физике, литературе, робототехнике, подготовленных учителями лицея, а также курсы для школьников по математике, астрономии.

[8] Как ни странно, для успешной работы в области современных биотехнологий определяющей является хорошая математическая подготовка.

Конечно, нельзя не отметить олимпиадные достижения лицеистов. Только в 2019 г. учащиеся лицея завоевали 60 дипломов заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, физике, информатике, астрономии, химии, экономике. Лицеисты получили серебряную медаль на Международной олимпиаде школьников по математике, золотую медаль на Международной олимпиаде по информатике, две золотых и одну серебряную медали на Международной олимпиаде по астрономии и астрофизике. На Всемирных олимпиадах по робототехнике в 2012–2019 гг. проекты лицеистов завоевали золотые медали. На базе лицея проходят подготовку школьники Петербурга — участники заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, физике и химии.

Лицей является одним из флагманов российской образовательной робототехники. Уже с 2009 г. лицеисты 5–7 классов изучают робототехнику на уроках. В кружках по робототехнике занимаются по 26 образовательным программам более 500 школьников. На базе лицея ежегодно проходит чемпионат города по робототехнике. Уже 6 лет лицей проводит Международный фестиваль робототехники «Робофинист».

Лицей в 2015, 2016 и 2017 гг. возглавлял рейтинг «Топ-500» школ России.

Учителями лицея выпущено около 20 учебников и учебных пособий, а также опубликованы более 30 статей в различных изданиях.

Живы и старые традиции. Каждый год проводятся более 10 дальних туристических походов, в том числе на Байкал, Камчатку, Южный Урал, Крым, Кавказ, Норвегию (здесь перечислены походы только 2019 г.), два палаточных лагеря в рамках проекта «Помощь монастырям и заповедникам России» в Тихвине и на Соловках. Каждый год проходит трёхдневный осенний туристический слёт, на который выезжает практически вся школа.

Несколько десятков лет проходят летние школы для занимающихся в наших кружках: летняя математическая школа на 190 учащихся, летняя школа робототехники на 240 учащихся, летняя школа по физике на 120 учащихся. Много лет (с 1981 г.) организатором летних математических школ был заместитель директора лицея, профессор РГПУ им. А. И. Герцена, народный учитель РФ С. Е. Рукшин. Сейчас эти школы проводятся под руководством Д. А. Ростовского. Уже более 20 лет в летних математических школах занимаются не только ученики математических кружков лицея, но и школьники из других городов.

В течение учебного года каждый класс готовит литературно-музыкальное представление «Литературный вторник», которое затем выносит на суд зрителей во время большой перемены (специально для этого удлинённой до 30 минут). Стал традицией новогодний учительский спектакль, который разыгрывают перед учениками учителя лицея в последний день второй четверти. А во вторую субботу марта проходит вечер песни, который готовится силами выпускников и учеников лицея (этой традиции уже больше 30 лет).

Сейчас в лицее создаётся не имеющий аналогов Центр цифрового образования, а на базе третьего здания лицея проектируется мини-технопарк робототехники, нанотехнологий и микроэлектроники.

Президентский физико-математический лицей № 239 постоянно развивается, видоизменяясь, но сохраняя при этом лучшие традиции петербургского образования.

Дмитрий Георгиевич Ефимов, гимназия № 209 Центрального района Санкт-Петербурга «Павловская гимназия»

Максим Яковлевич Пратусевич, «Президентский физико-математический лицей № 239»

Геометрия: классика и современность

Теоремы Лежандра о сумме углов треугольника в абсолютной и гиперболической геометриях

Г. А. Гальперин

Введение. Три выдающихся учебника геометрии

С середины XVIII в. во Франции нарастали настроения, знаменовавшие глубокий переворот во взглядах на все общественные отношения в стране; назревала революция. В области народного образования всё настойчивее становились требования его расширения и придания ему более живого и конкретного характера. Это, естественно, не могло не отразиться и на взглядах на преподавание математики. Как известно, новая идеология того времени в наибольшей мере получила выражение у «энциклопедистов», которые в значительной мере и творили её. «Энциклопедия» стала выходить в 1751 г. под руководством Дидро и Даламбера; в частности, математическим её разделом руководил Даламбер.

В 1757 г. появился VII том «Энциклопедии», в котором была опубликована статья Даламбера «Геометрия». Значительная её часть была посвящена вопросу о том, как надлежит составлять начала науки вообще и геометрии в частности. Не останавливаясь на полной (довольно длинной и сложной) концепции Даламбера, отметим, что он не считал, что начала геометрии должны составляться строго по плану и методу Евклида, «необходимо только сохранять внутреннюю связь понятий». Изложение начал геометрии по плану Даламбера должно быть сообразовано с тем, для какой цели книга предназначается — для начального ли обучения, для более серьёзного изучения геометрии или же для подготовки людей, которые имеют склонность и способности к специальным занятиям этой наукой; каждой из этих трёх основных задач должна соответствовать учебная книга особого типа.

Статьи Даламбера получили широкое распространение в самой Франции и за её пределами; с ними не только считались при составлении новых «Начал» геометрии, но часто основывали на них построение новой книги. Из сочинений конца XVIII – начала XIX века три имели наибольшее значение: «Курс математики» Безу, «Начала геометрии» Лежандра и «Начала геометрии» Лакруа[1]. Все эти три книги-руководства имели различное назначение и различную структуру, но все три отражали тенденцию Даламбера оторвать преподавание геометрии от традиционной тяжёлой схемы «Начал» Евклида; они знаменовали собой новую эпоху в преподавании геометрии. И не случайно: эти книги — именно те три типа учебной книги, о которых говорил Даламбер.

Книга Безу была предназначена для артиллерийских и морских учебных заведений. Этот курс был явно предназначен для первой категории читателей, он написан очень доступно, и его изложение носит до некоторой степени повествовательный характер и не претендует на выдержанную точность. Содержание курса составляют задачи и правила измерительной геометрии; в нём приведены приложения к морским измерениям и работе с приборами. Учебник Безу был написан для начинающих учащихся, и в качестве начального курса он получил широкое распространение (даже англичане перевели его для своих начальных школ).

Но именно потому, что учебник Безу можно рассматривать как пропедевтическое руководство, была необходима более серьёзная учебная книга, предназначенная для школ повышенного типа — для средних учебных заведений (т. е. для второй категории читателей по Даламберу). И такой книгой стали «Начала» Лежандра (1794).

Эта книга действительно сменила книгу Евклида с тем же названием. Лежандр, следуя за Евклидом, существенно и очень глубоко переработал всё содержание геометрии.

Начал он с замены стиля «Начал» Евклида, заменив формально-«эпический» язык греческого геометра живым французским изложением. Он опустил всё, что не укладывается в рамки первого ознакомления с гео-

[1] Этьен Безу (1730–1783), Адриен Мари Лежандр (1752–1833), Сильвестр Франсуа де Лакруа (1765–1843).

метрией, а доступно лишь людям с высоким общим развитием, превратив свой курс в курс элементарной геометрии и придав ей *метрический* характер. (Метрический характер геометрии — одна из идей Даламбера.)

Лежандр ввёл в курс элементы алгебры, и вся вторая книга «Начал» Евклида отпала, так как она лишь иллюстрировала общие алгебраические соотношения. Он арифметизировал учение об отношениях и пропорциях — и отпала трудная книга V Евклида. Извлечение квадратного корня и введение радикалов освободили геометрию от совершенно недоступной книги X. (Книга X одновременно была подготовительной к книге XIII, задачи которой Лежандр вовсе не рассматривает.) Лежандр строит учение об измерении по плану Даламбера, специально исследует иррациональные отношения величин (при этом евклидова теория пропорций полностью преобразуется, равно как и теория пределов, слабо развитая Евклидом). Лежандр выдерживает возможную для того времени строгость геометрического рассуждения и лишь изредка впадает в ту «химерическую» точность, от которой предостерегал Даламбер. (В самом начале своей книги Лежандр строго доказывает следующее «химерическое» утверждение: *при совпадении двух точек одной прямой с двумя точками другой совпадут не только определённые этими точками отрезки, но и их продолжения*.) Книга Лежандра часто переиздавалась, была переведена на многие языки.

Наряду с книгой Лежандра, который превратил «Начала» Евклида в современный курс геометрии, появилось математическое руководство, рассчитанное на учащихся, которые подготавливаются к углублённому изучению математики. Это — книга Лакруа «Начала геометрии» (третье из серии написанных им руководств по «чистой и прикладной математике», начиная с арифметики и кончая дифференциальным и интегральным исчислением).

Содержание книги не очень глубоко отличалось от «Начал» Лежандра, но сама книга была составлена более компактно и в ней были более тщательно отработаны детали: книга начинается с дополнения к курсу арифметики, необходимого для непосредственного перехода к изучению «Начал геометрии».

Не вдаваясь подробно в различия между тремя упомянутыми курсами геометрии — Безу, Лежандра и Лакруа, — отметим только различие, которое касается учения о параллельных прямых.

У Безу это место изложено поверхностно, и трудность его обойдена совершенно. Доказательства прямых и обратных теорем интуитивны и апеллируют к наглядности, и, как и вся книга, рассчитаны только на то, чтобы начинающий учащийся усвоил фактическую сторону дела.

Лежандр формулирует предложение, играющее роль V постулата, отмечает его связь с суммой углов треугольника и старается его доказать. От издания к изданию своих «Начал» он изменяет доказательства утверждения, что сумма углов треугольника равна 180°, то «уточняя» предыдущее своё доказательство, то заменяя его новым. Эта глава доставляла большие затруднения Лежандру, и после многочисленных «доказательств» V постулата и последующих за ними опровержений Лежандр в конце концов (в 14-м переиздании своей книги) честно признаётся читателю, что единственное утверждение, которое ему удалось доказать про углы треугольника, — что их сумма *не превышает* 180°. Лежандровское доказательство этого фундаментального факта мы приводим ниже в несколько переработанном виде, а также (не совсем в хронологическом порядке) приводим его другие столь же замечательные утверждения, относящиеся к абсолютной геометрии и к геометрии Лобачевского.

Что касается Лакруа, то он, следуя Даламберу, аксиом в своей книге не приводит нигде[2)]. Однако, сформулировав предложение, что перпендикуляр и наклонная к одной прямой непременно должны встретиться (рис. 1), Лакруа говорит: «В трудности непосредственного доказательства этого предположения заключается несовершенство теории параллельных линий. Многие авторы делали для достижения цели бесплодные усилия; другие, как Безу, маскировали дефектное рассуждение. Мне кажется, это противоречит обязанности точного рассуждения, которую несёт автор каждого элементарного руководства. Я счёл более правильным выявить этот тонкий пункт, допуская его в качестве *постулата*, как это делает Евклид, только в более доступной форме».

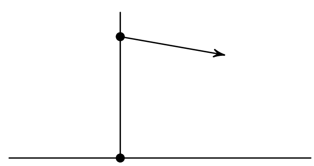


Рис. 1

* * *

Все три упомянутые геометрические книги — Безу, Лежандра и Лакруа — были составлены очень талантливо, они получили широкое распространение по всей Европе и выдержали большое число изданий.

[2)] Даламбер считал, что начала геометрии не следует начинать с аксиом, так как построение учебной книги на предпосланных аксиомах есть «претензия на „химерическую точность“», и эта «химерическая точность», оставаясь сомнительной в научном отношении, в учебной книге несомненно вредна и даже часто переходит в софистику. (Одно из таких «химерических» утверждений Лежандра о совпадении прямых приведено выше.) Хорошо известно, что построение геометрии Евклидом не носило строго логического характера. Наглядные представления и «указания глаза» сопутствуют в «Началах» логическим рассуждениям на всём их протяжении, и многие «строгие выводы» из аксиом вовсе не строги.

Не будет преувеличением сказать, что все последующие учебные книги по геометрии в XIX в. в большей или меньшей степени копировали книги Безу, Лежандра и Лакруа или же заимствовали отдельные части то у одного, то у другого автора[3)].

Не пошёл по этому пути только Лобачевский, написавший свой собственный учебник геометрии и создавший новую геометрию. Лежандр был единственным геометром, оказавшим влияние на Лобачевского при построении его теории параллельных линий. Влияние это, несомненно, было велико: учение о сумме углов треугольника в её связи с теорией параллельных линий в работах Лобачевского явно несёт на себе печать рассуждений Лежандра.

В этой статье мы приводим в несколько модернизированном виде утверждения и доказательства Лежандра, справедливые в абсолютной и гиперболической геометриях. Два из этих утверждений, Л1 и Л2, использовались в заметке автора об освещении плоскости прожекторами.

§ 1. Теорема Лежандра о сумме углов треугольника

Все утверждения элементарной геометрии, доказательства которых никак не затрагивают V постулата Евклида о единственности параллельной прямой, проходящей через точку вне данной прямой b («базы») и параллельной b, принадлежат так называемой *абсолютной* (*нейтральной*) *геометрии*. Двухтысячелетняя попытка доказать V постулат, основываясь лишь на «абсолютных» аксиомах, фактически эквивалентна попытке доказать, что вся геометрия и есть «абсолютная». Этого очень желал и сам Евклид, когда вывел свои первые 28 *абсолютных* теорем. Но затем наступил момент, когда Евклиду понадобилось ввести в свои дальнейшие рассуждения сумму углов треугольника и ему желательно было мыслить эту сумму как некую *константу*, а не как переменную величину, зависящую от формы треугольника и, возможно, от расположения этого треугольника на плоскости. Эта константа немедленно связывалась с *прямым углом* на плоскости, образованным двумя перпендикулярными прямыми. Прямой угол служил естественной мерой (единицей измерения), которую затем можно было удваивать, утраивать, дробить на мелкие, более удобные единицы измерения; в конце концов, из практических соображений, была введена новая единица измерения в 1°, равная $1/90$ прямого угла. Таким образом, прямой угол стал по определению содержать 90°,

---

[3)] Эти книги были переведены и на русский язык: *Безу Е.* Основы геометрии… для назначающих себя к мореплаванию. СПб., 1794; *Лежандр А. М.* Начальные основания геометрии. СПб., 1819; *Лакруа С. Ф.* Основания геометрии. СПб., 1835.

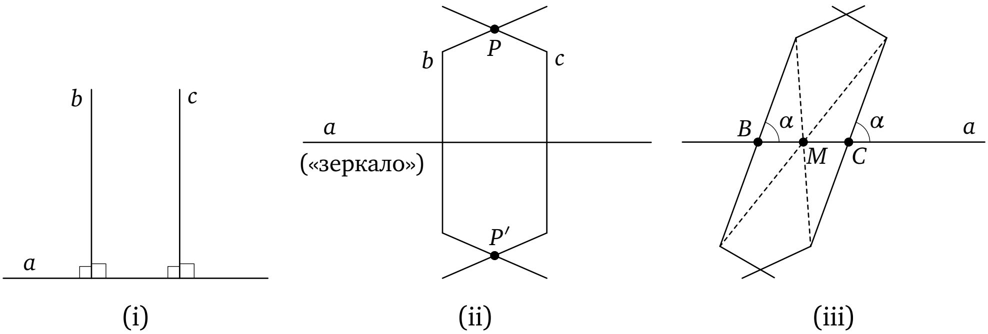


Рис. 2

но для простоты изложения его обозначали (и обозначают до сих пор) буквой d. Развёрнутый угол составил 180°, и это число оказалось именно той константой, которую ввёл Евклид для суммы углов любого треугольника. Исторически всё складывалось не совсем так, но подоплёка была именно такой.

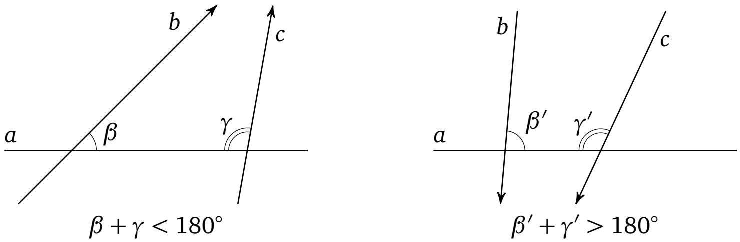
Сначала Евклид заметил, что две прямые b и c, перпендикулярные прямой a, не пересекаются, т. е. параллельны (рис. 2(i)). Действительно, если бы они пересекались в точке P с какой-то стороны от прямой a, то в силу зеркальной симметрии эти же прямые пересекались бы и в симметричной точке P' относительно «зеркала a» (рис. 2(ii)), и тогда прямые b и c пересекались бы в двух точках, P и P', чего не может быть в силу самого первого («первичного») постулата абсолютной геометрии:

(E1) *Через две точки проходит единственная прямая.*

Несколько позже Евклид расширил своё утверждение, заменив перпендикулярность прямых b и c их одинаковым наклоном к прямой a: $\angle(b,a)=\angle(c,a)=\alpha$. Пришлось подправить и доказательство: слова «отражение в зеркале a» следует заменить на «центральное отражение относительно середины M отрезка BC с концами в точках пересечения $B=b\cap a$ и $C=c\cap a$» (рис. 2(iii)). Идея симметрии сохранилась, как и идея получить противоречие с первым постулатом E1.

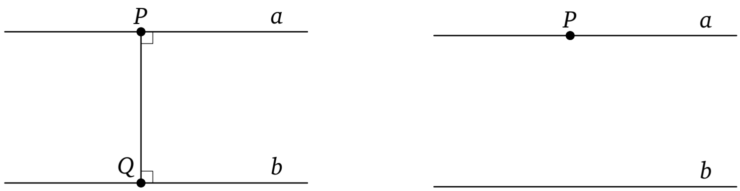
Это навело Евклида на мысль о том, что прямые b и c, наклонённые под *разными* углами к прямой a, *обязаны* пересекаться, причём с той стороны от прямой a, для которой «сумма внутренних углов β и γ меньше 180°» (рис. 3, на котором изображены две возможности пересечения прямых b и c по отношению к прямой a). Это и есть первоначальный неискажённый вариант V постулата Евклида.

После многочисленных попыток его доказательства в течение 20 столетий математики заменили громоздкую формулировку Евклида на две современные формулировки, эквивалентные исходной и друг другу:



(i) (ii)

Рис. 3



(i) (ii)

Рис. 4

(E5) Для пары (b, P), где b — произвольная прямая, а P — произвольная точка не на прямой b ($P \notin b$), существует *единственная* прямая a, параллельная прямой b и проходящая через точку P[4].

Замечание. «Существование» — это теорема (см. с. 24 и рис. 4(i)); «единственность» — это постулат (E5), см. рис. 4(ii).

(Δ5) Для любого[5] треугольника Δ сумма его внутренних углов $\sum(\Delta)$ равна 180°.

Лежандр пытался, как и многие другие математики (из наиболее известных — итальянский монах Саккери, англичанин Валлис, немец Ламберт, венгр Фаркаш Бойяи) доказать утверждение (Δ5). В каждом новом издании своего учебника по геометрии, а таких было 14, Лежандр приводил всё новые и новые «доказательства» утверждения (Δ5), придумывая для них всё новые и новые замечательные аргументы и вводя новые по-

[4] Это так называемый «сильный постулат E5»: в формулировке используются два раза кванторы $\forall$ («для любого»). «Сильную» формулировку можно ослаблять, заменяя один или оба квантора $\forall$ на кванторы существования $\exists$. Постулат E5 в его *наислабейшей* формулировке использует квантор существования дважды: «существует прямая b и существует точка $P \notin b$, такие, что…». Все эти формулировки E5 эквивалентны друг другу.

[5] Постулат (Δ5) сформулирован здесь тоже в «сильном виде». Квантор $\forall$, с которого начинается его формулировка, может быть заменён на квантор $\exists$. Достаточно обнаружить *всего лишь один* треугольник с суммой углов в 180°, чтобы утверждать, что то же свойство выполняется *для всех вообще* треугольников.

нятия, облегчающие доказательства, многими из которых впоследствии воспользовался как Лобачевский, так и (частично) Янош Бойяи. Как уже упоминалось выше во Введении, в последнем издании своего курса Лежандр честно признался, что доказать утверждение ($\Delta 5$) он не может, и что, по-видимому, ($\Delta 5$) следует рассматривать как новую, независимую от предыдущих, аксиому.

Утверждение, сформулированное и доказанное Лагранжем вместо ($\Delta 5$), основывается на предыдущих постулатах Евклида, и, тем самым, является утверждением *абсолютной* геометрии $\mathbb{N}^2$. Как мы знаем сейчас — из трудов Лобачевского и Я. Бойяи — добавление ($\Delta 5$) к утверждениям абсолютной геометрии превращает её в евклидову геометрию $\mathbb{E}^2$, а замещение ($\Delta 5$) на (частичное) отрицание ($\Delta 5$) превращает геометрию $\mathbb{N}^2$ в *гиперболическую* геометрию $\mathbb{H}^2$ (геометрию Лобачевского). Геометрия $\mathbb{N}^2$, таким образом, состоит из всех тех геометрических утверждений, которые справедливы *как в геометрии* $\mathbb{E}^2$, *так и в геометрии* $\mathbb{H}^2$; доказав любое геометрическое утверждение без обращения к постулату (E5) (или к ($\Delta 5$), или же к любому другому утверждению, эквивалентному (E5)), получаем теорему как евклидовой, так и гиперболической геометрии. Поэтому естественно обозначение $\mathbb{N}^2 = \mathbb{E}^2 \cap \mathbb{H}^2$, в том смысле, что «$\mathbb{N}^2$ есть общая часть геометрий $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{H}^2$» (рис. 5[6]).

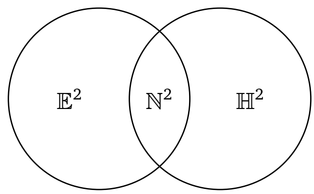


Рис. 5. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{E}^2 \cap \mathbb{H}^2$

Приступим к доказательству теоремы Лежандра об углах треугольника, опубликованному им в последнем издании его книги «Начала».

Теорема 1 (Лежандр). *Сумма внутренних углов любого треугольника в геометрии* $\mathbb{N}^2$ *не превышает* 180°: $\sum(\Delta) \leqslant 180^\circ\ \forall \Delta$.

Доказательство Лежандра. План доказательства состоит в том, что, предположив противное: $\exists\, \Delta_0\ \sum(\Delta_0) > 180^\circ$, Лежандр строит цепочку новых треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *с одной и той же* угловой суммой $\sum(\Delta_0)$, в каждом из которых *наибольший угол* равен сумме двух наибольших углов предыдущего треугольника, а *наименьший* стремится к нулю *экспоненциально*. Поэтому если бы сумма $\sum(\Delta_0)$ превосходила 180°, то

[6] Некоторые утверждения геометрии $\mathbb{N}^2$ очень трудно (а иногда и невозможно) доказать без добавления аксиомы (E5) или её отрицания $\neg$ (E5). В таких случаях поступают так: доказывают утверждение по отдельности в геометрии $\mathbb{E}^2$ и $\mathbb{H}^2$, после чего делают вывод, что это теорема из $\mathbb{N}^2$. Ярким примером абсолютной теоремы служит такое утверждение: *в любом треугольнике три его медианы пересекаются в одной точке*. Автор знает доказательство по отдельности в геометрии $\mathbb{E}^2$ и в геометрии $\mathbb{H}^2$, но не в самой геометрии $\mathbb{N}^2$.

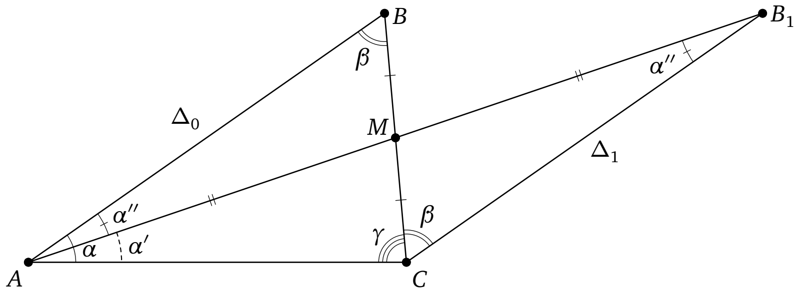


Рис. 6. Построение треугольника Δ_1 $(= AB_1C)$ по Δ_0 $(= ABC)$

наибольший угол последнего треугольника Δ_n превосходил бы 180°, чего не может быть в силу выпуклости треугольника. (Номер n последнего треугольника в этой процедуре может быть найден конструктивно.)

Приступим к выполнению этого плана. Предположим противное: пусть существует треугольник $\Delta_0 = \triangle ABC$ с $\sum(\Delta_0) > 180^\circ$.

Шаг 1: *построение треугольника* Δ_1.

Пусть $\sum(\Delta_0) = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, и пусть, без ограничения общности, $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$; обозначим также $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Проведём медиану AM наименьшего угла A и продлим её за середину M стороны BC на отрезок MB_1, равный длине этой медианы: $MB_1 = AM$. Соединив точку B_1 с C, получим треугольник $\Delta_1 = \triangle AB_1C$ (рис. 6).

Наблюдение 1. $\sum(\Delta_1) = \sum(\Delta_0)$.

Доказательство. Действительно, $\triangle AMB = \triangle B_1MC$ по двум сторонам и углу между ними: $AM = B_1M$ по построению, $\angle AMB = \angle B_1MC$ как вертикальные углы, $BM = MC$ (поскольку M — середина BC). Отсюда $\angle MCB_1 = \angle B = \beta$ и $\angle MB_1C = \angle BAM = \alpha''$, где $\angle A = \angle BAM + \angle CAM = \alpha'' + \alpha' = \alpha$. Поэтому

$$\sum(\Delta_1) = \angle B_1AC + \angle AB_1C + \angle ACB_1 = \\ = \alpha' + \alpha'' + (\gamma + \beta) = \alpha + \beta + \gamma = \sum(\Delta). \qquad \square$$

Наблюдение 2. Наибольший угол треугольника Δ_1 равен сумме двух наибольших углов треугольника Δ_0, а наименьший угол Δ_1 в 2 раза (или более чем в 2 раза) меньше наименьшего угла треугольника Δ_0.

Доказательство. Поскольку $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, имеем $\max\{\alpha', \alpha'', \beta + \gamma\} = \beta + \gamma = \angle B + \angle C$; $\min\{\alpha', \alpha'', \beta + \gamma\} = \min\{\alpha', \alpha''\} \leqslant \alpha/2$. $\square$

Шаг 2: *построение треугольника* Δ_2.

Точно таким же способом строится треугольник Δ_2 из треугольника Δ_1. В треугольнике Δ_1 проводим медиану из вершины его *наименьшего* угла,

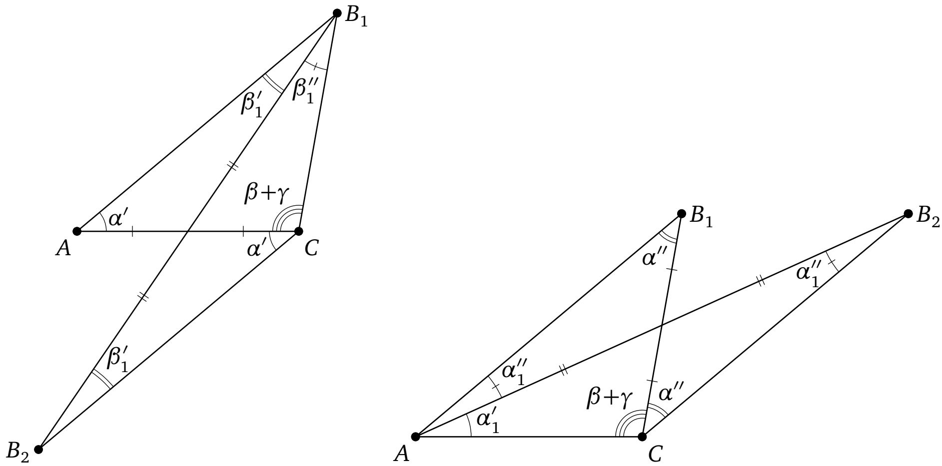


Рис. 7. Построение треугольника Δ_2 по Δ_1
(два возможных случая для $\min\{\angle A, \angle B_1\}$)

продлеваем её за середину стороны на отрезок, равный по длине этой медиане, и конец этого отрезка соединяем с вершиной C *наибольшего* угла треугольника Δ_1 (рис. 7, где изображены два случая удвоения медианы, в зависимости от того, из какой вершины — A или B_1 — эта медиана проведена).

Получаем треугольник Δ_2 (это $\triangle B_1CB_2$ в случае (i) и $\triangle AB_2C$ в случае (ii), рис. 7), у которого *наибольший* угол равен сумме двух *наибольших* углов треугольника Δ_1 ($(\beta+\gamma)+\alpha'$ в случае (i) и $(\beta+\gamma)+\alpha''$ в случае (ii), рис. 7), а наименьший не больше половины угла в Δ_1, т. е. $\alpha/2^2$.

Продолжаем этот процесс и далее: по треугольнику Δ_2 строим треугольник Δ_3, по треугольнику Δ_3 — треугольник Δ_4, и т. д., пока наконец не доходим до треугольника Δ_{n+1} (номер $n+1$ которого определим чуть позже).

В треугольнике Δ_{n+1} *наибольший* угол (при вершине C) равен сумме *наибольших* углов всех предыдущих треугольников $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, *наименьший* угол не превосходит $\alpha/2^{n+1}$. Но, что важнее, *сумма двух наименьших углов треугольника* Δ_{n+1} *не превосходит* $\alpha/2^n$.

Действительно, наименьший угол в треугольнике Δ_n «раздваивается» при проведении медианы и её удвоении в шаге $\Delta_n \to \Delta_{n+1}$: часть его остаётся в той же вершине в Δ_{n+1}, а вторая часть попадает во второй конец удвоенной медианы. На рис. 8 имеем $\angle B_{n+1}A_nC = \alpha_n'$, $\angle B_{n+1} = \alpha_n''$, откуда сумма двух минимальных углов $\angle B_{n+1}A_nC + \angle B_{n+1} = \alpha_n' + \alpha_n'' = \angle A_n$ равна минимальному углу треугольника Δ_n.

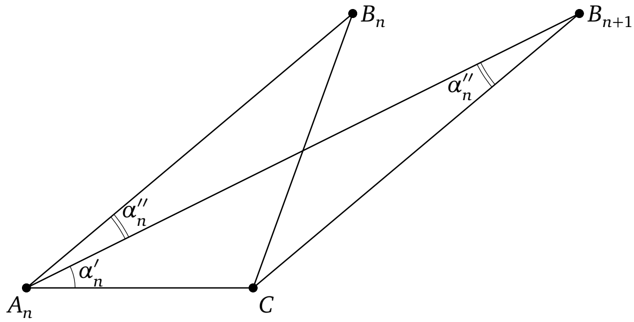


Рис. 8. Сумма двух наименьших углов в Δ_{n+1} не превосходит $\alpha/2^n$

Чтобы получить противоречие, остаётся только подобрать подходящий номер n.

Выберем такое большое натуральное число n, чтобы оценка сверху на сумму двух наименьших углов в треугольнике Δ_{n+1} была меньше числа $\varepsilon/2$, где $\varepsilon = \sum(\Delta) - 180^\circ$. Итак, $\alpha/2^n < \varepsilon/2$, откуда $n > \log_2(\alpha/\varepsilon) + 1$. Мы нашли длину цепочки $\Delta_0 \to \Delta_1 \to \ldots \to \Delta_n \to \Delta_{n+1}$, она равна $n + 2 > \log_2(\alpha/\varepsilon) + 3$ (и равна $[\log_2(\alpha/\varepsilon)] + 4$). В треугольнике Δ_{n+1} сумма углов $\sum(\Delta_{n+1}) = 180^\circ + \varepsilon$, а сумма двух наименьших углов меньше $\varepsilon/2$; следовательно, наибольший угол в Δ_{n+1} превосходит $180^\circ + \varepsilon/2$, и мы получаем противоречие с неравенством (строгим!) $\angle C_n < 180^\circ$. Теорема 1 доказана. $\square$

§ 2. Может ли геометрия быть одновременно полуевклидовой и полугиперболической?

Теорема 1 Лежандра не позволяет ответить на поставленный в заголовке вопрос. Нужны дополнительные идеи и/или геометрические «эксперименты», которые позволили бы обнаружить два треугольника, один с суммой углов в *точности* 180°, а другой с суммой углов *меньше* 180°.

Другой похожий, но несколько отличный от поставленного в заголовке, вопрос такой: *а могут ли в абсолютной геометрии найтись два треугольника* с *разными* угловыми суммами $\sum_1$ и $\sum_2$? (При этом как $\sum_1$, так и $\sum_2$ могут быть одновременно меньше 180°.)

Лежандр нашёл ответы на оба поставленных вопроса, причём оба раза отрицательные. Ответив на первый вопрос, Лежандр заодно доказал эквивалентность утверждений (E5) и (Δ5) о единственности параллельной прямой и о постоянстве угловой суммы во всех треугольниках. В ходе своих рассуждений он также рассматривал возможность *неединственности* параллельной прямой.

Теорема 2 (Лежандр). *Если в одном треугольнике* Δ_0 *сумма углов равна* $180°$, *то и в любом другом треугольнике* Δ *сумма углов тоже равна* $180°$: $(\exists\, \Delta_0\ \sum(\Delta_0) = 180°) \Rightarrow (\forall \Delta\ \sum(\Delta) = 180°)$.

Доказательство Лежандра состоит из нескольких шагов.

Шаг 1. *Если* $\sum(\Delta_0) = 180°$, *то существует прямоугольный треугольник* Δ_1 *с тем же свойством*: $\sum(\Delta_1) = 180°$.

Для доказательства этого и многих дальнейших утверждений очень удобно рассматривать наряду с суммой углов треугольника $\sum(\Delta)$ разность $180° - \sum(\Delta)$. Лежандр вводит обозначение[7] для этой разницы: $\delta(\Delta) = 180° - \sum(\Delta)$ и называет её *дефектом треугольника* Δ.

Имеем $\delta(\Delta) \geqslant 0$ по теореме 1. Если $\delta(\Delta) > 0$, то треугольник Δ называется *дефектным*, а если $\delta(\Delta) = 0$, то *недефектным*. Итак, теорема 2 утверждает, что если какой-то треугольник недефектный, то и все вообще треугольники недефектные, а шаг 1 — что существует *прямоугольный* недефектный треугольник.

Упражнение. Докажите, что не наибольший угол в любом треугольнике острый. (Подсказка: это следует из теоремы 1 Лежандра.)

В недефектном треугольнике $\Delta_0 = \triangle ABC$ опустим перпендикуляр CH так, чтобы его основание H попало на сторону AB, а не на её продолжение. Для этого вершины треугольника Δ надо обозначить буквами A, B, C так, чтобы угол C был наибольшим в треугольнике (рис. 9(а)).

Действительно, пусть $H \notin AB$. Тогда без ограничения общности H справа от B (рис. 9(б)) и угол CBH острый (так как угол BHC прямой, а сумма углов треугольника BCH не больше $180°$ по теореме 1 Лежандра). Угол CBA не наибольший в треугольнике ABC и, согласно упражнению, тоже острый. Но тогда сумма смежных углов ABC и CBH меньше $180°$ — противоречие.

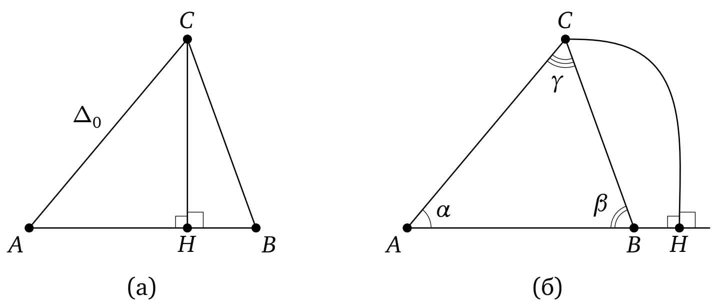


Рис. 9

[7] В радианной мере будем писать $\delta(\Delta) = \pi - \sum(\Delta)$.

Итак, треугольник Δ_0 разбит на два прямоугольных треугольника: $\triangle ABC = \triangle ACH \cup \triangle BCH$. Заметим, что (см. рис. 9(а), где $\angle CHA = \angle CHB = 90^\circ$)

$$\delta(\triangle ACH) = 180^\circ - (\angle A + \angle ACH + \angle CHA) = 90^\circ - (\angle A + \angle ACH),$$
$$\delta(\triangle BCH) = 180^\circ - (\angle B + \angle BCH + \angle CHB) = 90^\circ - (\angle B + \angle BCH).$$

Складывая, имеем

$$\delta(\triangle ACH) + \delta(\triangle BCH) = 180^\circ - (\angle A + \angle B + (\angle ACH + \angle BCH)) = \\ = 180^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C) = \delta(\triangle ABC),$$

т. е. дефект треугольника $\Delta_0 = \triangle ABC$ равен сумме дефектов треугольников $\triangle ACH$ и $\triangle BCH$. Но $\delta(\Delta_0) = \delta(\triangle ABC) = 0$ по условию, а дефекты двух прямоугольных треугольников неотрицательны, поэтому

$$0 = \delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ACH) + \delta(\triangle BCH) \geqslant 0,$$

откуда $\delta(\triangle ACH) = \delta(\triangle BCH) = 0$. Значит, оба прямоугольных треугольника с вершиной H — недефектные, что и требовалось обнаружить в шаге 1.

Шаг 2. *Если существует недефектный прямоугольный треугольник Δ_1, то существует прямоугольник (четырёхугольник с четырьмя прямыми углами).*

Приложим вторую копию *недефектного* прямоугольного $\triangle ABC$ так, как показано на рис. 10. Получим четырёхугольник $ABCD$, у которого $\angle C = \angle D = 90^\circ$, а $\angle A = \angle B = \alpha + \beta$. Поскольку $\delta(\triangle ABC) = 0$, имеем $\alpha + \beta = 90^\circ$, поэтому $\angle A = \angle B = 90^\circ$. Итак, $ABCD$ — прямоугольник.

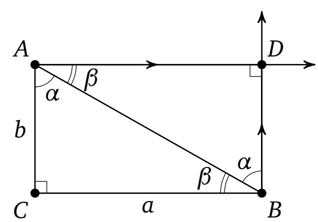


Рис. 10

Шаг 3. *Если существует прямоугольник, то существует прямоугольник со сколь угодно большими сторонами.*

Отражая прямоугольник $ABCD$ относительно его сторон бесконечное число раз, получаем сетку из одинаковых прямоугольников, равных $ABCD$ (рис. 11). В силу того, что все углы $ABCD$ прямые, получаем, что четырёхугольник $XYZT$, стороны которого идут по линиям сетки, тоже прямоугольник; и этот прямоугольник может быть сделан сколь угодно большим.

Понятие дефекта можно распространить на произвольный многоугольник $\mathscr{P}$. Пусть его углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, тогда примем[8)] по определению

$$\delta(\mathscr{P}) \stackrel{\text{def}}{=} 180^\circ(n-2) - \sum(\mathscr{P}),$$

[8)] Если углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выражены в радианной мере, то $\delta(\mathscr{P}) = \pi(n-2) - \sum(\mathscr{P})$.

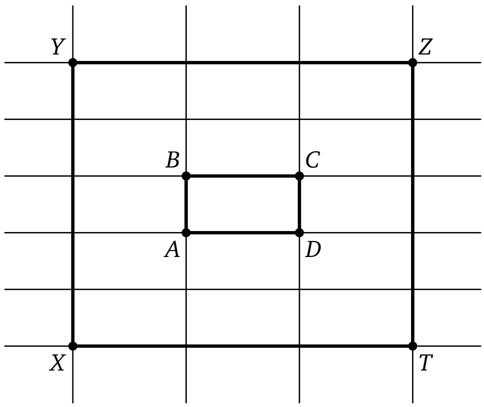


Рис. 11

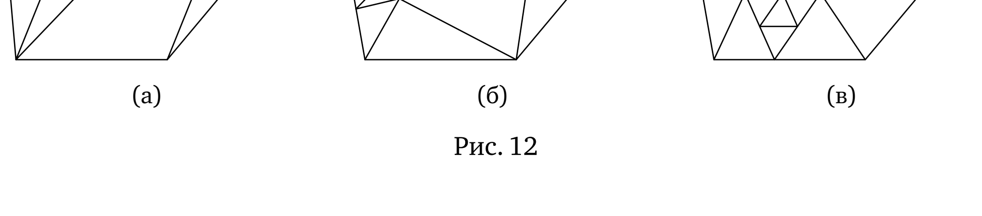
где $\sum(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Разрежем $\mathscr{P}$ его диагоналями на $(n-2)$ непересекающихся треугольников: $\mathscr{P} = \bigcup_{i=1}^{n-2} \Delta_i$ (рис. 12(а)).

Лемма. $\delta(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n-2} \delta(\Delta_i)$ (*аддитивность дефекта* δ).

Оставляем эту лемму читателю. Из неё вытекает следующее утверждение, которое тоже оставляем читателю в виде упражнения.

Упражнение. Разрежем многоугольник $\mathscr{P}$ на непересекающиеся треугольники (рис. 12(б)) или, в общем случае, на непересекающиеся многоугольники $\mathscr{P}_i$: $\mathscr{P} = \bigcup \mathscr{P}_i$ (рис. 12(в)). Докажите, что $\delta(\mathscr{P}) = \sum \delta(\Delta_i)$.

Из леммы и теоремы 1 Лежандра, а также из упражнения получаем неравенство $\delta(\mathscr{P}) \geqslant 0$. В случае равенства $\delta(\mathscr{P}) = 0$ многоугольник $\mathscr{P}$ называется *недефектным*; если же $\delta(\mathscr{P}) > 0$, то *дефектным*. (Пока что мы не можем сказать, являются ли многоугольники $\mathscr{P}_i$ разбиения дефектными или нет.)



(а) (б) (в)

Рис. 12

Шаг 4 (конец доказательства теоремы 2). *Если существует прямоугольник, то любой треугольник недефектный.*

Из предыдущего шага нам известно, что существует сколь угодно большой прямоугольник. Пусть теперь Δ — произвольный треугольник. Расположив его произвольно на плоскости, а тем самым на сетке (рис. 11), возьмём произвольный прямоугольник $XYZT$ со сторонами вдоль линий сетки, содержащий внутри себя треугольник Δ (рис. 13). Подразбив $XYZT$ на многоугольники, один из которых — наш треугольник Δ, и учитывая, что дефекты всех частей разбиения неотрицательны, получаем неравенство $\delta(XYZT) \geqslant \delta(\Delta)$. Заметим теперь, что $\delta(XYZT) = 180°(4-2) - 4 \cdot 90° = 0$ и что $\delta(\Delta) \geqslant 0$. Отсюда имеем $0 = \delta(XYZT) \geqslant \delta(\Delta) \geqslant 0$, т. е. $\delta(\Delta) = 0$, что и требовалось доказать.

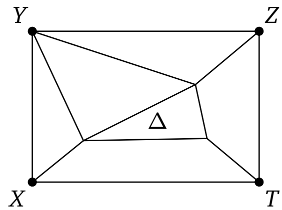


Рис. 13

Итак, начиная с одного недефектного треугольника Δ_0 ($\delta(\Delta_0) = 0$), мы за четыре шага получаем $\delta(\Delta) = 0$, т. е. недефектность любого другого треугольника. Теорема 2 доказана. □

Следствие 1. *Если какой-то один треугольник* Δ_0 дефектный, *то и все остальные треугольники тоже* дефектные.

Следствие 2. *Либо все многоугольники одновременно* недефектные, *либо все* дефектные.

Доказательство. Следует из свойства аддитивности дефекта δ (лемма и упражнение на с. 32). □

Следствие 3. *Из двух дефектных треугольников, один из которых расположен внутри другого,* бóльшую *сумму углов имеет* меньший (*расположенный внутри*).

Доказательство. Если $\Delta_1 \supset \Delta_2$, то $\delta(\Delta_1) > \delta(\Delta_2) > 0$ (следует из вышеприведённого упражнения). Следовательно,

$$\sum(\Delta_1) = 180° - \delta(\Delta_1) < 180° - \delta(\Delta_2) = \sum(\Delta_2) < 180°. \qquad \square$$

Выводы

Итак, теперь мы можем ответить на все вопросы, поставленные в начале этого параграфа.

• В $\mathbb{N}^2$ *не могут* существовать два треугольника с угловой суммой, равной 180° и меньшей 180°.

• Если обнаружен треугольник с угловой суммой 180°, то геометрия $\mathbb{N}^2$ на самом деле $\mathbb{E}^2$, т. е. евклидова. При этом угловая сумма любого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.

• Если обнаружен треугольник с суммой углов меньше 180°, то у всех треугольников сумма углов меньше 180°. При этом из вложенных друг в друга треугольников угловая сумма внутреннего треугольника строго больше угловой суммы внешнего. Геометрия в этом случае гиперболическая $\mathbb{H}^2$.

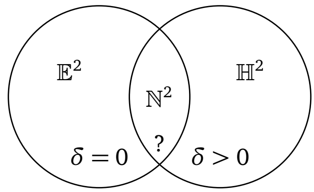


Рис. 14

• Если у двух треугольников разная угловая сумма, то каждая из них строго меньше 180° и геометрия гиперболическая $\mathbb{H}^2$.

Важное отступление: *дефект δ пропорционален площади S.*

Заметим, что в гиперболической геометрии $\mathbb{H}^2$ дефект δ и площадь S многоугольника $\mathscr{P}$ обладают одинаковыми свойствами, а именно, свойствами *положительности* и *аддитивности*:

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} (1)\ S(\mathscr{P}) > 0 \\ (2)\ \mathscr{P} = \cup \mathscr{P}_i \ \Rightarrow\ S(\mathscr{P}) = \sum S(\mathscr{P}_i) \\ (\mathscr{P}_i \cap \mathscr{P}_j = \varnothing) \end{array} & \begin{array}{c} (1)\ \delta(\mathscr{P}) > 0 \\ (2)\ \mathscr{P} = \cup \mathscr{P}_i \ \Rightarrow\ \delta(\mathscr{P}) = \sum \delta(\mathscr{P}_i) \\ (\mathscr{P}_i \cap \mathscr{P}_j = \varnothing) \end{array} \end{array}$$

Справедлива теорема, что если две произвольные функции f и g, заданные на множестве всех многоугольников, обладают свойствами (1) и (2), то эти функции пропорциональны:

$$\frac{f}{g} = k = \mathrm{const} \in \mathbb{R}.$$

Поэтому дефект δ и площадь S пропорциональны как функции. Это означает, что если $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ — два многоугольника, то

$$\frac{S(\mathscr{P})}{\delta(\mathscr{P})} = \frac{S(\mathscr{Q})}{\delta(\mathscr{Q})} = k \in \mathbb{R}.$$

Положив, без ограничения общности, $k = 1$ (поскольку единица площади выбирается произвольно), можем сделать ещё несколько выводов.

• Дефект δ, выраженный в *радианах*, есть *площадь* (многоугольника).

• Треугольник с *меньшей* площадью имеет *большую* угловую сумму.

• Площадь любого треугольника ограничена сверху числом π (площадь строго меньше π и стремится к π при увеличении размеров треугольника до бесконечности и одновременном уменьшении всех углов до 0°).

• Произвольный многоугольник с n сторонами имеет площадь, строго меньшую $\pi(n-2)$.

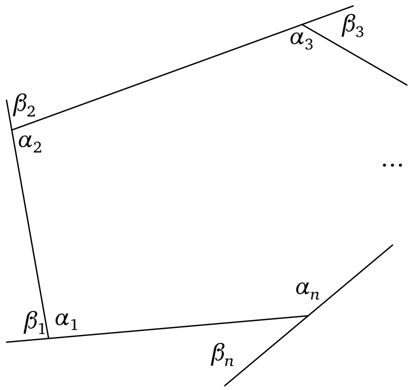


Рис. 15

(На ограниченность площади любого многоугольника в $\mathbb{H}^2$ обратил внимание ещё Гаусс, получая «доказательства» V постулата от разных любителей геометрии, в частности от Фаркаша Бойяи, отца одного из создателей неевклидовой геометрии Яноша Бойяи.)

• В евклидовой геометрии сумма всех *внешних* углов любого многоугольника *всегда* равна 2π, независимо от числа его сторон и его размеров (в частности, от его площади). Иногда, начав с этого факта, доказывают, что сумма *внутренних* углов равна $\pi(n-2)$. Однако в этот момент происходит подмена — заменяют V постулат на эквивалентный постулат постоянства суммы внешних углов. Но в гиперболической геометрии сумма углов не постоянна! Пусть $\{\alpha_i\}$ — внутренние углы, $\{\beta_i = \pi - \alpha_i\}$ — внешние углы, S — площадь многоугольника. Подсчитаем дефект δ:

$$\delta(\mathscr{P}) = \pi(n-2) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) - 2\pi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = \delta(\mathscr{P}) + 2\pi.$$

Из этой формулы видно, что, поскольку $\delta(\mathscr{P}) = 0$ в $\mathbb{E}^2$, то $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi$, а в $\mathbb{H}^2$ получаем $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi + S$, т. е. к 2π добавляется площадь многоугольника.

§ 3. Заключительные утверждения и замечания

Теорема Лежандра о сумме углов треугольника (см. § 1) иногда называется первой теоремой Лежандра. Совсем другим способом её доказал и Саккери[9)], поэтому чаще можно встретить название «*теорема Лежандра — Саккери*» (оно появилось в XX в.)

Второй теоремой Лежандра называется теорема о том, что если один треугольник имеет сумму углов 180°, то и все треугольники имеют ту же сумму углов: либо *все треугольники недефектные*, либо *все дефектные*. Она заняла в нашем очерке весь § 2. Иногда эту теорему называют теоремой о трёх мушкетёрах (вспомним здесь девиз: один [треугольник] — за всех, а все [треугольники] — за одного!).

Но и в этой второй теореме Лежандра оказалось, что Саккери опять[10)] опередил его (второй раз!). Тем не менее, доказательство Лежандра (воспроизведённое нами в § 3) настолько элегантно, что, например, его целиком использовал Лобачевский в своих трудах по геометрии.

Популярность книги Лежандра «Начала геометрии» была в своё время настолько велика, что некоторые особо элегантные моменты в его доказательствах даже получили специальные названия. Так, шаг 1 в доказательстве его теоремы 1 (§ 1) — о превращении любого треугольника в новый с той же суммой углов через удвоение медианы — носит название «*конструкция-сифон*» (рис. 16), потому что одна треугольная часть с границей «медиана» ($\triangle ABM$) перетекает, как в сифоне, в равную ей треугольную часть нового треугольника ($\triangle A'CM$).

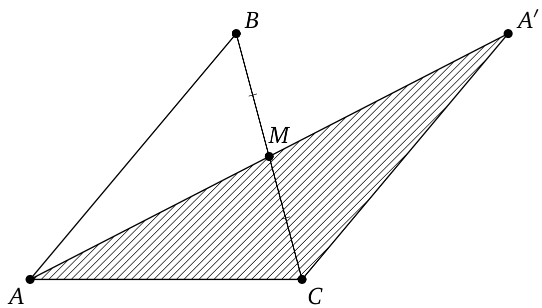


Рис. 16. «Конструкция-сифон» Лежандра

А всё доказательство второй теоремы Лежандра получило название «*домино-доказательство*» — из-за тех четырёх шагов в нём, которые, как падающие костяшки домино, в итоге приводят к нужному результату.

[9)] Джованни Джироламо Саккери (1667–1733), итальянский математик.

[10)] Нужно сказать, что Лежандру, работавшему во многих областях математики, не везло не один раз: он на три года раньше Гаусса опубликовал придуманный им «метод наименьших квадратов», но оказалось, что Гаусс придумал его на несколько лет раньше, и поэтому этот метод приписывается Гауссу.

Список литературы

[1] Статьи Даламбера в «Энциклопедии»: *D'Alembert J.* Éléments des Sciences // Encyclopédie v. V. Paris. 1755. P. 491-498; *D'Alembert J.* Géométrie // Encyclopédie v. VII. Paris. 1757. P. 629-638.

[2] *Legendre A. M.* Éléments de géométrie. Paris, 1794[11].

[3] *Осиповский Т.* Курс математики, изданный от Главного управления училищ. СПб., 1814 (второе издание)[12].

[4] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М.: Физматлит, 2004[13].

[5] *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии. М.: МГУ, 1963.

[6] *Bonola R.* Non-Euclidean geometry. New York: Dover Publications Inc., 1958.

[7] *Braver S.* Lobachevsky illuminated. Washington: MAA, 2011[14].

[8] *Greenberg M. J.* Euclidean and non-Euclidean geometries (Development and History). New York: W. H. Freeman and Company, 2008[15].

[11] В последнем издании 1823 года Лежандр дал своё последнее «доказательство» V постулата Евклида.

[12] Фактически перевод с французского учебника Лежандра.

[13] Лежандру посвящены с. 21–30.

[14] Лежандру посвящены главы The Saccheri–Legendre Theorem и The Three Musketeers Theorem.

[15] Лежандру и другим математикам посвящена глава 4, с. 161–190.

Григорий Александрович Гальперин, Восточно-Иллинойсский университет, Чарлстон, США

ggalperin@eiu.edu

Об эквивалентности трёх моделей плоскости Лобачевского

А. Б. Сосинский

В этой заметке я хочу объяснить, почему три наиболее популярные модели плоскости Лобачевского (модель Пуанкаре на полуплоскости, модель Кэли — Клейна на диске и модель Пуанкаре на диске) эквивалентны. Сначала мы это увидим наглядно с помощью физических опытов со стеклянной игрушкой, а затем докажем строго математически.

Для доказательства нам придётся не только строго определить, в каком смысле следует понимать «эквивалентность» моделей, но и понять, что такое модель геометрии вообще. Мы увидим, что модель геометрии — это и есть геометрия в том смысле, как это слово расшифровал Феликс Клейн.

Начнём с краткого описания трёх моделей[1)] плоскости Лобачевского.

§ 1. Модель Пуанкаре на диске

Точки этой модели — это точки единичного открытого диска

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\},$$

прямые — открытые дуги окружностей, ортогональные окружности

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\},$$

ограничивающей наш диск, а также (открытые) диаметры окружности $\mathbb{A}$; окружность $\mathbb{A}$ называется *абсолютом*, и её точки не являются точками нашей «плоскости Лобачевского».

На множестве $\mathbb{H}^2$ с помощью явной (но совсем не очевидной) формулы вводится расстояние между точками, что позволяет измерять длины, углы,

[1)] Я сохраняю за этими моделями их традиционные названия, но подчёркиваю, что эти наименования не справедливы: все три модели придумал и опубликовал (в 1868 году) итальянский математик Бельтрами.

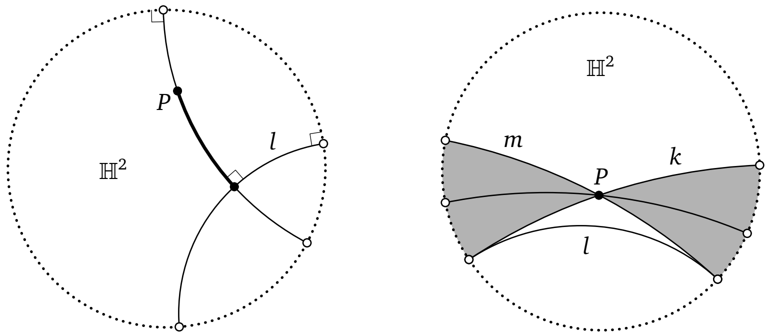


Рис. 1. Перпендикуляр и параллели в модели Пуанкаре на диске

площади и вообще строить геометрию на плоскости Лобачевского. При этом главную роль играет группа $G_{\mathbb{C}}$ изометрий этой «плоскости» (т. е. биективных преобразований множества $\mathbb{H}^2$, сохраняющих расстояние).

Однако здесь можно обойтись без сложной формулы для расстояний. Дело в том, что группу $G_{\mathbb{C}}$ можно определить чисто геометрически: она порождается отражениями относительно «прямых», т. е. инверсиями относительно окружностей, ортогональных абсолюту, и (обычными) отражениями относительно диаметров. Дальнейшая теория развивается без всяких формул и координат на основании свойств инверсии (читатель может познакомиться с этим по моей книге «Геометрии»[2], посмотрев страницы 116–128).

Здесь мы ограничимся двумя картинками: одна изображает перпендикуляр, опущенный из точки P на «прямую» l (рис. 1, слева), а вторая (классическая!) картинка изображает две прямые m, k, проходящие через точку P и называемые *параллелями* к прямой l, между которыми располагаются все прямые, проходящие через P и не пересекающие l (рис. 1, справа).

§ 2. Модель Пуанкаре на полуплоскости

Точки этой модели — это точки открытой полуплоскости комплексной переменной

$$\mathbb{C}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Im}(z) = y > 0\},$$

прямые — открытые полуокружности с центром на вещественной оси $\mathrm{Im}(z) = y = 0$, а также вертикальные полупрямые

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C}\colon x = \mathrm{const},\ y > 0\}.$$

[2] *Сосинский А. Б.* Геометрии. М.: МЦНМО, 2017.

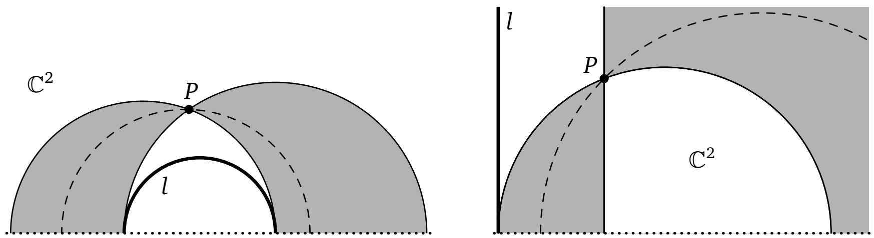


Рис. 2. Параллели в модели Пуанкаре на полуплоскости

Прямая $\mathbb{A} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \colon y = 0\}$ называется *абсолютом*, её точки не являются точками нашего нового варианта «плоскости Лобачевского». Здесь тоже можно ввести расстояние с помощью явной формулы (в которую входят комплексные параметры), но можно определить группу $G_{\mathbb{R}}$ изометрий рассматриваемой модели чисто геометрически: она порождается отражениями относительно «прямых», т. е. (обычными) отражениями относительно вертикальных прямых или инверсиями относительно окружностей с центрами на оси Ox. Предлагаем читателю снова посмотреть на классическую картинку с параллельными (рис. 2).

§ 3. Модель Кэли — Клейна на диске

Точки этой модели — это точки единичного открытого диска

$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\},$$

прямые — открытые хорды диска, *абсолют* — край диска. Здесь изометрии удобнее определять через расстояние, которое вводится как логарифм некоторого двойного отношения. Я не буду вдаваться в детали и ограничусь изображением странного вида перпендикуляра в этой метрике и классической картинкой с параллелями (рис. 3).

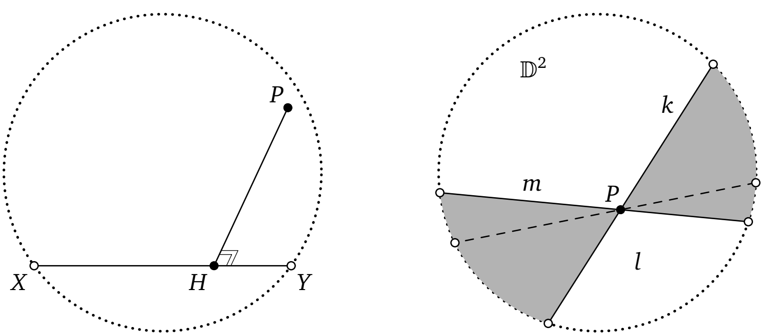
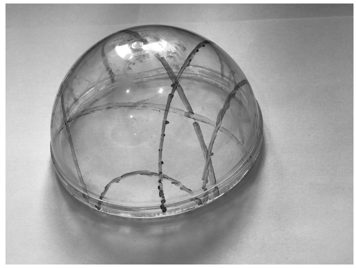


Рис. 3. Перпендикуляр и параллели в модели Кэли — Клейна

§ 4. Эксперименты с игрушкой

Сама игрушка представляет собой полусферу радиуса 5 см, сделанную из прозрачной пластмассы; на ней нарисованы полуокружности, ортогональные границе полусферы (см. фото); эту граничную окружность мы будем называть *экватором*. Можно считать, что полуокружности высечены из полусферы вертикальными плоскостями.



Фотография игрушки

Покажем, как из этой игрушки можно получить модель Пуанкаре на диске. Для этого нам потребуется небольшой фонарик и стол в достаточно тёмной комнате. На стол положим лист белой бумаги, в его середину положим нашу полусферу (обозначим её S) экватором вверх, а источник света поместим на место «северного полюса» сферы (она касается стола «южным полюсом»). Что же мы тогда увидим?

На листе белой бумаги появится диск (его мы обозначим D) радиуса 10 см с дугами окружностей, ортогональными его границе. Это и есть диск модели Пуанкаре! При нашей световой стереографической проекции экватор перейдёт в абсолют (=край) диска Пуанкаре D, полуокружности на полусфере перейдут в «прямые» модели Пуанкаре, и мы получим биекцию (обозначим её α) между точками полусферы S и точками диска D (рис. 4).

А теперь покажем, как из игрушки можно получить модель Пуанкаре на полуплоскости. Для этого мы постелим на стол большой белый лист

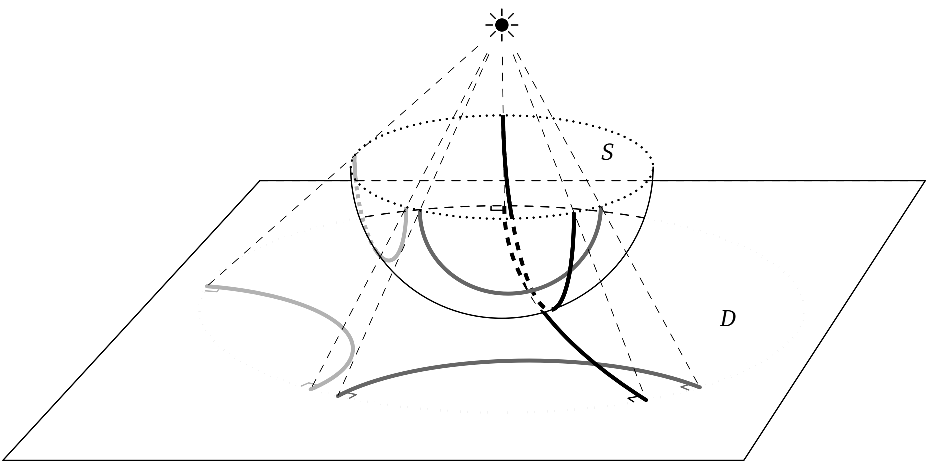


Рис. 4. Получаем модель Пуанкаре на диске

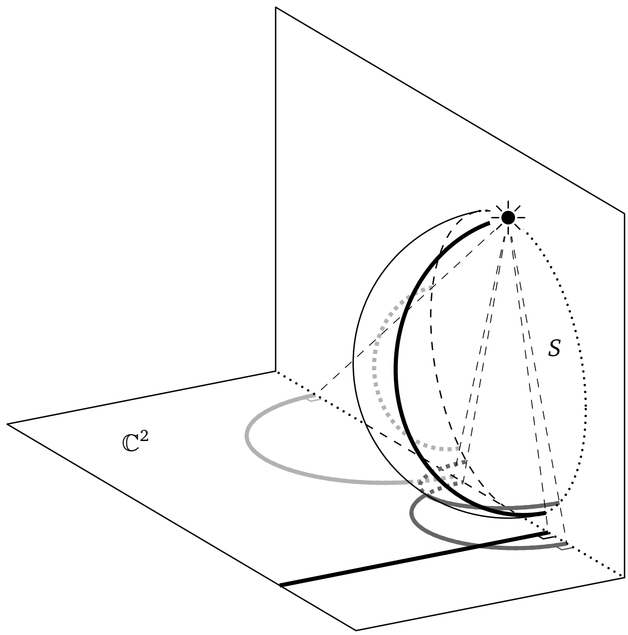


Рис. 5. Получаем модель Пуанкаре на полуплоскости

бумаги и приставим стол к стене комнаты. К стене мы прислоним нашу полусферу (снова обозначим её S) так, чтобы экватор прилегал к стене (чтобы полусфера не падала, её можно приклеить), и поместим источник света в самой верхней точке полусферы (рис. 5).

Тогда на столе появится изображение модели Пуанкаре на полуплоскости (мы обозначим её $\mathbb{C}^+$), вернее, её кусок — стол наш не бесконечен! При этом экватор перейдёт в абсолют полуплоскости (это прямая, по которой стол примыкает к стене), а полуокружности на S перейдут в «прямые» модели $\mathbb{C}^+$. Здесь, как и в предыдущем опыте, важную роль играет тот факт, что при стереографической проекции сохраняются углы, в частности сохраняется перпендикулярность. Мы получим биекцию (обозначим её β) между точками полусферы S и точками «бесконечного стола» $\mathbb{C}^+$.

А теперь легко показать эквивалентность двух моделей Пуанкаре: отображение $\beta \circ \alpha^{-1} : D \to \mathbb{C}^+$ превращает одну модель в другую, один абсолют в другой, «прямые» из модели на диске D в «прямые» из модели на полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

А как из нашей игрушки получить модель Кэли — Клейна? А очень просто: наш лист белой бумаги мы вешаем на стену, полусферу (снова обозначенную S) устанавливаем в метре от стены так, чтобы плоскость

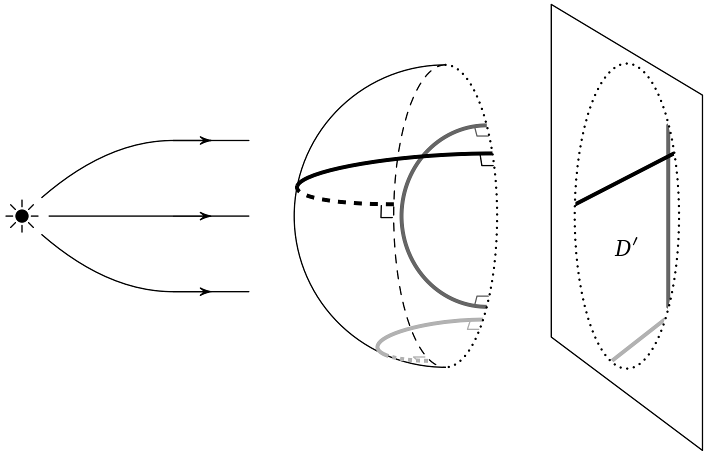


Рис. 6. Получаем модель Кэли — Клейна

её экватора была параллельна стене, а у противоположной стены (т. е. на достаточно большом расстоянии) включаем мощный точечный источник света (маленький фонарик тут не годится). Тогда на нашем листе бумаги появится изображение модели Кэли — Клейна в виде диска радиуса чуть больше 5 см (его мы обозначим D'). При этом экватор перейдёт в абсолют (край диска D'), а полуокружности на S перейдут в «прямые» модели Кэли — Клейна, т. е. в хорды диска D' (рис. 6). Мы получим биекцию (обозначим её γ) между точками полусферы S и точками модели Кэли — Клейна D'.

Теперь легко показать эквивалентность двух моделей на диске: она задаётся формулой $\alpha \circ \gamma^{-1} \colon D' \to D$.

Таким образом, мы наглядно установили эквивалентность трёх моделей плоскости Лобачевского и увидели, как одна модель переходит в другую с помощью нашей игрушки. А теперь мы хотим это доказать строго математически. Для этого нам потребуется два формальных определения: геометрии по Клейну и эквивалентности (=изоморфизма) геометрий.

§ 5. Геометрии по Клейну

Геометрий много. Так что же такое геометрия, что есть общего между двумерными геометриями Евклида, Лобачевского, Римана, Кокстера, проективной геометрией, сферической геометрией? Ответ на этот вопрос дал Феликс Клейн в знаменитой лекции, вошедшей в историю под названием «Эрлангенская программа».

На современном языке ответ Клейна кратко можно пересказать так: *геометрией* (*по Клейну*) называется множество, на котором биекциями действует некоторая группа. Подробнее это можно пересказать так: *геометрия по Клейну* (или короче — просто *геометрия*) — это пара $\langle X : G\rangle$, где X — множество произвольной природы (его элементы называются *точками*), а G — группа, действующая на множестве X; это значит, что любой элемент $g \in G$ представляет собой биекцию множества X на себя, нейтральный элемент $e \in G$ — тождественное отображение, обратный элемент $g^{-1} \in G$ — обратная биекция к g, произведение двух элементов группы G — просто композиция биекций.

Посмотрим, как это выглядит для перечисленных выше геометрий. Для евклидовой геометрии X — это множество $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ пар вещественных чисел, а G — группа отображений X на себя, сохраняющих расстояние d между точками, где

$$d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Для двух моделей Пуанкаре мы уже описали X как открытый диск и полуплоскость соответственно, а G — как группу, порождённую отражениями относительно «прямых» (т. е. инверсиями и обычными отражениями, см. выше). Эти группы мы обозначили $G_{\mathbb{R}}$ для модели на полуплоскости и $G_{\mathbb{C}}$ для модели на диске. Таким образом, сами модели мы будем обозначать $\langle \mathbb{C}^+ : G_{\mathbb{R}}\rangle$ и $\langle \mathbb{H}^2 : G_{\mathbb{C}}\rangle$.

Для проективной плоскости точки множества X можно описать однородными координатами $(x : y : z)$, т. е. тройками вещественных чисел, которые не все равны нулю и заданы с точностью до ненулевого общего множителя (так что $(x : y : z)$ и $(\lambda x : \lambda y : \lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ задают одну и ту же точку). Здесь группа G — группа двумерных проективных преобразований; каждое такое преобразование можно задать невырожденной матрицей 3×3, которая обычным образом действует на тройки (x, y, z), но результат действия определяется с точностью до множителя $\lambda \neq 0$, т. е. задаёт точку из X её однородными координатами.

Я не буду описывать в этих терминах модель Кэли — Клейна и геометрии Кокстера. Любознательный читатель может ознакомиться с этими вопросами в цитированной выше книжке «Геометрии».

§ 6. Эквивалентность геометрий

Пусть даны две геометрии $\langle X : G\rangle$ и $\langle Y : H\rangle$. Что значит, что они эквивалентны? Коротко это можно сказать так: должна существовать биекция между множествами точек X и Y и изоморфизм групп G и H, которые согласованы между собой. На современном формальном математическом языке это можно выразить так: две геометрии $\langle G : X\rangle$ и $\langle H : Y\rangle$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\beta\colon X\to Y$ и изоморфизм групп $\phi: G\to H$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & Y \arrow[d, "\phi(g)"] \\ X \arrow[r, "\beta"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна; это значит, что для любой точки $x\in X$ и для любого элемента группы $g\in G$ мы имеем $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$, т. е. две прогулки по диаграмме $x\mapsto xg\mapsto\beta(xg)$ и $x\mapsto\beta(x)\mapsto(\beta(x))\phi(g)$ приводят в одну и ту же точку.

Для тех читателей, которые не боятся современного математического языка, отмечу, что данное выше определение изоморфизма геометрий является частным случаем изоморфизма в теории категорий. Дело в том, что геометрии по Клейну образуют категорию: её объекты — геометрии $\langle X: G\rangle$, её морфизмы (их называют эквивариантными отображениями) — это пары (β,ϕ), где $\beta\colon X\to X'$ — отображение и $\phi: G\to G'$ — гомоморфизм групп, такие, что выполняется соотношение $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$, которое мы только что выписывали выше. Но я отвлёкся — пора вернуться к нашим моделям и доказательству их эквивалентности, т. е. их изоморфизма как геометрий по Клейну.

§ 7. Доказательство эквивалентностей

Докажем сначала, что модели Пуанкаре на диске и на полуплоскости эквивалентны, т. е. что геометрии $\langle\mathbb{H}^2 : G_{\mathbb{C}}\rangle$ и $\langle\mathbb{C}^+ : G_{\mathbb{R}}\rangle$ изоморфны. Для этого нам надо построить биекцию $\beta:\mathbb{H}^2\to\mathbb{C}^+$ и изоморфизм $\phi: G_{\mathbb{C}}\to G_{\mathbb{R}}$ такие, что $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$. Сделаем мы это так. Будем рассматривать диск $\mathbb{H}^2$ как лежащий в плоскости комплексной переменной $\mathbb{C}$ (т. е. считать, что $\mathbb{H}^2=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$) и определим β формулой

$$\beta: z\mapsto i\cdot\frac{1+z}{1-z},$$

а ϕ зададим так: $G_{\mathbb{C}}\ni g\mapsto\beta\circ g\circ\beta^{-1}=:\phi(g)\in G_{\mathbb{R}}$. То, что β действительно является биекцией диска на полуплоскость, — это простое и популярное упражнение из начального курса комплексного анализа, а то, что ϕ — изоморфизм, удовлетворяющий условию $\beta(xg)=(\beta(x))\phi(g)$, сразу следует из определения.

Доказательство того, что модель Пуанкаре на диске изоморфна (как геометрия по Клейну) модели Кэли — Клейна, мы оставляем читателю.

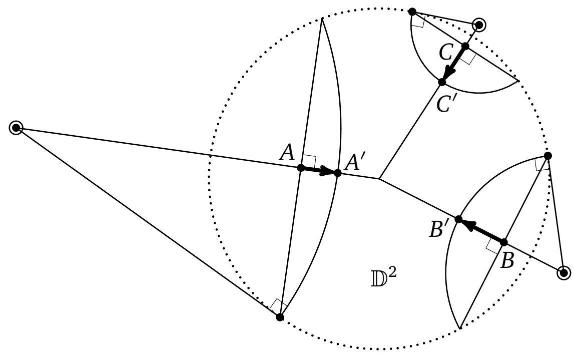


Рис. 7. Построение биекции $\beta : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$

На рис. 7 в качестве подсказки показано, как можно построить биекцию $\beta : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2$. Если этой подсказки не хватит, читатель может всё это посмотреть в пунктах 10.1.2 и 10.1.3 цитированной выше книжки «Геометрии».

§ 8. Замечания про игрушку

На самом деле наша игрушка — в сущности — просто *модель плоскости Лобачевского на полусфере*, т. е. ещё одна геометрия по Клейну, изоморфная трём рассмотренным. Давайте дадим ей строгое определение.

Модель на полусфере — это геометрия по Клейну $\langle S : G_S \rangle$, точки которой суть точки открытой (т. е. без края) единичной полусферы S, а группа G_S определяется следующим образом. Как абстрактная группа, она изоморфна группе $G_{\mathbb{C}}$ (см. § 5); этот изоморфизм мы зафиксируем и обозначим $\sigma : G_S \to G_{\mathbb{C}}$. Группа G_S действует на полусферу S так: для любых $g \in G_S$ и $s \in S$

$$sg := \alpha^{-1}\big(\sigma(g)(\alpha(s))\big),$$

где $\alpha : S \to D$, биекция полусферы на диск Пуанкаре D, была определена в § 4. Ясно, что «прямые» в этой модели — это полуокружности, высекаемые на S плоскостями, перпендикулярными плоскости края S, и этот край играет роль абсолюта.

А откуда взялась игрушка? Не я её придумал, мне её подарила Анна Феликсон, которая, в свою очередь, про неё узнала от Саула Шлеймера и сама сконструировала тот вариант, который мне достался. Когда эта статья была сдана в печать, я узнал от Григория Гальперина, что эта игрушка описана в книге Б. Н. Делоне[3)].

[3)] *Делоне Б. Н.* Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М.: АН СССР, 1953. С. 111–112.

Я выражаю всем троим свою благодарность, особенно Анне, из за которой возникла эта заметка, а также неизвестному мне геометру, который эту модель придумал.

§ 9. Заключение

Читатель, возможно, удивился, что в этой статье, посвящённой геометрии Лобачевского, не сказано ни слова про аксиомы геометрии — евклидовой и неевклидовой. Это объясняется, во-первых, тем, что применение известных мне строгих (в современном смысле) изложений геометрии Лобачевского для доказательства содержательных теорем требует огромной предварительной работы (доказательства очень формализованных, скучных и не очень естественных утверждений).

Во-вторых, я считаю, что гениальную идею Евклида построения геометрии как дедуктивной системы — одно из высших достижений человеческого разума, идею, из которой в итоге возникло современное построение всей математики — сегодня скорее следует отнести к *истории геометрии*, а не к самой геометрии. Евклидова планиметрия — в наши дни лишь небольшая часть единой математики. Доказывать её теоремы на основании аксиом Гильберта крайне неудобно и непедагогично, проще это делать исходя из элементарной линейной алгебры.

Однако и такой подход, особенно когда линейная алгебра и евклидово пространство изучаются в координатах, мне (как и большинству геометров) тоже не по душе. Именно поэтому в нашей статье рассматривался подход Клейна к построению геометрических теорий. Читатель мог убедиться на примерах моделей плоскости Лобачевского, что этот подход, по своей наглядности и строгости, наиболее близок сердцу истинного геометра.

Алексей Брониславович Сосинский, НМУ
asossinsky@yandex.ru

Об инверсных образах точки Фейербаха и обобщении теоремы Емельяновых

В. Д. Попов

В данной работе исследуется образ точки Фейербаха при инверсии относительно окружности, построенной на стороне треугольника как на диаметре. Доказаны некоторые свойства этого образа, с их помощью получены более простые доказательства ряда классических результатов о точке Фейербаха. Также получено обобщение теоремы Емельяновых о полюсах треугольника и связанных с ними окружностях, проходящих через точку Фейербаха.

§ 1. Введение

Точка Фейербаха является одной из наиболее известных замечательных точек треугольника. Она определяется как точка касания вписанной окружности и окружности Эйлера. Одно только определение наводит на естественный и, следует признать, весьма непростой вопрос: а почему факт касания этих двух окружностей действительно имеет место быть? Соответствующую теорему доказал Карл Вильгельм Фейербах в 1822 году:

Окружность девяти точек произвольного треугольника касается вписанной и всех трёх вневписанных окружностей этого треугольника.

С тех пор было придумано свыше 300 других доказательств этой теоремы, причём многие из них используют инверсию. Многочисленность таких доказательств свидетельствует о том, что при изучении геометрических свойств точки Фейербаха инверсия является довольно полезным инструментом. В данной работе мы предлагаем новый способ изучения точки Фейербаха, основанный на рассмотрении её инверсных образов относительно некоторых окружностей. Этот подход позволит нам не только получить ряд новых красивых результатов, но и значительно упростить доказательства некоторых уже известных фактов (см. [2, 4, 6]). Доказательства проводятся для остроугольных треугольников (в других случаях рассуждения аналогичны).

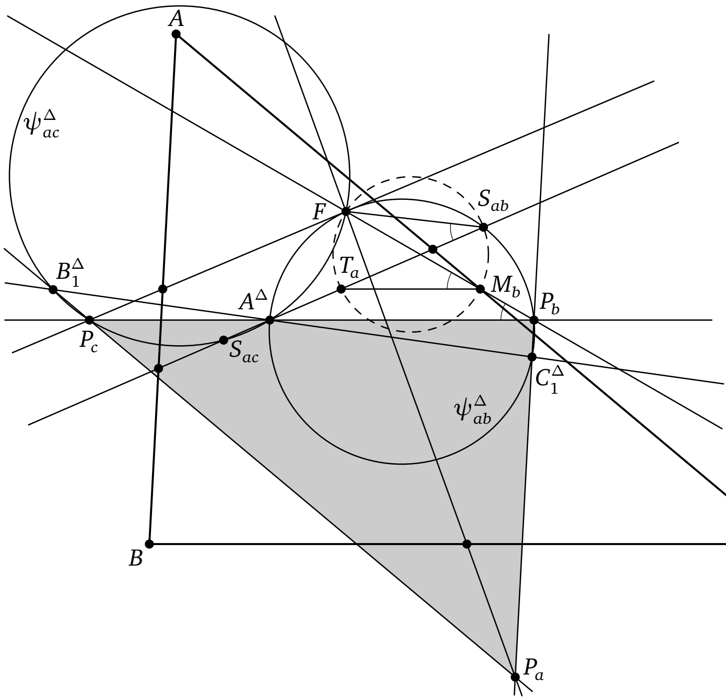


Рис. 1

Наиболее важным и интересным результатом данной работы, полученным с помощью применения такого подхода, следует считать следующую теорему, обобщающую теорему Емельяновых о семействе окружностей, проходящих через точку Фейербаха (см. [2]).

Теорема 1. *Рассмотрим произвольный треугольник ABC, его точку Фейербаха F и его серединный треугольник $M_aM_bM_c$. Обозначим через S_{ab} и S_{ac} точки Шарыгина, соответствующие стороне BC* (см. точные определения в следующем разделе). *Рассмотрим произвольный треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный серединному треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха F* (рис. 1). *Рассмотрим окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ и $\psi_{ac}^{\triangle}$, проходящие через тройки точек (F, P_b, S_{ab}) и (F, P_c, S_{ac}) соответственно. Тогда точка их пересечения, отличная от F, совпадает с точкой пересечения $A^{\triangle}$ прямых P_bP_c и $S_{ab}S_{ac}$.*

Таким образом, каждый треугольник $\triangle = P_aP_bP_c$, гомотетичный треугольнику $M_aM_bM_c$ с центром в точке Фейербаха, порождает три пары замечательных окружностей, каждая из которых проходит через точку Фейербаха и одну из точек Шарыгина. Точку $A^{\triangle}$, фигурирующую в теореме 1, и аналогичные ей точки $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ на прямых P_cP_a и P_aP_b соответственно, назовём *обобщёнными полюсами треугольника* ABC. Смысл такого названия заключается в том, что если треугольник $P_aP_bP_c$ совпадает с треугольником $K_aK_bK_c$ (см. необходимые обозначения в следующем разделе), то точки $A^{\triangle}$, $B^{\triangle}$ и $C^{\triangle}$ превращаются в точки A_{00}, B_{00} и C_{00}, введённые Емельяновыми в статье [2] и названные ими *полюсами треугольника* ABC.

§ 2. Вспомогательные факты

Зафиксируем обозначения.

- A, B, C — вершины треугольника;
- O — центр описанной окружности;
- M_a, M_b, M_c — середины сторон BC, AC, AB соответственно;
- H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A, B, C соответственно;
- ω — вписанная окружность треугольника ABC с центром I;
- ω_a — вневписанная окружность с центром I_a, касающаяся стороны BC;
- G_a, G_b, G_c — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, AC, AB;
  G'_a — точка касания вневписанной окружности ω_a со стороной BC;
- λ_a — окружность, построенная на стороне BC как на диаметре;
- S_{ab}, S_{ac} — точки Шарыгина, т. е. точки пересечения окружности λ_a со средними линиями M_aM_b и M_aM_c соответственно;
- ε, ε_a — окружности девяти точек треугольника ABC и треугольника IBC соответственно;
- F — точка касания вписанной окружности и окружности девяти точек треугольника ABC (точка Фейербаха).

Мы начнём с того, что приведём доказательство теоремы Фейербаха. Это доказательство, найденное П. В. Бибиковым, является модификацией классического доказательства теоремы Фейербаха (см., например, [1]), использующего инверсию, однако более геометрично и менее счётно. Для начала дадим следующее определение.

Определение 1. Точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой, образуют *гармоническую четвёрку*, если

$$[AB, CD] = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = 1.$$

Понятие гармонической четвёрки точек тесно связано с инверсией. А именно, четвёрка точек A, B, C, D образует гармоническую четвёрку, если и только если точки A и B симметричны относительно окружности, построенной на отрезке CD как на диаметре (см., например, [3]). Перейдём теперь к доказательству теоремы Фейербаха (с. 48).

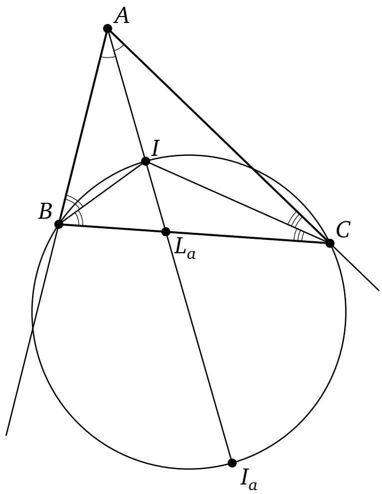


Рис. 2

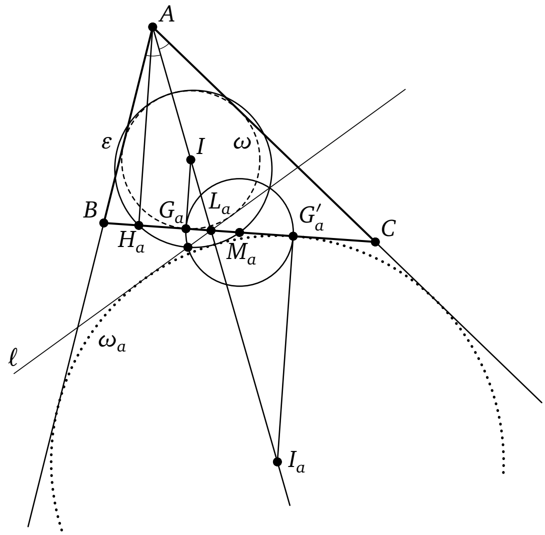


Рис. 3

Доказательство теоремы Фейербаха. Обозначим центр вневписанной окружности треугольника через I_a, а основание биссектрисы, проведённой из вершины A, через L_a. Тогда окружность, построенная на отрезке I_aI как на диаметре, является окружностью Аполлония (см. [3]) для пары точек (A, L_a). Из этого следует, что (A, L_a, I, I_a) — гармоническая четвёрка (рис. 2). Параллельно спроектировав её на прямую BC, мы получим новую гармоническую четвёрку (H_a, L_a, G_a, G'_a). Это означает, что точки H_a и L_a симметричны относительно окружности, построенной на отрезке $G_aG'_a$ как на диаметре (рис. 3). Так как $G_aB = G'_aC$, центр этой окружности совпадает с серединой M_a отрезка BC. Отсюда следует, что при инверсии относительно этой окружности окружность девяти точек ε переходит в прямую ℓ, проходящую через L_a. С другой стороны, эта инверсия оставляет вписанную и вневписанную окружности ω и ω_a на месте, так как обе они ортогональны окружности инверсии (поскольку $IG_a \perp M_aG_a$ и $I_aG'_a \perp M_aG'_a$). Покажем, что прямая ℓ касается окружностей ω и ω_a. Для этого достаточно доказать, что прямая ℓ симметрична прямой BC относительно биссектрисы AI. Докажем это.

Пусть E_a — вторая точка пересечения отрезка AH_a с окружностью ε. Так как инверсия — конформное преобразование, угол между прямыми ℓ и BC равен углу между окружностью ε и BC (угол φ на рис. 4). Далее, этот угол равен углу $H_aE_aM_a$. Четырёхугольник OM_aE_aA является параллелограммом, поэтому $\angle H_aE_aM_a = \angle E_aAO$. Тогда $\angle BAE_a = \angle OAC = 90^\circ - \angle B$. Получаем, что $\varphi = \angle E_aAO = |\angle A - 2\cdot(90^\circ - \angle B)| = |\angle B - \angle C|$.

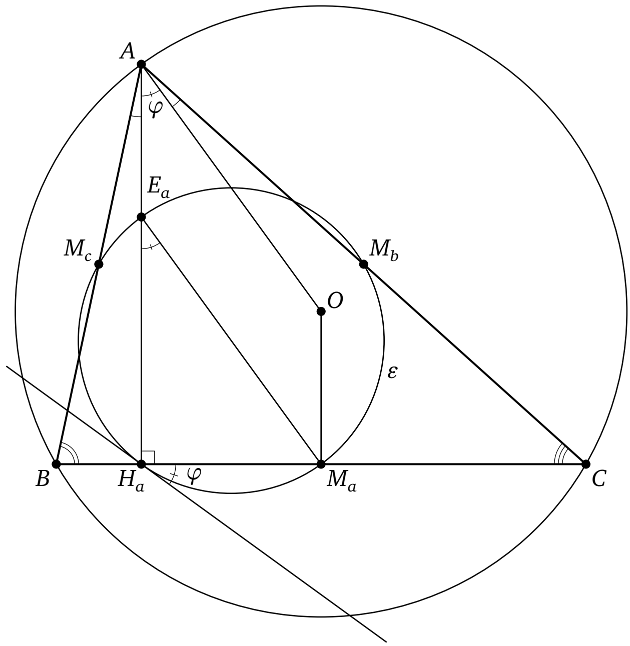


Рис. 4

Теперь рассмотрим прямую $B'L_a$, симметричную прямой BC относительно биссектрисы AL_a. Обозначим угол между $B'L_a$ и BC через φ' (рис. 5). Из треугольника $B'L_aC$ получаем, что $\varphi' = |\angle B - \angle C| = \varphi$. Это означает, что прямые ℓ и $B'L_a$ совпадают, что и требовалось доказать. □

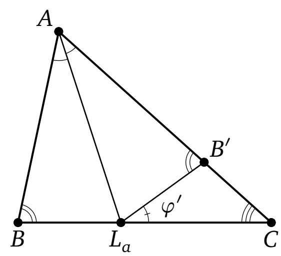


Рис. 5

В дальнейших рассуждениях нам понадобится результат так называемой задачи № 255, получившей широкую известность благодаря предисловию к задачнику И. Ф. Шарыгина [5], в котором она приведена под соответствующим номером.

Лемма 1 (задача № 255). *В точках S_{ab} и S_{ac} пересекаются тройки прямых (G_bG_c, BI, M_aM_b) и (G_bG_c, CI, M_aM_c). Эти точки лежат на окружности λ_a, построенной на стороне BC как на диаметре* (рис. 6).

Замечание. Пусть K_a, K_b и K_c — точки, симметричные точкам G_a, G_b, G_c относительно прямых AI, BI и CI соответственно. Прямая G_aK_b симметрична прямой G_bG_c относительно BI, поэтому точка S_{ab} лежит на G_aK_b. Аналогично точка S_{ac} лежит на G_aK_c (рис. 6).

С точкой Фейербаха оказывается тесно связанной задача, предложенная в 1998 году в финале Всероссийской олимпиады по математике в 10 клас-

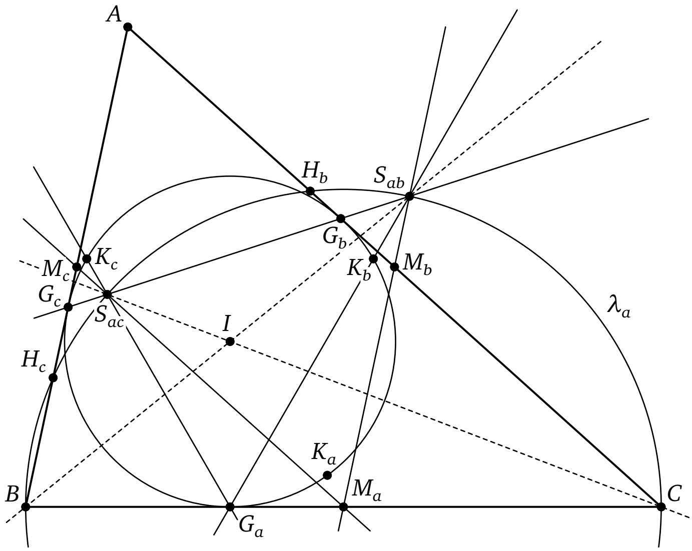


Рис. 6

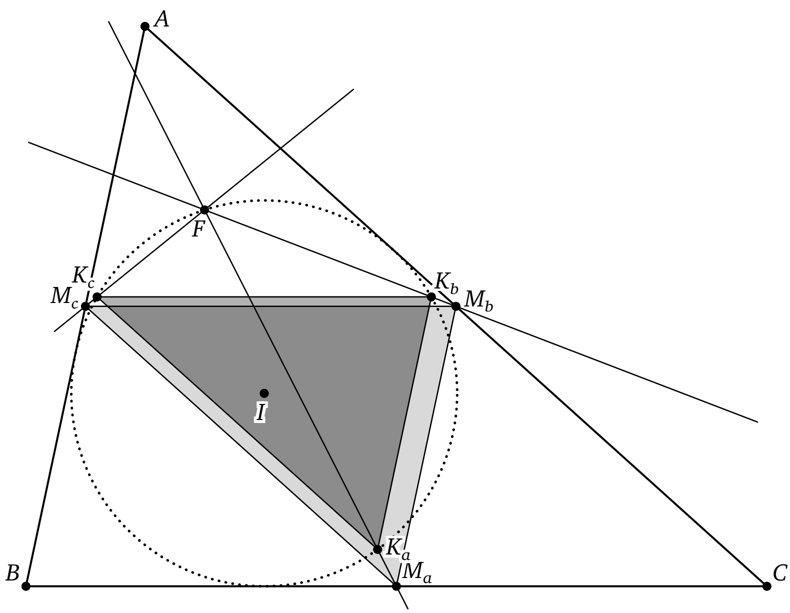


Рис. 7

се под номером 3 (автор И. Шарыгин). В задаче требовалось доказать, что прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке и что эта точка лежит на вписанной окружности треугольника ABC (рис. 7; отметим, что краткий вариант этой задачи, в котором предлагалось просто доказать,

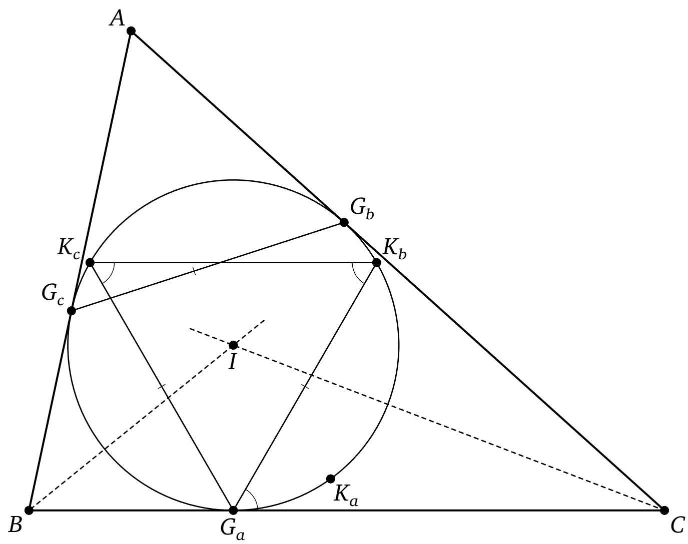


Рис. 8

что прямые M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c пересекаются в одной точке, был предложен на 23 Международной математической олимпиаде в 1982 г. под номером 2).

Для начала докажем, что верна следующая

Лемма 2. *Стороны треугольника $K_aK_bK_c$ соответственно параллельны сторонам треугольников ABC и $M_aM_bM_c$* (рис. 7).

Доказательство. Хорды G_aK_b и G_bG_c симметричны относительно BI, поэтому они равны. Аналогично хорды G_bG_c и G_aK_c симметричны относительно CI и потому также равны. Тогда треугольник $K_cG_aK_b$ равнобедренный, откуда следует, что $\angle G_aK_cK_b = \angle G_aK_bK_c = \angle CG_aK_b$ (рис. 8). Отсюда очевидна параллельность прямых BC и K_bK_c. Для других пар сторон рассуждения аналогичны. □

По лемме 2 и теореме, обратной к теореме Дезарга[1)], треугольники $K_aK_bK_c$ и $M_aM_bM_c$ гомотетичны. Точка пересечения прямых M_aK_a, M_bK_b и M_cK_c является центром этой гомотетии, а значит и центром гомотетии вписанной окружности и окружности Эйлера, т. е. точкой Фейербаха F.

Нам понадобится ещё одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Точка F лежит на окружности Эйлера ε_a треугольника BIC* (рис. 9).

[1)] Теорема Дезарга. *Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников проходят через одну точку, то три точки, в которых пересекаются продолжения соответственных сторон, лежат на одной прямой.*

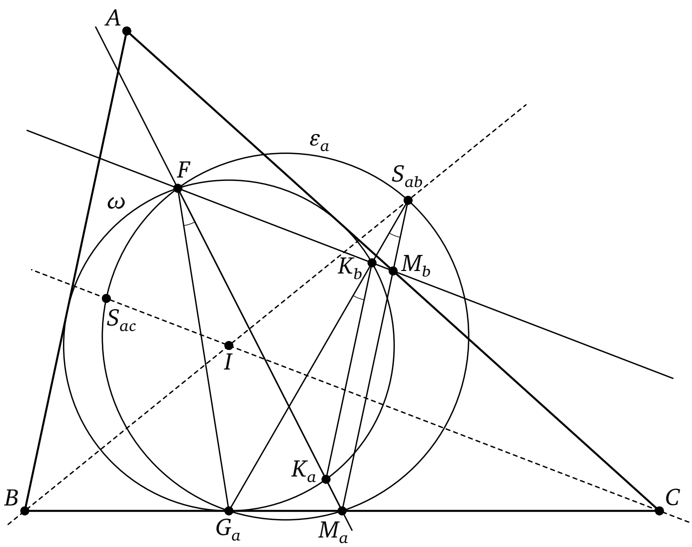


Рис. 9

Доказательство. Заметим, что точки G_a, S_{ac}, S_{ab} и M_a лежат на окружности ε_a, поскольку первая тройка точек — это основания высот треугольника BIC, а точка M_a — середина его стороны BC. Далее, F, G_a, K_a, K_b лежат на вписанной окружности ω треугольника ABC. Значит, $\angle G_aFK_a = \angle G_aK_bK_a$. Так как $K_aK_b \parallel S_{ab}M_a$, имеем $\angle G_aK_bK_a = \angle G_aS_{ab}M_a$ (точки G_a, K_b, S_{ab} лежат на одной прямой по лемме 1). Значит, $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$ и точка F лежит на окружности ε_a. □

Замечание 1. Для любого треугольника и любой точки, не лежащей ни на одной прямой из содержащих стороны треугольника, все окружности Эйлера для треугольников, образованных одной из пар вершин исходного треугольника и этой точкой, имеют общую точку (эта точка P называется точкой Понселе; см. рис. 10). В случае точки I точка Понселе по лемме 3 является точкой Фейербаха.

Замечание 2. Если продлить отрезки BS_{ac} и CS_{ab} до пересечения в точке A_1, то окружность ε_a станет окружностью Эйлера треугольника A_1BC (рис. 11). Действительно, точки S_{ab} и S_{ac} являются основаниями высот, а точка M_a — середина стороны BC.

§ 3. Инверсный образ точки F

Теперь перейдём к основной части программы, где, наконец, будем использовать инверсию. Рассмотрим уже знакомую нам окружность λ_a, по-

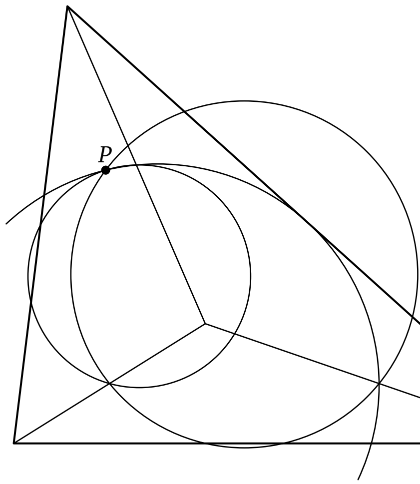


Рис. 10. Точка Понселе

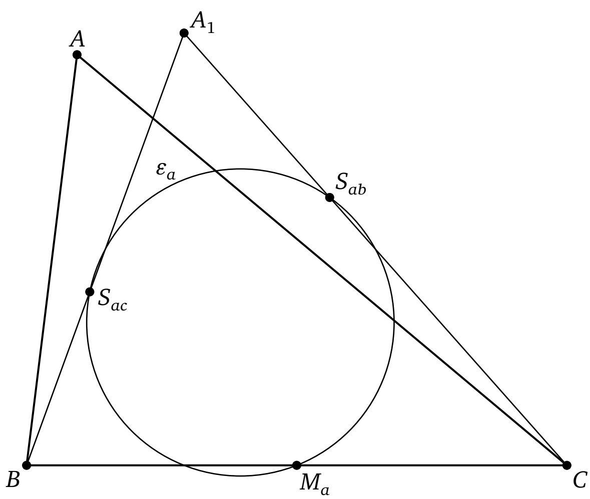


Рис. 11

строенную на отрезке BC как на диаметре. Рассмотрим также точку F'_a — образ точки F при инверсии относительно окружности λ_a. Точка F'_a будет основным объектом наших дальнейших рассуждений.

Для начала посмотрим, куда переходят некоторые точки и окружности при инверсии относительно λ_a. Окружность Эйлера ε перейдёт в прямую H_bH_c, окружность ε_a перейдёт в прямую $S_{ab}S_{ac}$. Кроме того, поскольку точка F является точкой пересечения окружностей ε и ε_a по лемме 3, то точка F'_a является точкой пересечения прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$. В итоге мы получаем следующее красивое

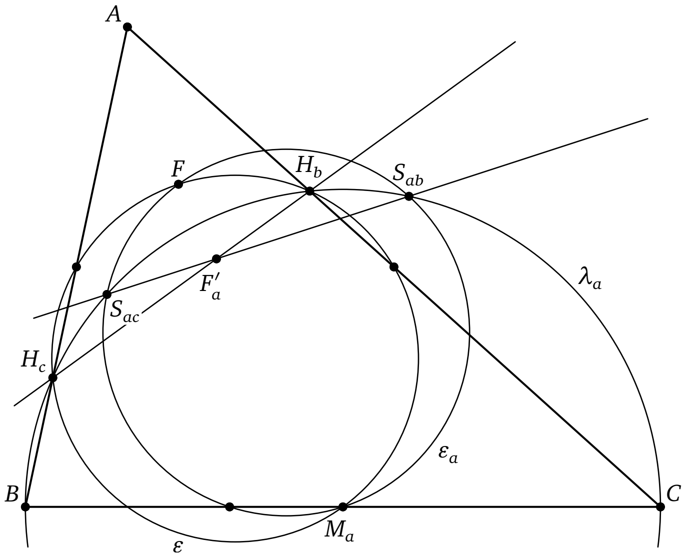


Рис. 12

Предложение 1. *Точка F'_a является радикальным центром окружностей λ_a, ε и ε_a* (рис. 12).

Замечание. В статье [2] точка F'_a называлась *полюсом* треугольника ABC и обозначалась через A_{00}.

Следующий факт в дальнейшем будет играть основную роль, поэтому уделим ему особое внимание.

Теорема 2. *Если K'_b и K'_c — точки пересечения лучей K_aK_b и K_aK_c с прямой H_bH_c, то пятёрки точек $(F, F'_a, K_b, K'_b, S_{ab})$ и $(F, F'_a, K_c, K'_c, S_{ac})$ лежат на окружностях ψ_{ab} и ψ_{ac}* (рис. 13).

Доказательство. Сначала докажем, что четыре точки F, F'_a, K_b, K'_b лежат на одной окружности (рассуждения для четвёрки точек F, F'_a, K_c, K'_c аналогичны). Рассмотрим инверсию Inv_{K_a} с центром в точке K_a, переводящую точку F'_a в точку F, и инверсию Inv_{λ_a} относительно окружности λ_a с диаметром BC. Тогда композиция инверсий $\mathrm{Inv}_{K_a} \circ \mathrm{Inv}_{\lambda_a}$ переводит окружность Эйлера ε в некоторую окружность ω', проходящую через точки F и K_a. В силу того, что инверсия — конформное преобразование, эта композиция сохраняет углы между прямыми и окружностями. Раз центры обеих инверсий лежат на прямой FF'_a, то окружности ε и ω' образуют с прямой FF'_a равные углы. Но это означает, что окружности ε и ω' касаются в точке F. Отсюда следует, что окружности ω и ω' совпадают, поскольку существует единственная окружность, проходящая через точку K_a и касающаяся окружности ε в точке F.

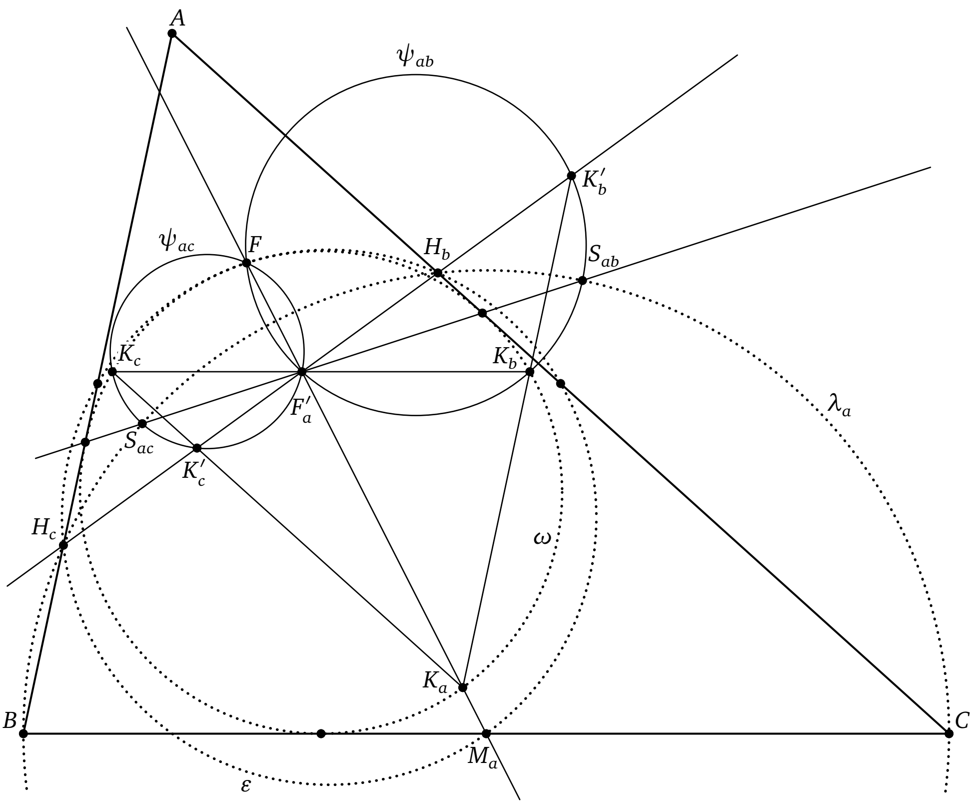


Рис. 13

Далее, заметим, что точка K'_b пересечения луча K_aK_b с прямой H_bH_c — это образ точки K_b при инверсии Inv_{K_a}. Значит, по лемме о подобных треугольниках (см., например, [3]) точки F, F'_a, K_b и K'_b лежат на одной окружности.

Осталось загнать на окружности точки S_{ab} и S_{ac}. Для этого используем вписанные углы. Во-первых, $\angle K_aFK_b = \angle K_aK_cK_b$ (рис. 14). Во-вторых, пусть прямая FK_b вторично пересекает окружность ε_a в точке R. Тогда $\angle M_aS_{ac}R = \angle M_aFR$. Прямые M_aS_{ac} и K_aK_c параллельны (см. лемму 2), поэтому вторые лучи равных углов $\angle M_aS_{ac}R$ и $\angle M_aFR$ также параллельны, т. е. $S_{ac}R \parallel K_bK_c \parallel BC$. Отсюда сразу следует равенство углов $\angle M_aFR$ и $\angle S_{ac}S_{ab}G_a$. Значит, точки F, F'_a, K_b, K'_b и S_{ab} лежат на одной окружности. Для точки S_{ac} рассуждения аналогичны. Итак, теорема доказана. □

Замечание 3. Прямая M_aS_{ab} касается окружности ψ_{ab}. Это следствие ортогональности окружностей ψ_{ab} и λ_a (см. [3]).

Предложение 2. *Точка F'_a лежит на прямой K_bK_c* (рис. 15).

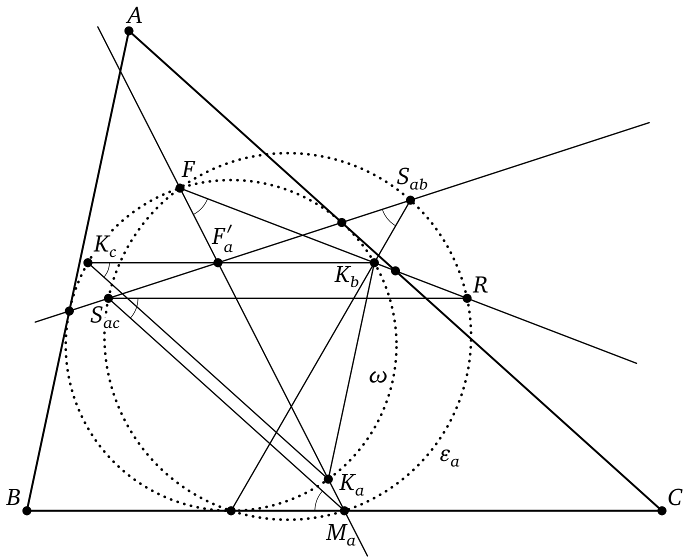


Рис. 14

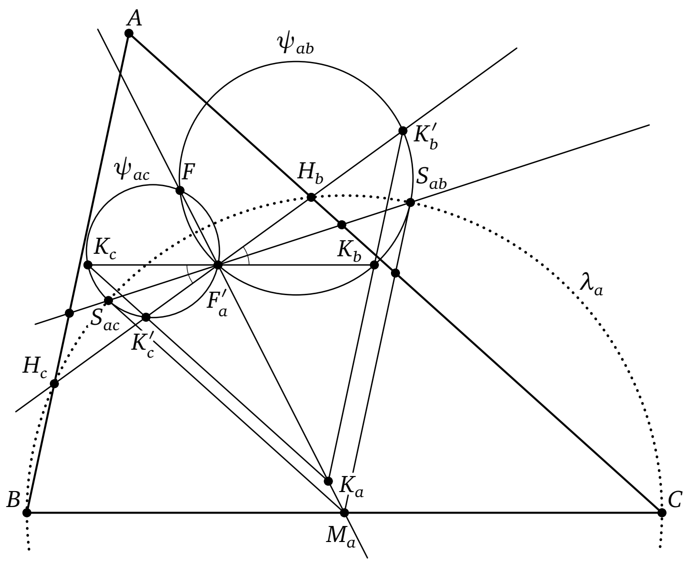


Рис. 15

Доказательство. Заметим, что окружности ψ_{ab} и ψ_{ac} ортогональны λ_a, так как они обе проходят через точки F, F'_a, симметричные относительно λ_a. Тогда по свойству ортогональных окружностей прямые M_aS_{ab} и M_aS_{ac} касаются окружностей ψ_{ab} и ψ_{ac} соответственно. Пары прямых (M_aS_{ab}, K_aK_b) и (M_aS_{ac}, K_aK_c) параллельны, следовательно, $K_bS_{ab} = K'_bS_{ab}$ и $K_cS_{ac} = K'_cS_{ac}$

(параллельные прямые высекают на окружности равные хорды). Тогда $\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab}$ и $\angle K_cF'_aS_{ac} = \angle K'_cF'_aS_{ac}$. Поскольку точка F'_a лежит на прямых H_bH_c и $S_{ab}S_{ac}$, углы $\angle K'_bF'_aS_{ab}$ и $\angle K'_cF'_aS_{ac}$ равны. Значит,

$$\angle K_bF'_aS_{ab} = \angle K'_bF'_aS_{ab} = \angle K'_cF'_aS_{ac} = \angle K_cF'_aS_{ac},$$

откуда следует предложение 2. □

Замечание 4. Из доказательства также следует, что прямая $S_{ab}S_{ac}$ является биссектрисой угла $K_bF'_aH_b$.

Суммируя утверждения 1 и 2, мы получаем, что через точку F'_a проходят четыре замечательные прямые: K_aM_a, H_bH_c, $S_{ab}S_{ac}$ и K_bK_c.

Замечание 5. Можно доказать (см., например, [2]), что через точку F'_a проходят ещё две замечательные прямые: L_bL_c (где L_b и L_c — основания биссектрис BI и CI соответственно) и $G'_bG'_c$ (где G'_b и G'_c — точки касания соответствующих вневписанных окружностей со сторонами AC и AB).

§ 4. Следствия

Теперь мы приведём несколько результатов, доказательства которых можно получить с помощью нашего подхода, связанного с рассмотрением образа F'_a точки Фейербаха F при инверсии относительно окружности λ_a. Начнём с задачи 41-й Международной математической олимпиады (2000 г.), предложенной под номером 6, решение которой мы получаем совершенно «бесплатно». Её условие можно сформулировать следующим образом.

Пусть ABC — остроугольный треугольник. Основания высот треугольника по-прежнему будем обозначать через H_a, H_b, H_c, а точки касания вписанной окружности со сторонами — через G_a, G_b, G_c. Отразим прямую H_aH_b относительно прямой G_aG_b. Аналогично отразим H_bH_c относительно G_bG_c и H_cH_a относительно G_cG_a (рис. 16). *Докажите, что три отражённые прямые при пересечении образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности.* (*Т. Емельянова*)

Из предложения 2 следует, что, например, прямые H_bH_c и K_bK_c симметричны относительно прямой G_bG_c. Тогда прямые H_aH_b, H_bH_c, H_cH_a при отражении соответственно относительно G_aG_b, G_bG_c, G_cG_a перейдут в прямые, содержащие стороны треугольника $K_aK_bK_c$, что и требовалось доказать.

Более важным и интересным для нас будет следующий результат, анонсированный Л. и Т. Емельяновыми [2] и обобщённый в работе Гринберга [6] (см. также статью Ф. Ивлева [4]). Формулируется он следующим образом.

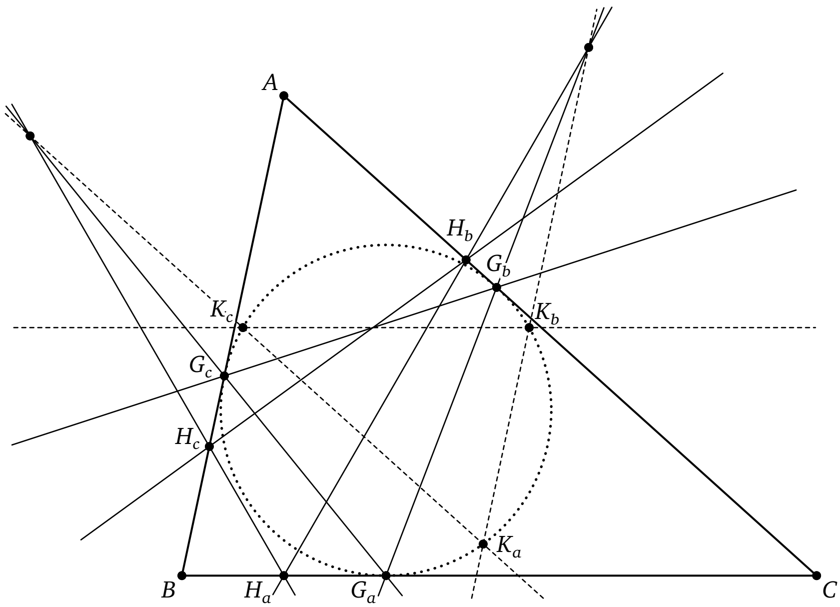


Рис. 16

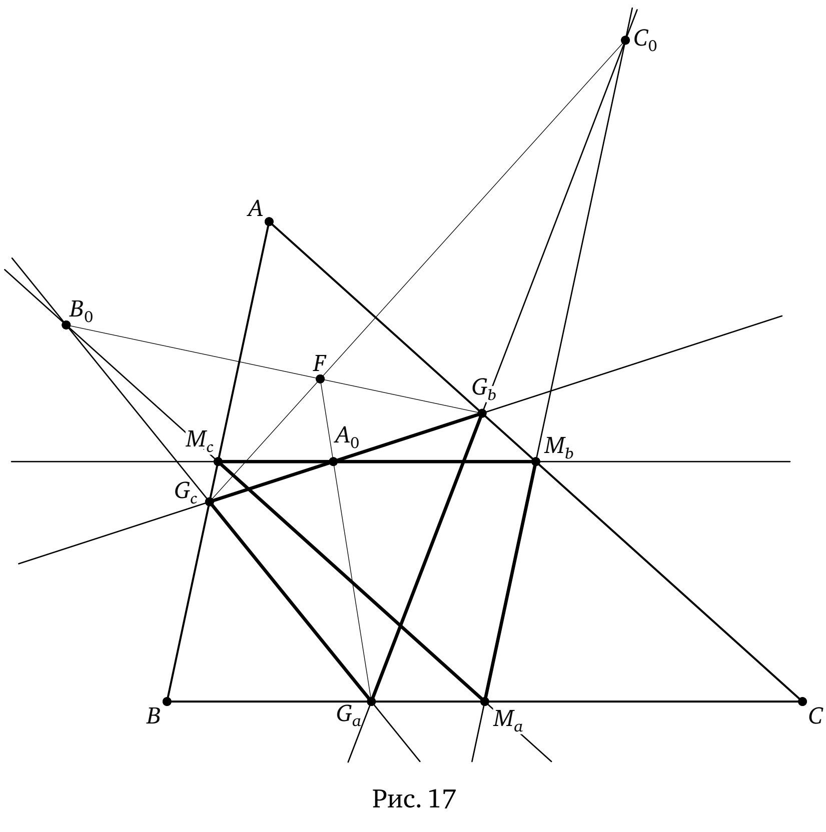


Рис. 17

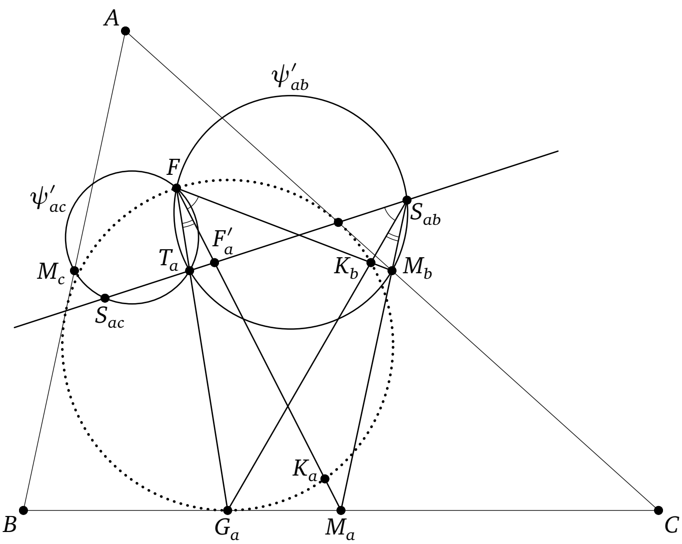


Рис. 18

Теорема 3. *Обозначим через A_0, B_0 и C_0 точки пересечения прямых, содержащих соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и $G_aG_bG_c$. Тогда прямые A_0G_a, B_0G_b и C_0G_c пересекаются в точке F* (рис. 17).

Для доказательства нам понадобится следующее

Предложение 3. *Пусть T_a — точка пересечения прямых FG_a и $S_{ab}S_{ac}$. Тогда четвёрки точек (F, T_a, M_b, S_{ab}) и (F, T_a, M_c, S_{ac}) лежат на окружностях ψ'_{ab} и ψ'_{ac}* (рис. 18).

Доказательство. Приведём доказательство для окружности ψ'_{ab}, поскольку для окружности ψ'_{ac} рассуждения аналогичны. По теореме 2 $\angle M_aFM_b = \angle G_aS_{ab}T_a$. По лемме 2 $\angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}M_a$. Тогда

$$\angle T_aFM_b = \angle M_aFM_b + \angle G_aFM_a = \angle G_aS_{ab}T_a + \angle G_aS_{ab}M_a = \angle T_aS_{ab}M_b,$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 3 мы дадим в следующем разделе.

§ 5. Точка Фейербаха как точка Микеля и обобщение теоремы Емельяновых

Приглядевшись к рис. 13 и 18, иллюстрирующим теорему 2 и предложение 3, нельзя не заметить некоторое их сходство: на обоих рисунках присутствуют окружности, проходящие через четвёрки точек, среди которых точка Фейербаха. Оказывается, это неслучайно, и оба этих результата

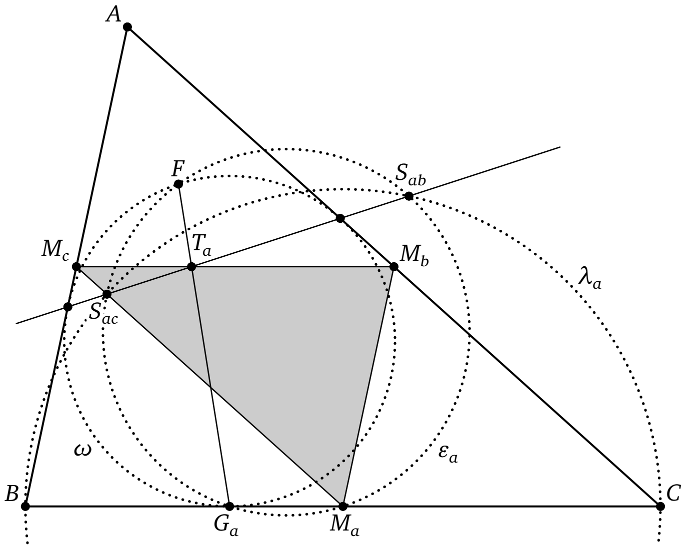


Рис. 19

являются частными случаями некоторой общей конфигурации. В этом разделе мы изучим эту конфигурацию и продемонстрируем её связь с ещё одним классическим геометрическим результатом — теоремой Микеля[2)].

Для начала заметим, что F является точкой Микеля для треугольника $M_aM_bM_c$ и прямой $S_{ab}S_{ac}$ (рис. 19). Отсюда следует, что точка T_a лежит на прямой M_bM_c. Тогда точка T_a есть точка A_0 из теоремы 3, по построению лежащая на FG_a. Аналогичное утверждение справедливо для двух оставшихся точек B_0 и C_0. Тем самым теорема 3 доказана.

Рассмотрение точки F в качестве точки Микеля оказывается не просто вспомогательным шагом к доказательству теоремы 3. На самом деле именно этот ход элегантно обобщает предыдущие результаты и вскрывает причину явления. Реализуем эту конструкцию в общем случае. Для этого докажем теорему 1, сформулированную в начале статьи.

Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы похоже на доказательство предложения 2. А именно, рассмотрим окружность ψ'_{ab}, проходящую через точку T_a (см. предложение 3 и рис. 18). Тогда запишем цепочку равенств углов: $\angle A^{\triangle}P_bF = \angle T_aM_bF = \angle T_aS_{ab}F = \angle A^{\triangle}S_{ab}F$, откуда следует, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi^{\triangle}_{ab}$. Аналогично доказывается, что точка $A^{\triangle}$ лежит на окружности $\psi^{\triangle}_{ac}$. □

[2)] Если четыре прямых образуют четыре треугольника, то их описанные окружности пересекаются в одной точке, которая называется точкой Микеля этой конфигурации прямых.

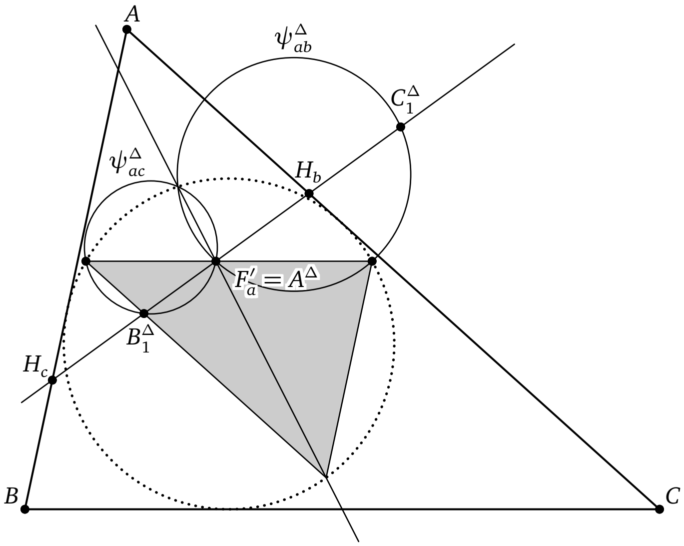


Рис. 20. Прямая H_bH_c

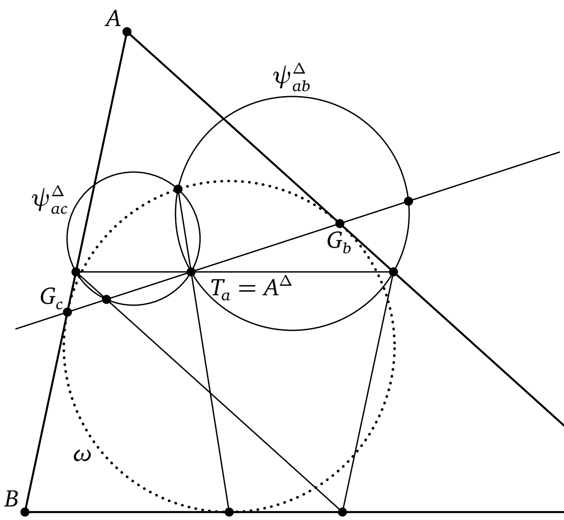


Рис. 21. Прямая G_bG_c

Поясним, почему теорема 1 действительно является обобщением приведённых выше задачи с Международной олимпиады и теоремы Ивлева (см. [4]). Для этого рассмотрим вторые точки $C_1^{\triangle}$ и $B_1^{\triangle}$ пересечения окружности $\psi_{ab}^{\triangle}$ с прямой P_aP_b и пересечения окружности $\psi_{ac}^{\triangle}$ с прямой P_aP_c. Тогда точки $A^{\triangle}$, $B_1^{\triangle}$ и $C_1^{\triangle}$ лежат на одной прямой в силу свойств точки Микеля. В случае задачи с Международной олимпиады эта прямая совпа-

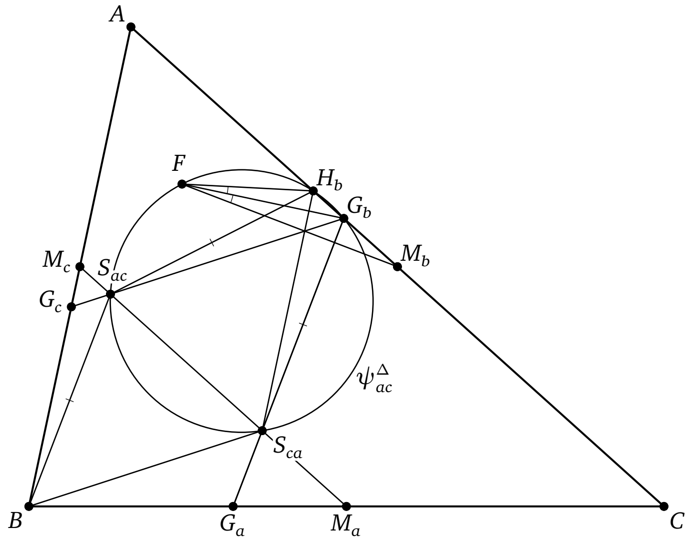


Рис. 22. Прямая G_bG_c

дает с H_bH_c, а точка $A^{\triangle}$ совпадает с F_a' (рис. 20). В случае теоремы Ивлева эта прямая совпадает с G_bG_c (или, что то же самое, с $S_{ab}S_{ac}$), а точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой T_a (рис. 21).

В заключение отметим одну важную окружность из семейства $\psi_{ac}^{\triangle}$.

Предложение 4. *В случае когда точка $A^{\triangle}$ совпадает с точкой G_b, окружность $\psi_{ac}^{\triangle}$ проходит через точки F, H_b, G_b, S_{ac} и S_{ca}* (рис. 22).

Доказательство. Достаточно доказать, что точки F, H_b, G_b, S_{ac} и S_{ca} лежат на одной окружности. Докажем, что четвёрка точек $(H_b, G_b, S_{ac}, S_{ca})$ лежит на одной окружности. Заметим, что прямые BS_{ca} и H_bS_{ac} параллельны, так как обе они перпендикулярны биссектрисе угла BAC. Аналогично прямые BS_{ac} и G_bS_{ca} параллельны, так как обе они перпендикулярны биссектрисе угла ACB. Поэтому четырёхугольник $BS_{ac}H_bS_{ca}$ является параллелограммом и $H_bS_{ac} = BS_{ca} = G_bS_{ca}$. Значит, $S_{ac}H_bG_bS_{ca}$ — равнобокая трапеция, и потому вокруг неё можно описать окружность (рис. 22).

Теперь докажем, что точка Фейербаха также лежит на этой окружности. По лемме Архимеда[3)] следует, что

$$\angle H_bFG_b = \frac{1}{2}\angle H_bFM_b = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C|.$$

[3)] Лемма Архимеда. *Если окружность вписана в сегмент другой окружности, то прямая, соединяющая точки её касания с дугой и хордой, является биссектрисой вписанного угла.*

Далее,
$$\angle H_bS_{ac}S_{ca} = \angle S_{ca}G_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2} \quad \text{и} \quad \angle G_bS_{ac}S_{ca} = \angle AG_bS_{ac} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2},$$
поэтому
$$\angle H_bS_{ac}G_b = |\angle H_bS_{ac}S_{ca} - \angle G_bS_{ac}S_{ca}| = \frac{1}{2}|\angle A - \angle C| = \angle H_bFG_b,$$
откуда следует, что точка F лежит на описанной окружности трапеции $H_bG_bS_{ca}S_{ac}$, что и требовалось доказать. □

Благодарности

Автор благодарит П. В. Бибикова за внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] *Кокстер Г. С. М.*, *Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[2] *Емельянов Л. А.*, *Емельянова Т. Л.* Семейство Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 78–92.

[3] *Жижилкин И. Д.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[4] *Ивлев Ф. А.* Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 219–228.

[5] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия: планиметрия. Задачник. 9–11 классы. М.: Дрофа, 2001.

[6] *Grinberg D.* Generalization of the Feuerbach point `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html`

Вадим Дмитриевич Попов, ученик лицея «Вторая школа» (г. Москва)
popov.l2sh@gmail.com

О центрах гомотетий вписанных окружностей и окружностей Тебо

А. К. Львов

§ 1. Введение

На Всероссийской олимпиаде по геометрии им. Шарыгина в 2015 г. Р. Крутовским и А. Якубовым была предложена следующая задача 9.4 (в других обозначениях).

Дан фиксированный треугольник ABD. По описанной около него окружности движется точка C так, что хорды AC и BD пересекаются. Прямая AC разрезает треугольник BCD на два меньших, центры вписанных окружностей которых обозначим через I_{CD} и I_{BC} соответственно. Прямая $I_{CD}I_{BC}$ пересекает прямую BD в точке P. Докажите, что все прямые CP проходят через фиксированную точку.

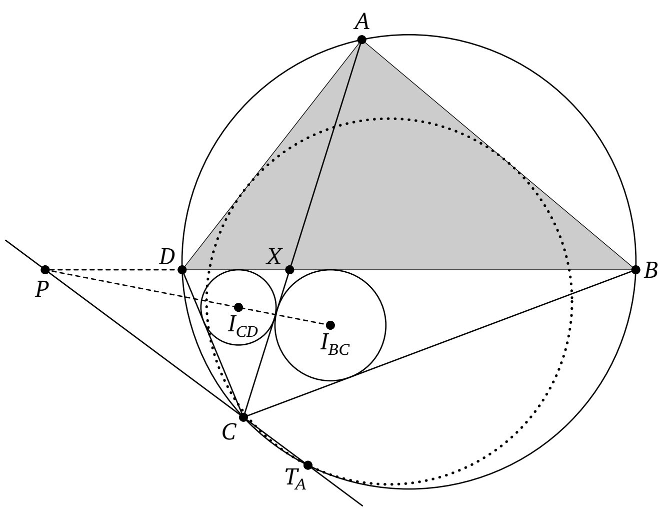


Рис. 1

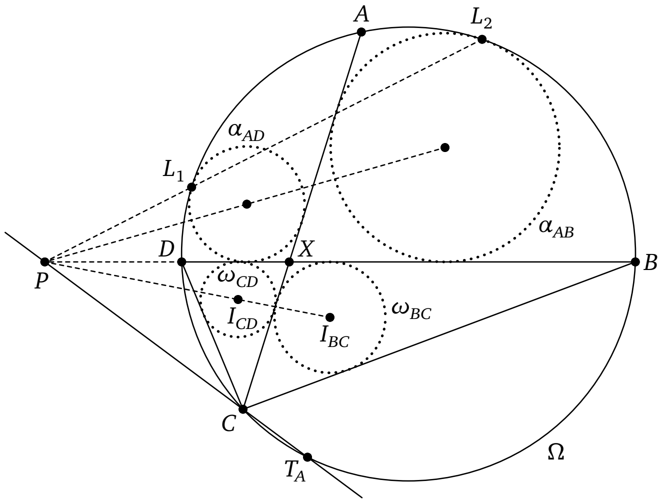


Рис. 2

В замечании к данной задаче указывалось, что эта точка есть точка T_A касания полувписанной окружности треугольника с его описанной окружностью (рис. 1).

В этой заметке мы рассмотрим дальнейшие обобщения этой задачи. Основное внимание при этом будет уделено точке P. А именно, имеет место следующая теорема.

Основная теорема. *Пусть $ABCD$ — вписанный в окружность Ω четырёхугольник, X — точка пересечения его диагоналей. Обозначим через ω_{CD} и ω_{BC} вписанные в треугольники XCD и XBC окружности, а через α_{AD} и α_{AB} — окружности, вписанные в криволинейные треугольники DXA и AXB и касающиеся окружности Ω в точках L_1 и L_2 соответственно* (*так называемой окружности Тебо*). *Пусть также T_A — точка касания окружности Ω и полувписанной окружности треугольника ABD, соответствующей вершине A, и P — точка пересечения прямых BD и T_AC. Тогда*

(1) *точка P является центром гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC};*
(2) *точка P является центром гомотетии окружностей α_{AB} и α_{AD};*
(3) *точка P лежит на прямой L_1L_2;*
(4) *внешние центры гомотетии пар окружностей $(\omega_{CD}, \alpha_{AD})$ и $(\omega_{BC}, \alpha_{AB})$ совпадают* (рис. 2).

§ 2. Полувписанная окружность и точка T_A

Мы начнём доказательство основной теоремы с п. 1 и изучения точки T_A касания полувписанной окружности треугольника ABD с описанной

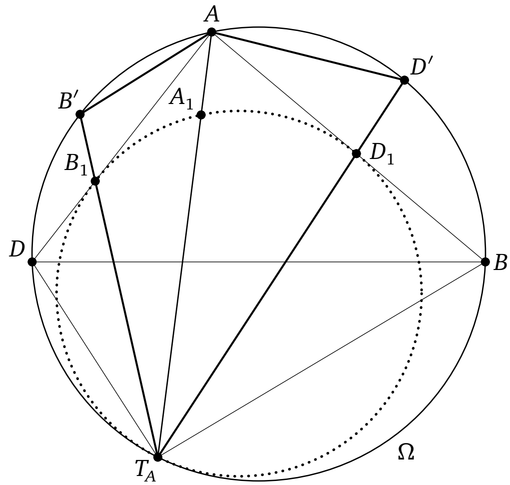


Рис. 3

окружностью Ω. По сути этот пункт повторяет решение указанной выше задачи с олимпиады Шарыгина.

Обозначим через B' и D' середины дуг $\smile{AD}$ и $\smile{BA}$ окружности Ω.

Лемма 1. *Четырёхугольник $T_AB'AD'$ является гармоническим.*

Доказательство. Пусть B_1 и D_1 — точки касания полувписанной окружности со сторонами AD и AB, а A_1 — вторая точка пересечения AT_A с полувписанной окружностью. Тогда тройки точек (T_A, B_1, B') и (T_A, D_1, D') коллинеарны по лемме Архимеда (рис. 3). Заметим, что четырёхугольник $T_AB_1A_1D_1$ гармонический, т. к. касательные к его описанной окружности, проведённые в вершинах B_1 и D_1, пересекаются на диагонали A_1T_A. С другой стороны, четырёхугольники $T_AB_1A_1D_1$ и $T_AB'AD'$ гомотетичны, поэтому четырёхугольник $T_AB'AD'$ также является гармоническим. □

Проведём теперь

Доказательство п. 1 основной теоремы. Обозначим через I_{BC} и I_{CD} центры окружностей ω_{BC} и ω_{CD} соответственно. Докажем, что прямые $I_{BC}I_{CD}$, BD и T_AC пересекаются в одной точке, откуда будет следовать п. 1.

Пусть прямые $I_{BC}I_{CD}$ и BD пересекаются в точке P'. Ясно, что P' является внешним центром гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC}. Обозначим через G точку пересечения прямых $I_{BC}I_{CD}$ и AC, а через T_1 — вторую точку пересечения прямой CP' с окружностью Ω. Тогда G — внутренний центр гомотетии окружностей ω_{CD} и ω_{BC}. Отсюда следует, что четвёрка точек $(P', G; I_{CD}, I_{BC})$ гармоническая. При центральной проекции прямой $P'G$ на окружность Ω из точки C точка G перейдёт в A, точка I_{CD} — в B', точка

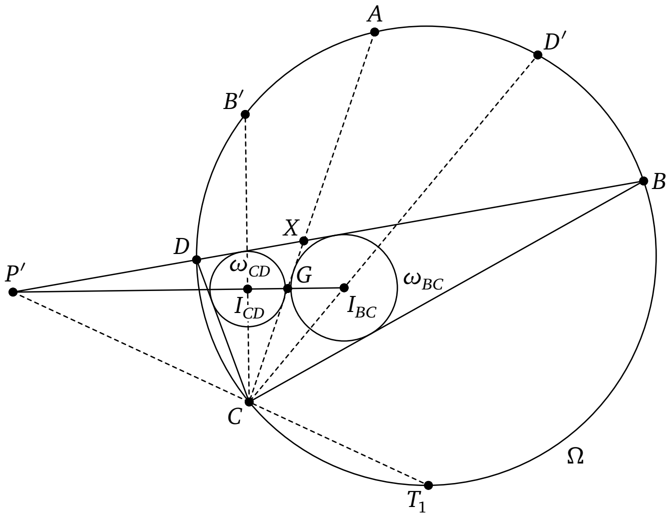


Рис. 4

I_{BC} — в D', а точка P' — в T_1 (рис. 4). Значит, четырёхугольник $T_1B'AD'$ является гармоническим. По лемме 1 получаем, что точка T_1 совпадает с T_A, а значит, точка P' совпадает с P и прямые $I_{BC}I_{CD}$, BD и T_AC пересекаются в одной точке. $\square$

§ 3. Вспомогательные леммы

Для доказательства оставшихся пунктов основной теоремы нам потребуется более серьёзная подготовительная работа. В этом разделе мы докажем ряд лемм, которые связаны с полувписанной окружностью и окружностями Тебо. Большинство из них известны (см., например, [2, с. 125]), однако для полноты изложения мы приведём их доказательства.

Вначале докажем следующий факт, связанный с полувписанной окружностью треугольника ABD. Введём следующие обозначения. Обозначим через B' и D' середины дуг AD и BA окружности Ω соответственно, а через K_A — точку касания вписанной окружности со стороной BD.

Лемма 2. *Пусть прямая, проходящая через вершину A, пересекает прямую BD и окружность Ω в точках E и F соответственно. Тогда точки T_A, K_A, E и F лежат на одной окружности* (рис. 5).

Доказательство. Вначале докажем, что

$$\angle DT_AK_A = \angle ADB \quad \text{и} \quad \angle BT_AK_A = \angle ABD.$$

Пусть K'_A — точка касания стороны BD с вневписанной окружностью Ω_A треугольника ABD, соответствующей вершине A, а S — вторая точка пере-

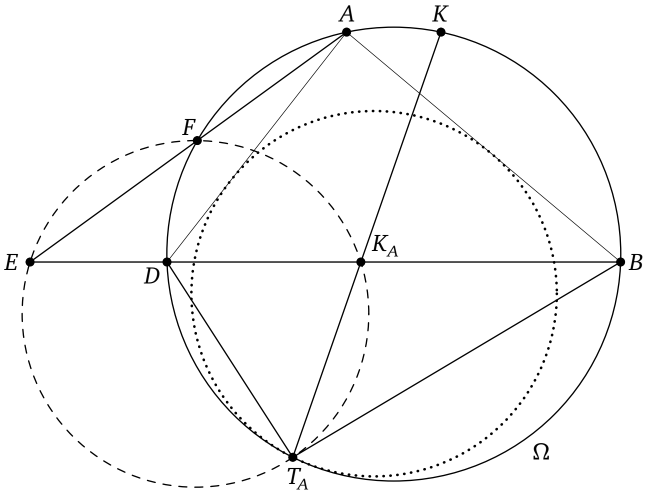


Рис. 5

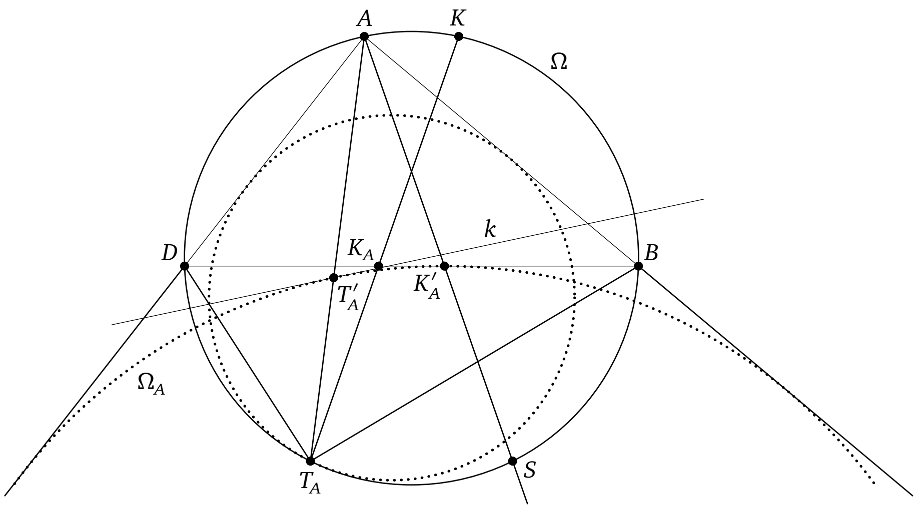


Рис. 6

сечения прямой AK'_A с окружностью Ω. Докажем, что пары точек (K_A, K'_A) и (T_A, S) симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD (рис. 6).

В самом деле, симметричность точек K_A и K'_A следует из равенства отрезков касательных BK_A и DK'_A. Для доказательства симметричности точек T_A и S рассмотрим инверсию с центром в точке A и радиусом $\sqrt{AD \cdot AB}$. Такая инверсия переведёт окружность Ω в прямую k, симметричную BD относительно биссектрисы угла BAD. В силу этой симметрии образ окружности Ω будет касаться вневписанной окружности Ω_A, а значит, полувписанная окружность при этой инверсии перейдёт в Ω_A. Поэтому данная инверсия переводит точку касания T_A полувписанной окружности с окружностью Ω в точку T_A' касания их образов Ω_A и k, которая симметрична K_A' относительно биссектрисы угла BAD.

Итак, при осевой симметрии относительно серединного перпендикуляра к BD прямая SK_A' перейдёт в прямую T_AK_A. Отсюда следует, что

$$\angle DT_AK_A = \frac{\breve{AB}}{2} = \angle ADB \quad \text{и} \quad \angle BT_AK_A = \frac{\breve{AD}}{2} = \angle ABD,$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к доказательству леммы. Пусть K — вторая точка пересечения прямой K_AT_A с окружностью Ω (рис. 5). Тогда, по доказанному выше,

$$\angle FT_AK_A = \frac{1}{2}(\breve{KD} - \breve{FD}) = \frac{1}{2}(\breve{BA} - \breve{FD}) = \angle FEK_A,$$

откуда следует, что точки T_A, K_A, E и F лежат на одной окружности. □

Теперь рассмотрим некоторые факты, связанные с окружностями Тебо α_{AD} и α_{AB} (рис. 7). Напомним, что эти окружности вписаны в криволинейные треугольники DXA и AXB, где X — точка пересечения диагоналей вписанного в окружность Ω четырёхугольника $ABCD$. Обозначим центры этих окружностей через J_{AD}, J_{AB}, а также проведём к ним вторую общую внешнюю касательную ℓ, отличную от BD. Прямая ℓ пересекает окружность Ω в точках M и N. Пусть J — центр вписанной окружности треугольника NMC.

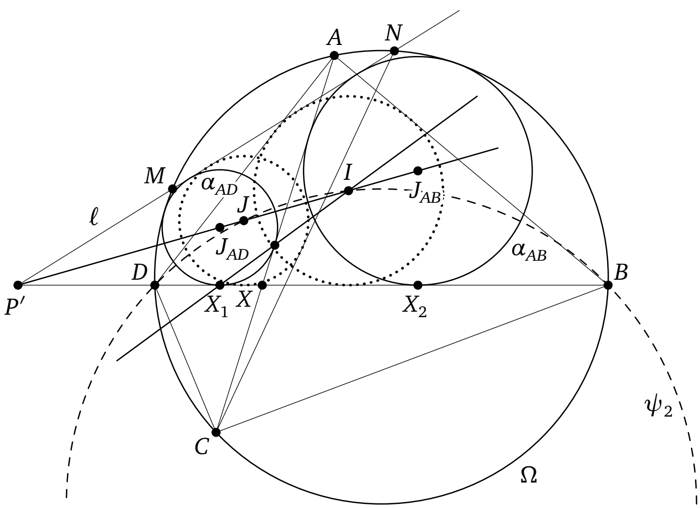


Рис. 7

Хорошо известны следующие теоремы.

Теорема 1 (лемма Саваямы). *Центр I вписанной окружности треугольника ABD лежит на прямой, проходящей через точки касания окружности α_{AD} с прямыми XA и XD.*

Теорема 2 (теорема Тебо). *Точки I, J, J_{AD} и J_{AB} лежат на одной прямой.*

Доказательства теорем 1 и 2 можно найти, например, в [4].

Теперь докажем важную лемму, которая следует из леммы Саваямы и теоремы Тебо. Эта лемма понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 3. *Обозначим точки касания окружностей α_{AD} и α_{AB} с прямой BD через X_1 и X_2. Тогда*

1) *точки I, J, X_1 и X_2 лежат на одной окружности ψ_1;*
2) *точки I, J, B и D лежат на одной окружности ψ_2;*
3) *точки I, J, X и K_A лежат на одной окружности ψ_3.*

Доказательство. Обозначим точку пересечения прямых AX и NM через Y, точки касания окружностей α_{AD} и α_{AB} с прямыми MN и XY — через (Y_1, Y_2) и (Z_1, Z_2) соответственно. Пусть также P' — точка пересечения прямых X_1X_2, Y_1Y_2 и $J_{AD}J_{AB}$ (впоследствии мы докажем, что на самом деле точка P' совпадает с точкой P пересечения прямых BD и $I_{CD}I_{BC}$).

1. По лемме Саваямы точка пересечения прямых X_2Z_2 и X_1Z_1 совпадает с I, а точка пересечения прямых Y_2Z_2 и Y_1Z_1 — с J. При этом

$$\angle Y_2JY_1 = \angle X_2JX_1 = 90^\circ = \angle X_2IX_1,$$

поэтому точки I, J, X_1, X_2 лежат на одной окружности ψ_1 (рис. 8).

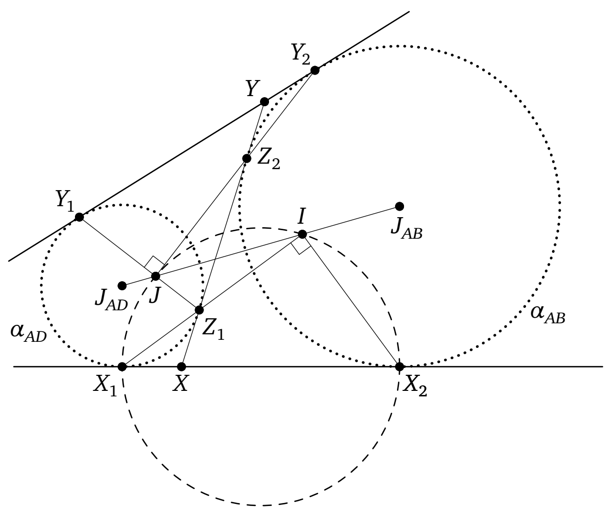


Рис. 8

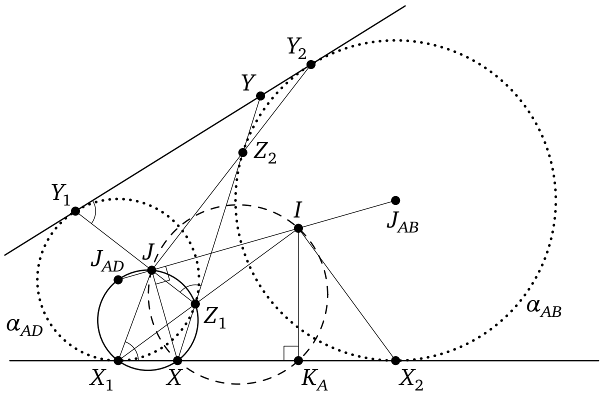


Рис. 9

2. Сделаем инверсию Inv с центром в P', которая переведёт окружность Ω в себя. Так как при такой инверсии прямые BD и MN также переходят в себя, то $\mathrm{Inv}(\alpha_{AD}) = \alpha_{AB}$ и $\mathrm{Inv}(X_1) = X_2$. Отсюда следует, что окружность ψ_1 при инверсии Inv переходит в себя и $\mathrm{Inv}(I) = J$. Таким образом, пара точек (B, I) переходит при инверсии Inv в пару точек (D, J). Значит, эти четыре точки лежат на одной окружности ψ_2.

3. Заметим, что $\angle JX_1X = \angle JY_1Y = \angle Y_1Z_1Y$. Поэтому точки J, Z_1, X и X_1 лежат на одной окружности. Так как $\angle J_{AD}X_1X = \angle J_{AD}Z_1X = 90^\circ$, точка J_{AD} также лежит на этой окружности (рис. 9). Отсюда следует, что

$$\angle XJI = \angle J_{AD}X_1X = 90^\circ = \angle IK_AX,$$

поэтому точки I, J, X и K_A лежат на одной окружности, что и требовалось доказать. □

§ 4. Доказательство основной теоремы

Теперь мы готовы завершить доказательство основной теоремы. Напомним основные обозначения, которые нам понадобятся. Пусть J_{AD}, J_{AB} — центры α_{AD} и α_{AB}, а I_{BC}, I_{CD} — центры ω_{BC}, ω_{CD}. Точки T_A, K_A, I и J определим так же, как в § 2.

Доказательство пп. 2, 3 и 4 основной теоремы. Вначале докажем п. 2. Пусть прямые $J_{AB}J_{AD}$ и BD пересекаются в точке P'. Ясно, что P' — внешний центр гомотетии окружностей α_{AB} и α_{AD}. Обозначим через F и T_2 вторые точки пересечений прямых AP' и CP' с окружностью Ω.

Сделаем уже знакомую нам по лемме 3 инверсию Inv с центром в P', которая переведёт окружность Ω в себя. Тогда из существования окружности ψ_3 (см. лемму 3) следует, что $\mathrm{Inv}(X) = K_A$ (рис. 10).

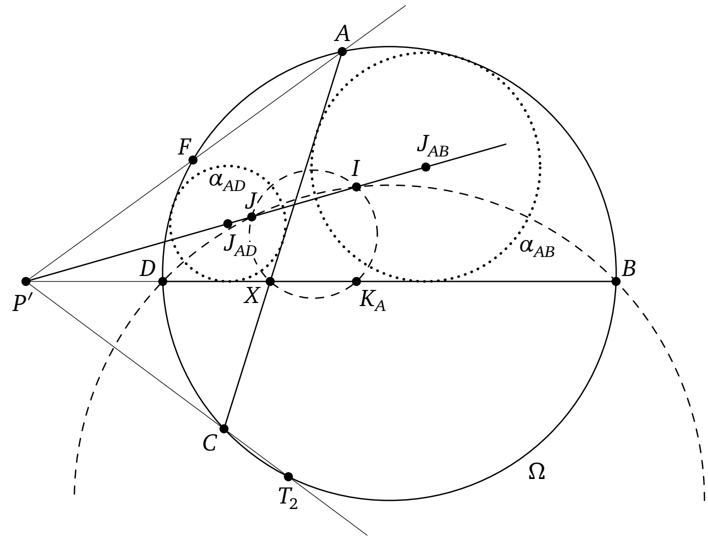


Рис. 10

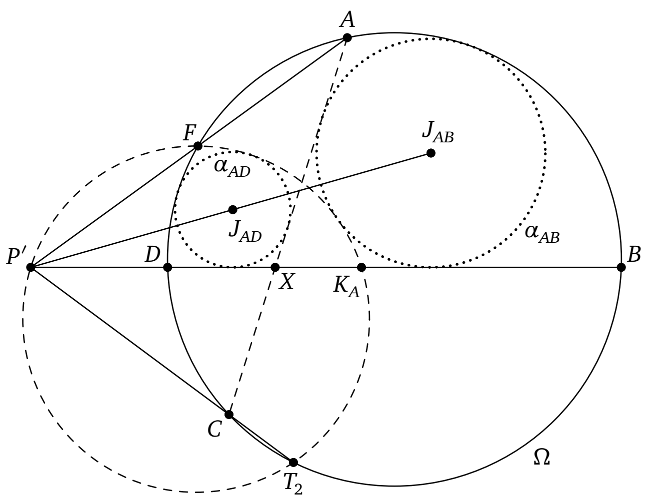


Рис. 11

Теперь рассмотрим образ прямой AC при инверсии Inv. Поскольку $\mathrm{Inv}(A) = F$ и $\mathrm{Inv}(C) = T_2$, прямая AC перейдёт в окружность, проходящую через точки P', F, K_A и T_2. Наконец, по лемме 2 отсюда следует, что точки T_2 и T_A совпадают, а из уже доказанного п. 1 следует, что точки P' и P совпадают. Таким образом, п. 2 полностью доказан (рис. 11).

Докажем теперь п. 3 основной теоремы. Заметим, что точка P является внешним центром гомотетии окружностей α_{AD} и α_{AB}, точка L_1 —

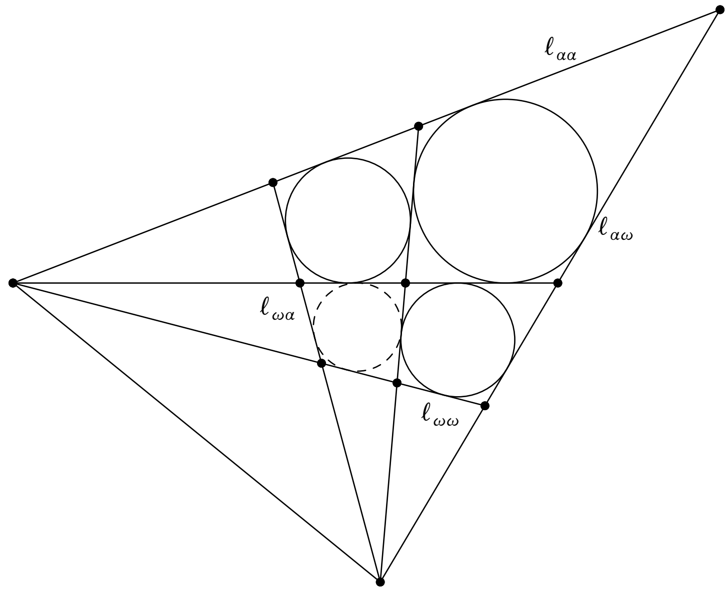


Рис. 12

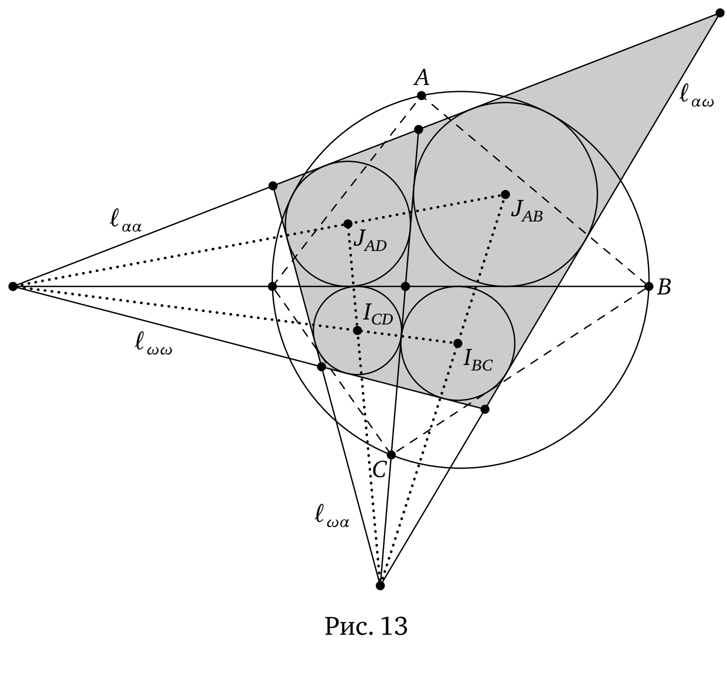


Рис. 13

внутренним центром гомотетии окружностей Ω и α_{AD}, а точка L_2 — внутренним центром гомотетии окружностей Ω и α_{AB}. Поэтому точки P, L_1 и L_2 лежат на одной прямой по теореме о трёх центрах гомотетий (см., например, [3, с. 220]).

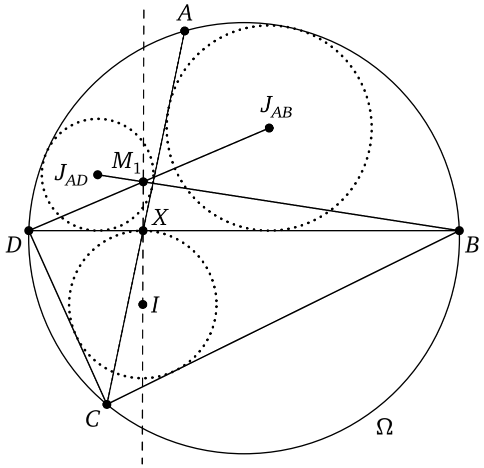


Рис. 14

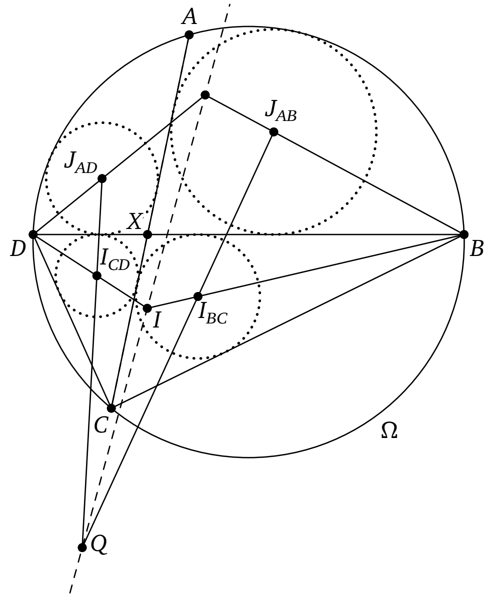


Рис. 15

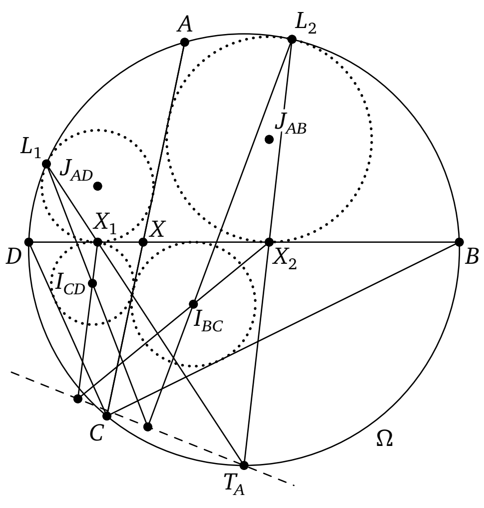


Рис. 16

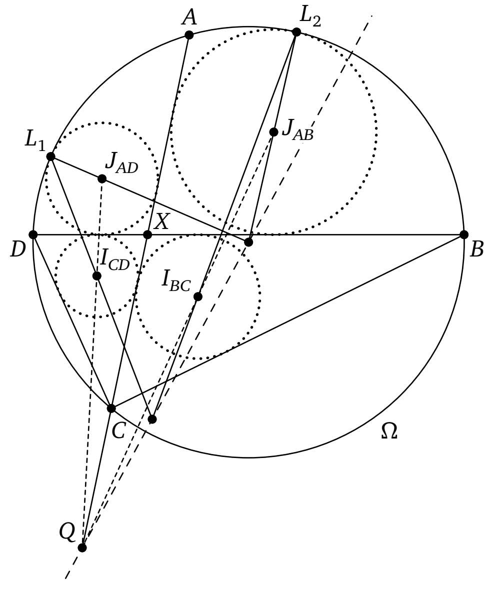


Рис. 17

Осталось доказать п. 4. Рассмотрим четырёхугольник, образованный общими внешними касательными $\ell_{\alpha\alpha}, \ell_{\alpha\omega}, \ell_{\omega\omega}, \ell_{\omega\alpha}$ к парам окружностей $(\alpha_{AD}, \alpha_{AB})$, $(\alpha_{AB}, \omega_{BC})$, $(\omega_{BC}, \omega_{CD})$, $(\omega_{CD}, \alpha_{AD})$, отличными от AC и BD соответственно. Заметим, что прямые $\ell_{\alpha\alpha}$ и $\ell_{\omega\omega}$ пересекаются на прямой BD по пп. 1 и 2 (рис. 13). Докажем, что прямые $\ell_{\alpha\omega}$ и $\ell_{\omega\alpha}$ пересекаются на прямой AC.

Для этого проведём через точку Q пересечения $\ell_{\alpha\omega}$ и AC касательную ℓ к окружности ω_{BC} и рассмотрим четырёхугольник, образованный прямыми $\ell_{\alpha\alpha}$, $\ell_{\alpha\omega}$, $\ell_{\omega\omega}$ и ℓ. Прямые AC и BD проходят через точки пересечения его противоположных сторон и делят его на четыре четырёхугольника, три из которых являются описанными (рис. 12). Но тогда и четвёртый четырёхугольник является описанным (см., например, [1]), поэтому прямые ℓ и $\ell_{\omega\alpha}$ совпадают, а значит, прямые $\ell_{\alpha\omega}$, $\ell_{\omega\alpha}$ и AC пересекаются в одной точке (рис. 13).

Ясно, что эта точка и будет внешним центром гомотетии пар окружностей $(\alpha_{AD}, \omega_{CD})$ и $(\alpha_{AB}, \omega_{BC})$.

Таким образом, наша теорема полностью доказана. □

§ 5. Следствия из основной теоремы

В заключение нашего рассказа отметим ряд интересных следствий из доказанной нами основной теоремы. Чтобы получить их, применим к конфигурации, изображённой на рис. 2, теорему Дезарга. Наиболее интересные следствия из этой теоремы приведены на следующих рисунках.

Благодарности

Автор благодарит П. В. Бибикова за помощь в подготовке статьи к публикации.

Список литературы

[1] *Белухов Н., Кожевников П. А.* Описанные четырёхугольники и ломаные // Квант. 2010. № 1. С. 45–49.

[2] *Заславский А. А., Пермяков Д. А., Скопенков А. Б., Скопенков М. Б., Шаповалов А. В.* Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009.

[3] *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия. Т. 1. М.: МЦНМО, 2004.

[4] *Протасов В. Ю.* Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха // Квант. 2008. №4. С. 10–15.

Алексей Константинович Львов, ученик МАОУ ОЦ «Горностай» (г. Новосибирск)

alekon33@gmail.com

Наш семинар: математические сюжеты

Регулярные графы

С. Б. Гашков

§ 1. Вместо введения

Читателю предлагается попробовать решить несколько олимпиадных задач (в скобках указано, когда и где они предлагались[1]); некоторые задачи, возможно, на олимпиадах не предлагались, но вполне могли бы). Прочитав статью, вы не только легко справитесь с теми задачами, которые не поддались вам вначале, но с удивлением увидите, в какие дебри могут завести поставленные в них такие простые и естественные вопросы.

Задача 1 (ММО, 1960, второй тур, 10.3). Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые два знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

Эта задача широко известна, но почти нигде не отмечается один подводный камень в её решении. Хотите узнать, в чём дело? — читайте § 3.

Задача 2. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые два знакомых не имеют общих знакомых, а каждые два незнакомых имеют ровно одного общего знакомого. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

[1] ВМО — Всесоюзная математическая олимпиада; ММО — Московская математическая олимпиада; IMO — Международная математическая олимпиада.

В этой задаче есть такая же тонкость, как и в предыдущей. Читайте об этом § 4.

Если в задаче 1 еле заметно видоизменить условие, получится

Задача 3 (ММО, 2012, 11 класс, первый день, № 4). На собрание пришло n человек ($n > 1$). Оказалось, что у любых двух из них есть среди собравшихся ровно два других общих знакомых.

а) Докажите, что каждый из них знаком с одинаковым числом людей на этом собрании.

б) Покажите, что n может быть больше 4.

Задача 4. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые двое имеют ровно одного общего знакомого. Доказать, что каждый из них, кроме, быть может, одного, знаком с одинаковым числом людей. Могут ли все они иметь равное число знакомых?

Задача 5. Собралось $n \geqslant 4$ человек. Некоторые из них знакомы между собой, причём каждые двое имеют ровно одного общего знакомого. Доказать, что если среди них найдётся знакомый со всеми остальными, то такой человек только один, число n нечётно и все остальные имеют в точности по два знакомых.

Предыдущие две задачи тесно связаны с одной непростой теоремой теории графов. Читайте о ней в § 5.

Задача 6 (ВМО 1969, 8.5). В некотором государстве система авиалиний устроена таким образом, что любой город соединён авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно проехать, сделав не более одной пересадки. Какое максимальное число городов может быть в этом государстве?

Эта задача и её обобщения обсуждаются в § 4.

§ 2. Графы, цепи и циклы

Что такое графы — сейчас многие знают[2)], и олимпиадные задачи, относящиеся к теории графов, часто даже и формулируются в теоретико-графовых терминах, а не на «бытовом» (или «геометрическом») языке, как было раньше. Тем не менее в § 1 все задачи сформулированы без использования терминологии теории графов (чтобы не отпугнуть слу-

2) Если читатель всё же не знаком с ними, рекомендуем обратиться к достаточно просто написанным книгам [11, 16]. Приведённый в конце список литературы довольно обширен, но, конечно, не полон.

чайного читателя), но все необходимые далее понятия будут сейчас явно введены (для краткости это будет сделано формально, без примеров и мотивации).

Для простоты рассматривается только случай обыкновенных графов (хотя многие понятия аналогично определяются и для ориентированных графов и для мультиграфов).

Граф $G = (V, E)$ — это (упорядоченная) пара множеств: множества V *вершин* $v \in V$ и множества E *рёбер* $e \in E$ (этого графа). Рёбра графа $e = \{v_i, v_j\}$ (далее также $e = (v_i, v_j)$) — это двухэлементные множества вершин графа (т. е. просто неупорядоченные пары вершин). Если V и E — конечные множества, то граф называется *конечным*. Далее рассматриваются только конечные графы. Вершины, образующие ребро, называются *смежными*. При этом про ребро e и вершину v, $v \in e$, говорят, что они *инцидентны* (друг другу). Число $\deg_v(G)$ рёбер графа G, инцидентных данной вершине v, называется *степенью* этой вершины.

Обычный граф с n вершинами, в котором проведены все $n(n-1)/2$ рёбер, называется *полным графом* и обозначается K_n.

Графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение (биекция), сохраняющее смежность вершин, т. е. биекция $\varphi: V_1 \to V_2$ со следующим свойством: $\{v_i, v_j\} \in E_1$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi(v_i), \varphi(v_j)\} \in E_2$.

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, которая начинается и заканчивается вершиной: v_{i_1}, e_{j_1}, $v_{i_2}, e_{j_2}, \ldots, v_{i_k}, e_{j_k}, v_{i_{k+1}}$, где $e_{j_s} = \{v_{i_s}, v_{i_{s+1}}\}$ для всех $s = 1, \ldots, k$. *Длиной* маршрута называется число входящих в него рёбер. *Цепью* в графе G называется маршрут, не содержащий повторяющихся рёбер. Цепь, не содержащая повторяющихся вершин, называется *простой* цепью.

Граф называется *связным*, если любые его вершины соединяются цепью (а значит, и простой цепью). Если граф не связен, то он распадается на несколько связных подграфов — его *компонент связности*.

Расстоянием $d(v_i, v_j)$ между вершинами v_i и v_j называется длина кратчайшей (т. е. содержащей наименьшее число рёбер) цепи, начинающейся в вершине v_i и заканчивающейся в вершине v_j. Такая цепь называется *геодезической цепью* с концами v_i и v_j. Геодезическая цепь является простой цепью.

Циклом называется цепь, первая и последняя вершина которой совпадают. *Простым циклом* называется цикл, в котором совпадают только первая и последняя вершины. Простой цикл графа, включающий все его вершины, называется *гамильтоновым циклом*. Граф, имеющий гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым графом*.

Графы, у которых степени всех вершин равны, называются *регулярными*. Примером связного регулярного графа является любой простой цикл (в нём степени всех вершин равны 2). Примером несвязного регулярного графа является граф, состоящий из нескольких рёбер, попарно не имеющих общих вершин. Степень каждой вершины такого графа равна 1 и он называется *паросочетанием*.

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два подмножества так, что каждое ребро соединяет вершины из разных подмножеств.

2.1. Дружеские отношения и сильно регулярные графы

Связный граф называется (v, a, c, d)-*сильно регулярным*, если число его вершин v, степени вершин равны a, для каждой пары его смежных вершин число их общих соседей равно c, а для каждой пары несмежных вершин число их общих соседей равно d. Тривиальным примером такого графа при $a = v - 1$, $c = v - 2$ являлся бы полный граф на v вершинах, но у него просто нет пар несмежных вершин. Далее рассматриваются только нетривиальные и связные графы. *Обхватом* графа называется длина кратчайшего простого цикла. *Диаметром* графа называется наибольшее расстояние между его вершинами.

В частности, если $c = 0$, то граф не содержит треугольников («двое знакомых не имеют общих знакомых»), значит, обхват его не меньше 4. В случае $c > 0$ обхват равен трём.

Если $d = 1$, то граф не содержит циклов длины четыре и любые две его вершины соединяются единственной цепью длины не больше 2. Значит, в этом случае обхват графа не меньше 5, а диаметр равен 2. Если же $d \geqslant 2$, то любые две несмежные вершины принадлежат циклу длины четыре, а в случае $d = 2$ такой цикл единственный. Поэтому в случае $d \geqslant 2$ диаметр равен 2, а обхват — четырём.

§ 3. Задача Московской олимпиады 1960 года

На языке теории графов задача 1 формулируется так: граф не содержит треугольников, а каждые две несмежные вершины лежат на единственном цикле длины четыре. Докажем, что граф регулярен (а значит, он будет $(v, a, 0, 2)$-сильно регулярным). Пусть V — любая его вершина, V_i, $i = 1, \ldots, a$, — её соседи. По условию V_i, V_j при любых $i \neq j$ не смежны, значит, найдётся у них ещё один (кроме V) общий сосед $V_{i,j}$. Все вершины $V_{i,j}$ не смежны с V (иначе появляется треугольник, например $V, V_i, V_{i,j}$) и попарно различны (если $V_{i,j} = V_{k,l}$, то эта вершина вместе с V имеет не менее трёх общих соседей среди V_i, V_j, V_k, V_l). Больше вершин в графе нет: если есть ещё одна вершина V', то она не смежна с V, значит, имеет с ней двух общих соседей. Это вершины V_i, V_j, которые тогда имеют общих соседей V, V' и $V_{i,j}$, что невозможно. Значит, число v вершин в графе равно

$$1+a+\frac{a(a-1)}{2}=1+\frac{a(a+1)}{2}.$$

Положительное число a определяется однозначно.

Рёбра этого графа выше указаны все, кроме рёбер между вершинами $V_{i,j}$. Указанные рёбра образуют подграф этого графа, совпадающий с подграфом a-мерного двоичного куба, образованным нулевым, первым и вторым его слоями. Но у него должны быть ещё рёбра между вершинами $V_{i,j}$ (второго слоя). Они должны образовывать такой подграф степени $a-2$ на множестве вершин второго слоя, чтобы для всего графа выполнялось условие задачи. Однако неясно, при каких a такой граф существует. Очевидно, при $a=2$ он существует и является циклом длины четыре, а при $a \geqslant 3$ он содержит циклы длины 5. В [5] (и в других источниках), где публиковалось решение этой задачи, вопрос о существовании такого графа почему-то не обсуждался.

Задача 7. Докажите, что при $a=3$ и $a=4$ таких графов нет.

Задача 8. Докажите, что при $a=5$ такой граф есть и определяется однозначно.

Указание. Вершины $V_{i,j}, V_{j,k}$ не смежные (иначе есть треугольник $V_{i,j}$, $V_{j,k}$, V_j) а вершины $V_{i,j}, V_{k,l}$ при $\{i,j\}\cap\{k,l\}=\varnothing$ обязаны быть смежными, так как вершина $V_{i,j}$ должна иметь степень пять, а её соседями (кроме V_i, V_j) могут быть только три вершины $V_{k,l}$, у которых $\{k,l\}\cap\{i,j\}=\varnothing$. Если вершины $V_{i,j}, V_{k,l}$ не смежные, то без ограничения общности $l=j$, и общими соседями у них будут только V_j и $V_{p,q}$, где множества $\{p,q\}$ и $\{i,j,k\}$ не пересекаются (не имеют общих элементов). Если вершины $V_{i,j}, V_k$ не смежные, то $k\neq i$, $k\neq j$, тогда их общими соседями будут только $V_{k,p}$ и $V_{k,q}$, где $\{p,q\}$ и $\{i,j,k\}$ не пересекаются. Треугольника в графе нет, так как вершины $V_{i,j}$, $V_{k,l}$, $V_{p,q}$ могут его образовывать лишь в случае попарно разных индексов i,j,k,l,p,q, что невозможно.

Его кубический подграф[3)] из десяти вершин $V_{i,j}$ не содержит треугольников, и любые две несмежные вершины имеют только одного общего соседа.

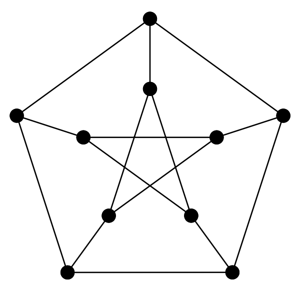


Рис. 1. Изображение графа Петерсена

[3)] Так называют регулярные графы, все вершины которых имеют степень три.

Задача 9. Докажите, что указанный подграф изоморфен графу Петерсена (рис. 1).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если граф задачи* 1 *степени a существует, то $a = 1 + n^2$, где целое n не делится на четыре.*

Для доказательства теоремы понадобится

3.1. Немного линейной алгебры

Сопоставим каждому графу такую квадратную матрицу A порядка v, что на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число $a_{i,j} = 1$, если вершины V_i, V_j соединены ребром, и $a_{i,j} = 0$ в противном случае. Эта матрица, называемая далее *матрицей смежности* данного графа, симметрична, так как $a_{i,j} = a_{j,i}$, и по главной диагонали в ней нули (т. е. $a_{i,i} = 0$, $i = 1, \ldots, v$). Другими примерами симметричных булевых (т. е. заполненных только нулями и единицами) матриц являются матрица E, в которой единицы стоят только на главной диагонали, и матрица J, заполненная только единицами.

Будем говорить, что вектор $x = (x_1, \ldots, x_v)$ при умножении на произвольную матрицу M порядка v превращается в вектор $y = Mx$, где

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j.$$

Если $Mx = \lambda x$, где λ — некоторое число, то вектор x называют *собственным вектором* матрицы M, а λ — его *собственным значением*.

Собственный вектор для данного собственного значения λ определён неоднозначно, так как его можно умножить на любое число и опять получится собственный вектор. В частности, нулевой вектор является собственным для любого собственного значения, по этой причине нулевой вектор удобно собственным вектором не считать.

У матрицы E все ненулевые векторы собственные с собственным значением 1. У матрицы смежности A регулярного графа в каждой строке и каждом столбце стоит ровно a единиц, поэтому вектор $(1, \ldots, 1)$ является для неё собственным и имеет собственное значение a. По той же причине у матрицы J тот же вектор является собственным с собственным значением v. У неё есть также векторы с собственным значением 0. Ими являются все векторы $x = (x_1, \ldots, x_v)$, удовлетворяющие равенству $x_1 + \ldots + x_v = 0$. Любой такой вектор можно представить в виде $x_1 w_1 + \ldots + x_{v-1} w_{v-1}$, где $w_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0, -1)$, поэтому говорят, что собственное значение 0 у матрицы J имеет *кратность* $v-1$ и ему соответствует собственное пространство размерности $v-1$ (порождённое векторами w_i, $i=1,\dots,v-1$). Собственное значение 1 у матрицы E имеет кратность v.

В линейной алгебре известна теорема, которой мы воспользуемся без доказательства, о том, что действительная симметричная матрица порядка n всегда имеет ровно n действительных собственных значений (и столько же собственных векторов), если учитывать их кратность (например, матрица E имеет одно v-кратное собственное значение, а матрица J — одно однократное и одно $(v-1)$-кратное).

Матрицы, так же как и векторы, можно умножать на числа и складывать. Например, можно рассмотреть матрицу $2J+(a-1)E$, в которой по главной диагонали стоят числа $a+1$, а вне её — двойки. Вектор $(1,\dots,1)$ является для неё собственным с собственным значением $2v+a-1$ (например, потому, что у матрицы $2J$ он имеет собственное значение $2v$, а у матрицы $(a-1)E$ — собственное значение $a-1$), а векторы w_i имеют собственное значение $a-1$ (потому что у матрицы $2J$ они имеют нулевое собственное значение, а у матрицы $(a-1)E$ — собственное значение $a-1$), которое поэтому имеет кратность $v-1$.

Квадратные матрицы равного порядка можно умножать и в результате получать матрицу того же порядка. Матрица $D=BC$ по определению состоит из чисел

$$d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}c_{k,j}.$$

Матрица CB может и не совпадать с матрицей BC, но если $B=C$, то оба произведения очевидно совпадают и обозначаются B^2.

Легко проверить тождества $B(C+D)=BC+BD$, $(C+D)B=CB+DB$, $EB=BE=B$. Из них, например, следует, что $(A+E)^2=A^2+2A+E$. Также легко проверить, что если матрица A имеет собственное значение λ кратности k, то матрица A^2 имеет собственное значение λ^2 не меньшей кратности, потому что если $Ax=\lambda x$, то $A^2x=\lambda^2x$.

Если матрица B симметрическая, она имеет ровно v собственных значений с учётом кратности, и их сумма с учётом кратности равна сумме элементов главной диагонали матрицы — так называемому *следу матрицы* (этот известный факт из линейной алгебры также оставим без доказательства).

Лемма 1. *Обозначим в убывающем порядке $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ собственные значения матрицы смежности A данного регулярного графа степени a. Справедливо равенство $\lambda_1=a$, т. е. наибольшее собственное значение* *матрицы смежности A равно a, причём для связного графа кратность этого значения равна* 1.

Доказательство. Заметим, что $Ae = ae$ (где вектор $e = (1, \ldots, 1)$ записывается в виде столбца), потому что в каждой строке матрицы сумма чисел равна a. Очевидно, для любого вектора w

$$|(Aw)_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j\Big| \leqslant a \max |w_i| = a|w|,$$

поэтому для любого собственного значения λ_j и его собственного вектора v, $Av = \lambda_j v$, имеем $|Av| = |\lambda_j||v| \leqslant a|v|$, откуда $|\lambda_j| \leqslant a = \lambda_1$. Предполагая, что $Aw = aw$ для какого-нибудь вектора w, имеем

$$aw_i = Aw_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j.$$

Если выбрать i так, чтобы $w_i = |w| = \max_j |w_j|$ (если нужно, вместо w можно взять $-w$), получим, что

$$a|w| = aw_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |w| = a|w|,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} |w| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \sum_{j,\, a_{i,j}=1} a_{ij} w_j.$$

Значит, во всех вершинах графа, соседних с вершиной, в которой $w_i = |w|$, величина w_i имеет то же значение. Если граф связен, то для любого i значения w_i одинаковы, т. е. $w = |w|e$. $\square$

Следующая лемма дополняет предыдущую[4].

Лемма 2. *Граф является двудольным тогда и только тогда, когда $\lambda_n = -\lambda_1$. В этом случае все его собственные значения разбиваются на пары противоположных по знаку.*

Доказательство. Действительно, $\lambda_n = -\lambda_1$. Рассматривая любую компоненту связности и предполагая, что $Aw = -aw$, имеем

$$a|w_i| = |(Aw)_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij} |w_j|.$$

[4] Обе леммы являются частными случаями теоремы Перрона — Фробениуса.

Выбирая i так, что $|w_i| = |w| = \max_j |w_j|$, получаем, что

$$a|w| = a|w_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w| = a|w|,$$

откуда

$$a|w_i| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w_j| = \sum_{j\in\Gamma(i)} A_{ij}|w_j| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|w|,$$

где $\Gamma(i)$ — окрестность вершины i, т. е. множество всех вершин, соседних с вершиной i. Значит, во всех вершинах графа, соседних с вершиной, в которой w_i максимально по модулю, модуль w_i имеет то же значение. Двигаясь по вершинам компоненты связности, получаем, что на них везде модуль w_i одинаков. Рассматривая множества вершин, в которых значения w_i равны, получаем два непересекающихся подмножества рассматриваемой компоненты. Они являются долями двудольного графа, так как внутри них нет рёбер, иначе для одной из вершин получилось бы неравенство

$$|aw| = |-aw_i| = |(Aw)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j\right| = \left|\sum_{j\in\Gamma(i)} \pm A_{ij}|w|\right| < |aw_i|.$$

Так как компоненты двудольны, то и весь граф двудолен.

Если же граф двудолен, то его матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$. Если для всех i

$$\lambda w_i = (Aw)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} w_j,$$

то, меняя знак у w на всех вершинах одной доли, получаем, что новый вектор — собственный для $-\lambda$. □

3.2. Доказательство теоремы 1

В приведённом выше решении задачи 1 показано, что число вершин рассматриваемого в ней графа равно $v = 1 + a(a+1)/2$. Пусть A — его матрица смежности. Вычислим явно матрицу A^2. По главной диагонали у неё стоят числа

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^{v} a_{i,j} a_{j,i} = \sum_{j=1}^{v} a_{i,j}^2 = a,$$

потому что в каждой строке в матрице A ровно a единиц, а остальные нули. Если $a_{i,j} = 1$, т. е. V_i, V_j соединены ребром, то

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{v} a_{i,k} a_{k,j} = 0.$$

Действительно, если $a_{i,k}a_{k,j}=1$, то $a_{i,k}=1=a_{k,j}$, значит, V_k соединено рёбрами с V_i, V_j, и так как $k\neq i, j$, то в графе есть треугольник V_i, V_k, V_j, что противоречит условию. Поэтому $a_{i,k}a_{k,j}=0$.

Если же $a_{i,j}=0$, т. е. V_i, V_j не соединены ребром, то

$$m_{i,j}=\sum_{k=1}^{v}a_{i,k}a_{k,j}=2.$$

Действительно, если $a_{i,k}a_{k,j}=1$, то $a_{i,k}=1=a_{k,j}$, значит, V_k соединено рёбрами с V_i, V_j, а таких вершин, смежных одновременно с V_i и V_j, имеется ровно две. Поэтому среди слагаемых только две единицы, а остальные нули.

Так как в обоих случаях, согласно доказанному, $m_{i,j}=2(1-a_{i,j})$, $m_{i,i}=a$, то $A^2=(a-2)E+2(J-A)$, потому что у матрицы $(a-2)E$ вне главной диагонали нули, а у матрицы $2(J-A)$ на ней двойки. Положив $B=A+E$, получаем, что $B^2=A^2+2A+E$, значит, $B^2=(a-1)E+2J$.

В п. 3.1 было проверено, что матрица $(a-1)E+2J=B^2$ имеет собственное значение $2v+a-1$ кратности 1 и собственное значение $a-1$ кратности $v-1$. Поэтому (согласно проверенному там же свойству квадрата матрицы) матрица B имеет собственные значения только из множества $\{\pm\sqrt{2v+a-1}, \pm\sqrt{a-1}\}$.

Из равенства $v=1+a(a+1)/2$ следует, что $\sqrt{2v+a-1}=a+1$, что неудивительно, так как матрица $B=A+E$ имеет собственный вектор $(1,\ldots,1)$ с собственным значением $a+1$. Так как матрица B симметрическая, она имеет ровно v собственных значений с учётом кратности, и их сумма с учётом кратности равна следу матрицы, который равен v, поэтому из доказанного выше следует равенство

$$v=r_1(a+1)+r_2\sqrt{a-1},$$

где r_1, r_2 — целые числа.

Так как $v/(a+1)=1/(a+1)+a/2$ при $a>2$ не целое, то $r\neq 0$, значит,

$$\sqrt{a-1}=\frac{v-r_1(a+1)}{r_2}$$

— рациональное число.

Но если $\sqrt{a-1}$ рационально, то оно целое, так как a целое. Следовательно, $a=1+k^2$, где k — целое.

Докажем, что в этом равенстве k не может быть кратным 4. Действительно, собственное значение матрицы B, равное $a+1$, имеет кратность 1, а собственного значения $-(a+1)$ матрица B не имеет. Так как $B=A+E$, это следует из того, что, согласно лемме 1, матрица A не может иметь собственного значения $-a-2$, а максимальное по модулю собственное значение у неё равно a и имеет кратность 1.

Поэтому, обозначив кратности собственных чисел $\pm\sqrt{a-1}$ матрицы B через r и s, получаем систему уравнений

$$1+r+s=v=a+1+r\sqrt{a-1}-s\sqrt{a-1},$$

первое из которых означает, что сумма кратностей собственных чисел матрицы B равна её порядку, а второе — что сумма её собственных значений с учётом кратности равна её следу.

Решая эту систему, имеем

$$r-s=v-1-2s=\frac{a(a+1)}{2}-2s, \qquad \frac{a(a-1)}{2}=(r-s)\sqrt{a-1},$$

значит,

$$\frac{a\sqrt{a-1}}{2}=r-s=\frac{a(a+1)}{2}-2s,$$
$$4s=a(a+1-\sqrt{a-1})=(1+k^2)(2+k^2-k).$$

Но при k, кратных четырём, правая часть последнего равенства не делится на 4. Теорема доказана.

Из неё следует, что рассматриваемый граф может существовать только при $a=2$, $a=5$, $a=10$, $a=26$ и т. д.

3.3. Граф Клебша — Гринвуда — Глисона

Графы задачи 1 при $a=2$ и $a=5$ существуют, как было показано выше. Первый из них тривиален, а второй известен под названием *графа Клебша*[5] или *графа Гринвуда — Глисона*. Они использовали в 1955 г.

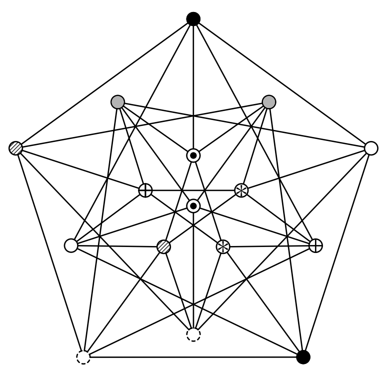


Рис. 2. Одно из изображений графа Клебша

[5] Альфред Клебш (1833–1872) — известный немецкий алгебраист.

этот граф для вычисления числа Рамсея[6] $R(3,3,3) = 17$. Нижняя оценка $R(3,3,3) \geqslant 17$ фактически доказана в задаче 10.

Задача 10 (IMO 1964). Семнадцать учёных переписываются по трём темам. Докажите, что трое переписываются по одной теме.

Рёбра полного графа на 16 вершинах можно раскрасить в три цвета так, что рёбра одного цвета будут образовывать граф, изоморфный графу Клебша. Поэтому в полном графе не будет одноцветных треугольников. Правда, Гринвуд и Глисон построили этот граф из алгебраических соображений[7].

Ещё один способ построения этого графа таков. Нужно взять граф 4-мерного куба и добавить к нему рёбра, соединяющие противоположные вершины куба (его «диаметры»). Эта конструкция, применённая к n-мерному кубу, даёт регулярный граф с 2^n вершинами степени $n+1$ без треугольников диаметра $\lfloor n/2 \rfloor$. Так же как и n-мерный куб, этот граф гамильтонов. Другой способ получить тот же граф — взять граф $(n+1)$-мерного куба и отождествить в нём все пары противоположных вершин (именно это фактически и делается в указании к задаче 8 в случае пятимерного куба).

3.4. Граф Симса — Гевирца и тройки Штейнера

Граф задачи 1 при $a = 10$ тоже существует, он был получен американским математиком Чарльзом Симсом (1937–2017) и изучен в 1967 г. в диссертации другого американского математика Аллана Гевирца и называется графом Симса — Гевирца. От линий в его изображениях рябит в глазах.

Существует ли подобный граф при $a = 26$, до сих пор неизвестно, но исследование его возможных свойств ведутся в Японии и в Уральском центре РАН.

Интересно, как оказалась задача 1 на Московской олимпиаде в 1960 г.?

Кратко опишем конструкцию графа Гевирца (этот $(56,10,0,2)$-сильно регулярный граф, на самом деле, единствен с точностью до изоморфизма, но мы оставим это без доказательства). Воспользуемся фактом существования в 22-элементном множестве 77 шестиэлементых подмножеств,

[6] Что такое числа Рамсея — см., например, [13].

[7] Роберт Гринвуд (1911–1993) — американский математик, активный деятель Американского математического общества.

Эндрю Глисон (1921–2008) — известный американский математик, решивший пятую проблему Гильберта. Во время Второй мировой войны (и после неё почти до конца жизни) работал криптоаналитиком и активно участвовал во взломе японских и немецких военных шифров.

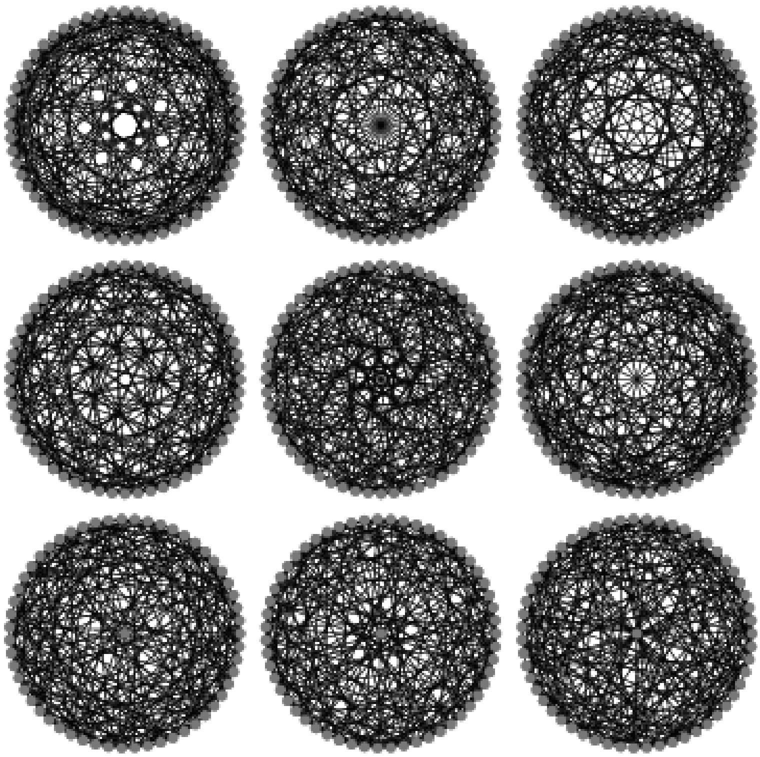


Рис. 3. Различные изображения графа Гевирца

никакие два из которых не имеют трёх общих элементов. Такая комбинаторная конфигурация на самом деле определена однозначно и называется *системой Штейнера*[8).]

Любая тройка (трёхэлементное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, 22\}$) содержится ровно в одной из 77 «шестёрок» системы Штейнера. Действительно, троек ровно $\binom{22}{3} = 22 \cdot 21 \cdot 20/6 = 77 \cdot 20$, а каждая из 77 шестёрок содержит ровно $\binom{6}{3} = 20$ троек, а разные шестёрки не имеют общих троек. Каждая пара элементов из $\{1, 2, \ldots, 22\}$ содержится ровно в 5 шестёрках, потому что пару можно расширить до тройки ровно 20 способами, каждую из этих троек содержит одна шестёрка, значит, можно насчитать 20 шестёрок, содержащих данную пару, но при этом каждая шестёрка будет учтена четырежды (так как пару, лежащую в данной шестёрке, можно расширить до лежащей в ней тройки четырьмя способами). Очевидно, что любые 5 шестёрок, имеющих общую пару, не имеют кроме неё общих элементов, и значит, в объединении охватывают всё множество

[8)] Якоб Штейнер (1796–1863) — крупный швейцарский математик.

$\{1, 2, \ldots, 22\}$. Проверим ещё, что каждый элемент множества $\{1, 2, \ldots, 22\}$ содержится ровно в 21 шестёрке. Действительно, каждый элемент можно дополнить до 21 пары (добавив один элемент), а каждая пара содержится ровно в 5 шестёрках. Значит, можно насчитать ровно $21 \cdot 5$ шестёрок, содержащих данный элемент, но при этом каждая шестёрка будет учтена 5 раз (дополнить элемент шестёрки до лежащей в ней пары можно пятью способами), значит, данный элемент содержится ровно в 21 шестёрке.

Проверим наконец, что любые две шестёрки могут пересекаться только по двум элементам. Для этого вначале посчитаем, с каким количеством шестёрок данная шестёрка пересекается по двум элементам. Количество способов выбрать пару элементов в данной шестёрке равно $\binom{6}{2} = 15$, а каждая из выбранных пар содержится в четырёх шестёрках (не считая данной). Значит, насчитывается ровно $15 \cdot 4 = 60$ шестёрок, пересекающих данную по двум элементам (очевидно, ни одна из этих шестёрок не подсчитана дважды, иначе она пересекалась бы с данной шестёркой минимум по трём элементам, но это запрещено условием). Подсчитаем теперь для данной шестёрки общее число пересекающих её шестёрок. С одной стороны, каждый элемент данной шестёрки содержится ровно в 20 других шестёрках, как было показано выше. Значит, можно насчитать $6 \cdot 20 = 120$ шестёрок, пересекающих данную. Но выше уже было найдено 60 шестёрок, пересекающих данную по двум элементам, и они только что были подсчитаны дважды (как содержащие один элемент и как содержащие второй). Таким образом, эти шестёрки уже учтены $60 \cdot 2 = 120$ раз, значит, ни одной шестёрки, пересекающей данную ровно по одному элементу, быть не должно (иначе второй способ подсчёта даст большее число, чем первый).

Построим теперь $(56, 10, 0, 2)$-сильно регулярный граф. Выкинем из описанной выше системы Штейнера $S(22, 6, 3)$ все шестёрки (их 21), содержащие элемент 22. Останется ровно $77 - 21 = 56$ шестёрок. Будем их рассматривать как вершины графа. Две вершины соединяем ребром, если соответствующие им шестёрки не пересекаются. Проверим, что для любой данной шестёрки найдётся ровно 10 не пересекающих её шестёрок. Достаточно убедиться, что число пересекающих её шестёрок равно 45. Действительно, каждая из них пересекает её по паре, их ровно $\binom{6}{2} = 15$, и каждая пара содержится ровно в трёх шестёрках (в полной системе Штейнера в четырёх, не считая данной, но одна из них содержит элемент 22 и поэтому была удалена).

Построенный граф не содержит треугольников, так как иначе были бы три попарно непересекающихся шестёрки A, B, C. Но имеется ровно 61 шестёрка, пересекающая A (учитываем и её саму), и столько же, пересекающих B. Количество шестёрок D, пересекающих одновременно A и B, не больше 45, потому что пара элементов $D \cap A$ может быть выбрана 15 способами, после чего найдётся не более трёх шестёрок, пересекающих A по той же паре и одновременно пересекающих B (так как эти шестёрки пересекают B по попарно не пересекающимся парам элементов). Значит, согласно правилу включения-исключения, число шестёрок, пересекающих A или B не меньше $61 + 61 - 45 = 77$, а так как всего в системе 77 шестёрок, то шестёрки C не существует (из этого рассуждения[9] также следует, что существует ровно 45 шестёрок, одновременно пересекающих любые две данные непересекающиеся шестёрки, но это далее не понадобится).

Остаётся проверить, что для любых двух пересекающихся шестёрок (т. е. не смежных вершин графа) найдётся ровно две не пересекающиеся с ними шестёрки (т. е. вершины, смежные с двумя данными несмежными). Допустим, что таких шестёрок нашлось три. Их объединение содержит не более 11 элементов (так как объединение двух пересекающихся шестёрок содержит ровно 10 элементов). Но согласно формуле включения-исключения в этом объединении не менее 12 элементов:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C| \geqslant \\ \geqslant 6 + 6 + 6 - 2 - 2 - 2 = 12,$$

так как в каждом пересечении их не более двух.

Покажем теперь, что шестёрок, не пересекающихся с данными двумя, всегда имеется две. Было уже показано, что есть 10 шестёрок, не пересекающихся с данной шестёркой A. Допустим, что 9 из них пересекаются со второй данной шестёркой B. Каждый из них пересекается с ней по одной паре из четырёх элементов (два элемента из B принадлежат A и поэтому не содержатся в этих 9 шестёрках). Таких пар ровно 6, значит, найдётся три пары из этих 9 шестёрок, которые пересекают B по одинаковым парам элементов (три шестёрки, пересекающие B по одной и той же паре элементов, существовать не могут, так как они содержали бы тогда $3 \cdot 4 = 12$ элементов, не принадлежащих ни A, ни B, а таких элементов только 11). Из этих трёх пар элементов две пары пересекаются. Рассмотрим четыре шестёрки, пересекающие B по этим двум парам. В каждой из них оставим 4 элемента, не лежащие ни в A, ни в B. Полученные множества попарно пересекаются по одному элементу, за исключением двух пар, которые не пересекаются. Каждая из этих двух пар в объединении содержит 8 элементов. Полученные восьмёрки в пересечении содержат не более четырёх элементов. Значит, все четыре рассматриваемые четвёр-

---

[9] На него мне указал И. С. Сергеев.

ки в объединении содержат не менее 12 элементов. Но это невозможно, так как вне A и B находится ровно 11 элементов.

Желающие узнать, как построить систему Штейнера $S(22,6,3)$, могут прочитать раздел

3.5. Тройки Штейнера, дизайн Витта и код Голея

Эту систему можно получить из так называемого *дизайна Витта*[10)], который состоит из 759 восьмиэлементных подмножеств 24-элементного множества, никакие два из которых не имеют пять общих элементов[11)]. Так как каждое восьмиэлементное множество содержит

$$\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=8\cdot 7=56$$

пятёрок, а в 24-элементном множестве пятёрок ровно

$$\binom{24}{5}=\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{5!}=4\cdot 23\cdot 22\cdot 21=(23\cdot 11\cdot 3)\cdot(7\cdot 8)=759\cdot 56,$$

значит, каждая пятёрка принадлежит ровно одной восьмёрке. Поэтому дизайном Витта можно назвать систему из 759 восьмёрок, накрывающих все пятёрки без перекрытий.

Выделим из всех восьмёрок дизайна Витта те восьмёрки, которые содержат заданные два элемента, и удалим эти элементы из каждой такой восьмёрки. Получим систему шестёрок элементов 22-элементного множества, которая накрывает без перекрытий все тройки (так как каждую тройку можно расширить до пятёрки, добавив два удалённых элемента), а это и есть система Штейнера.

Остаётся вопрос — как построить дизайн Витта? Обозначим через v_1 вектор (11011100010), а через $v_2,\ldots,v_{11}$ все его циклические сдвиги (например, $v_2=(01101110001)$). Обозначим через $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, $i=1,\ldots,11$, единичные векторы длины 11 и рассмотрим векторы w_i длины 24: $w_i=(1,e_i,0,v_i)$, $i=1,\ldots,11$. Добавим к ним вектор (наполовину из нулей, наполовину из единиц) $w_{12}=(0,\ldots,0,1,\ldots,1)$ и рассмотрим все возможные суммы векторов w_i по модулю два. Этих сумм ровно 2^{12} (в том числе и «пустая сумма», равная нулевому вектору). Можно проверить (см. [13]), что все эти суммы различны, и среди них ровно 759 векторов содержат 8 единиц каждый (а векторов с меньшим числом единиц вообще нет, кроме нулевого). Сопоставив каждому из этих векторов восьмёрку его единиц, получим дизайн Витта.

[10)] Названного в честь известного немецкого алгебраиста Эрнста Витта (1911–1991).

[11)] На это указал мне Ю. В. Таранников.

Если из каждого из этих 2^{12} векторов длины 24 удалить последнюю координату, получим 2^{12} векторов длины 23, образующих *код*[12] *Голея*. Этот код обладает интересным свойством: если для каждого его вектора, рассматриваемого как вершина 23-мерного куба, образовать шар радиуса 3 с центром в ней[13], то полученные 2^{12} шаров попарно не будут пересекаться (это означает, что расстояние между любыми двумя вершинами кода Голея не меньше 7) и их объединение в точности содержит все вершины куба (а каждый шар содержит $1+23+\binom{23}{2}+\binom{23}{3}=2^{11}$ вершин). За доказательствами отсылаем читателя к [13], хотя он может попытаться получить их и самостоятельно.

§ 4. Графы Мура

Начнём с нескольких задач, которые интересны и сами по себе.

Задача 11. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a>1$ и диаметром 2 не превосходит a^2+1. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a>1$ и диаметром D не превосходит

$$1+a\sum_{i=0}^{D-1}(a-1)^i.$$

Указание. Пусть a — степень некоторой вершины. Число вершин, лежащих от неё на расстоянии r, не больше $a(a-1)^{r-1}$. Любая вершина удалена от данной на расстояние не больше D.

Напомним, что *обхватом* графа называется длина кратчайшего простого цикла в нём.

Задача 12. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a>1$ и обхватом 5 не меньше a^2+1. Докажите, что число вершин в графе с максимальной степенью $a>1$ и обхватом $2g+1$ не меньше

$$1+a\sum_{i=0}^{g-1}(a-1)^i.$$

Указание. Пусть a — степень вершины. Множество M_r вершин, лежащих от неё на расстоянии $r\leqslant g$, содержит ровно $a(a-1)^{r-1}$ вершин,

[12] Открытый в 1949 г. швейцарско-американским математиком Марселем Голеем (1902–1989). Этот код был первым найденным кодом, исправляющим три ошибки.

[13] Этот шар состоит из всех вершин куба, удалённых от центра шара на расстояние не больше трёх.

иначе к двум из них будут идти разные пути длины r, образующие цикл длины не больше $2r < 2g + 1$.

Задача 13. Докажите, что число вершин в графе с диаметром 2 и обхватом 5 (если такой граф существует) равно $1 + a^2$, где a — степень любой его вершины.

Докажите, что число вершин в графе с диаметром d и обхватом $2d+1$ (если такой граф существует) равно

$$1 + a\sum_{i=0}^{g-1}(a-1)^i,$$

где a — степень любой его вершины.

Указание. Применить задачи 11, 12.

Очевидно, что при $a = 1$ связный регулярный граф состоит из двух вершин, соединяемых ребром.

Графы с диаметром 2 и обхватом 5 называются графами Мура[14)].

Задача 14. Докажите, что граф Мура $(1 + a^2, a, 0, 1)$-сильно регулярный.

Указание. Применить задачу 13.

Задача 15. Докажите, что при $a = 2$ единственным графом Мура является простой цикл длины пять.

Указание. Применить задачу 14.

Теорема 2 (Хофман — Синглтон). *Графы Мура могут существовать только при* $a = 2, 3, 7, 57$.

Доказательство. Согласно задаче 14 граф Мура $(1 + a^2, a, 0, 1)$-сильно регулярный. В силу задачи 15 далее считаем, что $a > 2$. Проверим, что граф не может быть двудольным. Действительно, тогда в каждой доле по $(a^2+1)/2$ вершин. Каждой вершине сопоставляется a смежных с ней вершин в другой доле, которые образуют $a(a-1)/2$ различных пар. Сопоставив эти пары рассматриваемой вершине, заметим, что разным вершинам сопоставляются непересекающиеся множества пар (иначе граф содержал бы цикл длины четыре). Поэтому всем вершинам одной доли сопоставляется $(a^2+1)a(a-1)/4$ различных пар вершин во второй доле. Но это невозможно, так как из второй доли можно образовать только $(a^2+1)(a^2-1)/8$ различных пар вершин. Значит, граф Мура не двудольный.

[14)] Эдвард Ф. Мур (1925–2003) — американский математик, один из основателей теории автоматов. Поставил задачу о поиске графов, впоследствии названных его именем.

Пусть A — его матрица смежности. Аналогично доказательству теоремы 1 проверяется, что

$$A^2 = (a-1)E + J - A$$

(вне главной диагонали элементы A^2 вдвое меньше, чем у матрицы A^2 теоремы 1, а на диагонали — такие же). Полагая $B = A + \frac{1}{2}E$, аналогично получаем равенство

$$B^2 = A^2 + A + \frac{1}{4}E = \left(a - \frac{3}{4}\right)E + J.$$

Матрица B^2 имеет собственное значение

$$a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2$$

кратности 1 и собственное значение $a - 3/4$ кратности $v - 1 = a^2$. Значит, матрица B может иметь только собственные значения $\pm(a + 1/2)$, $\pm\sqrt{a - 3/4}$. Согласно лемме 1 матрица A имеет собственное значение a кратности 1 и не имеет собственного значения $-a-1$. Значит, матрица $B = A + \frac{1}{2}E$ имеет собственное значение $a + 1/2$ кратности 1 и не имеет собственного значения $-a - 1/2$, а так как сумма её собственных значений равна её следу, то

$$\frac{v}{2} = \frac{1+a^2}{2} = a + \frac{1}{2} + r\sqrt{a - \frac{3}{4}} - s\sqrt{a - \frac{3}{4}}, \quad 1 + r + s = v = 1 + a^2.$$

Поэтому

$$\frac{a^2 - 2a}{2} = (a^2 - 2s)\sqrt{a - \frac{3}{4}},$$

значит,

$$s = \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{a^2 - 2a}{\sqrt{4a-3}}\right).$$

Так как s — целое и $a \neq 2$, число $\sqrt{4a-3}$ рациональное, а значит и целое, т. е. $a = (k^2+3)/4$ с натуральным k. Но так как $\dfrac{a^2-2a}{\sqrt{4a-3}}$ целое, то

$$a(a-2) = \frac{(k^2+3)(k^2-5)}{16} = \frac{k^4 - 2k^2 - 15}{16}$$

должно делиться на $\sqrt{4a-3} = k$, поэтому k делит 15, т. е. $k = 1, 3, 5, 15$, откуда $a = 1, 3, 7, 57$. Случай $a = 1$ тривиален. □

При $a = 3$ существует только один граф Мура. Это граф Петерсена (рис. 1). Из теоремы 2 следует, что собственные значения его матрицы равны $3, 1, -2$.

Хофман и Синглтон построили граф Мура степени 7 и доказали его единственность. Из теоремы 2 следует, что собственные значения его матрицы равны $7, 2, -3$.

По-видимому, неизвестно, существуют ли графы Мура степени 57.

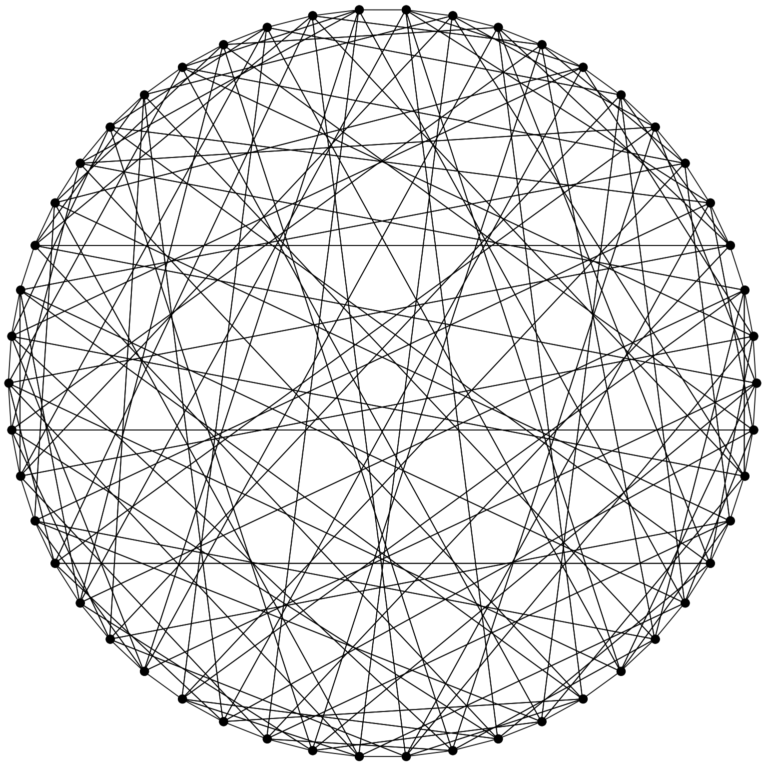


Рис. 4. Изображение графа Хофмана — Синглтона

4.1. Рёберные раскраски полных графов и замечательное свойство числа 6

Задача 16. Полный граф K_{2n+1} можно представить в виде объединения n не пересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов.

Указание. Обозначим его вершины через $v_1, \ldots, v_{2n+1}$. На множестве вершин $v_1, \ldots, v_{2n}$ зададим n не пересекающихся по рёбрам цепей

$$P_i = v_i, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{i-n+1}, v_{i+n-1} v_{i-n},$$

где сложение и вычитание в индексах проводится по модулю $2n$ с таким расчётом, чтобы индексы оставались в области $\{1, 2 \ldots, 2n\}$. При этом j-й по счёту вершиной в цепи P_i будет v_k, где $k = i + (-1)^{j+1} \lfloor j/2 \rfloor$. Потом получаем гамильтоновы циклы C_i из цепей P_i, соединив концы цепи с вершиной $2n + 1$.

Если паросочетание охватывает все вершины графа, оно называется *совершенным паросочетанием*.

Задача 17. Полный граф K_{2n} можно представить в виде объединения не пересекающихся по рёбрам $n-1$ гамильтоновых циклов и одного совершенного паросочетания.

Указание. См. указание к задаче 16.

Задача 18. Полный граф K_{2n+1} 1-факторизуем, т. е. его можно представить в виде объединения не пересекающихся по рёбрам $2n$ совершенных паросочетаний.

Указание. Всё это следует из утверждения задачи 17.

Утверждение задачи 18 можно сформулировать как возможность раскрасить все рёбра полного графа на $2n+1$ вершинах в $2n$ цветов так, чтобы рёбра каждого цвета однократно покрывали все рёбра графа. Это утверждение известно всем организаторам футбольных (и других) чемпионатов, так как оно используется при составлении расписания однокругового турнира. Поэтому далее для краткости любую 1-факторизацию называем просто *факторизацией*, а также (рёберной) раскраской или турниром, а любой 1-фактор — просто *фактором*, а также паросочетанием или туром (тогда его элементы можно называть вместо рёбер матчами).

Следующие задачи принадлежат известному канадскому алгебраисту Хигману[15]. В них указаны некоторые замечательные свойства полного графа на 6 вершинах (а значит, и числа 6).

Задача 19. Граф K_6 имеет ровно 6 один-факторизаций (т. е. существует 6 способов организовать однокруговой турнир 6 команд или 6 рёберных раскрасок), и все они попарно изоморфны. Два непересекающихся фактора содержатся в единственной факторизации (т. е. любые два тура без общих матчей содержатся в одном турнире — иными словами, любые два не пересекающихся паросочетания содержатся в единственной раскраске).

Указание. Рассмотрим произвольную 1-факторизацию. Два непересекающихся 1-фактора образуют 2-фактор, т. е. гамильтонов цикл или объединение непересекающихся циклов. В случае 6 вершин возможен только первый вариант. Вне этого цикла остаются 9 рёбер, 3 из которых можно представлять как длинные диагонали правильного шестиугольника (они образуют фактор), а остальные диагонали образуют два трёхзвенных цикла («звезду Давида»). Любой фактор, состоящий из этих 9 рёбер, содержит хотя бы одну длинную диагональ (звезда Давида не содержит фактора), а так как их три, то остальные три фактора из рассматриваемой факторизации содержат по одной длинной диагонали каждый, при этом

[15] Дональд Гордон Хигман (1928–2006).

они однозначно определяются своими длинными диагоналями. Значит, турнир однозначно определяется любыми двумя своими турами. Один тур можно выбрать ровно 15 способами (первый матч — 15 способами, второй — 6 способами, третий — 1 способом, но надо учесть, что, переставляя выбранные матчи 6 способами, всё равно получаем один тур). После этого второй тур можно выбрать 8 способами (матч для первой команды выбираем 4 способами, после этого есть 2 способа выбрать второй матч), значит, получится $15 \cdot 8$ турниров. Но каждый из них при этом подсчитан $5 \cdot 4$ раз (так как из 5 туров упорядоченную пару туров можно выбрать ровно $5 \cdot 4$ способами). Значит, различных турниров ровно $15 \cdot 8/(5 \cdot 2) = 6$. Их изоморфизм очевиден.

Рассмотрим теперь следующую комбинаторную конфигурацию. Назовём «точками» команды $1, 2, \ldots, 6$ из условного чемпионата города М. (или, если вам это больше понравится, команды Д, С, Ц, Л, Т, Х) и туры (точнее, все способы организовать тур) этого чемпионата. Всего точек будет $6 + 15 = 21$ (см. указание к задаче 19). Назовём блоками все матчи и все турниры (точнее, все способы организовать чемпионат в один круг). Всего блоков, согласно задаче 19, будет тоже $15 + 6 = 21$. Каждому блоку сопоставим точки следующим образом: если блок — это матч, сопоставим ему обе участвовавшие в нём команды и все три тура, в которые может входить этот матч (их три, потому что есть три способа разбить на пары четыре оставшиеся команды), т. е. блоку сопоставляется 5 точек. Если же блок — это турнир, ему сопоставляется все 5 составляющих его туров, т. е. тоже 5 точек. Далее вместо блоков будем говорить о «прямых», состоящих из 5 «точек».

Задача 20. Докажите, что в указанной конфигурации

(i) каждая пара «точек» содержится ровно в одной прямой и любые две «прямые» имеют ровно одну общую «точку»,

(ii) каждая «точка» содержится ровно в 5 «прямых» и каждая «прямая» содержит ровно 5 «точек».

Указание. Две команды однозначно определяют один матч, команда и тур однозначно определяют один матч тура, в котором команда участвовала, два тура либо содержат ровно один общий матч, либо не имеют общих матчей и однозначно определяют содержащий их турнир (см. задачу 19). Значит, каждая пара точек содержится ровно в одной прямой. Два турнира не могут иметь два общих тура (см. задачу 19), для любого турнира и матча найдётся единственный тур турнира, включающий этот матч, поэтому «прямые» пересекаются не более чем по одной «точке». Через каждую «точку» проходит ровно 5 «прямых» (остальных точек ровно 20, и на каждой такой прямой есть ещё 4 точки, причём эти «четвёрки» не пересекаются и каждая из 20 точек входит в одну из «четвёрок»), поэтому каждый тур содержит три матча (очевидно) и входит ровно в два турнира (то, что каждая команда участвовала в 5 матчах, очевидно). Каждая прямая пересекается с 20 прямыми (в каждой своей «точке» с четырьмя), т. е. с каждой другой прямой (всего прямых 21). Значит, каждая пара «прямых» имеет ровно одну «общую точку». Таким образом, любые два матча либо имеют общего участника, либо входят в единственный тур (это и так очевидно), и любые два турнира имеют единственный общий тур.

Конфигурация задачи 20 известна как *конечная проективная плоскость четвёртого порядка*. Известно, что такая плоскость определяется однозначно (с точностью до изоморфизма).

Далее пригодится определяемая ниже двойственность, которую можно установить между графом $A = K_6$ и графом, определённым на множестве X факторизаций графа A (его тоже обозначаем X). Вершин в графе A и различных его факторизаций, согласно задаче 19, ровно 6. Каждому 1-фактору в A (т. е. туру), согласно задаче 20, однозначно сопоставляется пара содержащих его факторизаций (т. е. турниров). Пометим каждый тур этой парой турниров, т. е. ребром в графе X. Каждый матч принадлежит трём турам (потому что остальные четыре команды можно разбить на пары тремя способами), т. е. каждое ребро в графе A принадлежит трём факторам в графе A. Их пометки не пересекаются (иначе был бы турнир, содержащий два тура, имеющих общий матч), т. е. соответствующие три ребра в графе X (три пары факторизаций графа A) образуют паросочетание. Значит, каждому ребру в графе A однозначно сопоставлен фактор в графе X. Каждая вершина в графе A принадлежит 5 рёбрам, каждое из которых однозначно определяет фактор в графе X. Эти факторы образуют факторизацию в графе X. Действительно, если два из них имеют общее ребро в графе X, то оно образовано двумя факторизациями в графе A. Значит, эти факторизации содержат два разных фактора в графе A (факторы разные, так как они содержат каждый по ребру, выходящему из одной вершины графа A, что было бы невозможно в случае совпадения этих факторов), но этого не может быть согласно задаче 20. Таким образом, можно взаимно однозначно сопоставить рёбрам графа A факторы графа X (и тех и других 15), а вершинам графа A — факторизации графа X (и тех и других 6). Если при этом соответствии вершина графа A принадлежит некоторому его ребру, то соответствующий ему фактор графа A содержится в факторизации графа A (т. е. подходящей вершине графа X), соответствующей этой вершине графа A.

Благодаря указанному соответствию можно ввести обозначение

$$(a, b) \sim (x, y),$$

если (a, b) — ребро в графе $A = K_6$, а x, y — факторизации графа A, содержащие фактор в графе A, который содержит ребро (a, b).

4.2. Граф Хофмана — Синглтона

Есть несколько разных конструкций графа Хофмана — Синглтона (однако доказано, что этот граф определён однозначно с точностью до изоморфизма). Далее будет приведена конструкция, принадлежащая Хигману.

Пусть дан граф Мура степени $n+1$. Возьмём в нём произвольное ребро (u, v). Пусть A — множество n вершин, смежных с u (кроме v), а X — множество n вершин, смежных с v (кроме u). Так как в графе нет треугольников, множества A и X не пересекаются. Всякая другая вершина смежна единственной вершине $a \in A$ и единственной вершине $x \in X$. Обозначим её упорядоченной парой (a, x) (путаницы с рёбрами графа не будет, потому что таких рёбер в нём нет). Какие рёбра могут соединять эти вершины? Пусть $((a, x), (b, y))$ — одно из таких рёбер. Очевидно, что тогда $a \neq b$, $x \neq y$ (если, например, $a = b$, то (a, x), (a, y), a — треугольник, что невозможно). Если вершина (a, x) смежна с вершинами (b, y) и (c, z), то $b \neq c$, $y \neq z$ (если, например, $b = c$, то (a, x), (b, y), (b, z), b — цикл длины четыре, что тоже невозможно). Таким образом, при $a, b \in A$, $x \in X$ имеется не более одной вершины $y \in X$, для которой вершины (a, x) и (b, y) смежны.

Задача 21. Докажите, что при $a = 3$ граф Мура единственный.

Задача 22. Докажите (не пользуясь теоремой 2), что при $a = 4$ не существует графа Мура.

Построим граф Мура степени 7. Так как $|A| = |X| = 6$, можно отождествить множество A с множеством вершин графа K_6, а множество X — с множеством его факторизаций (см. п. 4.1). Рассмотрим множество из 36 вершин, обозначенных выше как (a, x). Рёбра, связывающие эти вершины с 14 вершинами из $A \cup X \cup \{u, v\}$, проводим, как было указано выше. Очевидно, что степени этих 14 вершин равны 7. Остаётся провести рёбра между вершинами (a, x) и (b, y). Сделаем это тогда и только тогда, когда $(a, b) \sim (x, y)$ согласно введённому в конце п. 4.1 определению, т. е. когда (a, b) — ребро в графе $A = K_6$, а x, y — факторизации графа A, содержащие фактор, включающий ребро (a, b). Докажем, что вершина (a, x) смежна с 5 вершинами (b, y) (тогда её степень равна 7). Действительно, вершину $b \neq a$ можно выбрать 5 способами, после чего вершина y при данной вершине x выбирается одним способом, так как есть только три пары факторов графа A, содержащих это ребро, и соответственно три пары факторизаций графа A, содержащих эти факторы. При этом в конце п. 4.1 было показано, что эти пары факторизаций не пересекаются, поэтому для любой факторизации x парная ей факторизация y определяется однозначно.

Треугольников с хотя бы одной вершиной в $A \cup X \cup \{u, v\}$ очевидно нет (так как нет рёбер $\langle(a, x), (a, y)\rangle$ и $\langle(a, x), (b, x)\rangle$). Пусть (a, x), (b, y), (c, z) — треугольник с вершинами вне множества $A \cup X \cup \{u, v\}$. Тогда a, b, c и x, y, z — тройки разных вершин, и $(a, b) \sim (x, y)$, $(c, b) \sim (z, y)$, $(a, c) \sim (x, z)$, где x, y, z можно рассматривать как три разные факторизации графа A.

Не ограничивая общность, можно считать фактор $\{(a, b), (c, d), (e, f)\}$ принадлежащим факторизациям x, y, а фактор $\{(b, c), (d, e), (f, a)\}$ принадлежащим факторизациям z, y, где $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ (два непересекающихся фактора в y образуют цикл длины 6). Тогда общий фактор факторизаций x, z, содержащий ребро (a, c), определяется однозначно и совпадает с $\{(a, c), (b, e), (d, f)\}$ (так как (d, e) уже входит в фактор из x; (d, a), (d, c) очевидно не могут входить в фактор вместе с (a, c); (d, b) тоже не может, потому что иначе в фактор входило бы ребро (e, f), входящее в фактор из x). Но этот фактор содержит «длинную диагональ» (b, e) шестиугольника (a, b, c, d, e, f) и поэтому входит в y наряду с указанными выше факторами, объединение которых даёт этот шестиугольник (это было отмечено в конце п. 4.1). Но тогда факторизации y, z (и y, x) имеют два общих фактора, что невозможно (см. опять п. 4.1). Значит, построенный граф не содержит треугольников.

Почему нет в нём и циклов длины 4? Очевидно, что они не могут проходить через вершины u, v. Пусть цикл содержит вершины $a \in A$, (a, x), (a, y), (b, z). Тогда очевидно, что $b \neq a$ (иначе в графе был бы, например, треугольник a, (a, x), (a, z)), а факторизации x, y, z все различны (если, например, $z = y$, то z, (a, z), (b, z) — треугольник). По построению выполнены условия $(a, b) \sim (x, z)$, $(a, b) \sim (y, z)$. Это означает, что некий фактор, содержащий ребро (a, b), принадлежит факторизациям x, z и некий фактор, содержащий ребро (a, b), принадлежит факторизациям y, z. Очевидно оба этих фактора совпадают (разные факторы из одной факторизации z не могут иметь общего ребра), т. е. некий фактор, содержащий ребро (a, b), принадлежит всем трём факторизациям x, y, z. Поэтому, согласно задаче 20, его можно рассматривать как точку проективной плоскости (состоящей из 21 точки), а содержащие его три факторизации — как три прямые, проходящие через эту точку. Кроме этого фактора есть ещё два фактора, содержащие ребро (a, b), и они вместе с вершинами a, b образуют ещё одну прямую, проходящую через этот фактор. Кроме этой прямой через него проходят ещё две прямые, содержащие по три фактора и по две вершины (эти прямые можно провести через этот фактор и любое из двух его рёбер, отличных от (a, b)). Получается, что через выбранную точку рассматриваемой плоскости (т. е. через этот фактор) проходит 6 прямых, а это противоречит утверждению задачи 20. Аналогично рассматривается случай четырёхугольника $x \in X$, (a, x), (b, x), (c, y).

Остаётся рассмотреть возможность существования цикла вида (a, x), (b, y), (c, z), (d, u). Очевидно, что случаи $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = a$ невозможны (не бывает рёбер (a, x), (a, y)) и невозможны случаи $x = y$, $y = z$, $z = u$, $u = y$. Ясно также, что $a \neq c$, $b \neq d$, $x \neq z$, $y \neq u$ (если, например, $a = c$, то существует цикл a, (a, x), (a, z), (d, u), а это, как уже доказано, невозможно). Поэтому a, b, c, d попарно различны, как и x, y, z, u. Согласно определению цикл (a, x), (b, y), (c, z), (d, u) возможен, только когда выполнены соотношения $(a, b) \sim (x, y)$, $(b, c) \sim (y, z)$, $(c, d) \sim (z, u)$, $(a, d) \sim (x, u)$. А это означает, что найдётся фактор, содержащий ребро (a, b), общий для факторизаций x, y; найдётся фактор, содержащий ребро (b, c), общий для факторизаций y, z (значит, y содержит цикл с соседними вершинами a, b, c); найдётся фактор, содержащий ребро (c, d), общий для факторизаций z, u (значит, z содержит цикл с соседними вершинами b, c, d); найдётся фактор, содержащий ребро (d, a), общий для факторизаций u, x (значит, u содержит цикл с соседними вершинами c, d, a, а x содержит цикл с соседними вершинами d, a, b).

Задача 23. Докажите, что указанная ситуация невозможна.

§ 5. Теорема о дружбе

На задачи 4, 5 проливает свет следующая

Теорема 3 (Эрдёш — Реньи — Шош). *Пусть $G = (V, E)$ — граф, в котором любые две вершины имеют ровно одного общего соседа. Тогда в G существует вершина («политик»), смежная всем другим (а эти вершины разбиваются на непересекающиеся пары, и в каждой паре её вершины соединены ребром).*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и получим противоречие. Вначале докажем, что граф G — регулярный (и тогда он будет $(v, a, 1, 1)$-сильно регулярным для некоторой степени a). Потом докажем, что такой граф может быть только треугольником.

Очевидно, что из условия следует отсутствие в графе циклов длины 4 (иначе у какой-то пары было бы два общих знакомых). Докажем вначале, что любые две не смежные вершины u, v имеют равные степени $d_u = d_v$.

Пусть $d_u = a$ и вершины $v_1, \ldots, v_a$ — соседи вершины u. Только одна из них, например v_1, смежна вершине v («общий друг» u и v), а вершине v_1 смежна только одна вершина из $v_2, \ldots, v_a$, например v_2 («общий друг» u и v_1). Вершина v имеет с v_2 общего соседа v_1, с вершиной v_1 — общего соседа z_2, а с остальными вершинами v_i — общих соседей z_i, $i \geqslant 3$. Так как в графе нет циклов длины 4, все вершины $v_1, z_2, z_3, \ldots, z_a$ различны (например, если $z_i = z_j$, то возникает цикл u, v_i, z_i, v_j), а так как они смежны вершине v, то её степень $d_v \geqslant a = d_u$. Аналогично (меняя местами u и v) доказываем, что $d_u \geqslant d_v$, значит, $d_u = d_v$.

Любая вершина $w \neq v_1$ не смежна либо с u, либо с v, значит, согласно доказанному, её степень d_w также равна $a = d_u = d_v$. По предположению найдётся вершина $w \neq v_1$, не смежная с v_1 («нет политика»). Тогда, согласно доказанному, $d_{v_1} = d_w = a$, значит, степени всех вершин равны.

Суммируя степени всех a соседей вершины u, получаем a^2. Так как каждая вершина $v \neq u$ имеет с u ровно одного соседа, то при этом каждая вершина $v \neq u$ была посчитана 1 раз, а вершина u — ровно a раз. Значит, общее число вершин в графе G равно $v = a^2 - a + 1$. Случай $a = 1$ тривиален, а в случае $a = 2$, очевидно, получается треугольник. Покажем, что при $a > 2$ такого графа не существует. Заметим, что он не может быть двудольным, так как у двудольного регулярного графа обе доли равны, значит, число вершин $v = a^2 - a + 1$ должно быть чётным, что очевидно неверно.

Рассмотрим, как и раньше, матрицу смежности A этого графа и её квадрат. По главной диагонали в матрице A^2 стоят числа a, так как в каждой строке и каждом столбце матрицы A ровно a единиц, а остальные нули. Из условия наличия ровно одного общего соседа у любой пары вершин следует, что вне главной диагонали в матрице A^2 стоят единицы. Значит, $A^2 = (a-1)J + E$. Как и в предыдущих доказательствах, делаем вывод, что матрица A^2 имеет только собственные значения $a - 1 + v = a^2$ и $a - 1$, значит, матрица A может иметь только собственные значения $\pm a, \pm\sqrt{a-1}$. Из лемм 1, 2 следует, что собственного значения $-a$ у неё нет, а собственное значение a имеет кратность 1. Пусть кратности собственных значений $\pm\sqrt{a-1}$ равны r и s. Так как матрица A симметрична, то все её собственные значения действительны и сумма их кратностей равна её порядку v, значит, $1 + r + s = v$. Так же как и раньше, замечаем, что сумма всех собственных значений с учётом кратности равна следу матрицы A, т. е. нулю (по главной диагонали у матрицы смежности всегда нули), значит, $a + (r - s)\sqrt{a-1} = 0$. Очевидно $r - s \neq 0$, значит, $\sqrt{a-1} = a/(s-r)$ — рациональное число. Как и в предыдущих доказательствах, отсюда имеем, что $a = 1 + k^2$ при целом k, поэтому $k(s-r) = k^2 + 1$, но $k^2 + 1$ кратно k, очевидно, только при $k = 1$. Значит, $a = 2$, т. е. сильно регулярный $(a^2-a+1, a, 1, 1)$-граф существует только при $a=2$ (и является треугольником). □

Из теоремы 3 вытекает, например, следующее утверждение: если в некоторой компании каждые двое имеют ровно одного общего друга, то число людей в ней нечётно. Это утверждение можно усилить следующим образом.

Задача 24 (С.-Петербург, 1995). В любой компании из чётного числа людей найдутся двое имеющих в ней чётное число общих друзей.

Из задачи 24 следует, что если в классе любые двое имеют нечётное число общих друзей, то численность класса нечётна.

Эту задачу можно решить, применяя матрицы, но есть у неё и элементарное решение, найти которое предоставляем читателю.

§ 6. Задача Московской олимпиады 2012 года

На языке теории графов задача 3 формулируется так: каждые две вершины лежат на единственном цикле длины четыре. Докажем, что граф регулярный (а значит, он будет $(v, a, 2, 2)$-сильно регулярным). Пусть V — любая его вершина, а V_i, $i=1, \ldots, a$, — её соседи. По условию у вершин V_i, V_j при любых $i \neq j$ найдётся ещё один (кроме V) общий сосед $V_{i,j}$. Все вершины $V_{i,j}$ попарно различны (если $V_{i,j}=V_{k,l}$, то эта вершина вместе с V имеет не менее трёх общих соседей среди V_i, V_j, V_k, V_l). Каждая вершина графа, отличная от V, совпадает с одной из вершин $V_{i,j}$ (поскольку имеет с V двух общих знакомых, например V_i, V_j). Значит, число v вершин в графе равно $1+a(a-1)/2$. В силу строгой монотонности этого квадратного трёхчлена при $a \geqslant 1$ число a определяется однозначно.

Очевидно, что $(4, 2, 2, 2)$-графом является только полный граф на 4 вершинах. Примером $(16, 6, 2, 2)$-графа является решётчатый граф $L(4)$, вершинами которого являются упорядоченные пары чисел (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 4$, которые соединяются рёбрами тогда и только тогда, когда они имеют общую компоненту. Решётчатый граф $L(n)$ можно рассматривать как граф шахматной доски размера $n \times n$, в котором две клетки соединены ребром, если стоящие на них ладьи угрожают друг другу.

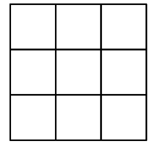


Рис. 5. Решётчатый граф $L(4)$

Задача 25. Проверьте, что граф $L(m)$ — это $(m^2, 2m-2, m-2, 2)$-сильно регулярный граф.

Граф задачи 3 является частным случаем (v, a, k, k)-сильно регулярного графа. При $k=1$ такие графы изучались в § 5. Оказалось, что они могут быть только треугольниками. Но если отбросить условие регулярности, оставив только условие, что любые две вершины имеют ровно k общих соседей, то при $k = 1$ возможны нерегулярные графы, указанные в теореме 3, и других таких графов не бывает. При $k = 2$ в задаче 3 показано, что такой граф обязательно регулярный. Можно доказать, что это верно и при любом $k > 1$. Рассуждая аналогично §§ 3–5, можно показать, что необходимое условие существования (v, a, k, k)-сильно регулярного графа заключается в целочисленности выражений

$$\frac{1}{2}\left(v - 1 \pm \frac{a}{\sqrt{a-k}}\right)$$

(эти выражения являются кратностями собственных значений $\pm\sqrt{a-k}$ матрицы смежности этого графа). Из этой целочисленности следует, что $\sqrt{a-k} = u$, где u — целое число, делящее a. Но так как $a = k + u^2$, это возможно, лишь когда u делит k. Таких чисел конечное количество, значит, и (v, a, k, k)-сильно регулярных графов при фиксированном k будет конечное количество. В частности, при $k = 2$ может быть только $u = 1, 2$, т. е. $a = 3, 6$. В случае $a = 3$ имеем $v = 1 + a(a-1)/2 = 4$, т. е. получаем граф K_4. В случае $a = 6$ имеем $v = a(a-1)/2 = 16$, и примером такого графа является решётчатый граф $L(4)$.

Но индийский математик Ш. Ш. Шрикханде (р. 1917) в 1959 г. нашёл другой пример $(16, 6, 2, 2)$-сильно регулярного графа и доказал, что этих примеров ровно два (он также доказал, что $(m^2, 2m-2, m-2, 2)$-сильно регулярный граф при $m \neq 4$ с точностью до изоморфизма существует только один и он совпадает графом $L(m)$ из задачи 25). Граф Шрикханде можно получить следующим образом. Возьмём квадрат и разрежем его на 16 равных квадратов, проведя по три прямые параллельно сторонам квадрата, на равных расстояниях друг от друга. Через полученные точки на сторонах квадрата проведём ещё 6 прямых, параллельных его диагонали, а также проведём и саму диагональ. Проведённые прямые вместе с диагональю и сторонами квадрата образуют 25 точек пересечения, являющихся вершинами 32 равных треугольников, на которые эти прямые его разрезают. Рассмотрим вначале граф с вершинами в этих 25 точках, соединённых рёбрами тогда и только тогда, когда они лежат на одной из проведённых прямых (с учётом сторон и диагоналей) и являются на ней соседями.

Очевидно, что все «внутренние» вершины этого графа имеют степень 6, но степени «граничных» вершин меньше, да и вершин в нём не 16, а 25.

Если две вершины графа смежны и соединяющее их ребро не лежит на границе квадрата, то найдутся два треугольника, у которых это ребро будет общим, и вместе они образуют параллелограмм, ограниченный рёбрами графа (цикл длины четыре, в котором эти две вершины не являются соседними). Некоторые пары несмежных вершин определяют диагональ в подобном же параллелограмме, и поэтому они тоже имеют ровно две вершины, смежные с ними обеими. Однако для двух не смежных вершин не всегда найдутся ровно две вершины, смежные с ними обеими.

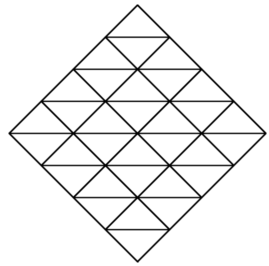


Рис. 6. Граф с 25 вершинами

Чтобы избавиться от всех этих неприятных явлений, отождествим пары вершин, лежащих на противоположных сторонах квадрата, если они лежат на прямой, параллельной другим двум его сторонам. При этом все четыре угловые вершины квадрата «склеятся» в одну вершину, ещё 6 пар вершин также «склеятся», и получим граф с 16 вершинами[16].

Задача 26. Проверьте, что полученный таким образом граф является $(16, 6, 2, 2)$-сильно регулярным графом и, в отличие от графа $L(4)$, не содержит полных подграфов на 4 вершинах[17].

Указание. Внимательно разберитесь со склейками. При склеивании несмежные ранее пары вершин могут стать смежными, т. е. к старым рёбрам добавятся новые (рис. 7). Четыре вершины, до склейки лежавшие на одной прямой, параллельной стороне квадрата, или на его главной диагонали, в новом графе образуют циклы длины четыре (в старом графе они образовывали трёхзвенные цепи). Два больших треугольника, образованные появившимися при склейке линиями, на самом деле содержат по 4 вершины нового графа, образующие циклы длины 4. Ещё два добавленных при склейке ребра вместе с двумя старыми рёбрами образуют ещё один цикл длины 4. Перебирая все пары вершин нового графа, можно проверить, что каждая пара лежит ровно на одном цикле длины 4 и её вершины не являются на нём соседями. У тех пар, для которых такой цикл был уже на старом графе, он будет и на новом, нужно только проверить, что не появится новых таких циклов. У тех пар, для которых такого цикла на старом графе не было, на новом он появится.

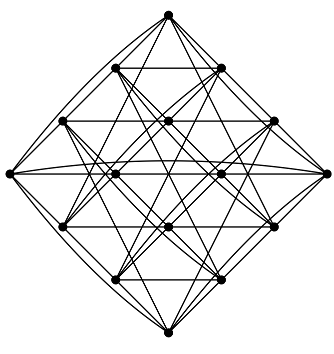


Рис. 7. Граф с 16 вершинами

Таким образом, получаем, что условие (n, a, c, d)-сильной регулярности не всегда определяет граф однозначно с точностью до изоморфизма.

[16] Квадрат при этом превращается в тор.
[17] То есть *клику* из 4 вершин.

Список литературы

[1] *Айгнер М., Циглер Г.* Доказательства из книги. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.

[2] *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. СПб.: Лань, 2005.

[3] *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л.* Заочные математические олимпиады. М.: Наука, 1986 (есть и поздние издания).

[4] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.

[5] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

[6] *Зыков А. А.* Основы теории графов М.: Наука, 1987 (есть и поздние издания).

[7] *Камерон П., ван Линт Дж.* Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М.: Наука, 1980.

[8] *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998.

[9] Московские математические олимпиады 1958–1967 г. / В. Прасолов и др. М.: МЦНМО, 2013.

[10] Московские математические олимпиады 1981–1992 г. / А. Бегунц и др. М.: МЦНМО, 2017.

[11] *Оре О.* Графы и их применение. УРСС: Ленанд, 2015.

[12] *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.

[13] *Таранников Ю. В.* Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии. М.: МЦНМО, 2011.

[14] *Татт У.* Теория графов. М.: Мир, 1988.

[15] Теория графов. Сборник переводов / Под ред. В. Б. Алексеева, Г. П. Гаврилова, А. А. Сапоженко. М.: Мир, 1974.

[16] *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977 (есть и поздние издания).

[17] *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973 (есть и поздние издания).

[18] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[19] *West D.* Introduction to graph theory. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall Inc., 2001.

Сергей Борисович Гашков, мехмат МГУ

sbgashkov@gmail.com

Целые точки
в многоугольниках и многогранниках

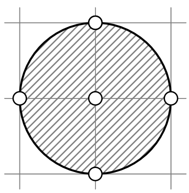
Г. А. Мерзон

Как найти площадь многоугольника на клетчатой бумаге? Если достаточно приблизительного ответа, то можно просто посчитать количество клеток, которые он занимает.

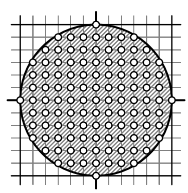
Чудесным образом эта нехитрая идея приводит и к *точным* формулам для площадей многоугольников и объёмов многогранников, вершины которых имеют целочисленные координаты. А возникающая *теория Эрхарта* оказывается применима в разных задачах алгебры и комбинаторики, в которых никаких геометрических фигур, на первый взгляд, не видно.

§ 1. Площадь и число целых точек

Пусть P — фигура на клетчатой бумаге, где каждая клетка имеет площадь 1. Грубую оценку для площади фигуры даёт количество занимаемых ею клеток, или, что примерно то же самое, число N_P узлов сетки, накрываемых P: $S_P \approx N_P$. Чтобы повысить точность этой оценки, можно посмотреть на сетку с более мелкими клетками. Пусть линии новой сетки идут на расстоянии $1/n$ друг от друга. Тогда площадь новой клетки равна $1/n^2$, и если P накрывает $N_P(n)$ узлов новой сетки, то $S_P \approx N_P(n)/n^2$. С ростом n мы получаем сколь угодно точное приближение к площади.



$n=1,\ \ S_P \approx 5$



$n=6,\ \ S_P \approx 3{,}139$

Предложение 1. $\dfrac{N_P(n)}{n^2} \to S_P \ (n \to \infty)$.

Вместо того чтобы измельчать сетку, можно увеличивать фигуру P: $N_P(n)$ есть количество узлов сетки, накрываемых фигурой nP, получающейся из P гомотетией с коэффициентом n (и центром в одном из узлов сетки).

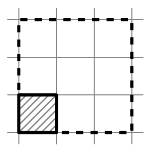
§ 2. Многочлен Эрхарта многоугольника

Далее P будет *многоугольником с вершинами в узлах сетки*. Чтобы превратить предложение 1 в формулу для площади, надо изучить, как $N_P(n)$ зависит от n. Начнём с примеров.

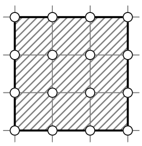
Пример 1. Пусть P — единичный квадрат. Тогда nP — квадрат со стороной n и $N_P(n) = (n+1)^2$. Видно, что выражение

$$\frac{N_P(n)}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

действительно стремится к 1, площади квадрата.



$P \mapsto 3P$



$N_P(3) = (3+1)^2$

Вообще, для прямоугольника $a \times b$

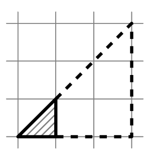
$$N_P(n) = (an+1)(bn+1) = (ab)n^2 + (a+b)n + 1,$$

и видно, что $N_P(n)/n^2$ стремится к ab.

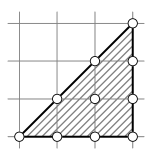
Пример 2. Пусть P — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1. Треугольник nP накрывает

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

узел сетки, и $\dfrac{N_P(n)}{n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \to \dfrac{1}{2} = S_P$.

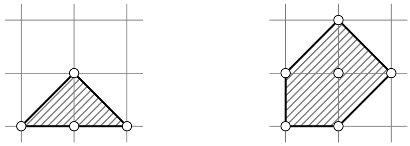


$P \mapsto 3P$



$N_P(3) = 1+2+3+4$

Упражнение 1. Найдите функции N_P для треугольника и пятиугольника на рисунке ниже.



На основании этих примеров можно предположить, что верно следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть P — многоугольник с вершинами в узлах сетки. Для натурального n определим $N_P(n)$ как число узлов сетки, которое накрыто многоугольником nP. Тогда*

1) *N_P — многочлен степени 2 с рациональными коэффициентами* (многочлен Эрхарта многоугольника P);
2) *старший коэффициент многочлена N_P равен площади многоугольника*;
3) *свободный член многочлена N_P равен* 1.

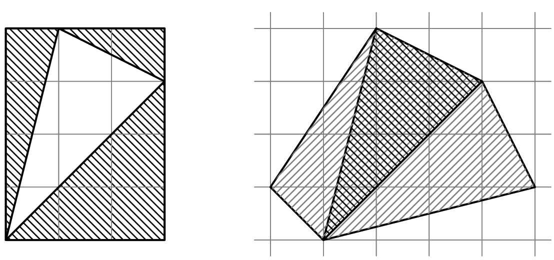
Подчеркнём, что основная часть теоремы — утверждение о полиномиальности функции N_P: в силу предложения 1 отсюда сразу следует и то, что это многочлен именно степени 2, и то, что его старший коэффициент равен площади.

Нетрудно из этой теоремы получить и явную формулу для площади: это один из двух неизвестных нам коэффициентов многочлена степени 2, так что его можно выразить через значения этого многочлена в каких-нибудь двух точках. Например, следующим образом.

Предложение 2. *Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то* $S_P = \frac{1}{2}(N_P(2) - 2N_P(1) + 1)$.

Из этой формулы видно, в частности, что *площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целой или полуцелой*, а это априори не очевидно даже для треугольников: представьте себе вычисление их площади по формуле Герона…

Обычный способ доказать полуцелочисленность площади — заметить, что любой треугольник можно получить, отрезая от прямоугольника прямоугольные треугольники (для которых утверждение очевидно), а любой многоугольник можно разрезать на треугольники (см. рис.).



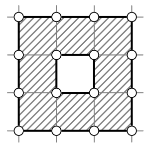
Такой план работает и для доказательства формулы для площади из предложения 2 (подробнее об этом можно прочитать в статье [1]), и для доказательства самой теоремы.

Упражнение 2. Докажите, что для (незамкнутой) ломаной $N_P(n)$ — многочлен степени 1 со свободным членом 1.

Упражнение 3. Докажите теорему 1 а) для прямоугольников со сторонами по линиям сетки; б) для прямоугольных треугольников с катетами по линиям сетки; в) для произвольных треугольников; г) для произвольных многоугольников.

Отметим здесь одну тонкость: для доказательства того, что свободный член многочлена Эрхарта равен 1, существенно, что P — это настоящий многоугольник. В более общем случае (если разрешены «многоугольники с дырками» и т. п.) свободный член равен *эйлеровой характеристике* фигуры P.

Упражнение 4. Найдите многочлен Эрхарта для «рамки» (см. рис.).



Верен и естественный аналог теоремы 1 для многогранников с вершинами в «целых» (имеющих целочисленные координаты) точках: количество $N_P(n)$ целых точек внутри многогранника nP зависит от n как многочлен степени 3, старший коэффициент которого равен объёму многогранника P.

Но вот план доказательства из упражнения 3 в этом случае не работает. Дело в том, что на плоскости любые две фигуры одной площади *равносоставлены* (одну можно разрезать на части и сложить из них другую), но в пространстве это уже не так: как доказал в начале XX века М. Ден, почти никакая треугольная пирамида не равносоставлена с параллелепипедом[1]. Поэтому на плоскости утверждение теоремы по сути достаточно проверить для единичного квадрата, но в пространстве это уже не работает.

В § 4 мы обсудим другое доказательство теоремы 1, которое без труда переносится и на многогранники.

§ 3. Взаимность и формула Пика

Число $N_P(n)$ было определено только для натуральных n. Но коль скоро оно зависит от n как многочлен, в этот многочлен можно формально подставлять и отрицательные n. Попробуем понять, какой смысл имеют получающиеся в результате этой странной процедуры числа.

[1] Про это можно прочитать в статье [4].

Снова начнём с примеров. Для прямоугольника $a \times b$ имеем

$$N_P(n) = (an+1)(bn+1),$$

а значит,

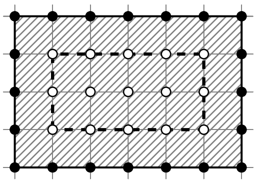
$$N_P(-n) = (-an+1)(-bn+1) = (an-1)(bn-1).$$

Таким образом, мы снова получили количество точек в прямоугольнике, но немного меньшем (каждую сторону нужно уменьшить на 2).

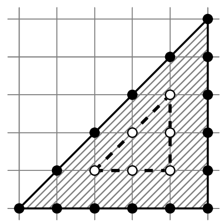
Для равнобедренного прямоугольного треугольника

$$N_\triangle(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

$N_\triangle(-n) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ тоже число точек в треугольнике, но чуть меньшем.



$N_P(2)$ и $N_P(-2)$



$N_\triangle(5)$ и $N_\triangle(-5)$

Теорема 2. *Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то значение $N_P(-n)$ многочлена Эрхарта в целой отрицательной точке равно количеству целых точек* строго внутри *многоугольника nP.*

Вместе с теоремой 1 эта *теорема взаимности* составляет двумерный случай *теоремы Эрхарта — Макдональда*. Про доказательство мы поговорим в следующем параграфе.

Если $N_P(n) = Sn^2 + \frac{b}{2}n + 1$, то $N_P(-n) = Sn^2 - \frac{b}{2}n + 1$. Эти два числа отличаются на bn. Таким образом, на границе многоугольника nP лежит bn узлов сетки. Другими словами, *коэффициент при n в многочлене Эрхарта — это половина количества узлов сетки на границе многоугольника P*. Теперь легко выразить площадь многоугольника S через количество узлов $N(-1)$ строго внутри него и количество узлов b на его границе.

Предложение 3 (формула Пика[2]). *Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то*

$$S_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1,$$

[2] У формулы Пика есть множество разных доказательств. Моё любимое доказательство — с тающим льдом ([5]) — можно прочитать в статьях [3, 8].

где i_P — число узлов сетки внутри многоугольника, b_P — число узлов сетки на его границе.

Можно сказать, что если формула для площади из предложения 2 выражала её через $N_P(0)$, $N_P(1)$, $N_P(2)$, то эта формула выражает площадь через $N_P(0)$ и $N_P(\pm 1)$:

$$S_P = \frac{N_P(1) + N_P(-1)}{2} - N_P(0).$$

Теперь понятно, что не стоит ожидать полного аналога формулы Пика для многогранников: если бы объём можно было выразить через количество целых точек внутри многогранника и на его границе, это значило бы, что мы можем найти старший член кубического многочлена N_P — т. е. один из *четырёх* его коэффициентов — по значениям этого многочлена всего в *трёх* точках (± 1 и 0).

Упражнение 5. Рассмотрим *тетраэдр Рива* — треугольную пирамиду, основание которой — половина единичного квадрата, а вершина находится над четвёртой вершиной квадрата на высоте h, т. е. вершины имеют координаты $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, h)$.

а) Убедитесь, что эта пирамида не содержит никаких целых точек, кроме своих вершин, но при изменении h её объём меняется.

б) Найдите многочлен Эрхарта такой пирамиды.

Последнее упражнение показывает, что даже если знать, сколько точек на границе лежат внутри граней, а сколько на рёбрах и т. д., этого не достаточно для нахождения объёма. Зато можно выразить объём через значения многочлена Эрхарта в четырёх точках.

Упражнение 6. Выведите из теоремы Эрхарта, что если P — многогранник с целыми вершинами, то его объём равен

$$\frac{N_P(3) - 3N_P(2) + 3N_P(1) - 1}{6}.$$

Можно найти и формулу для объёма, больше похожую на классическую формулу Пика.

Упражнение 7. Выразите объём многогранника P с целыми вершинами через b_P, i_P и i_{2P}, где i_{2P} обозначает количество узлов *вдвое меньшей решётки* внутри многогранника.

§ 4. Доказательство теоремы Эрхарта — Макдональда

Как доказать, что последовательность чисел представляет собой последовательность значений многочлена степени k? Если $k = 0$, то условие состоит в том, что последовательность постоянна, т. е. соседние члены равны. Если $k=1$, это арифметическая прогрессия, т. е. разность между соседними членами постоянна. Можно продолжать в том же духе и дальше.

Лемма 3. *N является многочленом степени k тогда и только тогда, когда его* разностная производная ΔN *— многочлен степени $k-1$. (По определению $\Delta N = N(n+1) - N(n)$.)*

Доказательство. В одну сторону утверждение доказать легко: $\Delta n^k = (n+1)^k - n^k$ — многочлен степени $k-1$ (это видно из формулы бинома Ньютона или просто из формулы для $a^k - b^k$); а раз каждый из мономов переходит в многочлен на единицу меньшей степени, то (поскольку $\Delta(F+G) = \Delta F + \Delta G$) и степень любого многочлена уменьшается на 1.

Утверждение в другую сторону нам сейчас нужно только для $k=2$, а это совсем просто:

$$N(n) = N(n-1) + \Delta N(n-1) = \ldots = N(0) + \Delta N(0) + \Delta N(1) + \ldots + \Delta N(n-1),$$

т. е. $N(n)$ — это сумма арифметической прогрессии ΔN плюс константа $N(0)$, а значит, $N(n)$ действительно является многочленом степени 2.

Доказательство общего случая — непосредственно связанное с суммами $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ — можно найти, например, в разделе 1 заметки [2]. (Или докажите его самостоятельно; указание: для многочлена P степени $k-1$ запишите условие $\Delta N = P$ как систему уравнений на коэффициенты многочлена N и убедитесь, что она всегда имеет решение.) $\square$

Избавляясь от рекурсии, можно переформулировать этот критерий полиномиальности следующим образом.

Предложение 4. *N является многочленом степени k тогда и только тогда, когда после не более чем $(k+1)$-кратного применения разностной производной он обращается в нуль, т. е. $\Delta^{k+1} N = 0$.*

Это утверждение, кстати, делает понятнее и формулу для площади из предложения 2: если нас интересует старший коэффициент многочлена степени 2, то с точностью до множителя правильный ответ даётся выражением $\Delta^2 N(0)$ (все мономы меньшей степени при применении Δ^2 уничтожаются), а $\Delta^2 N(0) = N(2) - 2N(1) + N(0)$.

Аналогичным образом формула из упражнения 6 связана с обращением в нуль выражения $\Delta^3 N$ для многочленов степени 2.

Теперь мы готовы доказать теорему Эрхарта — Макдональда для многоугольников. Нам осталось доказать следующее утверждение (включающее в себя и полиномиальность функции N_P, и утверждение о значении этого многочлена в нуле, и «взаимность» для значений в отрицательных точках).

Теорема 4. *Пусть P — многоугольник с вершинами в узлах сетки. Тогда функция, определённая в целых точках как*

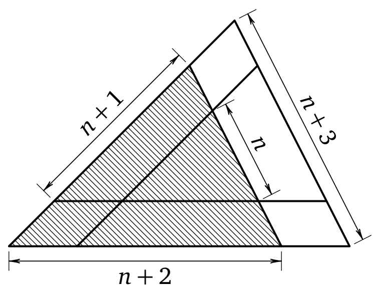
$$N_P(n) = \begin{cases} \text{число целых точек, накрываемых фигурой } nP, & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ \text{число целых точек строго внутри фигуры } (-n)P, & n < 0, \end{cases}$$

является многочленом степени 2.

Напомним, что nP — это результат гомотетии фигуры P с коэффициентом n. Подчеркнём, что функция $N_P(n)$ определяется только для целых n.

Доказательство (набросок). Для числа целых точек имеет место *аддитивность*: если фигура P покрыта фигурами P_1 и P_2, пересекающимися по фигуре X, то $N_P = N_{P_1} + N_{P_2} - N_X$. Так как любой многоугольник можно разрезать на треугольники, а про многочлены Эрхарта отрезков (и вообще ломаных — см. упражнение 2) мы всё знаем, по существу достаточно доказать утверждение теоремы в случае, когда P — треугольник с вершинами в узлах сетки.

В этом случае равенство $\Delta^3 N_P = 0$ имеет замечательное комбинаторно-геометрическое доказательство[3].



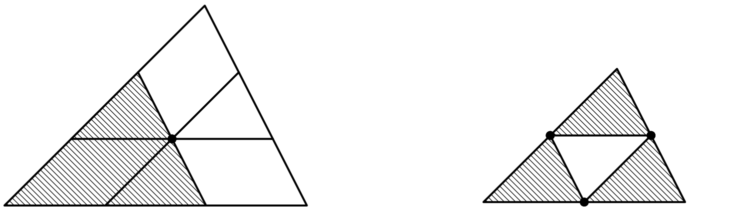
На рисунке треугольник $(n+3)P$ покрыт тремя треугольниками $(n+2)P$ (один такой треугольник заштрихован). Поэтому для подсчёта узлов сетки, покрываемых большим треугольником, можно применить формулу включений-исключений:

$$N_P(n+3) = 3N_P(n+2) - 3N_P(n+1) + N_P(n).$$

Это и есть равенство $\Delta^3 N(n) = 0$ для натуральных n.

[3] Такое доказательство теоремы Эрхарта — Макдональда придумал Стивен Сэм — см. статью [7].

Если на той же картинке посчитать только узлы строго внутри треугольников, получится доказательство того же равенства в случае $n+3<0$. Остаётся разобрать случаи, когда одно из чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ обращается в нуль. Ограничимся соответствующими двумя картинками.



$N(3)=3N(2)-3N(1)+1$ $\qquad$ $N(2)=3N(1)-3+N(-1)$ $\qquad\square$

Хотя доказательство опиралось на картинки с треугольниками, ничего специфически двумерного в нём нет.

Упражнение 8. Пусть P — треугольная пирамида, вершины которой имеют целые координаты.

а) Докажите, что $\Delta^4 N_P(n)=0$ для целых нетрицательных n.

б) Как определить функцию N_P в целых отрицательных точках, чтобы равенство $\Delta^4 N_P(n)=0$ выполнялось для всех целых n?

Как и в плоском случае, отсюда следует, что для треугольной пирамиды функция N_P является многочленом (теперь уже степени 3), а в силу аддитивности то же верно и для произвольного многогранника с целыми вершинами.

§ 5. Целые точки в многомерных многогранниках

Теорема 4 и её доказательство переносятся без существенных изменений на многогранники с вершинами в целых точках *в пространстве любой размерности*.

Теорема 5. *Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^k$ с целыми* (*имеющими целые координаты*) *вершинами. Для натурального n определим $N_P(n)$ как число целых точек, содержащихся в многогограннике nP. Тогда*

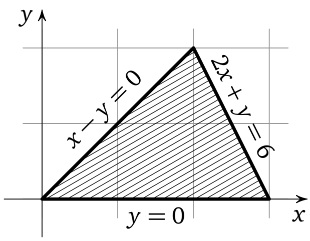
1) *N_P — многочлен степени k с рациональными коэффициентами* (многочлен Эрхарта);
2) *старший коэффициент этого многочлена равен объёму многогранника*;
3) *свободный член многочлена Эрхарта равен* 1;
4) *поскольку N_P — многочлен, в него можно формально подставлять и отрицательные числа, а именно*: $N_P(-n)=(-1)^k I_P(n)$, *где* $I_P(n)$ —

количество целых точек строго внутри многогранника nP (взаимность Эрхарта — Макдональда).

Эта теорема была открыта математиком-любителем Е. Эрхартом в начале 1960-х годов, но утверждение 4 теоремы он доказал лишь частично; завершил доказательство взаимности И. Макдональд уже в 1970-х годах.

Не очень понятно, наверное, как себе представлять геометрические объекты в многомерном пространстве, — но не составляет большого труда дать их аналитические (координатные) определения.

Напомним, что точка k-мерного пространства $\mathbb{R}^k$ — это просто упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_k)$ из k вещественных чисел; мы называем точку *целой*, если все её координаты целые. *Выпуклые многогранники* (а про невыпуклые многогранники мы говорить не будем) задаются системами *линейных неравенств*, т. е. неравенств вида $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k \leqslant c$. Переход к многограннику nP соответствует домножению правой части каждого из неравенств на n.



$$\longleftrightarrow \quad \begin{cases} -y \leqslant 0; \\ y - x \leqslant 0; \\ 2x + y \leqslant 6. \end{cases}$$

Если в данной точке какое-то из неравенств обратилось в равенство, то говорят, что эта точка лежит на *грани* нашего многогранника (а если в данной точке выполняются все строгие неравенства — что она лежит строго *внутри* многогранника).

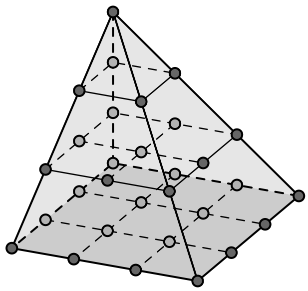
Пример 3. Единичный квадрат можно задать неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Единичный куб — неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Естественно определить *k-мерный куб* как многогранник в $\mathbb{R}^k$, заданный системой неравенств $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, k)$.

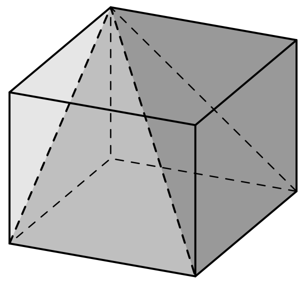
После растяжения в n раз получаются неравенства $0 \leqslant x_i \leqslant n$. Поэтому каждая из координат может принимать $n + 1$ целое значение и $N_P(n) = (n+1)^k = n^k + \ldots + 1$.

В частности, старший коэффициент этого многочлена равен 1, что соответствует тому, что единичный куб имеет единичный объём.

После такой разминки перейдём к более содержательным примерам — двум разным многомерным аналогам равнобедренного прямоугольного треугольника $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$.

Пример 4. Пусть P — это пирамида, основание которой — единичный квадрат, а высота попадает в одну из вершин этого квадрата и имеет длину 1. Тогда пирамида nP содержит $1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2$ целых точек.





Таким образом,

$$N_P(n) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1.$$

То, что старший коэффициент (т. е. объём пирамиды) равен $1/3$, отлично согласуется с тем, что из трёх таких пирамид можно сложить куб.

Такую пирамиду можно задать неравенствами $0 \leqslant x \leqslant z \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$. Хорошо видно, что сечение плоскостью $z = c$ — это действительно квадрат $c \times c$. А разбиение куба на три такие пирамиды — это его разбиение на части, где максимальной координатой является x, y или z.

Аналогично можно рассмотреть в пространстве размерности $k + 1$ пирамиду P, задаваемую неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant x_0 \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, k)$. Единичный куб разбивается на $k + 1$ такую пирамиду (соответствующие тому, какая из $k + 1$ координаты в данной точке куба максимальная). Сечение пирамиды nP плоскостью $x_0 = m$ представляет собой k-мерный куб $0 \leqslant x_i \leqslant m$, в котором $(m+1)^k$ целых точек. Таким образом,

$$N_P(n) = 1^k + 2^k + \ldots + (n+1)^k =: S_k(n+1).$$

Значит, сумма k-х степеней последовательных чисел — многочлен степени $k + 1$ от n со старшим членом $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$. В частности,

$$S_k(n) \approx \frac{1}{k+1}n^{k+1}.$$

А из взаимности следует, например, что $S_k(n)$ для нечётного k является многочленом от $n(n+1)/2$ (подробности можно найти в разделе 4 заметки [2] или попробовать восстановить самостоятельно) — это можно считать обобщением известной формулы

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

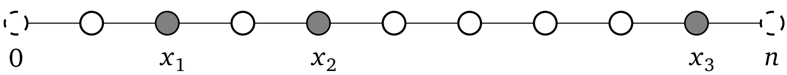
Вообще, если в первых параграфах мы хотели выразить площадь многоугольника через количество целых точек, то в многомерном случае обычно наоборот: проще вычислить объём, а более интересно количество целых точек.

С многогранниками и целыми точками в них связаны многие классические задачи перечислительной комбинаторики от нахождения числа магических квадратов до нахождения числа деревьев. Здесь приведём только самый простой пример.

Пример 5. В примере 4 мы разбивали куб на части согласно тому, какая из координат максимальна. Разобьём теперь куб на более мелкие части, соответствующие тому, в каком порядке идут величины координат. Таким образом, многогранник P задаётся неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant 1$.

Упражнение 9. Как выглядит многогранник $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$?

Куб в $\mathbb{R}^k$ разбивается на $k!$ таких многогранников (соответствующих разным перестановкам индексов), поэтому объём многогранника P равен $1/k!$. Найдём число целых точек *строго внутри* многогранника nP. Это число решений неравенств $0 < x_1 < \ldots < x_k < n$, другими словами, количество k-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n-1\}$.



Получаем, что

$$I_P(n) = \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}.$$

Отметим, что это действительно многочлен от n степени k со старшим коэффициентом $1/k!$.

Подставим в этот многочлен формально $-n$:

$$I_P(-n) = \frac{(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-k)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k}{k}.$$

С другой стороны, взаимность сообщает нам комбинаторный смысл получившегося выражения: поскольку $(-1)^k I_P(-n) = N_P(n)$, мы получили, что $\binom{n+k}{k}$ — это число решений неравенств $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant n$, т. е. число способов выбрать k *возможно повторяющихся* элементов из $(n+1)$-элементного множества. Получилось нетривиальное комбинаторное утверждение. Обозначив через $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ количество способов выбрать k элементов (возможно, повторяющихся) из n-элементного множества, можно записать

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Подобным образом можно доказывать и более сложные комбинаторные теоремы взаимности — например, для хроматических многочленов графов.

О множестве других сюжетов, связанных с целыми точками в многогранниках, можно прочитать в книге [6].

Благодарности

Автор благодарен Гаянэ Паниной и Фёдору Петрову за высказанные замечания.

Список литературы

[1] *Кушниренко А. Г.* Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант. 1977. № 4. С. 13–20. http://kvant.mccme.ru/1977/04/celye_tochki_v_mnogougolnikah.htm

[2] *Мерзон Г. А.* Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 21. М.: МЦНМО, 2017. С. 104–118. http://dev.mccme.ru/~merzon/pscache/bernoulli-mp.pdf

[3] *Мерзон Г. А.* Формула Пика и тающий лёд // Квант. 2018. № 9.

[4] *Фукс Д. Б.* Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. 1990. № 11. С. 2–11. http://kvant.mccme.ru/1990/11/mozhno_li_iz_tetraedra_sdelat.htm

[5] *Blatter C.* Another proof of Pick's area theorem // Math. Magazine. 1997. Vol. 70, № 3. P. 200.

[6] *Beck M.*, *Robins S.* Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra. New York: Springer, 2015.

[7] *Sam S. V.* A bijective proof for a theorem of Ehrhart // Amer. Math. Monthly. 2009. Vol. 116, № 8. P. 688–701. arXiv:0801.4432.

[8] *Tabachnikov S.* Proofs (not) from the Book // Math. Intelligencer. 2014. Vol. 36, № 2. P. 9–14.

Григорий Александрович Мерзон, МЦНМО, НИУ ВШЭ
merzon@mccme.ru

Восстановление многоугольников по проекциям вершин на прямые

О. И. Голембовский

Речь в этой статье пойдёт о возможности восстановления n точек на плоскости по их ортогональным проекциям на k наперёд заданных прямых. Вначале мы решим задачу (так сказать, разминочную), в которой нужно восстановить точки по их проекциям на две прямые. Далее будет установлена зависимость количества требуемых прямых от количества восстанавливаемых точек. После этого мы найдём все конфигурации точек с максимальным возможным количеством прямых, когда точки не восстанавливаются по проекциям. В конце статьи мы разберём трёхмерный аналог данной задачи (восстановление точек пространства по проекциям на плоскости).

Вступление

Рассмотрим следующую задачу. На плоскости выбраны произвольные конфигурации n точек и k прямых. Для каждой прямой определено мультимножество ортогональных проекций точек конфигурации. Требуется выяснить, можно ли однозначно восстановить точки по этим мультимножествам.

Заметим, что информация, которую мы можем извлечь из мультимножества конкретной прямой, не меняется при её параллельном переносе. В дальнейшем нам будет удобнее говорить не о проекциях на прямые, а о проекциях вдоль направлений (перпендикулярных соответствующим прямым).

Если среди прямых конфигурации есть параллельные, то они дают нам одну и ту же информацию. В дальнейшем будем считать, что *параллельных прямых в конфигурации нет*.

Автор написал эту работу, будучи учеником Ужгородской общеобразовательной школы-интерната с углублённым изучением отдельных предметов.

§ 1. Случай двух прямых

В данном параграфе рассмотрим случай двух прямых. Нас интересует, какие конфигурации точек мы можем восстановить по проекциям на них.

Для удобства будем считать, что направления, вдоль которых мы проектируем, — вертикальное и горизонтальное (в противном случае можем использовать аффинное преобразование плоскости).

Важно, что мы имеем дело с мультимножествами (каждую проекцию мы считаем столько раз, сколько точек в неё проектируется). Можно считать, что проекции «подписаны» количествами спроектированных точек.

Здесь a_i обозначает количество первоначальных точек, которые проектировались в i-ю точку на горизонтальной прямой. Аналогично b_i — количество точек, которые проектируются в i-ю точку на вертикальной прямой (рис. 1).

Будем говорить, что если точка A проектируется в i-ю точку по горизонтальной прямой и j-ю по вертикальной, то A имеет координаты $(i; j)$.

Возьмём все точки некоторого набора P с первой координатой x_i, пусть $y_\alpha, y_\beta, y_\gamma, \ldots$ — вторые координаты этих точек. Множество $\{y_\alpha; y_\beta; y_\gamma; \ldots\}$ обозначим $P(x_i)$.

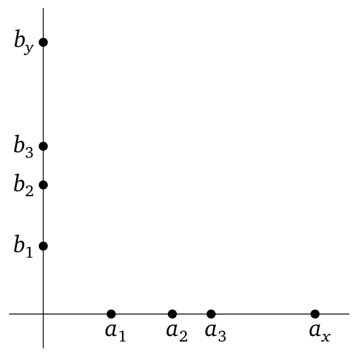


Рис. 1

Лемма 1. *Если набор P можно однозначно восстановить, то для любых i, j выполнено соотношение $P(x_i) \subseteq P(x_j) \vee P(x_j) \subseteq P(x_i)$.*

Доказательство (от противного). Рассмотрим множества $P(x_i)$, $P(x_j)$. Допустим, в $P(x_i)$ есть элемент y_n, которого нет в множестве $P(x_j)$, а в множестве $P(x_j)$ есть элемент y_m, которого нет в $P(x_i)$. Тогда возьмём точки $(x_i; y_n)$ и $(x_j; y_m)$ и заменим их точками $(x_i; y_m)$ и $(x_j; y_n)$. Заметим, что получившийся набор даёт те же проекции, что и первоначальный. Значит, мы не можем однозначно восстановить эти точки, что противоречит требованию леммы. $\square$

Отсортируем числа a_i в убывающем порядке. Теперь лемму 1 можно перефразировать так: *в наборе, который можно однозначно восстановить, количество чисел b_i, не меньших k, совпадает с a_k.*

Верно и обратное:

Теорема 1. *Набор P можно однозначно восстановить по его проекциям на две прямые тогда и только тогда, когда количество чисел b_i, не меньших k, совпадает с a_k.*

Доказательство. Выше мы доказали необходимость условия, теперь докажем его достаточность. Проведём индукцию по количеству точек на горизонтальной прямой, в которые проектируются точки набора. За базу индукции можно взять 0. Пусть теперь на вертикальной прямой есть $y > 0$ точек, куда проектируются точки набора. Возьмём точки, которые проектируются в первую точку горизонтальной прямой (куда проектируется наибольшее количество точек). Мы можем однозначно определить, где они находятся. А именно, строим перпендикуляр l к горизонтальной прямой в этой точке, а также перпендикуляры к вертикальной прямой во всех точках, где есть проекции (рис. 2). Отмечаем кружками точки пересечения. Обратим внимание, что, во-первых, все точки конфигурации, лежащие на прямой l, будут отмечены кружками, а во-вторых, все кружки будут использованы. Мы однозначно восстановили часть точек конфигурации, поэтому мы можем «стереть» все уже известные точки и внести соответствующие изменения в список проекций, после чего получим новую задачу меньшего размера о восстановлении точек по их проекциям. Для этой задачи условия теоремы по-прежнему выполняются. По предположению индукции, конфигурация точек для новой задачи однозначно восстанавливается. □

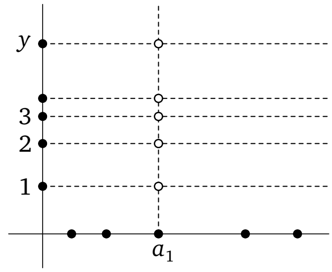


Рис. 2

§ 2. Случай n точек

В этом параграфе мы выясним, сколько необходимо прямых для того, чтобы при любом расположении мы могли восстановить наши n точек. *Обозначим это количество* $f(n)$. Логично начать с маленьких n. Очевидно, что $f(1) = 2$. Чуть сложнее случай $n = 2$. Двух прямых недостаточно (контрпример — две противоположные вершины квадрата, которые будем проектировать на прямые его сторон. Две другие вершины дают те же проекции). Но пока неясно, почему трёх прямых хватит. Аналогично для $n = 3$ и $n = 4$ можно найти примеры, когда не хватает трёх и четырёх прямых соответственно (рис. 3).

Для произвольного n такой пример тоже есть. В правильном $2n$-угольнике возьмём вершины, идущие через одну. Таким способом получаются два правильных n-угольника. Два этих набора дают одинаковые проекции на прямые, перпендикулярные сторонам $2n$-угольника. На рис. 4 показан пример для $n = 5$.

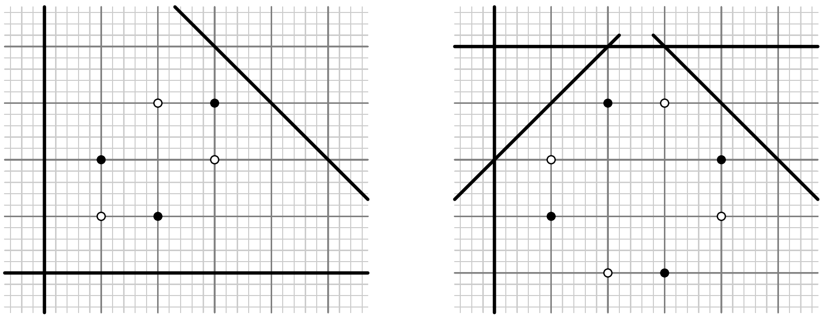


Рис. 3

Лемма 2. *Пусть набор P состоит из точек A_i, а набор P' — из точек B_i, $i \in [1; n]$, и пусть эти наборы дают одинаковые мультимножества проекций на прямую l. Тогда точки можно разбить на пары $(A_i; B_j)$ так, чтобы прямые A_iB_j были перпендикулярны l.*

Доказательство. Рассмотрим проекции точек набора P на прямую l. Проведём через них прямые, перпендикулярные l. На этих прямых будет лежать поровну точек из этих наборов. Для каждой такой прямой произвольным образом разбиваем точки на пары, что и завершает доказательство. □

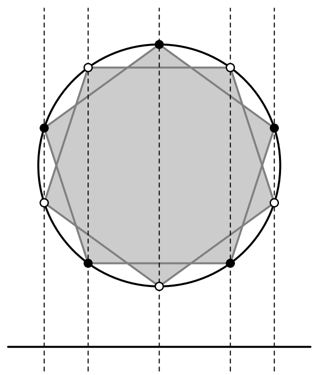


Рис. 4

Теорема 2. $f(n) = n + 1$.

Доказательство. Выше мы показали, что $f(n) \geqslant n + 1$. Осталось показать, что если у нас есть проекции на $n + 1$ прямую, то можно восстановить наш набор. Пусть наборы P и P', каждый из n точек, дают одинаковые мультимножества проекций на эти прямые. Мы можем для каждой прямой разбить точки наборов на пары по лемме 2. Рассмотрим пары, где есть точка A_1 из набора P, не принадлежащая набору P'. Мы знаем, что их количество $n + 1$ при n точках в P'. По принципу Дирихле среди этих пар есть две одинаковые A_1B_i. Тогда среди данных $n + 1$ прямых найдутся две прямые, перпендикулярные A_1B_i. Они будут параллельны, что противоречит принятому нами условию. □

§ 3. Случай n точек и n прямых

В этом параграфе рассмотрим ситуацию, когда *n точек можно перепутать с другими n по проекциям на n прямых*. Пусть два n-угольника неразличимы по таким проекциям. Если у них есть общая вершина, то $(n-1)$-угольники, получающиеся при удалении этой общей вершины, будут также неразличимы по проекциям на n прямых, что невозможно по теореме 2. Поэтому далее будем считать, что у неразличимых многоугольников нет общих вершин.

Лемма 2$'$. *Если количество точек в каждом из неразличимых множеств P и P' совпадает с количеством направлений проектирования, то направления проектирования совпадают с направлениями прямых, соединяющих точки множеств P и P'.*

Доказательство. Рассмотрим точку A из множества P. По лемме 2 на прямой, которая проходит через A в направлении проектирования, должна быть хотя бы одна точка из множества P'. Но количество таких направлений и количество точек в P' совпадают, поэтому каждое направление из A на точки P' является направлением проектирования. □

Лемма 3. *Все $2n$ рассматриваемых точек лежат на их выпуклой оболочке, причём точки двух наборов чередуются*: $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если на прямой лежит хотя бы по одной точке из P и P', то на этой прямой лежит ровно по одной точке из P и P'. Действительно, пусть, например, на прямой лежат точки A_1, A_2 из P и точка B из P'. На каждой из прямых, проходящих через B в направлениях проектирования, должна лежать хотя бы одна точка из множества P. Но тогда количество направлений проектирования строго меньше, чем количество точек в P (ведь для точек A_1 и A_2 направления из B совпадают), что противоречит тому, что тех и других ровно n.

Рассмотрим множество S векторов, соответственно коллинеарных этим прямым (по лемме 2 это векторы, коллинеарные прямым A_1B_i, $i \in [1; n]$). Возьмём любой из них и найдём крайнюю прямую (т. е. такую, с одной стороны от которой нет точек из P и P'). Это возможно, потому что прямых каждого направления конечное число. По лемме 2 эта прямая проходит через хотя бы одну точку набора P и через хотя бы одну точку набора P'. На самом деле, для каждого направления мы найдём две крайние прямые. Пусть a — одна из них, $A_1, B_1 \in a$ (рис. 5). Без ограничения общности, A_1 левее B_1, а все остальные точки лежат ниже прямой a. Возьмём вектор из S, который имеет наименьший угол с направлением от A_1 к B_1 (против часовой стрелки), и проведём через A_1 прямую b, коллинеарную ему. На этой прямой есть некоторая точка, пусть это B_3, набора P' (поскольку выбранный вектор принадлежит множеству S). Напомним, что B_3 ниже прямой a. Докажем, что прямая b тоже крайняя. Если нет,

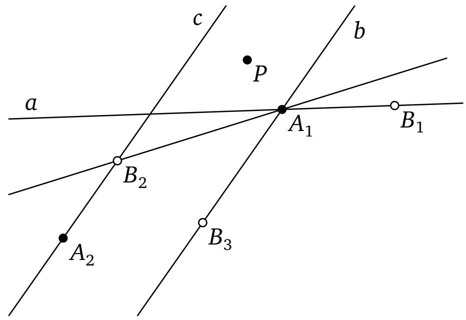


Рис. 5

то рассмотрим крайнюю прямую того же направления, которая лежит левее b. Пусть это c (рис. 5). На ней найдётся некоторая точка B_2 из P'. Она лежит ниже прямой a. Где бы ни лежала точка B_2, прямая A_1B_2 будет иметь меньший угол с прямой a, чем прямая b, что невозможно.

Дальше поступим аналогично и проведём прямую через B_3 так, чтобы она имела наименьший угол с b. И так далее, пока не «зациклимся». При этом мы придём в точку B_1, иначе последняя проведённая прямая не будет крайней. В итоге мы переберём все прямые, составляющие выпуклую оболочку. Их количество равно $2n$, потому что мы пройдём по двум крайним прямым в направлении каждого вектора из S. Поэтому в выпуклой оболочке будет $2n$ точек. Значит, мы прошли все точки, причём в нужном порядке. □

Лемма 3 позволяет нам автоматически преобразовывать выпуклый $2n$-угольник в множества P и P'. Поэтому в дальнейшем нам достаточно рассматривать $2n$-угольники, подразумевая автоматическое разбиение на два множества.

Лемма 4. *Пусть $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ — выпуклый многоугольник, образованный (по лемме 3) рассматриваемыми точками. Тогда*

$$A_1A_{2n} \parallel A_2A_{2n-1} \parallel \ldots \parallel A_iA_{2n+1-i}.$$

Доказательство. Пусть наш многоугольник ограничен ломаной T. По лемме 3 она выпуклая. Пусть i — наименьшее натуральное число, для которого отрезок A_iA_{2n+1-i} не параллелен A_1A_{2n}. Проведём через A_i прямую, параллельную A_1A_{2n}. По лемме $2'$ эта прямая должна проходить ещё через некоторую вершину A_k многоугольника T. Теперь проведём прямую через A_{2n+1-i}, также параллельную A_1A_{2n}. Посмотрим, где она пересечёт T второй раз. Очевидно, что она находится между прямыми A_iA_k и $A_{i-1}A_{2n+2-i}$, а значит, пересечёт T на отрезке A_iA_{i-1}. Но по лемме $2'$

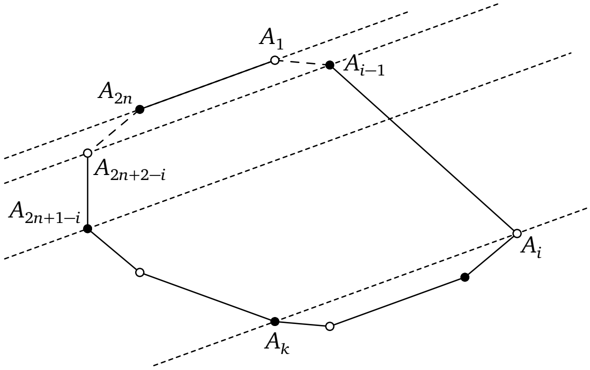


Рис. 6

точка пересечения тоже должна быть вершиной T. Это невозможно, поскольку A_i и A_{i-1} — две последовательные вершины.

Мы пришли к противоречию, лемма доказана. □

Заметим, что утверждение леммы 4 верно, с какой бы вершины мы ни начинали нумерацию.

Лемма 5. *Все точки наборов P и P' лежат на эллипсе.*

Доказательство. Вначале докажем, что пяти последовательных точек достаточно для того, чтобы точно узнать расположение шестой. Пусть известны первые 5 вершин нашего многоугольника $A_1B_1A_2\ldots B_n$. Проведём прямую, параллельную A_2B_2, через A_1 и прямую, параллельную A_3B_2, через A_2. По лемме 4 их точка пересечения и будет B_3 (рис. 7).

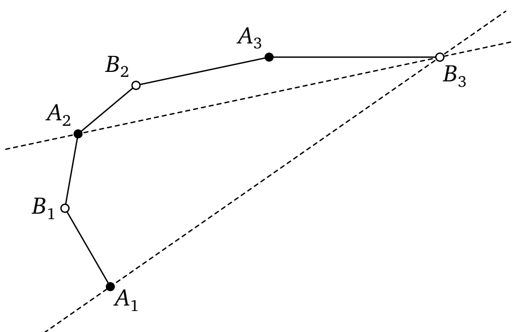


Рис. 7

Теперь докажем, что все рассматриваемые точки лежат на конике. Для этого докажем, что шесть последовательных точек лежат на одной конике.

При помощи аффинного преобразования сделаем $B_1A_2B_2A_3$ равнобедренной трапецией (очевидно, что если все точки лежали на конике, то

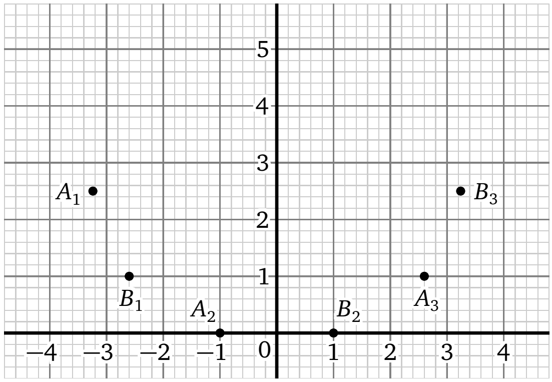


Рис. 8

они и останутся на конике) и выберем систему координат так, чтобы наши точки имели координаты вида $A_1(x; y)$, $B_1(-z; 1)$, $A_2(-1; 0)$, $B_2(1; 0)$, $A_3(z; 1)$, см. рис. 8.

По лемме 4 имеем $A_1B_2 \parallel A_2B_1$ и $A_2B_3 \parallel A_3B_2$, поэтому прямые A_1B_2 и A_2B_3 симметричны относительно оси ординат. По той же лемме прямая A_1B_3 параллельна оси абсцисс. Значит, точка B_3 симметрична A_1 относительно оси ординат и имеет координаты $(-x; y)$.

Покажем, что коника, проходящая через $A_1B_1A_2B_2A_3$, будет проходить и через B_3. Для этого достаточно показать, что коника симметрична относительно оси ординат. В уравнение коники $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ подставим наши точки. Подставив координаты точек A_2 и B_2, получим $d = 0$, а подставив B_1 и A_3, получим $c = 0$. Легко видеть, что тогда коника симметрична относительно оси ординат, что и требовалось доказать.

Если $n = 2$, то у нас есть выпуклый четырёхугольник и мы можем провести эллипс через его вершины. При $n > 2$ осталось доказать, что наша коника не может быть параболой или гиперболой. Допустим, вершины наборов P и P' лежат на параболе. Одна из ветвей параболы содержит как минимум три вершины многоугольника. Рассмотрим три точки, самые дальние от вершины параболы (A_1, B_1, A_2). По лемме 4, если мы проведём через точку A_2 прямую, параллельную A_1B_1, то она пересечёт параболу второй раз в вершине нашего многоугольника. Эта точка будет лежать на одной ветви параболы с A_1, причём дальше от вершины параболы. Значит, точка A_1 была не крайней. Аналогично доказывается для гиперболы, только нужно заметить, что поскольку наш многоугольник выпуклый и $n > 2$, то все его вершины должны находиться на одной и той же ветви гиперболы. □

Теорема 3. *Если есть набор P из n точек, которую можно перепутать с набором P', то существует аффинное преобразование, которое* *переводит P и P' в правильные многоугольники, вписанные в одну и ту же окружность.*

Доказательство. Согласно лемме 5 все вершины многоугольников P и P' лежат на эллипсе. Переведём этот эллипс в окружность при помощи аффинного преобразования. Теперь мы можем восстановить все вершины по трём последовательным точкам: A_1, B_1, A_2. Действительно, проведём через A_1 прямую, параллельную B_1A_2, она пересекает окружность в точке B_2 (рис. 9). По лемме 4 точка B_2 является вершиной многоугольника P'. Проведём через B_1 прямую, параллельную A_2B_2. Получим вершину A_3 многоугольника P, и т. д. Так мы можем восстановить все вершины обоих многоугольников.

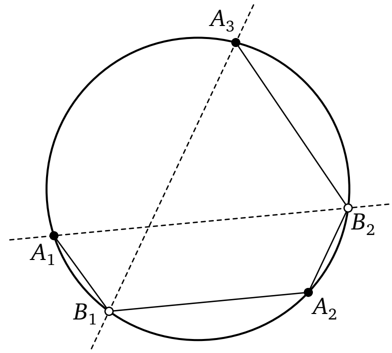


Рис. 9

Заметим, что дуга A_1B_1 равна A_2B_2. Аналогично B_1A_2 и B_2A_3 равны. Тогда равны и дуги A_1A_2 и A_2A_3. Это значит, что многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ правильный. Аналогично и многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ правильный. Теорема доказана. □

Замечание. Если мы впишем в окружность два правильных n-угольника, то их всегда можно будет спутать при проекции на прямые, перпендикулярные сторонам получившегося $2n$-угольника. Таким образом, теорема описывает все возможные неразличимые конфигурации.

§ 4. Случай целых координат

В этом параграфе мы решим задачу § 3 на целочисленной решётке.

Теорема 4. *На целочисленной решётке существует n точек, которые можно спутать по проекциям на n прямых, тогда и только тогда, когда n принадлежит множеству* $\{1; 2; 3; 4; 6\}$.

Доказательство. Случай $n=1$ тривиален. Для $n=2, 3, 4$ примеры были в § 2. На рис. 10 показан пример для $n = 6$.

Для остальных n воспользуемся теоремой 3. Пусть найдётся n-угольник с вершинами из таких точек. С помощью аффинного преобразования сделаем его правильным. Целочисленная решётка перейдёт при этом преобразовании в какую-то другую решётку. Мы получили правильный n-угольник, все вершины которого принадлежат решётке. Доказательство невозможности этой ситуации для $n = 5$ и $n > 6$ было опубликовано в работе И. Шёнберга [1] 1937 года, см. также [2, с. 30–33]. □

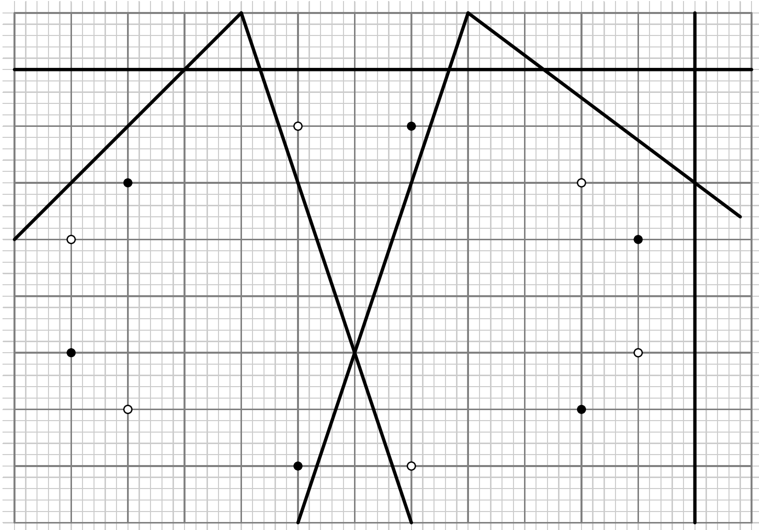


Рис. 10

§ 5. Пространственный случай

Теперь решим ту же задачу в пространстве. Будем проектировать точки на некоторые плоскости. Сразу же можно сказать, что для восстановления n точек всегда достаточно $n+1$ плоскости (доказывается аналогично теореме 2).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда у нас есть n точек, которые невозможно восстановить по проекциям на n плоскостей. Докажем, что мы можем параллельно спроектировать эти точки на какую-то плоскость так, что полученные при проектировании n точек на плоскости невозможно будет восстановить по проекциям на какие-то n прямых.

Выберем произвольную плоскость α, которая не параллельна ни одной из данных n плоскостей (и, значит, не перпендикулярна ни одной из n прямых, перпендикулярных этим плоскостям), причём при проекции на плоскость α не сливаются никакие две точки каждого из двух неразличимых наборов и никакие две из n указанных прямых не проектируются в параллельные.

Пусть l — одна из этих n прямых. Проведём прямые, параллельные l, через точки одного из двух наборов (по обобщению леммы 2 для пространства другие n точек тоже будут лежать на этих прямых). Спроектируем проведённые прямые на плоскость α. Они, очевидно, перейдут в набор параллельных прямых, проходящих через проекции точек каждого из двух наборов. Итак, на плоскости α есть два набора из n точек каждый и n семейств параллельных прямых, содержащие все точки обоих исходных наборов.

Докажем, что $2n$ точек исходных наборов лежат в одной плоскости. Если это не так, то возьмём четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Согласно теореме Польке — Шварца их можно параллельно спроектировать в любой четырёхугольник. Направления, при которых проекция является невыпуклым четырёхугольником, образуют на проективной плоскости направлений область с непустой внутренностью. Выберем направление, принадлежащее этой внутренности. Мы получим $2n$ точек, не все из которых лежат на их выпуклой оболочке, причём некоторые n из этих точек можно спутать с остальными n точками по проекциям на n прямых. Но это невозможно по теореме 3.

Итак, доказана

Теорема 5. *Если в пространстве выбраны два набора из n точек и эти наборы невозможно различить по проекциям на n плоскостей, то все $2n$ точек лежат в одной плоскости.* □

Список литературы

[1] *Schoenberg I. J.* Regular simplices and quadratic forms // J. London Math. Soc. 1937. Vol. s1–12, iss. 1. P. 48–55.

[2] *Вавилов В. В., Устинов А. В.* Многоугольники на решётках. М.: МЦНМО, 2006.

Олесь Игоревич Голембовский, студент Киевского национального университета им. Тараса Шевченко

olesgolembovskiy@gmail.com

Симметризация игральной кости

И. Р. Высоцкий

С дошкольного детства помню настольную игру, в которой были два кубика, которые папа почему-то называл костями, картонное поле, полное приключений, и разноцветные фишки.

Однажды одна из костей бесследно исчезла, и папа предложил слепить игральный кубик из белого хлеба. Разметку нужно было нанести с помощью спичечных головок — они оставляли во влажном сладковатом мякише коричневые углубления. Хлебная кость получилась отличная, хотя и кривоватая, отчего сразу возник вопрос, равны ли шансы у разных очков. К счастью, идея заняться балансировкой на основе собранной статистики не пришла нам в голову. Мы с папой просто решили, что несимметричность кости не нарушает справедливость игры, поскольку игроки в одинаковых условиях.

* * *

Вопрос о симметризации неправильной кости (неравномерного генератора случайных чисел) вновь возник у меня недавно в связи с составлением задач для олимпиады по теории вероятностей. Теперь задача была уже почти формализована: нужно симметризовать генератор алгебраически, не прибегая к помощи напильника или иным физическим воздействиям.

Орёл-орёл (ОО)	p^2
Орёл-решка (ОР)	pq
Решка-орёл (РО)	qp
Решка-решка (РР)	q^2

Простейший случай — перекошенный бинарный генератор, например, в виде гнутой монеты. Пусть вероятности орла и решки у такой монеты равны p и $q = 1 - p$ соответственно, причём обе положительны. Бросая такую монету дважды, получим четыре элементарных исхода (см. таблицу), и два из них равновероятны, каким бы ни было p: $P(\text{ОР}) = P(\text{РО}) = pq$.

Так получается *точная симметризация*. Если выпала комбинация ОР, то будем считать, что случился орёл, а случай РО отождествим с решкой. Если же при двух бросках выпало одно и то же, то скажем, что опыт не удался и нужно опять бросить монету дважды. Если p и q несильно отличаются от 0,5, то метод вполне работает на практике с тем лишь недостатком, что отменять результаты бросков придётся довольно часто.

Этот способ без труда переносится на несимметричный игральный кубик (генератор шести случайных чисел или, для простоты, 6-генератор).

1. Каждая тройка попарно различных граней может реализоваться шестью упорядоченными равновозможными комбинациями. Сопоставим каждой из этих комбинаций какое-то число от 1 до 6. Поступим так для всех возможных троек (всего 20 штук).
2. Бросим кость трижды.
3. Если какое-то число повторилось, то тройка бросков не засчитывается.
4. Если все три результата различны (120 из 216 вариантов), то смотрим, какое из чисел от 1 до 6 сопоставлено выпавшей тройке. Считаем, что именно это число получилось.

Этот алгоритм для кубической кости требует серий по три броска[1)] и предварительного составления целой таблицы соответствия, но зато он в каком-то смысле эффективнее, чем аналогичный алгоритм для монеты, поскольку можно ждать, что три различных числа при трёх бросках не очень несимметричной кости будут случаться чаще, чем две различные стороны монеты при двух бросках.

Понятно, что таким же способом можно точно симметризовать любой неравномерный генератор, дающий 24, 120, 720 случайных чисел и так далее. Чуть труднее точно симметризовать N-генератор, когда N не является факториалом, но и тут найдутся идеи, часто приводящие к весьма запутанным методам, скорость которых вдобавок сильно зависит от N.

* * *

Займёмся теперь неточной симметризацией, т. е. алгоритмом, делающим из исходного неравномерного генератора другой, менее неравномерный. Пусть неточность компенсируется простотой и скоростью.

[1)] Один из участников олимпиады, где была предложена эта задача, решил, что вместо независимых серий по три броска можно бросать кость до тех пор, пока три разных числа не выпадут подряд. Легко убедиться, что в таком случае разные порядки одной и той же тройки неравновероятны, поэтому такой алгоритм не даст точной симметризации.

Пусть G — генератор случайных чисел $1, \ldots, N$, где $N \geqslant 2$. Такой генератор можно понимать как алгоритм или некоторое аппаратное устройство. Будем понимать его как распределение

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & N \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_N \end{pmatrix},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ — вероятности значений $1, 2, \ldots, N$. Дополнительно потребуем, чтобы выполнялись неравенства $p_k > 0$ при всех $k = 1, \ldots, N$ и чтобы не все вероятности равнялись друг другу. Последнее требование формально излишне, но немного упростит рассуждения[2)], и к тому же оно содержательно: нет смысла симметризовать то, что симметризовано до нас. Главный вопрос — как измерить неравномерность (несимметричность) генератора. Сделать это можно разными способами, но все они будут опираться на какую-то меру рассеивания вероятностей. Используем простейшую — размах.

Неравномерностью генератора G_n назовём величину

$$\max_{1 \leqslant k, j \leqslant N} (p_k - p_j) = M - m,$$

где M — наибольшая, а m — наименьшая из вероятностей p_k.

Построим следующий алгоритм. Пусть генератор дал некоторое случайное число в пределах от 1 до N. «Запустим» генератор ещё раз и получим ещё одно случайное число. Формально говоря, мы получаем пару независимых случайных величин ξ и η из распределения G. Если $\xi = \eta$, то сочтём, что процедура неудачна, иначе будем считать, что итогом процесса служит число ξ.

Так получается генератор $G^{(1)}$. С помощью такой же процедуры можно перейти от $G^{(1)}$ к генератору $G^{(2)}$ и так далее. Мы покажем, что каждый следующий генератор лучше предыдущего, т. е. менее неравномерен. Неравномерность не просто уменьшается, а стремится к нулю, и поэтому начиная с какого-то момента можно считать, что генератор стал приемлемо равномерным[3)].

Вероятности генератора $G^{(n)}$ выражаются через распределение $G^{(n-1)}$:

$$p_k^{(n)} = \mathrm{P}(\xi = k,\ \eta \neq k \mid \xi \neq \eta) = \frac{p_k^{(n-1)}(1 - p_k^{(n-1)})}{1 - \sum_{k=1}^{N} (p_k^{(n-1)})^2}, \quad \text{где } \xi, \eta \sim G^{(n-1)}. \quad (1)$$

[2)] В частности, можно будет писать только строгие неравенства, а не сопровождать нестрогие каждый раз фразой «равенство достигается, только если все вероятности равны между собой».

[3)] Например, когда систематическое отклонение изучаемой случайной величины от её математического ожидания, обусловленное неравномерностью исходного генератора, становится пренебрежимо мало по сравнению с отклонением, вызванным естественной случайной изменчивостью.

Здесь и далее верхними индексами в скобках будем помечать все величины, относящиеся к соответствующему генератору. Нулевой индекс — номер начального генератора — для простоты опускаем.

Утверждение. *Промежутки, на которых лежат вероятности генераторов $G^{(n)}$, образуют последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. А именно, если $m^{(n)}$ и $M^{(n)}$ — соответственно наименьшая и наибольшая из вероятностей $p_k^{(n)}$, то*

1) *для любого $n \in \mathbb{N}$ верна цепочка неравенств*
$$m^{(0)} < m^{(1)} < \ldots < m^{(n)} < \frac{1}{N} < M^{(n)} < \ldots < M^{(1)} < M^{(0)};$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(M^{(n)} - m^{(n)}) = 0$, *или, что то же самое,* $\lim\limits_{n\to\infty} m^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} M^{(n)} = \dfrac{1}{N}$.

Перед доказательством обсудим некоторые подробности и вспомогательные утверждения. Пусть числа $x_1, x_2, \ldots, x_N$ положительны, не все равны между собой и в сумме дают 1. Для краткости обозначим через σ сумму квадратов:
$$\sigma = \sum_{k=1}^{N} x_k^2.$$

Лемма о крайних. *Наименьшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_N$ строго меньше, а наибольшее строго больше суммы квадратов всех этих чисел*:
$$\min_{k=1,\ldots,N}(x_k) < \sigma < \max_{k=1,\ldots,N}(x_k).$$

Доказательство.
$$\min(x_k) = \min(x_k) \cdot \sum_k x_k < \sigma < \max(x_k) \cdot \sum_k x_k = \max(x_k). \qquad \square$$

Для дальнейших рассуждений удобно ввести в рассмотрение функцию
$$f(x) = \frac{x(1-x)}{1-\sigma},$$
которая зависит от чисел $x_1, x_2, \ldots, x_N$, поскольку в знаменателе участвует сумма их квадратов σ. Функция f обладает рядом занятных свойств, причём некоторые из них очевидны.

1°. $f(x_k) > 0$ для любого x_k, и $\sum_k f(x_k) = 1$. Свойство очевидно.

2°. Если $N = 2$, то для любых положительных чисел x_1 и $x_2 = 1 - x_1$
$$f(x_1) = f(1 - x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}.$$

Это очевидное свойство отражает точную симметризацию гнутой монеты, которую мы обсуждали выше.

3°. Если $N \geqslant 3$, то функция f сохраняет порядок чисел: $f(x_k) < f(x_j)$ тогда и только тогда, когда $x_k < x_j$, для любых $j, k = 1, \ldots, N$.

Доказательство свойства 3°. Рассмотрим разность значений в двух точках
$$f(x_k)-f(x_j)=\frac{x_k(1-x_k)-x_j(1-x_j)}{1-\sigma}=\frac{(x_k-x_j)(1-x_k-x_j)}{1-\sigma}.$$
Поскольку $N\geqslant 3$, разность $1-x_k-x_j$ положительна. Знаменатель положителен, так как $\sigma<1$. Следовательно, выражения $f(x_k)-f(x_j)$ и x_k-x_j имеют один и тот же знак. Отсюда следует утверждение 3°. □

4°. Если $N\geqslant 3$ и $x_k<\sigma<x_j$, то $x_k<f(x_k)<f(x_j)<x_j$.

Если принять во внимание свойство 3°, то свойство 4° очевидно. Оно описывает встречное движение: малые числа функция двигает вверх, большие — вниз. Границей между малыми и большими служит σ.

Доказательство утверждения. Вернёмся к генераторам $G^{(n-1)}$ и $G^{(n)}$ и покажем, что при $N\geqslant 3$ для любого натурального n
$$m^{(n-1)}<m^{(n)}<\frac{1}{N}<M^{(n)}<M^{(n-1)}.$$

Функцию $f(x)$ будем рассматривать теперь не для произвольных чисел, а для вероятностей генератора $G^{(n-1)}$:
$$f(x)=f_n(x)=\frac{x(1-x)}{1-\sigma^{(n)}},\quad \text{где}\quad \sigma^{(n)}=\sum_{k=1}^{N}\left(p_k^{(n)}\right)^2.$$
Формула (1) принимает вид
$$p_k^{(n)}=f\left(p_k^{(n-1)}\right).$$

Будем считать, что в генераторе $G^{(n-1)}$ не все вероятности $p_k^{(n-1)}$ равны между собой; это по условию верно для начального генератора G. Из свойства 3° (сохранение порядка) следует, что числа $p_k^{(n)}=f\left(p_k^{(n-1)}\right)$ расположены в том же порядке, что и $p_k^{(n-1)}$. Поэтому $m^{(n)}=f(m^{(n-1)})$ и $M^{(n)}=f(M^{(n-1)})$. Кроме того, поскольку не все $p_k^{(n-1)}$ равны между собой, из леммы о крайних следует, что $m^{(n-1)}<\sigma^{(n-1)}<M^{(n-1)}$. Из свойства 4° (встречное движение) вытекает, что $m^{(n-1)}<m^{(n)}<M^{(n)}<M^{(n-1)}$.

Наибольшая вероятность больше среднего арифметического всех вероятностей, а наименьшая — меньше, поэтому $m^{(n)}<1/N<M^{(n)}$.

Осталось показать, что $(M^{(n)}-m^{(n)})\to 0$ при $n\to\infty$. Для этого оценим отношение неравномерностей двух последовательных генераторов:
$$\frac{M^{(n)}-m^{(n)}}{M^{(n-1)}-m^{(n-1)}}=\frac{f(M^{(n-1)})-f(m^{(n-1)})}{M^{(n-1)}-m^{(n-1)}}=\frac{(M^{(n-1)}-m^{(n-1)})(1-M^{(n-1)}-m^{(n-1)})}{(M^{(n-1)}-m^{(n-1)})(1-\sigma^{(n-1)})}=$$
$$=\frac{1-M^{(n-1)}-m^{(n-1)}}{1-\sigma^{(n-1)}}<\frac{1-\sigma^{(n-1)}-m^{(n-1)}}{1-\sigma^{(n-1)}}.$$

Последняя оценка вытекает из неравенства $M^{(n-1)} > \sigma^{(n-1)}$. Учтём ещё, что $m^{(n-1)} \geqslant m^{(0)} = m$ и что в силу неравенства о средних

$$\sigma^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(p_k^{(n-1)}\right)^2 > N\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_k^{(n-1)}\right)^2 = \frac{1}{N}.$$

Теперь цепочку оценок можно продолжить:

$$\frac{M^{(n)} - m^{(n)}}{M^{(n-1)} - m^{(n-1)}} < 1 - \frac{m^{(n-1)}}{1 - \sigma^{(n-1)}} < 1 - \frac{m}{1 - 1/N} = 1 - \frac{Nm}{N-1} = \alpha < 1.$$

Таким образом,

$$0 < M^{(n)} - m^{(n)} < \alpha^n (M^{(0)} - m^{(0)}) < \alpha^n,$$

где число $\alpha = 1 - \frac{Nm}{N-1} < 1$ не зависит от n. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (M^{(n)} - m^{(n)}) = 0.$$

Утверждение доказано. □

Теперь можно лучше оценить скорость сходимости. Из равенства

$$\lim_{n\to\infty} (M^{(n)} - m^{(n)}) = 0$$

следует, что

$$m^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{N}, \quad M^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{N},$$

поэтому

$$\sigma^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{N},$$

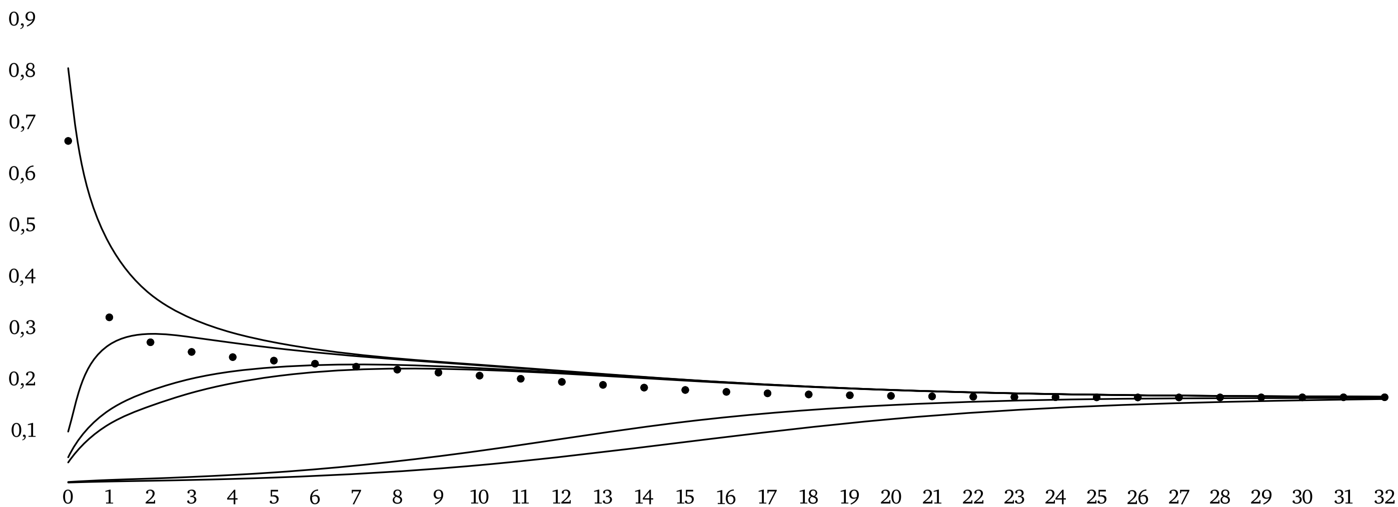
и можно найти предел верхней оценки отношения неравномерностей:

$$\frac{M^{(n)} - m^{(n)}}{M^{(n-1)} - m^{(n-1)}} < 1 - \frac{m^{(n-1)}}{1 - \sigma^{(n-1)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1/N}{1 - 1/N} = \frac{N-2}{N-1}.$$

* * *

Описанный алгоритм симметризации на примере шестигранной кости сводится к двум броскам. Первый бросок — определяющий. Он показывает, какое число выпало. Второй бросок — «подтверждающий». Если во второй раз выпало другое число очков, то всё в порядке. Если же выпала та же грань, что и в первый раз, нужно забыть выпавшее число и повторить всё сначала. Алгоритм является аналогом описанного вначале способа симметризации монеты с той лишь разницей, что не даёт точной симметризации. При необходимости алгоритм повторяется. Получается процесс, полностью детерминированный исходным случайным генератором.

	$G^{(0)}$	$G^{(1)}$	$G^{(2)}$	$G^{(3)}$	$G^{(4)}$	$G^{(5)}$	$G^{(10)}$	$G^{(15)}$	$G^{(20)}$	$G^{(30)}$	$G^{(40)}$
p_1	0,1000	0,2689	0,2901	0,2836	0,2727	0,2627	0,2289	0,2008	0,1812	0,1685	0,1669
p_2	0,0020	0,0060	0,0087	0,0119	0,0158	0,0206	0,0626	0,1192	0,1516	0,1653	0,1665
p_3	0,0400	0,1147	0,1499	0,1755	0,1942	0,2072	0,2201	0,1992	0,1808	0,1684	0,1669
p_4	0,0010	0,0030	0,0044	0,0060	0,0080	0,0106	0,0348	0,0798	0,1243	0,1609	0,1660
p_5	0,0500	0,1419	0,1797	0,2030	0,2172	0,2251	0,2235	0,1999	0,1810	0,1685	0,1669
p_6	**0,8070**	0,4654	0,3671	0,3200	0,2921	0,2738	0,2301	0,2010	0,1812	0,1685	0,1669
s	0,6654	0,3223	0,2738	0,2550	0,2449	0,2381	0,2089	0,1810	0,1695	0,1667	0,1667
M	0,8070	0,4654	0,3671	0,3200	0,2921	0,2738	0,2301	0,2010	0,1812	0,1685	0,1669
m	0,0010	0,0030	0,0044	0,0060	0,0080	0,0106	0,0348	0,0798	0,1243	0,1609	0,1660
Нерав-ть $M-m$	0,8060	0,4624	0,3627	0,3139	0,2840	0,2632	0,1953	0,1213	0,0570	0,0076	0,0008
$\frac{M^{(n)}-m^{(n)}}{M^{(n-1)}-m^{(n-1)}}$		0,5737	0,7844	0,8654	0,9047	0,9269	0,9371	0,8884	0,8431	0,8060	0,8007



Как вытекает из последних оценок, процесс сходится тем медленнее, чем больше N. В случае с костью размах вероятностей каждый раз умножается примерно на 0,8. Поэтому процесс может потребовать довольно много шагов, но если неравномерность генератора мала, то уже однократное применение алгоритма существенно улучшает ситуацию.

В заключение — таблица и графики вероятностей (точки соединены непрерывными линиями только для наглядности), которые иллюстрируют процесс последовательной симметризации генератора (см. с. 140)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0{,}1 & 0{,}002 & 0{,}04 & 0{,}001 & 0{,}05 & 0{,}807 \end{pmatrix}.$$

Последовательность значений $\sigma^{(n)}$ показана жирными точками.

Видно, что вероятности на всём протяжении сохраняют свой порядок. При этом малые вероятности (меньшие $1/6$) могут сперва расти, стать больше, чем $1/6$, а затем убывать, в то время как большие только убывают. Те, что сначала очень малы, всё время остаются меньше σ, а поэтому только растут.

В таблице в строке p_6 первое число больше, чем 0,5 (выделено жирным шрифтом). Однако после первой же итерации вероятность p_6 упала с $p_6^{(0)} = 0{,}8070$ до $p_6^{(1)} = 0{,}4654$. Это не случайность (см. задачу 1).

Задачи

1. Докажите, что если $N \geqslant 3$, то $M^{(1)} < 0{,}5$, т. е. уже после первой симметризации все вероятности оказываются меньше чем $1/2$.

2. Докажите, что если не все вероятности p_k равны между собой, то последовательность

$$\sigma^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} \left(p_k^{(n)}\right)^2,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, монотонно убывает.

Иван Ростиславович Высоцкий, МЦНМО

`i_r_vysotsky@hotmail.com`

Преподавание математики

Как учить социологов математике

Н. С. Калинин

Всякий социолог подвергается обучению математике на первых курсах. Зачастую присутствует следующий поразительный консенсус между преподавателем и студентами. Преподаватель (иногда профессиональный математик) считает, что студенты-социологи ничего не понимают, но это не страшно, потому что математика им не нужна, максимум потребуется считать среднее и стандартное отклонение, да и то на компьютере. Студентам же предмет не только непонятен, но и безынтересен — кому вообще могут быть нужны эти матрицы и линейные уравнения с интегралами? Статистика поинтереснее, но так же непонятна. Обширная литература [5, 8, 12] про преподавание математики нематематикам так или иначе касается эмоционального отторжения математики студентами. На самом деле это преодолимо.

Анализ больших данных, в частности сетей в интернете, между тем открывает социологам сияющие перспективы [13]; всего лишь надо уметь программировать. Хорошо бы социологи ещё и понимали, как именно работают методы, а не просто нажимали кнопки. Тут уже без линейной алгебры и математического анализа не обойтись.

Желаемо, конечно, обсуждение, *что* преподавать, комиссией социологов и математиков — исследователей и преподавателей.

Ниже я описываю, что и *как* преподавал я. Классификация [9] концепций преподавания математики гуманитариям следующая: академическая (строго доказывать с примерами, якобы математика ум в порядок приводит), историческая (кто, что и когда придумал), прагматическая (что этим конкретным людям надо) и научно-популярная (просветительская). Будучи прагматиком, я изучил огромное количество текстов, где математика применялась в социологии. Преподавал я только базовую математику (теория вероятностей и статистика следуют за моим курсом) студентам первого года бакалавриата *Социология и социальная информатика* (ВШЭ, СПб).

Безусловно, даже взрослых социологов нужно убеждать в необходимости изучения математики. Я сошлюсь на многочисленные тексты об этом [11, 14, 17, 19, 21, 24]. С радостью включусь в дискуссию по обсуждаемым вопросам.

§ 1. Лучшие методики

Читателю-педагогу, вероятно, хотелось бы узнать, что же я делаю необычно. Методики следующие (в порядке убывания полезности).

- Каждому студенту-первокурснику велено прочесть некую главу из книги Introduction to mathematical sociology [15] или Matrices and society [16], пересказать её ассистенту-второкурснику, а потом комунибудь из однокурсников. Книги очень хорошо написаны и содержат социологические примеры. После введения такого задания вопросы о нужности математики почти никто не задавал, до — задавали часто.
- Обязательно индивидуальное домашнее задание по математическому анализу — взять производную, интеграл по частям, провести прямую, наилучшим образом приближающую три точки и др. На семинарах эти темы рассматриваются очень коротко, но студентам выдаются подсказки, где и как в интернете искать советы и рецепты. Все находят, справляются, первоначальный ужас при виде задания сменяется удовлетворением: всё не так уж сложно, хотя и разбираться пришлось.
- Невозможно понимание линейной алгебры и анализа без минимальной математической культуры. Значит, надо подоказывать хоть что-то. Ничего лучше текстовых задач на индукцию, простой теории графов, логических головоломок до сих пор не придумали. Этому посвящена треть курса. Формально для линейной алгебры это не надо, фактически же в математике важна последовательность этапов обучения [2].
- *Все* содержательные факты в лекциях именуются задачами и нумеруются. Иногда это выглядит странно, например: задача пять — дайте определение множества всех подмножеств, или: задача десять — сформулируйте и докажите теорему. Большинство задач, однако, — это просто примеры явлений, подменяющие собой общие теоремы. Теоретическая контрольная заключается в задачах, которые очень похожи или совпадают с задачами из лекций. Так решается психологическая проблема подготовки к курсу: понять все лекции тяжело, и неизвестно,

что именно важно. А тут всё промаркировано и разбито на маленькие кусочки. Хорошо, курс мне не понять, но ещё одну задачу я понять могу. Потом ещё одну.

- Матрица сама по себе — бессмысленный для социолога объект. А вот если она получена из линейного уравнения (пример), как движение плоскости (пример), как матрица смежности графа (пример), как матрица случайного блуждания (и всё это осознано), то гораздо проще изучать, приобретается смысл. Математика состоит в связях и понимании, потому преподавать алгоритмы (например, нахождения собственных чисел) вместо понимания и связей — плохо. Должны быть хотя бы примеры изучаемых сущностей.

§ 2. Программа, оценка

Уместна книга с социологическими примерами, которую студенты должны читать параллельно курсу. Книги Introduction to mathematical sociology [15] и Matrices and society [16] представляются мне наилучшим выбором. Материалы к моему курсу и задачи с наших семинаров можно найти на `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/teach.html`

Имеются удивительные совпадения в методических предложениях между [26] и статьёй [12], которую я изучил уже после разработки курса. В (англоязычной) литературе я встречал и мнение, что не нужно мучить бакалавров-социологов математикой, они не за этим пришли, серьёзно учить её можно лишь в магистратуре (к тому времени человек должен определиться, чему учиться будет, а до этого курсы скорее завлекающие). Боюсь, что в российских реалиях это неприменимо. Моё представление о том, как надо преподавать социологам, в основном базируется на [2, 10, 20], а также на общении с математиками — именитыми и не очень.

2.1. Начало: доказательства, 5 лекций

Начать стоит с теории графов (мотивируется исследованиями социальных сетей), комбинаторики, логических задач. В качестве примера того, как устроены доказательства в математике, подходит тема индукции (с текстовыми, а не формульными задачами), формула включений-исключений (в общем виде — формулировка и доказательства ужасающие, много значков суммирования, зато через месяц, готовясь к теоретической контрольной, все привыкают к индексам и их уже не боятся). Чётность суммы степеней вершин в графе. Операции с множествами. На семинарах это сопровождается задачами из математических кружков для 5–6 классов. В конце темы я рассказываю алгоритм Гейла — Шепли для нахождения стабильных паросочетаний, это проходит у студентов на ура.

Приведу этот рассказ целиком. Есть компания из n мальчиков и n девочек. У каждого мальчика есть список, в котором девочки упорядочены, начиная с самой привлекательной и заканчивая самой непривлекательной (для этого мальчика). Такие списки есть у всех мальчиков, списки могут отличаться, могут совпадать, нет никаких ограничений. У девочек есть аналогичные мальчиков. Паросочетанием называется разбиение компании на n пар мальчик-девочка.

Стабильным паросочетанием называется паросочетание, в котором нет таких двух мальчиков M и m и двух девочек D и d, что M в паре с d, D в паре с m, но D предпочла бы мальчика M мальчику m, а мальчик M предпочёл бы девочке d девочку D.

Совершенно неочевидно, что стабильные паросочетания существуют. В самом деле, разобьём всех как-то на пары. Наверное, найдётся четыре человека как выше, M и D бросят своих нынешних партнёров и объединятся в пару. Что делать, объединим в пару m и d. Теперь, возможно, окажется, что d и какой-то другой мальчик m' предпочитают друг друга своим нынешним партнёрам, и снова разбиение на пары поменяется. Почему такой процесс когда-то остановится?

Вполне жизненная задача, и всем студентам ясно, что требуется доказательство, а лучше алгоритм нахождения стабильного паросочетания.

Алгоритм Гейла — Шепли (за различные обобщения которого Шепли получил Нобелевскую премию по экономике) выглядит так: пусть каждый мальчик пойдёт и предложит себя в качестве пары самой нравящейся девочке. После этого каждая девочка выберет самого лучшего из пришедших (если такие есть), а остальных прогонит. На каждом следующем шаге каждый мальчик без пары будет предлагаться следующей по его списку девочке, которая его ещё не отвергала, а каждая девочка будет выбирать лучшего среди тех, кто пришёл, и оставленного на предыдущем шаге, если таковой был; остальных пришедших (в том числе оставленного на предыдущем шаге, если пришёл кто-то получше) девочка прогоняет. Несложно показать, что алгоритм остановится за конечное число шагов, к каждой девочке хоть кто-нибудь однажды да придёт, в процессе работы алгоритма положение каждой девочки только улучшается. А если возникла нестабильная четвёрка M, m, D, d, это означает, что M уже предлагался в пару к D и был отвергнут, а значит, у D уже был кто-то лучше, но так как её положение не может ухудшиться, то и в конце будет кто-то не хуже M, а значит, это не мог быть m.

Это довольно сложное рассуждение, но при некотором умственном напряжении каждый студент его осилит. Заодно усвоит понятия доказательства и алгоритма, у коих нет понятных определений для человека «с улицы». Только в этом разделе доказательства строги и определённы. Материал нагляден, и никаких вычислений не требуется.

Может, надо давать больше доказательств? Доказательства вообще сложны для преподавания; почему это так, читатель может узнать в [18]. Даже сами математики не могут в простых с виду случаях решить, что является доказательством, а что нет — читайте об этом в блестяще написанной брошюре [7]. Даже инженеров по-настоящему не учат отличать доказательства от правдоподобных рассуждений, что уж говорить про социологов. Привлекательна, конечно, идея, что философы (и социологи за компанию) будут знать математику, станут давать строгие определения и «научно» мыслить [3, 9]. Надо только иметь в виду, сколько времени на это понадобится: математику с доказательствами худо-бедно могут освоить выпускники физматшкол, отучившиеся на математических отделениях. Проще сказать: математики не умеют учить доказательствам сами, но умеют за 5–10 лет отсеивать тех, кто так и не научился, глядя на то, как это делают уже умеющие люди. Впрочем, студентам нужно рекомендовать популярную литературу о математике, которую читали советские школьники. Имеющие математические способности или, что почти то же самое, интерес, смогут всё необходимое освоить.

2.2. Середина: визуализация, 5 лекций

Наступает черёд линейной алгебры. Мотивация для социологов такая: *собственные числа* нужны, чтобы определять *центральность* в графах (мы ищем такую меру значимости членов некоторой сети, что значимость человека пропорциональна сумме значимостей его друзей, это приводит к понятию собственного числа матрицы смежности графа). И с самого начала изучения линейной алгебры можно сказать, что матрицы нужны, чтобы хранить данные, а сингулярное разложение (SVD разложение) матрицы, которое, возможно, будет объяснено в конце курса, используется в *рекомендательных системах* (когда вам рекомендуют фильм на основе ваших оценок уже просмотренных фильмов). Опыт говорит, что про алгоритм PageRank и SVD-разложение стоит рассказывать на отдельной паре вечером для желающих, большинству это слишком сложно, но позвать стоит всех.

В этой части курса рисуется много картинок, ключевое рассуждение таково: *определитель матрицы — это объём, поэтому если линейная оболочка трёх векторов двумерна* (*ранг соответствующей матрицы равен* *двум), то определитель матрицы равен нулю и не любая линейная система с этой матрицей имеет решение.* Вокруг этого рассуждения и крутятся все изучаемые примеры, вычисления и лекции на манер вавилонской математики (в изложении Фейнмана). Некоторая логичность изложения сохраняется, из одних утверждений выводятся другие, но основной метод аргументации — примеры и картинки. Порочный круг (из А выводится Б, а из Б выводится А) должен быть обозначен, чтобы студенты понимали, что это не доказательства, а мнемонический способ запомнить материал и связать его в единую картину.

Иногда от курса математики требуют фундаментальности, см. [3, 9]. Можно ли что-то осмысленное рассказать в курсе линейной алгебры социологам, чтобы получилось в некоем смысле стройное здание строгих определений и рассуждений? Я думаю, что нет, простейший учебник — это [6], и он (или часть его) может быть прочтён социологам, но только в рамках необязательного курса для магистров.

2.3. Окончание: примеры и рецепты, 5 лекций

Теперь на сцену выходит математический анализ, где можно на примерах показать, как считать то-то и то-то, ничего не доказывая, но объяснив, что производная — это про касательную, а интеграл — про площадь. Мне не известно успешного опыта объяснения ε-δ-языка экономистам или социологам. Нужно ли рассказывать, что бывают непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции? Рассказывайте, конечно, но даже заподозрить понимание (кроме чисто текстуального: *странное бывает*) у вас вряд ли получится. Важным элементом этой части курса является анализ графиков, нахождение экстремумов функций. В качестве примера я честно вывожу формулу для линейной регрессии (уравнение прямой на плоскости, лучше всего приближающей данный набор точек). Предусмотрено индивидуальное домашнее задание: каждому студенту на неделю выдаётся список задач, в которых нужно найти ответ, причём любым способом (например, посчитать в системе статистического анализа данных R), подсчёт сложных производных и интегралов, SVD-разложения матрицы и т. д. Задание призвано показать студентам, что всё это можно посчитать за несколько секунд, если уметь пользоваться поисковиком.

2.4. Какой должна быть программа

По традиции курсы математического анализа и линейной алгебры отделены от курсов теории вероятностей и статистики. А также социологам можно читать теорию игр, ср. [25].

Интересно изучить зарубежный опыт обучения социологов математике, см., например, [4]. Некоторое время назад Университет Замбии предлагал бакалаврскую программу Sociology with Mathematics, где читались три курса по математике: сначала курс общей математики, затем курс аналитической геометрии и анализа, потом на выбор линейная алгебра или продвинутый анализ. На третьем курсе университета Висконсина читают курс [27], где социологи пишут на Matlab социологические модели.

На мой взгляд, должно быть всё вперемежку. *Первый семестр*: начала теории вероятностей проходятся вместе с комбинаторикой и теорией графов. Тут же можно рассказать о задаче поиска сообществ в графах (community detection) и о случайных графах, иначе единственным примером останутся казуистические задачи типа испытаний Бернулли.

Второй семестр: на примере каких-то жизненных задач, где используется статистика, она изучается, и тут же выясняется, что нужны производные и интеграл — тут-то они и проходятся. Идея, что нужно пройти производные и интеграл, а потом через год их начать применять, когда все их уже забыли, мне кажется странной. Нет ничего удивительного, что на *математических* специальностях матанализ проходят отдельно от статистики — оба курса огромны, и везде лекторов и студентов интересуют прежде всего доказательства фактов и стройность здания математики. Нематематиков же интересуют приложения, поэтому естественнее было бы начинать именно с них, описывая в начале семестра круг проблем, которые хочется научиться решать, а затем долгим и тернистым путём продвигаться к их решению, узнавая по пути необходимый теоретический и практический материал.

Цель курса *научиться искать максимумы функций и площади подграфиков* не вдохновит даже и чистых математиков, не говоря о социологах. Перед тем как рассказывать о частных производных, можно рассказать о равновесии по Нэшу, а потом ввести частные производные, чтобы его искать. *Третий семестр* можно устроить так: теория игр, плавно переходящая в экономику и обратно, и там же поиски максимумов и минимумов с помощью частных производных (где бы найти преподавателей, которые могут и хотят читать такой курс?).

Траектории студентов могут отличаться. Некоторым никакой больше математики не понадобится. Тем же, кто хочет заниматься анализом данных, нужна линейная алгебра.

Четвёртый семестр: линейная алгебра вместо с чем-то ещё — машинным обучением, или анализом данных, или эконометрикой.

Всё это должно тестироваться и обсуждаться как профессиональными математиками, так и социологами. Не каждый захочет этим заниматься —

на изучение книг и статей в журнале Mathematical Sociology, которые я рекомендую студентам в качестве мотивирующего и домашнего чтения, у меня ушло много часов. Какая статистика нужна социологам, я не имею ни малейшего понятия. О математике, которая нужна социологам, можно узнать из учебника математики [22] для социологов-аспирантов.

2.5. Методы представления материала

Я предпочитаю систему, где всё, что должны уметь обучаемые, содержится в задачах. На экзамене — только задачи. Спрашивание на экзамене формулировок приводит к начётничеству, а доказательства социологи даже если и способны понять, то воспроизвести — вряд ли. Определения с примерами и контрпримерами, напротив, заучить стоит — например, можно устроить по ним устный зачёт, который будут принимать ассистенты.

Понять (и запомнить) идеи доказательств способна лишь часть аудитории. Имеет смысл это требовать, но не следует отчислять тех, кто не может эти идеи связно изложить. В курсе должны быть части, которые понятны и интересны многим, но в экзамены и зачёты не попадают.

Сложных незнакомых задач социологи на экзамене не решат. С самого начала курса известно, что на экзамене даются задачи, максимально приближённые к тем, что были в течение семестра на семинарах. Тогда, во-первых, список задач известен заранее, кто не сможет его выучить — должен быть отчислен. Во-вторых, удаётся пройти гораздо более широкий класс тем. Обычно на семинарах решаются более или менее однотипные задачи, чтобы на контрольной студент мог решить похожую задачу. При моём подходе каждый тип задач достаточно проиллюстрировать одной-двумя задачами. Если кто не понял — перечитывайте конспект дома, читайте дополнительную литературу, учите к экзамену.

Лекции предлагается также разбить на задачи. Все примеры, леммы и т. д., которые можно назвать задачами, называются именно так. И на второй (из трёх) контрольных нужно решить две задачи, максимально похожие на задачи из лекций. Примеры можно посмотреть в [26].

Таким образом, достигается несколько целей.

а) Курс разбит на маленькие кусочки, несложные для переваривания. Одно дело — понять «всё» про матанализ, готовясь к контрольной, другое дело — понять решение одной конкретной задачи. Студент видит перед собой не необъятную глыбу материала, а последовательность небольших кусочков, пригодных к освоению.

б) Так как студентам заранее известно, что будет на экзамене и на второй контрольной, появляется мотивация слушать и задавать вопросы:

пока лектор вещает что-то, «размахивая руками», это слушать не обязательно, а если непонятно, то можно сильно не расстраиваться. Как только лектор сказал заветное слово «задача», нужно просыпаться и задавать вопросы — потому что именно эта задача может попасться на контрольной.

2.6. Оценка

Первая контрольная состоит из трёх задач: перемножить две матрицы, решить линейную систему из трёх уравнений, нарисовать диаграмму Эйлера — Венна (для четырёх множеств). На второй контрольной, как сказано выше, нужно решить две задачи, максимально похожие на задачи из лекций. Третья контрольная состоит снова из трёх задач: посчитать производную, посчитать интеграл, нарисовать график функции с заданными свойствами (выпуклость, монотонность, разрывы и т. д.) на разных интервалах.

Часть окончательной оценки приходит из активности студента на семинарах: нужно получить два плюсика (за семестр), рассказав у доски решения двух задач, которые выдаются на дом. Или поработать у доски с подсказками преподавателя, получив за каждую такую задачу часть плюсика.

Ещё одна часть оценки ставится за индивидуальную домашнюю работу. Необходимо выполнить письменную работу (каждый студент получает индивидуальный список задач на вычисление производных и интегралов и т. д., причём разрешается считать это на компьютере, в интернете — как угодно). Необходимо также прочитать главу из одной из книг Introduction to mathematical sociology, Matrices and society, The complexity of cooperation (все есть в списке литературы) и потом пересказать её кому-либо из ассистентов (шесть студентов второго курса, получивших хорошие оценки в прошлом году). Указанные книги хороши, потому что там социологи видят, как именно применяется в социологии то, чему их учат на занятиях по математике. На лекциях, конечно, нет времени рассказывать всё то, что хорошо написано в книге. Так решается и задача приучения студентов к чтению математических текстов на английском языке. Как показывает опыт, студенты способны усвоить из этих книг понятие марковской цепи, даже до изучения статистики или теории вероятностей.

Максимальная оценка равна $1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 1{,}2 + 4 = 10$, где первые три числа — максимальные баллы за контрольные, следующие два — максимальные баллы за домашнее задание и активность у доски, и 4 — максимальная оценка за окончательный экзамен, где на 80 минут даются восемь задач, похожие на задачи с семинаров. Оценки меньше 4 округляются вниз. Чтобы студента не отчислили, нужно получить 4:

это значит сделать домашнее задание (1,2), выйти два раза к доске (1,2) и написать хотя бы треть задач из контрольных и экзамена (2,6). Итого 5, т. е. даже с запасом. Если хочется стипендию, нужно набрать хотя бы 6 — значит, надо сделать примерно половину задач из контрольных и экзамена. Кто претендует быть отличником (часто это выпускники физматшкол или отчисленные с матмеха или политеха), тем нужно решить почти всё на контрольных и экзамене.

Можно выдать сложные теоремы в качестве бонусов, например:

— полбалла к финальной оценке за доказательство леммы Холла;
— полтора балла за доказательство того, что $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

С теми смельчаками, которые приходят, ведутся беседы, в ходе которых те лучше понимают, что такое доказательство, а лектор может оценить уровень студентов. Оказывается, студент, боясь быть отчисленным, может читать учебники по линейной алгебре для математиков (в надежде получить бонус) и много там понимать. Бонус, впрочем, получают единицы. С точки зрения обратной связи, это общение чуть-чуть компенсирует отсутствие устного экзамена.

2.7. Заключение

Составление программ мне кажется бессмысленным: плохому преподавателю они не помогут, хорошему — помешают. Однако итогом конструктивного обсуждения[1)] того, как и какой математике нужно учить социологов, могла бы быть брошюра, содержащая рекомендованный список чтения мотивированному студенту и список конкретных задач (по анализу, комбинаторике, линейной алгебре, теории вероятностей, статистике, теории игр), которые студент должен уметь решать. В точности как рекомендовал В. И. Арнольд в [1]. Компетентно-деятельностный подход при обучении математике, как мне кажется, разделяют только чиновники, только так можно объяснить повсеместное указание «уметь применять методы математики к прикладным задачам». На это, в адекватном понимании требования, необходим целый курс, например, по книге [23]. Список задач гораздо лучше списка тем — про которые не ясно, насколько глубоко их нужно проходить. Пример задачи фиксирует необходимую глубину знаний.

Как математику, мне очень важен эстетический аспект преподавания. Это означает, что задачи должны быть интересны учащимся, а их решения должны быть красивыми. В этом случае студент, решивший задачу,

[1)] Кем? Профессиональными математиками, профессиональными преподавателями и профессиональными социологами.

испытает ни с чем не сравнимое удовольствие, но и не решивший, но послушавший решение, тоже уйдёт вдохновлённым.

Невозможно обучение, если подавляющее большинство задач вызывает отвращение. Пример красивой задачи:

В тюрьме два узника, они могут общаться. Начальник тюрьмы предложил игру: *завтра они отправятся в разные комнаты, и каждому будет указан цвет, чёрный или белый. Дальше каждый из них должен назвать цвет. Если хотя бы один из них назвал цвет, указанный другому, то их отпускают, а если нет — обоих убивают. Следует ли им согласиться на игру*? *Если да, то какова их стратегия*?

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Математический тривиум // УМН. 1991. Т. 46, вып. 1(277). С. 225–232.

[2] *Белов А. Я.*, *Явич Р.* Проблемы одарённости и стадийность математического обучения // Математическое образование. 2010. Вып. (1)53. С. 2–5.

[3] *Булгаков Д. Н.* Проблемы математической подготовки студентов-психологов // Моделирование и анализ данных. 2013. № 1. С. 193–200.

[4] *Давыдов А. А.* Математическая социология: обзор зарубежного опыта // Социологические исследования. 2008. Вып. 4. С. 105–111.

[5] *Епархина О. В.* Математическая подготовка социологов: проблемы и пути решения // `https://www.ssa-rss.ru/index.php`, с. 164.

[6] *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2018.

[7] *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967.

[8] *Масюкова О. Н.*, *Мазепа Е. А.*, *Солодков С. А.* Особенности методики преподавания курса «Теория вероятностей и математическая статистика» для направления подготовки бакалавриата «Социология» // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 6: Университетское образование. 2013. Вып. 14. С. 111–116.

[9] *Розов Н. Х.* Мысли о преподавании математики гуманитариям, возникшие при чтении одного учебного пособия // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 57–66.

[10] *Рохлин В. А.* Лекция о преподавании математики нематематикам // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 21–36.

[11] *Толстова Ю. Н.* Математические методы — факторы связи естественных и социально-гуманитарных наук (социологии) // Социологические исследования. 2015. Вып. 10. С. 12–21.

[12] *Толстова Ю. Н.* Преподавание математики студентам-социологам // Социологические исследования. 2002. Вып. 2. С. 111–120.

[13] *Толстова Ю. Н.* Социология и компьютерные технологии // Социологические исследования. 2015. Вып. 8. С. 3–13.

[14] *Axelrod R.* The complexity of cooperation: agent-based models of competition and collaboration. Princeton University Press, 1997.

[15] *Bonacich P., Lu P.* Introduction to mathematical sociology. Princeton University Press, 2012.

[16] *Bradley I., Meek R. L.* Matrices and Society: Matrix Algebra and Its Applications in the Social Sciences. Princeton University Press. 2014.

[17] *Coxon A. P.* Mathematical applications in sociology: measurement and relations // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 1970. Vol. 1, iss. 2. P. 159–174.

[18] *Dreyfus T.* Why Johnny can't prove // Educational studies in mathematics. 1999. Vol. 38, iss. 1–3. P. 85–109.

[19] *Edling C. R.* Mathematics in sociology // Annual review of sociology. 2002. Vol. 28, № 1. P. 197–220.

[20] *Elton L. R. B.* Aims and objectives in the teaching of mathematics to non-mathematicians // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 1971. Vol. 2, № 1. P. 75–81.

[21] *Fararo T. J.* Reflections on mathematical sociology // Sociological Forum. 1997. Vol. 12, iss. 1. P. 73–102.

[22] *Fox J.* A mathematical primer for social statistics. Quantitave Applications in the Social Sciences. № 159. Sage, 2009.

[23] *Lave C. A., March J. G.* An introduction to models in the social sciences. Lanham: University Press of America, 1993.

[24] *Macy M. W., Willer R.* From factors to actors: computational sociology and agent-based modeling // Annual review of sociology. 2002. Vol. 28. P. 143–166.

[25] *Swedberg R.* Sociology and game theory: Contemporary and historical perspectives // Theory and Society. 2001. Vol. 30, № 3. P. 301–335.

[26] `http://mathcenter.spb.ru/nikaan/teach/socmathbook.pdf`

[27] `https://ssc.wisc.edu/~jmontgom/soc%20375%20-%20syllabus%20-%20fall%202014.pdf`

Никита Сергеевич Калинин, СПбГУ, НИУ ВШЭ (Санкт-Петербург)

`nikaanspb@gmail.com`

Нам пишут

Теорема о семи окружностях и проективные преобразования

Г. С. Минаев

От редакции. В выпуске 23 «Математического просвещения» опубликован перевод параграфа 3 статьи С. Дж. А. Ивлина, Г. Б. Мани-Каутса и Дж. А. Тиррелла «Теорема о семи окружностях и другие новые теоремы». Содержащаяся там теорема о семи окружностях (с. 52–58) доказывается с помощью инверсии и понятия радикальной оси. Ниже публикуется заметка, в которой эквивалентный факт (задача 1) и ряд родственных утверждений доказаны с помощью проективных преобразований. Автор заметки на момент её написания был учеником 10 класса школы № 57 г. Москвы. Редакция признательна С. В. Маркелову и его сыну Юрию, благодаря которым этот материал представлен к публикации.

Задача 1. Пусть даны окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6, которые касаются окружности Ω в различных точках A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 соответственно и друг друга по циклу (в некотором порядке). Известно, что из условий «A_1 лежит на дуге $(A_2A_3A_4)$» и «A_1 лежит на дуге $(A_6A_5A_4)$» либо оба верны, либо оба не верны. Докажите, что прямые (A_1A_4), (A_2A_5) и (A_3A_6) пересекаются в одной точке (рис. 1).

Ниже приведено решение данной задачи, основанное на проективных преобразованиях и требующее совсем небольшого счёта.

Комментарий. Наша формулировка задачи эквивалентна формулировке из выпуска 23 (с. 54). Действительно, условие «K лежит на дуге (XLY)» равносильно тому, что дуги (XKY) и (XLY) либо обе положительные, либо обе отрицательные. Тем самым вышеприведённая формулировка равносильна чётности количества положительных дуг среди $(A_2A_3A_4)$,

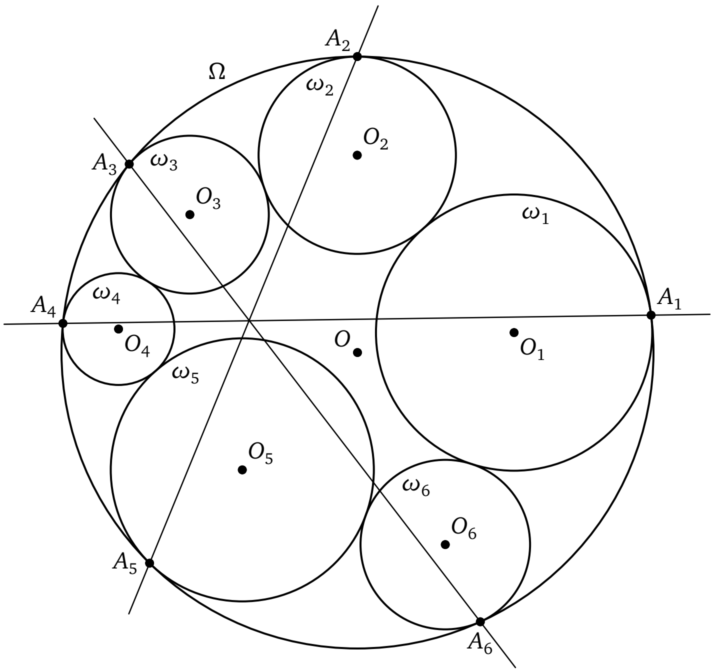


Рис. 1

$(A_2A_1A_4)$, $(A_6A_1A_4)$ и $(A_6A_5A_4)$. Заметим, что если в таком обозначении поменять две точки местами, то дуга поменяет свой «знак». Пусть теперь точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 (далее 1, 2, 3, 4, 5 и 6) — соответственно точки A, B', C, A', B и C' в выпуске 23 (мы можем так сказать, поскольку это точки касания ω с окружностями, идущими в обоих случаях подряд в цепи). Тогда в выпуске 23 мы имеем набор дуг (564), (614), (124) и (234), а в данной статье — (234), (214), (654) и (614). Чётность количеств положительных дуг в этих наборах совпадает, поскольку дуги (234) и (614) у них общие, а в каждой из пар (564) и (654), (124) и (214) одна дуга положительна, другая отрицательна.

Решение. Пусть O_i $(i=1, \ldots, 6)$ — центр окружности ω_i. Зафиксируем окружности Ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Для различных точек A_6 на Ω будем соответственно строить окружность ω_6, по ней — подходящую окружность ω_5, а по ней — A_5 (рис. 2).

Сделаем инверсию с центром в точке A_4. При этом Ω и ω_4 переходят в параллельные прямые, а ω_1, ω_6 и ω_5 — в окружности, касающиеся Ω. Можно заметить, что либо все четыре окружности ω_1, ω_4, ω_5 и ω_6 находились внутри Ω, либо вне её, поэтому сейчас все четыре обобщённые окружности лежат в одной полуплоскости относительно Ω. Также заме-

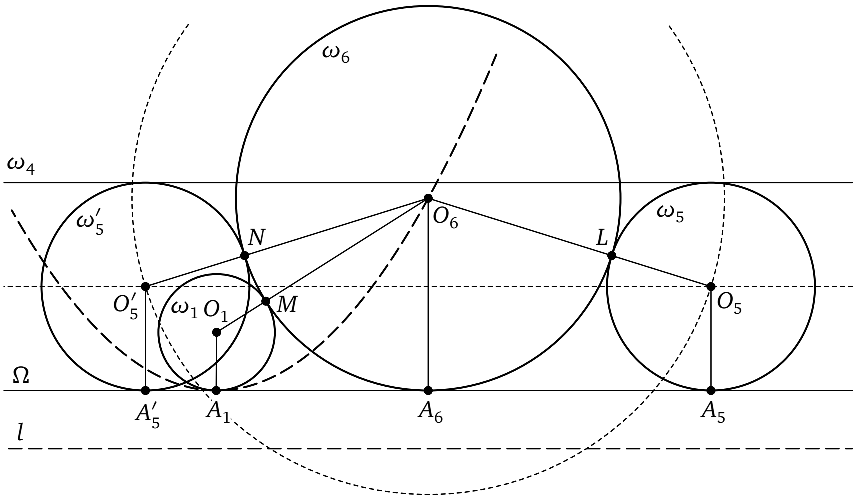


Рис. 2

тим, что ω_1 и ω_6, ω_6 и ω_5 по-прежнему касаются (скажем, в точках M и L соответственно), а окружность ω_5 заключена между параллельными прямыми Ω и ω_4 и потому длина её радиуса фиксирована.

Пусть прямая l гомотетична Ω относительно O_1 с коэффициентом 2, тогда

$$\rho(O_6;l)=|O_6A_6|+|O_1A_1|=|O_6M|+|MO_1|=|O_6O_1|.$$

Значит, O_6 лежит на параболе с фокусом O_1 и директрисой l. Эта парабола проходит через A_1, так как эта точка равноудалена от O_1 и l. Введём систему координат с началом в A_1, осью абсцисс Ω, осью ординат $[A_1O_1)$ и таким масштабом, что данная парабола имеет уравнение $y=x^2$. Пусть координаты точки A_6 равны $(x;0)$, тогда координаты точки O_6 равны $(x;x^2)$. Также можно заметить, что если r — половина расстояния между Ω и ω_4, то$\rho(O_5;O_6)=|O_6L|+|O_5L|=x^2+r$. При этом O_5 лежит на прямой, проходящей посередине между Ω и ω_4, и

$$|A_5A_6|=2\sqrt{x^2\cdot r}=2|x|\sqrt{r}.$$

Теперь вспомним, что дуга $(A_6A_5A_4)$ из условия задачи перешла при инверсии в луч $[A_6A_5)$, и, согласно условию задачи, он при любом выборе A_6 (не) проходит через A_1, т. е. разность координат A_5 и A_6 либо всегда $(2x\sqrt{r};0)$, либо всегда $(-2x\sqrt{r};0)$. Тогда координаты точки A_5 — либо всегда $(x(1+2\sqrt{r});0)$, либо всегда $(x(1-2\sqrt{r});0)$. Таким образом, преобразование $\mathscr{P}: A_6\mapsto A_5$ линейно, а потому и проективно.

Теперь рассмотрим ещё два проективных преобразования $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{R}$ — проекцию Ω на (A_1A_4) из A_2 и проекцию (A_1A_4) на Ω из A_3. Заметим, что утверждение задачи равносильно тому, что преобразование $\mathscr{R}\circ\mathscr{Q}\circ\mathscr{P}$ тождественно. Действительно, если оно тождественно, то

$$(A_2A_5)\cap(A_1A_4)=\mathscr{Q}(A_5)=\mathscr{Q}(\mathscr{P}(A_6))=\mathscr{R}^{-1}(A_6)=(A_3A_6)\cap(A_1A_4),$$

что и требуется в задаче. Если же утверждение задачи верно, то аналогично $\mathscr{Q}(\mathscr{P}(A_6))=\mathscr{R}^{-1}(A_6)$, и, так как точка A_6 произвольна, $\mathscr{R}\circ\mathscr{Q}\circ\mathscr{P}(A_6)=\mathrm{Id}(A_6)$.

Проективное преобразование определяется по трём точкам, а значит, достаточно проверить утверждение задачи для трёх точек. Первый случай прост:

$$A_6=A_2 \quad\Rightarrow\quad \omega_6=\omega_2 \quad\Rightarrow\quad \omega_5=\omega_3 \quad\Rightarrow\quad A_5=A_3 \quad\Rightarrow\quad (A_2A_5)=(A_3A_6),$$

поэтому утверждение верно. Во втором случае $A_6=A_1$, поэтому ω_6 вырождается в точку, тогда ω_5 касается Ω там же и все три прямые проходят через A_1. Третий случай аналогичен: A_6 и A_5 совпадают с A_4, поэтому все три прямые там пересекаются.

Таким образом, задача решена.

Дополнение

Здесь я приведу ещё некоторые соображения по теме задачи, оформленные в виде лемм.

Лемма 1. *При фиксированных по-прежнему Ω и ω_1 геометрическое место точек O_6 есть гипербола или эллипс с фокусами в O и O_1, причём содержит A_1* (рис. 3).

Доказательство. Нужно показать, что сумма (или разность) расстояний от O_6 и A_1 до O и O_1 одинакова. Возможны три случая: Ω и ω_1 касаются внешним образом, ω_1 лежит внутри Ω и Ω лежит внутри ω_1. Разберём второй случай (остальные аналогичны).

Пусть ω_1 и ω_6 касаются в точке X. Тогда

$$\begin{aligned}|OO_6|+|O_6O_1|&=|OO_6|+|O_6X|+|XO_1|=\\&=|OO_6|+|O_6A_6|+|A_1O_1|=|OA_6|+|A_1O_1|=|OA_1|+|A_1O_1|,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 2. *Отображение из Ω в указанную конику* (*эллипс или гиперболу*), *переводящее A_6 в O_6, является проективным преобразованием* (рис. 4).

Доказательство. Проведём в A_1 к Ω, ω_1 и данной конике общую касательную l_1, а в A_6 к Ω и ω_6 — общую касательную l_6. Рассмотрим тот же случай, что и в лемме 1. Тогда

$$|XO_6|+|O_6O|=|A_6O|=|A_1O|=|XO_1|+|O_1O|=\frac{P(\triangle OO_1O_6)}{2}$$

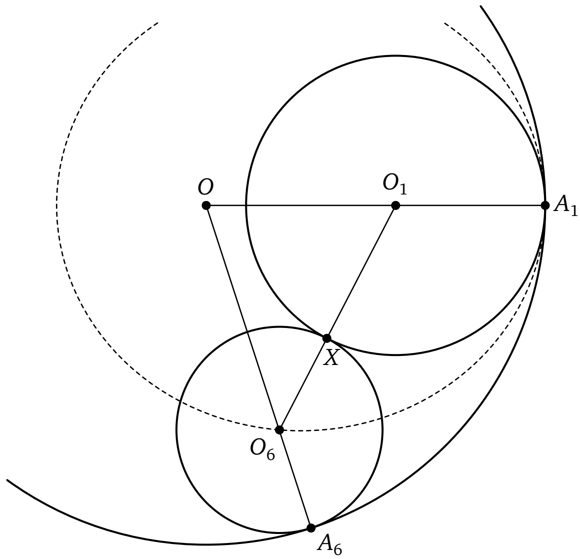


Рис. 3

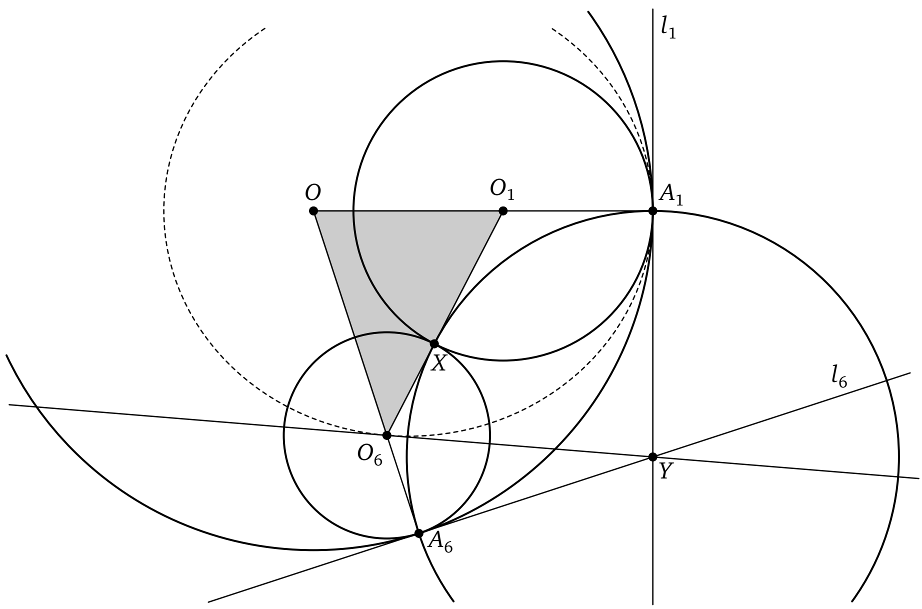


Рис. 4

и $OA_1 \perp l_1$, $OA_6 \perp l_6$. Значит, $Y := l_1 \cap l_6$ — центр вневписанной окружности треугольника OO_1O_6. При этом m — касательная к эллипсу в точке O_6 — является внешней биссектрисой треугольника OO_1O_6 по оптическому свойству эллипса, значит, $Y \in m$. В силу леммы 3 (см. ниже) преобразования, переводящие A_6 в Y и Y в O_6, проективны. Действительно, в первом случае возьмём в лемме Ω в качестве α, A_1Y в качестве ℓ, A_1 в качестве T и A_6 в качестве X'. Во втором случае α — это эллипс, X' — это O_6, ℓ и T прежние, а затем нужно взять обратное преобразование. Следовательно, преобразование, переводящее A_6 в O_6, тоже проективно. Два других случая аналогичны (только окружность может оказаться не вневписанной, а вписанной, а внешняя биссектриса — внутренней). □

Лемма 3. *Пусть прямая ℓ касается коники α в точке T, а некоторое отображение переводит T в себя, а случайную точку $X \neq T$ на α в такую точку $Y \neq T$ на ℓ, что (XY) касается α. Тогда это отображение проективно* (рис. 5).

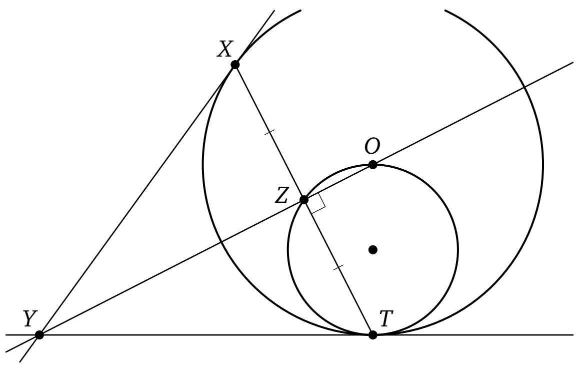


Рис. 5

Доказательство. Переведём α в окружность с центром O. Пусть Z — середина $[XT]$, тогда $(OY) \ni Z$ и $(OY) \perp (XT)$. Значит, Z лежит на окружности β, построенной на $[OT]$ как на диаметре. Поэтому Z получается из X проецированием α на β из T, а Y из Z проецированием β на ℓ из O. Оба преобразования проективны, значит, их композиция тоже. □

Теперь я покажу, что на самом деле задача о двух параллельных прямых и шести окружностях решается примерно так же.

Задача 2. Пусть даны окружности ω_1, ω_3 и ω_5, которые касаются прямой L_1 в различных точках A_1, A_3 и A_5, и ω_2, ω_4 и ω_6, которые касаются прямой L_2 в различных точках A_2, A_4 и A_6 соответственно. Кроме того, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 и ω_6 касаются друг друга по циклу в данном порядке. Докажите, что (A_1A_4), (A_2A_5) и (A_3A_6) конкурентны (рис. 6).

Решение. Как и в задаче 1, зафиксируем ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и для каждой точки $A_6 \in L_2$ определим ω_6, для неё — ω_5, а для неё — $A_5 \in L_1$. Как и в предыдущей задаче, попытаемся понять, почему преобразование $\mathscr{P} : L_2 \to L_1, A_6 \mapsto A_5$ проективно.

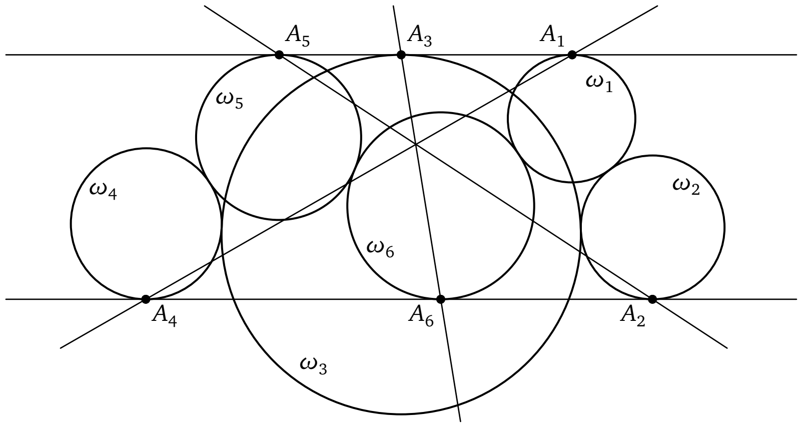


Рис. 6

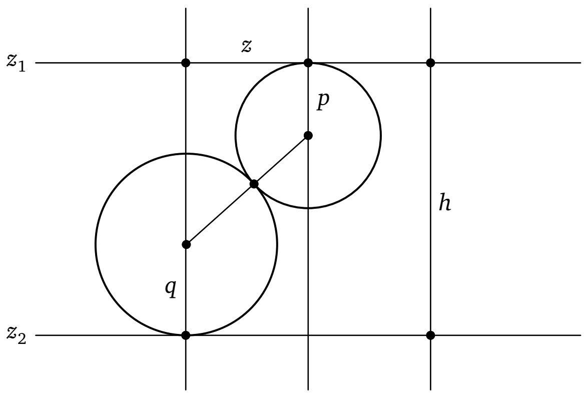


Рис. 7

Рассмотрим две касающиеся окружности, одна из которых касается L_1 и имеет радиус p, а другая касается L_2 и имеет радиус q (рис. 7). Пусть расстояние между L_1 и L_2 равно h, а расстояние между проекциями центров окружностей на L_1 равно z. Тогда по теореме Пифагора

$$z^2 = (p+q)^2 - (h-p-q)^2 = 2(p+q)h - h^2.$$

Пусть теперь расстояние между A_1 и проекцией A_4 на L_1 равно ℓ, расстояние между A_6 и проекцией A_1 на L_2 равно x, а расстояние между A_5 и проекцией A_4 на L_1 равно y (рис. 8). Пусть также радиусы окружностей ω_4, ω_5, ω_6 и ω_1 равны p, q, r и s. Тогда $x^2 = 2(r+s)h - h^2$, $y^2 = 2(p+q)h - h^2$ и $(\ell - x - y)^2 = 2(q+r)h - h^2$, значит,

$$(\ell - x - y)^2 - x^2 - y^2 = (2(q+r)h - h^2) - (2(r+s)h - h^2) - \\ - (2(p+q)h - h^2) = -2(p+s)h + h^2.$$

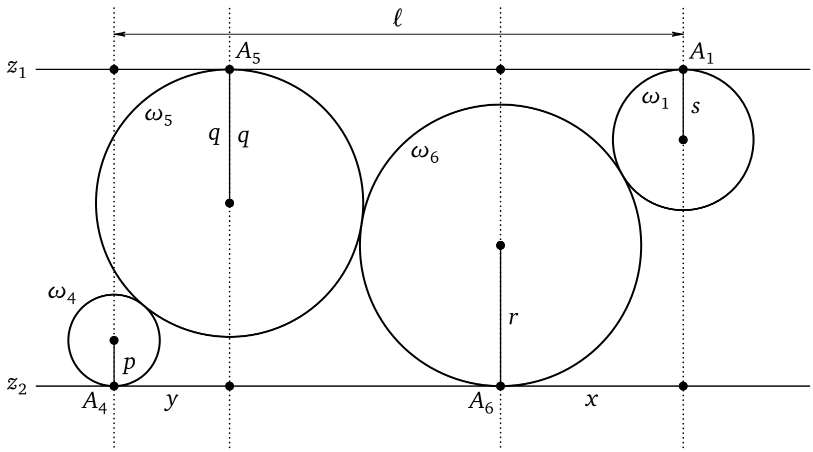


Рис. 8

Но

$$(\ell - x - y)^2 - x^2 - y^2 = \ell^2 - 2\ell(x+y) + (x+y)^2 - x^2 - y^2 =$$
$$= \ell^2 - 2\ell(x+y) + 2xy = 2(x-\ell)(y-\ell) - \ell^2,$$

поэтому $2(x-l)(y-l) = l^2 + h^2 - 2(p+s)h$. Отсюда видно, что (поскольку p, s, ℓ и h — константы) x и y зависят друг от друга дробно-линейно (и не являются константными функциями друг от друга), поэтому преобразование проективно. Заодно это показывает единственность ω_5 и A_5.

Прямая (A_1A_4) и точки A_2, A_3 фиксированы. Рассмотрим ещё два проективных преобразования $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{R}$: проекцию L_1 на (A_1A_4) из A_2 и проекцию (A_1A_4) на L_2 из A_3. Здесь снова тождественность преобразования $\mathscr{R} \circ \mathscr{Q} \circ \mathscr{P}$ равносильна утверждению задачи. Поэтому нужно найти три неподвижные точки.

Здесь работают столь же простые примеры, как и в задаче 1.

Пусть A_6 совпадает с A_2, тогда A_5 совпадает с A_3 и прямые (A_2A_5) и (A_3A_6) также совпадают. Поэтому здесь отображение будет тождественным.

Теперь пусть A_6 совпадает с A_4, тогда A_5 перейдёт в бесконечно удалённую точку направления L_1 и L_2. Теперь все три прямые проходят через A_4. Аналогично, если отправить A_6 на бесконечность, то все три прямые пройдут через A_1.

Три неподвижные точки найдены, тем самым задача решена.

Глеб Сергеевич Минаев, ученик школы № 57 (г. Москва)
minaevgleb@yandex.ru

По мотивам задачника

О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова»

А. А. Заславский

Эта заметка посвящена решению задач 23.4 и 23.4′ «Задачника МП». Начнём с задачи 23.4′ (выпуск 24, с. 180), посвящённой вписанно-описанному четырёхугольнику[1)].

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности (рис. 1).

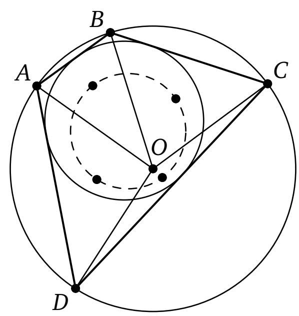


Рис. 1

Примечание. Заметим, что искомая окружность не является одной и той же для всех четырёхугольников с данными описанной и вписанной окружностями.

Интересна история этой задачи. В 2014 г. она была найдена в интернете (см. [1]) и предложена на матбой между школьниками и преподавателями в Кировской летней математической школе. Однако ни одна из команд решить её не смогла. Решение было найдено лишь спустя несколько месяцев и, несмотря на элементарную формулировку задачи, оказалось весьма сложным и использующим ряд нетривиальных идей. Прежде всего сформулируем следующее

[1)] Такие четырёхугольники также называют бицентрическими. — *Прим. ред.*

Предложение 1. *Пусть точки A и B лежат на окружности ω с центром O, а I — центр вписанной окружности треугольника OAB. Тогда описанная окружность треугольника IAB ортогональна ω.*

Доказательство. По теореме о трезубце центр K окружности IAB лежит на описанной окружности треугольника OAB. Поскольку $OA = OB$, то по симметрии углы OAK и OBK прямые, поэтому OK — диаметр этой окружности. Следовательно, $KA \perp OA$, т. е. окружности ω и IAB ортогональны (рис. 2). □

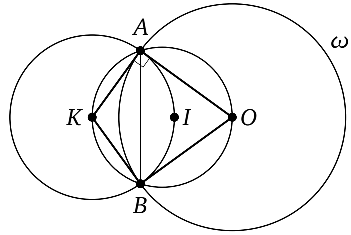


Рис. 2

Будем теперь считать окружность ω абсолютом модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. По предложению 1 окружность AIB будет в этой модели прямой. Очевидно, что $OI \perp AB$. Поэтому если перейти от модели Пуанкаре к модели Клейна с тем же абсолютом, то I станет серединой евклидова отрезка AB. Циклам геометрии Лобачевского соответствуют евклидовы окружности в модели Пуанкаре и эллипсы, касающиеся абсолюта в двух (вещественных или мнимых) точках, в модели Клейна. Поэтому утверждение задачи можно переформулировать так:

Середины сторон вписанно-описанного четырёхугольника лежат на эллипсе, касающемся описанной окружности в двух точках.

Для доказательства используем следующее

Предложение 2. *Пусть прямая ℓ пересекает окружность ω в точках P и Q (вещественных или мнимых). Для произвольной точки X обозначим степень X относительно ω через $D_\omega(X)$, а расстояние от X до ℓ через $d_\ell(X)$. Тогда геометрическим местом точек X, удовлетворяющих условию $D_\omega(X) : d_\ell^2(X) = \mathrm{const}$, будет коника, касающаяся ω в точках P и Q.*

Это предложение было доказано в [2]. В [3] Ф. Нилов независимо доказал, что ГМТ в случае $D_\omega(X) = d_l^2(X)$ является параболой. Приведём ещё одно доказательство.

Доказательство. Так как $D_\omega(X)$ и $d_l^2(X)$ являются квадратичными функциями координат X, искомое ГМТ является коникой. Ясно, что эта коника проходит через P и Q. Поскольку D_ω не меняет знак, коника не может пересекать ω. Следовательно, P и Q — точки касания. □

Верно и обратное: произвольная коника κ, касающаяся ω в P и Q, является таким ГМТ. Действительно, пусть X — произвольная точка на κ. Тогда ГМТ таких точек X', что $D_\omega(X') : d_l^2(X') = D_\omega(X) : d_l^2(X)$, будет

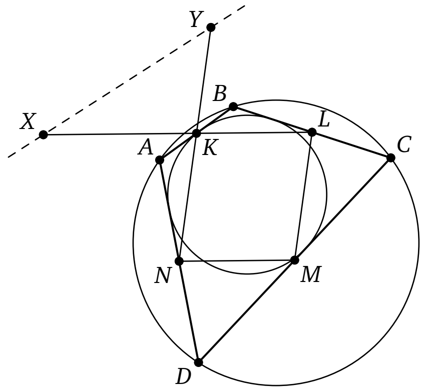


Рис. 3

коникой, касающейся ω в точках P, Q и проходящей через X. Но такая коника единственна.

Примечание. Рассматривая бесконечно удалённые точки искомого ГМТ, легко определить его эксцентриситет.

Теперь для решения задачи достаточно найти такую прямую ℓ, что расстояния от ℓ до середин K, L, M, N сторон AB, BC, CD, DA соответственно пропорциональны длинам этих сторон. Пусть AB — самая короткая сторона $ABCD$ (рис. 3). Возьмём такие точки X, Y, что $|BC|\cdot\overrightarrow{XK}=|AB|\cdot\overrightarrow{XL}$, $|AD|\cdot\overrightarrow{YK}=|AB|\cdot\overrightarrow{YN}$. Тогда $|XK|<|XL|$, $|YK|<|YN|$, т. е. X и Y лежат на продолжениях сторон параллелограмма $KLMN$ за одну и ту же вершину K. Поэтому прямая XY не пересекает параллелограмм. При этом $d_{XY}(L):|BC|=$ $=d_{XY}(K):|AB|=d_{XY}(N):|AD|$. Поскольку $AB+CD=AD+BC$, отношение $d_{XY}(M):CD$ будет таким же. Таким образом, в качестве ℓ можно взять XY.

Примечание. На самом деле мы доказали и обратное утверждение: если четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности, то $ABCD$ — описанный.

Теперь, с помощью предложения 2 («леммы Нилова») решим задачу 23.4:

Докажите, что середины сторон произвольного описанного четырёхугольника, отличного от квадрата, лежат на эллипсе, касающемся вписанной окружности в двух точках (*возможно, мнимых*, рис. 4).

Действительно, доказательство того, что середины сторон лежат на конике, полностью аналогично приведённому выше. Осталось показать, что эта коника будет эллипсом. Предположим, что для некоторого четырёхугольника эта коника будет гиперболой, и будем непрерывно деформировать его в четырёхугольник, изображённый на рис. 4. Очевидно, что в процессе деформации коника также меняется непрерывно, значит, в какой-то момент она должна стать либо параболой, либо парой параллельных прямых. Но парабола не может проходить через вершины параллелограмма, а паре параллельных прямых соответствуют дельтоиды, в которых угол между неравными сторонами однозначно определяется их отношением. Очевидно, что деформацию можно провести так, чтобы такие дельтоиды не возникали.

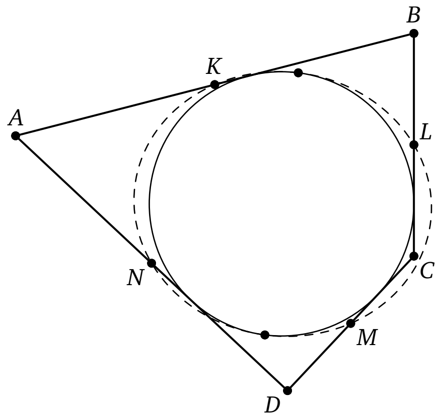


Рис. 4

Примечание. В некоторых случаях существует несколько коник, удовлетворяющих условию. Например, для ромба такими кониками будут окружность, концентричная вписанной, и ещё две. Какие-то из этих коник могут быть гиперболами, но одна из них обязательно будет эллипсом.

Автор благодарен Ф. Ивлеву, сообщившему ему задачу 23.4′.

Список литературы

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h572848

[2] *Apostol T. M., Mnatsakanian M. A.* New Descriptions of Conics via Twisted Cylinders, Focal Disks, and Directors // Amer. Math. Monthly. 2008. Vol. 115, № 9. P. 795–812.

[3] *Нилов Ф. К.* Параболические многоугольники // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 12. М.: МЦНМО, 2008. С. 195–204.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ

zaslavsky@mccme.ru

Задачник

(составитель А. Я. Канель-Белов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. *Индекс Хирша* исследователя — это максимальное такое n, что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору? (*А. Я. Канель-Белов*)

2. Известно, что числа $x_1, \ldots, x_N$ удовлетворяют неравенствам:
$$x_1 + x_2 \geqslant 1, \quad x_2 + x_3 \geqslant 2, \quad \ldots, \quad x_N + x_1 \geqslant N.$$
Найдите минимум суммы $S = x_1 + \ldots + x_N$, если а) $N = 2019$; б) $N = 2020$. (*Фольклор*)

3. а) Единичный квадрат разбит на квадратики. Может ли сумма длин сторон квадратиков, пересечённых главной диагональю, быть больше 100?

   б) Единичный квадрат разбит на квадратики в количестве не более 10^{12}. Может ли сумма длин сторон квадратиков, пересечённых главной диагональю, быть больше 100? (*А. Я. Канель-Белов*)

4. Даны такие симметрические матрицы $A_1, \ldots, A_k$ размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами, что $\det\left(\sum_{i=1}^k A_i^2\right) = 0$. Докажите, что $\det\left(\sum_{i=1}^k A_i B_i\right) = 0$ для любых матриц $B_1, \ldots, B_k$ размера $n \times n$.

   (*П. Гурбанов*)

5. В треугольнике ABC рассматриваются две изогонально сопряжённые точки P и Q. Проведём через точки P и Q прямые, перпендикулярные биссектрисе угла BAC и пересекающие прямые AB и AC в точках B_P, C_P, B_Q, C_Q соответственно. Пусть также W — середина дуги BCA описанной окружности треугольника ABC. Прямые WP и WQ вторично пересекают описанную окружность в точках P_1 и Q_1. Докажите, что точки P_1 и Q_1 лежат на описанной окружности ω трапеции $B_PB_QC_QC_P$.

   (*П. В. Бибиков*)

6. а) Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — такие вещественные числа, что при любых целых x и y по крайней мере одно из чисел $a_1x + b_1y + c_1$, $a_2x + b_2y + c_2$ целое и чётное. Докажите, что по крайней мере в одной из троек коэффициентов a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 все числа целые. Что получится, если требовать только целочисленность значений одной из линейных форм? (*С. Л. Крупецкий*)

   б) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

   $$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

   рационально. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа рациональные?

   (*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

   в) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$ — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

   $$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

целое и делится на $n!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа целые?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

7. Докажите, что для всех достаточно больших n справедливо следующее утверждение. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда количество целых чисел m, удовлетворяющих неравенству $|P(m)| < 2019$, не превосходит n. (*А. А. Колчев*)

8. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Для каждого $I \subset \{1, \ldots, n\}$ положим $s(I) = \sum_{i \in I} x_i$. Предположим, что количество значений $s(I)$ при всевозможных I не меньше $1{,}8^n$. Докажите, что количество таких подмножеств $I \subset \{1, \ldots, n\}$, что $s(I) = 2019$, меньше чем $1{,}7^n$.

   (*Ф. В. Петров*)

9. Одновременно бросается несколько игральных кубиков. Кубики могут быть несимметричны, и они не обязательно одинаковы. Докажите, что случайная величина «*остаток от общей суммы очков по модулю* 11» не распределена равномерно на числах от 0 до 11.

   (*И. В. Митрофанов*)

10. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(0; 2\pi)$, то для любого натурального n выполняется неравенство
$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \geqslant 0.$$

    (*Г. Х. Харди — В. В. Рогозинский, предложил С. Н. Асхабов*)

11. Числа $m_1, \ldots, m_k$ свободны от n-х степеней (т. е. не делятся на n-ю степень натурального числа, большего 1). Докажите, что $\sqrt[n]{m_1}, \ldots, \sqrt[n]{m_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Вначале рассмотрите случай $n = 2$.

    (*Фольклор*)

12. Докажите, что уравнение $\mathrm{tg}(x) - x = a$ не имеет решений в элементарных функциях. (*А. Я. Канель-Белов*)

Поправка к задаче 17.6

В условии задачи 17.6 (выпуск 17, с. 196) пропущено слово «ненулевые». Приводим правильное условие:

Задача 17.6. Если целые m и n взаимно просты, а числа $x^n + x^{-n}$, $x^m + x^{-m}$ — ненулевые целые, то $x + 1/x$ — тоже целое число ($x \in \mathbb{C}$).

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и *естественность* задачи. Оно важно в том числе и поэтому. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

Публикуем очередные дополнения к задачам.

В выпуске 1 (с. 193) была опубликована

Задача 1.2 (конец числа). Доказать, что существует бесконечно много таких N, что 2^N оканчивается на N.

Решение В. М. Тихомирова опубликовано в выпуске 5, с. 218. Развитием этой задачи служит (см. выпуск 22, с. 234)

Задача 1.2$'$. *Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на* 36. *Любые крайние справа* $k > 1$ *цифр образуют такое число* N_k, *что* 2^{N_k} *оканчивается на* N_k. *Докажите, что эта последовательность непериодична.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В связи с этим возникает также

Задача 1.2$''$. *Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на* 76. *Любые крайние справа* k *цифр образуют такое число* N_k, *что* N_k^2 *оканчивается на* N_k. *Докажите, что эта последовательность непериодична.* (*Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 3 (с. 232) была опубликована

Задача 3.3. а) Существует ли непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению: $f(f(f(x))) = e^{-x}$?

б) Тот же вопрос для разрывной функции.

в) И для функции, имеющей конечное число точек разрыва.

(*К. Мальков*)

Решение А. Канеля см. выпуск 5, с. 227–228. Этой задаче и её обобщениям была посвящена статья В. Викола, А. Апостолова «Функциональные корни» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, М: МЦНМО, 2005, с. 194–202).

В этой связи возникает

Задача 3.3′ (на исследование). а) *Пусть* $f\colon B^3 \to B^3$ *— гомеоморфизм замкнутого единичного шара трёхмерного пространства, обладающий следующими свойствами*:

1) $f(f(x)) = x$ *для любого* $x \in B^3$;
2) $f(x) = x$ *для любой точки* $x \in S^2$, *где* S^2 *— единичная сфера (граница* B^3*).*

Следует ли отсюда, что f *— тождественное отображение*?

б) *Пусть* $f\colon B^n \to B^n$ *— автоморфизм замкнутого единичного шара пространства* $\mathbb{R}^n$, *обладающий свойствами*:

1) $f(f(x)) = x$ *для любого* $x \in B^n$;
2) f *оставляет неподвижными все точки сферы* S^{n-1} *— границы* B^n.

Следует ли отсюда, что f *— тождественное отображение*?

в) *Пусть* $f\colon X \to X$ *— инволюция n-мерного компактного связного многообразия с краем, оставляющая неподвижными все точки края* X. *Следует ли отсюда, что* f *— тождественное отображение*?

(*К. Э. Каибханов*)

В выпуске 15 (с. 232) опубликована

Задача 15.2. Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией, отличной от константы? (*Фольклор*)

Решение Г. Юшкова см. выпуск 23, с. 229. С этой задачей перекликается

Задача 15.2′. *Пусть* p, q *и* r *— три простых числа. Укажите три функции* f_1, f_2 *и* f_3 *с минимальными периодами* $1/p, 1/q$ *и* $1/r$ *соответственно, для которых* $f_1 + f_2 = f_3$ *тождественно.* (*Р. М. Тригуб*)

В выпуске 19 (с. 258) была опубликована

Задача 19.5. Дана непрерывная поверхность без самопересечений. Известно, что на ней есть две точки, расстояние между которыми максимально для всех пар точек данной поверхности. Известно также, что любая её проекция есть круг. Докажите, что эта поверхность — сфера.

(*А. А. Шапиро*)

С ней связана

Задача 19.5′. *Докажите, что если все плоские сечения тела — круги, то это тело — шар.* (*Фольклор*)

В выпуске 23 (с. 215) опубликована

Задача 23.2. а) Монетка подбрасывается до тех пор, пока не выпадет две решки подряд. Уже сделано 9 бросков, и игра ещё не закончена. Какова вероятность, что десятый бросок окажется последним?

(*В. К. Ковальджи*)

Наш читатель, доктор физико-математических наук М. С. Тихов (ННГУ им. Н. И. Лобачевского) обратил внимание, что условие задачи может быть истолковано неоднозначно. В действительности исходы сделанных бросков не следует считать фиксированными. С другой стороны, автор задачи В. К. Ковальджи сформулировал более общий её вариант, который мы и предлагаем читателям:

Задача 23.2$'$а. *Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадут k решек подряд. Известно, что n бросков не хватило. Какова вероятность, что хватит $n+1$ броска?* (*В. К. Ковальджи*)

М. С. Тихов сообщил также, что он с соавторами опубликовал родственную задачу в статье: *Тихов М. С., Галушкин В. А., Плесков К. Г.* Система контроля технологических процессов на базе ЭВМ // Надежность и контроль качества, 1991, № 2, С. 27–30. Отличие в том, что в последней задаче допускается любое количество испытаний начиная с одного.

В выпуске 23 (с. 216) была также опубликована

Задача 23.4. Докажите, что середины сторон произвольного описанного четырёхугольника, отличного от квадрата, лежат на эллипсе, касающемся вписанной окружности в двух точках (возможно, мнимых).

(*А. А. Заславский*)

С ней связана опубликованная в выпуске 24 (с. 180)

Задача 23.4$'$. *Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности.* (*Dao Thanh Oai*)

Решения этих задач содержатся в заметке А. А. Заславского «О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и „лемме Нилова“» в настоящем выпуске. К ним близка по теме

Задача 23.4$''$. *Эллипс вписан в выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ и касается сторон AB, CD, EF в их серединах K, L, M. Докажите, что вокруг шестиугольника можно описать кривую второго порядка.* (*М. Корнев*)

В 80-х – начале 90-х годов некоторые задачи ходили в фольклоре, среди школьников и студентов. Часть этого фольклора собрал А. А. Разборов. Характерная черта такого фольклора — слабое различение доступного и недоступного. Но даже недоступное допускает интересные продвижения. Как говорил А. С. Штерн, «математик, работая над крупной проблемой, откусывает от неё какие-то куски». Так что интересны не только полные решения (не всегда доступные), но и частичные продвижения. Ниже приведены образцы этого фольклора. Было бы интересно также опубликовать задачный фольклор иных поколений.

Ф1 Докажите, что в любую выпуклую фигуру площади 1 можно вписать треугольник площади а*) $3/8$; б**) $3\sqrt{3}/4\pi$.

Ф2 Каждый следующий член последовательности $\{a_n\}$ получается из предыдущего добавлением его суммы цифр $s(a_n)$. Докажите, что число чётных членов бесконечно.

Комментарий. Упрощением этого утверждения является задача:

Докажите, что существует бесконечно много таких n, что

$$S(a_n) < \log(\log(\ldots(a_n)\ldots)) \quad (2019\ \textit{раз}).$$

Ф3 Можно ли из числа 3 многократным применением операций $n \to n!$, $n \to [\sqrt{n}]$ получить любое натуральное число?

Ф4 Дан выпуклый k-угольник. В него вписывают n-угольники, где $n < k$. Пусть $T(n)$ — наибольшая площадь таких n-угольников. Докажите, что $T(n-1) + T(n+1) \leqslant 2T(n)$.

Ф5 Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — целые числа, сумма которых равна 1. Для каждого k пусть $T(k)$ — число положительных членов в последовательности

$$B_k,\ B_k + B_{k+1},\ \ldots,\ B_k + B - k + 1 + \ldots + B_n + B_1,\ \ldots,\ B_k + \ldots + B_{k-1}.$$

Докажите, что все $T(k)$ различны.

Ф6 Грабители страны Флатландия должны вывезти из банка чемодан золота. Прямоугольный коридор, по которому им предстоит выбираться, имеет ширину 1 метр. В каком чемодане (произвольной формы, но жёстком) им удастся вывезти наибольшее количество золота?

Ф7 Докажите, что неравенство $|2^x - 3^y| < 100$ имеет только конечное число решений (более сложная задача: докажите, что сумма цифр числа 11^n стремится к бесконечности при $n \to \infty$).

Замечание. Полезно начать размышления со следующей олимпиадной задачи средней сложности:

Найти все натуральные решения неравенства $|2^x - 3^y| \leqslant 6$.

Ф8 Квадрат разбит на k^2 равных квадратиков. Про некоторую ломаную известно, что она проходит через центры всех квадратиков (ломаная может самопересекаться). Каково минимальное число звеньев у этой ломаной?

Ф9 Найдите такие n треугольников, покрывающих единичную окружность, чтобы а) сумма их площадей была наименьшей; б) площадь их объединения была наименьшей.

Ф10 Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (перестройку): взяв пару треугольников ABD и BCD с общей стороной, заменить их на треугольники ABC и ACD. Оцените наименьшее число перестроек, за которое можно перевести любое разбиение в любое.

Ф11 Может ли число, записываемое одними единицами, быть квадратом целого? А кубом?

Ф12 Среди любых $p+1$ попарно различных натуральных чисел можно выбрать два таких числа, что отношение большего из них к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$. Докажите это.

Ф13 Дан такой выпуклый многоугольник M, что длины всех его сторон и диагоналей — целые числа. Дан также квадрат K. Докажите, что есть конечный набор многоугольников, конгруэнтных M, объединение которых содержит K, причём любая точка квадрата, не лежащая на стороне одного из многоугольников, покрыта одним и тем же количеством многоугольников из этого набора.

Ф14 На какое наименьшее число секторов можно разрезать круглый пирог так, чтобы его можно было поровну поделить и между p гостями, и между q гостями?

Ф15 Сколько существует деревьев, все вершины которых — данные k точек?

Ф16 По кругу расставлены числа, сумма которых положительна. Числа X, Y, Z, стоящие подряд, можно заменить на набор $X+Y$, $-Y$, $Y+Z$. Докажите, что при помощи таких операций можно получить единственный набор неотрицательных чисел.

Ф17 Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

Комментарии к задачнику прошлых выпусков

В выпуске 24 (с. 181–184) опубликованы два решения задачи 1.10 (выпуск 1, с. 194), принадлежащие школьникам И. Украинцеву и А. Соколову, и упомянуто решение Д. Ю. Бураго, опубликованное в выпуске 4, с. 220. Отметим, что ещё два решения задачи 1.10 опубликованы Д. Ю. Бураго и В. В. Успенским в выпуске 5, с. 225–227.

Статья А. Ю. Эвнина «Задача о лягушке» (выпуск 24, с. 168–174) содержит решение задачи 23.1 (выпуск 23, с. 215; American Mathematical Contest, 2010).

В выпуске 24, с. 198–199, опубликовано решение задачи 23.7 (авторы задачи Б. И. Каневский, В. А. Сендеров), принадлежащее Л. Радзивиловскому. Фактически в этом решении доказано следующее (более общее) утверждение:

Известно, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ равны 0 или 1. Кроме того, если $P(\xi) = 0$, то $P(1/\xi) = 0$ и $\deg(P) + 1$ — простое число. Тогда P не разлагается в произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами.

На эту тему см. также: *Райков Д. А.* Об одном свойстве полиномов деления круга // Матем. сб. 1937. Т. 2(44), № 2. С. 379–382.

Решения задач из прошлых выпусков

6.1$'$ (выпуск 23, с. 217). Условие. Каждый вечер некоторые дамы дают приём (всего n дам), а остальные ходят на приём к тем дамам, которые в этот вечер принимают. Каково минимальное число вечеров, чтобы каждая дама попала к каждой? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: минимальное натуральное число m, для которого $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$.

Решение. Нам потребуется известная

Лемма Холла (теорема о свадьбах). *Предположим, что для любого множества юношей количество девушек, знакомых с кем-либо из них, не меньше, чем количество юношей в этом множестве. Тогда всех юношей можно переженить на знакомых им девушках.*

Для каждой дамы рассмотрим множество вечеров, когда она даёт приём. Легко видеть, что эти множества попарно несравнимы по включению. В самом деле, если множество вечеров приёма дамы A есть подмножество такого множества для дамы B, то дама B не смогла побывать в гостях у дамы A. И наоборот: если множества вечеров приёма несравнимы, то каждая дама может побывать у каждой. Поэтому ответ вытекает из следующего факта.

Теорема. *Максимальное количество подмножеств m-элементного множества M, попарно несравнимых по включению, равно* $\binom{m}{[m/2]}$.

Доказательство. *Пример.* Достаточно рассмотреть все подмножества мощности $[m/2]$.

Оценка. Достаточно разбить подмножества множества M на $\binom{m}{[m/2]}$ таких цепочек подмножеств, что в каждой такой цепочке любые два элемента сравнимы по включению. Это обеспечивает следующая лемма. $\square$

Лемма. а) *Пусть $k < m/2$. Тогда к каждому k-элементному подмножеству можно добавить по одному элементу так, чтобы получились попарно различные $(k+1)$-элементные подмножества.*

б) *Пусть* $k > m/2$. *Тогда из каждого* k*-элементного подмножества можно выбросить по одному элементу так, чтобы получились попарно различные* $(k-1)$*-элементные подмножества.*

Замечание. Пункты а) и б) равносильны, ибо подмножества можно заменить их дополнениями.

Доказательство п. а). Назовём k-элементные подмножества «юношами», а $(k+1)$-элементные «девушками». Будем считать, что юноша знаком с девушкой, если соответствующее k-элементное множество содержится в соответствующем $(k+1)$-элементном.

Каждому k-элементному подмножеству отвечает $m-k$ возможных $(k+1)$-элементных подмножеств, получаемых присоединением одного элемента. С другой стороны, каждому $(k+1)$-элементному подмножеству отвечает $k+1$ подмножество из k элементов, которые получаются выбрасыванием одного элемента. При $k \leqslant m/2$ выполняется неравенство $m-k \geqslant k+1$, поэтому легко проверяется выполнение условия *леммы Холла*, см. выше. □

(*А. Я. Канель-Белов*)

11.4‴ (выпуск 24, с. 178, задача на исследование). Условие. В меру стыдливый Вася может соврать не более одного раза. Он задумал натуральное число, меньшее чем n. Петя хочет найти задуманное число или поймать Васю на вранье. Петя может задавать Васе вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Каково минимальное необходимое число вопросов? А если Пете надо только определить задуманное число?

Решение (частичное). Положим $m = n-1$. Если Пете надо хотя бы поймать Васю на вранье, то ответ равен k (результат округления $\log_2(m)$ в большую сторону плюс 1). Чтобы этого достичь, Петя действует методом деления пополам, спрашивая про последовательные двоичные цифры задуманного Васей числа, а в конце задаёт контрольный вопрос о чётности суммы двоичных цифр этого числа. То, что за меньшее число вопросов нельзя добиться результата, доказывается стандартным образом. А именно, вначале имеется m возможностей для задуманного числа, каждый ответ делит возможности на две группы — одна отвечает ответу «да», вторая — «нет», одна из этих групп не меньше половины количества возможностей до соответствующего вопроса. Поэтому после $k-1$ вопросов остаётся не менее одной возможности, т. е. Васю невозможно уличить.

Пусть теперь Пете обязательно надо выяснить задуманное число. Мы сможем решить задачу для $m = 2^{2^{\ell}-\ell-l}$. Покажем, что тогда потребуется $k = 2^{\ell}-1$ вопросов.

Рассмотрим двоичный куб $[0;1]^k$. Вершина отвечает последовательности ответов, ей же отвечает (в предположении их правильности) задуманное число, или *кодовая вершина*. Любая вершина либо кодовая, либо отличается от ближайшей кодовой ровно одной координатой. Чтобы восстановить вершину при возможной ложности одного ответа, надо, чтобы две *кодовые вершины* (отвечающие отсутствию вранья) различались хотя бы *тремя координатами*. Задача свелась к такой: показать, что максимальное число m вершин k-мерного куба, попарно отличающихся хотя бы тремя координатами, при $k=2^\ell-1$ равно $2^{k-\ell}$.

Каждой кодовой вершине можно сопоставить *шар радиуса* 1, т. е. группу из $k+1$ вершины — её саму и её соседей. Эти шары не пересекаются, поэтому $m \leqslant 2^k/(k+1)=2^{k-\ell}$.

Осталось показать, что можно найти $2^{k-\ell}$ кодовых вершин. Для этого достаточно разбить все вершины k-мерного куба на шары радиуса 1 по 2^ℓ вершин.

Рассмотрим $2^\ell-1$ столбцов высоты ℓ — все возможные бинарные столбцы, но без нулевого столбца. Они составляют матрицу (a_{ij}). Рассмотрим систему уравнений над $\mathbb{Z}_2$:

$$\sum_{j=1}^{2^\ell-1} a_{ij}x_j=0, \quad i=1,\ldots,\ell.$$

Решениям этой системы будут отвечать искомые вершины. В самом деле, когда все x_j, кроме одного, равны нулю, система не выполняется, ибо каждый столбец ненулевой. Далее, если две переменные равны 1, а остальные нулю, то получается сумма двух столбцов, не равная нулю, ибо все столбцы попарно различны. Если какие-то два решения системы отличаются одной или двумя координатами, то их разность по модулю 2 тоже является решением и имеет лишь одну или две ненулевые координаты, что, как мы только что установили, невозможно.

Множество решений этой системы есть пространство размерности не меньше $2^\ell-\ell-1$, и число элементов в нём не меньше чем $2^{2^\ell-\ell-1}=2^{k-\ell}$.

Задача для случая $k=2^\ell-1$ решена. Для общего случая решение неизвестно. (*А. Я. Канель-Белов*)

11.9′ (выпуск 23, с. 209). Условие. Существует ли вписанная в решётку нечётнозвенная замкнутая ломаная, все звенья которой имеют одинаковую длину? (*А. К. Ковальджи*)

Ответ: не существует.

Решение. Рассматривая остатки по модулю 4, легко установить следующее:

Пусть $x^2 + y^2 = C$, причём числа x, y целые. Тогда

а) *если C имеет вид $4k+1$, то одно из чисел x, y нечётное, а другое чётное*;
б) *если C имеет вид $4k+2$, то оба числа x, y нечётны*;
в) *число C не может иметь вид $4k+3$*;
г) *если C имеет вид $4k$, то оба числа x, y чётны.* □

Пусть теперь C — квадрат длины звена ломаной. В случае (а) сумма координат вектора, отвечающего звену ломаной, нечётна. Поскольку число звеньев нечётно, сумма координат суммы векторов звеньев нечётна и, стало быть, не нулевая. Поэтому ломаная не может быть замкнутой.

В случае (б) все координаты векторов звеньев нашей ломаной нечётны. Сумма первых координат этих векторов нечётна и не может равняться нулю (как, впрочем, и вторых координат). Тогда и сумма векторов звеньев ломаной не нуль и ломаная не может быть замкнутой.

Случай (в), как указано выше, невозможен. И, наконец, в случае (г) ломаная с половинными длинами звеньев удовлетворяет условию задачи, так что дело завершает спуск. Задача решена.

В своё время её предложил А. К. Ковальджи на суперконкурсе ВМШ при Московском математическом обществе. (*А. Я. Канель-Белов*)

17.2. Условие. а) Найти 300-ю цифру после запятой числа

$$\sqrt[3]{0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100\ \text{штук}}}.$$

б) С помощью калькулятора найти первую цифру числа 2^{10^6}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. а) Нужно найти трёхсотую цифру после запятой в числе $\sqrt[3]{1-x}$, где $x = 10^{-100}$. Разложим в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$(1-x)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3 t^{-8/3},$$

где $t \in (1-x; 1)$.

$$(1-x)^{1/3} < 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 = 0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100\ \text{раз}}\underbrace{66\ldots66}_{100\ \text{раз}}555\ldots$$

Пишем грубую оценку на остаточный член: $\frac{5}{81}x^3t^{-8/3} < \frac{1}{10}x^3$, откуда

$$(1-x)^{1/3} > 0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100\ \text{раз}}\underbrace{66\ldots66}_{100\ \text{раз}}\underbrace{55\ldots55}_{100\ \text{раз}}4\ldots$$

Ответ: 5.

б) Прологарифмируем данное выражение по основанию 10.

$$\lg 2^{1\,000\,000} = 1\,000\,000 \lg 2 =_{(\text{с точностью калькулятора})}= 301\,029{,}9956.$$

Значит, исходное число меньше чем $10 \cdot 10^{301\,029}$. Но оно больше чем $9 \cdot 10^{301\,029}$, так как $\lg 9 < 0{,}9956$.

Ответ: 9. (*И. В. Митрофанов*)

17.4. Условие. $\mathscr{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние (т. е. $|XY| = |\mathscr{A}(X)\mathscr{A}(Y)|$ для любых точек X, Y плоскости). Доказать, что $\mathscr{A}$ — отображение плоскости на себя (т. е. каждая точка имеет прообраз при этом отображении).

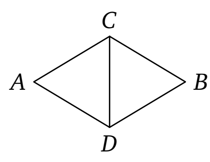
Решение. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины равностороннего треугольника со стороной 1. Образы этих трёх точек при $\mathscr{A}$ тоже являются вершинами равностороннего треугольника со стороной 1. Рассмотрим движение h, переводящее $\mathscr{A}(A_1)$ в A_1, $\mathscr{A}(A_2)$ в A_2 и $\mathscr{A}(A_3)$ в A_3. Обозначим через $\mathscr{B}$ композицию $\mathscr{A}$ и h, она тоже сохраняет расстояния. Достаточно доказать, что $\mathscr{B}$ — тождественное преобразование. Очевидно, точки A_1, A_2, A_3 под действием $\mathscr{B}$ остаются на месте. Пусть для некоторой точки X плоскости $X \neq \mathscr{B}(X)$. Тогда

$$|\mathscr{B}(X)A_1| = |\mathscr{B}(X)\mathscr{B}(A_1)| = |XA_1|,$$

а значит, A_1 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $X\mathscr{B}(X)$. Аналогично на этом серединном перпендикуляре лежат A_2 и A_3, но этого быть не может. Противоречие. (*И. Митрофанов*)

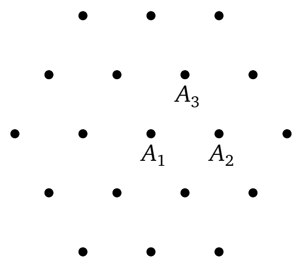
17.4′ (выпуск 23, с. 220). Условие. $\mathscr{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее единичные расстояния (если $|XY| = 1$, то $|\mathscr{A}(X)\mathscr{A}(Y)| = |XY|$). Доказать, что $\mathscr{A}$ сохраняет *все* расстояния. (*Фольклор*)

Решение. Рассмотрим такую конструкцию (отрезки имеют длину 1):

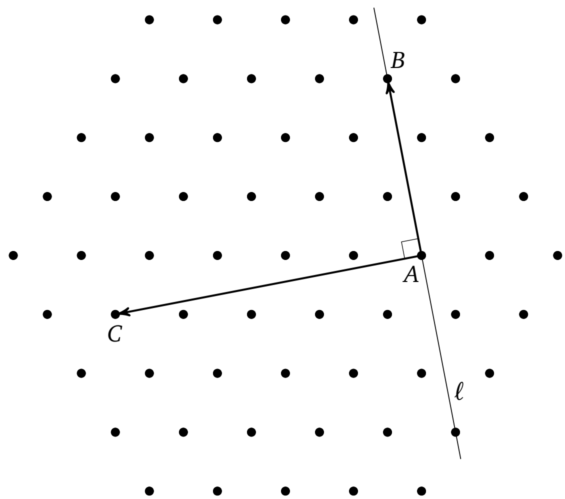


Понятно, что либо $\mathscr{A}(A) = \mathscr{A}(B)$, либо $|\mathscr{A}(A)\mathscr{A}(B)| = \sqrt{3}$. Таким образом, отображение $\mathscr{A}$ любые две точки на расстоянии $\sqrt{3}$ либо склеивает, либо оставляет на прежнем расстоянии. Рассмотрим треугольник со сторонами $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$. Так как троек точек с попарными расстояниями $(\sqrt{3}, 0, 1)$ или $(0, 0, 1)$ не существует, оба отрезка длины $\sqrt{3}$ должны сохраниться.

Итак, отображение $\mathscr{A}$ сохраняет длины 1 и $\sqrt{3}$. Можно считать, что $\mathscr{A}$ оставляет на месте вершины A_1, A_2, A_3 некоторого треугольника со сторонами $(1, 1, 1)$. Тогда последовательно получаем, что все точки показанной ниже треугольной решётки — неподвижные точки отображения $\mathscr{A}$.



Докажем, что и все остальные точки плоскости остаются на месте. Предположим, что для какой-то точки X её образ $\mathscr{A}(X) \neq X$, тогда существует прямая ℓ, проходящая через некоторые две точки A и B решётки и разделяющая $\mathscr{A}(X)$ и X.



Поворотная гомотетия с центром в точке A, углом 90° и коэффициентом $\sqrt{3}$ переводит точки решётки в точки решётки (достаточно проверить для двух). Точку B она переводит в некоторую точку C. Не умаляя общности, считаем, что X и C по одну сторону от ℓ.

Существует круг, касающийся прямой ℓ в точке A и содержащий точку X. Без ограничения общности, центр D этого круга — точка решётки и $D = A + k\overrightarrow{AC}$, где k — натуральное число, большее чем 1. Тогда $|DX| < k|AC|$. Поэтому из отрезков с длинами $|AC|$ в количестве k штук и одного отрезка длины $|DX|$ можно сложить многоугольник. А значит, точки D и X можно соединить k-звенной ломаной с длинами звеньев, равными $|AC|$:

$$|DY_1| = |Y_1Y_2| = \ldots = |Y_{k-1}X| = |AC|.$$

Заметим, что $\mathscr{A}$ сохраняет расстояния, равные любому из расстояний между точками решётки, в частности $|AC|$. При отображении $\mathscr{A}$ тогда получим по неравенству многоугольника, что

$$|D\mathscr{A}(X)| \leqslant |D\mathscr{A}(Y_1)| + |\mathscr{A}(Y_1)\mathscr{A}(Y_2)| + \ldots + |\mathscr{A}(Y_{k-1})\mathscr{A}(X)| = k|AC|.$$

Это значит, что $\mathscr{A}(X)$ лежит внутри круга с центром D и радиусом $k|AC| = |AD|$. А тогда мы получаем противоречие с тем, что X и $\mathscr{A}(X)$ находятся по разные стороны от прямой ℓ. (*И. Митрофанов*)

17.9. Условие. Имеется $2^n - 1$ коробок. В коробке первой величины[1] содержатся две коробки второй величины. В каждой из 2^{k-1} коробок k-й величины содержатся по две коробки $(k+1)$-й величины. В коробках последней n-й величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за $[n/2]+1$ ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх и орлом вниз. Можно ли улучшить эту оценку? (*А. Я. Белов*)

Решение. Будем считать, что «орёл вверх» — это 1, а «орёл вниз» — это -1. За одну операцию разрешается поменять все знаки внутри одной из коробок. Нужно доказать, что за $[n/2]+1$ операций можно сделать сумму всех 2^{n-1} чисел равной нулю.

Понятно, что при любых действиях сумма остаётся чётной. Пусть общая сумма в какой-то момент времени равна S, а сумма в какой-то коробке равна S_1. Если $|S_1| \geqslant |S|$ и $S_1 \cdot S \geqslant 0$, то назовём эту коробку *значимой*. Например, единственная коробка первой величины значима всегда. Коробка n-й величины значима только если общая сумма монет равна 0.

Лемма. *Пусть коробка A — значимая, A содержит коробки следующего размера B_1 и B_2, B_1 содержит C_1 и C_2, B_2 содержит C_3 и C_4. Тогда за не более чем одно действие можно сделать так, чтобы одна из коробок C_i стала значимой.*

Доказательство. Не умаляя общности, считаем общую сумму S положительной. Обозначим через c_i сумму чисел в коробке C_i. Рассмотрим возможные варианты.

1. Пусть все c_i неотрицательны, $0 < S \leqslant c_1 + c_2 + c_3 + c_4$. Не умаляя общности считаем, что c_1 — наибольшее из c_i (или одно из наибольших, если

[1] Она единственна.

их больше одного), а $c_3 \geqslant c_4$. Если $S < c_1$, то коробка C_1 уже значимая. Далее рассмотрим подслучаи:

(а) Пусть $c_2 \geqslant c_3 + c_4$. Тогда поменяем знаки в C_2. Общая сумма станет равна $S - 2c_2$. С одной стороны, $S - 2c_2 \leqslant c_1 + (c_3 + c_4 - c_2) \leqslant c_1$. С другой стороны, $S - 2c_2 \geqslant -c_2 + (c_1 - c_2) \geqslant -c_2$. А значит, либо коробка C_1, либо коробка C_2 станет значимой (какая из них — зависит от знака получившейся суммы).

(б) Пусть $c_2 < c_3 + c_4$ и $S \geqslant c_1 + c_3 + c_4$. Поменяем знаки в B_2, сумма станет равна $S - 2(c_3 + c_4)$. С одной стороны, получившаяся сумма не превосходит $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - 2(c_3 + c_4) < c_1$, а с другой стороны, она не меньше чем $c_1 - (c_3 + c_4) \geqslant -c_3$. Значит, либо C_1, либо C_3 станет значимой коробкой.

(в) Пусть $c_2 < c_3 + c_4$ и $c_1 \leqslant S < c_1 + c_3 + c_4$. Поменяем знаки в C_3, полученная сумма $S - 2c_3$ будет меньше чем c_1, но больше чем $-c_3$, опять одна из коробок C_1, C_3 будет значимой.

2. Пусть ровно одно из c_i отрицательное, например c_4. Тогда $0 < S < c_1 + c_2 + c_3$. Пусть $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3$. Если $S < c_1$, то коробка C_1 уже значимая. В противном случае перевернём C_2, новая сумма $S - 2c_2$ будет не больше чем c_1 и не меньше чем $-c_2$, одна из соответствующих коробок — значимая. Случаи, когда c_1, c_2, c_3 упорядочены иначе, рассматриваются аналогично.
3. Пусть $0 \leqslant c_i \leqslant c_j$, а другие два числа отрицательные. Тогда $0 < S < c_i + c_j$. Если $S < c_i$, то можно ничего не менять, в противном случае поменяем знаки в C_i и придём к случаю 4.
4. Если только одно из чисел c_i неотрицательное, то соответствующая коробка уже значимая.

   Лемма доказана. □

Если $n = 2a$, то, применяя много раз лемму, получим после первого хода значимую коробку 3-го размера, после второго хода 5-го размера и так далее, после $a - 1$ ходов получим значимую коробку $(n - 1)$-го размера. После этого сумма всех чисел будет или 0, или ± 2, и за ещё не более чем один ход придём к нужному результату.

Аналогично если $n = 2a + 1$, то не более чем за a ходов получаем значимую коробку уровня n, т. е. нулевую сумму всех чисел.

Так мы доказали оценку даже чуть лучше чем требовалось, а именно $[n/2]$.

Укажем теперь для $n = 2a + 2$ конструкцию, которую нельзя привести к нужному виду менее чем за $a + 1$ операцию. Каждой из 2^{n-1} самых маленьких коробок соответствует двоичный номер, который записывается как последовательность нулей и единиц $b_1 b_2 \ldots b_{2a} b_{2a+1}$. Если нет таких i, что $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$, то напишем в коробке $+1$, иначе напишем $+1$ или -1 в зависимости от значения последнего бита b_{2a+1}.

Какая может при такой расстановке быть сумма чисел в коробке k-го размера? Коробке k-го размера K соответствует бинарная последовательность $b(K)$ длины $k-1$. Если $k = 2a+1$, то сумма чисел в коробке либо 2, либо 0 — это зависит от того, встречается ли в последовательности кусок $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$. Иначе сумма чисел в K — это удвоенное число коробок $(2a+1)$-го размера с суммой 2, содержащихся в K. Очевидно, число таких коробок равно числу способов дополнить $b(K)$ до бинарной последовательности $b_1 \ldots b_{2a}$ так, чтобы ни для какого i не было $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$. Если такая пара подряд идущих единиц уже встречается в $b(K)$, то число способов, очевидно, равно 0. Пусть k нечётное, тогда нужно заполнить битами $2a-k+1$ позиций, которые разбиваются на пары, и каждую пару можно заполнить тремя способами (00, 01 и 10). В итоге общее число способов $3^{(2a-k+1)/2}$ и сумма чисел в коробке равна $2 \cdot 3^{(2a-k+1)/2}$. Разбор случая чётного размера коробки аналогичен и оставляется читателю, приведём готовый ответ.

Сумма чисел в коробке $(2a-2k+1)$-го размера может быть равна либо 0, либо $2 \cdot 3^k$. Сумма чисел в коробке $(2a-2k)$-го размера равна либо 0, либо $2 \cdot 3^k$, либо $4 \cdot 3^k$. Сумма всех чисел равна $2 \cdot 3^a$.

Заметим, что от порядка операций конечный результат не зависит, так как для каждой монетки важна лишь чётность числа переворачиваний. Поэтому можно считать, что операции выполняются вначале с крупными коробками, а потом с маленькими. Операции с более крупными коробками не меняют абсолютные величины сумм чисел в меньших коробках, а меняют только их знаки. Поэтому можно считать, что при каждой операции сумма чисел меняется на число вида $4 \cdot 3^k$, $8 \cdot c^k$, 2 или 0. Если сумма изначально была $2 \cdot 3^a$ и стала 0 за m операций, то получаем, что

$$3^a = \pm t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_m,$$

где каждое из t_i равно 1, 0, $2 \cdot 3^k$ или $4 \cdot 3^k$ для некоторого целого неотрицательного k. Числа такого вида будем называть *базовыми*.

Покажем, что $m \geqslant a+1$, индукцией по a. База $a = 1$ очевидна. Переход индукции: $3^a = \pm t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_m$; слева нечётное число, значит, среди $\{t_i\}$ должна быть хотя бы одна единица.

В сумме $\pm t_1 \pm t_2 \pm \ldots \pm t_m$ выделим слагаемые, равные ± 1, ± 2 и ± 4. Пусть это $s > 1$ чисел и их сумма равна $3c$. Покажем, что число c можно представить в виде суммы не более чем $s-1$ базовых чисел. В самом деле, несложно показать, что набор из целых чисел с суммой, делящейся на 3, можно разбить на группы с суммой, делящейся на 3, так, чтобы в каждой группе было не более чем 3 числа. В данном случае группа содержит не менее двух чисел, так как слагаемые не делятся на 3. А далее несложный перебор: в каждой из групп сумма может быть от -12 до 12. Если сумма была ± 9, то было использовано минимум 3 числа, но $\pm 3 = \pm 1 + \pm 2$, т. е. использовано лишь 2 базовых числа. В противном случае сумма чисел в группе — утроенное базовое число. При вычислении c нужно группу (содержащую более одного слагаемого) заменить на это число.

Все оставшиеся t_i делятся на 3, и при делении на 3 снова получаем базовые числа. Значит, число 3^{a-1} представимо в виде суммы $m' < m$ базовых числа. По предположению индукции $m' \geqslant a$, а значит, $m \geqslant a + 1$.

(*И. Митрофанов*)

24.1. Условие. Дан единичный вектор. Разрешается выбрать прямую и заменить вектор его проекцией на эту прямую. С новым вектором можно провести ту же процедуру, и т. д. Прямая каждый раз выбирается заново. Можно ли таким образом развернуть вектор на 180°, потеряв при этом не более 1 % от его длины? (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что если при достаточно большом n осуществить последовательно n проекций с углом π/n, то длина получившегося вектора будет сколь угодно близка к длине исходного вектора. При проекции вектора длины L на прямую, образующую угол α с его направлением, получается вектор длины $L\cos\alpha$. Поэтому достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\cos\frac{\pi}{n}\Big)^n = 1, \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} n\ln\Big(\cos\frac{\pi}{n}\Big) = 0.$$

Но $\cos x - 1 \sim x^2/2$, $\ln(1+t) \sim t$ при малых x, t. Поэтому

$$n\ln\Big(\cos\frac{\pi}{n}\Big) \sim -\frac{n(\pi/n)^2}{2} = -\frac{\pi^2}{2n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Задача решена.

Замечание. Это полезный наглядный факт. В частности, данная идея используется в мореплавании. Направление ветра проецируется на нормаль к парусу. Получившийся вектор силы проецируется на направление киля. Поэтому корабль может идти даже под малым углом к направлению против ветра. Выбирая этот угол поочерёдно по обе стороны от направления ветра (делая галсы), корабль может идти и против ветра.

(*А. Я. Канель-Белов*)

24.6. Условие. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$, $k < n$, а) с комплексными, б) с действительными коэффициентами.

Возможно ли равенство многочленов:

$$P_1^2 + \ldots + P_k^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2? \qquad (\textit{Фольклор})$$

а) Ответ: возможно.

Решение. Воспользуемся равенством

$$P_1^2 + P_2^2 = (P_1 + iP_2)(P_1 - iP_2).$$

Подберём P_1, P_2 так, что

$$P_1 + iP_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \quad \text{и} \quad P_1 - iP_2 = 1,$$

т. е. положим

$$P_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1}{2}, \quad P_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1}{2i}.$$

При желании можно добавить $P_3 = \ldots = 0$.

б) Ответ: невозможно.

Решение. Прежде всего отметим, что многочлены P_i должны иметь первую степень. Действительно, если степень P_i равна нулю и $P_i \not\equiv 0$, то P_i — ненулевая константа и сумма $\sum P_i^2$ не обращается в нуль, в то время как $\sum x_i^2$ в нуль обращается. Если же $\deg(P_i) > 1$ при некотором i, то $\sum P_i^2$ есть многочлен степени > 2 (в вещественном случае коэффициенты при старших членах квадратов всегда положительны) и потому

$$\sum P_i^2 \neq \sum x_i^2.$$

Итак, степени всех многочленов P_i равны 1 и, поскольку

$$\sum_{i=1}^{k} P_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

свободные члены всех P_i нулевые (иначе при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ указанная сумма в нуль не обращается).

Множество нулей суммы

$$\sum_{i=1}^{k} P_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

совпадает с множеством M нулей системы однородных уравнений

$$P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Данное множество есть линейное пространство размерности не меньше $n - k$ и при $n > k$ содержит более одной точки, в отличие от множества нулей квадратичной формы $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Замечание. Есть такая олимпиадная задача: если многочлен от одной переменной всюду неотрицателен, то он есть сумма квадратов двух многочленов. В то же время всюду положительный многочлен от нескольких переменных может не быть суммой квадратов многочленов от нескольких переменных (построение контрпримера — поучительная задача). Тем не менее, он является суммой квадратов *рациональных функций* (что составляет содержание *семнадцатой проблемы Гильберта*). См. также задачу 1.6 (выпуск 1, с. 194) и её решение в выпуске 5, с. 221–223, а также решение п. (б) в выпуске 10, с. 274. (*А. Я. Канель-Белов*)

24.8. Условие. а) Какое максимальное число точек можно отметить в единичном трёхмерном кубе так, чтобы все попарные расстояния были строго больше 1? Больше или равны 1? б) Аналогичные вопросы для четырёхмерного куба. (*Фольклор*)

Ответ: а) Соответственно 7 и 8 точек. б) Соответственно 15 и 17 точек.

Решение. *Примеры.* а) Ясно, что если отметить 8 вершин куба, то все попарные расстояния будут не меньше 1. Покажем, как отметить 7 точек на расстояниях больше 1. Вначале отмечаем 8 вершин куба, затем выбираем одну вершину P и снимаем с неё метку. Вершины куба разбиваются на 4 слоя — точка P, её соседи, соседи её соседей и противоположная вершина Q. Если точки второго слоя сдвинуть по рёбрам на 10^{-2} в сторону точки P, точки третьего слоя сдвинуть на 10^{-4} в сторону ближайших точек второго слоя, а точку Q сдвинуть на 10^{-6} в сторону одной из вершин третьего слоя, то получится искомый пример.

б) Расстановка 15 точек с попарными расстояниями больше 1 строится аналогично, а если расположить 17 точек в вершинах и центре четырёхмерного куба, то попарные расстояния будут не меньше 1.

Оценки. а) Покажем, что в единичном трёхмерном кубе нельзя расположить больше 8 точек так, чтобы попарные расстояния были не меньше 1. Разобьём куб на 8 равных кубиков. Тогда в каждом будет не более одной отмеченной точки, ибо диагональ кубика равна $\sqrt{3}/2 < 1$ и две точки в него не поместятся.

Пусть в кубе отмечено 8 точек с попарными расстояниями не меньше 1. Рассмотрим отмеченные точки A, B в соседних кубиках. Эти кубики примыкают к ребру E, которое разделяет две грани куба, содержащие грани этих кубиков. Будем считать ребро E вертикальным. Пусть нижняя грань нижнего из кубиков лежит в плоскости XOY. Тогда проекция $|A''B''|$ отрезка AB на плоскость XOY не больше $\sqrt{2}/2$ — диагонали грани кубика. Значит, проекция отрезка AB на ребро E не меньше $\sqrt{2}/2$, ибо

$1 = |AB|^2 = \sqrt{|A'B'|^2 + |A''B''|^2}$. Следовательно, расстояния от точек A, B до ближайших граней не больше $a_1 = 1 - \sqrt{2}/2$. Рассматривая всевозможные пары соседних кубиков, получим, что отмеченные точки живут в кубиках с ребром a_1 при вершинах исходного куба.

Рассматривая эти кубики и рассуждая аналогично, получим, что

$$|A''B''| \leqslant \sqrt{2}a_1 \quad \text{и} \quad |A'B'| \geqslant \sqrt{1 - 2a_1^2}.$$

Из этого следует, что наши точки живут в кубиках с ребром

$$a_2 = 1 - \sqrt{1 - 2a_1^2}$$

при вершинах исходного куба, и т. д. Иными словами, зададим последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ рекуррентно. Положим

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{i+1} = 1 - \sqrt{1 - 2a_i^2} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

По индукции получаем, что при всех i все отмеченные точки живут в кубиках с ребром a_i при вершинах исходного куба.

При этом a_i убывают и положительны, поэтому они стремятся к некоторому пределу a, для которого

$$a = 1 - \sqrt{1 - 2a^2}.$$

Этому равенству удовлетворяют 0 и $2/3$, но $2/3 > 1/2$, поэтому предел a_i равен нулю и все отмеченные точки лежат в вершинах большого куба — пересечениях семейств кубиков. Следовательно, расположить в кубе 8 точек с попарными расстояниями строго больше 1 нельзя.

б) Разобьём единичный четырёхмерный куб на 16 кубиков с ребром $1/2$. Пусть в кубе отмечено более 16 точек с попарными расстояниями не меньше 1. Если отмеченная точка принадлежит $n > 1$ кубикам, то дадим ей вес $1/n$ в каждом из них. Сумма всех весов равна количеству отмеченных точек. Тогда некоторому кубику отвечает сумма весов больше 1. Значит, в кубике отмечено более одной точки, но это могут быть лишь две противоположные вершины. Если их веса меньше 1, то они не больше $1/2$ и их сумма не больше 1. Следовательно, вес хотя бы одной из вершин равен 1. Но тогда она является вершиной единичного куба, а противоположная вершина кубика — центром куба. В других кубиках можно будет отметить лишь вершины, противоположные центру куба, и всего отмеченных точек будет 17.

Теперь предположим, что в единичном кубе отмечены 16 точек на попарных расстояниях больше 1. Тогда в каждом из подкубиков может быть не более одной отмеченной точки. Если точка принадлежит границе двух кубиков, то ни в одном из них не может быть другой отмеченной точки, поэтому количество отмеченных точек будет меньше 16. Значит, можно считать, что в каждом кубике выбрано по точке и эта точка не попадает в другие кубики. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε-окрестности общих границ кубиков нет отмеченных точек, т. е. точки отмечены в кубиках с ребром $1/2-\varepsilon$, примыкающих к вершинам большого куба.

Теперь мы готовы рассуждать, как в п. а). Положим

$$a_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad a_2 = 1 - \sqrt{1-3a_1^2}, \quad \ldots, \quad a_{i+1} = 1 - \sqrt{1-3a_i^2}, \quad \ldots$$

Тогда $a_i \to 0$ при $i \to \infty$. Рассуждая как в пункте а), получим, что каждая отмеченная точка совпадает с вершиной куба. Но тогда некоторые из их попарных расстояний равны 1 — противоречие.

Для плоскости ситуация аналогична трёхмерному случаю, а для размерностей больше 4 — например, пятимерья — ситуация неизвестна.

(*А. Я. Канель-Белов*)

24.10. Условие. В k-мерном пространстве отмечены n точек. Разрешается взять прямую, на которой уже лежит не менее t отмеченных точек, отметить любую другую точку на этой прямой и далее повторять эту процедуру. Оказалось, что любую точку пространства можно отметить. При каком наименьшем числе n изначально отмеченных точек это могло случиться? (Число t изначально фиксировано, ответ зависит от t.)

(*И. В. Митрофанов, Ф. В. Петров*)

Ответ: при $n = C_{k+t-1}^k$.

Решение. Покажем индукцией по k, что если взять $k+t-1$ гиперплоскостей общего положения и отметить все C_{k+t-1}^k точек их пересечения по k, то любая точка пространства сможет быть отмечена. База $k=1$ очевидна: это t точек на прямой. Проведём переход к $k>1$ от $k-1$. Рассмотрим в k-мерном пространстве любую из проведённых гиперплоскостей. Тогда остальные гиперплоскости высекают на ней $k+t-2$ гиперплоскостей общего положения размерности $k-2$, и все их точки пересечения по $k-1$ отмечены. По предположению индукции можно отметить каждую из точек этих гиперплоскостей. Проведём любую прямую общего положения относительно гиперплоскостей. Они высекают на прямой $k+t-1$ точек, которые можно отметить, а значит, можно отметить любую точку на этой прямой. Поэтому можно отметить и любую точку всего пространства.

Допустим, что условие задачи выполнено при некотором $n < C_{k+t-1}^k$. Пространство многочленов от k переменных степени не выше $t-1$ имеет размерность C_{k+t-1}^k (доказывается индукцией по $k+t$). Значит, найдётся такой ненулевой многочлен P степени не выше $t-1$, который равен нулю в этих n точках (его коэффициенты определяются из системы однородных линейных уравнений, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных). Если P равен нулю в t точках некоторой прямой, то он равен нулю и во всех точках этой прямой (линейным преобразованием переменных можно превратить P в многочлен степени меньше t от одной переменной, меняющейся вдоль этой прямой). Значит, отмечены могут быть лишь нули многочлена P. Противоречие. (*И. В. Митрофанов*)

Опечатки, замеченные в выпуске 15

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
235	5 снизу	14.7	14.8

Опечатки, замеченные в выпуске 17

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
196	1 снизу	целые	ненулевые целые
197	15 сверху	$2^n - 1$	2^{n-1}

Опечатки, замеченные в выпуске 24

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
177	15 снизу	коэфициентами	коэффициентами
197	15 сверху	$2^n - 1$	2^{n-1}

Информация для авторов

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным областям математики, а также по проблемам её истории и преподавания, интересные и доступные указанной аудитории.

2. Сборник «Математическое просвещение» не публикует существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

3. Материалы принимаются по электронной почте на адрес `matpros@yandex.ru` в виде двух файлов (`pdf` и `tex`) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в `Word`.

4. Просим обратить внимание, что материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

5. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

6. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

7. В конце статьи необходимо указать для каждого из авторов:
— фамилию, имя, а также отчество (если есть) полностью,
— место работы/обучения,
— электронный адрес для публикации.

8. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение (хотя бы набросок).

9. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый, просим обращаться по адресу `matpros@yandex.ru`

Учебно-методическое издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 09.12.2019 г. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 12. Тираж 800 экз. Заказ №