

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 27

Москва
Издательство МЦНМО
2021

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Ильяшенко Ю. С.	<u>Розов Н. Х.</u>
Вялый М. Н.	Канель-Белов А. Я.	Семёнов А. Л.
Гайфуллин А. А.	Константинов Н. Н.	Сосинский А. Б.
Гальперин Г. А.	Митрофанов И. В.	Тихомиров В. М.
Гусейн-Заде С. М.	Полянский А. А.	Устинов А. В.
Дориченко С. А.	Прасолов В. В.	Френкин Б. Р.
Заславский А. А.	Райгородский А. М.	Яценко И. В.

Главный редактор А. М. Райгородский
Отв. секретарь Б. Р. Френкин

Адрес редакции:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: matpros@yandex.ru

WEB PAGE: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Математическое просвещение. Третья серия, вып. 27. —
М34 М.: МЦНМО, 2021. — 272 с.
ISBN 978-5-4439-1615-6

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1615-6

© МЦНМО, 2021.

Содержание

Математический мир

Интервью с академиком А. С. Холево 5

В. М. Тихомиров

Николай Христович Розов (20.02.1938–02.11.2020) 9

С. Е. Рукшин

*Памяти Виктора Абрамовича Залгаллера
(к столетию со дня рождения)* 12

Памяти Эрнеста Борисовича Винберга

Э. Б. Винберг

К понятию действительного числа 24

Э. Б. Винберг

О неевклидовой геометрии 29

Э. Б. Винберг

В школе № 2. Геометрия (X класс) 41

Н. В. Богачёв

Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны . . 57

И. Х. Сабитов

Хорошо ли мы знаем векторное произведение? 80

Современная комбинаторика

А. М. Райгородский

Математика раскрасок 99

А. Б. Скопенков

Основы теории узлов и зацеплений для пользователя 128

В. И. Ретинский, А. Д. Рябичев, А. Б. Скопенков

Мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга . . . 166

По мотивам задачника

Д. Й. Каминский, А. Я. Канель-Белов, М. Тайхер

Задача о 3-секущих 171

А. Я. Канель-Белов

О задачах на линейное варьирование 175

А. А. Заславский, А. И. Сгибнев

Одна задача о треугольниках, вписанных в конику 182

И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов

Об инвариантах равноставленности 186

С. Б. Гашков

Разрезы и распилы 193

Задачник (составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач 233

Дополнение к задачнику 237

Решения задач из прошлых выпусков 249

Математический мир

Александр Семёнович Холево — выдающийся специалист по квантовой теории информации. В 2019 году он избран действительным членом Российской академии наук. По просьбе редакции «Математического просвещения» Александр Семёнович рассказывает о своём пути в науку, профессиональных интересах, взглядах на проблемы науки и образования.



Интервью с академиком А. С. Холево

Я благодарен редакции «Математического просвещения» за предоставленную мне возможность и хотел бы воспользоваться ею в первую очередь для того, чтобы отдать должное тем замечательным людям (хотя бы некоторым из них), которые поддержали меня на пути в Науку.

Какую школу Вы окончили? Имела ли она физико-математический уклон?

В 1959 г., обучаясь в десятом классе общеобразовательной школы, я поступил, выдержав довольно серьёзный конкурс, в только что организованную вечернюю физико-математическую школу при МФТИ. Мне несказанно повезло: математику у нас вёл Анатолий Павлович Савин, замечательный педагог, энтузиаст математики и математического просвещения, впоследствии со-организатор олимпиад и знаменитого журнала «Квант». Наиболее полезными учебными пособиями оказались, помимо

популярных задачников Моденова и Шклярского — Ченцова — Яглома, до сих пор сохранившиеся у меня физтеховские брошюры с задачами приёмных испытаний 1950-х годов. Чего стоила хотя бы такая формулировка: «В ящик вложили k ящиков. В каждый из этих ящиков либо вложили k новых ящиков, либо не вложили ни одного, и так далее. Найти число пустых ящиков, если наполненных оказалось m ». Ничего подобного в обычной школе не проходили. На занятия в вечернюю школу Физтеха я ходил как на праздник и окончил курс весьма успешно.

Какой вуз и факультет Вы окончили? Чем определялся Ваш выбор? С какой темы началась Ваша научная деятельность?

Всё сказанное определило моё поступление «на Физтех», которое прошло без особых затруднений. На первом курсе везение продолжилось: семинары по математическим дисциплинам у нас вёл тот же А. П. Савин! Базовое математическое образование на первых трёх курсах МФТИ было на высоте. Матанализ преподавали С. М. Никольский и Л. Д. Кудрявцев, линейную алгебру — А. А. Абрамов и Д. В. Беклемишев, ТФКП — В. Б. Лидский, теормех — Ф. Р. Гантмахер. Семинары по теормеху вёл Ф. Л. Черноусько, тогда аспирант Физтеха. Математика захватила мой ум, и уже на втором курсе я просил совета у Л. Д. Кудрявцева — что делать дальше: переходить на мехмат или продолжать обучение по индивидуальному плану в МФТИ? И тут оказалось, что как раз в это время на Физтехе была организована специальность «Прикладная математика и вычислительная техника». И я перешёл на эту специальность, в группу 38 (из которой впоследствии вырос Факультет управления и прикладной математики), с базовым институтом ВЦ АН СССР. Рядом с Вычислительным центром находился Математический институт им. В. А. Стеклова, и наряду со специалистами ВЦ нам читали курсы и профессора Стекловки. В частности, меня увлёк курс функционального анализа, который читал для нас М. А. Наймарк. Я стал ходить на его семинар по операторным алгебрам, М. А. дал задачу из теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой, которой он тогда занимался. Мне удалось её решить, и так появилась моя первая печатная работа.

Как дальше развивались Ваши исследования? Приходилось ли Вам менять их тематику, заниматься прикладными вопросами?

Я интересовался и другими вопросами: хотелось быть ближе к приложениям, да и вся направленность учёбы в Физтехе подталкивала в эту сторону. Меня увлекли вероятность и теория случайных процессов, я стал посещать семинары по этим дисциплинам в ИППИ и на мехмате, а также

лекции Ю. А. Розанова в МФТИ, и в конце концов стал его аспирантом. Передо мной была поставлена хорошая задача, восходящая к известным работам У. Гренандера — исследование асимптотических свойств оценок коэффициентов регрессии для процессов с непрерывным временем. У Ю. А. я прошёл суровую, но полезную школу математического писательства — вопросам качества текстов уделялось существенное внимание. В 1969 г. я защитил кандидатскую диссертацию и был принят в Отдел математической статистики МИАН, возглавлявшийся тогда замечательным специалистом и прекрасным человеком Л. Н. Большевым. Чуть ли не на следующий день после защиты я пошёл в библиотеку МИАН: тогда интернета, да что там — персональных компьютеров — ещё и в помине не было, а надо было думать, чем заниматься дальше. Во многом благодаря многочасовым занятиям в математической библиотеке, которая тогда отвечала самым высоким стандартам, определился вектор моих дальнейших исследований. В 1969–1970 гг., отправляясь от проблемы эквивалентности бесконечномерных гауссовских распределений, лежащей в основе ряда вопросов статистики случайных процессов, я перешёл к изучению её некоммутативного аналога — проблемы квазиэквивалентности обобщённо свободных (бозонных гауссовских) состояний на алгебре канонических коммутационных соотношений — и получил интересные результаты. Это было время ренессанса математической квантовой физики, и мною двигало желание разобраться в вероятностной структуре квантовой теории.

В это же время зарождение новых информационных технологий выдвинуло вопрос о последовательном квантовомеханическом обобщении идей и методов теории вероятностей, математической статистики, теории информации и случайных процессов. Я увидел, что в этом направлении открываются необозримые горизонты, позволяющие органически сочетать мои интересы как к теории операторов, так и к вероятностным дисциплинам. С тех пор и до настоящего времени я двигаюсь в этом направлении. На этом пути была разработана математическая теория квантовых каналов связи, доказаны теоремы кодирования квантовой теории информации, изучена структура квантовых марковских процессов... Докторская диссертация, защищённая в 1975 г., была посвящена некоммутативной теории статистических решений.

Расскажите немного о вопросах, которыми занимаетесь сейчас. В чём Вы видите их интерес и значение?

Мои нынешние научные интересы связаны с математическими вопросами квантовой информатики. Говоря об этом новом направлении, в первую очередь обычно обращают внимание на небывалые возможности,

которые откроются, когда (и если) инженеры смогут эффективно и целенаправленно манипулировать многочастичными квантовыми системами. На слуху открытие знаменитого американского математика П. Шора — квантовый алгоритм факторизации больших целых чисел — потенциальный «взломщик» популярных криптографических систем. Если бы это удалось реализовать, то потери без преувеличения могли бы превзойти последствия пандемии коронавируса, только в информационной сфере. Правда, квантовая информатика предлагает и противоядие в виде эффективных протоколов квантового распределения секретного ключа, уже реализованных на практике. Эти протоколы опираются на обратную сторону квантового мира — ограничения и запреты (такие, как принцип дополнительности), которые органично встроены в вероятностную структуру квантовой теории. Мои исследования как раз и направлены на выяснение количественных следствий такого рода ограничений. Так, теоремы кодирования квантовой теории информации устанавливают точные границы количества информации (классической или квантовой), которые можно передать по квантовому каналу, используя оптимальные методы кодирования-декодирования. При этом квантовый канал математически описывается вполне положительным отображением алгебр операторов, а нахождение его пропускных способностей приводит к новым оптимизационным задачам для энтропийных характеристик каналов. В более широком, фундаментальном плане, это имеет отношение к исследованию принципиальных ограничений, заложенных в квантовой природе мира, а также, возможно, и границ применимости квантовой теории.

Что ещё Вы хотели бы сказать читателям «Математического просвещения»?

В заключение хочу пожелать читателям «Математического просвещения» здоровья, терпения в эти непростые времена, а также выскажу (небесспорную) мысль: условия самоизоляции, когда они напоминают одиночество, способствуют углублённым занятиям математикой и теорфизикой. Так что через некоторое время, по-видимому, здесь стоит ожидать новых ярких открытий.

Николай Христович Розов (20.02.1938–02.11.2020)

В. М. Тихомиров



Николай Христович Розов был замечательной разносторонней личностью — выдающимся математиком, преподавателем, организатором. Он был необычайным тружеником и всегда имел очень большое число обязанностей. Его профессией, делом, которому он посвятил свою жизнь, стало математическое просветительство в самом широком смысле этого слова.

Основными темами его научной работы были теория дифференциальных уравнений и теория управления. Розов принадлежал к школе Л. С. Понтрягина. Научным руководителем его кандидатской диссертации был Е. Ф. Мищенко. Их связывали потом десятилетия совместной

творческой деятельности. Николай Христович вёл отдел дифференциальных уравнений в ВИНТИ, он был руководителем (вместе с В. М. Миллиончиковым и В. А. Кондратьевым) основного семинара кафедры дифференциальных уравнений, продолжившего истоковый семинар, организованный членом-корреспондентом АН СССР, первым заведующим кафедрой В. В. Степановым.

На кафедре дифференциальных уравнений Николай Христович прошёл все ступени: он был студентом, аспирантом, ассистентом, доцентом и, наконец, профессором этой кафедры. Н. Х. Розов был заместителем декана мехмата по работе с иностранными студентами, а в последние годы был деканом-организатором факультета педагогического образования МГУ.

Он был замечательным лектором, прекрасно вёл практические занятия, имел множество учеников. Был членом редколлегии многих журналов. В последние годы он был единственным членом редколлегии журнала «Квант», который участвовал в ней от самого первого номера журнала. Он был также членом редакции нашего сборника с самого первого выпуска.

Многие вехи судьбы Николая Христовича, по-видимому, безвозвратно ушли вместе с ним. Он родился в семье болгарского революционера Христо Розова (1885–1952, Розов — псевдоним), который вынужден был эмигрировать в Советский Союз. Отец позже вернулся в Болгарию, где умер, когда Коля было 14 лет. О том, как проходили его детские годы, как он пережил войну, кто оказал воздействие на его духовное развитие — обо всём этом Коля предпочитал говорить очень сдержанно.

С удовольствием вспоминал школу. Это был период очень высокого уровня школьного образования. Коля вспоминал с благодарностью своих учителей и одноклассников. Он всегда прекрасно учился. Я слышал легенду, что у него не было ни одной четвёрки не только в университете, но и в школе.

Пятнадцатилетним мальчиком он поступил в МГУ. Несмотря на то, что он был на 3–4 года младше своих однокурсников, он сразу включился в активную сначала курсовую, затем факультетскую, а позже и университетскую общественную жизнь. Его курс был одним из самых сильных в истории мехмата. Достаточно назвать его сокурсников-математиков, которые стали профессорами факультета: Д. Аносов, А. Вентцель, Е. Голод, Е. Горин, М. Зеликин, В. Латышев, В. Лин, Ю. Манин, Б. Митягин, В. Скворцов, Е. Складенко, Ю. Тюрин...

Н. Розов всегда пользовался очень большим уважением своих товарищей и коллег, был необычайно тщательным, верным слову, готовым

придти на помощь. После его безвременного ухода кафедра организовала онлайн-семинар, посвящённый его памяти. В нём приняли участие около ста человек. Все выступавшие говорили о Николае Христовиче с теплотой, волнением и любовью.

Память о Николае Христовиче Розове навсегда останется в душах тех людей, кому выпало счастье быть с ним знакомым.

Памяти Виктора Абрамовича Залгаллера (к столетию со дня рождения)

С. Е. Рукшин

О милых спутниках, которые наш свет
Своим сопутствием для нас животворили,
Не говори с тоской: их нет;
Но с благодарностью: были.

В. А. Жуковский

Ни один написанный мною текст не давался мне с таким трудом и болью, как эта заметка, посвящённая 100-летию одного из моих учителей, Виктора Абрамовича Залгаллера, ушедшего от нас 2 октября 2020 года. А 25 декабря ему исполнилось бы 100 лет, и я надеялся посвятить этому событию статью по комбинаторной геометрии с решением задачи, возникшей когда-то в разговоре с юбиляром... Казалось, Залгаллер вечен: его не сломили ни крутые повороты судьбы, ни страшная война, ни возраст, ни болезни. Время и невзгоды словно останавливались рядом с ним, а он стоял непоколебимо, как утёс, о который разбивались житейские волны, не изменяя ни математике, ни своим принципам и совести. Схоронил жену, дочь Таню, но всем казалось, что он-то сам всегда будет с нами. Ведь он всегда был самым здоровым членом семьи. И всё-таки этого не случилось. С его уходом оборвались живые нити, которые связывали нас с довоенной эпохой и историей ленинградского и петербургского математического образования, корнями и традициями нашей математической школы. Видимо, он был последним из тех, кто помнил матмех ЛГУ довоенных времён и мог рассказать об истории ленинградской математики (да и об истории вообще!), так как она разворачивалась на его глазах. Своим удивительным даром рассказчика он умел воскрешать запёкшуюся живую кровь отдалённых событий, и в его рассказах она закипала, а мы невольно становились не слушателями, а свидетелями того, о чём он рассказывал.

Впервые услышать эти рассказы мне повезло в конце 1972 года, когда я был учеником 9 класса: мой руководитель математического кружка во Дворце Пионеров, студент, а впоследствии аспирант Залгаллера Валерий Федотов (кстати, обладатель золотой медали Международной олимпиады по математике 1968 года) поручил мне собирать исторические материалы к 40-летию работы кружков Научной станции для одарённых школьников и первой в СССР математической олимпиады 1933–34 учебного года. Одним из первых, с кем мне удалось поговорить, и был Виктор Абрамович Залгаллер. Он познакомил меня со многими остававшимися в живых участниками первых довоенных олимпиад. Ему же я обязан и знакомством с одним из его учителей, академиком А. Д. Александровым, первая жена которого, Марианна Георг, была победителем той самой I Ленинградской математической олимпиады. Многие страницы истории олимпиад и работы со школьниками в нашем городе удалось сохранить благодаря Виктору Абрамовичу. Потом мне приходилось бывать и у него дома, и на даче в Горьковской, в студенческие годы и позже — в ЛОМИ, Ленинградском отделении Математического института им. Стеклова, и из каждой встречи и разговора я выносил новые яркие впечатления и какие-то штрихи его биографии. Из этих разговоров и родились строки этой заметки.

В. А. Залгаллер родился 25 декабря 1920 года в деревне Парфино Новгородской губернии. В 1927 году Парфино вошло в состав Старорусского района Ленинградской области, потом деревню объединили с посёлком фанерного завода и в 1944 году посёлок Парфино был включён в состав вновь образованной Новгородской области. Виктор Абрамович со смехом упоминал, что бдительные кадровики постоянно из-за этого просили его уточнить место рождения и укоряли за неточности... Причина переезда семьи в Парфино проста: в крупных городах во времена военного коммунизма свирепствовал голод, и многие семьи уезжали из них поближе к деревням, в рабочие посёлки, где грамотные люди могли найти работу и можно было как-то разжиться в деревне продуктами, которые крестьяне всё-таки умудрялись укрывать, несмотря на продразвёрстку (об этом, кстати, говорил и Даниил Гранин, рассказывая о том, почему многие петроградские семьи уезжали из города в то время). К математике и науке вообще семья Залгаллеров отношения не имела: отец, Абрам Леонтьевич, работал снабженцем на фанерном заводе, мать, Татьяна Марковна, была по профессии адвокатом. Через два года с первыми успехами НЭПа семья вернулась в Ленинград. Позднее, во второй половине тридцатых, отец был репрессирован по знаменитой 58 статье и провёл в лагерях 16 лет, и главой семьи была мать, адвокатская практика которой помогала держаться на плаву.

К математике впервые Виктор всерьёз прикоснулся в 1935 (под другим сведениям — в 1934) году, когда школьный учитель порекомендовал ему пойти заниматься в математический кружок открывшейся в 1933–34 учебном году в одной из школ на берегу Фонтанки «Научной станции для одарённых школьников», инициаторами создания которой были Делоне и Фихтенгольц. Дадим слово самому Залгаллеру: «Вечерами раз в неделю мы три часа решали задачи, активно обсуждали приёмы и идеи решений. Занятия вели аспиранты матмеха: геометрию — Вержбинский, алгебру — Цветков. Параллельно с занятиями на дом давались „циклы“ задач, которые запрещалось обсуждать с друзьями. Когда решишь весь цикл, сдаёшь его и берёшь следующий. Большинству присланных из разных школ в кружке не понравилось, к концу 1934–35 учебного года нас осталось человек 10–12 лучших и наиболее упорных. Не удивительно, что мы составили весной 1936 года большинство из 10 победителей городской олимпиады, проводившейся совместно по 9 и 10 классам».

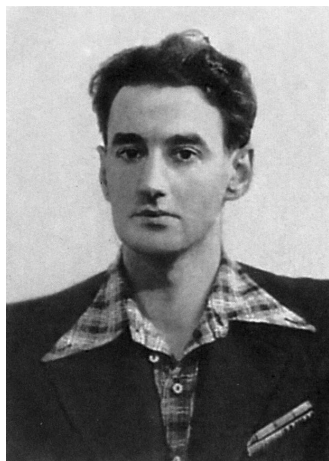
В начале 1937 года «Научная станция» вошла в состав только что открывшегося Дворца пионеров. Здесь старшим кружкам начал преподавать ученик и близкий личный друг Л. В. Канторовича Марк Константинович Гавурин, рассказывавший элементы теории множеств, счётные множества и множества мощности континуум. В соответствии с довоенными правилами, установленными ещё Делоне и Фихтенгольцем, велась борьба с «олимпиадным профессионализмом», и победителям прошлых олимпиад запрещалось участвовать в следующих. Поэтому к олимпиаде 1937 года Залгаллера и его друзей Костелянца и Соколина не допустили, сказав им, что они уже завербованы в математику и должны ею и заниматься в кружках.

В школе Залгаллер получил так называемый «аттестат с золотой каймой», который давал право без экзаменов и собеседования поступать в любой вуз, и поступил на матмех ЛГУ, где и проучился до 1940 года. Среди его лекторов оказались два человека, которых он называл своими учителями: Л. В. Канторович, читавший анализ, и А. Д. Александров, который читал геометрию после того, как другие лекторы по аналитической и дифференциальной геометрии были арестованы. Канторович набрал кружок из сильных студентов, часть которых ранее занималась у Гавурина в кружках Дворца. Как вспоминал Виктор Абрамович, время было голодное, и стипендии на еду не хватало. Зато в академической столовой можно было бесплатно есть хлеб с горчицей, которые постоянно были на столах. Разумеется, студенты пытались найти какие-то дополнительные заработки, наиболее популярными из которых были работа грузчиками на железнодорожных станциях, предприятиях, стройках.

И студент Залгаллер периодически превращался в грузчика. Зато, как он рассказывает, на эти деньги можно было уже съесть кусок мяса. Тогда же вышла первая научная работа Залгаллера: совместно с однокурсником (и приятелем по математическому кружку «Научной станции» и Дворца Пионеров) П. Костелянцем они написали статью «К задаче о плавающем цилиндре», опубликованную в Докладах Академии Наук в 1939 году, когда они закончили второй курс.

Впоследствии Виктор Абрамович много раз с сожалением говорил мне, что студенты утратили то, что составляло образ их жизни до войны и в послевоенное время: «коридорное образование». Студенты в перерывах и после занятий говорили в основном о математике, обсуждали постановку задач, пути их решения. Увы, теперь студенты этим не отличались, и Виктор Абрамович искренне от этого страдал. И не мог понять, как после такой интересной лекции они могут расходиться, не задав никаких вопросов и не спросив, как же доказывается тот результат, который он привёл на лекции без доказательства. Тогда же проявилось и другое широко известное качество Залгаллера: научная щедрость. Он фонтанировал идеями и щедро дарил их друзьям. Когда его давний друг А. С. Соколин нашёл дыру в доказательстве у самого Залгаллера и предложил, как её заделать, то (по рассказам Александра Самойловича) Залгаллер закричал: «Сашка, я сейчас сделаю тебя знаменитым на весь коридор! Ребята, Соколин решил задачу Радо!». Впоследствии он категорически отказался от соавторства, и статья «Об одной задаче Радо» вышла в Докладах АН в 1940 году за подписью одного А. С. Соколина. К тому же периоду относятся, как шутил Виктор Абрамович, его первые доходы от занятий математикой, отличные от стипендии: он записал подробный текст лекций Канторовича по интегралам и рядам Фурье и получил от Канторовича гонорар за издание учебного пособия.

В декабре того же 1940 года он женился на однокурснице Нине Виноградовой. История их расставания описана в его замечательной книге воспоминаний «Быт войны». Не буду повторять этот тяжёлый для него рассказ. Много лет он говорил, что нельзя делать две вещи и нельзя их прощать: нельзя врать себе и предавать тех, кто тебе доверился. Боль от предательства жены сохранилась в его памяти многие десятилетия. Уже почти через сорок лет после этого как-то на экзамене он неожиданно попросил своего аспиранта принять экзамен у одной из подошедших студенток, хотя обычно принимал у любого, кто шёл к нему отвечать. И объяснил аспиранту, что студентка очень сильно похожа на его первую жену. Тогда мемуары Залгаллера ещё не были опубликованы, и аспирант подумал, что профессор боится быть слишком снисходительным к студентке...



После матмеха

Как отмечал сам Виктор Абрамович, ему всю жизнь очень хотелось, чтобы его математика была в чём-то полезна стране. Поэтому когда комитет комсомола матмеха призвал студентов — математиков старших курсов переходить во вновь создаваемый Самолётостроительный институт, Залгаллер оказался в первых рядах подавших заявление. Но проучиться удалось только один семестр: началась война.

Около 400 студентов института, имея бронь до 1943 года, отказались от неё и ушли в народное ополчение. Виктор Залгаллер был в их числе. Долго рассказывать о его войне я не буду, желающие могут прочесть его воспоминания «Быт войны». Это исповедально-чест-

ная проза... С огромным количеством важных деталей, порой неожиданных, на которые он всегда обращал внимание. Так, он отмечал, что в начале войны чаще всего на сторону немцев переходили две категории людей: сильно пострадавшие от коллективизации и сотрудники НКВД. Но несколько слов о войне Залгаллера сказать необходимо. Он тщательно избегает героизации своей войны и пишет о её быте. А между тем Залгаллер не просто достойно прошёл войну на переднем крае, дослужившись от рядового до старшего сержанта, трижды будучи удостоенным медали «За боевые заслуги», медалей «За отвагу», «За оборону Ленинграда», «За взятие Кёнигсберга», орденов Отечественной войны и Красной звезды...

Большую часть войны он провёл связистом. Многие думают, что самое опасное на войне это быть танкистом. На поле боя танк живёт в среднем 5 минут, после чего его поджигают, отчего и смертность в этом роде войск высокая. Другие возразят — пехота, царица полей. Солдат живёт одну, две атаки. Потом — госпиталь или вечная память. Третьи скажут, что самое опасное — в авиации. И только послушав рассказ Героя Советского Союза снайпера Людмилы Павличенко, я впервые понял, что такое работа связиста. Она рассказала о том, кто в первую очередь был объектами снайперской охоты. В первую очередь — наблюдатели и корректировщики огня, которые имели право вызвать артиллерийский или миномётный огонь и корректировали его, и связисты. Потому что оставить передовую противника без связи — это значит лишить его оперативной информации, когда он не будет в силах ничего изменить в своём положении, сообщить что-либо, попросить помощи... Он будет слеп и глух! Перебить провод — и рано или поздно придёт связист, чтобы ликви-

дировать обрыв. Выстрел. Ждешь следующего. Он обязательно придёт! И, хоть и будет это для кого-то неожиданностью, самая опасная работа на фронте была у связистов. Да, да, да, у обычных связистов.

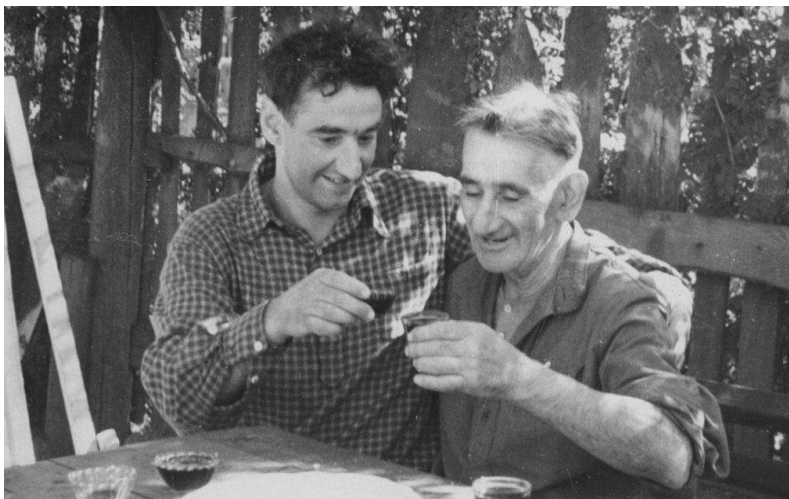
Задача связиста — не просто наладить связь между подразделениями, но и в случае обрыва немедленно исправить её повреждения. В то время связь в войсках держалась на обычном полевом телефонном проводе. При артиллерийском налёте и миномётном огне его секло осколками и связисту, несмотря ни на что нужно было идти и искать обрыв. Пока другие солдаты прятались в траншеях и блиндажах от обстрела перед наступлением или в ожидании атаки противника, во время артподготовки, — именно связисту под градом пуль и осколками мин и снарядов нужно было выйти из окопов, найти обрыв и во что бы то ни стало восстановить связь. Одна такая ходка туда и обратно — это всё равно что дважды сходить в атаку. Отсиделся, перевёл дух, а тебя опять командир гонит искать обрыв и восстанавливать связь. И так за день сходить в атаку под огнём можно до десятка раз, а то и больше. Если повезёт и ты выживешь после очередной ходки. Иначе командир взвода связи будет искать, кем тебя заменить... Но к тебе это уже не будет иметь отношения. Смертность среди связистов была огромной.

И ведь никуда не денешься, приходилось лезть под сумасшедший шквальный огонь — за невыполнение приказа в бою могли и на месте расстрелять. Поэтому у связистов и бывали в наградных листах внешне невзрачные описания героического подвига: в течение нескольких часов давал устойчивую связь наступавшему батальону, устранил обрыв связи во время атаки противника, миномётного обстрела, артподготовки, или просто «обеспечивал непрерывную связь». Звучит буднично... Бывало, что связисту с перебитыми или оторванными руками приходилось жимать зубами обрыв провода, накрыв своим телом.

Но и это ещё не всё. Связист постоянно сидит на телефоне, рядом с командиром. И поэтому обстановку на фронте он знает лучше других солдат. И часто не хуже офицера-штабиста. Связист в курсе последних событий и оперативных планов. Он же должен готовить связь при любом изменении дислокации частей и подразделений. Но штабиста в качестве «языка» взять нелегко. Он не появляется на передовой и на линии огня. Немецкие разведчики знали эту ситуацию и периодически устраивали



Перевод в связисты



С отцом (1955 г.)

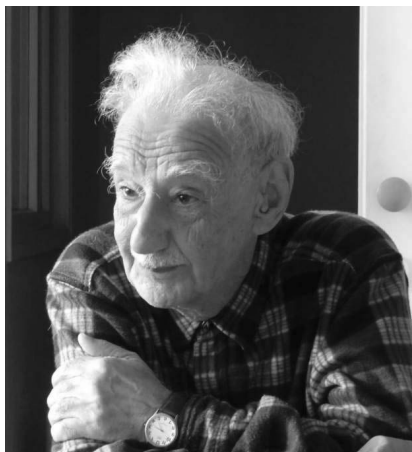
засады именно на связистов. Просто перерезали провод и терпеливо ждали, когда хорошо информированный связист сам прибежит к ним в руки. Из-за этого связисты часто попадали в плен. Хотя им-то попадать в плен было совершенно нельзя. И так каждый день войны...

Всего одна цитата из Залгаллеровского «Быта войны», когда их послали восстанавливать связь под огнём: «...В окопе сидит пехота. Обстрел. Приходится выскочить наверх, обегать их. Крики: „Эй, связисты, живая смерть!“... Хохот». Их так и звали, связистов: «живая смерть». Так вот Залгаллер в своей жизни и за пределами фронта, и после войны никогда не боялся ни при каких обстоятельствах, если это требовалось, «выпрыгнуть из окопа». Он был самоотвержен всегда и везде. И именно поэтому он всегда кому-то помогал и кого-то спасал. Именно к нему обращались за помощью. И он страшно сердился, когда ему говорили, что из-за этого он не успеет или не сможет сделать что-то в математике, поскольку тратит столько сил на чужие дела.

С войны, как он рассказывал, у него осталось несколько привычек. При первой возможности надо поесть и поспать. И побыть в тепле. А тёплая вода — вообще роскошь. Он никогда не мог понять, как это люди не любят мыть посуду. «Ведь это же не ноги в холодной воде, а руки в тепле! Сажу в тепле, мою в тёплой воде и думаю о чём хочу! Это же счастье!», — говорил он.

Отказавшись от офицерских погон, что задержало бы его в армии, он демобилизовался и вернулся в Ленинград в конце 1945 года с твёрдым желанием вернуться к математике. Отказался от предложений досдать

пару предметов и получить диплом и... снова пошёл на третий курс, зимнюю сессию на котором не сдавал до войны. Да ещё боролся за это! Когда ему настойчиво рекомендовали ускоренно получить диплом, думал о том, кто из членов комиссии как себя поведёт, если он начнёт палить по ним от живота из автомата. И упрямо говорил, что пройдёт всю программу, начиная с прерванного третьего курса. В этом весь Залгаллер. Когда он застал меня в коридоре решающим задачи из «Основ теории функций вещественной переменной» И. П. Натансона, рассказал, что он по этой книге восстанавливал в себе способность решать трудные задачи. И в партию вступил не ради карьеры — а когда немцы взяли Тихвин, в знак того, что не сдадим Ленинград. Коммунистов немцы в живых не оставляли...



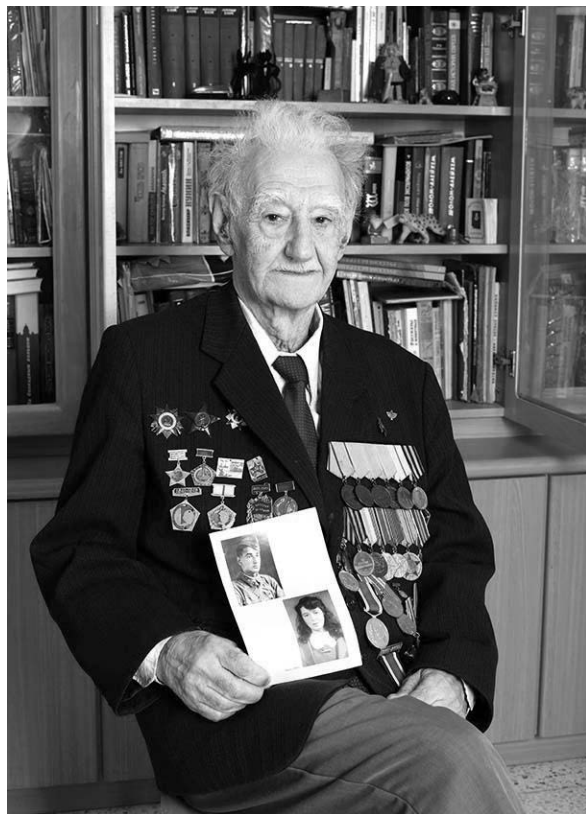
В 90 лет (2010 г.)

В 1946 году он сам пришёл во Дворец Пионеров вести математические кружки. В 1945 году это делал вернувшийся раньше с фронта Зенон Иванович Борович. Не очень удачно. А вот кружок Залгаллера и его замечательные педагогические способности дали в первом же кружке замечательную поросль. Среди его кружковцев и академик Ю. Решетняк, и замечательный специалист по спектральной теории М. Соломяк, и профессор Г. Натансон. С неменьшей любовью и успехом он вёл и студенческие кружки, руководил дипломными работами и диссертациями.

Вскоре произошли и перемены в личной жизни. К счастью, второй брак Залгаллера оказался счастливым: после демобилизации он женился на Софье Ильиничне Раппопорт, которую знал с довоенных времён и которая писала ему письма на фронт. Она также закончила матмех и была замечательным преподавателем высшей математики. Вместе они прожили долгую и счастливую жизнь до самой её смерти.

Долгое время он так и переходил от одного из своих учителей к другому, от Александрова к Канторовичу и обратно, как только они остро нуждались в нём, периодически отвлекаясь на прикладные задачи. Впрочем, какие бы обстоятельства его не отвлекали от любимой геометрии — он долгие годы оставался неперменным старостой геометрического семинара А. Д. Александрова. В начале 50-х годов начал преподавать студентам и быстро стал одним из любимейших преподавателей.

Его первая научная работа вышла в 1939, последняя — в 2012 году.



В 95 лет (2015 г.)

Чтобы судить о их качестве, достаточно упомянуть всего лишь несколько из них, его знаменитые монографии:

- «Рациональный раскрой промышленных материалов» (совместно с Л. В. Канторовичем; издана в Москве в 1951 году, переиздана в Новосибирске в 1971 году);
- «Двумерные многообразия ограниченной кривизны» (совместно с А. Д. Александровым; издана в Москве в 1962 году, английский перевод вышел в Американском математическом обществе в 1967 году);
- «Теория огибающих» (издана в Москве в 1975);
- «Геометрические неравенства» (совместно с Ю. Д. Бураго; издана в Ленинграде в 1980 году, существенно переработанное английское издание вышло в 1988 году в Шпрингере);
- «Введение в риманову геометрию» (совместно с Ю. Д. Бураго; издана в Санкт-Петербурге в 1994 году).

Как замечательно сказал о нём С. С. Кутателадзе, «Залгаллер огранил своим творчеством алмазы своих учителей и товарищей А. Д. Александрова и Л. В. Канторовича. Без Залгаллера ни линейное программирование, ни выпуклая геометрия не были бы такими популярными и востребованными науками, какими их знает сейчас весь мир».

О разнообразии его прикладных работ говорят названия:

- «Новое в составлении поставок для распиловки брёвен»;
- «Притяжение круглых пластин и облучение круглой мишени круглым источником»;
- «Расчёт червячных фрез»;
- «Приближённый расчёт витых пружин переменной жёсткости».

Если добавить ко всему упомянутому создание Физико-математической школы № 239, основание журнала «Записки научных семинаров ЛОМИ», сохранение зданий ЛОМИ в центре города, его участие в судьбе его ученика Гриши Перельмана, — то и тогда перечень сделанного им будет неполным.

Залгаллер был одинаково прекрасен во всех своих ипостасях: и как математик-теоретик, и как специалист по решению прикладных задач, и как профессор матмеха, любимый студентами на протяжении многих десятилетий, и как просветитель и наставник школьников, и как автор математических текстов, и как научный руководитель. Как написал о Залгаллере А. М. Вершик, «он был лёгок и в общении, и в разговоре, умел видеть главное в людях и всегда шёл по жизни бодро. Однажды Л. В. Канторович, посмотрев, как В. А. плавает (а он и сам был отменный пловец) спросил у него: „А есть ли что-нибудь, что Вы делаете плохо?“. Таким он нам и запомнится — талантливый, лёгким и удачливым».

Памяти Эрнеста Борисовича Винберга



12 мая 2020 года скончался доктор физико-математических наук, профессор МГУ Эрнест Борисович Винберг. Он был членом редколлегии всех выпусков третьей серии «Математического просвещения», а с 2006 по 2019 год — его главным редактором. Кроме исследовательской деятельности и преподавания на мехмате МГУ, Эрнест Борисович внёс большой вклад в популяризацию математики, работу с одарёнными школьниками, методические вопросы преподавания математики. Об этом вкладе можно судить по двум научно-популярным статьям Эрнеста Борисовича и материалам его преподавания в московской Второй школе, которые публикуются в настоящем сборнике. Публикуем также две статьи, посвящённые математическим проблемам, интересовавшим Эрнеста Борисовича.

К понятию действительного числа¹⁾

Э. Б. Винберг

Действительное число мыслится как результат бесконечной последовательности измерений со всё возрастающей точностью. Давайте посмотрим, какой это может иметь смысл. Известно, что точность физических измерений не превосходит 15 значащих цифр, и есть принципиальные ограничения точности из-за прерывистости материи. Но даже если бы этой трудности не было, всё равно бесконечная последовательность измерений никогда не могла бы быть завершена! Поэтому данное выше «определение» действительного числа должно пониматься как мысленный образ.

Можно дать точное определение действительного числа, не используя слова «измерение». Назовём действительным числом всякую бесконечную последовательность рациональных чисел

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \quad (1)$$

всё меньше и меньше отличающихся друг от друга (с чем же ещё сравнивать?). Последнее требование следует понимать так: для любого натурального числа m найдётся такое n_0 , что при $n_1, n_2 > n_0$

$$|r_{n_1} - r_{n_2}| < \frac{1}{m}.$$

Последовательность, удовлетворяющая этому условию, называется фундаментальной.

Действительное число, определённое последовательностью (1), следует считать равным действительному числу

$$r'_1, r'_2, \dots, r'_n, \dots,$$

если $r_n - r'_n$ стремится к нулю при увеличении n , т. е. для любого натурального числа m существует такое n_0 , что при $n > n_0$

$$|r_n - r'_n| < \frac{1}{m}.$$

¹⁾ Математическая школа. Лекции и задачи. II. М.: МГУ. 1967. С. 25–30.

Что же это: игра ума или закреплённый в математическом определении результат познания природы? (Заметим, что к такому определению пришли далеко не сразу, оно выстрадано несколькими поколениями математиков. Но, может быть, это объясняется тем, что правила игры были очень запутанными?)

На этот вопрос не ответишь, если копаться в определении и пытаться физически истолковать каждый его пункт. Надо посмотреть, что можно с этим определением сделать. А сделать, оказывается, можно дифференциальное и интегральное исчисление. А с помощью этого исчисления можно решить разные физические задачи, например, рассчитать прочность какого-нибудь сооружения или орбиту планеты. Это и есть решение нашего вопроса. Ведь если бы определение действительного числа было лишь игрой нашего ума, то ничего, кроме продолжения игры, из него не могло бы проистекать.

Правда, понятие действительного числа является идеализацией, оно лишь приблизительно отражает свойства реального мира. Но так всегда бывает в любой науке. Без идеализации ничего не сделаешь. Почитайте по этому поводу прекрасное рассуждение «Что есть сила?» в первом томе «Фейнмановских лекций по физике».

Рассмотрим теперь вопрос: какие задачи надо решать в математике? В этом отношении очень поучителен следующий пример из истории математики. Раньше очень интересовались получением формул для решения алгебраических уравнений

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (2)$$

вроде известной формулы для решения квадратного уравнения. Такие формулы для уравнений 3-й и 4-й степени были найдены итальянцами в XVI в. Уравнения более высоких степеней не поддавались. В 1824 г. Абель окончательно доказал, что для общих уравнений степени 5 и выше невозможно получить желанные формулы. Чтобы точно понять смысл этого результата, надо знать, что в данном случае означает слово «формула». Имеется в виду определённая последовательность арифметических операций и извлечений корней (любых степеней), которые надо произвести над числами $a_1, a_2, \dots, a_n$ и определёнными целыми числами (например, в формулу для квадратного уравнения входит число 2). Абель доказал, что при $n \geq 5$ не существует формулы, которая при любых $a_1, a_2, \dots, a_n$ давала бы точное решение уравнения (1).

Оставалась возможность, что для каждого набора чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ существует своя формула. Через несколько лет после работы Абеля французский математик Эварист Галуа нашёл необходимые и достаточные

условия для того, чтобы такая формула существовала, и доказал, что для каждого $n \geq 5$ можно указать числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых эти условия не выполняются.

В ходе своих исследований Галуа ввёл новые понятия и придумал новые методы, которые имели решающее значение для создания так называемой «теории групп». Начиная с конца XIX в. теория групп получает различные применения в физике. Кроме того, она оказала плодотворное влияние на развитие других разделов математики.

Выходит, что Галуа старался не зря! Но вернёмся к его задаче и посмотрим, что она представляет собой с наивной физической точки зрения. Любую величину можно с достаточной степенью точности выразить рациональным числом, т. е. представить как отношение целых чисел. В частности, это относится к решению уравнения (1), и задача Галуа при таком подходе становится бессмысленной! Она приобретает смысл только при абстрактном математическом толковании. Могло бы показаться, что этой задачей заниматься не стоит, однако мы видели, что это не верно.

Итак, не всякое математическое понятие и не всякая теорема имеет осязаемый физический смысл, но из этого не следует, что математика — это плод нашего воображения. Если представить реальный «физический» мир в виде почвы, на которой растёт дерево математики, а математические теории — как ветви этого дерева (идущие как от ствола, так и от других ветвей), то математика будет похожа на дерево баньян, некоторые ветви которого пускают корни в почву. К этому нужно ещё добавить, что ветви переплетаются между собой (не знаю, как обстоит дело с настоящим баньяном). Это убеждает нас в том, что каждая содержательная математическая теория, пусть даже очень абстрактная, отражает какие-то свойства материального мира и не может остаться бесполезной.

ЗАДАЧИ

1. Найти все фундаментальные последовательности, составленные из целых чисел.
2. Являются ли фундаментальными следующие последовательности рациональных чисел:

- | | |
|--|--|
| а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$ | б) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}1}{n}, \dots;$ |
| в) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots;$ | г) $\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{3}{4}, 0, \dots;$ |
| д) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots;$ | е) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots;$ |

$$\text{ж)} \frac{1}{4}, \frac{4}{7}, \frac{9}{10}, \dots, \frac{n^2}{3n+1}, \dots; \quad \text{з)} 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2+1}, \dots;$$

$$\text{и)} 1, 1 + \frac{1}{1!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \dots; \quad \text{к)} 0; 0,3; 0,33; 0,333; \dots;$$

$$\text{л)} 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots;$$

м) последовательность, определённая равенствами

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

3. Какие из фундаментальных последовательностей задачи 2 задают одно и то же действительное число?

4. Доказать, что если последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

фундаментальные, то последовательности

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots,$$

$$a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$$

также фундаментальные.

5. Как следует определять действия над действительными числами?

6. Можно ли рассматривать рациональные числа как частный случай действительных? Если да, то какие к тому основания и какие фундаментальные последовательности следует считать отвечающими рациональным числам?

7. Как следует определять неравенства между действительными числами?

8. Доказать, что между любыми двумя (различными) действительными числами найдётся рациональное число.

9. Доказать, что если последовательность фундаментальная, то всякая её подпоследовательность также фундаментальна и определяет то же действительное число.

10. Что такое $\sqrt{2}$?

11. Доказать, что последовательности л) и м) из задачи 2 определяют $\sqrt{2}$. Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001, используя последовательность м).

12. Пусть дана бесконечная десятичная дробь $c_0, c_1 c_2 \dots$ (c_0 обозначает целую часть, $c_1, c_2, \dots$ — какие-то цифры). Рассмотрим последователь-

ность, n -й член которой равен $c_0, c_1 c_2 \dots c_n$. Доказать, что эта последовательность всегда фундаментальна.

13. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными десятичными дробями, равны?
14. Доказать, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью.
15. Пусть $c_0, c_1, c_2, \dots$ — целые числа, причём $c_1, c_2, \dots$ — положительны. Доказать, что последовательность подходящих дробей бесконечной цепной дроби $c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots}}$ всегда фундаментальна.
16. В каком случае действительные числа, представленные двумя бесконечными цепными дробями, равны?
17. Доказать, что всякое действительное число может быть представлено бесконечной цепной дробью.
18. Последовательность называется ограниченной сверху, если существует такое число r , что все её члены не превосходят r . Есть ли среди последовательностей задачи 2 неограниченные?
19. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.
20. Доказать, что всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность фундаментальна.
21. Доказать, что последовательность, n -й член которой равен $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, фундаментальна. (Действительное число, определяемое этой последовательностью, обозначается через e .)
22. Доказать, что последовательность и) задачи 2 определяет число e . Вычислить его с точностью до 0,001.

Подробные сведения о построении системы действительных чисел можно найти в первом томе «Энциклопедии элементарной математики» (в статье И. В. Проскурякова) или, в другом изложении, в книге Э. Ландау «Основы анализа», Госиноиздат, 1947.

О неевклидовой геометрии¹⁾

Э. Б. Винберг

Открытие того, что евклидова геометрия не является единственно возможной, сделанное в начале прошлого века Гауссом, Лобачевским и Больяи, оказало влияние на мировоззрение человечества, сравнимое с влиянием таких великих открытий естественных наук, как гелиоцентрическая система Коперника или эволюционная теория Дарвина. Однако мало кому из неспециалистов известно, что начиная с конца прошлого века неевклидова геометрия, наряду с евклидовой, является одним из рабочих инструментов математики, несмотря на то что «пространство, в котором мы живём», в доступных нашему пониманию пределах является скорее евклидовым, чем неевклидовым.

Характер математических теорий таков, что, различным образом интерпретируя их основные понятия (в геометрии это точки, прямые, движения и т. д.), мы можем применять их к объектам различного рода. В частности, и геометрия может применяться не только к пространству, в котором мы живём, но и к другим пространствам, возникающим в математических и физических теориях. Геометрии этих пространств оказываются различными; в частности, они могут не быть евклидовыми.

Если под неевклидовой геометрией понимать любую геометрию, отличную от евклидовой, то имеется необозримое множество таких геометрий. Было бы трудно сказать что-либо обо всех них сразу. В настоящей статье мы будем понимать термин «неевклидова геометрия» в узком смысле, подразумевая под этим геометрию Лобачевского или двойственную ей сферическую геометрию (о двойственности см. ниже). Среди геометрий, в которых имеется понятие расстояния между точками, эти две геометрии вместе с евклидовой геометрией занимают особое положение. Их можно охарактеризовать как геометрии максимальной подвижности

¹⁾ Соросовский образовательный журнал. 1996. № 3. С. 104–109.

или геометрии постоянной кривизны, они являются в известном смысле наиболее совершенными.

Первые приложения геометрия Лобачевского получила в трудах самого Лобачевского, которому удалось с её помощью вычислить некоторые интегралы. Это были весьма частные результаты, не получившие дальнейшего развития. Тем не менее некоторые интегралы, найденные Лобачевским, до сих пор фигурируют в таблицах интегралов.

В конце прошлого века в работах Пуанкаре и Клейна была установлена прямая связь геометрии Лобачевского с теорией функций комплексной переменной и с теорией чисел (точнее, арифметикой неопределённых квадратичных форм). С тех пор аппарат геометрии Лобачевского стал неотъемлемым компонентом этих разделов математики.

В последние 15 лет значение геометрии Лобачевского ещё более возросло благодаря работам американского математика Тёрстона (лауреата Филдсовской медали²⁾ 1983 г.), установившего её связь с топологией трёхмерных многообразий. Десятки работ ежегодно публикуются в этой области. В связи с этим можно говорить о конце романтического периода в истории геометрии Лобачевского, когда основное внимание исследователей было обращено на её осмысление с точки зрения оснований геометрии вообще. Современные исследования всё больше требуют делового владения геометрией Лобачевского.

В этой статье приводятся некоторые примеры теорем неевклидовой геометрии и формулируется принцип, позволяющий получать теоремы геометрии Лобачевского из теорем сферической геометрии. Затем обсуждаются некоторые задачи неевклидовой геометрии, играющие центральную роль в её приложениях. Читателю, желающему более подробно ознакомиться с затронутыми вопросами, можно рекомендовать статьи [1, 2], где также имеется довольно обширная библиография по этому разделу математики.

СФЕРИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Сферическая геометрия (по крайней мере, двумерная) хорошо представляется в рамках евклидовой геометрии. Это геометрия обычной сферы, в которой прямыми считаются большие круги, а расстояниями — длины дуг больших кругов или, что то же, соответствующие центральные углы, умноженные на радиус сферы. При изменении радиуса сферы все

²⁾ Филдсовская медаль является самой престижной математической наградой. Филдсовские медали, в количестве от двух до четырёх, присуждаются один раз в 4 года на международном конгрессе математиков.

расстояния умножаются на одно и то же число. Поэтому нет принципиальной разницы между геометриями сфер разных радиусов. Удобно считать радиус равным 1. Всякий раз, когда не будет оговорено противное, мы будем иметь в виду именно это.

Выведем аналог теоремы Пифагора на сфере, т. е. выражение гипотенузы прямоугольного сферического треугольника через его катеты.

На рис. 1 изображён прямоугольный треугольник ABC (C — вершина прямого угла) на сфере с центром в точке O . Положим

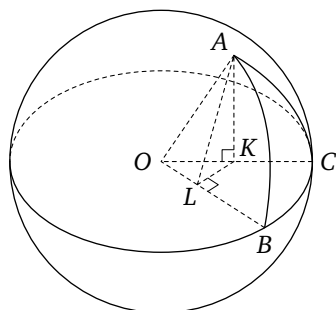


Рис. 1

$$|BC| = a, \quad |CA| = b, \quad |AB| = c \quad (1)$$

(здесь имеются в виду длины отрезков в смысле сферической геометрии, т. е. длины соответствующих дуг больших кругов сферы.)

Проведём теперь некоторые построения в евклидовом пространстве, в котором находится наша сфера. Опустим из точки A перпендикуляр AK на радиус OC . Поскольку плоскости AOC и BOC перпендикулярны, отрезок AK будет перпендикулярен плоскости BOC (изображённой на рис. 1 как «экваториальная» плоскость). Опустим из точки K перпендикуляр KL на радиус OB . По теореме о трёх перпендикулярах отрезок AL будет также перпендикулярен радиусу OB . Имеем

$$a = \angle BOC, \quad b = \angle COA, \quad c = \angle AOB. \quad (2)$$

Из прямоугольных треугольников AOK , AOL и KOL находим:

$$OK = \cos b, \quad OL = \cos c = OK \cos a, \quad (3)$$

откуда

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad (4)$$

Это и есть теорема Пифагора в сферической геометрии.

Для сферы произвольного радиуса R мы получаем формулу

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}. \quad (5)$$

При $R \rightarrow \infty$ сфера становится всё более и более плоской и её геометрия стремится к евклидовой. Считая a и b постоянными и пользуясь приближённым равенством

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad (6)$$

верным при $x \rightarrow 0$, мы получаем из (5):

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right) = \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right) = \\ = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2R^2} + o\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (7)$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2 + o(1). \quad (8)$$

В пределе при $R \rightarrow \infty$ получаем, как и следовало ожидать, обычную теорему Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (9)$$

Принцип двойственности.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Плоскость Лобачевского — это «сфера радиуса i » (где i — мнимая единица). Это высказывание имеет тот смысл, что из всякой формулы сферической геометрии получается формула геометрии Лобачевского (или, как ещё говорят, гиперболической геометрии), если все линейные размеры разделить на i . При этом фигурирующие в формуле функции линейных размеров следует предполагать продолженными до аналитических функций в комплексной области.

Для продолжений тригонометрических функций в комплексную область справедливы равенства

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \quad \sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad (10)$$

где по определению

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (11)$$

Переписывая эти равенства несколько по-другому, получаем

$$\cos \frac{x}{i} = \operatorname{ch} x, \quad \sin \frac{x}{i} = \frac{1}{i} \operatorname{sh} x. \quad (12)$$

Таким образом, при переходе от формул сферической геометрии к формулам гиперболической геометрии следует тригонометрические функции всех линейных величин заменить соответствующими гиперболическими функциями. (Мнимые единицы, возникающие от синусов, должны автоматически сократиться.) Читатель, не знакомый с теорией функций комплексной переменной, может принять этот последний рецепт (с некоторыми дополнениями, которые будут сделаны ниже) за формулировку принципа двойственности.

В частности, из формулы (4) сферической геометрии таким образом получается следующий аналог теоремы Пифагора в гиперболической геометрии:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \quad (13)$$

На «сфере радиуса iR » формула (13) превращается в формулу

$$\operatorname{ch} \frac{c}{R} = \operatorname{ch} \frac{a}{R} \operatorname{ch} \frac{b}{R}, \quad (14)$$

откуда при $R \rightarrow \infty$ аналогично тому, как это было сделано выше для обычной сферы, получается обычная теорема Пифагора.

Длина окружности

Окружность радиуса r в неевклидовой плоскости, так же как и в евклидовой, определяется как геометрическое место точек, находящихся на расстоянии r от заданной точки, называемой центром окружности.

Как легко видеть, окружность радиуса r на сфере представляет собой евклидову окружность радиуса $\sin r$. Поэтому её длина L даётся формулой

$$L = 2\pi \sin r. \quad (15)$$

Применяя сформулированный выше принцип двойственности, получаем отсюда формулу для длины окружности радиуса r на плоскости Лобачевского:

$$L = 2\pi \operatorname{sh} r. \quad (16)$$

Мы видим, что длина окружности в геометрии Лобачевского не прямо пропорциональна её радиусу, как в евклидовой геометрии, а растёт гораздо быстрее. Соответственно этому в круге на плоскости Лобачевского гораздо больше места, чем в круге такого же радиуса на евклидовой плоскости. То же самое можно сказать и о шаре в пространстве.

Площадь треугольника

В рассмотренных выше двух примерах формулы неевклидовой геометрии просто имели иной вид, нежели соответствующие формулы евклидовой геометрии. Однако имеются такие формулы неевклидовой геометрии, для которых нет никакого евклидова аналога. К их числу относится формула, выражающая площадь треугольника через его углы.

Выведем формулу для площади сферического треугольника ABC (рис. 2). Треугольник ABC является пересечением трёх полусфер P, Q, R , граничные окружности которых содержат стороны BC, CA, AB соответ-

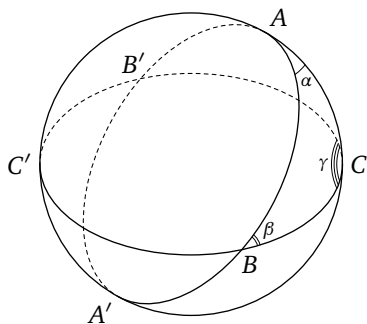


Рис. 2

ственно. (На рис. 2 P — «верхняя» полусфера, Q — «передняя» полусфера, R — «правая» полусфера.)

Площадь любой полусферы равна, как известно, 2π . Площадь пересечения двух полусфер — «поверхность арбузной дольки» — прямо пропорциональна углу между ограничивающими их окружностями. Если этот угол равен π , то пересечение само есть полусфера и его площадь — «поверхность половины арбуза» — равна 2π . Следовательно,

коэффициент пропорциональности равен 2. Значит, пересечения Q с R , R с P , P с Q имеют площади 2α , 2β , 2γ соответственно (где α , β , γ — углы нашего треугольника, как изображено на рис. 2).

Объединение полусфер P, Q, R есть вся сфера минус треугольник $A'B'C'$ — антипод треугольника ABC . Обозначим площадь треугольника ABC через S . Тогда площадь треугольника $A'B'C'$ также равна S и, следовательно, площадь объединения полусфер P, Q, R равна $4\pi - S$.

С другой стороны, площадь объединения может быть подсчитана как сумма площадей полусфер P, Q, R минус сумма площадей их попарных пересечений, которые были учтены дважды, плюс площадь треугольника ABC , которая в результате не была учтена вовсе (мы её учли трижды, когда суммировали площади полусфер P, Q, R , но затем трижды вычли, когда вычитали площади попарных пересечений этих полусфер). В результате получаем

$$4\pi - S = 2\pi + 2\pi + 2\pi - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma + S, \quad (17)$$

откуда

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \quad (18)$$

Мы видим, таким образом, что сумма углов сферического треугольника всегда больше π , причём избыток равен площади треугольника. Для очень маленького сферического треугольника сумма его углов почти равна π . Это соответствует тому, что такой треугольник почти евклидов.

Согласно принципу двойственности, чтобы получить формулу для площади треугольника на плоскости Лобачевского, надо в формуле (18) все линейные размеры разделить на i . При этом правая часть, не содержащая линейных размеров, не изменится, а площадь разделится на $i \cdot i = -1$. После умножения обеих частей на -1 мы получим формулу

$$S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (19)$$

Таким образом, сумма углов гиперболического треугольника, наоборот, всегда меньше π , причём недостаток равен площади треугольника. Сумма углов очень маленького гиперболического треугольника почти равна π .

Вообще в малой части пространства неевклидова геометрия близка к евклидовой, причём чем меньше эта часть, тем ближе к евклидовой её геометрия. Поэтому если «пространство, в котором мы живём», является евклидовым, мы никогда не сможем это установить. В самом деле, мы всегда имеем дело с ограниченной частью пространства (пусть и очень большой по нашим масштабам) и точность наших измерений всегда ограничена. Если в пределах этой части пространства мы не обнаруживаем отклонений от евклидовой геометрии, то всегда можно предположить, что на самом деле пространство неевклидово, но обследованная нами его часть слишком мала в масштабах Вселенной, чтобы эта неевклидовость проявилась при нашей точности измерений.

(В действительности всё обстоит ещё сложнее. Согласно теории относительности пространство нельзя рассматривать отдельно от времени. Поэтому сама постановка вопроса о евклидовости пространства нуждается в уточнении.)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Чтобы понять ситуацию с параллельными прямыми на плоскости Лобачевского, рассмотрим вначале подробно, как с этим обстоит дело на евклидовой плоскости, хотя читателю это и может показаться тривиальным.

Две прямые евклидовой плоскости называются параллельными, если они не пересекаются. Как известно, через любую точку A евклидовой плоскости, не принадлежащую прямой l , проходит ровно одна прямая m , параллельная l . Это так называемый Пятый постулат Евклида.

Прямая m может быть получена как предельное положение прямой AB , соединяющей точку A с точкой B прямой l , уходящей в бесконечность в каком-либо фиксированном направлении. В самом деле, опустим перпендикуляр AC из точки A на прямую l и проследим за изменением углов

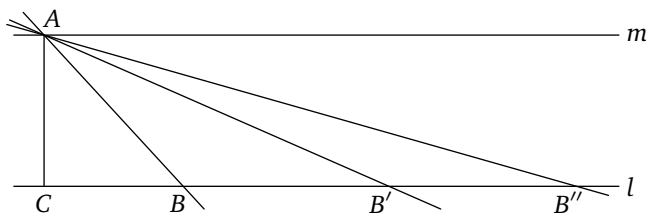


Рис. 3

ABC и BAC . Пусть точка B , удаляясь от C , занимает новое положение B' (рис. 3). Угол ABC , являясь внешним углом треугольника ABB' , равен сумме углов BAB' и $AB'B$ (это равносильно утверждению о том, что сумма углов треугольника ABB' равна π). Следовательно,

$$\angle AB'C < \angle ABC. \quad (20)$$

Более того, если $|BB'| = |AB|$, т. е. треугольник ABB' равнобедренный, то $\angle BAB' = \angle AB'B$ и, следовательно,

$$\angle AB'C = \frac{1}{2} \angle ABC. \quad (21)$$

Всё это показывает, что когда точка B удаляется в бесконечность, угол ABC монотонно стремится к нулю.

Далее, так как сумма углов треугольника ABC равна π , получаем, что

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \angle ABC \quad (22)$$

и, следовательно, угол BAC стремится к $\pi/2$. Это означает, что предельное положение прямой AB есть прямая m , перпендикулярная AC . Ту же прямую мы получим, если точка B будет удаляться в бесконечность в противоположном направлении. Прямая m и есть та единственная прямая, параллельная l , которая проходит через точку A .

Прделаем теперь аналогичные построения на плоскости Лобачевского, где, как мы уже знаем, сумма углов треугольника меньше π . Неравенство (20) лишь усилится, а равенство (21) превратится в неравенство

$$\angle AB'C < \frac{1}{2} \angle ABC. \quad (23)$$

Поэтому окончательный вывод относительно характера изменения угла ABC останется в силе: он монотонно стремится к нулю.

Равенство (22) превратится в неравенство

$$\angle BAC < \frac{\pi}{2} - \angle ABC, \quad (24)$$

причём разность между его правой и левой частями, равная площади треугольника ABC , будет лишь возрастать. Следовательно, угол BAC стремится к некоторому острому углу δ . Предельная прямая m , образующая угол δ с перпендикуляром AC , не пересекает прямую l . В терминологии, принятой в геометрии Лобачевского, именно эта прямая (а не просто всякая прямая, не пересекающая l) называется параллельной l .

Если точка B движется в противоположном направлении, то прямая AB стремится к другой прямой m' , также образующей угол δ с перпендикуляром AC , но отложенный в другую сторону от этого перпендикуляра.

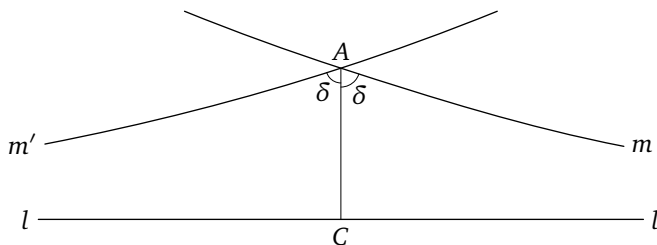


Рис. 4

Прямая m' также считается параллельной l (но «в другом направлении»). Эта ситуация условно изображена на рис. 4 (условно, потому что невозможно точное изображение неевклидовой фигуры на евклидовой плоскости, каковой является плоскость рисунка).

Таким образом, на плоскости Лобачевского через точку A , не лежащую на прямой l , проходит ровно две прямые, параллельные l . Все проходящие через точку A прямые, лежащие между ними, также не пересекают l (но не называются параллельными).

Угол δ называется углом параллельности. Он зависит лишь от расстояния $|AC| = d$. Более точно,

$$\delta = 2 \operatorname{arctg} e^{-d}. \quad (25)$$

Читатель может попытаться вывести эту формулу самостоятельно. Для этого надо сначала, подобно тому как был доказан сферический аналог теоремы Пифагора, вывести необходимые соотношения между сторонами и углами сферического прямоугольного треугольника, затем с помощью принципа двойственности получить соответствующие соотношения между сторонами и углами гиперболического треугольника ABC (в обозначениях рис. 3) и совершить предельный переход. Если вы сумеете это сделать, то вы хорошо усвоили материал настоящей статьи.

РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКОСТИ НА РАВНЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Клетчатая бумага и соты представляют собой разбиения евклидовой плоскости на равные правильные многоугольники (в первом случае на квадраты, во втором — на шестиугольники).

Так как сумма углов евклидова p -угольника равна $(p - 2)\pi$, каждый угол правильного p -угольника равен $(1 - 2/p)\pi$. Если в разбиении плоскости на равные правильные p -угольники в каждой вершине сходится q многоугольников, то должно быть

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi = \frac{2\pi}{q}, \quad (26)$$

откуда

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Это уравнение имеет три решения:

$$(p, q) = (3, 6); \quad (4, 4); \quad (6, 3). \quad (28)$$

Последним двум решениям соответствуют уже упомянутые разбиения на квадраты и на правильные шестиугольники. Первому решению соответствует разбиение на правильные треугольники.

Формула для суммы углов p -угольника в евклидовой геометрии выводится из формулы для суммы углов треугольника путём разбиения p -угольника на $p - 2$ треугольника диагоналями, проведёнными из какой-либо его вершины. Таким же способом доказывается, что сумма углов сферического (соответственно гиперболического) p -угольника равна $(p - 2)\pi$ плюс (соответственно минус) площадь этого p -угольника.

Отсюда следует, что угол правильного сферического p -угольника больше, чем $(1 - 2/p)\pi$, причём в отличие от евклидова случая он зависит от радиуса многоугольника. Если радиус мал, то многоугольник близок к евклидову и его угол лишь ненамного больше $(1 - 2/p)\pi$. Когда радиус приближается к максимально возможному значению $\pi/2$, то сам многоугольник приближается к полусфере, а его угол приближается к π . Таким образом, угол правильного сферического p -угольника может быть любым числом, лежащим между $(1 - 2/p)\pi$ и π .

Поэтому разбиение сферы на равные правильные p -угольники, сходящиеся по q в каждой вершине, возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Это неравенство имеет следующие решения:

$$(p, q) = (3, 3); \quad (3, 4); \quad (3, 5); \quad (4, 3); \quad (5, 3). \quad (30)$$

Таким образом, имеется ровно пять разбиений сферы на равные правильные многоугольники.

Эти разбиения взаимно однозначно соответствуют правильным многогранникам в евклидовом пространстве. А именно, проектируя границу правильного многогранника из его центра на описанную сферу, мы получаем разбиение сферы на равные правильные многоугольники (проекции граней многогранника). Обратно, для всякого разбиения сферы на равные правильные многоугольники выпуклый многогранник, вершинами которого служат вершины разбиения, является правильным.

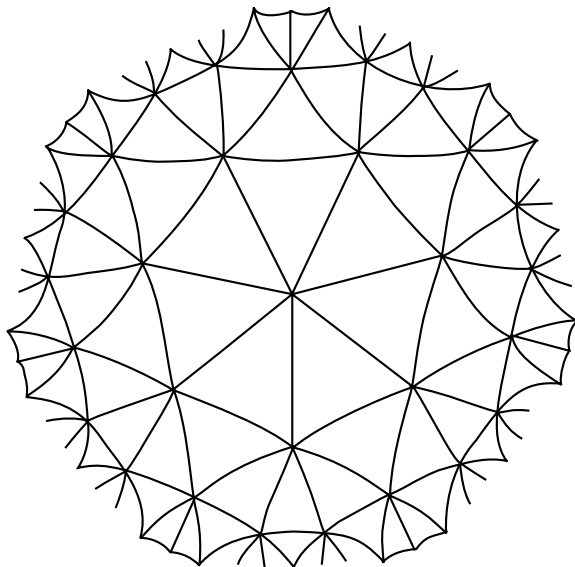


Рис. 5

Полученный выше результат означает, что имеется ровно пять правильных многогранников. Это известные с древних времён тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб, додекаэдр.

Аналогично угол правильного гиперболического p -угольника меньше, чем $(1 - 2/p)\pi$, причём если радиус многоугольника мал, то его угол лишь ненамного меньше этой величины, а когда радиус стремится к бесконечности, то угол стремится к нулю. Таким образом, угол правильного гиперболического p -угольника может быть любым (положительным) числом, меньшим $(1 - 2/p)\pi$.

Поэтому для разбиений плоскости Лобачевского на равные правильные многоугольники мы получаем неравенство

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}, \quad (31)$$

решениями которого являются все пары чисел (p, q) , кроме тех, которые являются решениями уравнения (27) или неравенства (29), то есть все пары, кроме перечисленных выше восьми. Разбиение, отвечающее решению $(3, 7)$, условно изображено на рис. 5.

Мы видим, что, по крайней мере в отношении разбиений на правильные многоугольники, плоскость Лобачевского представляет куда больше возможностей, чем евклидова плоскость и сфера.

Ещё больше возможностей представляется, если отказаться от (на самом деле искусственного) требования правильности многоугольников

разбиения (сохранив, однако, требование их равенства). Именно с такими разбиениями связаны упоминавшиеся в начале этой статьи приложения геометрии Лобачевского к теории чисел и теории функций комплексной переменной.

Аналогичным образом можно рассматривать разбиения пространства на равные многогранники. В случае евклидова пространства изучение таких разбиений имеет тесную связь с кристаллографией, а в случае пространства Лобачевского — с топологией трёхмерных многообразий. В последнем случае теория таких разбиений ещё далека от завершения, хотя разбиения пространства Лобачевского на равные правильные многогранники были описаны Коксетером ещё в 1954 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 29. С. 1–146.
- [2] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Там же. С. 147–259.

В школе № 2. Геометрия (X класс)¹⁾

Э. Б. Винберг

ЛЕКЦИЯ № 1

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Путём сжатий и растяжений треугольник преобразуется в равносторонний.

2. Теорема Паскаля: точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника лежат на одной прямой.

С помощью перспективного преобразования теорема приводится к следующей: если две пары противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника параллельны, то и третья пара параллельна.

3. Теорема Брианшона: диагонали описанного около окружности шестиугольника пересекаются в одной точке.

С помощью корреляции эта теорема приводится к теореме Паскаля.

Геометрия как изучение свойств фигур, не меняющихся при преобразованиях, принадлежащих заданной группе $\mathcal{O}$.

Группой преобразований множества M называется всякая совокупность $\mathcal{O}$ преобразований этого множества, обладающая следующими свойствами:

- 1) тождественное преобразование ε принадлежит $\mathcal{O}$,
- 2) вместе с каждым преобразованием γ в $\mathcal{O}$ содержится обратное преобразование γ^{-1} ,
- 3) вместе с любыми двумя преобразованиями γ_1, γ_2 в $\mathcal{O}$ содержится их произведение $\gamma_1\gamma_2$.

(Определение произведения преобразований: $(\gamma_1\gamma_2)(x) = \gamma_1(\gamma_2(x))$.)

¹⁾ Математическая школа. Лекции и задачи. XI. М.: МГУ, 1967. С. 3–31.

Фигуры $\Phi_1, \Phi_2 \subset M$ называются *равными* в геометрии группы $\mathcal{O}$ (запись: $\Phi_1 \stackrel{\mathcal{O}}{=} \Phi_2$), если существует преобразование $\gamma \in \mathcal{O}$, переводящее Φ_1 в Φ_2 .

Благодаря условиям 1)–3) равенство фигур обладает обычными свойствами равенства (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Евклидова геометрия — это геометрия группы движений евклидова пространства. (Движением называется всякое преобразование, сохраняющее расстояние между точками.)

Аффинным преобразованием плоскости называется всякое преобразование, переводящее прямые в прямые и сохраняющее отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

Такие преобразования образует группу. Геометрия этой группы — *аффинная геометрия*.

Задачи

1. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных им сторон со вписанной в треугольник окружностью, пересекаются в одной точке.
2. В треугольнике ABC на сторонах BC , CA и AB взяты соответственно точки M, N, P , причём $BM : MC = AN : NC$; $AP = PB$. Доказать, что прямые AM , BN и CP пересекаются в одной точке.
3. Доказать, что всякое движение плоскости есть либо сдвиг, либо поворот, либо отражение в прямой, либо скользящее отражение (т. е. произведение отражения в прямой и сдвига в направлении той же прямой).
4. Образуют ли группу преобразований плоскости: а) все сдвиги; б) все повороты, в) все сдвиги и повороты?
5. Доказать, что отношение площадей сохраняется при аффинных преобразованиях.
6. Доказать, что в аффинной геометрии все треугольники равны.

ЛЕКЦИЯ № 2

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Линейная часть $\bar{\gamma}$ аффинного преобразования γ определяется так:

$$\bar{\gamma}(\overline{AB}) = \overline{\gamma(A)\gamma(B)}.$$

Это обратимое линейное преобразование пространства свободных векторов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть O — какая-нибудь точка плоскости. Для любой точки O' и любого обратимого линейного преобразования C существует единственное аффинное преобразование γ , для которого $\gamma(O) = O'$, $\bar{\gamma} = C$.

Запись аффинного преобразования в координатах:

$$\gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{21}y + b_1 \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования $\bar{\gamma}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ — координаты точки, в которую переходит начало координат.

КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА

Кривой 2-го порядка называется кривая, задающаяся уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Всякая кривая 2-го порядка, содержащая более одной точки и не являющаяся прямой или парой прямых, путём аффинного преобразования может быть переведена в одну из следующих кривых:

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1}$$

$$xy = 1, \tag{2}$$

$$y = x^2. \tag{3}$$

Соответственно этим трём случаям данная кривая называется эллипсом, гиперболой или параболой.

Некоторые свойства эллипса:

- 1) существует точка, называемая центром эллипса, в которой делятся пополам все проходящие через неё хорды;
- 2) около эллипса можно описать прямоугольник, стороны которого делятся в точках касания пополам; половины длин его сторон называются полуосями эллипса.

ТЕОРЕМА 3. Всякое аффинное преобразование можно представить в виде произведения двух растяжений во взаимно-перпендикулярных направлениях и движения.

ЗАДАЧИ

7. Доказать, что с помощью одной линейки (без делений) нельзя построить равностороннего треугольника.
8. Найти условие равенства двух четырёхугольников в аффинной геометрии.

9. Доказать, что $\overline{\gamma_1 \gamma_2} = \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_2}$ для любых аффинных преобразований γ_1 и γ_2 ($\overline{\gamma}$ обозначает линейную часть γ).
10. При помощи задачи 9 доказать, что произведение двух поворотов вокруг разных точек на противоположные углы есть сдвиг.
11. Найти условия на коэффициенты a_{ij} , b_i аффинного преобразования γ , необходимые и достаточные для того, чтобы γ было движением.
12. К какому типу принадлежат кривые 2-го порядка:
 - а) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$;
 - б) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x - y = 0$;
 - в) $x^2 + 4xy + 4y^2 + y + 1 = 0$;
 - г) $2x^2 - xy - y^2 - 3y + 2 = 0$.
13. Доказать, что гипербола, как и эллипс, имеет центр симметрии, а парабола — нет.
14. Доказать, что полуоси эллипса — это половины наибольшей и наименьшей хорд.
15. Доказать, что площадь эллипса с полуосями a и b равна πab .
16. Доказать, что любой диаметр эллипса делит пополам все хорды, параллельные касательной, проведённой через один из его концов, и что существует единственное не тождественное аффинное преобразование, переводящее эллипс в себя и оставляющее на месте все точки данного диаметра.
17. Найти все аффинные преобразования, переводящие в себя данную кривую 2-го порядка.
18. Доказать, что конические сечения являются кривыми 2-го порядка.

ЛЕКЦИЯ № 3

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Однородные и неоднородные координаты в проективной плоскости. Связь между ними:

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Проективное преобразование γ :

$$\gamma[a] = [\gamma(a)],$$

где $[a]$ — точка проективной плоскости, определяемая прямой a в трёхмерном пространстве R^3 , проходящей через начало; γ в правой части — обратимое линейное преобразование пространства R^3 .

При проективном преобразовании прямые переходят в прямые.

ЛЕММА 1. Любая прямая с помощью проективного преобразования может быть переведена в бесконечно удалённую.

Запись проективного преобразования в координатах:

а) в однородных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}\xi + a_{21}\eta + a_{31}\zeta \\ a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{32}\zeta \\ a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta \end{pmatrix},$$

б) в неоднородных:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x + a_{21}y + a_{31}}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}} \\ \frac{a_{12}x + a_{22}y + a_{32}}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Аффинное преобразование как частный случай проективного, когда $a_{13} = a_{23} = 0$, т. е. когда бесконечно удалённая прямая $\zeta = 0$ остаётся на месте.

Проективные преобразования образуют группу.

Четвёрка точек $\{A, B, C, D\}$ называется четвёркой *общего положения*, если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.

ТЕОРЕМА 4²⁾. Пусть $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ — четвёрки общего положения. Тогда существует единственное проективное преобразование γ , переводящее A_1 в A_2 , B_1 в B_2 , C_1 в C_2 и D_1 в D_2 .

Двойное отношение четвёрки точек, лежащих на одной прямой:

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AD}{DC}.$$

В частности,

$$(A, B, C, \infty) = -\frac{AB}{BC}.$$

ЛЕММА 2. Пусть a, b, c, d — четыре прямые, проходящие через одну точку; l — прямая, пересекающая их в точках A, B, C, D соответственно. Двойное отношение (A, B, C, D) не зависит от положения l . (Оно называется двойным отношением четвёрки прямых a, b, c, d и обозначается (a, b, c, d) .)

ТЕОРЕМА 5. При проективном преобразовании двойные отношения четвёрок точек сохраняются.

²⁾ Исправлена опечатка в нумерации теорем при первоначальной публикации. — Прим. ред.

Задачи

19. Какие линейные преобразования пространства R^3 определяют одно и то же проективное преобразование плоскости?
20. Доказать теорему Дезарга.
21. Доказать теорему Паппа.
22. *Гомологией* называется проективное преобразование, оставляющее на месте все точки некоторой прямой l , называемой *осью* гомологии, и все прямые, проходящие через некоторую точку C , называемую *центром* гомологии. Доказать, что при заданных l и C гомология определяется образом A' какой-либо точки A , отличной от C и не лежащей на l , причём точка A' может быть задана произвольно, лишь бы она лежала на прямой CA . Указать способ построения гомологии при помощи одной линейки.
23. Построить с помощью одной линейки прямую, проходящую через данную точку и недоступную точку пересечения данных прямых.
24. Что такое гомология с бесконечно удалённой осью? с бесконечно удалённым центром? с бесконечно удалёнными осью и центром?
25. Доказать, что всякое проективное преобразование может быть представлено в виде произведения двух гомологий.
26. Что происходит с двойным отношением (A, B, C, D) при перестановке точек?
27. Доказать, что если проективное преобразование оставляет на месте три точки прямой l , то оно оставляет на месте все её точки.
28. Пусть $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$ — две четвёрки точек, лежащих на одной прямой. Доказать, что если $(A_1, B_1, C_1, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$, то существует проективное преобразование, переводящее первую четвёрку во вторую.
29. На сторонах BC , CA и AB треугольника взяты точки M , N и P . Доказать теорему Чевы: для того, чтобы прямые AM , BN и CP пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

30. Доказать, что двойное отношение четвёрки прямых a, b, c, d , проходящих через одну точку, равно

$$\pm \frac{\sin \langle a, b \rangle}{\sin \langle b, c \rangle} : \frac{\sin \langle a, d \rangle}{\sin \langle d, c \rangle},$$

где через $\langle l, m \rangle$ обозначается угол между прямыми l и m .

31. Доказать, что двойное отношение четвёрки прямых сохраняется при проективном преобразовании.
32. Доказать, что всякое преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые и сохраняющее двойные отношения четвёрок точек, лежащих на одной прямой, является проективным.
33. Доказать, что центральное проектирование плоскости P на плоскость P_1 с последующим совмещением P_1 с P при помощи движения в трёхмерном пространстве является проективным преобразованием.

ЛЕКЦИЯ № 4

КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА В ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Кривая 2-го порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

в однородных координатах задаётся уравнением

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 = 0.$$

Бесконечно удалённые точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, присоединяются к кривой. Число бесконечно удалённых точек: у эллипса — 0, у параболы — 1, у гиперболы — 2.

При проективном преобразовании любая кривая 2-го порядка переходит в кривую 2-го порядка.

ТЕОРЕМА 6. *В проективной геометрии все невырожденные кривые 2-го порядка равны.*

ТЕОРЕМА 7. *Пусть A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 — две тройки точек на невырожденной кривой 2-го порядка K . Существует единственное проективное преобразование, сохраняющее кривую K и переводящее точки A_1, B_1, C_1 в точки A_2, B_2, C_2 соответственно.*

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Плоскость Лобачевского можно отождествить с кругом Λ (без границы); при этом группой движений плоскости Лобачевского будет группа проективных преобразований, оставляющих круг Λ на месте.

Прямыми плоскости Лобачевского называются хорды круга Λ .

Флагом на плоскости Лобачевского называется совокупность точки, луча, выходящего из этой точки, и одной из полуплоскостей, примыкающих к этому лучу.

3. Внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного.
4. Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.
5. Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Задачи

34. Записать в неоднородных координатах какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$:
 - а) в параболу $y = x^2$;
 - б) в гиперболу $xy = 1$.
35. Пусть A, B, C, D — точки, лежащие на невырожденной кривой 2-го порядка K . Доказать, что кривая K есть геометрическое место точек X , для которых двойное отношение четвёрки прямых XA, XB, XC, XD равно некоторому числу k .
36. Пусть A_1, A_2 — точки на окружности K , B_1, B_2 — точки внутри неё. Доказать, что существует ровно два проективных преобразования, сохраняющих K и переводящих A_1 в A_2 , а B_1 — в B_2 .
37. Записать в неоднородных координатах какое-нибудь проективное преобразование, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ в себя, а точку $(0, 0)$ — в точку $(1/2, 0)$.
38. Доказать, что нельзя с помощью одной линейки найти центр данной окружности.
39. Пусть K — окружность, l — её секущая. Доказать, что существует проективное преобразование, оставляющее на месте все точки прямой l , переводящее окружность K в себя и меняющее местами дуги, на которые она разбивается прямой l .
40. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, описанный около окружности K , причём P, Q, R, S — точки касания, лежащие на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно. Доказать, что прямые PR и QS и диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке и что точка пересечения прямых PQ и RS лежит на прямой AC .
41. В обозначениях задачи 40, доказать, что в смысле геометрии Лобачевского внутри окружности K диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами углов, образованных прямыми PR и QS .
42. Доказать, что на плоскости Лобачевского через любую точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной прямой.
43. Доказать, что на плоскости Лобачевского геометрическое место точек, равноудалённых от прямых l_1 и l_2 , есть объединение биссектрис

- углов, образованных прямыми l_1 и l_2 , если эти прямые пересекаются, и одна прямая — если они не пересекаются.
44. Доказать, что всякое утверждение относительно углов с общей вершиной, верное в евклидовой геометрии, верно и в геометрии Лобачевского.
45. Доказать, что в любом треугольнике на плоскости Лобачевского:
- а) биссектрисы пересекаются в одной точке;
 - б) перпендикуляры, проведённые к сторонам через их середины, либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке;
 - в) высоты либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке (указание: поместить одну из вершин треугольника в центр круга Λ);
 - г)* медианы пересекаются в одной точке.
46. Проверить непосредственной выкладкой, что длина отрезка на плоскости Лобачевского, определённая по формуле (1), аддитивна вдоль прямой.
47. Доказать, что прямая на плоскости Лобачевского изометрична прямой на евклидовой плоскости.

ЛЕКЦИЯ № 5

Сумма углов многоугольника на плоскости Лобачевского

Аксиома о параллельных прямых не выполняется в геометрии Лобачевского, поэтому не проходит обычное доказательство теоремы о сумме углов многоугольника. Более того, имеет место

ТЕОРЕМА 9. *Сумма углов любого треугольника на плоскости Лобачевского меньше π .*

Для любого многоугольника M на плоскости Лобачевского угловым дефектом $\Delta(M)$ называется разность между суммой внешних углов и 2π .

ТЕОРЕМА 10. *Функция $\Delta(M)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $\Delta(M) \geq 0$ для любого M ;
- 2) если $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$, где M_i — попарно не перекрывающиеся многоугольники, то $\Delta(M) = \Delta(M_1) + \dots + \Delta(M_k)$.

ТЕОРЕМА 11 (4-й признак равенства треугольников). *Если все углы одного треугольника на плоскости Лобачевского равны соответствующим углам другого треугольника, то эти треугольники равны.*

КОРРЕЛЯЦИИ

Обозначим через P_1 множество точек проективной плоскости и через P_2 — множество её прямых. Пусть $P = P_1 \cup P_2$.

Для элементов $x, y \in P$ определим инцидентность: $x \sim y$, если $x \in P_1$, $y \in P_2$ и $x \in y$ или $y \in P_1$, $x \in P_2$ и $y \in x$.

Если $x_1, x_2, x_3, x_4 \sim y$, то определено двойное отношение (x_1, x_2, x_3, x_4) .

Взаимно однозначное отображение φ множества P на себя называется *корреляцией*, если

- 1) $\varphi(P_1) = P_2$, $\varphi(P_2) = P_1$;
- 2) $x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) \sim \varphi(y)$;
- 3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4))$.

(Для проективного преобразования вместо 1) выполняется условие $\varphi(P_1) = P_1$, $\varphi(P_2) = P_2$.)

Произведение корреляции и проективного преобразования (в любом порядке) есть корреляция; произведение двух корреляций есть проективное преобразование.

ТЕОРЕМА 12. *Корреляции существуют.*

Из теоремы 12 вытекает *принцип двойственности* в проективной геометрии: если в любой теореме о точках и прямых проективной плоскости, формулируемой в терминах инцидентности и двойного отношения, заменить слова «точка» и «прямая» на «прямая» и «точка» соответственно, то получится верная теорема.

ПРИМЕР. Из теоремы Паппа получается теорема: если стороны шестиугольника (или их продолжения) проходят поочерёдно через точки A и B , то его диагонали пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧИ

48. Доказать, что если $M' \subset M$, то $\Delta(M') \leq \Delta(M)$.
49. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого треугольника на плоскости Лобачевского, лежащего в круге радиуса δ , угловой дефект меньше ε .
- 50*. То же, что в задаче 49, для любого многоугольника (число сторон заранее не задано).
- 51*. Доказать, что если в формуле длины отрезка на плоскости Лобачевского взять $k = 1/2$, то
 - а) длина окружности радиуса r равна $2\pi \operatorname{sh} r$;
 - б) площадь круга радиуса r равна $2\pi(\operatorname{ch} r - 1)$.

52. Доказать, что если определить метрику на плоскости Лобачевского как в задаче 51, то угловой дефект любого многоугольника будет равен его площади.
53. Доказать, что для треугольника со сторонами a, b, c на плоскости Лобачевского имеет место «неравенство косинусов»:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

где γ — угол против стороны C .

54. Доказать, что если γ — такое преобразование плоскости Лобачевского, при котором длина любого отрезка умножается на постоянное число $k \neq 0$, то $k = 1$ и γ — движение в смысле определения, данного в лекциях.
55. Какая теорема двойственна: а) теореме Лезарга; б) теореме Чевы?
56. Доказать, что если φ_0 — какая-нибудь корреляция, то любая корреляция φ представляется в виде $\varphi = \gamma \varphi_0$, где γ — проективное преобразование.
57. Доказать, что если φ — корреляция, переводящая вершины некоторого треугольника в противоположные стороны, то $\varphi^2 = \varepsilon$.

ЛЕКЦИЯ № 6

КОРРЕЛЯЦИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ТЕОРЕМА 13. Для каждой невырожденной кривой 2-го порядка K существует единственная корреляция φ , обладающая следующими свойствами:

- 1) если A — точка кривой K , то $\varphi(A)$ — касательная к K в точке A ;
- 2) если l — касательная к K , то $\varphi(l)$ — точка касания K и l .

Эта корреляция удовлетворяет условию $\varphi^2 = \varepsilon$ и называется *полярным преобразованием* относительно K .

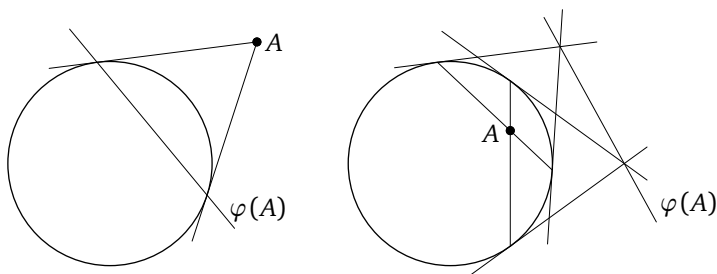


Рис. 3

Образ точки при этом преобразовании называется её *поляр*ой, образ прямой — её *полюсом*.

Способ построения поляр — см. рис. 3.

Теорема 13 позволяет применять принцип двойственности к таким теоремам, в формулировке которых участвует кривая 2-го порядка.

Примеры: теоремы, двойственные к теореме Паскаля и к теореме о том, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

К комплексной плоскости добавляется точка ∞ . На расширенной таким образом плоскости рассматриваются преобразования:

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Они называются конформными преобразованиями 1-го и 2-го рода соответственно. Эти преобразования образуют группу, геометрия которой называется конформной геометрией.

ТЕОРЕМА 14. *При конформных преобразованиях сохраняются углы между кривыми.*

Доказательство основано на формуле

$$\left(\frac{az(t) + b}{cz(t) + d} \right)' = \frac{ad - bc}{(cz(t) + d)^2} z'(t).$$

ТЕОРЕМА 15. *При конформных преобразованиях прямые и окружности переходят в прямые и окружности (но прямые не обязательно в прямые, а окружности — не обязательно в окружности!).*

Для доказательства используется

ЛЕММА. *Общее уравнение прямой или окружности на комплексной плоскости имеет вид $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$, где A, C вещественны, $|B|^2 > AC$. (При $A = 0$ получается прямая, при $A \neq 0$ — окружность.)*

Инверсия в окружности радиуса r с центром в точке O — преобразование, переводящее точку A в точку A' , лежащую на луче OA и удовлетворяющую условию

$$OA' \cdot OA = r^2.$$

Точки O и ∞ меняются местами.

Инверсия является конформным преобразованием. Так, инверсия в единичной окружности с центром в O — это преобразование $z \rightarrow 1/\bar{z}$.

Конформные преобразования, оставляющее на месте ∞ , характеризуются тем, что $C = 0$. Это — произведения движений на подобия.

ТЕОРЕМА 16. *Для любых двух троек точек $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ существует ровно два конформных преобразования, переводящих A_1 в A_2 , B_1 в B_2 и C_1 в C_2 .*

Пример на применение конформного преобразования для решения задачи на построение: построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых или окружностей.

ЛЕКЦИЯ № 7

Конформная модель геометрии Лобачевского

Рассматриваются конформные преобразования, отображающие круг Λ на себя. Они образуют группу. По теореме 16 для любых двух троек точек, лежащих на границе круга K , существует единственное преобразование из этой группы, переводящее первую тройку во вторую.

Так как круг с помощью конформного преобразования можно отобразить на полуплоскость $\text{Im } z > 0$, мы получим ту же геометрию, если вместо круга будем рассматривать полуплоскость $\text{Im } z > 0$, а вместо конформных преобразований, отображающих круг на себя, — конформные преобразования, отображающие полуплоскость на себя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрии $\{M_1, G_1\}$ и $\{M_2, G_2\}$ называются изоморфными, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества M_1 на M_2 , что $\theta G_1 \theta^{-1} = G_2$.

ТЕОРЕМА 17. *Построенная выше геометрия изоморфна геометрии Лобачевского в проективной модели.*

Доказательство. Пусть M_1 — полуплоскость $\text{Im } z > 0$, G_1 — группа конформных преобразований, отображающих M_1 на себя. Это преобразование вида

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d},$$

где a, b, c, d вещественны, $ad - bc > 0$ в первом случае и $ad - bc < 0$ — во втором случае.

Пусть M_2 — внутренность параболы $y > x^2$, G_2 — группа проективных преобразований, отображающих M_2 на себя. Для каждого $z \in M_1$ рассмотрим приведённый квадратный трёхчлен, корнем которого является z ,

$$(t - z)(t - \bar{z}) = t^2 - (z + \bar{z})t + z\bar{z}.$$

Полагаем

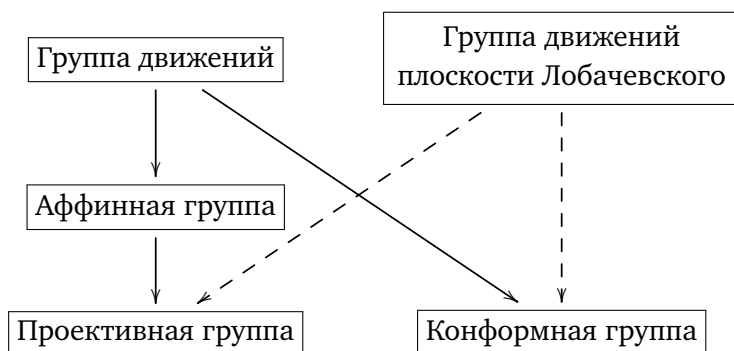
$$\theta(z) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = z\bar{z}.$$

Отображение θ взаимно однозначно отображает M_1 на M_2 . Непосредственно проверяется, что $\theta G_1 \theta^{-1} \subset G_2$. Совпадение $\theta G_1 \theta^{-1}$ с G_2 следует из того, что преобразованием из $\theta G_1 \theta^{-1}$ любую тройку точек на границе можно перевести в любую другую. $\square$

В конформной модели плоскости Лобачевского углы измеряются как евклидовы, а прямыми являются дуги окружностей и части прямых, перпендикулярные к границе.

Пользуясь этой моделью, легче доказать теорему о том, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше π .

Сводка основных групп ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ПЛОСКОСТИ



(Стрелка означает включение; пунктир означает, что включение зависит от модели.)

Задачи

58. Найти геометрическое место точек пересечения карательных к данной окружности, проведённых через концы хорды, проходящей через данную точку внутри окружности.
59. Сформулировать теорему, двойственную:
 - а) утверждению задачи 35;
 - б) теореме о том, что сумма двух сторон треугольника на плоскости Лобачевского больше третьей.
- 60*. Доказать, что если корреляция φ удовлетворяет условию $\varphi^2 = \varepsilon$ и существует такая точка A , что $A \in \varphi(A)$, то φ — полярное преобразование относительно некоторой невырожденной кривой 2-го порядка.

- 61.* Доказать, что стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми и переводит окружности на сфере в прямые и окружности на плоскости.
62. Доказать, что конформное преобразование, не оставляющее на месте ∞ , однозначно представляется в виде произведения движения и инверсии.
63. Найти все конформные преобразования γ , удовлетворяющие условиям:
 а) $\gamma(1) = 0$, $\gamma(i) = 1$, $\gamma(-i) = \infty$;
 б) $\gamma(1) = i$, $\gamma(1+i) = 1$, $\gamma(i) = 0$.
64. Записать через операции над комплексными числами инверсию в окружности радиуса r с центром в точке C .
65. Доказать, что если δ — инверсия, а γ — любое конформное преобразование, то $\gamma\delta\gamma^{-1}$ — либо инверсия, либо отражение в прямой.
66. Доказать, что не существует аддитивной меры дуги окружности, инвариантной относительно всех конформных преобразований.
67. Построить окружность, проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под данными углами.
68. Доказать, что если конформное преобразование 2-го рода переводит прямую l в себя, а точки $A, B \in l$ меняет местами, то любую окружность, проходящую через эти точки, оно оставляет на месте.
69. В данную окружность C вписать многоугольник $A_1A_2, \dots, A_n$, стороны A_iA_{i+1} которого проходят через данные точки O_i или параллельны данным прямым l_i .
 УКАЗАНИЕ. Рассмотреть конформные преобразования 2-го рода γ_i , удовлетворяющие условиям:

$$\gamma_i(A_i) = A_{i+1}, \quad \gamma_i(A_{i+1}) = A_i, \quad \gamma_i(O_i) = O_i \quad \text{или} \quad \gamma_i(l_i) = l_i.$$
 Точка A_1 будет неподвижной точкой преобразования $\gamma_n\gamma_{n-1} \dots \gamma_2\gamma_1$.
70. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ переводило круг $|z| < 1$ в себя.
- 71.* Как измеряется длина отрезка на плоскости Лобачевского в конформной модели?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗАЧЁТА

№№ 3–6, 8–12, 19, 20, 22–24, 26–28, 30–34, 37, 38, 42, 44, 46–48, 55а, 56, 58, 59, 62–64, 67, 70.

Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны

Н. В. Богачёв

*Посвящается моему учителю,
Эрнесту Борисовичу Винбергу
(1937–2020)*

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дискретных групп движений пространств постоянной секционной кривизны (т. е. пространств Евклида $\mathbb{E}^n$, многомерных сфер $\mathbb{S}^n$ или пространств Лобачевского $\mathbb{H}^n$, описанных в § 3) является ярким и активно развивающимся направлением современной математики и соединяет в себе различные её области, такие как геометрия, алгебра, топология, теория чисел и др. В качестве таких групп можно рассматривать группы симметрий многогранников и кристаллов, фундаментальные группы многообразий и пространственных форм, группы целочисленных преобразований Лоренца и пр.

Важной частью теории дискретных групп является разработанная Э. Б. Винбергом теория дискретных групп, порождённых отражениями, в пространствах Лобачевского. Такие группы называют *гиперболическими группами отражений*, хотя они и состоят не только из отражений. Теории групп отражений (не только в пространствах Лобачевского, но и в евклидовых пространствах и на сферах) посвящены статьи в Математическом просвещении под авторством В. О. Бугаенко [4, 5], Э. Б. Винберга [2] и О. В. Шварцмана [3]. К этим группам мы будем неоднократно обращаться в данной статье.

Теория дискретных групп движений является частью более общей теории дискретных подгрупп групп Ли, среди которых большое значение имеют так называемые арифметические дискретные группы. Знаменитый результат Г. А. Маргулиса (за который, в числе прочих, он получил

Филдсовскую премию 1978 года) гласит, что всякая неприводимая решётка (т. е. неприводимая дискретная подгруппа конечного кообъёма) в полупростой группе Ли вещественного ранга > 1 является *арифметической*. Это утверждение для групп ранга ≥ 1 было известно как гипотеза Сельберга и Пятецкого-Шапиро и возникло ещё в 1960-х. Оказалось, что контрпримеры к этой гипотезе для групп Ли ранга 1 нашлись среди дискретных групп движений пространства Лобачевского.

Дискретные группы движений имеют также важное значение в геометрии и топологии, а именно в изучении *гиперболических многообразий и орбифолдов*. *Гиперболическим многообразием* называется гладкое многообразие, которое (грубо говоря) локально выглядит как пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Известно, что всякое гиперболическое многообразие имеет вид $\mathbb{H}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная группа движений пространства Лобачевского, свободная от кручения (т. е. без элементов конечного порядка), являющаяся *фундаментальной группой* многообразия M . Гиперболические n -мерные многообразия замечательны тем, что при $n = 2$ (теорема об униформизации) и $n = 3$ (программа геометризации Тёрстона) многие гладкие многообразия имеют именно гиперболическую структуру. А именно, все двумерные ориентируемые поверхности за исключением сферы и тора являются гиперболическими (в силу теоремы Гаусса — Бонне). В случае же трёхмерных многообразий известно, что многообразия вида $S^3 \setminus K$, где K — узел, являются некомпактными гиперболическими 3-многообразиями за исключением тех случаев, когда K принадлежит классу сателлитных или классу торических узлов. Многообразия такого рода называются дополнениями к узлам (также изучаются и дополнения к зацеплениям). Нужно отметить, что У. Тёрстон нашёл целых 8 «модельных» трёхмерных геометрий, и все они реализуются для различных многообразий в теореме о геометризации. Многие из утверждений в нашей статье, которые верны для классических пространств $\mathbb{E}^3$, S^3 , $\mathbb{H}^3$, верны и для остальных.

В параграфе 2 даются предварительные сведения из теории групп, в частности, групп движений и преобразований. В параграфе 3 обсуждаются *модели трёх пространств постоянной кривизны*, выпуклые многогранники в них, а также полные группы изометрий (или движений) этих пространств. В параграфе 4 даются определения *дискретных групп движений и их фундаментальных областей*, а также приводятся различные примеры. Параграф 5 расскажет читателю про *метод Пуанкаре*, а именно про то, как записать дискретную группу движений в абстрактном виде через образующие (порождающие элементы) и определяющие соотношения. Следующий параграф 6 посвящён *дискретным группам отраже-*

ний и теории Э. Б. Винберга. Наконец, последний параграф 7 является неформальным введением в теорию арифметических групп и излагает алгоритм Винберга построения фундаментальных областей.

Благодарности

Данная статья написана на основе спецкурса, прочитанного Э. Б. Винбергом на мехмате МГУ весной 2011 года. Автор статьи с удовольствием вспоминает лекции этого курса, побудившие его, тогдашнего студента второго курса, выбрать Э. Б. Винберга своим научным руководителем. Автор выражает ему глубокую благодарность за ценнейшие обсуждения, доброжелательное отношение, постоянную помощь, советы и внимание в течение всего этого времени.

§ 2. Группы движений

Напомним, что метрическим пространством называется множество X , снабжённое функцией расстояния или метрикой, т. е. отображением $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$ для всех $x, y \in X$;
- невырожденность: $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для всех точек $x, y, z \in X$.

Движением пространства X называется такое биективное отображение $f: X \rightarrow X$, что $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что сюръективное отображение $f: X \rightarrow X$, для которого $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$, является движением.

Совокупность G движений пространства X является группой, если

- для всяких $g_1, g_2 \in G$ их композиция $g_1 g_2$ принадлежит G ;
- для всякого движения $g \in G$ обратное движение g^{-1} тоже принадлежит G ;
- тождественное движение e принадлежит G .

Ясно, что все движения пространства X образуют группу, так называемую полную группу изометрий. Её обычно обозначают через $\text{Isom}(X)$.

Ещё со школьной скамьи всем нам хорошо известна аффинная евклидова плоскость $\mathbb{E}^2$, где расстояние между любыми двумя точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ можно вычислить по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Расстояние между точками x и y можно также записать как длину вектора $x - y \in \mathbb{R}^2$ из соответствующего евклидова (т. е. снабжённого положительно определённым скалярным умножением, в данном случае стандартным) векторного пространства $\mathbb{R}^2$, а именно $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$.

Движениями плоскости $\mathbb{E}^2$ являются параллельные переносы, повороты, отражения и их всевозможные композиции. Описание полной группы изометрий $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ приведено в конце этого параграфа, а группа всех движений $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ евклидова n -мерного пространства обсуждается в параграфе 3.

Группой движений плоскости является, например, группа поворотов на все углы α вокруг фиксированной точки плоскости (она изоморфна абелевой группе по сложению $(\mathbb{R}, +)$), или группа, порождённая поворотом на угол $\pi/4$ (это группа $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$), или группа симметрий правильного n -угольника, известная как группа диэдра D_n . *Ортогональная группа* $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\}$, состоящая из вещественных невырожденных матриц, сохраняющих стандартную евклидову структуру, является подгруппой группы $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ всех движений n -мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Ортогональные матрицы, грубо говоря, задают «повороты» и «отражения», оставляющие на месте начало координат. Например, в двумерном случае, т. е. для $n = 2$, группа $O_2(\mathbb{R})$ состоит из всех поворотов вокруг начала координат, а также из отражений относительно всех прямых, проходящих через начало координат. Заметим, что *специальная ортогональная группа* $SO_2(\mathbb{R}) = \{A \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ является подгруппой индекса 2 в $O_2(\mathbb{R})$ и состоит из преобразований, сохраняющих ориентацию, а именно, из поворотов вокруг начала координат. Как мы отметим чуть ниже, группе $O_n(\mathbb{R})$ до полной группы изометрий $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ не хватает лишь параллельных переносов (см. § 3).

Группы движений являются частным случаем более общего класса *групп преобразований*. *Орбитой* точки $x \in X$ для группы преобразований G , действующей на пространстве X , называется множество

$$Gx := \{gx \mid g \in G\},$$

то есть совокупность всех образов элемента x под действием группы G . *Стабилизатором* точки $x \in X$ называется множество всех преобразований, которые оставляют эту точку на месте, т. е. множество

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Нетрудно проверить, что стабилизатор точки также является группой преобразований, более точно, подгруппой группы G .

Для всякой подгруппы $H < G$ можно рассмотреть множества G/H и $H \backslash G$ левых и правых смежных классов, состоящие из элементов вида

gH и Hg соответственно, где $g \in G$. Число $[G : H] = \text{card}(G/H) = \text{card}(H \backslash G)$ (здесь $\text{card}(A)$ обозначает мощность множества A) называется *индексом* подгруппы H . Следует отметить, что $[G : G_x] = \text{card}(Gx)$.

Подгруппа $H < G$ группы G называется *нормальной*, если для всех $g \in G$ верно, что $gH = Hg$ или, эквивалентно, $gHg^{-1} = H$. В этом случае пишут $H \triangleleft G$.

Разложение группы G в *прямое произведение* своих подгрупп N_1 и N_2 (пишут $G = N_1 \times N_2$) означает, что $G = N_1 N_2$, где обе подгруппы N_1, N_2 являются нормальными подгруппами и их пересечение равно $N_1 \cap N_2 = \{e\}$. Если же только одна из подгрупп является нормальной, скажем, $N \triangleleft G$, и при этом $G = N \cdot H$, где $N \cap H = \{e\}$, то говорят, что группа G раскладывается в *полупрямое произведение* $G = N \rtimes H$.

Если группы заданы с помощью образующих и определяющих соотношений, т. е. $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ (любой элемент из группы G_1 выражается в виде композиции порождающих элементов из S_1 , для которых выполняются соотношения из множества R_1) и $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, то их *свободным произведением* называется группа

$$G_1 * G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle.$$

ПРИМЕР 1. В коммутативной (абелевой) группе все подгруппы являются нормальными.

ПРИМЕР 2. Подгруппа индекса 2 всегда является нормальной. Действительно, пусть $H < G$, и пусть имеется всего два левых смежных класса, H и какой-то gH . Тогда и правых смежных классов всего два: H и Hg^{-1} . Отсюда следует, что левый и правый смежные классы совпадают, поскольку тривиальные классы H (очевидно) совпадают, а нетривиальные представлены в единственном оставшемся экземпляре.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите, что четверная группа Клейна

$$V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

изоморфная простейшей группе диэдра D_2 , является нормальной подгруппой в группе перестановок S_4 .

ПРИМЕР 3. Докажем, что $GL_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$, где $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Действительно, определитель матриц задаёт гомоморфизм $\det: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$, причём $\text{Ker}(\det) = SL_n(\mathbb{R})$ — нормальная подгруппа, $\text{Im}(\det) = \mathbb{R}^*$. По теореме о гомоморфизме $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$. Также можно отметить, что $\mathbb{R}^* \simeq \{\text{diag}(d, 1, \dots, 1) \mid d \in \mathbb{R}^*\}$. Ясно, что $\text{diag}(d, 1, \dots, 1) \in SL_n(\mathbb{R})$ только при $d = 1$. В силу всего вышесказанного мы получаем требуемое утверждение.

Рассмотрим группу $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ всех движений аффинной евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$. В ней имеется подгруппа $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2)$ индекса 2, состоящая из всех движений, сохраняющих ориентацию.

Предложение 2.1. *Имеют место следующие разложения:*

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \text{O}_2(\mathbb{R}), \quad \text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \text{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Группа $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ содержит подгруппу T_2 , состоящую из всех параллельных переносов вида $\tau_a: x \mapsto x + a$, где $x \in \mathbb{E}^2$ — точки плоскости $\mathbb{E}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ — вектор, принадлежащий евклидову векторному пространству $\mathbb{R}^2$. Очевидно, $T_2 \simeq \mathbb{R}^2$.

Нетрудно убедиться, что всякое движение плоскости можно представить в виде композиции параллельного переноса и «вращения» вокруг начала координат, т. е. $\text{Isom}(\mathbb{E}^2) = \text{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^2$. Очевидно также, что $\text{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}^2$ тривиально, так как нетривиальные параллельные переносы не имеют неподвижных точек.

Остаётся заметить, что для всякого движения $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ верно равенство $\gamma \tau_a \gamma^{-1} = \tau_{\gamma a}$ (достаточно применить левую часть к произвольной точке $y = \gamma x$), означающее, что $T_2 \triangleleft \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$.

С учётом того, что параллельные переносы и повороты вокруг фиксированной точки сохраняют ориентацию, мы получаем и второе равенство. $\square$

Пример 4. Композиция двух отражений относительно параллельных прямых на плоскости $\mathbb{E}^2$ порождает так называемую бесконечную группу диэдра D_∞ , равную $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

§ 3. ТРИ КЛАССИЧЕСКИЕ ГЕОМЕТРИИ

Известно, что существуют ровно три вида *пространств постоянной кривизны* — полных односвязных римановых многообразий с постоянной во всех точках секционной кривизной всякого двумерного направления. Это n -мерное пространство Евклида $\mathbb{E}^n$, n -мерная сфера $\mathbb{S}^n$ и n -мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Кривизна этих пространств равна 0, 1 и -1 соответственно. В этом параграфе (следуя в основном [9] и [8]) мы обсудим модели всех трёх знаменитых геометрий, а также устройство многогранников и полных групп движений в них.

3.1. Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$

Рассмотрим n -мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным евклидовым скалярным умножением $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Метрика

в аффинном евклидовом пространстве

$$\mathbb{E}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n\}$$

задаётся формулой $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$. Отметим, что (аналогично предложению 2.1)

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^n) = T_n \rtimes O_n(\mathbb{R}), \quad \text{Isom}^+(\mathbb{E}^n) = T_n \rtimes SO_n(\mathbb{R}),$$

где $O_n(\mathbb{R})$ и $SO_n(\mathbb{R})$ — ортогональная и специальная ортогональная группы пространства $\mathbb{R}^n$ соответственно, а $T_n \simeq \mathbb{R}^n$ — группа параллельных переносов в нём. Известно, что всякое движение $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ можно представить в виде композиции не более чем $n + 1$ отражения относительно гиперплоскостей.

3.2. СФЕРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{S}^n$

Модель сферического пространства $\mathbb{S}^n$ получается при рассмотрении пространства

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n\}$$

с евклидовым скалярным умножением $(x, y) = x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Положим

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\}.$$

На сфере скалярное умножение задаёт угловую метрику $\cos \rho(x, y) = (x, y)$. Полная группа движений состоит из ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. $\text{Isom}(\mathbb{S}^n) = O_{n+1}(\mathbb{R})$. Известно, что всякое движение $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{S}^n)$ можно представить в виде композиции не более чем n отражений относительно гиперплоскостей (т. е. относительно сфер ко-размерности 1, получившихся сечениями $\mathbb{S}^n$ гиперплоскостями в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящими через начало координат).

3.3. ПРОСТРАНСТВО ЛОБАЧЕВСКОГО $\mathbb{H}^n$

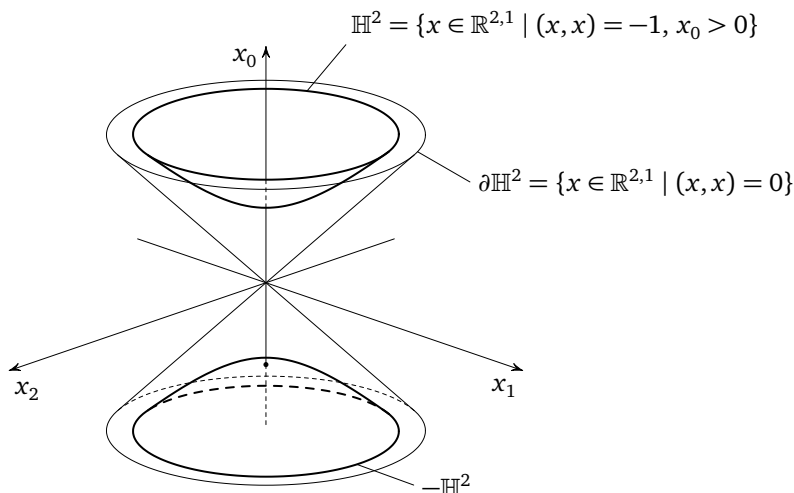
Пусть $\mathbb{R}^{n,1}$ — псевдоевклидово пространство Минковского, т. е. векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, снабжённое скалярным умножением

$$(x, y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

сигнатуры $(n, 1)$. Известно, что множество

$$\mathfrak{C} = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x, x) < 0\}$$

является открытым конусом в $\mathbb{R}^{n,1}$ с двумя связными компонентами $\mathfrak{C}^+ = \{x \in \mathfrak{C} \mid x_0 > 0\}$ и $\mathfrak{C}^- = \{x \in \mathfrak{C} \mid x_0 < 0\}$. Векторной моделью n -мерного

Рис. 1. Гиперболическая плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$

гиперболического пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ является множество лучей в $\mathfrak{C}^+$, выходящих из начала координат. Лучи, лежащие на границе конуса $\mathfrak{C}^+$, соответствуют бесконечно удалённым точкам (или, как говорят, *точкам на абсолюте*) пространства Лобачевского. Иными словами, $\mathbb{H}^n = \mathfrak{C}^+ / \mathbb{R}^+$. Можно также сказать, что $\mathbb{H}^n$ — это точки связной компоненты гиперboloида

$$\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x, x) = -1, x_0 > 0\},$$

лежащей внутри конуса $\mathfrak{C}^+$. Бесконечно удалённые точки соответствуют изотропным точкам пространства Минковского, т. е. таким x , что $(x, x) = 0$. Множество бесконечно удалённых точек называют *абсолютом* или (*идеальной*) *границей* пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ и обозначают через $\partial\mathbb{H}^n$. На рис. 1 изображена векторная модель плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$.

Расстояние в пространстве Лобачевского задаётся скалярным умножением по правилу $\rho(x, y) = -(x, y)$.

Подпространствами (плоскостями) пространства Лобачевского являются пересечения подпространств в $\mathbb{R}^{n,1}$ с $\mathbb{H}^n$. В частности, *прямые (геодезические)* в $\mathbb{H}^n$ — это сечения гиперboloида двумерными плоскостями, т. е. гиперболы.

Обозначим группу всех ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n,1}$ (т. е. группу всех преобразований, сохраняющих скалярное произведение в этом пространстве) через $O_{n,1}(\mathbb{R})$, а через $PO_{n,1}(\mathbb{R})$ — её подгруппу индекса 2, состоящую из преобразований, не меняющих местами связные компоненты $\mathfrak{C}^+$ и $\mathfrak{C}^-$. Тогда группа Ли $\text{Isom}(\mathbb{H}^n) \simeq PO_{n,1}(\mathbb{R})$ является *полной группой движений пространства Лобачевского* в этой модели. Известно,

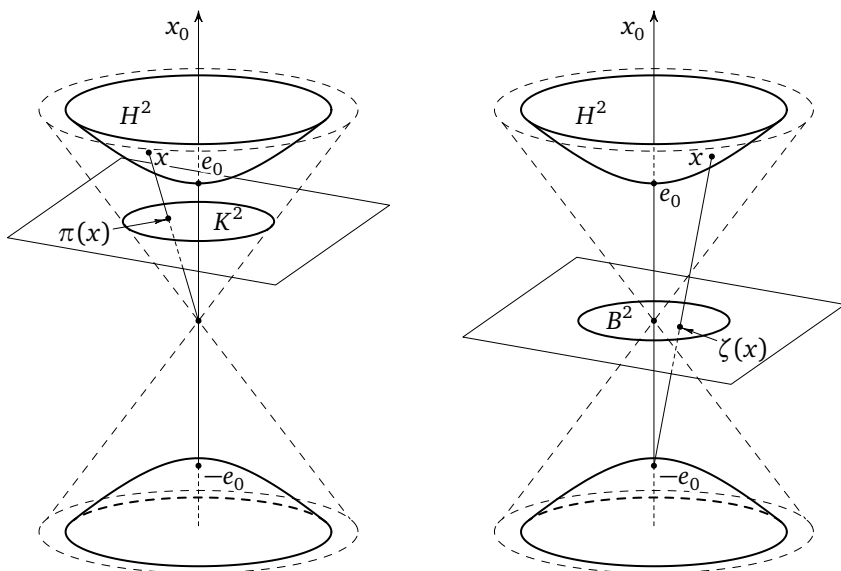


Рис. 2. Проекции $\pi(x)$ и $\zeta(x)$ с гиперboloида на модели Клейна (слева) и Пуанкаре (справа) в диске

что всякое движение $\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ можно представить в виде композиции не более чем $n + 1$ отражения относительно гиперплоскостей.

Существуют и другие модели пространства Лобачевского. Например, модели Пуанкаре и Клейна в шаре, а также модель Пуанкаре в полупространстве. На рис. 2 изображены проекции с векторной модели на гиперboloида на модели Клейна и Пуанкаре в диске. Из модели Пуанкаре в диске можно перейти к модели Пуанкаре в полупространстве посредством композиции инверсии и отражения.

Известен следующий факт, который можно доказать как в векторной модели пространства Лобачевского, так и, например, в модели Пуанкаре в шаре: множество точек, равноудалённых от точки $p \in \mathbb{H}^n$ (т. е. гиперболическая сфера), изометрично стандартной сфере S^{n-1} . Помимо этого, *орисфера* с центром в бесконечно удалённой точке $p \in \partial\mathbb{H}^n$ (т. е. множество, заданное в векторной модели как $\{x \in \mathbb{H}^n \mid (p, x) = \text{const}\}$), изометрична евклидовому пространству $\mathbb{E}^{n-1}$.

Отметим, что пространства Лобачевского $\mathbb{H}^2$ и $\mathbb{H}^3$ иногда удобно задавать следующим образом:

$$\mathbb{H}^2 = \{z = a + bi \in \mathbb{C} \mid b > 0\}, \quad \partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 0\} \cup \infty \simeq S^1$$

и

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}, \quad \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \infty \simeq S^2.$$

Модель Пуанкаре в верхнем полупространстве помогает получить следующие полезные факты:

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Более того, пусть $\tau : z \mapsto -\bar{z}$, где $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \tau \rangle, \quad \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \tau \rangle.$$

Подробнее о геометрии Лобачевского см. [6, 8, 9].

3.4. Многогранники

Здесь и далее мы будем обозначать через $\mathbb{X}^n$ одно из трёх пространств постоянной кривизны: $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n$ или $\mathbb{H}^n$.

Гиперплоскостями в $\mathbb{E}^n$ называются множества вида

$$H_{e,t} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid (x, e) + t = 0\},$$

где $e \in \mathbb{R}^n$, $(e, e) > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Гиперплоскости в $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ и $\mathbb{X}^n = \mathbb{H}^n$ определяются как множества вида

$$H_e = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) = 0\},$$

где $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ — такой вектор, что $(e, e) > 0$.

Нормируем для удобства вектор e так, чтобы было $(e, e) = 1$. Определим *отражения* в пространствах $\mathbb{X}^n$ относительно гиперплоскостей. В пространстве $\mathbb{E}^n$ *отражение* относительно гиперплоскости $H_{e,t}$ задаётся по правилу

$$\mathcal{R}_{e,t}(x) = x - 2((e, x) + t)e.$$

В таком случае инвариантная гиперплоскость $H_{e,t}$ называется *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_{e,t}$.

В пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ отражение относительно гиперплоскости H_e определяется как

$$\mathcal{R}_e(x) = x - 2(e, x)e.$$

В этом случае гиперплоскость H_e также называется *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_e$.

Далее, определим «отрицательное» полупространство

$$H_e^- = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) \leq 0\}$$

и «положительное» полупространство

$$H_e^+ = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) \geq 0\},$$

на которые H_e разбивает пространство $\mathbb{X}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Выпуклым многогранником* в пространстве $\mathbb{X}^n$ называется пересечение конечного числа («отрицательных») полупространств, имеющее непустую внутренность. *Обобщённым выпуклым многогранником* называется пересечение такого семейства полупространств (возможно, бесконечного), что любой шар пересекает только конечное число их граничных гиперплоскостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Обобщённый выпуклый многогранник в $\mathbb{X}^n$ называется *компактным* (или *ограниченным*), если находится внутри какого-то шара, и *многогранником конечного объёма*, если $\text{Vol}_{\mathbb{X}^n}(P) < \infty$.

Из конечности объёма многогранника всегда следует конечность числа его вершин, граней, рёбер и т. д. Заметим, что в случаях $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n$ из конечности объёма многогранника автоматически вытекает его компактность. В пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$ конечность объёма выпуклого многогранника означает, что он является выпуклой оболочкой конечного числа точек из $\overline{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$. Более точно, выпуклый многогранник конечного объёма является выпуклой оболочкой конечного числа обычных (принадлежащих $\mathbb{H}^n$) и бесконечно удалённых или, эквивалентно, идеальных (принадлежащих $\partial\mathbb{H}^n$) вершин. Компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного числа обычных вершин, принадлежащих $\mathbb{H}^n$.

Могут существовать многогранники, все вершины которых лежат на абсолюте. Примером является так называемый идеальный треугольник:

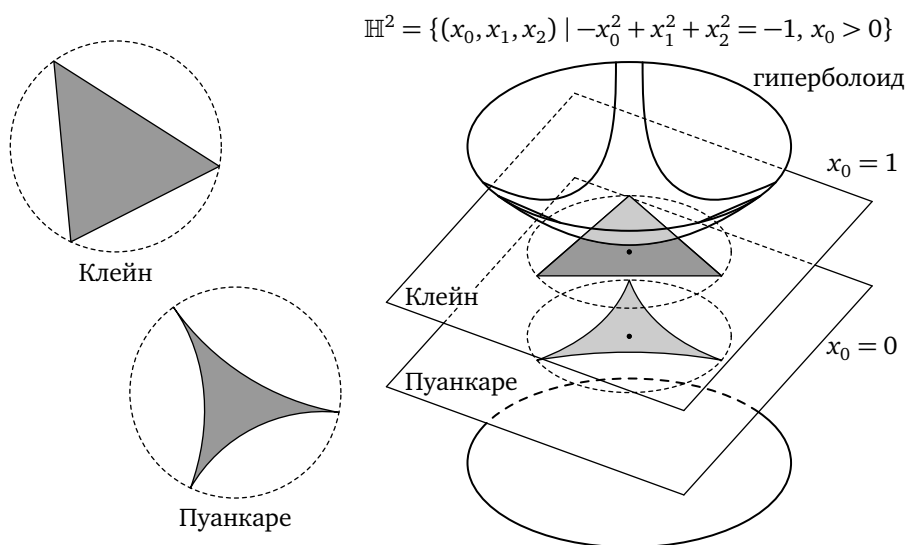


Рис. 3. Идеальный треугольник в $\mathbb{H}^2$ в трёх разных моделях

все три его угла равны нулю. На рис. 3 изображён идеальный треугольник на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ в трёх разных моделях: в векторной модели на гиперboloиде, в модели Клейна в диске и в модели Пуанкаре в диске.

§ 4. ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ И ИХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

В этом параграфе приводятся определения и примеры дискретных групп движений и их фундаментальных областей. Изложение следует, в основном, обзору [7], а также книге [9].

При определённых условиях действие группы движений на метрическом пространстве допускает наглядное геометрическое описание при помощи многогранников.

Подмножество $A \subset X$ в метрическом пространстве называется *дискретным*, если для всякой точки $a \in A$ существует шар с центром в этой точке, который не содержит других точек этого множества. Внутренность множества A (т. е. множество всех точек, входящих в A вместе с какой-то своей окрестностью) обозначается через $\text{int}(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Подгруппа $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется *дискретной группой движений*, если все её орбиты Γx дискретны, а стабилизаторы Γ_x конечны.

Поскольку сфера $\mathbb{S}^n$ является компактным многообразием, все дискретные группы движений сферы конечны (поскольку все орбиты конечны).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Замкнутая область $D \subseteq \mathbb{X}^n$ называется *фундаментальной областью* дискретной группы движений $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$, если

- (1) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D = \mathbb{X}^n$;
- (2) для любых $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ верно, что $\text{int}(\gamma D) \cap \text{int}(\gamma' D) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\gamma = \gamma'$;
- (3) для всякой точки $p \in \mathbb{X}^n$ существует такое $\varepsilon > 0$, что открытый метрический шар $B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{X}^n \mid \rho(x, p) < \varepsilon\}$ с центром в точке p и радиусом ε пересекает лишь конечное число областей $\gamma D, \gamma \in \Gamma$.

Если D — фундаментальная область, то говорят, что множества γD , где $\gamma \in \Gamma$, образуют *разбиение* или *замощение* пространства $\mathbb{X}^n$.

Смысл понятия фундаментальной области состоит в том, что это хорошее в топологическом смысле подмножество, содержащее представитель всех орбит группы Γ , причём почти из всех орбит — ровно по одному представителю.

Фундаментальная область дискретной группы движений не является однозначно определённым объектом. В её выборе, как правило, имеется произвол.

Пример 1. Рассмотрим группу параллельных переносов $T_{\{e_1, \dots, e_n\}} \simeq \mathbb{Z}^n$ на целочисленные линейные комбинации некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве $\mathbb{E}^n$. Действительно, орбитами всякой точки евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ будут решётки, изоморфные $\mathbb{Z}^n$. Стабилизаторы в этом случае будут тривиальными.

В качестве фундаментальной области группы $T_{\{e_1, \dots, e_n\}}$ можно выбрать параллелепипед, натянутый на базисные векторы в какой-либо точке $\mathbb{R}^n$. Внутренность такого параллелепипеда содержит ровно по одному представителю каждой орбиты группы $T_{\{e_1, \dots, e_n\}}$ в $\mathbb{E}^n$.

Тем не менее фундаментальная область для такой группы не единственна. На рис. 4 представлены две разные фундаментальные области для действия группы $\mathbb{Z}^2$ на плоскости.

На рис. 5 изображена область, которая не является фундаментальной для действия группы $\mathbb{Z}^2$ на плоскости, поскольку соответствующее раз-

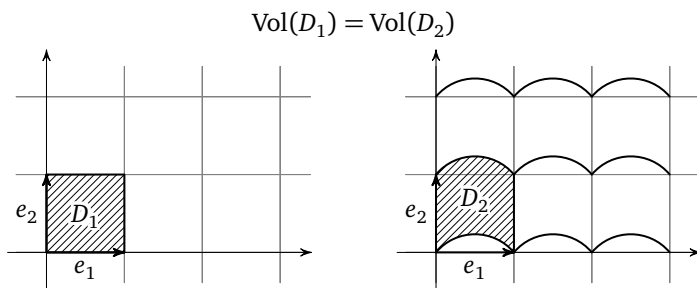


Рис. 4. Фундаментальные области для дискретной группы $\mathbb{Z}^2$

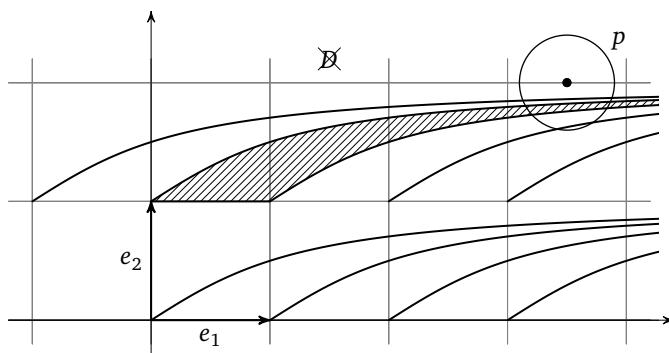


Рис. 5. Область, не фундаментальная для $\mathbb{Z}^2$

биение не удовлетворяет условию локальной конечности (см. определение 4.2, (3)). А именно, данная область представляет из себя фигуру, ограниченную горизонтальным отрезком и двумя ветвями арктангенса, отличающимися друг от друга горизонтальным сдвигом. Нетрудно убедиться, что данная область удовлетворяет условиям (1) и (2) определения 4.2, но окрестность точки p пересекает бесконечное число копий таких областей.

ПРИМЕР 2. Группы симметрий $\text{Sym}(P)$ многогранников $P \subset \mathbb{E}^n$ или группы симметрий дискретных подмножеств также являются дискретными группами движений в $\mathbb{E}^n$. Например, в качестве фундаментальной области для действия группы симметрий тетраэдра на его поверхности можно выбрать любой из треугольников, на которые его грани разбиваются своими высотами.

ПРИМЕР 3. Группа S_n , действующая на пространстве $\mathbb{E}^n$ перестановками декартовых координат. В качестве фундаментальной области группы S_n можно выбрать конус $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Дискретная группа движений $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется дискретной группой конечного кообъёма (или кристаллографической, или ко-конечной), если её фундаментальная область имеет конечный объём в $\mathbb{X}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Дискретная группа движений $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется кокомпактной, если её фундаментальная область является ограниченным (или компактным) множеством в $\mathbb{X}^n$.

Пусть Γ — дискретная группа движений пространства $\mathbb{X}^n$, и пусть $a \in \mathbb{X}^n$ — такая точка, стабилизатор Γ_a которой тривиален. Для всякого элемента $g \neq 1$ в группе Γ определим полупространство (рис. 6)

$$H_g(a) = \{x \in \mathbb{X}^n \mid \rho(x, a) \leq \rho(x, ga)\}.$$

Областью Дирихле с центром в точке a называется множество

$$D(a) = \bigcap_{1 \neq g \in \Gamma} H_g(a).$$

В силу дискретности группы Γ область Дирихле является обобщённым выпуклым многогранником.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ — дискретная группа движений, и пусть $\Gamma_a = \{e\}$ для некоторой точки $a \in \mathbb{X}^n$. Тогда область Дирихле $D(a)$ является фундаментальной областью группы Γ .

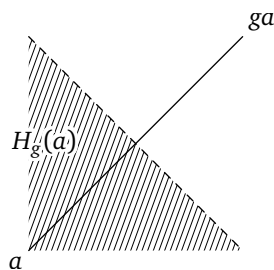


Рис. 6. Полупространство $H_g(a)$

Из этой теоремы следует, что всякая дискретная группа движений пространства постоянной кривизны обладает фундаментальной областью, являющейся обобщённым выпуклым многогранником.

§ 5. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ И МЕТОД ПУАНКАРЕ

5.1. МЕТОД ПУАНКАРЕ

Разбиение пространства на выпуклые многогранники называется *нормальным*, если пересечение любых двух многогранников либо пусто, либо является гранью каждого из них.

Всякое разбиение на выпуклые многогранники можно каноническим образом *нормализовать* путём введения фиктивных граней. А именно, следует объявить гранями всевозможные непустые пересечения многогранников разбиения, не содержащие других таких пересечений той же размерности.

Пусть P — выпуклый фундаментальный многогранник дискретной группы Γ , нормализованный, если необходимо. Многогранники γP , $\gamma \in \Gamma$, будем называть *камерами*. Две камеры называются *смежными*, если их пересечение есть их общая $(n-1)$ -мерная грань.

Для каждой $(n-1)$ -мерной грани F многогранника P обозначим через s_F движение, переводящее P в многогранник, смежный с ним по грани F . Через F' обозначим прообраз грани F при этом движении, т. е. $F' = s_F^{-1}(F)$. Очевидно, что $s_F s_{F'} = e$ (в этом действительно легко убедиться, используя тот факт, что всякое движение переводит пару смежных камер в пару смежных камер). Движения вида s_F называются *преобразованиями смежности*. Множество преобразований смежности обозначим через S .

Цепью камер называется последовательность камер $P_0, P_1, \dots, P_k$, где P_i смежна с P_{i+1} . Каждая последовательность $(s_1, \dots, s_k)$ преобразований смежности однозначно соответствует какой-то цепи камер, а именно, пусть $s_i = s_{F_i}$, и пусть

$$P_0 = P, \quad P_1 = s_1 P, \quad P_2 = s_1 s_2 P, \quad \dots, \quad P_k = s_1 \dots s_k P,$$

где грани P_i и P_{i-1} смежны по грани $s_1 \dots s_{i-1} F_i$ (рис. 7).

Зафиксировав камеру P , заметим, что любую камеру можно соединить с P какой-то цепью. Если же для какой-то цепи $P_0 = P_k = P$, то мы получаем соотношение $s_1 \dots s_k = e$. Соответствующие таким соотношениям цепи называются *циклами камер*.

С каждой $(n-2)$ -мерной гранью F фундаментального многогранника P можно связать цикл обхода вокруг этой грани. Соответствующее этому циклу соотношение $s_1 \dots s_k = e$ будем называть *соотношением Пуанкаре*.

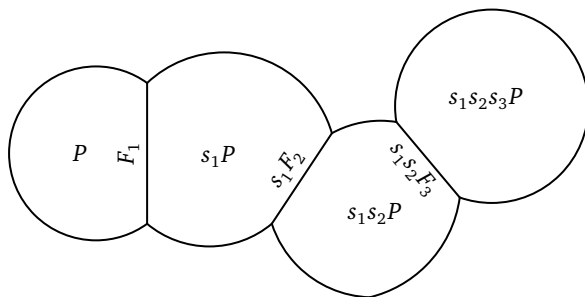


Рис. 7. Цепь (галерея) фундаментальных камер

Соотношения вида $s_F s_{F'} = e$ и соотношения Пуанкаре называются *локальными соотношениями*. Следующая теорема Пуанкаре гласит, что, имея фундаментальный многогранник для дискретной группы движений $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$, мы можем получить представление этой группы посредством образующих и определяющих соотношений.

ТЕОРЕМА 5.1 (А. Пуанкаре). Пусть Γ — дискретная группа движений пространства X , и пусть P — её фундаментальный многогранник. Тогда группа Γ порождается множеством S всех преобразований смежности, а множество всех локальных соотношений R является множеством определяющих соотношений, т. е. $\Gamma = \langle S | R \rangle$.

5.2. Модулярная группа

Рассмотрим один показательный пример дискретной группы движений плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$, а именно, модулярную группу $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, состоящую из преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1, \quad (1)$$

в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Если добавить к этой группе отражение (комплексное сопряжение со знаком минус) $\tau: z \mapsto -\bar{z}$, то мы получим расширенную модулярную группу $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes \langle \tau \rangle$. Эта группа Γ (помимо преобразований типа (1)) содержит также движения вида

$$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = -1. \quad (2)$$

Как показано в [2], Γ порождается отражениями, и её фундаментальной областью служит треугольник T с одной бесконечно удалённой вершиной, задаваемый в модели Пуанкаре неравенствами (рис. 8)

$$|\text{Re } z| \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1.$$

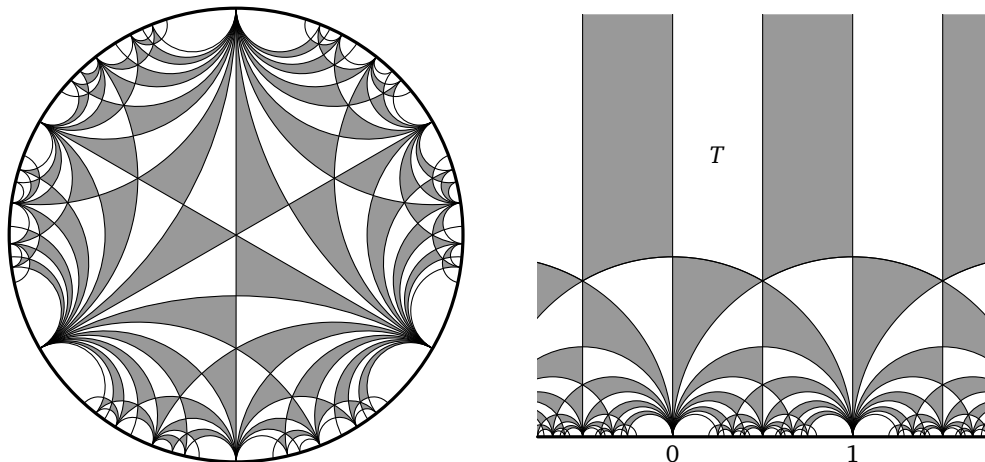


Рис. 8. Замоещение плоскости Лобачевского фундаментальными треугольниками группы $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes \langle \tau \rangle$ в моделях Пуанкаре в диске (слева) и в верхней полуплоскости (справа)

Углы треугольника T равны $\pi/2$, $\pi/3$ и 0 . Отражения относительно его сторон имеют вид

$$\tau: z \mapsto -\bar{z}, \quad \tau_1: z \mapsto 1 - \bar{z}, \quad \tau_2: z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

В силу того, что $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes \langle \tau \rangle$, можно убедиться, что фундаментальной областью для группы $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ будет служить треугольник $T \cup \tau(T)$ с углами $\pi/3$, $\pi/3$ и 0 .

Более того, метод Пуанкаре и более аккуратный геометрический анализ данной картины позволяет понять, что группа $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ порождается преобразованиями $\tau \circ \tau_2$ (центральная симметрия в точке i) и поворотом $\tau_2 \circ \tau_1$ на угол $2\pi/3$ вокруг точки $1/2 + i\sqrt{3}/2$, между которыми нет соотношения. Из этого вытекает следующий нетривиальный факт:

$$\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3,$$

где $*$ обозначает свободное произведение групп.

§ 6. Группы отражений и многогранники Кокстера

Дискретная группа движений, порождённая отражениями в гиперплоскостях в пространстве $\mathbb{X}^n$, называется *группой отражений*.

Дискретные группы отражений представляют особый интерес благодаря простому комбинаторному строению своих фундаментальных многогранников. Для их описания мы воспользуемся *методом Пуанкаре* (см.

теорему 5.1). Пусть Γ — группа отражений, а P — её фундаментальный (обобщённый выпуклый) многогранник. Заметим, что все преобразования смежности в данном случае удовлетворяют соотношению $s^2 = e$. Остаётся посмотреть на обход вокруг произвольной $(n-2)$ -мерной грани. Всякая такая грань F является пересечением двух $(n-1)$ -мерных граней H_1 и H_2 . Заметим, что композиция отражений s_1 и s_2 относительно этих граней является поворотом относительно грани F . Поскольку группа дискретна, этот поворот $s_1 s_2$ имеет конечный порядок, т. е. выполняется соотношение $(s_1 s_2)^m = e$. Более того, в этом случае двугранный угол между гиперплоскостями H_1 и H_2 равен π/m , так как иначе появилось бы какое-то зеркало отражения, разрезающее фундаментальный многогранник P на части, что невозможно.

Обобщённый выпуклый многогранник P называется *многогранником Кокстера*, если всякие две гиперплоскости H_i и H_j , ограничивающие P , либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij} , где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$.

Известен следующий результат, восходящий ещё к Г. Кокстеру. Однако первое доказательство этой теоремы в общем виде для всех пространств постоянной кривизны принадлежит, по всей видимости, Э. Б. Винбергу.

ТЕОРЕМА 6.1. *Всякая дискретная группа отражений в пространстве $\mathbb{X}^n$ порождается отражениями относительно стенок (граней) какого-то многогранника Кокстера.*

И наоборот, если P — обобщённый многогранник Кокстера в пространстве $\mathbb{X}^n$, то группа, порождённая отражениями относительно его граней, является дискретной, и многогранник P является её фундаментальной областью.

Следует заметить, что все максимальные дискретные группы отражений конечного кообъёма в $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ были классифицированы Г. Кокстером в 1933 году (см. об этом работу [4]). Эти группы отражений описываются в виде так называемых параболических и эллиптических схем Кокстера. В силу сказанного в параграфе 3, стабилизатор обычной вершины многогранника Кокстера в $\mathbb{H}^n$ является конечной сферической группой отражений, а стабилизатор бесконечно удалённой вершины — евклидовой группой отражений. Это соображение позволяет описывать и гиперболические многогранники Кокстера в виде диаграмм/схем Кокстера, а именно, глядя на схему Кокстера многогранника P , можно определить, является ли он компактным или многогранником конечного объёма, или не является.

Ещё одним следствием применения метода Пуанкаре к группам отражений является их абстрактная запись через образующие и определяю-

щие соотношения, а именно, мы получаем, что

$$\Gamma = \langle s_1, \dots, s_k \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = e \quad \forall i, j = 1, \dots, k \rangle.$$

Это приводит нас к следующему понятию. *Абстрактной группой Кокстера* называется группа Γ с фиксированной системой образующих S и определяющими соотношениями вида $s^2 = e$ и $(ss')^{m(s,s')} = e$ для произвольных различных $s, s' \in S$, где $m(s, s') \in \{2, 3, 4, \dots, +\infty\}$.

Алгебраически это записывается так:

$$\Gamma = \langle s \in S \mid s^2 = (ss')^{m(s,s')} = e \rangle.$$

Но далеко не всякая абстрактная группа Кокстера является дискретной группой отражений одного из трёх пространств постоянной кривизны. Линейные представления групп Кокстера были классифицированы Э. Б. Винбергом в 1971 году с помощью так называемого конуса Титса (Ж. Титс первым построил некоторое классическое представление группы Кокстера и показал, что фундаментальной областью будет некоторый многогранный конус). Об этом можно прочесть в работе [3].

Рассмотрим некоторые примеры замощений плоскости Лобачевского. На плоскости Лобачевского бесконечно много треугольников Кокстера, так же как и многоугольников. Треугольники Кокстера с углами $\pi/k, \pi/l, \pi/m$ можно задавать такими тройками чисел (k, l, m) , что

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1.$$

На рис. 9 представлены замощения плоскости Лобачевского треугольниками типов $(3, 3, 4)$ и $(2, 4, 6)$.

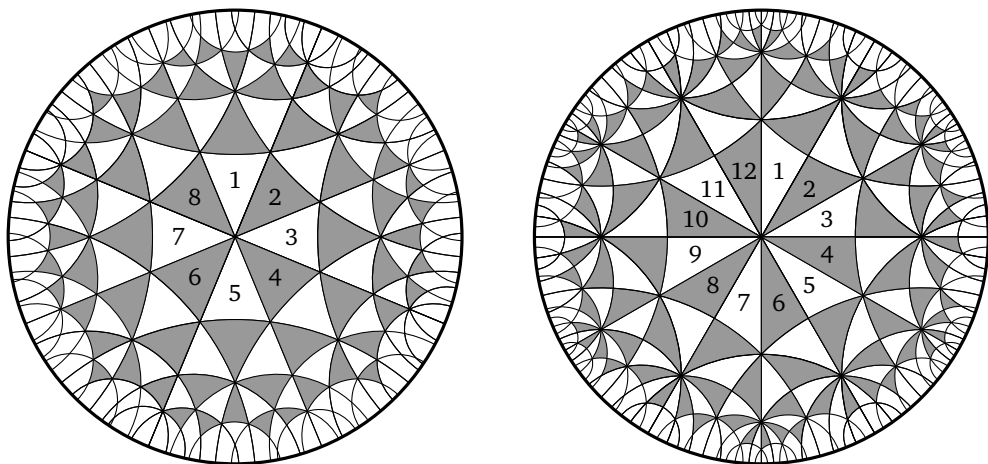


Рис. 9. Замощения плоскости Лобачевского треугольниками типа $(3, 3, 4)$ (слева) и $(2, 4, 6)$ (справа)



Рис. 10. Проекция замощения плоскости Лобачевского из модели на гиперboloиде в модели Пуанкаре (слева) и Клейна (справа) в диске

На рис. 10 представлена проекция замощения плоскости Лобачевского треугольниками типа $(3, 3, 4)$ из модели на гиперboloиде в модели Пуанкаре и Клейна в диске.

Следующая теорема позволяет изучать подгруппы, порождённые отражениями, в дискретных группах движений. Оказывается, если в какой-то группе движений подгруппа, порождённая всеми отражениями, имеет фундаментальный многогранник Кокстера с большим количеством симметрий, то это даёт много информации об исходной группе движений.

ТЕОРЕМА 6.2 (Э. Б. Винберг). Пусть $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{X}^n)$ — дискретная группа движений, и пусть Γ_R — её подгруппа, порождённая всеми отражениями, входящими в Γ . Обозначим через P_R фундаментальный многогранник (Кокстера) группы Γ_R . Тогда $\Gamma_R \triangleleft \Gamma$ и $\Gamma = \Gamma_R \rtimes \Delta$, где $\Delta = \Gamma \cap \text{Sym}(P_R)$.

Последняя теорема означает, в частности, что если Γ является дискретной группой конечного кообъёма, а её подгруппа отражений является подгруппой конечного индекса (т. е. у P_R конечная группа симметрий), то и многогранник P_R имеет конечный объём.

Это простое соображение нам понадобится для рассмотрения арифметических групп отражений, которым мы посвятим следующий параграф. Они заслуживают даже отдельной статьи.

§ 7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И АЛГОРИТМ ВИНБЕРГА

Известен общий способ построения арифметических дискретных подгрупп в полупростых группах Ли, но мы ограничимся некоторым простейшим, хотя и наглядным, случаем.

Пусть $f(x)$ — квадратичная форма с целыми коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющая сигнатуру $(n, 1)$. Рассмотрим группу целочис-

ленных линейных преобразований, сохраняющих эту форму:

$$O(f, \mathbb{Z}) = \{A \in GL_{n+1}(\mathbb{Z}) \mid f(x) = f(Ax) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Эта группа будет являться также группой целочисленных автоморфизмов Лоренцевой решётки $L = \mathbb{Z}^{n+1}$, снабжённой целочисленным скалярным умножением $(\cdot, \cdot)$, для которого $(x, x) = f(x)$. Поскольку форма $f(x)$ имеет сигнатуру $(n, 1)$, над полем $\mathbb{R}$ она эквивалентна стандартной форме $f_n(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. В силу этого одну из связных компонент гиперболоида $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = -1\}$ можно отождествить с пространством Лобачевского $\mathbb{H}^n$, причём группа $O(f, \mathbb{Z})$ сохраняет обе компоненты этого гиперболоида. Рассмотрим подгруппу $PO(f, \mathbb{Z})$ индекса 2 в группе $O(f, \mathbb{Z})$, состоящую из преобразований, оставляющих компоненту $\mathbb{H}^n$ на месте. Таким образом, мы получили дискретную группу $PO(f, \mathbb{Z})$ движений пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Более того, согласно теореме Б. А. Венкова, группа $PO(f, \mathbb{Z})$ всегда является дискретной группой движений конечного кообъёма! Группы вида $PO(f, \mathbb{Z})$ и все соизмеримые с ними подгруппы $Isom(\mathbb{H}^n)$ называются *арифметическими*.

В группе $PO(f, \mathbb{Z})$ можно рассмотреть подгруппу, порождённую всеми отражениями относительно гиперплоскостей в пространстве. Несократимый вектор $e \in L$ называется k -корнем, если $2(e, x) \in k\mathbb{Z}$ для всех $x \in L$, где $k = (e, e) > 0$. Всякий k -корень задаёт k -отражение

$$\mathcal{R}_e(x) = x - \frac{2(e, x)}{f(e)}e.$$

Ясно, что $2(e, x)/f(e) \in \mathbb{Z}$, поскольку отражение принадлежит группе $PO(f, \mathbb{Z})$. Обозначим такую подгруппу отражений через $R(f)$. Если $R(f)$ является подгруппой конечного индекса в $PO(f, \mathbb{Z})$, то она является *арифметической группой отражений*, а квадратичная форма f называется *рефлексивной*. Более того, если квадратичная форма f изотропна, т. е. $f(v) = 0$ для некоторого ненулевого $v \in \mathbb{Z}^{n+1}$, то фундаментальные многогранники групп $PO(f, \mathbb{Z})$ и $R(f)$ будут некомпактными.

Например, с помощью подходящей замены базиса можно показать, что группа $PSL_2(\mathbb{Z})$ является арифметической. Более того, известно, что всякая некомпактная арифметическая подгруппа в $Isom(\mathbb{H}^2)$ соизмерима с $PSL_2(\mathbb{Z})$.

В 1967 году, всё в той же фундаментальной работе [1], Э. Б. Винберг доказал критерий арифметичности для дискретных групп, порождённых отражениями в гранях многогранника Кокстера конечного объёма. Оказывается, что для определения арифметичности достаточно посмотреть на схему Кокстера (или на матрицу Грама) этого многогранника P .

В 1972 году Э. Б. Винберг предложил алгоритм, последовательно строящий фундаментальный многогранник для любой дискретной группы отражений в $\mathbb{H}^n$. Этот алгоритм очень удобно применять к группам вида $R(f)$, поскольку для них имеется техническая возможность перебирать все отражения.

Попробуем применить этот алгоритм для квадратичной формы

$$f(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$$

и построим с помощью общей теории Винберга фундаментальные области для групп $\Gamma' = \text{PO}(f, \mathbb{Z})$ и $\Gamma = R(f)$.

Следуя алгоритму Винберга, сперва выбираем базисную точку, например, $v_0 = (1, 0, 0)$. Заметим, что $f(v_0) = -1$, т. е. $v_0 \in \mathbb{H}^2$. Стабилизатор Γ_{v_0} точки v_0 является группой $O(2, \mathbb{Z})$, которая в свою очередь является конечной группой Кокстера типа B_2 . Она действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ перестановками базисных векторов с точностью до знака. Фундаментальный конус для Γ_{v_0} можно выбрать следующим образом: $x_1 \geq x_2 \geq 0$.

Следовательно, его можно ограничить прямыми, внешние нормали к которым суть векторы $e_1 = (0, 0, -1)$, $e_2 = (0, -1, 1)$.

Отметим, что вектор $e = (k_0, k_1, k_2)$ является k -корнем только в случае $k = (e, e) = 1$ или 2 .

На следующем шаге алгоритма Винберга нужно найти такой корень $e = (k_0, k_1, k_2)$, что $k_1 \geq k_2 \geq 0$, $k_0 > 0$ и расстояние $\rho(H_e, v_0)$ — минимальное среди всех возможных. Из формул гиперболической геометрии следует, что

$$\text{sh}^2 \rho(v_0, H_e) = \frac{(v_0, e)^2}{(e, e)} = \frac{k_0^2}{k}.$$

Эта величина минимальна при минимальном значении числителя и максимальном значении знаменателя. Данные соображения позволяют найти третий корень: $e_3 = (1, 1, 1)$. Полученная система нормалей e_1, e_2, e_3 задаёт треугольник Кокстера на плоскости Лобачевского с углами $\pi/2, \pi/4$ и 0 с одной бесконечно удалённой вершиной, но конечной площади. Значит, алгоритм завершён, и фундаментальная область для группы $\Gamma = R(f)$ найдена. Более того, из теоремы 6.2 следует, что группа $\Gamma' = \text{PO}(f, \mathbb{Z})$ совпадает с Γ .

Заметим, что для нерелективных квадратичных форм алгоритм Винберга никогда не завершится (т. е. рефлективность формы является необходимым и достаточным условием останова алгоритма), но известны некоторые комбинаторные методы, позволяющие показать нерелективность формы, глядя лишь на первые найденные грани фундаментального многогранника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б. Дискретные группы, порождённые отражениями, в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1967. Т. 72(114), № 3. С. 471–488.
- [2] Винберг Э. Б. Калейдоскопы и группы отражений // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 45–63.
- [3] Шварцман О. В. Группы отражений и группы Кокстера // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 64–81.
- [4] Бугаенко В. О. Классификация многогранников Кокстера // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 82–106.
- [5] Бугаенко В. О. Правильные многогранники // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 107–115.
- [6] Сосинский А. Б. Об эквивалентности трёх моделей плоскости Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 38–47.
- [7] Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Геометрия-2. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 147–259.
- [8] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Геометрия-2. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–146.
- [9] Ratcliffe John G. Foundations of Hyperbolic Manifolds. New York: Springer, 2019. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 149).

Хорошо ли мы знаем векторное произведение?

И. Х. Сабитов

*Посвящаю светлой памяти
Эрнеста Борисовича Винберга*

§ 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

По-видимому, если не у всех, то у многих при изучении в курсе аналитической геометрии понятия векторного произведения двух векторов возникало чувство логического дискомфорта или даже когнитивного диссонанса. По определению в учебниках и справочниках, векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это третий вектор $\mathbf{c}$, ортогональный к обоим сомножителям и направленный так, что если все три вектора отложить из одной точки, то из конца вектора $\mathbf{c}$ направление *кратчайшего* вращения от первого сомножителя $\mathbf{a}$ ко второму сомножителю $\mathbf{b}$ кажется идущим против часовой стрелки, т. е. эта *упорядоченная* тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ составляет, как говорят, *правую* тройку векторов, причём такое их взаиморасположение *не зависит* от ориентации выбранного базиса пространства¹⁾. А про длину вектора $\mathbf{c}$ говорится, что она *численно* равна площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях (не очень аккуратные авторы и преподаватели даже пропускают слово «численно» и пишут, что его длина равна площади параллелограмма, забывая, что длина и площадь имеют разные размерности, и для этих величин, например, операция сложения не выполнима).

¹⁾ Для понимания важности выбора направления взгляда очень полезно провести такой опыт: нарисуйте на листе бумаги круг, имитирующий циферблат часов, отметьте на нём часовую стрелку, соответствующую её положениям в 12 и 15 часов, и рядом с окружностью нарисуйте жирную стрелку, идущую от 12 к 15 часам. Затем поднимите аккуратно лист вверх, двигая его параллельно исходному положению до тех пор, когда он окажется выше вас, посмотрите на лист снизу — и увидите, что нарисованная стрелка направлена против движения часовой стрелки, хотя векторы стрелок, указывающие 12 и 15 часов, остались на месте!

Итак, векторное произведение — это вектор²⁾, и его модуль, как длина, должен измеряться в единицах длины. А на следующем же занятии изучается смешанное произведение трёх векторов, в котором векторное произведение двух векторов умножается скалярно на третий вектор и объявляется, что получаем величину, измеряемую в единицах объёма, трактуя длину векторного произведения уже как величину размерности 2, т. е. как площадь!

Возникает ещё один естественный вопрос: пусть мы изменили масштаб и стали измерять длины, скажем, в миллиметрах вместо сантиметров. Тогда длины *всех* векторов в численном выражении изменятся (в данном случае увеличатся) в 10 раз, значит, значения площади изменятся в 100 раз, и длина вектора, являющегося векторным произведением, по определению изменится в 100 раз, а между тем она, как длина *любого* вектора, должна измениться только в 10 раз. В настоящей работе мы хотим выяснить, почему возможны такие противоречия и как их избежать.

§ 2. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА ИЗМЕРЕНИЙ

Начнём с разбора второго казуса. Пусть у нас сначала единицей измерения был сантиметр и имелся ортонормированный базис единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с правилом векторного произведения $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$, $(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$. Пусть есть числовая прямая L с фиксированным положением на ней точки, соответствующей числу 0. Тогда скалярное произведение $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 1$ даёт, по его определению, некоторую точку A на числовой прямой, соответствующую числу 1. Пусть мы изменили масштаб и выбрали, скажем, как единицу измерения миллиметр и, соответственно, базисные единичные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_3$. Ожидаемый казус появится в том случае, если можно утверждать, что векторные произведения будут определяться по правилам

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_2. \quad (1)$$

Действительно, тогда будет $\mathbf{e}_1 = 10\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{e}_2 = 10\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\mathbf{e}_3 = 10\tilde{\mathbf{e}}_3$, и получится, что векторное произведение $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = 100\tilde{\mathbf{e}}_3 = 10\mathbf{e}_3$, но оно было равно $\mathbf{e}_3$, т. е. должно было стать равным $10\tilde{\mathbf{e}}_3$. С другой стороны, если мы придем векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ за единичные с выполнением равенств (1), тогда

²⁾ В книге [1] в главе 8 векторное произведение $n-1$ векторов в n -мерном пространстве тоже определяется как вектор, имеющий некоторые специальные свойства, которые обобщают свойства, известные из трёхмерного случая.

их скалярные произведения самих на себя будут равны 1, т. е. единице на числовой прямой L будет соответствовать другая точка, отличная от A (а скалярному произведению $\mathbf{e}_1$ на себя будет соответствовать точка со значением 100), следовательно, в рассматриваемом линейном пространстве будет *другое* скалярное произведение. Другими словами, мы просто установили, что инвариантность векторного произведения при изменении базиса имеет место *только* относительно ортогональных преобразований базиса с определителем $+1$. Таким образом, мы можем сказать, что изменение масштаба измерений в линейном пространстве с данным скалярным произведением означает изменение в этом линейном пространстве введённого в нём скалярного произведения.

§ 3. ВОПРОС О РАЗМЕРНОСТИ МОДУЛЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Перейдём к вопросу о разных толкованиях размерности модуля векторного произведения векторов. Пусть нам дано трёхмерное евклидово линейное пространство, т. е. в нём введено скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ с условиями $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \geq 0$ и $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. В разложении вектора $\mathbf{a}$ по некоторому базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

его координаты $a^i, i = 1, 2, 3$, являются *безразмерными* величинами, а модули базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, геометрически будучи их длинами, измеряются в единицах длины. Пусть размерность некоторого объекта x обозначается³⁾ как $[x]$. Всюду дальше считаем, что длины измеряются в сантиметрах, значит, $|\mathbf{e}_i| = \text{см}$. Для краткости речи размерность модуля вектора будем называть также размерностью вектора, а при записи значения модуля будем указывать при нём его размерность. Значит, для модуля вектора $\mathbf{a}$ будет запись $|\mathbf{a}| \text{ см}$. Координаты вектора при разложении вида (2) называются *контравариантными* координатами, базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется *контравариантным* базисом, а вектор $\mathbf{a}$ в представлении (2) называется вектором в контравариантном представлении.

³⁾ На самом деле общепринятое обозначение размерности $[x]$, но это обозначение нам пригодится позже в другом смысле, поэтому мы выбрали для обозначения размерности другой вариант расположения квадратных скобок; кроме того, поскольку слово «размерность» в математике часто используется как число координат, нужных для описания положения точки в рассматриваемом пространстве, мы будем иногда дополнять численную характеристику физической или геометрической природы объекта выражением «физическая размерность».

Длина этого вектора выражается через его контравариантные координаты по формуле (если базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортонормированный)

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}, \quad (3)$$

или в общем случае

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} a^i a^j},$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j), \quad (4)$$

т. е. размерность $]g_{ij}[= \text{см}^2$, так что размерность $]|\mathbf{a}][= \text{см}$.

Пусть ещё один вектор $\mathbf{b}$ задан контравариантными координатами:

$$\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3. \quad (5)$$

Найдём контравариантные координаты векторного произведения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ по его определению, считая, что у нас базис ортонормированный, т. е. векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичные, взаимно ортогональные и для них

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1, \quad (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2.$$

Как мы знаем, должен получиться вектор

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3.$$

Как видим, поскольку контравариантные координаты умножаемых векторов — безразмерные величины, контравариантные координаты их векторного произведения тоже безразмерные, и для толкования модуля векторного произведения действует правило: *численное* значение модуля или длины векторного произведения равно *численному* значению площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, т. е.

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = \left(\frac{|\mathbf{a}| \text{ см} \cdot |\mathbf{b}| \text{ см} \cdot |\sin \varphi|}{\text{см}^2} \right) \text{ см},$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По размерности $]|\mathbf{a} \times \mathbf{b}][= \text{см}$, а коэффициент

$$\frac{|\mathbf{a}| \text{ см} \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{см} \cdot |\sin \varphi|}{\text{см}^2}$$

как раз и является безразмерным числовым значением площади параллелограмма.

Такое определение векторного произведения используется, например, в интерпретации $\mathbb{R}^3$ как примера *алгебры*, т. е. как линейного пространства с дополнительной операцией умножения векторов, в котором результат векторного произведения может суммироваться с другими векторами по обычному правилу сложения векторов.

§ 4. КОВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

Однако такое понимание модуля векторного произведения не пригодно для его использования в определении смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ трёх векторов по правилу $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ с последующим толкованием его как объёма построенного на них параллелепипеда, так как объём должен быть величиной размерности см^3 , а при указанном правиле умножения получается величина размерности см^2 . В научной литературе есть другое определение векторного произведения (см., например, книгу [2, с. 36]), дающее для него нужную размерность см^2 , и мы хотим сопоставить его с определением, принятым в учебной литературе.

Напомним вкратце определение векторного произведения в [2] (далее будем называть его определением по Картану). Сначала наряду с контравариантным представлением вектора $\mathbf{a}$ вводится другое его представление, называемое представлением вектора в *ковариантных координатах*, с обозначением $\mathbf{a}^*$. Формальное его определение такое: вводятся так называемые ковариантные базисные векторы $\mathbf{e}^j$ по формулам

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j = g^{i1} \mathbf{e}_1 + g^{i2} \mathbf{e}_2 + g^{i3} \mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где g^{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (7)$$

(средняя часть в равенстве (6) соответствует краткому обозначению суммирования по правилу Эйнштейна, когда нужно суммировать элементы с одинаковыми верхними и нижними индексами).

После введения ковариантного базиса, ковариантное представление $\mathbf{a}^*$ вектора записывается так:

$$\mathbf{a}^* = a_i \mathbf{e}^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

где

$$a_i = g_{ij} a^j = g_{i1} a^1 + g_{i2} a^2 + g_{i3} a^3. \quad (9)$$

В частности, имеем (сейчас индекс $k = 1, 2, 3$ обозначает номер вектора)

$$(\mathbf{e}_k)^* = g_{1k} \mathbf{e}^1 + g_{2k} \mathbf{e}^2 + g_{3k} \mathbf{e}^3.$$

Операция $g_{ij} a^j$, после выполнения которой верхний индекс исчез, а появился нижний индекс, называется *операцией опускания* или просто *опусканием* индекса. Отметим, что координаты a_i ковариантного вектора имеют физическую размерность см^2 , а сам ковариантный вектор имеет размерность см . Размерность $]\mathbf{e}^j[$ векторов ковариантного базиса равна см^{-1} .

Рассматривая $\mathbf{e}_i$ в системе (6) как неизвестные, находим, что контравариантные векторы $\mathbf{e}_i$ выражаются через ковариантные векторы $\mathbf{e}^j$ по формулам

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j, \quad i = 1, 2, 3,$$

и при этом контравариантные координаты a^i получаются из ковариантных координат a_i операцией $a^i = g^{ij}a_j$, называемой *операцией поднятия* индекса. Теперь легко проверяется, что если у координат вектора $\mathbf{a}^*$ в (8) поднимем индекс, то получим исходный вектор $\mathbf{a}$, что оправдывает картановское понимание $\mathbf{a}^*$ просто как *другого представления* вектора $\mathbf{a}$.

Так как для скалярного произведения $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ векторов

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$$

имеем равенство

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{i,j} g_{ij}a^ib^j,$$

с учётом формулы (9) получаем новое представление скалярного произведения

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = a_ib^i = a^ib_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

В частности, для длины вектора $\mathbf{a}$ имеем формулу

$$|\mathbf{a}|^2 = a_ia^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

(очевидно, в формулах (10) и (11) можно использовать также любые обозначения индекса суммирования, например, вместо i писать k или j , чем мы дальше иногда и будем пользоваться, особенно при рассмотрении двойных сумм).

Теперь разберёмся с физическими размерностями. Коэффициенты g_{ij} как скалярные произведения имеют физическую размерность $]g_{ij}[= \text{см}^2$. Коэффициенты g^{ij} как элементы обратной к G матрицы имеют физическую размерность $]g^{ij}[= \text{см}^{-2}$.

Рассмотрим для примера случай ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда

$$g_{ij} = \delta_{ij} \text{см}^2,$$

где δ_{ij} — безразмерный (т. е. числовой) символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Соответственно, матрица G — единичная с $\det G = 1 \text{ см}^6$. По формуле (6) ковариантный вектор $\mathbf{e}^i$ будет иметь вид $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$ и поэтому его физическая размерность равна $]e^i[= \text{см}^{-1}$. Ковариантный вектор $\mathbf{a}^*$, соответствующий контравариантному вектору $\mathbf{a}$, будет иметь по формуле (9) ковариантные координаты $a_i = g_{ij}a^j$, т. е. они физической раз-

мерности $см^2$, а сам вектор $\mathbf{a}^*$ имеет физическую размерность $]\mathbf{a}^*[= см^1$ (заметим, что размерность вектора и в ковариантном, и в контравариантном представлении одна и та же, а именно $см^1$).

§ 5. БИВЕКТОР И ЕГО МЕРА

Далее вводится понятие *бивектора* как упорядоченной пары векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенных от некоторого общего начала, с обозначением бивектора как $[\mathbf{ab}]$. Два бивектора $[\mathbf{ab}]$ и $[\mathbf{cd}]$ считаются равными, если эти пары образуют параллелограммы равной площади, расположенные на одной или параллельных плоскостях и имеющие одинаковую ориентацию (если же одна пара состоит из коллинеарных векторов, то в равном им бивекторе составляющие его векторы тоже должны быть коллинеарными, и в этом случае оба бивектора считаются равными нулю). Считается также, что

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}] = [(-\mathbf{b})\mathbf{a}] = [\mathbf{b}(-\mathbf{a})]. \quad (12)$$

В частности, для бивекторов, задаваемых базисными векторами, имеем

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] = -[\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i]. \quad (13)$$

Бивекторы $[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]$ можно назвать базисными бивекторами, так что в трёхмерном случае существует 3 базисных бивектора $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]$.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют в некотором базисе $\mathbf{e}_i$ представления

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i,$$

то бивектор $[\mathbf{ab}]$ имеет контравариантные координаты⁴⁾

$$P^{ij} = a^ib^j - a^jb^i \quad (14)$$

и бивектор $[\mathbf{ab}]$ представится в виде

$$[\mathbf{ab}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P^{ij} [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] = P^{12} [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] + P^{23} [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] + P^{31} [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] \quad (15)$$

(учтены равенства (13)–(14)). В более привычном виде эта формула имеет такую запись:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] & [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] & [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

⁴⁾ Объяснение появления координат именно такого вида можно прочесть в [2, с. 24]. Кстати, координаты (14) в «Математической энциклопедии», 1977, т. 1, в статье «Бивектор», не совсем удачно названы координатами бивектора в базисе $\mathbf{e}_i$, так как бивектор разлагается, как мы видим, не по векторам этого базиса.

Площадь параллелограмма, о котором идёт речь, называется *мерой* бивектора. Выведем формулу для меры m бивектора $[\mathbf{ab}]$. Для её квадрата m^2 с использованием формул (10) и (11) получаем равенства

$$\begin{aligned} m^2 &= |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \sin^2 \varphi = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \\ &= (a_i a^i)(b_j b^j) - (a^i b_i)(a_j b^j) = \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) a^i b^j, \end{aligned} \quad (16)$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Мы видим, что физическая размерность меры m бивектора равна см^2 .

Для меры бивектора полезно иметь и другое представление. Для этого введём *ковариантные* координаты бивектора. По аналогии с (14), используя ковариантные координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, положим

$$P_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \det \begin{pmatrix} \sum_h g_{ih} a^h & \sum_k g_{jk} a^k \\ \sum_h g_{ih} b^h & \sum_k g_{jk} b^k \end{pmatrix} = \sum_{h,k} g_{ih} g_{jk} P^{hk} \quad (17)$$

и назовём выражения P_{ij} ковариантными координатами бивектора $[\mathbf{ab}]$. Используя контравариантные и ковариантные координаты бивектора и учитывая, что

$$\sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) a^i b^j = \sum_{i,j} P_{ij} a^i b^j = \sum_{j,i} P_{ji} a^j b^i = - \sum_{i,j} P_{ij} a^j b^i,$$

формулу (16) для меры бивектора можно представить в виде

$$m^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{ij} P^{ij}, \quad (18)$$

что в трёхмерном случае даёт формулу

$$m^2 = P_{12} P^{12} + P_{31} P^{31} + P_{23} P^{23}. \quad (19)$$

Далее можно ввести операцию сложения бивекторов (фактически она уже введена формулой (15)), скалярное произведение бивекторов, угол между бивекторами и тем самым превратить множество бивекторов в линейное евклидово пространство (предварительно отождествив равные бивекторы между собой или же объявив бивекторы свободными с введённым выше пониманием их равенства). Все эти построения можно осуществить для векторов n -мерного пространства, тогда соответствующее линейное пространство бивекторов будет иметь (топологическую) размерность

$$d = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

и только в случае $n = 3$ эта размерность совпадает с размерностью того пространства, из векторов которого строятся бивекторы. В силу совпадения размерностей *только* в этом случае рассматриваемое пространство векторов изоморфно построенному пространству бивекторов. Более того, изоморфизм можно построить, сопоставляя каждому бивектору $[\mathbf{ab}]$ вектор, равный классическому векторному произведению $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, причём этот изоморфизм сохраняет меру элементов в следующем смысле: если два бивектора имели равную меру, то соответствующие им векторы тоже имеют равную длину. Но нельзя объявлять, что можно *отождествить* бивектор с соответствующим ему векторным произведением, потому что меры этих объектов имеют *разную* физическую размерность, хотя численные значения этих мер и совпадают.

§ 6. Поливекторы и дополнительные векторы

Значит, нужно иметь какое-то другое определение векторного произведения, чтобы оно в скалярном умножении с другим вектором дало величину, физическая размерность которой соответствовала бы размерности объёма. Сначала мы опишем известный векторно-алгебраический подход к построению такого определения, для чего используем понятие дополнительного бивектора.

Общее определение дополнительного поливектора, согласно [2, с. 35], следующее. Пусть в евклидовом векторном n -мерном пространстве введено понятие поливектора или p -вектора A , $1 \leq p \leq n - 1$ (соответствующее случаю $p = 2$ понятие бивектора нам уже известно, случаю $p > 2$ соответствует упорядоченная совокупность p векторов, расположенных в некотором p -мерном подпространстве, и вместо площади параллелограмма надо говорить об объёме p -мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах, а абсолютная величина объёма и будет мерой этого p -вектора). Тогда *дополнительным* к p -вектору A *поливектором* B будет $(n - p)$ -вектор, для которого:

- 1) каждый из составляющих его $n - p$ векторов ортогонален к подпространству, натянутому на p векторов рассматриваемого p -вектора;
- 2) поливекторы A и B имеют равные меры (в одинаковой физической размерности);
- 3) ориентация пространства, задаваемая векторами p -вектора A и $(n - p)$ -вектора B , взятыми с сохранением их общего порядка, положительна, т. е. совпадает с заранее данной ориентацией самого пространства.

Эти определения и условия предполагают, что мера рассматриваемого p -вектора отлична от нуля.

В наиболее интересном для нас случае трёхмерного пространства дополнительный к бивектору A поливектор B на самом деле оказывается 1 -вектором, но с мерой, равной мере данного бивектора. Этот 1 -вектор по определению должен быть ортогонален обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, составляющим рассматриваемый бивектор, и мера его должна быть равна площади параллелограмма для бивектора, значит, его координаты должны численно совпасть с координатами векторного произведения⁵⁾ $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Вычисление их — довольно хлопотливое дело, оно сделано в [2, с. 35–36], а мы даём только окончательный результат с проверкой его верности. Утверждается, что искомый дополнительный 1 -вектор $\mathbf{c}$ имеет контравариантные координаты

$$c^1 = \frac{1}{\sqrt{\det G}} P_{23}, \quad c^2 = \frac{1}{\sqrt{\det G}} P_{31}, \quad c^3 = \frac{1}{\sqrt{\det G}} P_{12}. \quad (20)$$

Как видим из (14), в вычислении контравариантных координат бивектора участвуют контравариантные координаты определяющих его векторов. Выше в (17) мы получили формулу для выражения ковариантных координат бивектора через его контравариантные координаты. Для удобства вычислений перепишем её здесь в виде

$$P_{ij} = \sum_{k,l} g_{ik} g_{jl} P^{kl}$$

и выразим контравариантные координаты c^i рассматриваемого 1 -вектора $\mathbf{c}$ через контравариантные координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Сначала с учётом равенств $P^{ii} = 0$, $P^{ij} = -P^{ji}$ находим ковариантные координаты:

$$\begin{aligned} P_{12} &= G_{33} P^{12} + G_{32} P^{31} + G_{31} P^{23}, \\ P_{31} &= G_{23} P^{12} + G_{22} P^{31} + G_{21} P^{23}, \\ P_{23} &= G_{13} P^{12} + G_{12} P^{31} + G_{11} P^{23}, \end{aligned} \quad (21)$$

где G_{ij} — алгебраические дополнения элементов g_{ij} в матрице G из (7). Подставляя найденные значения ковариантных координат в формулу (20), находим искомые значения контравариантных координат c^i .

⁵⁾ Обращаем внимание, что размерность координат c^i равна cm , а размерность ковариантного базиса e_i тоже cm , так что размерность 1 -вектора равна cm^2 , как и положено. Отметим также, что формулы для c^i внешне полностью совпадают с формулами в § 98 книги [4, с. 469] для ротора n -мерных векторных полей, представленного как бивектор, который, как пишет автор, *лишь* в трёхмерном случае может быть инвариантным образом *истолкован* как вектор. Но автор не пишет, что этот бивектор *является* вектором!

Теперь проверим, что l -вектор $\mathbf{c}$ ортогонален векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$. Имеем

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \sum_{ij} g_{ij} a^i c^j = a^1 \sum_j g_{1j} c^j + a^2 \sum_j g_{2j} c^j + a^3 \sum_j g_{3j} c^j.$$

Убедимся, что эта сумма равна нулю. Действительно, рассмотрим первую сумму. С учётом (21) получаем

$$\begin{aligned} a^1(g_{11}P_{23} + g_{12}P_{31} + g_{13}P_{12}) &= \\ &= a^1((g_{11}G_{13} + g_{12}G_{23} + g_{13}G_{33})P^{12} + (g_{11}G_{12} + g_{12}G_{22} + g_{13}G_{32})P^{31} + \\ &\quad + (g_{11}G_{11} + g_{12}G_{21} + g_{13}G_{31})P^{23}) = a^1 \det GP^{23}. \end{aligned}$$

Вторая и третья суммы равны соответственно $a^2 \det GP^{31}$ и $a^3 \det GP^{12}$. Учитывая значения P^{ij} из (14), в общей сумме получаем

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \sqrt{\det G} \cdot (a^1(a^2b^3 - a^3b^2) + a^2(a^3b^1 - a^1b^3) + a^3(a^1b^2 - a^2b^1)) = 0,$$

что и хотели получить. Аналогично показывается ортогональность векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Далее проверяем, что мера l -вектора $\mathbf{c}$ равна мере бивектора $[\mathbf{ab}]$. Так как мы сейчас знаем контравариантные координаты l -вектора $\mathbf{c}$, его меру m можем вычислить по формуле

$$m = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} c^i c^j}. \quad (22)$$

Используя выражения для P_{ij} из (21), вычисляем подкоренное выражение, представив его в виде

$$\begin{aligned} \sum g_{ij} c^i c^j &= \frac{1}{\det G} [g_{11}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{23} + \\ &\quad + g_{22}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{31} + \\ &\quad + g_{33}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{12} + \\ &\quad + g_{12}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{31} + \\ &\quad + g_{21}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{23} + \\ &\quad + g_{13}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{12} + \\ &\quad + g_{31}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{23} + \\ &\quad + g_{23}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{12} + \\ &\quad + g_{32}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{31}]. \end{aligned}$$

Если мы соберём вместе коэффициенты при произведениях вида $P^{mk}P_{st}$, то окажется, что при произведениях $P^{12}P_{12}$, $P^{23}P_{23}$ и $P^{31}P_{31}$ коэффициенты

будут равны 1, а в остальных случаях коэффициенты будут равны нулю как суммы произведений элементов одного столбца матрицы G на алгебраические дополнения элементов другого столбца (т. е. то, что некоторые авторы называют «фальшивыми разложениями»). В итоге получим, что введённый l -вектор имеет меру

$$m^2 = P^{12}P_{12} + P^{31}P_{31} + P^{23}P_{23},$$

что в точности совпадает с полученной в формуле (19) мерой бивектора, имея ту же физическую размерность $см^2$. Чтобы можно было сравнить этот l -вектор с определяемым в учебниках векторным произведением, рассмотрим случай ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда обычное векторное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^i \mathbf{e}_i$ имеет в этом базисе безразмерные контравариантные координаты

$$P^{23} = a^2 b^3 - a^3 b^2, \quad P^{31} = a^3 b^1 - a^1 b^3, \quad P^{12} = a^1 b^2 - a^2 b^1,$$

а контравариантные координаты l -вектора, построенного по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равны согласно (20) и (21) $P^{23} см, P^{31} см, P^{12} см$ (учтено, что $\det G$ имеет физическую размерность $см^6$, а алгебраические дополнения имеют физическую размерность $см^4$). Именно этот вектор фактически и используется при введении смешанного произведения как скалярного произведения векторного произведения двух векторов на третий вектор, с последующим толкованием результата как объёма параллелепипеда.

§ 7. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Для чёткого отличения двух определений векторного произведения напомним их явные представления в случае общего ортогонального базиса. Пусть дан ортогональный базис с векторами

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = f \mathbf{e}_1, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = g \mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = h \mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — стандартный ортонормированный базис с правой ориентацией, а не равные нулю коэффициенты f, g, h — безразмерные скаляры. Матрица G в этом случае имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

с $g_{11} = f^2 см^2, g_{22} = g^2 см^2, g_{33} = h^2 см^2$. Пусть базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ тоже правой ориентации, Рассмотрим случай, когда $f > 0, g > 0, h > 0$. Тогда при

вычислении векторного произведения векторов

$$\mathbf{a} = a^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + a^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + a^3 \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{b} = b^1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + b^2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + b^3 \tilde{\mathbf{e}}_3$$

как l -вектора $\mathbf{c}$ с учётом формул (20) и (21) получаем

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{\det G}} [g_{22}g_{33}(a^2b^3 - a^3b^2)\tilde{\mathbf{e}}_1 + g_{11}g_{33}(a^3b^1 - a^1b^3)\tilde{\mathbf{e}}_2 + g_{11}g_{22}(a^1b^2 - a^2b^1)\tilde{\mathbf{e}}_3]. \quad (23)$$

В то же время, если мы вычислим векторное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ как вектор, получим

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{gh}{f}(a^2b^3 - a^3b^2)\tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{fh}{g}(a^3b^1 - a^1b^3)\tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{fg}{h}(a^1b^2 - a^2b^1)\tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (24)$$

Сравнивая (23) и (24), видим, что в них численные значения коэффициентов совпадают, отличие только в том, что их физическая размерность в (23) равна $см$, а в (24) коэффициенты являются безразмерными величинами⁶⁾. Значит, при выборе l -вектора в качестве векторного произведения базисные векторы векторно умножаются по такому правилу:

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 \cdot см, \quad (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot см, \quad (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 \cdot см. \quad (25)$$

Случай, когда один коэффициент положительный (скажем, $f > 0$), а два отрицательны, рассматривается аналогично. В случае отрицательной ориентации базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ формулы для нахождения векторного произведения получаются из предыдущей формулы умножением на -1 , поэтому в итоге оба выражения для векторного произведения оказываются в тех же отношениях, как и для базиса правой ориентации.

Важно ещё отметить следующее наблюдение: если в качестве векторного произведения выбран l -вектор, тогда оно (т. е. произведение) оказывается инвариантным относительно изменения масштаба измерения длин (чего не было, как помним, для случая, когда результатом векторного умножения объявлялся вектор). Действительно, пусть все длины измеряются в миллиметрах и пусть выбран ортонормированный базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ из векторов длины $1 мм$. Положим, согласно (25),

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot мм, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot мм, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot мм. \quad (26)$$

⁶⁾ Заметим, что когда пространство $\mathbf{R}^3$ с векторным произведением векторов приводят в качестве примера линейного пространства со структурой алгебры, то имеют в виду векторное произведение, определяемое именно по правилу (24), так как результатом умножения векторов должен быть вектор из того же пространства.

Тогда прежние базисные векторы имеют представление

$$\mathbf{e}_1 = 10\tilde{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{e}_2 = 10\tilde{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{e}_3 = 10\tilde{\mathbf{e}}_3.$$

Для их попарного векторного произведения имеем

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = 100(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = 100\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \text{мм} = 10\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \text{см} = \mathbf{e}_3 \cdot \text{см}$$

(аналогично для остальных пар), т. е. их векторные произведения получаются такими же, какими были до изменения масштаба измерения. Верно и обратное, выбор векторных произведений в «миллиметровом масштабе» в виде (26) не случайный, а приходит от существующего в «сантиметровом масштабе» произведения. Действительно,

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{100}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \frac{1}{100}\mathbf{e}_3 \cdot \text{см} = \frac{1}{10}\mathbf{e}_3 \cdot \text{мм} = \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \text{мм},$$

что согласуется с (26). Значит, можем сказать, что операция векторного произведения в виде взятия I -вектора инвариантна не только относительно ортогональных преобразований с определителем $+1$, но она инвариантна и относительно преобразований подобия, чего нет для его «учебного» определения в виде вектора.

§ 8. ВЕКТОРЫ НЕ С ЛИНЕЙНОЙ МЕРОЙ

Итак, оказалось, что можно предложить два *определения векторного произведения, дающие векторы разной природы, точнее, разной меры*. Если работать с векторами, оставаясь с их представлением только как направленных отрезков и понимая их меру только как длину, то ввести I -вектор не удастся, и мы не сможем добиться логически безупречного изложения понятия смешанного произведения. Поэтому основная проблема, которая сейчас возникает, состоит, на наш взгляд, в следующем: как изменить в учебных курсах изложение векторного произведения, не теряя математической строгости и в то же время не усложняя излишне этот материал? **Может, стоит ввести два типа произведения — векторное произведение первого рода и векторное произведение второго рода (подобно тому, как есть интегралы 1-го и 2-го рода по кривым и поверхностям)?** Отличием в них будет превращение координат «обычного» контравариантного векторного произведения из безразмерных величин в величины размерности длины. Тогда мера самого векторного произведения получит размерность «линейная единица в квадрате» и его можно будет использовать в смешанном произведении для вычисления объёма параллелепипеда. Одна из возможностей определения векторного произведения состоит именно «в подгонке» его определения под

пригодность в использовании смешанного произведения как формулы объёма. Об этом говорил автору Э. Б. Винберг и это сделано в учебном пособии [5, с. 25], следующим образом. Пусть даны векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$; назовём их векторным произведением ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$) вектор $\mathbf{z}$, такой, что смешанное произведение $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x})$ равно $(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ для любого вектора $\mathbf{x}$. При использовании этого определения заранее предполагается, что смешанное произведение трёх векторов уже известно (оно даётся как определитель 3-го порядка из координат умножаемых векторов). Хотя в этой книге и не даётся никакого анализа размерностей используемых выражений, но ясно, что компоненты определяемого таким образом векторного произведения будут иметь размерность вида см^2 (и поэтому найденное таким образом $\mathbf{z}$ не будет вектором в смысле введённого там же ранее на с. 23 определения вектора!). Как видим, даже в учебной литературе есть случаи, когда векторное произведение не представляется некоторым вектором с линейной мерой, а «честно» представляется вектором с квадратичной мерой.

Наверно, многим приходилось объяснять студентам, что бывают векторы, имеющие квадратичную размерность. Они появляются, например, при вычислении давления жидкости на погружённое тело и, соответственно, при выводе закона Архимеда о выталкивающей силе жидкости и газа. Направление этих векторов совпадает с направлением нормали к рассматриваемой площадке, а их мера равна площади площадки. Чтобы оставить за ними название «вектор», для них, как нам кажется, лучше всего предложить название «ареальный вектор» (мы их иногда называли *направленной площадью*⁷⁾ или *векторной площадью*, но тогда упор получался на слово «площадь»).

Бывают и случаи векторного произведения векторов с разными физическими размерностями. Примером такого векторного произведения является формула для нахождения вектора скорости точек тела, вращающегося вокруг некоторой оси с постоянной скоростью. Пусть угловая скорость задана как вектор $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3^0$ с размерностью $[\omega] = \gamma_1 = \text{рад/с}$, а положение точки задано радиус-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0 + z\mathbf{e}_3^0$$

с размерностями $\gamma_2 = \text{см}$. Тогда формула для определения скорости $\mathbf{v}$ точки, задаваемая векторным произведением $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, приводит к значению

$$\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{e}_1^0 + x\mathbf{e}_2^0)\gamma.$$

⁷⁾ Но называть их *ориентированной площадью* нельзя, так как ориентированная площадь — это число со знаком.

Так как скорость, очевидно, должна измеряться отношением *длина/время*, коэффициент γ должен быть равен безразмерному числу 1 (если угол поворота выражен в безразмерных радианах, а не в угловых градусах).

§ 9. Физики нам помогут?

Так как проблема с размерностью чаще всего встречается в физике, физики обходят эту трудность простым способом — они считают базисные векторы безразмерными величинами, а все размерности переводят на координаты. Точно так же во многих случаях можно поступать и в геометрии — тогда размерности «сидят» в координатах. Будем считать, что строчки $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, 0\}$, $\{0, 0, 1\}$ с обозначениями $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$ и их линейные комбинации

$$\mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_1^0 + b_i \mathbf{e}_2^0 + c_i \mathbf{e}_3^0$$

с безразмерными коэффициентами соответствуют направлениям (эти коэффициенты **можно толковать как безразмерные направляющие косинусы**). Три направления $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$ будем называть *основными*. Базис переводится в любой другой базис с помощью некоторой невырожденной матрицы с безразмерными коэффициентами, **которые можно толковать как безразмерные направляющие косинусы**. Вектором называем любую линейную комбинацию базисных направлений с коэффициентами одной и той же физической размерности, в частности, *базисные векторы* можно толковать как векторы вида $\gamma \mathbf{e}_i^0$, где размерностный коэффициент γ имеет числовое значение 1 и ту размерность, с которой мы хотим работать. Все векторы можно умножать на безразмерные коэффициенты, а сложение возможно только между векторами одинаковой размерности. Скалярное и векторное произведения определены, если они определены для направлений основного базиса. Скалярное произведение для всех векторов определяется по закону билинейности с умножением размерностей сомножителей.

Предложим, как вариант, следующее **определение** векторного произведения. Пусть

$$(\mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0) = \gamma \mathbf{e}_3^0, \quad (\mathbf{e}_2^0 \times \mathbf{e}_3^0) = \gamma \mathbf{e}_1^0, \quad (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0) = \gamma \mathbf{e}_2^0$$

с дополнительным условием

$$(\mathbf{e}_i^0 \times \mathbf{e}_j^0) = -(\mathbf{e}_j^0 \times \mathbf{e}_i^0),$$

где γ — коэффициент некоторой размерности, и

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1^0 + a^2 \mathbf{e}_2^0 + a^3 \mathbf{e}_3^0, \quad \mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1^0 + b^2 \mathbf{e}_2^0 + b^3 \mathbf{e}_3^0$$

— умножаемые векторы размерности соответственно γ_1 и γ_2 . Тогда

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2^0 \times \mathbf{e}_3^0) & (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0) & (\mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0) \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \gamma [(a^2 b^3 - a^3 b^2) \mathbf{e}_1^0 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) \mathbf{e}_2^0 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) \mathbf{e}_3^0] \quad (27)$$

с коэффициентами размерности $\gamma\gamma_1\gamma_2$, где коэффициент размерности γ подбирается таким образом, чтобы результат векторного умножения имел нужную по смыслу задачи размерность (отметим, что размерности коэффициентов γ_1 и γ_2 уже «сидят» в коэффициентах a и b).

Для векторов, заданных в общем базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, векторное произведение вычисляется по аналогичной формуле

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

где векторные произведения $(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$ должны быть предварительно вычислены в том же базисе с учётом матрицы перехода от основного базиса, если мы хотим получить ответ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

В нашем геометрическом случае размерности γ_1 и γ_2 обе равны $см$, а коэффициент γ должен быть размерности $см^{-1}$, если хотим, чтобы векторное произведение было вектором, или нулевой размерности, т. е. просто числом 1, если хотим, чтобы векторное произведение было l -вектором. В первом случае имеем

$$(\mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0) = см^{-1} \mathbf{e}_3^0, \quad (\mathbf{e}_2^0 \times \mathbf{e}_3^0) = см^{-1} \mathbf{e}_1^0, \quad (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0) = см^{-1} \mathbf{e}_2^0,$$

а во втором случае

$$(\mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0) = \mathbf{e}_3^0, \quad (\mathbf{e}_2^0 \times \mathbf{e}_3^0) = \mathbf{e}_1^0, \quad (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0) = \mathbf{e}_2^0$$

(т. е. можно сказать, что для случая l -вектора операция векторного умножения векторов основного базиса кажется более естественной — нулевые размерности слева и справа). Надеемся, после сказанного стало ясно, как объяснить, например, кажущиеся несовпадения размерностей в тождествах в задаче 158 в сборнике [3] (на что обратил моё внимание Е. В. Троицкий) — в них достаточно понимать под векторными произведениями l -векторы, а иначе надо говорить о совпадении численных значений левых и правых частей.

Сравним эти выводы с классическими формулами. Введём единичные векторы

$$\mathbf{i} = \gamma_1 \mathbf{e}_1^0, \quad \mathbf{j} = \gamma_1 \mathbf{e}_2^0 \quad \text{и} \quad \mathbf{k} = \gamma_1 \mathbf{e}_3^0,$$

где $\gamma_1 = 1$ см. Тогда из формулы (27) получим, что

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \gamma \gamma_1^2 \mathbf{e}_3^0 = \gamma \gamma_1 \mathbf{k},$$

и если выберем $\gamma = \gamma_1^{-1} = \text{см}^{-1}$, то придём к классическому соотношению $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{k}$, т. е. результатом векторного умножения будет вектор с линейной мерой. Если же определим γ как скаляр 1, то получим $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = 1 \text{ см } \mathbf{k}$, т. е. результатом будет вектор с квадратичной мерой, что соответствует определению 1-вектора и может быть использовано для толкования смешанного произведения как формулы объёма параллелепипеда. Естественно, для различения этих случаев нужно иметь различные их обозначения (например, можно предложить обозначения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$).

По-видимому, могут встретиться и случаи, когда компоненты вектора имеют разные размерности, но этот экзотический вариант уже выходит за рамки нашего рассмотрения.

§ 10. Подводим итоги

Мы показали, что векторное произведение $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ двух векторов, когда под ним понимается вектор с известными свойствами, отличается от того его понимания, которое используется для представления смешанного произведения $(\mathbf{abc})$ трёх векторов как скалярного произведения вектора $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ с вектором $\mathbf{c}$. А именно, в первом случае модуль векторного произведения имеет размерность единицы длины, а во втором случае считается, что его модуль имеет размерность квадрата длины. Далее, мы показали, что в мировой научной литературе на самом деле уже есть работа, где объясняется, как правильно толковать векторное произведение, которое нужно для представления смешанного произведения как результата скалярного умножения этого векторного произведения на третий вектор. Поэтому мы предлагаем как-то различать эти понятия векторного произведения, введя для них соответственно разные названия, например, векторные произведения 1-го и 2-го рода, и вообще обратить внимание на случаи векторного произведения векторов разных размерностей.

Мы представили только один вариант изложения темы о векторном произведении. Несомненно, могут быть и другие варианты (мы даже знаем, что они есть) как изложения этой темы, так и принципиально других толкований векторного произведения с привлечением других понятий и объектов, таких как сопряжённые пространства, дуальные базисы, внешнее умножение, тензоры и т. д. Тут большой простор как для математически содержательного, так и для методического творчества. Основное, что мы хотели донести до читателя, это существование проблемы, которую мы и обсудили.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мне приятно иметь возможность выразить благодарность моим коллегам В. А. Зоричу и А. И. Штерну за их живой и конструктивный интерес к теме статьи и студентам К. Гордееву, А. Мусаевой и А. Шабакоевой за внимательное и одобрительное прочтение статьи с указанием обнаруженных ошибок набора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Берже М. Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.
- [2] Картан Э. Геометрия римановых пространств. М.; Ижевск: Ижевский Институт компьютерных исследований, 2012.
- [3] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю. М. Смирнова. М.: МЦНМО, 2016
- [4] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
- [5] Hsiung Ch.-Ch. A First Course in Differential Geometry. New York: John Wiley & Sones, 1981.

Современная комбинаторика

Математика раскрасок

А. М. Райгородский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы расскажем о нескольких классических проблемах современной комбинаторики и теории графов, связанных с понятием раскраски. Наверняка многие читатели неоднократно сталкивались с этим понятием. Многие слышали, например, о знаменитой гипотезе четырёх красок: на любой «достаточно хорошей» карте мира страны могут быть так покрашены, чтобы соседние страны имели разные цвета, а всего цветов было не больше четырёх. А ещё многие знают задачу о хроматическом числе плоскости: найти наименьшее число цветов, в которые можно так покрасить всю плоскость, чтобы каждые две точки, расстояние между которыми равно единице, были покрашены в разные цвета (см. [1, 2]).

В этой статье мы расскажем не об этих задачах. Но те задачи, о которых мы поговорим, сейчас играют колоссальную роль в дискретной математике, находятся в самом её центре — на стыке идей и методов. В статье масса красивых рассуждений. Для достижения максимального «катарсиса» полезно владеть основами комбинаторики (см., например, [3–7]), теории графов (см. [8, 9]), теории пределов и асимптотик в дискретном анализе (см. [10]), теории вероятностей (см. [5, 11]) и линейной алгебры (см. [12]). Однако не стоит пугаться такого изобилия предметов. На самом деле от комбинаторики нужны только числа сочетаний (биномиальные коэффициенты), от теории графов — только базовое определение графа, от теории вероятностей — только её комбинаторные аспекты (выбор случайного объекта из конечного множества, бросание

монеты, математическое ожидание простейшей случайной величины), от асимптотик — просто понимание, например, того, что $n^2 + n \sim n^2$ при $n \rightarrow \infty$ в том смысле, что предел отношения величин $n^2 + n$ и n^2 равен единице (ну, может, чуть посложнее, но мы всё аккуратно и последовательно напомним), от линейной алгебры — только представление о том, что бывает пространство $\mathbb{R}^n$, а в нём векторы, матрицы, скалярные произведения... В общем, изложение будет доступно абсолютно любому закончившему второй курс и очень многим старшеклассникам, обучающимся в кружках, математических классах и всевозможных летних и не только летних олимпиадных и не только олимпиадных школах.

Статья основана на курсе, который автор прочитал в Дубне на летней школе «Современная математика» в июле 2019 года, а также на многочисленных его же лекциях на всевозможных сборах (в «Сириусе», «Команде», «Компьютеррии» и др.), на различных школах (Кировская ЛМШ, Комбинаторика и алгоритмы и др.) и университетах по всей России. Статья является дополненной версией брошюры [13].

§ 2. Задача для затравки

Для затравки рассмотрим следующую задачу. В классе учатся 30 человек. Из них отбираются 5 лучших комбинаторщиков, 5 лучших числовиков, 5 лучших вероятностников и так далее. Всего 15 пятёрок. Конечно, эти пятёрки лучших могут как угодно пересекаться: заранее мы не знаем, кто окажется сильнее в каком из направлений. Вопрос: *всегда ли* можно так рассадить наших 30 школьников по двум кабинетам, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждой из пятёрок? Например, если все пятёрки совпадают, то, очевидно, рассадка возможна. Но ведь есть огромное количество других вариантов! Может, если пятёрки распределяются более хитро, то окажется, что, как ни рассаживай 30 школьников по двум кабинетам, обязательно найдётся кабинет, в котором одна из пятёрок находится целиком?

Ответ на вопрос всё-таки положительный: да, такая рассадка *всегда* возможна. Решение очень простое и красивое! Оно основано на вероятностном методе в комбинаторике (ср. [14, 15]). В принципе здесь ещё можно было бы обойтись без ссылок на теорию вероятностей, но будет лучше, если мы сразу воспользуемся именно вероятностной терминологией.

Итак, нам даны 15 пятёрок. Обозначим их $M_1, \dots, M_{15}$. Рассмотрим случайную рассадку школьников. Что это значит? Вообще говоря, что угодно, ведь случайность можно определять по-разному. Но мы будем понимать случайность максимально просто: каждый школьник отправ-

ляется в первый кабинет с вероятностью $1/2$, и с такой же вероятностью он идёт во второй кабинет; выбор кабинета школьники осуществляют независимо друг от друга. Иными словами, мы как бы 30 раз бросаем симметричную монетку, и если монетка в i -м бросании падает решкой кверху, то i -й школьник идёт в первый кабинет, иначе — во второй. Введём обозначение A_i , $i = 1, \dots, 15$, для события, состоящего в том, что пятёрка M_i целиком попала в один кабинет. Какова вероятность $P(A_i)$ этого события? Поскольку выбор производится школьниками независимо, вероятности перемножаются, и мы получаем

$$P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}.$$

Теперь изучим вероятность того, что *хотя бы одна* пятёрка целиком сидит в одном кабинете. Разумеется, это вероятность события $\bigcup_{i=1}^{15} A_i$. Ясно, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{15} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{15} P(A_i) = \frac{15}{16} < 1.$$

Значит, с *положительной* вероятностью имеет место противоположное событие, которое состоит в том, что ни одна пятёрка целиком не сидит в одном из кабинетов. Но ведь это ровно то, что нужно! «Ни одна пятёрка целиком не сидит» — это же то же самое, что «в каждом кабинете есть хотя бы один представитель каждой из пятёрок». И это выполнено с положительной вероятностью. Если вероятность рассадки с нужным свойством положительна, то такая рассадка точно есть. Как её искать — другой вопрос. Но задача решена: рассадка есть всегда.

Отметим, что в нашем *решении* нигде не использовался тот факт, что всего школьников именно 30. Соответственно, возникает вопрос: а можно ли, по-прежнему пренебрегая исходным количеством школьников, вместо 15 взять большее число и получить тот же результат с возможностью рассадки? До шестнадцати дотянуть легко. В самом деле, все события A_i имеют непустое пересечение. Заведомо в этом пересечении находится примитивная рассадка, при которой все школьники сидят в первом кабинете. Но тогда вероятность объединения *строго меньше* суммы вероятностей и наш метод снова срывает. Уже с семнадцатью такой номер не проходит...

Легко видеть, что для 126 пятёрок ответ уже положительным не является. Странное число, да? Ну, сейчас разберёмся! Мы же вольны в выборе исходного количества школьников. Давайте возьмём *все* пятёрки, какие только можно составить из *деяти* человек. Их в аккурат $126 = C_9^5$. Попробуем теперь рассадить девятых школьников по двум кабинетам. И вот

не тут-то было! При любой рассадке в какой-то кабинет попадёт не менее пяти школьников. Но у нас *каждая* пятёрка сейчас «в деле». Значит, всё плохо и мы имеем пример ситуации, когда ответ на первоначальный вопрос уже не является утвердительным.

Итак, для любых 16 пятёрок ответ утвердительный, но *существуют* 126 пятёрок, для которых ответ отрицательный. Всё это приводит к общей постановке задачи, о которой мы и поговорим в следующем параграфе.

§ 3. Постановка общей задачи

Прежде всего пора перейти от школьников к абстрактным объектам. А именно, введём понятие *гиперграфа*. Оно является прямым обобщением понятия графа. У гиперграфа также есть вершины, образующие некоторое конечное множество V , и рёбра, образующие множество E . Только у гиперграфа в каждом ребре не обязательно две вершины: может быть и больше (рёбра из одной вершины мы исключим из рассмотрения вовсе). Более строго, гиперграф — это пара $H = (V, E)$, где V — некоторое множество, а E — некоторая совокупность подмножеств множества V . Подмножества неупорядоченные (сочетания без повторений), кратных рёбер нет, в каждом ребре хотя бы две вершины. Гиперграф называется *n -однородным*, если в каждом его ребре ровно n вершин. Обыкновенный граф, тем самым, — это 2-однородный гиперграф. А школьники и пятёрки — это 5-однородный гиперграф на тридцати вершинах.

Часто замечают, что у гиперграфа, в отличие от графа, нет естественного «портрета». Действительно, если граф легко изобразить как множество точек на плоскости, соединённых отрезками (или дугами), то попытка сделать то же самое с гиперграфом приводит к странному хитросплетению эдаких «сарделек» (рис. 1). В своих лекциях я часто употребляю слово

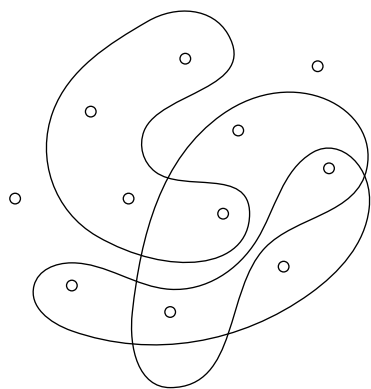


Рис. 1

«сарделька» для обозначения ребра гиперграфа, но картинок не рисую. Мне самому легче представлять себе именно эдакую кастрюльку (множество вершин) с намешанными в ней сардельками-рёбрами. Некоторые «продвинутые пользователи» вспоминают выражение «симплициальный комплекс» (просьба тех, кто не слышал его, не пугаться, так как мы его употреблять не будем). Но (опять же, для тех, кто в теме) симплициальный комплекс — это гиперграф, у которого каждое подмножество каждого ребра

само является ребром, т. е. это заведомо не однородный гиперграф. В общем, нам это знание не поможет, и мы больше о симплициальных комплексах вспоминать не будем.

Назовём *хроматическим числом* гиперграфа H величину $\chi(H)$, равную наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины гиперграфа, чтобы каждое его ребро было неодноразноцветным (имело вершины разных цветов). Позвольте, но ведь задача из предыдущего параграфа отлично формулируется в этих терминах! В самом деле, вопрос о пятнадцати пятёрках отныне звучит так: «Верно ли, что у любого 5-однородного гиперграфа с тридцатью вершинами и пятнадцатью рёбрами хроматическое число равно двум?» Рассадка по двум кабинетам и раскраска в два цвета — лишь два способа описания одного и того же явления.

Введём наконец классическую величину $m(n)$, предложенную П. Эрдёшем¹⁾ и А. Хайналем в 1961 году и равную *наименьшему m , при котором существует n -однородный гиперграф H с m рёбрами и с $\chi(H) > 2$* . Главное — сразу понять, что в терминах этой величины результаты предыдущего параграфа выглядят так:

$$17 \leq m(5) \leq 126. \quad (1)$$

У любого 5-однородного гиперграфа с шестнадцатью рёбрами хроматическое число равно двум, поэтому $m(5) \geq 17$, но существует 5-однородный гиперграф со 126 рёбрами, у которого хроматическое число больше двух, а значит, $m(5) \leq 126$.

Очевидное обобщение неравенств (1) приводим ниже:

$$2^{n-1} + 1 \leq m(n) \leq C_{2n-1}^n. \quad (2)$$

Мы не станем доказывать эти неравенства, ведь это совсем лёгкое упражнение. Но мы обсудим вопрос о том, насколько близки друг к другу верхняя и нижняя оценки. В самом деле, хорошо известно тождество (см. [3])

$$C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^n + \dots + C_{2n-1}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Также известно, конечно, что два центральных слагаемых в этом тождестве являются в нём самыми большими. При этом общее число слагаемых в левой части тождества равно $2n$. Следовательно,

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} < C_{2n-1}^n < 2^{2n-1}.$$

В итоге понятно, что зазор между оценками в формуле (2) экспоненциальный: нижняя имеет порядок 2^n , а верхняя с точностью до возможного

¹⁾ В венгерских фамилиях ударение всегда падает на первый слог, поэтому правильно произносить «Эрдёш».

деления на выражение порядка n имеет порядок 4^n . Зазор великоват, и задача его устранения — одна из серьёзнейших проблем современной экстремальной комбинаторики! (Раздел науки, с которым мы сейчас имеем дело, называется «экстремальной комбинаторикой» не потому, что только экстремалы им занимаются (хотя он и захватывающе красив, и не менее захватывающе труден), но потому, что в его рамках ищутся экстремальные (максимальные или минимальные) комбинаторные величины, среди которых $m(n)$.)

В последующих параграфах мы изучим красивейшие подходы к уменьшению зазора в неравенствах (2), а также рассмотрим ряд различных уточнений и обобщений задачи. Отметим, что нижняя оценка в формуле (2) вероятностная (т. е. она гарантирует наличие раскраски, но не объясняет, как её искать), а верхняя оценка конструктивная (приводится явный пример гиперграфа, не имеющего раскраски в 2 цвета). В § 4 мы значительно улучшим верхнюю оценку, но сделаем это... вероятностным методом, т. е. за улучшение мы заплатим потерей конструктивности.

Напоследок предлагаем читателю самостоятельно ответить на вопрос, чему равно $m(2)$ (совсем просто) и $m(3)$ (сложнее, но посильно). Отметим при этом, что $m(4)$ нашли совсем недавно с помощью весьма нетривиального компьютерного перебора, а величину $m(5)$, которая послужила нам в качестве затравки, никто до сих пор не знает!

§ 4. Верхняя оценка величины $m(n)$

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство*

$$m(n) \leq (1 + \varepsilon) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n.$$

Теорема замечательна тем, что она даёт оценку величины $m(n)$, которая не сильно отличается от известной нам нижней оценки, примерно в n^2 раз. Это уже не экспоненциальный, но всего лишь квадратичный по n зазор.

Для понимания доказательства потребуется, помимо базовой теории вероятностей, с которой мы уже немного свыклись, знание одного комбинаторного неравенства и одного несложного факта о логарифме.

Неравенство выпуклости. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Пусть $v \geq n$ — чётное число, $a, b \in \mathbb{N}$ и $a + b = v$. Тогда

$$\frac{C_a^n + C_b^n}{2} \geq C_{v/2}^n = C_{\frac{a+b}{2}}^n.$$

Название неравенства происходит оттого, что оно говорит о выпуклости биномиального коэффициента как функции от нижнего индекса при заданном верхнем индексе. Конечно, не обязательно, чтобы v было чётным. Но так проще для восприятия. Неравенство очень простое, и мы оставляем читателю его доказательство. Заметим, что мы считаем, что $C_m^k = 0$ при $k > m$.

Свойство логарифма. При всех $x > 0$ выполнено неравенство

$$\ln(1 - x) < -x,$$

и при всех достаточно малых положительных x выполнено неравенство

$$\ln(1 - x) > -x - x^2.$$

Доказательство свойства также хорошо известно и может рассматриваться как несложное упражнение.

Доказательство теоремы 1. Для уменьшения громоздкости будем считать, что n чётно. Для нечётных n всё аналогично.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Будем также считать, что $\varepsilon < 1/2$. Положим

$$m = \left\lceil (1 + \varepsilon) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть. Построим случайный n -однородный гиперграф с m рёбрами. Нам нужно будет так осуществить построение, чтобы при всех достаточно больших n с положительной вероятностью в любой раскраске вершин случайного гиперграфа в 2 цвета было хотя бы одно одноцветное ребро, или, что равносильно, чтобы с вероятностью, меньшей единицы, нашлась раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все рёбра неоднородны. Положим $v = n^2/2$ и рассмотрим множество вершин $V = \{1, \dots, v\}$. Случайными будут рёбра. Выберем каждое из них независимо от всех остальных из множества всех n -сочетаний из V с вероятностью $1/C_v^n$. Читатель может спросить: «А что, если появятся кратные рёбра? Ведь при взаимно независимом выборе рёбра могут и совпасть». Но ответ простой. Если какие-то рёбра совпадут, мы их отождествим. Получится гиперграф с ещё меньшим числом рёбер, а нам это только на пользу, раз уж мы доказываем сейчас верхнюю оценку для $m(n)$. Итак, пусть $H = (V, E)$ — это описанный только что случайный гиперграф и $E = \{f_1, \dots, f_m\}$.

Пусть χ — некоторая раскраска множества V в два цвета. Пусть в ней a красных и b синих вершин. Естественно, $v = a + b$. Обозначим через $A_{\chi, i}$ событие, состоящее в том, что ребро f_i одноцветно в раскраске χ .

Очевидно,

$$P(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n}.$$

За счёт неравенства выпуклости получаем оценку

$$P(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n} \geq \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}.$$

Положим

$$p = \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}.$$

Тогда вероятность отрицания события $A_{\chi,i}$ (ребро f_i неодноцветно) не больше $1 - p$.

Пусть A_χ — событие, при котором все рёбра случайного гиперграфа неодноцветны в раскраске χ . Поскольку рёбра выбирались независимо друг от друга, получаем неравенство

$$P(A_\chi) \leq (1 - p)^m.$$

Наконец, интересующее нас событие A — «найдётся раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все рёбра неодноцветны» — это $\bigcup_\chi A_\chi$. Значит,

$$P(A) = P\left(\bigcup_\chi A_\chi\right) \leq \sum_\chi P(A_\chi) \leq 2^v (1 - p)^m,$$

ведь всего раскрасок множества V в 2 цвета 2^v штук.

Осталось доказать, что $2^v (1 - p)^m < 1$ при всех достаточно больших n . Заметим, что

$$2^v (1 - p)^m = e^{v \ln 2 + m \ln(1-p)} \leq e^{v \ln 2 - pm}$$

в силу свойства логарифма. Теперь оценим величину p снизу, так как она идёт у нас с минусом. Рассмотрим сначала её знаменатель:

$$C_v^n = \frac{v!}{n!(v-n)!} = \frac{v(v-1) \cdot \dots \cdot (v-n+1)}{n!} = \frac{v^n}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{v}\right).$$

Аналогично

$$C_{v/2}^n = \frac{(v/2)^n}{n!} \cdot \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2(n-1)}{v}\right).$$

Стало быть, p равно величине 2^{1-n} , умноженной на отношение двух произведений, состоящих из $n - 1$ скобок каждое. Изучим произведение

в знаменателе. Его надо оценить сверху:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{v}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{v}\right) &= \exp\left(\ln\left(1 - \frac{1}{v}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{n-1}{v}\right)\right) \leq \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{v} - \dots - \frac{n-1}{v}\right) = e^{-n(n-1)/(2v)}. \end{aligned}$$

Аналогично делаем оценку числителя снизу:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{v}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2(n-1)}{v}\right) &= \exp\left(\ln\left(1 - \frac{2}{v}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{2(n-1)}{v}\right)\right) \geq \\ &\geq \exp\left(-\frac{2}{v} - \dots - \frac{2(n-1)}{v} - \frac{2^2}{v^2} - \dots - \frac{2^2 \cdot (n-1)^2}{v^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{n(n-1)}{v} - \frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}\right) \end{aligned}$$

(пользуемся свойством логарифма и известной формулой для суммы квадратов первых натуральных чисел, см. [3]). Получаем, что

$$p \geq 2^{1-n} \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2v} - \frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}\right).$$

Величина

$$\frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, ибо $v = n^2/2$. То же самое верно для величины $n/(2v)$. Поэтому при всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2v} - \frac{4n(n-1)(2n-1)}{6v^2}\right) \geq e^{-n^2/(2v)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{-1},$$

так что

$$p \geq 2^{1-n} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{-1}.$$

Далее, замечая, что в силу определения m (см. начало доказательства) при всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$m \geq \left(1 + \frac{3\varepsilon}{4}\right) \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n,$$

получаем

$$\begin{aligned} e^{v \ln 2 - pm} &\leq \exp\left(v \ln 2 - 2^{1-n} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{-1} m\right) \leq \\ &\leq \exp\left(\frac{n^2 \ln 2}{2} - 2^{1-n} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon^2}{8}\right) \frac{n^2 (\ln 2) 2^n}{4}\right). \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon < 1/2$, с огромным запасом

$$\frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon^2}{8} > \frac{\varepsilon}{100}.$$

В итоге

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{n^2 \ln 2}{2} - 2^{1-n} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon^2}{8}\right) \frac{n^2 (\ln 2) 2^n}{4}\right) = \\ = \exp\left(\frac{n^2 \ln 2}{2} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{3\varepsilon^2}{8}\right) \frac{n^2 \ln 2}{2}\right) < e^{-(\varepsilon n^2 \ln 2)/200} < 1 \end{aligned}$$

при всех достаточно больших n . Теорема доказана. $\square$

Крайне любопытно, что, жертвуя конструктивностью, мы реально упростили себе жизнь. До сих пор неизвестны явные конструкции гиперграфов со столь малым числом рёбер и хроматическим числом, большим двух. Лишь совсем недавно — в 2013 году — Х. Гебауэр построила пример гиперграфа, у которого число рёбер не превосходит величины

$$2^{n+cn^{2/3}}, \quad c > 0.$$

Это прекрасное выражение, поскольку основной сомножитель — 2^n — совпадает с известной нам экспонентой в верхней и нижней оценках. Но это гораздо слабее теоремы 1, ведь n^2 несравнимо меньше, чем $2^{n^{2/3}}$.

§ 5. УЛУЧШЕНИЕ НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ $m(n)$ С ПОМОЩЬЮ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

В этом параграфе мы улучшим нижнюю оценку $m(n)$ примерно в $\sqrt[4]{n}$ раз.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такая константа $c > 0$, что для любого n выполнено неравенство $m(n) \geq c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$.*

Доказательство теоремы 2 основано на красивой и несложной идее, которую предложил А. Плúхар. Для описания идеи введём несколько новых понятий. Пусть дан гиперграф $H = (V, E)$. Изначально его вершины представляют собой некоторую совокупность объектов, которые никак не упорядочены. Порядок на этой совокупности можно задать, разумеется, $|V|!$ способами. Пусть задан некоторый порядок (нумерация вершин) π и есть два ребра f_1, f_2 , имеющие ровно одну общую вершину i . Назовём пару (f_1, f_2) *упорядоченной 2-цепью* в нумерации π , если номера всех вершин ребра f_1 предшествуют номеру i , а номера всех вершин ребра f_2 идут после номера вершины i . На рис. 2 показаны «кастрюлька с двумя сардельками» и два способа нумерации вершин в кастрюльке, при одном из которых сардельки образуют упорядоченную 2-цепь, а при другом не образуют. Идея Плухара формулируется в виде следующего критерия.

КРИТЕРИЙ ПЛУХАРА. *Хроматическое число гиперграфа равно 2 тогда и только тогда, когда существует нумерация его вершин, в которой нет упорядоченных 2-цепей.*

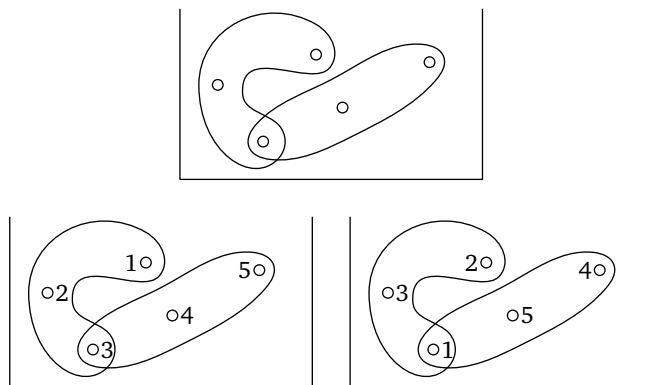


Рис. 2

Прежде чем привести простое доказательство критерия, полезно осознать его смысл в случае обыкновенного графа (т. е. 2-однородного гиперграфа). В самом деле, что означает утверждение «хроматическое число графа равно двум»? Оно означает, что множество вершин графа можно разделить на две непересекающиеся части, внутри которых рёбер графа нет, но между которыми как раз и проходят все рёбра графа (рис. 3). Такой граф ещё называют *двудольным* (т. е. буквально двухчастным), и многие читатели наверняка сталкивались с этим объектом. Понятно, что вершинам одной доли можно присвоить номера от единицы до числа, равного количеству вершин в этой доле, а вершинам второй доли — все последующие номера, и тогда упорядоченных 2-цепей не возникнет (здесь 2-цепь — это «галочка», у которой номера вершин идут в порядке «меньше-больше-меньше» или «больше-меньше-больше»).

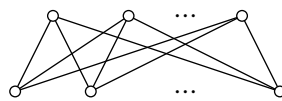


Рис. 3

Доказательство критерия. В одну сторону мы фактически доказательство уже привели. Действительно, если существует двухцветная раскраска, при которой все рёбра неоднородны, то достаточно взять любую нумерацию, при которой все вершины первого цвета имеют меньшие номера, нежели все вершины второго цвета (двудольность).

В обратную сторону рассуждение основано на простейшем жадном алгоритме, и это объясняет название параграфа. Итак, пусть существует нумерация вершин без упорядоченных 2-цепей. Обозначим будущие цвета числами 1, 2, ... Рассматриваем вершины по порядку и красим их в минимальный цвет, при котором они не образуют одноцветных рёбер вместе с уже покрашенными вершинами. Если для некоторой вершины v нам не хватает цветов 1 и 2, то существует ребро f_2 , которому принадле-

жит вершина v и в котором все остальные (предшествующие) вершины уже покрашены в цвет 2. Пусть w — вершина в f_2 с наименьшим номером. Раз мы её покрасили в своё время в цвет 2, мы не смогли тогда её покрасить в цвет 1. Почему? А потому, что, стало быть, имелось ребро f_1 , для которого вершина w была, наоборот, последней и которое имело все вершины цвета 1. В этом случае очевидно, что рёбра f_1, f_2 образуют упорядоченную 2-цепь. Противоречие.

Критерий полностью доказан. $\square$

До доказательства теоремы 2 остался ещё один небольшой шаг. Надо вспомнить утверждение об *асимптотике факториала*. Во введении мы уже приводили обозначение « $\sim$ », называемое *асимптотическим равенством* (или *эквивалентностью*). Строго говоря, две функции f и g натурального аргумента, не принимающие нулевых значений, асимптотически равны (пишут $f \sim g$), если предел их отношения равен единице при стремлении аргумента к бесконечности. Отметим, что разность при этом вовсе не обязана стремиться к нулю: например, $n^2 + n \sim n^2$. В этих терминах справедлива следующая знаменитая формула.

Формула Стирлинга. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

В некотором смысле формула Стирлинга входит в эдакий синклит «самых прекрасных формул математики» — формул, в которых одновременно участвуют обе мировые константы e и π . Доказательство формулы можно найти во всех стандартных учебниках по математическому анализу, и мы его, конечно, не приводим. Получить с ходу некоторую интуицию формулы помогает обычная математическая индукция, с помощью которой легко доказывается неравенство

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Для наших целей подобных неравенств недостаточно. Сомножитель $\sqrt{n}$ и даст нам в итоге корень четвёртой степени в теореме 2, к доказательству которой мы наконец готовы перейти.

Доказательство теоремы 2. Пусть дан произвольный n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с m рёбрами. Мы хотим показать, что при некотором $c > 0$ (не зависящем ни от чего, включая наш гиперграф) и $m \leq c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ выполнено равенство $\chi(H) = 2$. Согласно критерию Плукхара достаточно доказать существование нумерации V без упорядоченных 2-цепей. Рассмотрим, как водится, случайную нумерацию. Иными словами, каждая

нумерация выбирается с вероятностью $1/|V|!$. Пусть $f_1, f_2 \in E$ и пересечение этих рёбер состоит из одной вершины. Обозначим через A_{f_1, f_2} событие, состоящее в том, что в случайной нумерации рёбра f_1, f_2 образуют упорядоченную 2-цепь. Легко сообразить, что

$$P(A_{f_1, f_2}) = \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Далее, вероятность того, что найдутся два ребра, образующие упорядоченную 2-цепь, равна

$$P\left(\bigcup_{f_1, f_2} A_{f_1, f_2}\right) \leq \sum_{f_1, f_2} P(A_{f_1, f_2}) < |E|^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Остаётся лишь проверить, что при m вида $c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ с подходящей константой c выполнено неравенство

$$m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} < 1. \quad (3)$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = \frac{(n!)^2 \cdot (2n)}{n^2 \cdot (2n)!} = \frac{2(n!)^2}{n \cdot (2n)!} \sim \frac{2}{n} \cdot \frac{(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n)^2}{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}} = \frac{2}{n} \cdot \sqrt{\pi n} \cdot 2^{-2n}.$$

В последней выкладке, помимо обычных равенств, есть одно асимптотическое. Как с ним бороться? Ну, точно можно сказать, что существует константа C , с которой при всех n выполнено неравенство

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} < \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot 2^{-2n}.$$

Значит, неравенство (3) заведомо будет выполнено, коль скоро

$$m^2 \leq \frac{\sqrt{n}}{C} \cdot 2^{2n},$$

откуда и получаем вожаденное неравенство $m \leq c\sqrt[4]{n} \cdot 2^n$ с коэффициентом $c = 1/\sqrt{C}$. Теорема доказана. $\square$

§ 6. ДАЛЬНЕЙШЕЕ УЛУЧШЕНИЕ НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ $m(n)$ С ПОМОЩЬЮ РАНДОМИЗИРОВАННОГО АЛГОРИТМА ПЕРЕКРАСКИ

В этом параграфе мы используем иной вероятностный подход, нежели до сих пор, и докажем следующую теорему, полученную Й. Беком и Дж. Спенсером.

ТЕОРЕМА 3. При всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$m(n) \geq \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^{n-1} \right].$$

Конечно, можно было написать в формулировке $1/4$ и 2^n , но так будет удобнее для доказательства, к которому на сей раз мы без всяких предисловий приступим.

Доказательство теоремы 3. Пусть $H = (V, E)$ — n -однородный гиперграф с $m = \lfloor x \cdot 2^{n-1} \rfloor$ рёбрами, где

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}.$$

Покажем, что существует раскраска в 2 цвета множества V , при которой все рёбра неодноразноцветны. Раскраску будем строить с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

Шаг 1. Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью $1/2$ выбирая для каждой вершины один из двух цветов — красный или синий. Пусть D — случайное множество всех вершин, принадлежащих одноцветным рёбрам (объединение всех рёбер, которые оказались одноцветными). Это может быть, например, и пустое множество.

Шаг 2. Пусть $p \in [0, 1]$ (мы для каждого n выберем конкретное p позднее). Рассматриваем только вершины из множества D . У каждой из них мы независимо от всех остальных вершин множества D меняем цвет на противоположный с вероятностью p и не меняем цвет с вероятностью $1 - p$. Иными словами, у нас как бы есть монета со смещённым, вообще говоря, центром тяжести. При случайном бросании монета ложится решкой кверху с вероятностью p и орлом — с вероятностью $1 - p$. Мы бросаем монету $|D|$ раз и, если в очередном бросании монета падает решкой кверху, меняем цвет соответствующей вершины из D ; иначе не меняем.

Понятно, что шаг 1 — это обычная случайная раскраска, с помощью которой мы доказывали неравенство $m(n) \geq 2^{n-1} + 1$. Таким образом, шаг 2 — это попытка исправить ошибки шага 1 за счёт того, что шаг 1 нечувствителен к виду исходного гиперграфа, а шаг 2 пытается учесть его структуру и повысить тем самым вероятность того, что на выходе все рёбра окажутся неодноразноцветными. Разумеется, качество шага 2 зависит от выбора p , и скоро мы увидим, как этот выбор осуществлять оптимально.

Пусть $\mathcal{F}$ — событие, состоящее в том, что раскраска не удалась, т. е. существуют одноцветные рёбра. Как конкретное ребро f может оказаться одноцветным? Есть всего 6 вариантов:

- 1) $A_{f,1}$: ребро f красное после шага 1 и красное после шага 2;
- 2) $A_{f,2}$: ребро f красное после шага 1 и синее после шага 2;

- 3) $A_{f,3}$: ребро f синее после шага 1 и синее после шага 2;
- 4) $A_{f,4}$: ребро f синее после шага 1 и красное после шага 2;
- 5) $C_{f,1}$: ребро f неодноразноцветное после шага 1 и красное после шага 2;
- 6) $C_{f,2}$: ребро f неодноразноцветное после шага 1 и синее после шага 2.

Очевидно,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{f \in E} (A_{f,1} \cup A_{f,2} \cup A_{f,3} \cup A_{f,4} \cup C_{f,1} \cup C_{f,2}),$$

$$P(A_{f,1}) = P(A_{f,3}), \quad P(A_{f,2}) = P(A_{f,4}), \quad P(C_{f,1}) = P(C_{f,2}).$$

Поэтому

$$P(\mathcal{F}) \leq 2 \sum_{f \in E} (P(A_{f,1}) + P(A_{f,2}) + P(C_{f,1})).$$

Оценим вероятности, стоящие в скобках под знаком суммирования. Совсем легко разобраться с первыми двумя:

$$P(A_{f,1}) = 2^{-n} \cdot (1-p)^n, \quad P(A_{f,2}) = 2^{-n} \cdot p^n.$$

А вот с третьей вероятностью намного труднее.

Как могло случиться, что ребро f было неодноразноцветным после шага 1, но стало красным после шага 2? Конечно, синие вершины ребра f , имевшиеся в нём после шага 1, должны были перекраситься. Но почему? Как они попали в множество D , если f неодноразноцветное и в формировании D не участвовало? Значит, было ещё хотя бы одно ребро φ , которое было синим после шага 1 и которое имеет непустое пересечение с f . Это именно следствие, не равносильность! Всё могло быть очень и очень хитро. Например, красные после шага 1 вершины ребра f тоже могли попасть в D и пытаться поменять цвет, но монетка легла орлом. И так далее. Но мы точно знаем, что следствие имеет место, а значит,

$$P(C_{f,1}) \leq P\left(\bigcup_{\varphi} B_{f,\varphi}\right),$$

где объединение берётся по всем $\varphi \in E$, которые имеют непустое пересечение с f , а $B_{f,\varphi}$ — событие, состоящее в том, что f неодноразноцветное после шага 1, f красное после шага 2 и φ синее после шага 1. Таким образом,

$$P(C_{f,1}) \leq \sum_{\varphi} P(B_{f,\varphi}),$$

и нам нужно оценить величину $P(B_{f,\varphi})$.

Положим $h = |f \cap \varphi| \geq 1$. Посмотрим отдельно на $a = f \cap \varphi$, отдельно на $b = f \setminus \varphi$ и отдельно на $c = \varphi \setminus f$. С вершинами из a всё ясно. Они были синими и стали красными. Вероятность этого равна $2^{-h} \cdot p^h$. Так же просто всё и в случае c . Вершины там были синими, а что с ними стало, мы

не знаем. Вероятность этого не больше чем $2^{-(n-h)} \cdot 1$. Интереснее всего обстоят дела с b . Пусть $v \in b$. Есть два варианта. Во-первых, вершина v могла быть синей и стать красной. Вероятность этого равна $(1/2) \cdot p$. Во-вторых, она могла быть красной и остаться красной. Как произошло последнее, мы не знаем: то ли v попала в D , но монетка легла орлом, то ли v не попала в D и просто не пыталась сменить цвет. В любом случае здесь вероятность не больше чем $(1/2) \cdot 1$. Итого для данной вершины $v \in b$ имеем оценку вероятности величиной, равной сумме оценок вероятностей первого и второго варианта, т. е. $p/2 + 1/2$. В целом по b за счёт независимости вероятность оценивается величиной $(p/2 + 1/2)^{n-h}$. Собирая все оценки вместе, получаем

$$P(B_{f,\varphi}) \leq 2^{-h} \cdot p^h \cdot 2^{-(n-h)} \cdot \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-h} = 2^{h-2n} \cdot p^h \cdot (1+p)^{n-h}.$$

Очевидно, последняя величина принимает максимальное значение при $h = 1$ (она убывает по h). Значит, всегда выполнены неравенства

$$P(B_{f,\varphi}) \leq 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^{n-1} < 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n.$$

Вернёмся к оценке вероятности $C_{f,1}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} P(C_{f,1}) &\leq \sum_{\varphi} P(B_{f,\varphi}) < |E| \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = m \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n \leq \\ &\leq x \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq 2 \sum_{f \in E} (P(A_{f,1}) + P(A_{f,2}) + P(C_{f,1})) \leq \\ &\leq 2 \sum_{f \in E} (2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n) = \\ &= 2m (2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n) \leq \\ &\leq x \cdot 2^n (2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n) = \\ &= x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n. \end{aligned}$$

Полученный результат можно трактовать так: «Пусть дано n , и пусть x — максимальное число, для которого существует $p \in [0, 1]$, удовлетворяющее неравенству

$$x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n < 1.$$

Тогда $m(n) \geq x \cdot 2^{n-1}$ ». Теорема 3 лишь говорит нам, что для

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}$$

такое p действительно есть. Какое же оно? Вот такое:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n}.$$

Впечатляет? Ещё красивее выглядит проверка (пользуемся свойством логарифма):

$$\begin{aligned} x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n &= \\ = x \cdot e^{n \ln(1-p)} + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot e^{n \ln(1+p)} &\leq x \cdot e^{-pn} + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot e^{pn} < \end{aligned}$$

(при достаточно больших n)

$$\begin{aligned} &< \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot \ln(n/\ln n)} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln n}{n} \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot \ln(n/\ln n)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{-1/3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{2/3} \cdot \frac{\ln n}{n} \cdot \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{1/3} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} < 1. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в рамках метода можно улучшить константы, но нельзя увеличить по порядку кубический корень. Попробуйте осознать это!

§ 7. САМАЯ СИЛЬНАЯ ИЗВЕСТНАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

В этом параграфе мы соберём вместе идею случайной раскраски и идею жадного алгоритма. В результате мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. При всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$m(n) \geq \left[\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \right].$$

С точностью до константы это самый лучший известный результат! Доказав теорему 4, мы окажемся на самой вершине современного знания в области, ведь и верхняя оценка величиной порядка $n^2 \cdot 2^n$ — это лучшее, что сейчас известно.

У теоремы 4 очень любопытная история. В 2002 году её доказали Дж. Радхакришнан и А. Сринивасан. Их рассуждение можно прочесть в книге [14]. А в 2013 году Д. Д. Черкашин и Я. Козик придумали иной алгоритм, ещё более простой и изящный. Именно его мы здесь и изложим. Черкашин и Козик работали совершенно независимо друг от друга. Но в итоге они буквально с разницей в одну неделю подали свои статьи в один и тот же журнал! Удивительное совпадение.

Ещё немного знаний из математического анализа потребуется нам для понимания выкладок. А именно, нужно знать, что

$$e^x = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^t}{t!}. \quad (4)$$

Опять же, этот факт можно найти в любом стандартном учебнике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Дан n -однородный гиперграф $H = (V, E)$ с

$$m = \left\lceil \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \right\rceil$$

рёбрами. Действуем на стыке методов. Положим (сразу!)

$$p = \frac{\ln(4n \ln^2 n)}{2n}.$$

Шаг 1. Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью $(1 - p)/2$ выбирая для каждой вершины один из двух цветов — красный или синий, — а с вероятностью p делая её же бесцветной. Пусть W — случайное множество всех бесцветных вершин.

Шаг 2. Берём случайную нумерацию вершин из W . Как из этой нумерации сделать раскраску и что вообще мы будем красить, поймём совсем скоро.

Для каждого ребра $f \in E$ есть следующие и только следующие «плохие» варианты после шага 1:

- 1) $A_{f,1}$: ребро f красное после шага 1;
- 2) $A_{f,2}$: ребро f синее после шага 1;
- 3) $A_{f,3}$: после шага 1 в ребре f только одна бесцветная вершина, а все остальные вершины красные;
- 4) $A_{f,4}$: после шага 1 в ребре f только одна бесцветная вершина, а все остальные вершины синие;
- 5) $A_{f,5}$: после шага 1 в ребре f не менее двух и не более $n - 1$ бесцветных вершин, а все остальные вершины красные;
- 6) $A_{f,6}$: после шага 1 в ребре f не менее двух и не более $n - 1$ бесцветных вершин, а все остальные вершины синие;
- 7) $A_{f,7}$: после шага 1 в ребре f все вершины бесцветные.

Как мы скоро увидим, все события, кроме 5-го и 6-го, имеют крайне маленькие вероятности. Шаг 2 борется именно с 5-м и 6-м случаями. А именно, если для f выполнилось условие $A_{f,5}$, то рассмотрим множество $f \cap W$ и присвоим ему «метку» 1. Если же для f выполнилось условие $A_{f,6}$, то также рассмотрим множество $f \cap W$ и присвоим ему «метку» 2.

Скажем, что в данной нумерации множества W пара $f \cap W$ и $f' \cap W$ образует сильную упорядоченную 2-цепь, если она образует упорядоченную 2-цепь, причём у $f \cap W$ метка 1, а у $f' \cap W$ метка 2. Имеет место аналог критерия Плухара, который доказывается совершенно аналогично.

Аналог критерия Плухара. Множество W можно так покрасить в красный и синий цвета, чтобы каждое подмножество вида $f \cap W$ с меткой 1 не было целиком красным и каждое подмножество вида $f \cap W$ с меткой 2 не было целиком синим, если и только если существует нумерация его вершин, в которой нет сильных упорядоченных 2-цепей.

В чём тут дополнительная хитрость? В том, что нам не нужно красить W так, чтобы все «обрубки» $f \cap W$ были неоднородными. Достаточно добиться того, чтобы их цвета были не такими, как у $f \setminus W$!

Остаётся убедиться в том, что при достаточно больших n сумма вероятностей всех плохих событий меньше единицы.

Для первых двух типов событий сумма вероятностей оценивается величиной

$$\begin{aligned} 2m \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^n &\leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot 2^{-n} \cdot e^{-pn} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot e^{-\ln(4n \ln^2 n)/2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n}, \end{aligned}$$

которая стремится к нулю и, стало быть, при больших n значения не имеет.

Для третьего и четвертого типов событий оценка слегка ухудшается из-за необходимости выбрать бесцветную вершину:

$$2m \cdot np \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot \frac{\ln(4n \ln^2 n)}{2} \cdot 2^{-n+1} \cdot \frac{e^{-pn}}{1-p}.$$

Величина $1-p$ стремится к единице, а

$$\frac{\ln(4n \ln^2 n)}{2} \sim \frac{\ln n}{2}.$$

Поэтому при всех больших n можно, например, написать

$$\frac{\ln(4n \ln^2 n)}{2} \cdot \frac{1}{1-p} < \ln n,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \cdot \frac{\ln(4n \ln^2 n)}{2} \cdot 2^{-n+1} \cdot \frac{e^{-pn}}{1-p} &< \\ &< \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot (\ln n) \cdot e^{-pn} = \sqrt{n \ln n} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n} \cdot \ln n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Наконец, для событий 7-го типа имеем оценку mp^n , и эта величина стремится к нулю с космической скоростью.

Для получения оценки в случае 5-го и 6-го типов событий нужно зафиксировать произвольную 2-цепь (это делается заведомо не более чем m^2 способами). Пусть $a \geq 2$, $b \geq 2$ суть $|f \cap W|$ и $|f' \cap W|$ соответственно. Тогда искомая вероятность оценивается следующим произведением:

$$\left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b} \cdot p^{a+b-1} \cdot C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Здесь первый множитель отвечает вершинам из $(f \setminus W) \cup (f' \setminus W)$, второй множитель отвечает вершинам из $(f \cap W) \cup (f' \cap W)$, третий и четвёртый множители отвечают выбору из f и f' тех вершин, которые окажутся бесцветными (единственная общая вершина 2-цепи заведомо должна стать бесцветной, поэтому выбор осуществляется из $n-1$ по $a-1$ и по $b-1$), последний множитель — это вероятность того, что в случайной нумерации на шаге 2 наша 2-цепь окажется сильной упорядоченной. Сумма вероятностей не превосходит

$$m^2 \sum_{a,b \geq 2} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b} \cdot p^{a+b-1} \cdot C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}.$$

Сделаем замену $t = a + b - 2$. Учтём также, что

$$C_{n-1}^{a-1} = \frac{(n-1) \cdot \dots \cdot (n-a+1)}{(a-1)!} < \frac{n^{a-1}}{(a-1)!},$$

откуда

$$C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} \leq \frac{n^t}{(t+1)!}$$

и (при данном t числа a, b фиксируются не более чем t способами)

$$\begin{aligned} m^2 \sum_{a,b \geq 2} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-a-b} \cdot p^{a+b-1} \cdot C_{n-1}^{a-1} \cdot C_{n-1}^{b-1} \cdot \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!} &< \\ &< m^2 \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-t-2} \cdot p^{t+1} \cdot \frac{n^t}{(t+1)!} < \\ &< m^2 \cdot \left(\frac{1-p}{2}\right)^{2n-2} \cdot p \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{-t} \cdot p^t \cdot \frac{n^t}{t!} < \end{aligned}$$

(с учётом выбора t , свойства логарифма, формулы (4) и того факта, что при больших n величина p не больше $(\ln n)/n$)

$$< \frac{1}{16} \cdot \frac{n}{\ln n} \cdot 2^{2n} \cdot 2^{-2n+2} \cdot e^{-2pn+2p} \cdot \frac{\ln n}{n} \cdot e^{2pn/(1-p)} = \frac{1}{4} \cdot e^{-2pn+2p+2pn/(1-p)}.$$

Поскольку $p \rightarrow 0$, при больших n имеем $\frac{1}{1-p} \leq 1 + 2p$, так что

$$e^{-2pn+2p+2pn/(1-p)} < e^{-2pn+2p+2pn+4p^2n} = e^{4p^2n+2p}.$$

В свою очередь, $p^2n \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$, а значит, при больших n мы имеем

$$e^{4p^2n+2p} < 2,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{4} \cdot e^{-2pn+2p+2pn/(1-p)} < \frac{1}{2}.$$

Складывая последнюю оценку с тремя оценками, стремящимися к нулю, при больших n получаем, что наш алгоритм завершится неудачей с вероятностью, меньшей единицы. Тем самым теорема доказана. $\square$

§ 8. ЗАДАЧА ОБ УКЛОНЕНИИ:

ПОСТАНОВКА И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы расскажем об одном интересном уточнении задачи о раскраске. А именно, зачастую важно не просто добиться того, чтобы все рёбра были неодноразноцветными, но ещё и постараться сделать так, чтобы количества красных и синих вершин в каждом ребре были примерно одинаковыми. Для формализации новой постановки удобно считать, что красный цвет — это 1, а синий цвет — это -1 , т. е. раскраска — это отображение χ , при котором каждой вершине присваивается одно из двух значений. В таких терминах для каждого $H = (V, E)$ и для раскраски χ нас интересует величина

$$\text{disc}(H, \chi) = \max_{f \in E} |\chi(f)|, \quad \chi(f) = \sum_{v \in f} \chi(v),$$

называемая *уклонением* (обозначение происходит от английского слова «discrepancy»). Положим также

$$\text{disc}(H) = \min_{\chi} \text{disc}(H, \chi).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать не только однородные гиперграфы. Приведём и прокомментируем основные известные результаты.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$. Тогда

$$\text{disc}(H) \leq \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

Теорема 5 во многих ситуациях даёт весьма хорошую оценку. Действительно, если m не слишком велико (например, не больше какого-нибудь многочлена от n), а рёбра гиперграфа достаточно большие (на-

пример, порядка n), то получается, что не просто можно всегда сделать все рёбра неоднородными, но можно ещё и сделать так, чтобы разница между количествами вершин разного цвета в каждом ребре не превосходила корня из его размера, умноженного на логарифм его размера. Таким образом, оптимальное уклонение бесконечно мало по сравнению с числом вершин в каждом ребре.

Теорему 5 мы доказывали в книге [15]. Но там мы дали не совсем аккуратное и довольно-таки неэлементарное доказательство. В следующем параграфе мы приведём другое, более замкнутое в себе рассуждение, обосновывающее теорему 5. В случае $m = n$ теорема 5 допускает уточнение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = n$. Тогда $\text{disc}(H) \leq 6\sqrt{n}$.

Теорема 6 доказана в книге [14]. По сложности она несколько превосходит всё, о чём мы здесь пишем. Поэтому в этой статье мы её доказывать не станем.

Теорема 6 точна по порядку величины.

ТЕОРЕМА 7. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при каждом $n > n_0$ найдётся гиперграф $H = (V, E)$, у которого $|V| = n$, $|E| = n$ и

$$\text{disc}(H) \geq (1 - \varepsilon) \cdot \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Теорема 7 доказана вероятностным методом в книге [15] и линейно-алгебраическим — в книге [12]. Для полноты картины мы в § 10 воспроизведём второе (чуть более аккуратное и красивое) доказательство.

§ 9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

9.1. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Материал этого параграфа есть в книге [16]. Мы приводим его для полноты доказательства.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Тогда для любого $a > 0$ выполнено неравенство

$$P(|\xi_1 + \dots + \xi_n| > a) \leq 2e^{-a^2/(2n)}.$$

Фактически в теореме 8 речь идёт о совершенно классическом объекте теории вероятностей — о случайном блуждании на прямой. В шуточной интерпретации, которую я обычно рассказываю на лекциях, в точке 0 на прямой находится кабак. Из него выходит пьяница, который с веро-

ятностью $1/2$ перемещается в точку 1 и с такой же вероятностью идёт в точку -1 . Дальше он снова выбирает направление движения случайно. Так вот, теорема говорит о том, что крайне мала вероятность, с которой пьяница уйдёт сравнительно далеко от родного кабака. Например, при $n = 10^6$, $a = 10^4$ вероятность не больше $2e^{-50}$, т. е. сделав миллион шагов, пьяница удалится от «сияющего центра» на расстояние, равное всего лишь десяти тысячам шагов, с вероятностью, не превосходящей чудовищно малой величины $2e^{-50}$.

Доказательство теоремы 8. Ввиду симметрии достаточно убедиться в том, что

$$P(\xi_1 + \dots + \xi_n > a) \leq e^{-a^2/(2n)}.$$

Положим $\lambda = a/n$. Имеем

$$P(\xi_1 + \dots + \xi_n > a) = P(\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n) > \lambda a) = P(e^{\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n)} > e^{\lambda a}).$$

Воспользуемся неравенством Маркова (см. [5]) и независимостью случайных величин:

$$P(e^{\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n)} > e^{\lambda a}) \leq e^{-\lambda a} \cdot E e^{\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = e^{-\lambda a} \cdot \prod_{i=1}^n E e^{\lambda \xi_i} = e^{-\lambda a} \cdot \left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \right)^n =$$

(по формуле (4))

$$= e^{-\lambda a} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \right) \right)^n = e^{-\lambda a} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \right)^n \leq$$

(за счёт того, что $(2k)! \geq 2^k \cdot k!$)

$$\leq e^{-\lambda a} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{2^k \cdot k!} \right)^n =$$

(по формуле (4))

$$= e^{-\lambda a} \cdot e^{\lambda^2 n/2} = e^{-a^2/(2n)}.$$

Теорема 8 доказана. □

9.2. ТЕОРЕМА 8 И РАСКРАСКА

Нам дан гиперграф $H = (V, E)$ с $V = \{1, \dots, n\}$ и $|E| = m$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — случайные величины из теоремы 8. С помощью них построим случайную раскраску χ , полагая $\chi(i) = \xi_i$. Покажем, что с положительной вероятностью для каждого $f \in E$ выполнено неравенство

$$|\chi(f)| \leq a, \quad \text{где } a = \sqrt{2n \ln(2m)},$$

что и завершит доказательство теоремы 5. Но это равносильно тому, что с вероятностью, меньшей единицы, найдётся $f \in E$, для которого $|\chi(f)| > a$. Для каждого отдельного ребра f имеем

$$P(|\chi(f)| > a) = P\left(\left|\sum_{i \in f} \xi_i\right| > a\right) \leq$$

(по теореме 8)

$$\leq 2e^{-a^2/(2|f|)} \leq 2e^{-2n \ln(2m)/(2n)} = \frac{1}{m}.$$

и этом $|f|$ может равняться n лишь для одного $f \in E$, откуда следует, что

$$P(\exists f: |\chi(f)| > a) \leq \sum_{f \in E} P(|\chi(f)| > a) < \frac{|E|}{m} = 1,$$

и теорема 5 доказана.

§ 10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7

Сначала нам потребуются нетривиальные сведения из линейной алгебры.

Матрицы Адамара. Квадратная матрица размера $n \times n$ называется матрицей Адамара, если все её элементы суть плюс и минус единицы, а строки её попарно ортогональны. Априори неясно даже, существует ли такая матрица, но заведомо понятно, что с тем же успехом можно было потребовать попарной ортогональности её столбцов (вышло бы эквивалентное определение²⁾) и что домножение всех элементов любой строки (любого столбца) матрицы Адамара на -1 сохраняет «адамаровость». Упомянутые факты позволяют считать, что, скажем, все элементы первого столбца и первой строки матрицы Адамара суть единицы. Обозначим такую матрицу H_1 .

Что касается существования матриц Адамара, то гипотеза, которая до сих пор не доказана, состоит в том, что эти матрицы существуют при $n = 1, 2$ и $n = 4k$. Известно, тем не менее, достаточно много. Так, например, установлено существование матриц при $n = 2^k$, $n = p^k + 1$, где p простое, а n делится на 4, при $n = 92, 116, 172$ и при различных других специальных значениях n (см. [17]). В конечном счёте множество тех n , для которых матрицы Адамара точно найдутся, «плотно» в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ между n и $n(1 + \varepsilon)$ имеется порядок матрицы Адамара.

²⁾ Действительно, то и другое свойство равносильно тому, что произведение матрицы на транспонированную — диагональная матрица.

Основная лемма. Пусть $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, где n_i — порядок матрицы Адамара. Рассмотрим для каждого $n = n_i$ матрицу H_1 порядка n . Возьмём, кроме того, матрицу J , состоящую из одних единиц, и положим

$$H^* = \frac{H_1 + J}{2}$$

(H^* — это $(0, 1)$ -матрица). Считая, что $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор в $\mathbb{R}^n$, определим его норму в пространстве l_p как

$$|\mathbf{x}|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \quad \text{при } p \in [1, \infty)$$

и как

$$|\mathbf{x}|_\infty = \max_i |x_i| \quad \text{при } p = \infty.$$

Выполнена следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для любого вектора $\mathbf{x}$, координаты которого суть плюс и минус единицы, имеет место оценка

$$|H^* \mathbf{x}|_\infty \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из формулировки леммы. Тогда

$$H_1 \mathbf{x} = x_1 \mathbf{h}_1 + \dots + x_n \mathbf{h}_n,$$

где $\mathbf{h}_i$ — вектор-столбцы матрицы H_1 . Полагая $H_1 \mathbf{x} = (L_1, \dots, L_n)$, получаем

$$L_1^2 + \dots + L_n^2 = |H_1 \mathbf{x}|_2^2 = x_1^2 |\mathbf{h}_1|_2^2 + \dots + x_n^2 |\mathbf{h}_n|_2^2 = n + \dots + n = n^2,$$

поскольку векторы $\mathbf{h}_i$ попарно ортогональны. Значит, некоторое L_i^2 оценивается снизу величиной n , и, стало быть,

$$|H_1 \mathbf{x}|_\infty \geq \sqrt{n}.$$

Теперь пусть $h_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, — элементы матрицы H_1 . Тогда

$$L_1 + \dots + L_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j h_{i,j} = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^n h_{i,j} \right) = x_1 \cdot n = \pm n,$$

поскольку сумма элементов матрицы H_1 , стоящих в первом столбце, есть, очевидно, n , а сумма элементов в остальных столбцах равна нулю (числа единиц и минус единиц в них одинаковы, ведь они должны быть ортогональны первому столбцу, в котором одни единицы).

Положим, далее, $\lambda = x_1 + \dots + x_n$, так что $J\mathbf{x} = (\lambda, \dots, \lambda)$. Соответственно

$$(H_1 + J)\mathbf{x} = (L_1 + \lambda, \dots, L_n + \lambda).$$

Следовательно,

$$|(H_1 + J)\mathbf{x}|_2^2 = \sum_{i=1}^n (L_i + \lambda)^2 = \sum_{i=1}^n (L_i^2 + 2L_i\lambda + \lambda^2) = n^2 \pm 2n\lambda + n\lambda^2.$$

У нас n чётно, так как матриц Адамара нечётного порядка, конечно же, не бывает (исключение составляет вырожденный случай $n = 1$). Величина λ , будучи, стало быть, суммой чётного числа плюс и минус единиц, есть тогда чётное целое. Квадратичная форма (по λ) $n^2 \pm 2n\lambda + n\lambda^2$ достигает минимума при $\lambda = \pm 1$, но, как мы только что выяснили, λ обязано быть чётным, и посему реальный минимум находится в множестве $\lambda \in \{-2, 0, 2\}$. Из этого рассуждения следует оценка

$$|(H_1 + J)\mathbf{x}|_2^2 \geq n^2.$$

Как это уже было однажды, последнее неравенство означает, что

$$|(H_1 + J)\mathbf{x}|_\infty \geq \sqrt{n},$$

т. е. $|H^*\mathbf{x}| \geq \sqrt{n}/2$, и лемма доказана. $\square$

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 7. Обозначим строки матрицы H^* через $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$. Это $(0, 1)$ -векторы, которые мы превратим в подмножества $M_1, \dots, M_n$ множества $V = \{1, \dots, n\}$ по следующему принципу: $i \in M_j$ тогда и только тогда, когда i -я координата вектора $\mathbf{g}_j$ равна 1. Возникает гиперграф $H = (V, \{M_1, \dots, M_n\})$, и мы покажем, что для него

$$\text{disc}(H) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Пусть χ — произвольная раскраска. Ей однозначно соответствует $(-1, 1)$ -вектор $\mathbf{x}$, состоящий из «цветов». Нетрудно видеть, что

$$|H^*\mathbf{x}|_\infty = \text{disc}(H, \chi).$$

В самом деле,

$$H^*\mathbf{x} = ((\mathbf{g}_1, \mathbf{x}), \dots, (\mathbf{g}_n, \mathbf{x})),$$

но

$$(\mathbf{g}_v, \mathbf{x}) = \sum_{i \in M_v} \chi(i), \quad v = 1, \dots, n,$$

и всё в порядке. Раскраска χ была выбрана наугад, и потому

$$\text{disc}(H) = \min_{\chi} \text{disc}(H, \chi) = \min_{\mathbf{x}} |H^*\mathbf{x}|_\infty \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

ввиду леммы 1. Теорема доказана для любого n , служащего порядком матрицы Адамара.

Во всей же своей полноте теорема немедленно следует из упомянутой выше плотности порядков матриц Адамара. $\square$

§ 11. НЕСКОЛЬКО СЛОВ О НЕСКОЛЬКИХ ЦВЕТАХ

До сих пор мы говорили исключительно о раскрасках в два цвета. Однако ясно, что всё с этого только начинается: абсолютно естественно работать с произвольным количеством цветов. Ниже мы дадим лишь самые первоначальные сведения о возникающих проблемах, и читателю уже станет очевидным всё разнообразие задач, которое здесь открывается.

Пусть $m(n, r)$ — это минимальное возможное число рёбер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом, строго большим r . Ясно, что $m(n) = m(n, 2)$.

Легко показать, что величина $m(n, r)$ конечна при любых значениях $n \geq 2, r \geq 2$. Рассмотрим гиперграф $H = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, r(n-1) + 1\}$, а E — совокупность всех n -элементных подмножеств множества V . Согласно принципу Дирихле, в любой r -цветной раскраске множества V найдутся n вершин, покрашенных в один цвет, т. е. найдётся одноцветное ребро. Следовательно, $\chi(H) > r$ и

$$m(n, r) \leq |E| = C_{r(n-1)+1}^n. \quad (5)$$

В частности, при $r = 2$ имеем давно известную нам оценку $m(n) \leq C_{2n-1}^n$. Как мы хорошо помним, эта оценка отнюдь не точна, и мы её значительно улучшили с помощью вероятностного метода. Однако при $n = 2$, т. е. в случае обычного графа (помните формулу (2)?) $m(2) = 3 = C_3^2$, так что здесь уточнений как раз не предвидится. Оказывается, для любого $r \geq 2$ выполнено $m(2, r) = C_{r+1}^2$. Достаточно показать, что для любого графа G , имеющего менее C_{r+1}^2 рёбер, выполнено неравенство $\chi(G) \leq r$. Проведём индукцию по числу вершин в графе.

Если $G = (V, E)$ и $|V| \leq r$, то очевидно, что $\chi(G) \leq r$.

Пусть для $v > r$ доказано, что любой граф $G = (V, E)$ с условиями $|V| < v$ и $|E| < C_{r+1}^2$ имеет хроматическое число, не превосходящее r . Рассмотрим произвольный граф $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ с условиями $|\tilde{V}| = v$ и $|\tilde{E}| < C_{r+1}^2$. В силу очевидных неравенств

$$v \min_{u \in \tilde{V}} \deg u \leq \sum_{u \in \tilde{V}} \deg u = 2|\tilde{E}| < r(r+1)$$

получаем, что $\tilde{G}$ содержит вершину $u \in \tilde{V}$ степени строго меньше r . Рассмотрим граф $G' = (V', E')$, где $V' = \tilde{V} \setminus \{u\}$, а $E' = \{e \in \tilde{E} : u \notin e\}$. По предположению индукции $\chi(G') \leq r$. Следовательно, для G' существует правильная раскраска в r цветов. Коль скоро нам нужно из неё получить искомую раскраску для $\tilde{G}$, следует так подобрать цвет для вершины u , чтобы все рёбра, содержащие u , были неоднородными. Но количество этих рёбер

строго меньше r , поэтому необходимый нам цвет найдётся. Утверждение доказано.

Как, однако, и следовало ожидать, в общем случае оценка (5) допускает усиления. По аналогии с неравенствами для $m(n)$ несложно доказать следующие оценки величины $m(n, r)$:

$$r^{n-1} \leq m(n, r) \leq \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (6)$$

И, приложив небольшие усилия, читатель может убедиться в том, что при фиксированных r и достаточно больших n указанная верхняя оценка гораздо сильнее оценки (5). Правда, если, напротив, зафиксировать n (не только $n = 2$), а r устремить к бесконечности, то окажется, что уже оценка (5) торжествует победу над верхней оценкой в (6)... Хитро всё устроено! Эрдёш было предположил, что при больших значениях r именно оценка (5) оптимальна: для любого $n \geq 3$ существует такое натуральное число $r_0(n)$, что для любого $r > r_0(n)$ выполняется равенство $m(n, r) = C_{r(n-1)+1}^n$. Однако и это оказалось неверно...

Сейчас имеется масса различных нижних и верхних оценок для $m(n, r)$ при разных соотношениях между параметрами. Разумеется, и нижняя оценка в (6) уточнена многими способами. Например, одним из сравнительно недавних прорывов (2013 год) было обобщение теоремы 4 на случай произвольного r : существует такая константа $c > 0$, что для любых r, n выполнено неравенство

$$m(n, r) \geq c \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{(r-1)/r} r^{n-1}.$$

Однако точные значения и тем более формулы получены лишь в редких случаях. Область настолько бурно развивается, что за последние 10 лет только в «Успехах математических наук» опубликованы целых два обзора! Заинтересованный читатель может обратиться к ним для дальнейшего погружения в проблематику: см. [18, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Райгородский А. М. Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.
- [2] Райгородский А., Воронов В., Савватеев А. Прорыв в задаче о раскраске плоскости // Квант. 2018. № 11. С. 2–9.
- [3] Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2019.
- [4] Глибичук А. А., Ильинский Д. Г., Мусатов Д. В., Райгородский А. М., Чернов А. А. Основы комбинаторики и теории чисел: задачник. Долгопрудный: Интеллект, 2019.

- [5] Райгородский А. М. Комбинаторика и теория вероятностей. Долгопрудный: Интеллект, 2013.
- [6] <https://www.coursera.org/learn/kombinatorika-dlya-nachinayushchikh>
- [7] <https://www.coursera.org/learn/modern-combinatorics>
- [8] <https://www.coursera.org/learn/teoriya-grafov>
- [9] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
- [10] Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г., Кунавский А. Б., Райгородский А. М., Скопенков А. Б., Чернов А. А. Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016.
- [11] <https://www.coursera.org/learn/probability-theory-basics>
- [12] Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.
- [13] Райгородский А. М. Задачи о раскрасках. М.: МЦНМО, 2020.
- [14] Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2013.
- [15] Райгородский А. М. Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.
- [16] Райгородский А. М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2016.
- [17] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
- [18] Райгородский А. М., Черкашин Д. Д. Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // УМН. 2020. Т. 75, № 1. С. 95–154.
- [19] Райгородский А. М., Шабанов Д. А. Задача Эрдёша — Хайнала о раскрасках гиперграфов, её обобщения и смежные проблемы // УМН. 2011. Т. 66, № 5. С. 109–182.

Основы теории узлов и зацеплений для пользователя

А. Б. Скопенков

Это методическая статья. Мы определяем простые инварианты узлов и зацеплений (коэффициент зацепления, инварианты Арфа — Кэссона и многочлен Александера — Конвея), чтобы получить интересные результаты, формулировки которых доступны неспециалисту. Простейшие инварианты естественно появляются при попытках распутать узел или зацепление. Затем мы представляем рекурсивные скейн-соотношения для простейших инвариантов, которые позволяют ввести более сложные инварианты. Мы формулируем теорему Васильева — Концевича в виде, удобном для вычисления самих инвариантов, а не только размерности пространства инвариантов. Предварительных знаний не требуется; мы даём строгие определения основных объектов на языке, не препятствующем их интуитивному пониманию.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Основные определения и результаты об узлах	129
§ 2. Основные определения и результаты о зацеплениях	132
§ 3. Основные инструменты	135
§ 4. Гауссов коэффициент зацепления по модулю 2	137
§ 5. Арф-инвариант	138
§ 6. Приложение: правильные раскраски	140
§ 7. Ориентированные узлы и зацепления; связные суммы	141
§ 8. Гауссов коэффициент зацепления	145
§ 9. Инвариант Кэссона	147
§ 10. Полином Александера — Конвея	148
§ 11. Инварианты Васильева — Гусарова	150
§ 12. Приложение: некоторые доказательства, указания и решения . .	152

Частично поддержан грантом РФФИ № 19–01–00169 и грантом фонда Саймонса-НМУ.

О СТИЛЕ ЭТОГО ТЕКСТА

Как правило, я привожу *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировок (но я не хочу лишать вас удовольствия найти момент, когда вы наконец-то сможете доказать такое утверждение). Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний.

Утверждения в этом тексте — простые элементы теории (для читателя, частично знакомого с материалом, они являются краткими напоминаниями). С той же целью приведено небольшое количество задач. Указания, решения и доказательства к утверждениям, задачам, теоремам и леммам приведены в § 12. Однако рекомендую читателю подумать над ними самостоятельно. «Обучение путём решения задач не только характерно для серьёзного изучения математики [HC19, § 1.1], [ZSS, § 1.2], но и продолжает древнюю культурную традицию»¹⁾ [IRS, с. 165]».

Замечания формально не используются в дальнейшем.

Англоязычную версию статьи см. в [Sk20u].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ УЗЛАХ

Начнём с неформального описания основных понятий (строгие определения даны после замечания 1.2). *Узел* можно представить себе как тонкую эластичную верёвку, концы которой склеены (рис. 1). Как и на этом рисунке, узлы обычно изображаются с помощью их «удобной» проекции на плоскость, которая называется *диаграммой узла*. Представьте, что вы раскладываете верёвку на столе, тщательно записывая, как она пересекает себя (т. е.

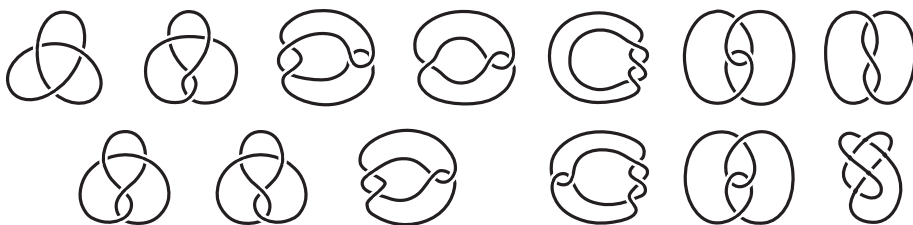


Рис. 1. Узлы, изотопные трилистнику (верхний ряд) и восьмёрке (нижний ряд)

¹⁾ Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее парадоксами, а не задачами. См. подробнее [Su92].

какая часть верёвки лежит сверху). Необходимо помнить, что проекции одного и того же узла на разные плоскости могут выглядеть по-разному.

Тривиальный узел — это контур (граница) треугольника.

Под *изотопией* узла понимается его непрерывная деформация в пространстве как тонкой эластичной нити; любые самопересечения нити во время деформации запрещены. Два узла называются *изотопными*, если один из них можно преобразовать в другой с помощью изотопии.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. (а) Все узлы, представленные в верхнем ряду на рис. 1, изотопны друг другу. (Для одной пары из этих узлов представьте изотопию с помощью движений Рейдемейстера, показанных на рис. 9.)

(б) То же верно для узлов в нижнем ряду на рис. 1.

(с) Все узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2 (почему строгое определение изотопии необходимо?). На рис. 2 показана изотопия между трилистником и тривиальным узлом.

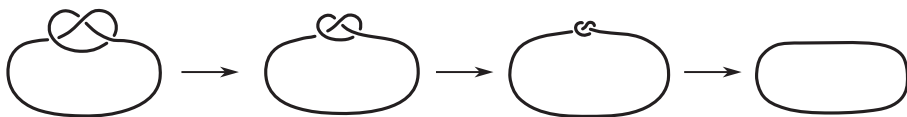


Рис. 2. Необъемлемая изотопия между трилистником и тривиальным узлом

Действительно ли это изотопия? Это так называемая «кусочно-линейная необъемлемая изотопия», которая *отличается* от «кусочно-линейной объемлемой изотопии», определённой и используемой далее. (Первое понятие лучше отражает идею непрерывной деформации без самопересечений, но малодоступно для старшеклассников, ср. [Sk16i].) На самом деле, любые два узла кусочно-линейно необъемлемо изотопны!

Обычная проблема при работе с интуитивными определениями не в том, что их трудно сделать строгими, а в том, что это можно сделать разными неэквивалентными способами.

Узел — это пространственная замкнутая несамопересекающаяся ломаная²⁾.

Плоская диаграмма узла — это его проекция общего положения³⁾ на плоскость⁴⁾, вместе с информацией, какая часть узла «проходит под»

²⁾ Его не следует путать с *ориентированным узлом*, определённым далее в § 7.

³⁾ Ломаная на плоскости называется *ломаной общего положения*, если существует ломаная L с тем же объединением рёбер такая, что никакие три вершины ломаной L не лежат на одной прямой, и никакие три отрезка, соединяющие некоторые вершины ломаной L , не имеют общей внутренней точки.

⁴⁾ Терминология университетской математики — «образ общего положения при проекции на плоскость».

(проход), а какая — «проходит над» (переход) в каждом конкретном перекрёстке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. Для любой диаграммы узла существует узел, проецирующийся на эту диаграмму. (Такой узел не обязательно единственный; см. впрочем утверждение 1.1 (с).)

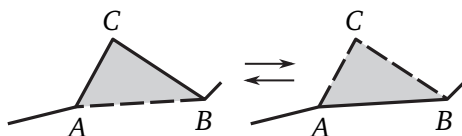


Рис. 3. Элементарное движение

Предположим, что стороны AC и CB треугольника ABC — рёбра некоторого узла. Кроме того, предположим, что узел и часть плоскости, ограниченная треугольником ABC , ни в каких других точках не пересекаются. **Элементарное движение** $ACB \rightarrow AB$ — это замена двух рёбер AC и CB ребром AB , либо обратная операция $AB \rightarrow ACB$ (рис. 3)⁵⁾. Два узла K, L называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если существует последовательность узлов $K_1, \dots, K_n$ такая, что $K_1 = K, K_n = L$, и каждый узел последовательности K_{j+1} получен из предыдущего узла K_j элементарным движением.

ТЕОРЕМА 1.4. (а) Следующие узлы попарно не изотопны: тривиальный узел, трилистник, восьмёрка.

(б) Существует бесконечное множество попарно не изотопных узлов.

Эта теорема доказывается с помощью инвариантов Арфа и Кэссона, см. § 5 и 9, ср. § 6.

Зеркальный образ узла K — это узел, плоская диаграмма которого получается изменением всех перекрёстков (рис. 8) диаграммы узла K . Из утверждения 1.1 (б) следует, что восьмёрка изотопна своему зеркальному образу.

ТЕОРЕМА 1.5. Трилистник не изотопен своему зеркальному образу.

Теорема 1.5 доказывается с помощью полинома Джонса [PS96, § 3], [CDM, § 2.4]. Доказательство выходит за рамки данного текста.

ТЕОРЕМА 1.6. Если никакие 4 из 7 точек пространства не лежат в одной плоскости, то существует замкнутая ломаная, составленная из некоторых отрезков, соединяющих эти точки, не изотопная контуру треугольника.

⁵⁾ Если треугольник ABC вырожденный, то элементарное движение является либо разбиением ребра, либо обратной операцией.

Эта теорема доказывается с помощью *Арф-инварианта*, см. § 5. Детали выходят за рамки данного текста, см. [CG83, теорема 2].

§ 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ О ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

Зацепление — это набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления. Упорядоченные наборы называются упорядоченными или раскрашенными зацеплениями, в то время как неупорядоченные наборы называются неупорядоченными или нераскрашенными зацеплениями. В этом тексте под словом «зацепление» понимается «упорядоченное зацепление».

Тривиальное зацепление (с любым числом компонент) — это зацепление, состоящее из треугольников, лежащих в параллельных плоскостях.

Плоские диаграммы и изотопии для зацеплений определяются так же, как и для узлов.

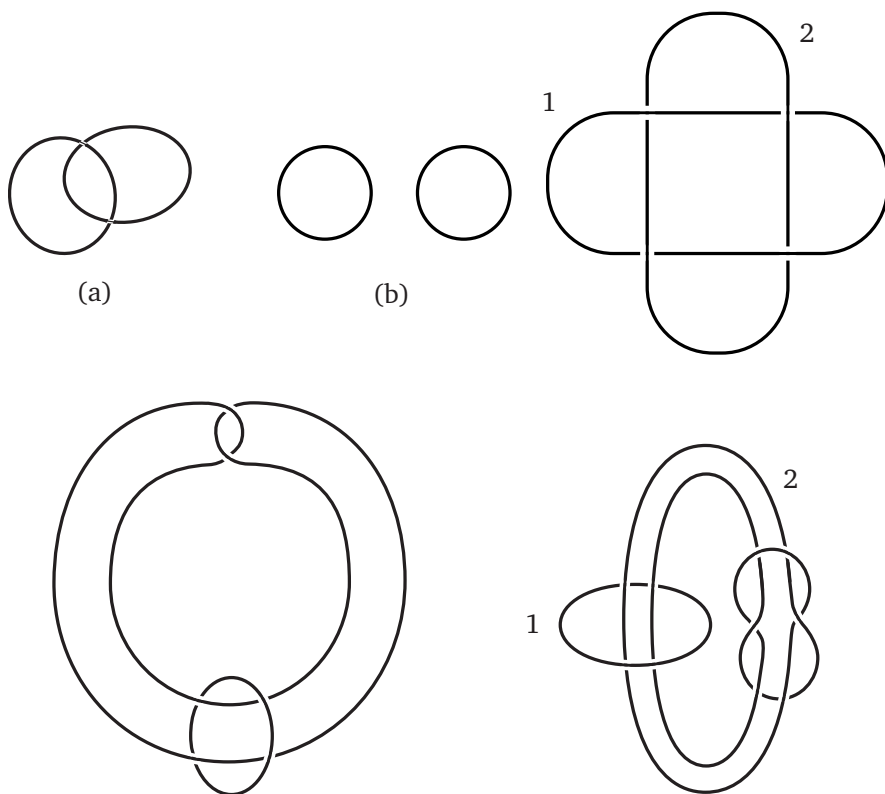


Рис. 4. Зацепление Хопфа, тривиальное зацепление и ещё три зацепления

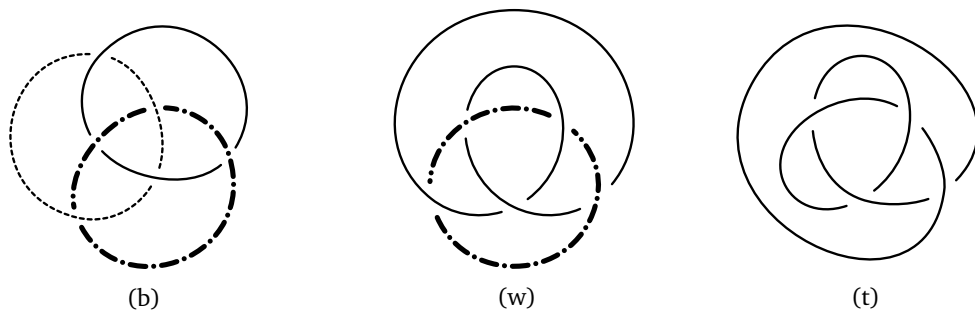


Рис. 5. Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. (а) Зацепление Хопфа изотопно зацеплению, полученному из него перестановкой компонент.

(b) Зацепление Хопфа изотопно некоторому зацеплению, компоненты которого симметричны относительно некоторой прямой.

(с) Зацепление на рис. 4 внизу слева изотопно зацеплению Уайтхеда на рис. 5 (w).

(d, e) То же, что и в пп. (а), (b) для зацепления Уайтхеда.

(f) Кольца Борромео изотопны зацеплению, компоненты которого переставляются по циклу при повороте на угол $2\pi/3$ относительно некоторой прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Это следует из п. (b) (или может быть доказано независимо).

(d) Это следует из п. (e) (или может быть доказано независимо).

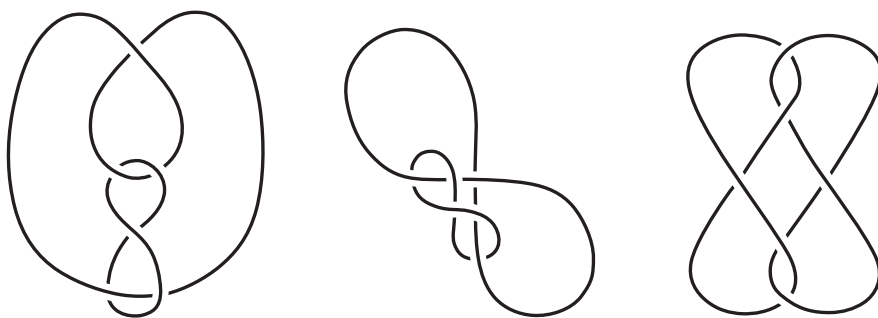


Рис. 6. Изотопия зацепления Уайтхеда

(е) См. рис. 6.

(f) Рассмотрим серые четырёхугольники на рис. 7 слева. Искомая прямая является биссектрисой любого октанта, образованного четырёхугольниками.

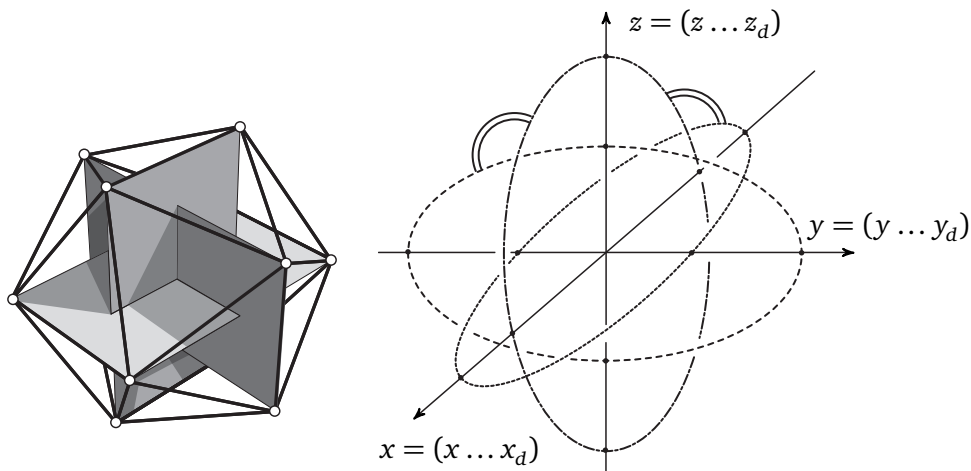


Рис. 7. Кольца Борромео

Существует также следующая изящная криволинейная конструкция. Возьмём три эллипса, заданные системами уравнений:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 2z^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

(см. рис. 7 справа). Искомая прямая задаётся уравнением $x = y = z$. $\square$

ТЕОРЕМА 2.2. (а) Следующие зацепления попарно не изотопны: зацепление Хопфа, тривиальное зацепление, зацепление Уайтхеда.

(b) Кольца Борромео не изотопны тривиальному зацеплению.

Эта теорема доказывается с помощью коэффициента зацепления по модулю 2, придумайте его самостоятельно или см. § 4, и полинома Александера — Конвея, см. § 10. Также можно использовать «тройной коэффициент зацепления» (инвариант Масси — Милнора) и «высший коэффициент зацепления» (инвариант Сато — Левина) [Sk, § 4.4–4.6].

ТЕОРЕМА 2.3. Если никакие 4 из 6 точек пространства не лежат в одной плоскости, то существует пара зацепленных треугольников с вершинами в этих 6 точках. (Это означает, что внутренность первого треугольника пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке.)

Эта теорема доказывается с помощью коэффициента зацепления по модулю 2, см. § 4. Детали выходят за рамки данного текста, см. [CG83, теорема 1] и простое изложение в [Sk14, теорема 1.1].

§ 3. ОСНОВНЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1 (некоторые строгие рассуждения). В следующем абзаце мы доказываем, что если узел лежит в плоскости, то он изотопен тривиальному узлу.

Обозначим узел, лежащий в плоскости, через $M_1M_2 \dots M_n$. Возьмём точку Z вне этой плоскости. Тогда $M_1M_2 \dots M_n$ преобразуется в тривиальный узел M_1ZM_n следующей последовательностью элементарных движений:

$$M_1M_2 \rightarrow M_1ZM_2, \quad ZM_2M_3 \rightarrow ZM_3, \quad ZM_3M_4 \rightarrow ZM_4, \quad \dots, \quad ZM_{n-1}M_n \rightarrow ZM_n.$$

Следующий результат показывает, что промежуточные узлы изотопии, переводящей узел, лежащий в плоскости, в тривиальный узел, можно выбрать также лежащими в плоскости.

ТЕОРЕМА ШЁНФЛИСА. Любая ломаная без самопересечений в плоскости изотопна (в этой плоскости) треугольнику.

Это усиленная версия следующего выдающегося результата.

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА. Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная L в плоскости $\mathbb{R}^2$ разбивает эту плоскость в точности на две части, т. е. $\mathbb{R}^2 - L$ — несвязное множество, являющееся объединением двух связных множеств.

Подмножество плоскости называется связным, если любые две точки этого подмножества можно соединить ломаной, в нём лежащей.

Алгоритмическое объяснение, почему теорема Жордана (а значит, и теорема Шёнфлиса) нетривиальна, и доказательство теоремы Жордана см. [Sk18], [Sk]: § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости».

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Предположим, что существует такая точка узла, что если мы идём вдоль узла, начиная с этой точки, то на некоторой диаграмме мы сначала встречаем только переходы, а затем только проходы. Тогда этот узел изотопен тривиальному узлу⁶⁾.

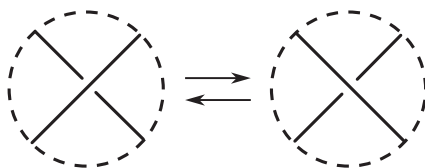


Рис. 8. Изменение перекрёстка. Плоские диаграммы совпадают вне кругов, ограниченных пунктиром. Никакие другие рёбра плоских диаграмм, кроме показанных на рисунке, не пересекаются с этими кругами. (Те же соглашения приняты на рис. 9–12 и 21)

⁶⁾ Это утверждение будет мотивировкой для введения Арф-инварианта (§ 5). Доказательство иллюстрирует в малых размерностях основные идеи выдающегося доказательства Зимана многомерной теоремы о незаузленности сфер, см. обзор [Sk16с, теорема 2.3].

Изменение перекрёстка — это замена перехода на проход или наоборот (рис. 8).

Очевидно, после любого изменения перекрёстка в крайних слева диаграммах трилистника и восьмёрки, показанных на рис. 1, получится диаграмма узла, изотопного тривиальному.

Лемма 3.3. *Любая диаграмма узла может быть преобразована изменениями перекрёстков в диаграмму узла, изотопного тривиальному⁷⁾.*

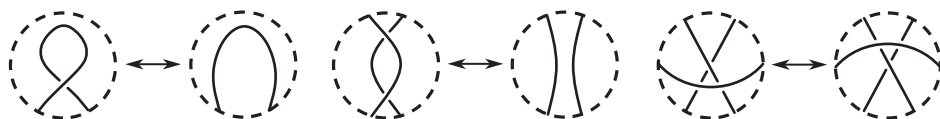


Рис. 9. Движения Рейдемейстера

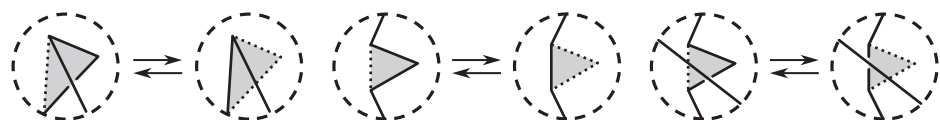


Рис. 10. Слева: к строгому определению первого движения Рейдемейстера.
В середине, справа: движения изотопии плоскости

В этом тексте вместо изучения узлов с точностью до изотопии мы будем изучать диаграммы узлов с точностью до эквивалентности, порождённой **движениями Рейдемейстера**⁸⁾ (рис. 9) и **движениями изотопии плоскости** (см. рис. 10 в середине и справа). То есть мы будем использовать без доказательства следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.4 (Рейдемейстер). *Два узла изотопны тогда и только тогда, когда некоторая диаграмма первого узла может быть получена из некоторой диаграммы второго узла с помощью движений Рейдемейстера и движений изотопии плоскости.*

См. [PS96, § 1.7] по поводу доказательства⁹⁾.

Справедливы также аналоги леммы 3.3 и теоремы 3.4 для зацеплений.

⁷⁾ Эта простая лемма будет использована для построения инвариантов, использующего рекурсию (*скейн-соотношения*), см. теоремы 4.4, 5.4, 4.4, 9.4, 10.2 и 11.1.

⁸⁾ Строгое определение первого движения Рейдемейстера легко дается с помощью рис. 10 слева. У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. Вы можете использовать неформальное описание движений Рейдемейстера на рис. 9 и, таким образом, не пользоваться движениями изотопии плоскости. См. сноску 9.

⁹⁾ Так как в [PS96, § 1.6] нет такого же строгого определения для движений Рейдемейстера, как для движений изотопии плоскости, рассуждения в [PS96,

§ 4. ГАУССОВ КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2

Предположим, что существует изотопия между двумя двухкомпонентными зацеплениями и вторая компонента фиксирована в процессе изотопии. Тогда след первой компоненты — самопересекающийся цилиндр, не имеющий общих точек со второй компонентой. Если после изотопии компоненты расцеплены, то цилиндр можно дополнить до самопересекающегося диска, не имеющего общих точек со второй компонентой. Это наблюдение, вместе с [Sk, лемма 4.3.2 о проекции], мотивирует следующее определение.

Коэффициент зацепления по модулю два lk_2 плоской диаграммы двухкомпонентного зацепления называется взятое по модулю 2 число таких перекрёстков диаграммы, для которых первая компонента проходит над второй компонентой.

Задача 4.1. Найдите коэффициент зацепления по модулю 2 для диаграмм на рис. 4 и для пар колец Борромео на рис. 5 (b).

Лемма 4.2. Коэффициент зацепления по модулю 2 сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Эта лемма легко доказывается отдельно для каждого движения Рейдемейстера.

По лемме 4.2 **коэффициент зацепления по модулю 2** двухкомпонентного зацепления (или даже его изотопического класса) можно корректно определить как коэффициент зацепления по модулю 2 любой диаграммы этого зацепления.

§ 1.7] не являются строгим доказательством. По-видимому, строгое доказательство может быть получено с использованием строгого определения движений Рейдемейстера.

Это также показывает, что наличие движений изотопии плоскости в утверждении из [PS96, § 1.7] не делает само утверждение строгим. Работая на интуитивном уровне, движения изотопии плоскости лучше не упоминать. С помощью приведённого ниже альтернативного строгого определения движения изотопии плоскости выражаются через движения Рейдемейстера, а потому не должны отдельно упоминаться в формулировке теоремы.

Приведём альтернативное строгое определение первого движения Рейдемейстера. У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. Возьмём на плоскости замкнутую несамопересекающуюся ломаную L , внутренность которой (см. теорему Жордана в замечании 3.1) пересекает диаграмму D по несамопересекающейся ломаной M , соединяющей две точки на L . Обозначим через N замкнутую несамопересекающуюся ломаную во внутренности ломаной L , для которой $N \cap L = \emptyset$, $N \cap M$ — одна точка, а $M \cup N$ — (самопересекающаяся) ломаная общего положения. *Первое движение Рейдемейстера* — это замена M на $M \cup N$ в D с любой «информацией» в появившемся перекрёстке.

Будем использовать без доказательства следующую лемму о чётности: любые две замкнутые ломаные на плоскости, вершины которых находятся в общем положении, пересекаются в чётном числе точек. Обсуждение и доказательство этой леммы см. [Sk18, Sk], § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости».

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. (а) Перестановка компонент двухкомпонентного зацепления сохраняет коэффициент зацепления по модулю 2.

(б) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному зацеплению, но имеющее нулевой коэффициент зацепления по модулю 2.

Пункт (б) доказывается с помощью целочисленного коэффициента зацепления, см. § 8.

ТЕОРЕМА 4.4. Существует единственный изотопический инвариант lk_2 двухкомпонентных зацеплений, принимающий значения в $\mathbb{Z}_2$, равный нулю на тривиальном зацеплении и такой, что для любых зацеплений K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются изменением перекрёстка A ,

$$\text{lk}_2 K_+ - \text{lk}_2 K_- = \begin{cases} 1, & A \text{ — пересечение различных компонент;} \\ 0, & A \text{ — самопересечение одной из компонент.} \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. Если коэффициент зацепления по модулю 2 двух (непересекающихся контуров) треугольников в пространстве равен нулю, то зацепление, образованное этими треугольниками, изотопно тривиальному.

Доказательство, по-видимому, не опубликовано, однако оно не очень сложное. Мы призываем читателя опубликовать подробное рассуждение. Ср. [Ko19].

§ 5. АРФ-ИНВАРИАНТ

Рассмотрим плоскую диаграмму некоторого узла и её точку P , не являющуюся перекрёстком. Назовём P *отмеченной точкой*. Неупорядоченная пара перекрёстков A, B называется **скрещивающейся** (или P -скрещивающейся), если, обходя диаграмму в каком-нибудь направлении, начиная с P , и отмечая только перекрёстки в A и в B , мы сначала встретим переход в A , затем проход в B , затем проход в A и, наконец, переход в B . Далее, P -Арф-инвариантом arf_P плоской диаграммы называется чётность числа её P -скрещивающихся пар перекрёстков.

ЗАДАЧА 5.1. (а) Если P -Арф-инвариант плоской диаграммы не равен нулю, то P не может быть точкой из утверждения 3.2.

(b) Найдите P -Арф-инвариант (какой-нибудь плоской диаграммы) тривиального узла, трилистника и восьмёрки (при Вашем выборе отмеченной точки P).

ЛЕММА 5.2. (a) P -Арф-инвариант не зависит от выбора отмеченной точки P .

(b) Арф-инвариант плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.

Согласно п. (a) Арф-инвариант плоской диаграммы можно корректно определить как её P -Арф-инвариант для произвольной отмеченной точки P . Поэтому формулировка п. (b) осмысленна. Согласно п. (b) Арф-инвариант arf узла (или даже изотопического класса узлов) можно корректно определить как Арф-инвариант произвольной плоской диаграммы этого узла.

УКАЗАНИЯ. (a) Будем перемещать отмеченную точку вдоль плоской диаграммы. Тогда достаточно показать, что Арф-инвариант не изменяется, когда отмеченная точка проходит через перекрёсток.

(b) Докажите утверждение для каждого движения Рейдемейстера отдельно, всякий раз выбирая отмеченную точку наиболее удобным образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. Существует узел, не изотопный тривиальному, Арф-инвариант которого равен нулю.

Это доказывается с помощью инварианта Кэссона, см. § 9.



Рис. 11. Зацепления K_+ , K_- , K_0

ТЕОРЕМА 5.4. Существует единственный изотопический инвариант arf узлов, принимающий значения в $\mathbb{Z}_2$, равный нулю на тривиальном узле и такой, что $\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0$ для любых узлов K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются как показано на рис. 11, причём K_0 является двухкомпонентным зацеплением. (Последнее эквивалентно существованию ориентации, для которой рис. 11 превращается в рис. 21.)

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. Два узла называются Арф-эквивалентными, если какая-нибудь диаграмма первого узла (с некоторой ориентацией) может

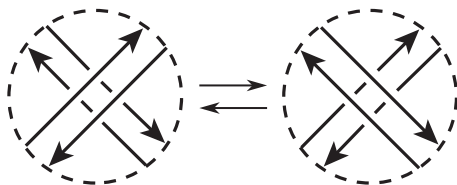


Рис. 12. Пронос

быть преобразована в какую-нибудь диаграмму второго узла (с некоторой ориентацией) движениями Рейдемейстера и с помощью проносов, показанных на рис. 12.

(а) Если два узла Арф-эквивалентны, то их Арф-инварианты совпадают.

(б) Восьмёрка Арф-эквивалентна трилистнику.

(с) [Ka87, с. 75–78] Если у двух узлов Арф-инварианты совпадают, то эти узлы Арф-эквивалентны.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ: ПРАВИЛЬНЫЕ РАСКРАСКИ

Этот параграф иллюстрирует связь с раскрасками в комбинаторике [Ra20]. Он использует только материал § 1 и 2. Подробнее про правильные раскраски см. в [Pr98].

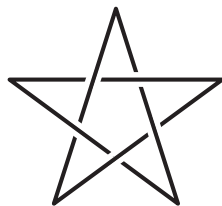
Дугой на плоской диаграмме (узла или зацепления) называется связный фрагмент ломаной, идущий от одного прохода до следующего. **Правильная раскраска** плоской диаграммы (узла или зацепления) — это такая раскраска её дуг в три цвета, что по крайней мере два цвета использовано и в каждом перекрёстке встречаются либо все три цвета, либо только один цвет. Плоская диаграмма (узла или зацепления) называется **раскрашиваемой в три цвета**, если её можно правильно раскрасить.

Задача 6.1. Для каждого из следующих узлов или зацеплений возьмите любую плоскую диаграмму и определите, является ли она раскрашиваемой в три цвета: (а) тривиальный узел; (б) трилистник; (с) восьмёрка; (д)–(и) зацепления на рис. 4 и 5 (б).

Лемма 6.2 [Pr95, с. 29–30, теорема 4.1]. Раскрашиваемость в три цвета плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.

ТЕОРЕМА 6.3. (а) Ни одно из зацеплений на рис. 4 и 5 (кроме тривиального зацепления) не изотопно тривиальному зацеплению.

(б) Узел 5_1 не изотопен тривиальному узлу (рис. 13).

Рис. 13. Узел 5_1

§ 7. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ УЗЛЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ; СВЯЗНЫЕ СУММЫ

Вы знаете, что такое ориентированная ломаная, так что вы также знаете, что такое ориентированный узел (рис. 14).

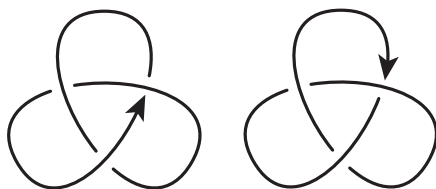


Рис. 14. Два трилистника с противоположными ориентациями

Неформальное понятие и строгое определение *изотопии* ориентированных узлов даются аналогично изотопии узлов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. *Изотопные ориентированные ломаные без самопересечений на плоскости и на сфере определяются аналогично изотопным ориентированным узлам в пространстве.*

(а) *Ориентированный сферический треугольник изотопен на сфере тому же треугольнику с противоположной ориентацией.*

(b) *Аналог пункта (а) для плоскости неверен.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. *Следующие пары узлов с противоположными ориентациями изотопны: два тривиальных узла; два трилистника; две восьмёрки.*

ТЕОРЕМА 7.3 (Троттер, 1964). *Существует ориентированный узел, не изотопный такому же узлу с противоположной ориентацией.*

Этот факт доказывается с использованием полинома Джонса [PS96, § 3], [CDM, § 2.4]; доказательство выходит за рамки данного текста.

Связная сумма # ориентированных узлов определена на рис. 15.

Связная сумма # (неориентированных) узлов определяется аналогично (забудьте про стрелки). Ни та, ни другая операция не является корректно определённой на множестве узлов или ориентированных узлов соответственно; см. также замечание 7.5. Так что мы обозначаем через $K \# L$ любую из связных сумм узлов или ориентированных узлов K и L .

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.4. *Для любых ориентированных узлов K, L, M и тривиального ориентированного узла O имеем*

(а) $K \# O = K$;

(b) $K \# L = L \# K$;

(c) $(K \# L) \# M = K \# (L \# M)$;

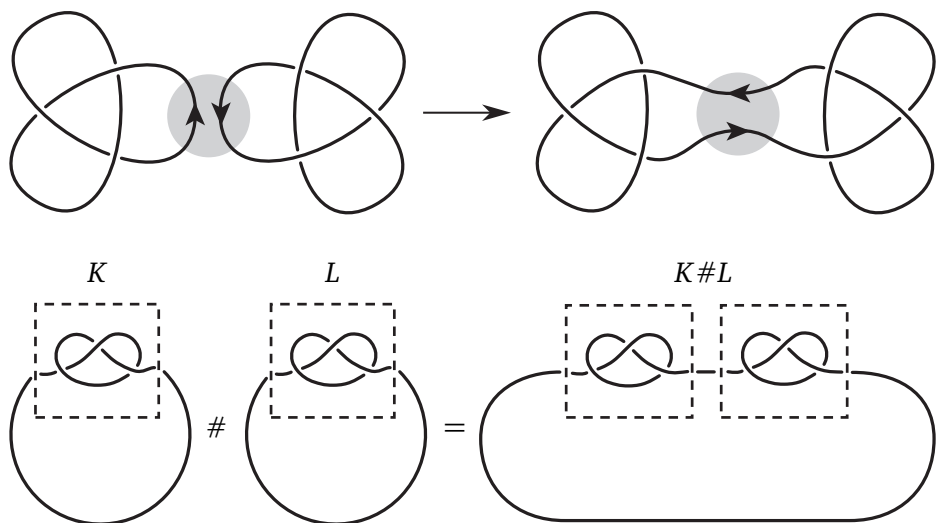


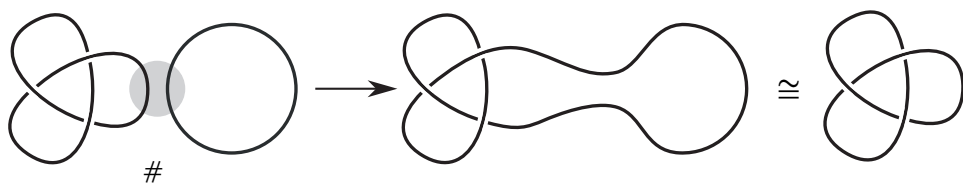
Рис. 15. Связная сумма узлов

(d) Для любых неориентированных узлов K, L выполнено

$$\text{arf}(K \# L) = \text{arf } K + \text{arf } L.$$

(Строгий смысл пункта (a) — «существует связная сумма узлов K и O , изотопная узлу K ». Строгий смысл пунктов (b), (c) и (d) аналогичен. См., впрочем, замечание 7.5.)

Набросок доказательства. (a) См. рис. 16.

Рис. 16. Доказательство равенства $K \# O = K$

(b) Достаточно взять «маленький» узел, изотопный узлу L , и «провести» его через узел K , см. рис. 17 слева.

(c) Узлы из левой и правой частей равенства изотопны узлу на рис. 17 справа.

(d) Выберите отмеченную точку P близко к «месту соединения» узлов. Проверьте, что всякая P -скрешивающаяся пара перекрёстков в $K \# L$ получается либо из скрешивающейся пары перекрёстков в K , либо из скрешивающейся пары перекрёстков в L . $\square$

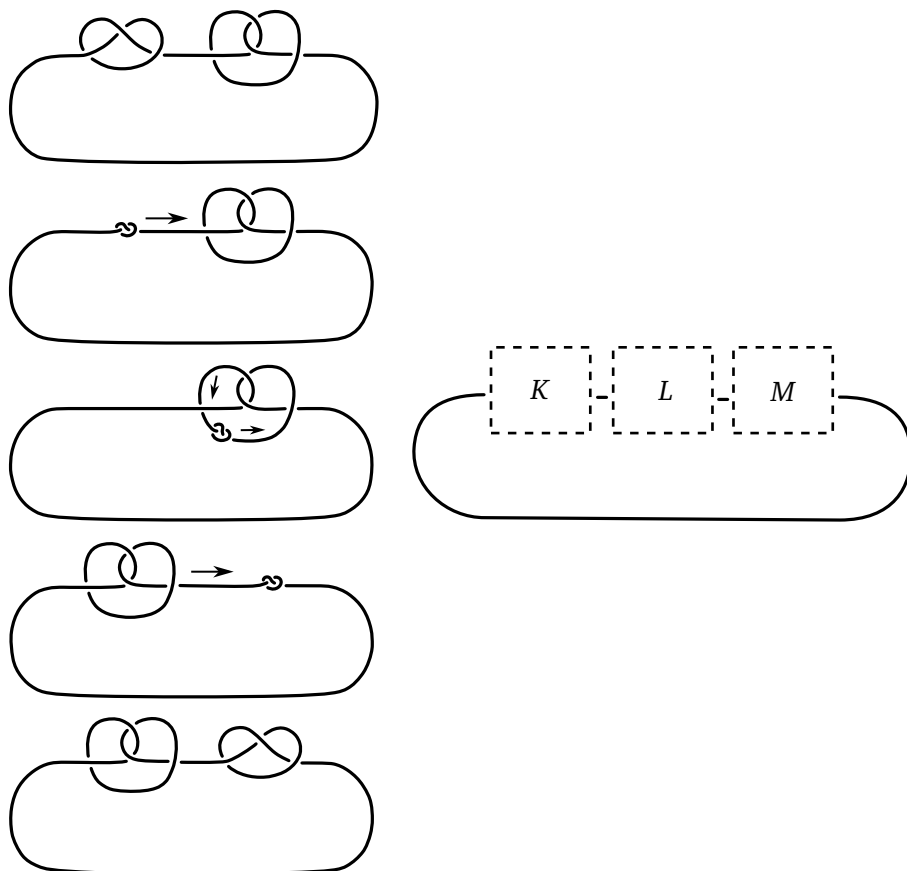


Рис. 17. Доказательства равенств $K \# L = L \# K$ (слева)
и $(K \# L) \# M = K \# (L \# M)$ (справа)

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. *Изотопический класс узла* — это множество всех узлов, ему изотопных. Ориентированный изотопический класс $[K \# L]$ связанной суммы двух ориентированных изотопических классов $[K]$, $[L]$ ориентированных узлов K , L не зависит от выборов, сделанных в процессе построения, и от выбора представителей K , L классов $[K]$, $[L]$. Следовательно, связанная сумма ориентированных изотопических классов ориентированных узлов корректно определена как $[K] \# [L] := [K \# L]$, см. [Sk15, замечание 2.3.a]. Для изотопических классов неориентированных узлов связанная сумма не является корректно определённой операцией [CSK].

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть K, L, M — изотопические классы ориентированных узлов, а O — изотопический класс ориентированного тривиального узла. Тогда (a) если $K \# L = O$, то $K = L = O$; (b) если $K \# L = K \# M$, то $L = M$.

Доказательство выходит за рамки данного текста, см. [PS96, теорема 1.5]. (В этом отрывке из [PS96] необходимо всюду заменить «узел» на «ориентированный узел» ввиду замечания 7.5.)

Связная сумма $\#$ зацеплений (упорядоченных или нет, ориентированных или нет) определяется аналогично связной сумме узлов (рис. 18). Эта

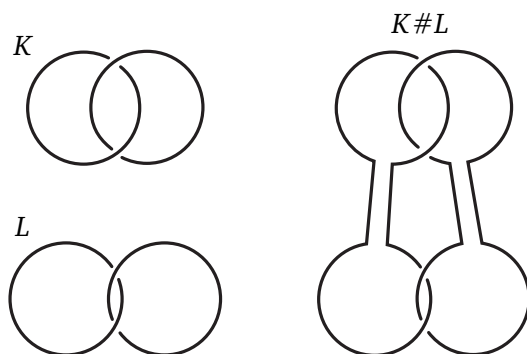


Рис. 18. Связная сумма зацеплений

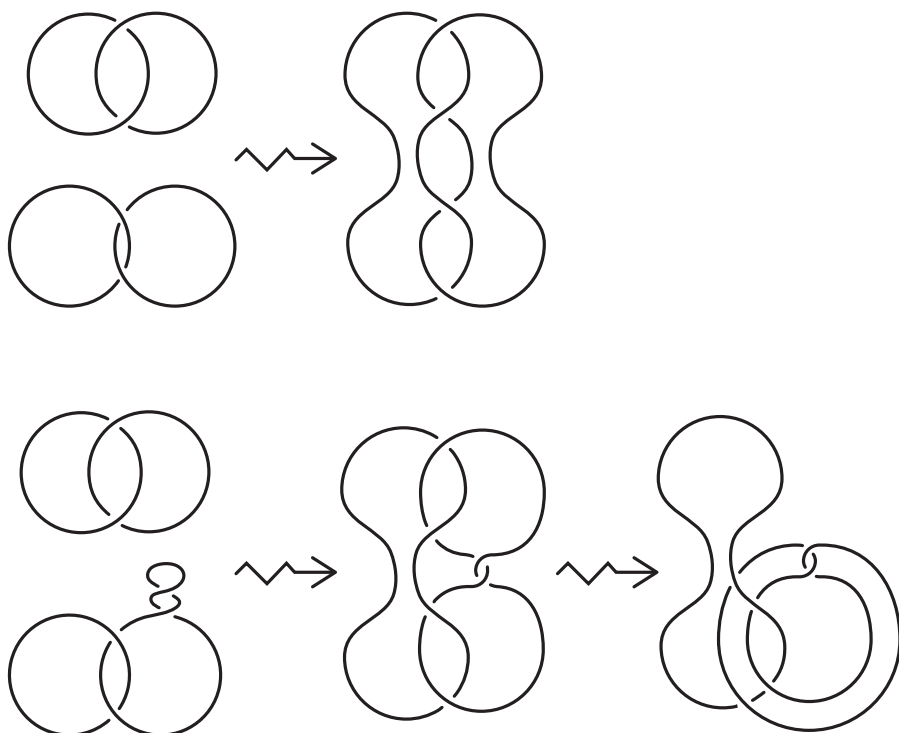


Рис. 19. Связная сумма изотопических классов зацеплений не определена корректно

операция не является корректно определённой для зацеплений, и замечание 7.8 показывает, что эта операция также не даёт корректно определённого понятия связной суммы изотопических классов зацеплений. Так что мы обозначаем через $K \# L$ любую связную сумму зацеплений K и L .

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.7. (a), (b), (c) Докажите аналоги утверждений 7.4 (a), (b), (c) для зацеплений.

(d) Для любых неориентированных двухкомпонентных зацеплений K, L выполнено $\text{lk}_2(K \# L) = \text{lk}_2 K + \text{lk}_2 L$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.8. Существуют две изотопные пары (K, L) и (K', L') двухкомпонентных зацеплений такие, что некоторые связные суммы $K \# L$ и $K' \# L'$ не изотопны. (Зацепления могут быть упорядочены или нет, ориентированы или нет — всего получается 4 утверждения.) Для случая неупорядоченных зацеплений пример даётся парой одинаковых зацеплений, каждое из которых состоит из трилистника и тривиального узла, содержащихся в непересекающихся кубах, ср. [PS96, рис. 3.16]. Пример для случая упорядоченных зацеплений содержится в [As]. На рис. 19 показан другой пример, предложенный А. Рябичевым.

§ 8. ГАУССОВ КОЭФФИЦИЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Пусть $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ — упорядоченная пара векторов (ориентированных отрезков) на плоскости, пересекающихся в точке P . Определим **знак** точки P как $+1$, если ABC ориентирован по часовой стрелке, и как -1 в противном случае (рис. 20).

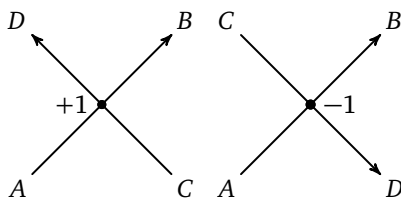


Рис. 20. Знак точки пересечения

Коэффициент зацепления lk плоской диаграммы ориентированного двухкомпонентного зацепления — это сумма знаков всех точек пересечения на диаграмме, в которых первая компонента проходит над второй компонентой. В каждом перекрёстке *первый* (*второй*) вектор — это звено первой (второй) компоненты.

ЗАДАЧА 8.1. Найдите коэффициент зацепления для (некоторой плоской диаграммы) зацепления Хопфа и пары колец Борромео, выбрав ориентацию компонент самостоятельно.

ЛЕММА 8.2. Коэффициент зацепления сохраняется при движениях Рей-демейстера.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2. Достаточно проверить, что знаки всех перекрёстков не изменяются.

По лемме 8.2 **коэффициент зацепления** ориентированного двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопности) корректно определён как коэффициент зацепления любой плоской диаграммы зацепления.

Модуль коэффициента зацепления (неориентированного) двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопии) корректно определён вне зависимости от ориентации компонент.

Будем использовать без доказательства следующую лемму о тривиальности: для любых двух замкнутых ломаных в плоскости, вершины которых находятся в общем положении, сумма знаков их точек пересечения равна нулю. Обсуждение и доказательство см. в § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости» в [Sk18, Sk].

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.3. (а) Перестановка компонент меняет знак коэффициента зацепления.

(b) Изменение ориентации любой компоненты меняет знак коэффициента зацепления.

(c) Существует ориентированное двухкомпонентное зацепление с коэффициентом зацепления -5 .

(d) Для любой связной суммы $K \# L$ ориентированных двухкомпонентных зацеплений K, L имеем $\text{lk}(K \# L) = \text{lk } K + \text{lk } L$.

(e) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному зацеплению, но имеющее нулевой коэффициент зацепления.

Пункт (e) доказывается с помощью многочлена Александра — Конвея, см. § 10.

ТЕОРЕМА 8.4. Существует единственный целочисленный изотопический инвариант lk_2 ориентированных двухкомпонентных зацеплений, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что для любых зацеплений K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются изменени-

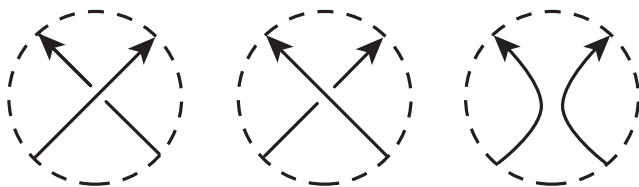


Рис. 21. Ориентированные зацепления K_+ , K_- , K_0

ем перекрёстка A , как показано на рис. 21,

$$\text{lk } K_+ - \text{lk } K_- = \begin{cases} 1, & A \text{ — пересечение различных компонент;} \\ 0, & A \text{ — самопересечение одной из компонент.} \end{cases}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4.

§ 9. ИНВАРИАНТ КЭССОНА

Знак перекрёстка ориентированной плоской диаграммы узла определён после рисунка 20; первый (второй) вектор — это вектор перехода (прохода). Очевидно, знак не зависит от ориентации диаграммы и таким образом определён для неориентированных диаграмм.

Знак P -скрещивающейся пары перекрёстков на плоской диаграмме узла (для любой отмеченной точки P) — это произведение знаков соответствующих перекрёстков.

P -инвариант Кэссона плоской диаграммы — это сумма знаков всех P -скрещивающихся пар перекрёстков.

ЗАДАЧА 9.1. (а) Аналог задачи 5.1 (b) для инварианта Кэссона.

(b) Нарисуйте плоскую диаграмму узла и отмеченную точку P такие, что P -инвариант Кэссона плоской диаграммы равен -5 .

ЛЕММА 9.2. (а), (b) Аналог леммы 5.2 (а), (b) для инварианта Кэссона.

Поэтому **инвариант** (число) **Кэссона** c_2 плоской диаграммы узла (или даже изотопического класса узла) является корректно определённым инвариантом, если положить его равным P -инварианту Кэссона любой плоской диаграммы этого узла с любой отмеченной точкой P .

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.3. (а), (b) Аналог утверждений 7.4 (d) и 5.3 для инварианта Кэссона.

Пункт (b) доказывается с помощью многочлена Александера — Конвея, см. § 10.

Обозначим через D_+ , D_- , D_0 любые три диаграммы ориентированных (узлов или) зацеплений, отличающиеся как показано на рис. 21 (см. соглашения о рисунках в подписи к рис. 8). Также обозначим через K_+ , K_- , K_0 любые три зацепления с диаграммами D_+ , D_- , D_0 .

ТЕОРЕМА 9.4. Существует единственный целочисленный изотопический инвариант c_2 (неориентированных) узлов, который равен 0 для тривиального узла и такой, что

$$c_2(K_+) - c_2(K_-) = \text{lk } K_0$$

для любых узлов K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются как показано на рис. 21. (Отметим, что K_0 обязательно является двухкомпонентным зацеплением; число $\text{lk } K_0$ определено корректно, так как изменение ориентации обеих компонент ориентированного зацепления не меняет коэффициента зацепления.)

§ 10. Полином АЛЕКСАНДЕРА — КОНВЕЯ

Этот параграф использует только материал § 1, 2 и 7 (кроме утверждений 10.4 (b), (c), использующих также § 8 и 9).

Задача 10.1. (а) Существует единственный изотопический инвариант ориентированных трёхкомпонентных зацеплений arf со значениями в $\mathbb{Z}_2$, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \begin{cases} \text{lk}_2 K_0 & \text{в точке пересечения различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

(Здесь $\text{lk}_2 K_0$ определено, так как K_0 обязательно является двухкомпонентным зацеплением.)¹⁰⁾

(b) Предполагая существование инварианта arf из п. (а), вычислите его для колец Борромео (при вашем выборе ориентаций компонент).

ТЕОРЕМА 10.2. *Существует единственная бесконечная последовательность $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$ целочисленных инвариантов ориентированных неупорядоченных зацеплений такая, что:*

на тривиальном узле $c_0 = 1$ и $c_1 = c_2 = \dots = 0$;

для любого $n \geq 0$ и зацеплений K_+, K_-, K_0 с рис. 21 выполнено

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0).$$

Доказательства существования в утверждении 10.1 (а) и теореме 10.2 выходят за рамки данного текста¹¹⁾. Доказательство см. в [A128], [Ka06’,

¹⁰⁾ Это утверждение — частный случай версии по модулю 2 теоремы 10.2; было бы интересно получить его прямое доказательство, поскольку оно могло бы проиллюстрировать идею доказательства теоремы 10.2 на простейшем из нетривиальных случаев.

Теорема 5.4 является аналогом данного утверждения для узлов (которые являются однокомпонентными зацеплениями). Определение инварианта arf из § 5 применимо только для узлов, и здесь мы пытаемся обобщить его на трёхкомпонентные зацепления.

¹¹⁾ Не вполне ясно, упорядоченные или неупорядоченные зацепления имеются в виду в [CDM, § 2.3.1]. Поэтому мы приводим вывод сильной версии (для неупорядоченных зацеплений) из слабой (для упорядоченных зацеплений) в § 12.

§ 3–5], [Ka06], [Ma18, § 5.5 и 5.6], [Ga19]. Про связь с правильными раскрасками см. в [Ka06', § 6].

Многочлен

$$C(K)(t) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots$$

называется *многочленом Конвея*, см. утверждение 10.4 (е). Введение этого многочлена позволяет находить все инварианты c_n так же быстро, как и один из них. Формула из теоремы 10.2 эквивалентна равенству

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0).$$

Задача 10.3. Найдите многочлены Конвея следующих зацеплений (выберите сами ориентацию для каждой компоненты):

- (а) тривиальное зацепление с двумя компонентами;
- (б) тривиальное зацепление с n компонентами;
- (с) зацепление Хопфа;
- (d) трилистник;
- (е) восьмёрка;
- (f) зацепление Уайтхеда;
- (g) кольца Борромео;
- (h) узел 5_1 .

Утверждение 10.4. (а) Имеет место равенство $c_0(K) = 1$, если K — узел, и $c_0(K) = 0$ в противном случае (т. е. если K имеет более одной компоненты).

(б) Если K — узел, то $c_{2j+1}(K) = 0$, и c_2 — инвариант Кэссона.

(с) Если K — двухкомпонентное зацепление, то $c_{2j}(K) = 0$, и c_1 — коэффициент зацепления.

(d) Если K — любое k -компонентное зацепление, то $c_j(K) = 0$, если $j \leq k - 2$ или $j - k$ чётно.

(е) Для каждого узла или зацепления все инварианты c_n , кроме конечного числа, обращаются в нуль.

Утверждение 10.5. (а) Изменение ориентации всех компонент зацепления (в частности, изменение ориентации узла) сохраняет многочлен Конвея.

(б) [CDM, 2.3.4] Существует двухкомпонентное зацепление такое, что изменение ориентации одной его компоненты меняет степень многочлена Конвея (в частности, такое изменение ни сохраняет многочлен Конвея, ни меняет его знак).

(с) Для любой связной суммы $K \# L$ узлов K, L верно $C(K \# L) = C(K)C(L)$.

Утверждение 10.6. Зацепление называется *разделяемым*, если оно изотопно зацеплению, компоненты которого содержатся в непересекающихся шарах.

- (a) *Зацепление Хопфа, зацепление Уайтхеда и кольца Борромео не являются разделяемыми зацеплениями.*
 (b) *Коэффициент зацепления разделяемого зацепления равен нулю.*
 (c) *Многочлен Конвея разделяемого зацепления нулевой.*

§ 11. ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА — ГУСАРОВА

Этот параграф использует только материал § 1, 2 и 7 (кроме задачи 11.3 (2), использующей также раздел 9).

Сингулярный (ориентированный) *узел* — замкнутая ориентированная ломаная в $\mathbb{R}^3$, все точки самопересечения которой являются простыми двойными (эти точки не являются вершинами ломаной). Два сингулярных узла *изотопны*, если существует сохраняющий ориентацию кусочно-линейный гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящий первый узел во второй с сохранением ориентации. Обозначим через Σ множество всех изотопических классов сингулярных узлов.

Хордовая диаграмма — слово из $2n$ букв, среди которых ровно n различных, причём каждая буква встречается дважды. Слова, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются одинаковыми. Хордовую диаграмму обычно изображают в виде ориентированной окружности с набором хорд, ср. [Sk20, § 1.5]. Для произвольного сингулярного узла K обозначим через $\sigma(K)$ хордовую диаграмму, построенную следующим образом. Будем равномерно двигаться по ориентированной окружности в направлении ориентации, и для каждой её точки A рассмотрим соответствующую точку $f(A)$ сингулярного узла K . Соединим две точки окружности хордой, если они обе соответствуют некоторой точке самопересечения сингулярного узла K [PS96, 4.8], [CDM, 3.4.1]¹²⁾.

$$\lambda\left(\bigcirc\right)=0 \quad \lambda\left(\begin{array}{c} A \quad B \\ \diagdown \quad \diagup \\ C' \quad C \end{array}\right)-\lambda\left(\begin{array}{c} A \quad B \\ \diagup \quad \diagdown \\ C' \quad C \end{array}\right)+\lambda\left(\begin{array}{c} A \quad B \\ \diagdown \quad \diagup \\ C \quad B' \end{array}\right)-\lambda\left(\begin{array}{c} A \quad B \\ \diagup \quad \diagdown \\ C \quad B' \end{array}\right)=0$$

Рис. 22. Одночленное и четырёхчленное соотношения

¹²⁾ Другими словами, рассмотрим произвольное кусочно-линейное отображение $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, образ которого есть K . Проведём хорду XY для каждой пары точек X, Y такой, что $f(X) = f(Y)$. Хордовую диаграмму не следует путать с *диаграммой Гаусса* (проекции) узла $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (несингулярного), которая определяется как (произвольным образом ориентированная) хордовая диаграмма композиции проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с отображением g [PS96, 4.8] [CDM, 1.8.4].

$$v \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} \right) = v \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right)$$

Рис. 23. Скейн-соотношение Васильева
(обратите внимание на разницу с рис. 21)

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $n \geq 0$ — целое и $\lambda: \delta_n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция из множества δ_n всех хордовых диаграмм с n хордами. Функция λ удовлетворяет одночленному и четырёхчленному соотношениям с рис. 22 тогда и только тогда, когда существует отображение $v: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ (т. е. инвариант сингулярных узлов), для которого

- (1) выполнено скейн-соотношение Васильева с рис. 23;
- (2_n) $v(K) = 0$ для любого сингулярного узла K , имеющего более n точек самопересечения;
- (3) $v(K) = \lambda(\sigma(K))$ для любого сингулярного узла K , имеющего ровно n точек самопересечения.

Доказательство выходит за рамки данного текста.

Насколько мне известно, теорема 11.1 Васильева — Концевича никогда раньше не формулировалась в таком виде, коротком и удобном для вычисления инвариантов (хотя эта формулировка неявно использовалась в процессе вычислений). Я благодарен С. Чмутову за подтверждение того, что теорема 11.1 верна и действительно эквивалентна теореме Васильева — Концевича в традиционной формулировке, см., например, [CDM, теорема 4.2.1], ср. [PS96, теорема 4.12].

Отображение $v: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнено условие (1), называется *инвариантом Васильева — Гусарова*. Если дополнительно выполнено условие (2_n), то v называется *инвариантом порядка не выше n* .

Следующее утверждение означает, что функция v из теоремы 11.1 единственна с точностью до инварианта Васильева — Гусарова порядка не выше $n - 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.2 [CDM, предложение 3.4.2]. Разность $v - v'$ отображений $v, v': \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (1), (2_n) и (3), удовлетворяет условиям (1) и (2_{n-1}).

ЗАДАЧА 11.3. (а) Докажите часть «тогда» теоремы 11.1.

(0), (1), (2) Докажите часть «только тогда» теоремы 11.1 для $n = 0, 1, 2$.

УКАЗАНИЕ. В случае $n = 2$ воспользуйтесь теоремой 9.4. (Часть «только тогда» теоремы 11.1 для $n = 3$ может быть доказана с использованием коэффициента при h^3 в $J(e^h)$, где J — t -параметризованный многочлен Джонса [CDM, 2.4.2, 2.4.3] [PS96, (4.6)].)

В оставшихся задачах используйте без доказательства часть «только тогда» теоремы 11.1. Далее утверждение « $v(K) = x$ для любого особого узла K с хордовой диаграммой A » сокращённо записывается как « $v(A) = x$ ».

Задача 11.4. (а) Существует единственный инвариант Васильева — Гусарова $v_2: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ порядка не выше 2 такой, что $v_2(O) = 0$ для тривиального узла O , а $v_2(1212) = 1$. (Здесь (1212) обозначает единственную «нетривиальную» хордовую диаграмму с двумя хордами, см. [PS96, рис. 4.4], третья диаграмма в первом ряду.)

УКАЗАНИЕ. Это следует из теоремы 9.4, однако попробуйте вывести это из теоремы 11.1.

(b), (b'), (c), (d) Вычислите v_2 для (произвольным образом ориентированных) правого трилистника, левого трилистника, восьмёрки и узла 5_1 .

Задача 11.5. (а) Существует единственный инвариант Васильева — Гусарова $v_3: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ порядка не выше 3 такой, что $v_3(O) = 0$ для тривиального узла O и левого трилистника O , а $v_3(123123) = 1$. (Здесь (123123) обозначает «самую симметричную нетривиальную диаграмму с тремя хордами», см. [PS96, рис. 4.4], пятая диаграмма во втором ряду.)

(b), (b'), (c), (d) Аналог задачи 11.4, для v_3 .

УКАЗАНИЕ. См. задачи 2, 3, 4ab и результаты теоремы 11, 13, 14 из [PS96, § 4].

Задача 11.6. (а) [PS96, задача 4.4.b] Существует единственный инвариант Васильева — Гусарова $v_4: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ порядка не выше 4 такой, что

- $v_4(O) = 0$ для тривиального узла O , левого трилистника O и правого трилистника O ;
- $v_4(12341234) = 2$, $v_4(12341432) = 3$, и $v_4(12341423) = 5$.

(b), (b'), (c), (d) Аналог задачи 11.4 для v_4 .

§ 12. ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1.1. (а), (b) «Проще всего изготовить трилистник и восьмёрку из верёвки или шнура, а затем попытаться получить из этих узлов все узлы, изображённые на рис. 1. Выполнить некоторые преобразования трилистника и восьмёрки вам поможет рис. 24». [Pr95, § 2] (Левая часть рис. 24 выполнена Д. Кроо.)

(е) Рассмотрим два узла с совпадающими плоскими диаграммами в «горизонтальной» плоскости π . Для каждой точки X в пространстве пусть $p(X)$ — прямая, проходящая через X и перпендикулярная π . Пусть

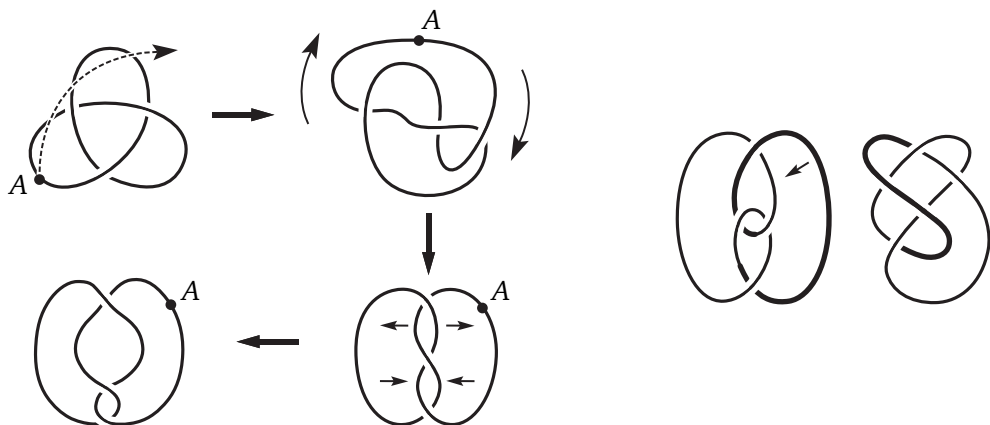


Рис. 24. Изотопии трилистника и восьмёрки

$h(X)$ — высота точки X относительно π , положительная ($h(X) > 0$), если X находится в верхнем полупространстве, и отрицательная ($h(X) < 0$), если X находится в нижнем полупространстве. Каждой точке A первого узла поставим в соответствие точку A' второго узла с помощью следующей процедуры.

Случай 1: проекция точки A на π не является перекрёстком на плоской диаграмме. В этом случае прямая $p(A)$ пересекает первый узел только в точке A . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, прямая $p(A)$ пересекает второй узел также только в одной точке. Обозначим эту точку через A' .

Случай 2: проекция точки A на π является перекрёстком на плоской диаграмме. В этом случае прямая $p(A)$ пересекает первый узел ещё в одной точке B . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, прямая $p(A)$ пересекает второй узел тоже в двух точках: C и D . Без ограничения общности можно считать, что $h(C) > h(D)$. Тогда если $h(A) > h(B)$, то положим $A' = C$, иначе $A' = D$.

Для каждой точки A первого узла и каждого числа $t \in [0, 1]$ пусть $A(t)$ — точка на прямой $p(A)$ на высоте

$$h(A(t)) = (1 - t)h(A) + th(A').$$

По построению $A(0) = A$, $A(1) = A'$, и искомой изотопией является преобразование первого узла,двигающее точку $A(0)$ к точке $A(1)$ с постоянной скоростью так, что в момент времени t она находится в положении $A(t)$.

1.3. См. рис. 25. Для каждого перекрёстка на плоской диаграмме выберем на участке перекрёстка, являющемся переходом, две точки, близкие к пересечению и находящиеся по разные стороны от него. Заменим

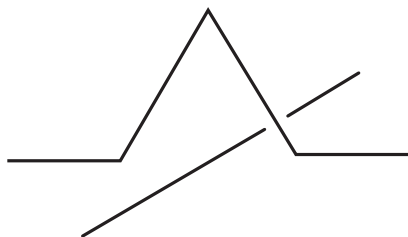


Рис. 25. Мостик через перекрёсток

отрезок между двумя выбранными точками «мостиком», соединяющим выбранные точки и «подымающимся» над плоской диаграммой. После замены всех перекрёстков такими «мостиками» мы получим искомый узел.

1.4. (a) Используйте утверждения 5.1 (b), 9.1 (a) и леммы 5.2 (a), (b), 9.2 (a), (b). Или можете воспользоваться утверждениями 6.1 (a), (b) и леммой 6.2.

(b) Рассмотрим любую связную сумму n трилистников. Согласно утверждениям 9.1 (a) и 9.3 (a), инвариант Кэссона этого узла равен n . Следовательно, по лемме 9.2 (a), (b) соответствующие узлы не изотопны для различных значений n .

2.2. (a) Чтобы отличить зацепление Хопфа от остальных, воспользуйтесь утверждением 4.1 и леммой 4.2. Чтобы отличить зацепление Уайтхеда от тривиального зацепления, воспользуйтесь утверждением 6.1 (или 10.3) и леммой 6.2 (или теоремой 10.2).

(b) Используйте утверждение 10.3 и теорему 10.2.

3.2. Выберем узел, проецирующийся на данную плоскую диаграмму тем же способом, что и в утверждении 1.3. Будем считать, что все «мостики» лежат в верхнем полупространстве относительно плоскости проекции. По предположению существуют точки X и Y узла, которые разбивают узел на две ломаные p и q такие, что

- q лежит на плоскости проекции и проходит только через проходы;
- p проецируется на ломаную p' , которая проходит только через переходы.

Возьмём точку Z в верхнем полупространстве и точку T в нижнем полупространстве. Построим изотопию между заданным узлом и замкнутой ломаной $XZYT$, которая изотопна тривиальному узлу. Построение изотопии состоит из трёх шагов, в каждом из которых точки X, Y остаются фиксированными.

Шаг 1. Изотопия между q и XTY . Предположим, что $q = A_0 A_1 \dots A_n$, где $A_0 = X$ и $A_n = Y$. Тогда изотопия получается последовательностью

элементарных движений

$$A_0A_1 \rightarrow A_0TA_1, \quad TA_1A_2 \rightarrow TA_2, \quad TA_2A_3 \rightarrow TA_3, \quad \dots, \quad TA_{n-1}A_n \rightarrow TA_n.$$

Шаг 2. Изотопия между p и p' . Уберём все «мостики» с помощью элементарных движений.

Шаг 3. Изотопия между p' и XZY . Строится аналогично шагу 1.

3.3. Следует из утверждения 3.2.

Другая идея доказательства (ср. [PS96, теорема 3.8]). Обозначим через π горизонтальную плоскость, содержащую диаграмму. Для каждой точки X в пространстве $p(X)$ и $h(X)$ определяются как в доказательстве утверждения 1.1 (с). Пусть l — прямая на плоскости, которая проходит через вершину A_0 плоской диаграммы, и пусть вся диаграмма лежит по одну сторону от прямой l . Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n$ — все вершины плоской диаграммы в порядке их появления при движении вдоль диаграммы в некотором направлении. Выберем точки $B_0, \dots, B_n$ так, что $A_i \in p(B_i)$ для $i = 1, \dots, n$ и $h(B_i) < h(B_j)$ для $i < j$. Пусть B_{n+1} — точка, проекция которой на π близка к A_0 , и $h(B_{n+1}) > h(B_n)$. Тогда узел $B_0 \dots B_n B_{n+1}$ изотопен тривиальному узлу. Действительно, по построению прямой l проекция узла на любую плоскость, перпендикулярную l , является замкнутой несамопересекающейся ломаной. Остаётся только изменить перекрёстки плоской диаграммы так, чтобы они согласовывались с проекцией построенного узла на плоскость π .

4.1. Ответ: 1 для зацепления Хопфа и 0 для остальных зацеплений.

4.2. При движениях I и III число перекрёстков, в которых первая компонента проходит над второй, не изменяется. При движении II это число изменяется на 0 или ± 2 .

4.3. (а) Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. По лемме о чётности (сформулированной перед утверждением 4.3) число таких перекрёстков, где первая компонента проходит над второй, имеет ту же чётность, что и число перекрёстков, где вторая компонента проходит над первой. Это в точности то, что нужно доказать.

(b) Примером является четвёртое зацепление на рис. 4. Используя целочисленный коэффициент зацепления, можно доказать, что это зацепление не изотопно тривиальному, см. § 8.

4.4. Существование. По лемме 4.2 коэффициент зацепления по модулю 2 является изотопическим инвариантом. Справедливость скейн-соотношения легко проверить непосредственно.

Единственность. Предположим, что f — другой инвариант, отличный от lk_2 и удовлетворяющий предположениям. Тогда $f - lk_2$ является изото-

пическим инвариантом, равным нулю на тривиальном зацеплении и инвариантным относительно изменений перекрёстков. Согласно аналогу леммы 3.3 для зацеплений любая плоская диаграмма зацепления может быть получена из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному, при помощи изменений перекрёстков. Следовательно, $f - lk_2 = 0$.

5.1. (а) Если P — такая точка на плоской диаграмме, как описано в утверждении 3.2, то не существует P -скрещивающихся пар перекрёстков. Следовательно, P -Арф-инвариант равен нулю.

5.2. (а) Пусть P_1 и P_2 — две отмеченные точки такие, что отрезок P_1P_2 содержит в точности один перекрёсток X .

Случай 1: P_1P_2 участвует в проходе. Тогда X не образует ни P_1 -скрещивающейся, ни P_2 -скрещивающейся пары ни с каким другим перекрёстком. Поэтому P_1 - и P_2 -Арф-инварианты диаграммы равны.

Случай 2: P_1P_2 участвует в переходе. Тогда X делит диаграмму на две замкнутые ломаные q_1 и q_2 такие, что P_1 лежит на q_1 , а P_2 лежит на q_2 . Обозначим через n_1 (соответственно, n_2) число всех таких перекрёстков на q_1 и q_2 , в которых q_1 проходит над q_2 (соответственно, q_2 проходит над q_1). Обозначим через N_1 количество P_1 -скрещивающихся пар, образованных X и некоторым пересечением ломаных q_1 и q_2 . Обозначим P_1 -Арф-инвариант диаграммы D через $\text{arf}_{P_1} D$. Аналогичные обозначения будем использовать и для отмеченной точки P_2 . Тогда

$$\text{arf}_{P_1} D - \text{arf}_{P_2} D = N_1 - N_2 = n_1 - n_2 \equiv_2 n_1 + n_2 \equiv_2 0,$$

где D — данная плоская диаграмма. В последней формуле

- первое равенство выполнено, поскольку пара перекрёстков в D является P_1 -скрещивающейся или P_2 -скрещивающейся (но не одновременно!) тогда и только тогда, когда она образована перекрёстком X и некоторым пересечением ломаных q_1 и q_2 ;
- второе равенство выполнено, поскольку $N_1 = n_1$ и $N_2 = n_2$; действительно, точка пересечения ломаных q_1 и q_2 образует P_1 -скрещивающуюся (соответственно, P_2 -скрещивающуюся) пару с X тогда и только тогда, когда в этой точке q_1 проходит над (соответственно, под) q_2 ;
- $\equiv_2$ обозначает сравнение по модулю 2;
- последнее сравнение выполнено ввиду леммы о чётности, применённой к ломаным q_1 и q_2 .

(б) *Движение типа I.* Выберем отмеченные точки до и после движения как показано на рис. 26 (вверху). Проверьте, что перекрёсток A не образует P -скрещивающуюся пару ни с одним другим перекрёстком.

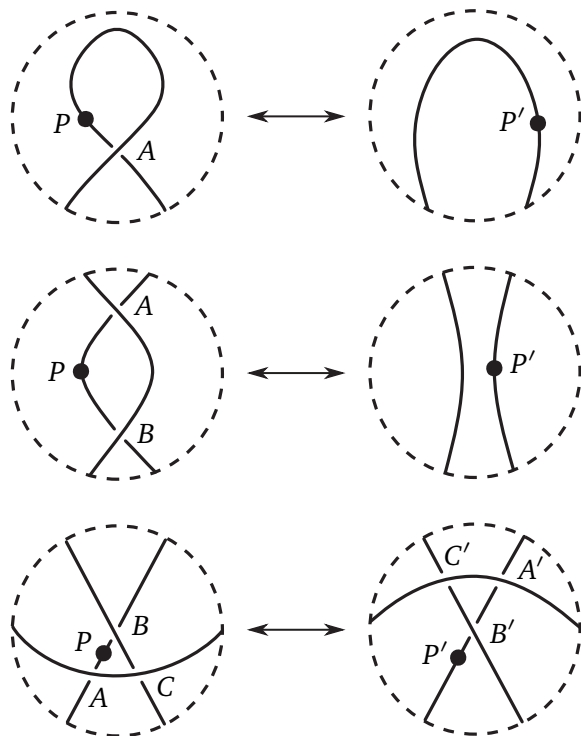


Рис. 26. Арф-инвариант не меняется при движениях Рейдемейстера

Движение типа II. Выберем отмеченные точки до и после движения как показано на рис. 26 (во втором ряду). Проверьте, что ни один из перекрёстков A , B не образует P -скрещающуюся пару ни с каким другим перекрёстком.

Движение типа III. Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 26 (внизу). Проверьте, что ни один из перекрёстков A , B не образует P -скрещающуюся пару ни с каким другим перекрёстком и что ни один из перекрёстков A' , B' не образует P' -скрещающуюся пару ни с каким другим перекрёстком. Затем проверьте, что произвольный перекрёсток X , отличный от A , B , C , образует P -скрещающуюся пару с C , если и только если X образует P' -скрещающуюся пару с C' .

5.3. Рассмотрим любую связную сумму K двух трилистников. Из утверждения 7.4 (d) следует, что $\text{arf } K = 0$. В то же время по результату задачи 5.1 (b) и утверждению 9.3 (a) $c_2(K) \neq 0$. Поэтому K не изотопен тривиальному узлу.

5.4. Существование. По лемме 5.2, Арф-инвариант является изотопическим инвариантом. Приведём указания к проверке скейн-соотноше-

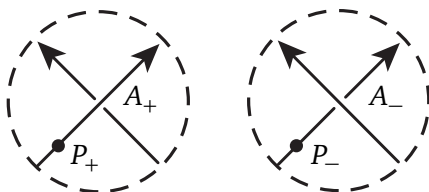


Рис. 27. К доказательству скейн-соотношения для Арф-инварианта

ния. Выберем отмеченные точки P_+ , P_- , как показано на рис. 27. Проверьте, что перекрёсток A_- не образует P_- -скрещающуюся пару ни с каким другим перекрёстком в K_- . Затем проверьте, что число таких перекрёстков, которые образуют P_+ -скрещающуюся пару с A_+ в K_+ , сравнимо с $\text{lk}_2 K_0$ по модулю 2.

Единственность. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4. Используйте саму лемму 3.3 вместо её аналога для зацеплений.

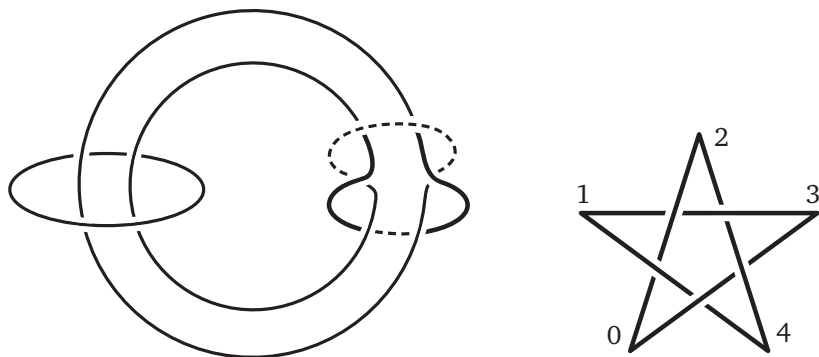


Рис. 28. Раскраска зацепления в 3 цвета и раскраска узла 5_1 в 5 цветов

6.1. Ответы: (b), (e), (h) — 3-раскрашиваемы, (a), (c), (d), (f), (g), (i) — не раскрашиваемы. Пример раскрашенного в три цвета трилистника см. в [Pr95, с. 30, рис. 4.3]. Правильную раскраску последней диаграммы с рис. 4 см. на рис. 28 слева. (Эта диаграмма была ошибочно названа нераскрашиваемой в три цвета в [Pr95, § 4]. Эта небольшая ошибка была найдена Л. Баннёром, С. Зотовой и Л. Кравцовой.)

6.3. (a) Большая часть п. (a) следует из леммы 6.2 и утверждений 6.1 (d)–(h) (см. [Pr95, с. 30]). Последняя диаграмма на рис. 4 отличается от тривиального зацепления числом правильных раскрасок плоской диаграммы. Докажите, что это число сохраняется при движениях Рейдемейстера.

(b) Плоская диаграмма называется *раскрашиваемой в 5 цветов*, если существует раскраска её дуг в цвета 0, 1, 2, 3, 4 такая, что хотя бы два

цвета использованы и в каждой точке пересечения если верхняя дуга имеет цвет a , а две нижние дуги — цвета b и c , то $2a \equiv b + c \pmod{5}$. Аналогично лемме 6.2 можно показать, что раскрашиваемость в 5 цветов сохраняется при движениях Рейдемейстера. Узел 5_1 является раскрашиваемым в 5 цветов (см. рис. 28 справа), а тривиальный узел — нет. Поэтому они не изотопны.

7.1. (b) Первое решение. Назовём ориентированную ломаную *положительной*, если ограниченная ею часть плоскости лежит слева от любого её звена (здесь используется теорема Жордана, сформулированная в замечании 3.1). Покажите, что положительность ломаной сохраняется при элементарных движениях.

УКАЗАНИЕ ко второму решению. Положительность ломаной из предыдущего решения можно эквивалентно определить следующим образом. Будем говорить, что ориентированная ломаная $A_1 \dots A_n$ *положительна*, если для любой её внутренней точки O сумма ориентированных углов $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$ положительна (т. е. индекс всякой внутренней точки ломаной относительно самой ломаной положителен).

7.2. Каждый из трёх указанных ориентированных узлов переводится в ориентированный узел с противоположной ориентацией вращением на угол π относительно «вертикальной» оси, проходящей через «самую верхнюю» точку узла (см. самую левую диаграмму на рис. 1 в первом и втором ряду для трилистника и восьмёрки соответственно). Это вращение входит в непрерывное семейство вращений на угол πt , $t \in [0, 1]$, относительно той же прямой. Это и есть требуемая изотопия.

7.7. (d) Проверьте, что всякая точка пересечения разных компонент в $K \# L$ получается из точки пересечения разных компонент в K или точки пересечения разных компонент в L .

8.1. Ответы: $\pm 1; 0$.

8.3. (a) Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.3 (a). Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. Из леммы о тривиальности (сформулированной перед утверждением 8.3) следует, что сумма знаков точек пересечения, в которых первая компонента выше второй, противоположна сумме знаков точек пересечения, в которых вторая компонента выше первой. Поскольку перестановка компонент зацепления меняет знаки всех точек пересечения компонент, коэффициент зацепления не меняется.

(b) Смена ориентации любой компоненты меняет знаки всех точек пересечения.

(с) Достаточно рассмотреть любую связную сумму пяти зацеплений Хопфа, у которых ориентации на компонентах выбраны таким образом, чтобы их коэффициент зацепления был равен -1 .

(d) Доказательство аналогично 7.4 (d). Множество перекрёстков в плоской диаграмме зацепления $K \# L$ является объединением множеств перекрёстков в плоских диаграммах зацеплений K и L , причём знак каждого перекрёстка в $K \# L$ совпадает со знаком этого перекрёстка в соответствующем ему зацеплении K или L .

(е) Примером является зацепление Уайтхеда (оно не изотопно тривиальному по теореме 2.2а).

9.1. (a) *Ответы:* 0, 1 и -1 .

Тривиальный узел не имеет перекрёстков, а значит, в нём нет и скрещивающихся пар перекрёстков. Поэтому инвариант Кэссона этого узла равен нулю.

Все три перекрёстка трилистника имеют одинаковый знак. Так как трилистник имеет только одну скрещивающуюся пару перекрёстков (вне зависимости от выбора отмеченной точки), инвариант Кэссона этого узла равен 1.

(b) Рассмотрим любую связную сумму пяти восьмёрок. По п. (a) и утверждению 9.3 (a) ниже, инвариант Кэссона этого узла равен -5 .

9.2, 9.3 (a), 9.4. Доказательства аналогичны доказательствам леммы 5.2, утверждения 5.3 и теоремы 5.4 соответственно. Важно следить за знаками точек пересечения. Для доказательства леммы 9.2 (a) воспользуйтесь леммой о тривиальности, сформулированной перед утверждением 8.3.

9.3. (b) Рассмотрим любую связную сумму трилистника и восьмёрки. По п. (a) и утверждению 9.1 (a) инвариант Кэссона этого узла равен нулю. Однако по утверждениям 10.3 (d), (e) и 10.5 (c) многочлен Конвея этого узла равен $(1 + t^2)(1 - t^2) \neq 1$. Значит, этот узел не изотопен тривиальному узлу.

10.1. (b) *Ответ:* 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Инвариант $\text{arf} = c_2 \bmod 2$ для зацеплений, вообще говоря, зависит от ориентации компонент (см. [CDM, 2.3.4] для инварианта $c_3 \bmod 2$).

Пусть D — плоская диаграмма некоторого зацепления. Обозначим через $\text{sg } D$ количество перекрёстков в D , а через $\text{ch } D$ минимальное число изменений перекрёстков, необходимое для получения из D диаграммы зацепления, изотопного тривиальному (такая последовательность изменений перекрёстков существует по аналогу леммы 3.3 для зацеплений).

10.2. Единственность доказывается аналогично теоремам 8.4, 9.4; сначала решите задачу 10.3.

Вывод сильной версии (для неупорядоченных зацеплений) из слабой (для упорядоченных зацеплений). Достаточно доказать, что все инварианты c_n , определённые для упорядоченных зацеплений, сохраняются при изменении порядка компонент.

Пусть D — плоская диаграмма некоторого зацепления с двумя или более компонентами и пусть D' — плоская диаграмма, полученная из D изменением порядка компонент. Доказательство проведём индукцией по $\text{cr } D$. Если $\text{cr } D = 0$, то D — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному, и по утверждению 10.3 (b) имеем $C(D) = 0$ для любого порядка компонент. Предположим, что $\text{cr } D > 0$; тогда продолжим доказательство индукцией по $\text{ch } D$. Если $\text{ch } D = 0$, то D — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что $\text{ch } D > 0$. Пусть D_* — зацепление, полученное из D таким изменением перекрёстка, что $\text{ch } D_* < \text{ch } D$. Обозначим через D'_* зацепление, полученное из D' изменением того же перекрёстка. Тогда

$$\pm(C(D) - C(D_*)) = C(D_0) \quad \text{и} \quad \pm(C(D') - C(D'_*)) = C(D'_0),$$

где D_0 — диаграмма зацепления K_0 (с некоторым порядком компонент) на рис. 21, D и D_* — это D_+ и D_- в некотором порядке, а D'_0 обозначает то же самое для D' , D'_* . Заметим, что диаграммы D_* и D'_* совпадают с точностью до порядка компонент. То же верно для диаграмм D_0 и D'_0 . Так как $\text{ch } D_* < \text{ch } D$ и $\text{cr } D_0 < \text{cr } D$, по предположению индукции имеем

$$C(D_*) = C(D'_*) \quad \text{и} \quad C(D_0) = C(D'_0).$$

Тогда $C(D) = C(D')$.

10.3. *Ответы:* (a), (b) 0; (c) $\pm t$; (d) $1 + t^2$; (e) $1 - t^2$; (f) $\pm t^3$; (g) $\pm t^4$; (h) $1 + 3t^2 + t^4$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Знаки в ответах к пп. (c), (f), (g) зависят от ориентации компонент.

УКАЗАНИЕ. Примеры вычислений для пп. (a), (c) и (d) см. в [CDM, 2.3.2].

10.4. Пусть D — плоская диаграмма данного зацепления K .

(a) Для любой диаграммы D_* , полученной из D изменением перекрёстка, имеем $c_0(D) - c_0(D_*) = 0$, т. е. c_0 не меняется при изменениях перекрёстков. По аналогу леммы 3.3 для зацеплений диаграмма D может быть получена изменениями перекрёстков из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному. Утверждение следует из определения c_0 на тривиальном узле и утверждения 10.3 (b).

(b), (c) Первые части обоих утверждений являются частными случаями п. (d). Вторые части обоих утверждений следуют из определения c_1, c_2 и теорем 8.4, 9.4.

(d) Доказательство индукцией по $\text{cr } D$. Если $\text{cr } D = 0$, то K изотопно тривиальному зацеплению. Если K — узел, то $C(D) = 1$. В противном случае $C(D) = 0$ по утверждению 10.3 (b). Предположим, что $\text{cr } D > 0$; тогда продолжим доказательство индукцией по $\text{ch } D$. Если $\text{ch } D = 0$, то K изотопно тривиальному зацеплению; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что $\text{ch } D > 0$. Пусть D_* — зацепление, полученное из D изменениями перекрёстков и такое, что $\text{ch } D_* < \text{ch } D$. Тогда

$$\pm(c_j(D) - c_j(D_*)) = c_{j-1}(D_0),$$

где D_0 — диаграмма с рис. 21, D и D_* — это D_+, D_- в некотором порядке. Заметим, что зацепление D_* состоит из k компонент, а зацепление D_0 состоит из $k' = k \pm 1$ компонент. Поэтому если $j \leq k - 2$, то $j - 1 \leq k'$, и если $j - k$ чётно, то и $(j - 1) - k'$ чётно. Так как $\text{ch } D_* < \text{ch } D$ и $\text{cr } D_0 < \text{cr } D$, по предположению индукции имеем $c_j(D_*) = c_{j-1}(D_0) = 0$. Тогда $c_j(D) = 0$.

(e) Докажите аналогично п. (d), что $c_j(D) = 0$ для любой плоской диаграммы D и $j > \text{cr } D$.

10.5. (a) Доказывается аналогично утверждению 10.4 (d).

(c) Пусть D и E — плоские диаграммы зацеплений K и L . Аналогично утверждению 10.4 (d) покажите, что $C(D \# E) = C(D)C(E)$ индукцией по $\text{cr } D$ при фиксированном E .

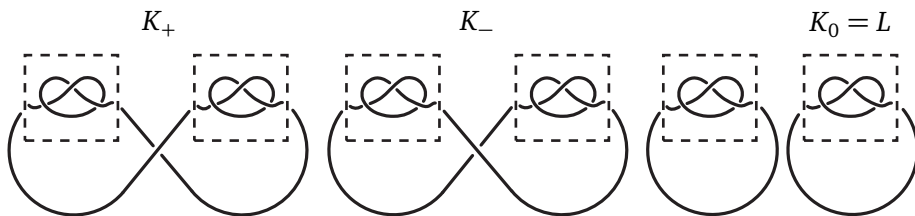


Рис. 29. Доказательство равенства $C(\text{разделяемое зацепление}) = 0$

10.6. (a) Следует из утверждений 10.3 (c), (f), (g) и пп. (b), (c).

(c) Если L — разделяемое зацепление, то существуют зацепления K_+, K_-, K_0 такие, что

- их плоские диаграммы отличаются как на рис. 21;
- зацепления K_+ и K_- изотопны;
- зацепление K_0 изотопно L .

Получаем $C(L) = C(K_0) = \frac{1}{t}(C(K_+) - C(K_-)) = 0$ (рис. 29).

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю А. Еннэ за подготовку рисунков и работу над [EEF] после Летней конференции, Е. Морозова за перевод обновлённой мной версии на русский язык и А. Глебова, Д. Елисеева, А. Еннэ, Р. Живалевича, Е. Морозова, А. Рябичева, А. Сосинского, М. Фёдорова, Н. Хорошавкину, С. ЧмUTOва за полезные обсуждения и нашу работу над [EEF]. Благодарю редколлегию «Математического просвещения» за полезные обсуждения. Этот текст основан на лекциях автора в Независимом Московском университете (включая Math in Moscow Program) и в Московском физико-техническом институте, а также на проекте Летней конференции [EEF].

В списке литературы звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Al28] *Alexander J. W.* Topological invariants of knots and links // Trans. AMS. 1928. Vol. 30, № 2. P. 275–306.
- [As] *Asanau A.* A simple proof that connected sum of ordered oriented links is not well-defined (preprint).
- [CDM] * *Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev knot invariants. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.
<http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook>
- [CG83] *Conway J. H., Gordon C. M. A.* Knots and links in spatial graphs // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7. P. 445–453.
- [CSK] * https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_sum#Connected_sum_of_knots
- [EEF] * Теория узлов и зацеплений для пользователя // 31-я Летняя конференция Турнира городов. <https://www.turgor.ru/lktg/2019/3/>
- [Ga19] *Гараев Т. Р.* Элементарное доказательство существования полинома Конвея. arXiv:2012.03086.
- [IRS] * *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177.
- [HC19] * *Clemens C. H.* Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach. Providence, RI: AMS, 2019. (Pure and Applied Undergraduate Texts; Vol. 34).
- [Ka06] *Kauffman L. H.* Formal Knot Theory. Dover Publications, 2006.

- [Ka06'] *Kauffman L. H.* Remarks on Formal Knot Theory. arXiv:math/0605622 (отметим, что в оглавлении на с. 1 номера и названия параграфов ошибочны).
- [Ka87] *Kauffman L. H.* On knots. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987. (Annals of Mathematics Studies; Vol. 115).
- [Ko19] *Kogan E.* Linking of three triangles in 3-space, arXiv:1908.03865.
- [Ma18] * *Manturov V.* Knot Theory / 2nd edition. Boca Raton, FL: CRC press. 2018.
- [Pr95] * *Prasolov V. V.* Intuitive topology. Providence, RI: AMS, 1995. (Mathematical World; Vol. 4). Translated from the Russian manuscript by A. Sossinsky.
- [Pr98] * *Przytycki J. H.* 3-coloring and other elementary invariants of knots // Knot theory (Warsaw, 1995). Warsaw: Polish Acad. Sci. Inst. Math., 1998. (Banach Center Publ.; Vol. 42). P. 275–295. arXiv:math.GT/0608172.
- [PS96] * *Prasolov V. V., Sossinsky A. B.* Knots, Links, Braids, and 3-manifolds. Providence, RI, AMS, 1996.
- [Ra20] * *Райгородский А. М.* Математика раскрасок // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 99–127.
- [Sk] * *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>
- [Sk20u] *Skopenkov A.* A user's guide to basic knot and link theory // Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial. To appear in 2021. (Contemp. Math. Amer. Math. Soc.; Vol. 772). arXiv:2001.01472.
- [Sk14] * *Skopenkov A.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory. arxiv:1402.0658.
- [Sk15] *Skopenkov A.* Classification of knotted tori // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 2020. Vol. 150, № 2. P. 549–567. arXiv:1502.04470.
- [Sk16c] * *Skopenkov A.* Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification // Boll. Man. Atl. (to appear). http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification
- [Sk16e] * *Skopenkov A.* Embeddings just below the stable range: classification // Boll. Man. Atl. (to appear). http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_just_below_the_stable_range:_classification
- [Sk18] * *Skopenkov A.* Invariants of graph drawings in the plane // Arnold Math. J. 2020. Vol. 6. P. 21–55. Полная версия: arXiv:1805.10237.
- [Sk16i] * *Skopenkov A.* Isotopy // Boll. Man. Atl. (submitted). <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>

- [Sk20] * Скопенков А. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2020. [Электронная версия]:
<http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#photo>.
- [So89] * Сосинский А. Б. Узлы, зацепления и их многочлены // Квант. 1989. № 4. С. 11–18.
http://kvant.mccme.ru/1989/04/uzly_zacepleniya_i_ih_polinomy.htm
- [Su92] * Судзуки Д. Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України, 1992.
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. М.: МЦНМО, 2018.
<http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>

Мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга

В. И. Ретинский, А. Д. Рябичев, А. Б. Скопенков*

Мы приводим мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга (см. формулировку ниже). Для понимания формулировки и доказательства достаточно владеть понятием d -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. По сути наше изложение аналогично [Ma02, § 8.3] (см. также [BO97]). Однако оно проще для восприятия, поскольку дополнительные построения (переход к $\mathbb{R}^{d+1}$ от $\mathbb{R}^d$, векторы $\varphi_{j,i}$ и цветная теорема Каратеодори, см. ниже) не вводятся немотивированно заранее, а естественно возникают при попытке построить нужное разбиение¹⁾. Эта попытка основана на записи нескольких равенств между векторами в виде одного равенства между векторами большей размерности.

Выпуклой оболочкой конечного набора точек $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ называется множество

$$\langle p_1, \dots, p_n \rangle := \{ \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \}.$$

ТЕОРЕМА 1 (Радон). Для любого d любые $d + 2$ точки в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

ТЕОРЕМА 2 (Тверберг). Для любых d, r любые $(d + 1)(r - 1) + 1$ точек в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.

Мотивировки и историю см. в [Ma02, § 8]; о топологической гипотезе Тверберга см. [Sk16]. Здесь отметим лишь, что

- теорема Радона есть частный случай теоремы Тверберга для $r = 2$;
- числа $d + 2$ и $(d + 1)(r - 1) + 1$ в этих теоремах уменьшить нельзя.

* Частично поддержан грантом РФФИ № 19-01-00169.

¹⁾ Наше изложение показывает, что приведённое известное доказательство является несложной редукцией к цветной теореме Каратеодори, в которой вся нетривиальность и заключается.

К соответствующему аналогу теоремы Радона контрпримером являются $d + 1$ вершин d -мерного симплекса. К соответствующему аналогу теоремы Тверберга контрпримером являются вершины d -мерного симплекса, взятые с кратностью $r - 1$ (или любые $(d + 1)(r - 1)$ точек общего положения в $\mathbb{R}^d$; используйте формулу для размерности пересечения линейных подпространств в $\mathbb{R}^d$). Поэтому вместо запоминания чисел $d + 2$ и $(d + 1)(r - 1) + 1$ из теорем Радона и Тверберга можно понимать, что это наименьшие числа, для которых не подходят вышеприведённые простые контрпримеры.

Сначала продемонстрируем одну из идей доказательства теоремы Тверберга на примере доказательства теоремы Радона. Введём обозначение $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ РАДОНА. Обозначим данные точки через $p_1, p_2, \dots, p_{d+2}$. Достаточно привести разбиение $[d + 2] = A_1 \sqcup A_2$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{d+2}$, для которых

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i p_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i p_i \quad \text{и} \quad \sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i, \quad (1)$$

причём $\sum_{i \in A_1} \alpha_i = 1$. Вместо последнего равенства достаточно потребовать отличность суммы от нуля. Обозначим

$$p_i^+ := (p_i, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad i \in [d + 2], \quad S_j^+ := \sum_{i \in A_j} \alpha_i p_i^+, \quad j = 1, 2.$$

Тогда два равенства (1) равносильны одному равенству $S_1^+ = S_2^+$.

Точки $p_1^+, p_2^+, \dots, p_{d+2}^+ \in \mathbb{R}^{d+1}$ линейно зависимы, т. е. существуют $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d+2}$, не все равные нулю, для которых $\sum_{i=1}^{d+2} \mu_i p_i^+ = 0$. Среди μ_i есть и положительные, и отрицательные (действительно, рассмотрим последнюю координату). Перенесём в правую часть все слагаемые с отрицательными μ_i . Получим, что следующее разбиение и числа — искомые:

$$A_1 := \{i \in [d + 2] : \mu_i \geq 0\}, \\ A_2 := \{i \in [d + 2] : \mu_i < 0\} \quad \text{и} \quad \alpha_i = |\mu_i|. \quad \square$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ТВЕРБЕРГА. Докажем теорему для $r = 3$, доказательство общего случая аналогично. Обозначим данные точки через $p_1, p_2, \dots, p_{2d+3}$. Достаточно привести разбиение $[2d + 3] = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3$ и неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2d+3}$, для которых

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i p_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i p_i = \sum_{i \in A_3} \alpha_i p_i \quad \text{и} \quad \sum_{i \in A_1} \alpha_i = \sum_{i \in A_2} \alpha_i = \sum_{i \in A_3} \alpha_i, \quad (1')$$

причём $\sum_{i \in A_1} \alpha_i = 1$. Вместо последнего равенства достаточно потребовать равенство $\sum_{i=1}^{2d+3} \alpha_i = 1$ (разделим на 3 все α_i). Обозначим

$$p_i^+ := (p_i, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad i \in [2d+3], \quad S_j^+ := \sum_{i \in A_j} \alpha_i p_i^+, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда равенства (1') равносильны следующим:

$$\begin{aligned} S_1^+ = S_2^+ = S_3^+ &\Leftrightarrow \begin{cases} S_1^+ = S_3^+, \\ S_2^+ = S_3^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot S_1^+ + 0 \cdot S_2^+ - S_3^+ = 0, \\ 0 \cdot S_1^+ + 1 \cdot S_2^+ - S_3^+ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (S_1^+, 0) + (0, S_2^+) + (-S_3^+, -S_3^+) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\varphi_{1,i} = (p_i^+, 0) \in \mathbb{R}^{2d+2}, \quad \varphi_{2,i} = (0, p_i^+) \in \mathbb{R}^{2d+2}, \quad \varphi_{3,i} = (-p_i^+, -p_i^+) \in \mathbb{R}^{2d+2}.$$

Тогда равенства $S_1^+ = S_2^+ = S_3^+$ равносильны следующему:

$$\sum_{i \in A_1} \alpha_i \varphi_{1,i} + \sum_{i \in A_2} \alpha_i \varphi_{2,i} + \sum_{i \in A_3} \alpha_i \varphi_{3,i} = 0. \quad (2)$$

Осталось применить следующую теорему.

ТЕОРЕМА (Барань; цветная теорема Каратеодори; [Ba82], [Ma02, § 8.2]). Пусть точка $0 \in \mathbb{R}^n$ лежит в выпуклой оболочке каждого из $n+1$ конечных множеств $M_1, M_2, \dots, M_{n+1} \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существуют точки $m_i \in M_i$ ($i = 1, \dots, n+1$), для которых $0 \in \langle m_1, m_2, \dots, m_{n+1} \rangle$.

Так как

$$0 = \frac{\varphi_{1,i} + \varphi_{2,i} + \varphi_{3,i}}{3} \in \langle \varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}, \varphi_{3,i} \rangle,$$

можно применить эту теорему к $n = 2d+2$ и $M_i = \{\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}, \varphi_{3,i}\}$. Получим точки $m_i \in M_i$, для которых $0 \in \langle m_1, m_2, \dots, m_{n+1} \rangle$. Для $j = 1, 2, 3$ обозначим $A_j := \{i \in [2d+3] : m_i = \varphi_{j,i}\}$. Так как $0 \in \langle m_1, m_2, \dots, m_{n+1} \rangle$, существуют $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2d+3} \geq 0$, для которых выполнено равенство (2) и

$$\sum_{i=1}^{2d+3} \alpha_i = 1. \quad \square$$

ПРИЛОЖЕНИЕ: ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ РАДОНА

Приведём доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности. По сути оно совпадает с приведённым в [Ko18], но изложено без лишних обозначений.

Доказательство. Индукция по d . База $d = 0$ очевидна. Докажем переход от d к $d+1$ при $d \geq 0$.

Существует d -мерная гиперплоскость $\alpha \subset \mathbb{R}^{d+1}$, для которой ровно одна точка O из данного набора $d + 3$ точек лежит по одну сторону от α , а остальные — по другую. Обозначим через M множество этих остальных точек. Для любой точки $A \in M$ обозначим $A' := \alpha \cap OA$.

Воспользуемся теоремой Радона для множества $M' := \{A' : A \in M\}$ из $d + 2$ точек в d -мерном пространстве α . Получим разбиение на два множества U'_1 и U'_2 , выпуклые оболочки которых пересекаются в точке X' . Обозначим $U_1 := \{A : A' \in U'_1\}$ и $U_2 := \{A : A' \in U'_2\}$.

Ясно, что $U'_1 \subset \langle O, U_1 \rangle$. Следовательно, $X' \in \langle O, U_1 \rangle$, и, более того, весь отрезок OX' содержится в $\langle O, U_1 \rangle$. Обозначим через X_1 точку, для которой прямая OX' пересекает $\langle O, U_1 \rangle$ по отрезку OX_1 . Тогда $X_1 \in \langle U_1 \rangle$ и $X' \in OX_1$.

Аналогично через X_2 обозначим такую точку, что прямая OX' пересекает $\langle O, U_2 \rangle$ по отрезку OX_2 . Тогда $X_2 \in \langle U_2 \rangle$ и $X' \in OX_2$.

Точки X_1 и X_2 лежат на луче OX' . Не умаляя общности предположим, что X_2 лежит между O и X_1 . Тогда $X_2 \in \langle O, U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$, что и требовалось. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ba82] *Bárány I.* A generalization of Caratheodory's theorem // *Discrete Math.* 1982. Vol. 40, iss. 2–3. P. 141–152.
- [BO97] *Bárány I., Onn S.* Colourful linear programming and its relatives // *Math. Oper. Res.* 1997. Vol. 22, № 3. P. 550–567.
- [Ko18] *Колпаков Е.* Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23.* М.: МЦНМО. 2019. С. 130–133. arXiv:1903.11055.
- [Ma02] *Matoušek J.* *Lectures on Discrete Geometry.* New York: Springer, 2002.
- [Sk16] *Skopenkov A.* A user's guide to the topological Tverberg Conjecture // *Russian Math. Surveys.* 2018. Vol. 73, № 2. P. 323–353. arXiv:1605.05141.

Вадим Игоревич Ретинский, ВШЭ

viretinskiy@gmail.com

Андрей Дмитриевич Рябичев, ВШЭ, НМУ

ryabichev@179.ru

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

<https://users.mccme.ru/skopenko>

По мотивам задачника

Задача о 3-секущих

Д. Й. Каминский, А. Я. Канель-Белов, М. Тайхер

Статья посвящена решению задачи 11.8 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 11, 2007, с. 163).

Задача 11.8. В пространстве даны две гладкие кривые C_1 и C_2 . Рассматривается множество S прямых $l = (A, B): A \in C_1, B \in C_2$. Докажите, что если некоторая кривая C_3 , не пересекающаяся с $C_1 \cup C_2$, пересекает каждую прямую из S , то обе кривые C_1 и C_2 лежат в одной плоскости¹⁾.

(A. Kanel-Belov, J. Kaminsky, M. Taicher)

Достаточно рассмотреть два непересекающихся интервала s_1 и s_2 кривых C_1 и C_2 соответственно. Если любые пары таких интервалов лежат в одной плоскости, то и кривые C_1 и C_2 целиком лежат в той же плоскости. Множество L прямых, соединяющих s_1 и s_2 , есть двумерное гладкое многообразие, и каждая из этих прямых пересекает одномерное гладкое многообразие C_3 . Пространство прямых, касающихся кривой C_3 , не более чем одномерно (прямая определяется точкой касания). В случае общего положения (когда соответствующая прямая не касается C_3) зависимость точки пересечения от прямой гладкая. Поэтому для любой прямой, соединяющей точки интервалов s_1 и s_2 , найдётся сколь угодно близкая к ней прямая из L , которая пересекается с ней в точке кривой C_3 . Это означает, что справедливо

Работа поддержана грантом Israel science foundation № 1994/20.

¹⁾ Три-секущая множества D есть прямая, пересекающая D в трёх точках. В нашем случае $D = C_1 \cup C \cup C_2$ есть объединение трёх кривых.

Предложение 1. Для любых точек $A_1 \in s_1$, $B_1 \in s_2$ найдутся сколь угодно близкие к ним точки $A_2 \in s_1$, $B_2 \in s_2$ соответственно, для которых диагонали $[A_1B_1]$ и $[A_2B_2]$ четырёхугольника $A_1A_2B_2B_1$ пересекаются.

Воспользуемся хоть и тривиальным, но полезным наблюдением:

Предложение 2. Если диагонали четырёхугольника пересекаются, то все его вершины лежат в одной плоскости.

Поскольку направление малой дуги ds гладкой кривой стремится к касательной при $|ds| \rightarrow 0$, получаем

Следствие 3. Пусть $\vec{e}_1$ — касательный вектор к кривой C_1 в некоторой точке P , а $\vec{e}_2$ — касательный вектор к кривой C_2 в некоторой точке Q . Тогда векторы e_1 , e_2 и PQ лежат в одной плоскости.

Продолжим решение задачи 11.8. Рассмотрим плоскость α , проходящую через касательную к кривой C_1 в точке P , а также через точку Q . Далее, рассмотрим бесконечно малый сдвиг Q' точки Q . Вектор QQ' стремится к касательному вектору к кривой C_2 в точке Q . В силу следствия 3 этот касательный вектор лежит в плоскости α , поэтому скорость изменения направления плоскости α нулевая при любом Q . Следовательно, при движении точки Q вдоль кривой C_2 направление плоскости α не меняется. Значит, не меняется и сама плоскость α , так как она проходит через фиксированную точку P . Поэтому $\alpha \supset C_2$. Аналогично $\alpha \supset C_1$. Задача решена.

Задача допускает обобщение:

Даны три n -мерных гладких многообразия M_1 , M_2 и M_3 в k -мерном пространстве. Известно, что любая прямая, соединяющая точки M_1 и M_2 , пересекает M_3 . Тогда M_1 и M_2 лежат в $(n+1)$ -мерном аффинном подпространстве.

Идея решения. Многообразие прямых, соединяющих M_1 с M_2 , имеет размерность $2n$. Как и для одномерных многообразий, рассмотрим области ds_1 и ds_2 на M_1 и M_2 соответственно, найдём точку на M_3 такую, что через неё проходит n -параметрическое семейство прямых. Вместо предложения 2 воспользуемся несколько более общим фактом: если $n+1$ отрезков проходят через одну точку, то они содержатся в некотором $n+1$ -мерном пространстве. Аналогично случаю кривых получаем, что касательные n -мерные аффинные многообразия к M_i в точках $P \in M_1$ и $Q \in M_2$, а также вектор PQ лежат в одном $(n+1)$ -мерном подпространстве. Рассуждения с последовательным движением точек P и Q также аналогичны случаю кривых. (Движение точки Q вдоль M_2 не меняет

подпространства, натянутого на $\vec{PQ}$ и касательного к M_1 в точке P . Аналогичным образом можно двигать P .)

Комментарии. 1. Задача связана с обработкой изображений.

2. Задача 11.8 обобщается и на кусочно-гладкий случай (соображения предельного перехода), а также для кривых (алгебраических многообразий) над полем произвольной характеристики. Подробности, а также обобщения и различные сюжеты, связанные с задачей, см. [2–5].

3. Решение задачи 11.8 можно сформулировать, опираясь на важное понятие внешнего произведения. Внешнее произведение набора векторов $\bigwedge$ есть элемент пространства, на них натянутого. Этот элемент можно представлять как ориентированный параллелепипед. Численная величина внешнего произведения есть ориентированный объём. При перестановке двух векторов внешнее произведение меняет знак. Внешнее произведение параллелепипедов Π_i , заданных наборами векторов $\{\vec{e}_{ij}\}$, есть внешнее произведение $\bigwedge_{ij} \vec{e}_{ij}$.

Внешнее произведение набора векторов равно нулю в точности тогда, когда векторы не находятся в общем положении. Поэтому утверждение следствия 3 можно сформулировать так:

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{PQ} = 0.$$

В доказательстве для многомерного случая равно нулю внешнее произведение векторов касательной плоскости в точке P , вектора $\vec{PQ}$ и произвольного касательного вектора к M_2 в точке Q .

Для освоения понятия внешнего произведения советуем обратиться к очень хорошей книге И. М. Гельфанда [1]. Рекомендуем также разобрать решение А. Скутина («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 19, 2015, с. 263) задачи 17.10 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 17, 2013, с. 197). Внешнее произведение обсуждается также в решении задачи («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 26, 2020, с. 266) на с. 266–267 настоящего выпуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
- [2] Kanel-Belov A., Kaminski J., Teicher M. Multi-Secant Lemma // Israel Journ. of Math. 2010. Vol. 177, № 1. P. 253–267.
- [3] Каминский Д. Й., Канель-Белов А. Я., Тайхер М. Лемма о 3-секущих для многообразий с компонентами различной размерности // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Т. 12, № 2. С. 71–87.

- [4] *Nilov F., Skopenkov M.* A surface containing a line and a circle through each point is a quadric // *Geometriae Dedicata*. 2013. Vol. 163, № 1. P. 301–310.
- [5] *Zak F.* *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*. Providence: AMS, 1992.

Джереми Йирмеяху Каминский, Холонский технологический институт
kaminsj@hit.ac.il

Алексей Яковлевич Канель-Белов, университет Бар-Илана
kanel@mccme.ru

Мина Тайхер, университет Бар-Илана
teicher@math.biu.ac.il

О задачах на линейное варьирование

А. Я. Канель-Белов

Рассмотрим вначале решения некоторых задач, опубликованных в «Математическом просвещении».

25.2 (выпуск 25, с. 167). Условие. Известно, что числа $x_1, \dots, x_N$ удовлетворяют неравенствам:

$$x_1 + x_2 \geq 1, \quad x_2 + x_3 \geq 2, \quad \dots, \quad x_N + x_1 \geq N.$$

Найдите минимум суммы $S = x_1 + \dots + x_N$, если а) $N = 2019$; б) $N = 2020$.
(Фольклор)

Ответ: $\frac{1 + \dots + 2019}{2} = 1\,019\,595$; б) $2(1 + \dots + 1010) = 1\,021\,110$.

Решение. а) Оценка получается сложением всех неравенств:

$$2S = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2019} + x_1) \geq 1 + \dots + 2019,$$

откуда $S \geq \frac{1 + \dots + 2019}{2} = 1\,019\,595$.

Для построения примера достаточно показать, что все неравенства могут обратиться в равенства. Рассмотрим матрицу, отвечающую левой части соответствующей системы. Это ленточная матрица, где на главной диагонали стоит 1, сверху рядом с главной диагональю диагональ из единиц и в левом нижнем углу 1. Её определитель равен 2, поэтому система имеет единственное решение.

б) В отличие от предыдущего случая, все неравенства нельзя одновременно обратить в равенства: матрица системы будет вырождена.

Оценка получается сложением неравенств, начинающихся со слагаемых с чётным индексом:

$$x_2 + x_3 \geq 2, \quad x_4 + x_5 \geq 4, \quad \dots, \quad x_{2020} + x_1 \geq 2020,$$

$$S = x_1 + \dots + x_{2020} \geq 2(1 + \dots + 1010) = 1010 \cdot 1011 = 1\,021\,110.$$

Работа поддержана грантом Israel science foundation № 1994/20.

Пример показывает, что равенство достижимо. Возьмём произвольные x_2 и x_3 такие, что $x_2 + x_3 = 2$. Далее положим $x_{k+2} = x_k + 1$ ($k = 2, \dots, 2018$), $x_1 = x_{2019} + 1$. Все неравенства будут выполнены и при этом $S = 1\,021\,110$.
(А. Я. Канель-Белов)

25.2' (выпуск 26, с. 273)¹⁾. Условие. *На какую максимальную длину можно сдвинуть кирпичи в стенке из n кирпичей?*

Кирпичи считаются двумерными (они имеют ненулевую длину и высоту, но нулевую ширину). Все кирпичи одинаковы. Кирпичи можно класть друг на друга (так что один может выступать над другим в длину). На каждый кирпич можно положить только один (на который, в свою очередь, можно положить ещё один, и т. д.). (Фольклор)

В общем случае (когда на земле лежит один кирпич, но на каждый кирпич можно класть сколько угодно) ответ неизвестен. Было бы интересно получить асимптотику.

Ответ: на величину

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2(n-1)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{(n-1)} \right).$$

Решение. Пронумеруем кирпичи сверху вниз. Ясно, что первый кирпич может быть сдвинут относительно второго самое большее на $1/2$ — иначе он опрокинется. Система из k верхних кирпичей может быть сдвинута относительно $(k+1)$ -го так, чтобы её центр масс находился внутри этого кирпича, в крайнем случае на его границе. Эти условия можно записать на языке линейных неравенств:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i S_i \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где S_i — сдвиг i -го кирпича относительно $(i+1)$ -го.

Будем сдвигать кирпичи в одну сторону, пока это возможно. В процессе движения некоторые наши неравенства превращаются в равенства, и мы это равенство сохраняем при дальнейшем движении. Если не все неравенства выродились в равенства, то ограничений меньше, чем параметров (т. е. сдвигов кирпичей) и можно продолжать движение. Ясно, что сколь угодно далеко (например, на расстояние больше n) верхний кирпич не выдвинуть, так что процесс закончится, т. е. все неравенства

¹⁾ В ранее опубликованном условии имелась опечатка — упомянута высота вместо длины. Это классический сюжет, который обсуждается, в частности, в замечательной книге В. А. Уфнаровского «Математический аквариум» (М.: МЦНМО, 2017, с. 10–13). Правда, вопрос максимизации там не затрагивается.

превратятся в равенства. Индукцией по k нетрудно показать, что тогда $S_k = 1/(2k)$, откуда следует ответ. (А. Я. Канель-Белов)

25.2'' (выпуск 26, с. 273). Условие. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, m$ — вещественные числа. Число a_k назовём m -лидером, если для некоторого t , $1 \leq t \leq m$, имеем $a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+t-1} \geq 0$. Докажите, что сумма всех m -лидеров неотрицательна²⁾. (Фольклор)

Решение. Ясно, что выбрасывание нуля не меняет множество ненулевых m -лидеров, равно как и их сумму. Ясно также, что если остались ненулевые числа, то среди них есть положительное.

Пусть $a_k > 0$, $k > 1$. Заменим a_{k-1} на $a_{k-1} + a_k$, а a_k на 0. Непосредственно проверяется, что лидеры будут стоять на тех же позициях, что и раньше, и их сумма не изменится. Повторяя такую процедуру и выбрасывая нули, получаем, что останется не более одного положительного числа в самом начале, а все остальные числа отрицательны. Для этого случая задача очевидна. (А. Я. Канель-Белов)

Рассмотренные задачи 25.2, 25.2', 25.2'' объединяет метод *линейного варьирования* (упомянутый в 26-м выпуске, с. 273). Он состоит в том, что если условия задачи заданы системой линейных уравнений или неравенств, то их можно «двигать», добиваясь максимального вырождения неравенств. (Полученное таким образом решение иногда «чистится», так что процедура линейного варьирования пропадает. То, что происходит с первоначальным решением в процессе «чистки», обсуждается в упомянутой книге В. А. Уфнарковского «Математический аквариум».)

Приведём ещё три примера задач на линейное варьирование.

1. Двое путешественников объезжают страну. Первый едет в самый дальний из городов, где он не был, второй — в самый ближний. Докажите, что маршрут первого не короче маршрута второго³⁾. (А. А. Берзиньш)

Решение. Для начала сведём ситуацию к случаю двух возможных расстояний. Прибавив константу и отнормировав, можно считать, что все расстояния заключены в пределах от 100 до 101. Пусть S_1 — длина маршрута первого путешественника, S_2 — второго, и пусть $\Delta = S_2 - S_1 > 0$. Будем менять все расстояния между городами непрерывным образом и так, чтобы расстояния были в указанных пределах. Если расстояние стало равным 100 или 101, то мы его больше не меняем. Если какие-то расстояния стали одинаковыми, мы в дальнейшем меняем их одинаково.

²⁾ Как обычно в таких случаях, следует положить $a_{n+1} = a_1$ и т. д.

³⁾ В равносильной формулировке задача была предложена на 11-й Всесоюзной математической олимпиаде (1977 г., Таллин), 1 день, 9 класс, № 4.

Если при изменении каких-то расстояний Δ уменьшилось, то при противоположном изменении Δ увеличится. Будем действовать так, чтобы Δ не уменьшалось. Такой процесс можно продолжать, пока все расстояния не станут равными 100 или 101.

Первоначальные маршруты путешественников по-прежнему удовлетворяют условию задачи. Действительно, если условие нарушилось, то какие-то два расстояния d, D с условием $d < D$ превратились в расстояния d', D' с условием $d' > D'$. Но в какой-то промежуточный момент они стали равными и после этого оставались равными — противоречие.

Теперь решим задачу для случая двух возможных расстояний. Рассмотрим множество S_1 городов, из которых выходят короткие (длиной 100) переходы первого путешественника, вместе с городом, который он посетил последним. Все попарные расстояния между этими городами равны 100. Действительно, если между какими-то из этих городов C_1 и C_2 есть длинный переход (длиной 101), причём вначале путешественник посетил C_1 , то он пойдёт не в следующий город на расстоянии 100 от C_1 , а направится в C_2 , так что переход из C_1 окажется длинным, что противоречит выбору города C_1 . Теперь построим множество S_2 городов, из которых выходят короткие переходы второго, вместе с последним городом, который он посетил. Аналогично все расстояния между городами из S_2 равны 101. Поэтому никакие два города не могут принадлежать одновременно множеству S_1 и множеству S_2 .

Пусть K_i есть число коротких переходов i -го путешественника, L_i — число длинных переходов i -го ($i = 1, 2$). Тогда $K_i + L_i = n - 1$ (где n — число городов). И поскольку путь первого оказался короче, $K_1 > K_2$, т. е. $K_1 \geq K_2 + 1$. Отсюда

$$|S_1| + |S_2| = (K_1 + 1) + (L_2 + 1) \geq K_2 + L_2 + 3 = n + 2.$$

Но тогда множества S_1 и S_2 пересекаются не менее чем по двум элементам, что, как мы видели, невозможно. Задача решена⁴⁾.

2 (Международная студенческая интернет-олимпиада по математике 2020 г. <https://www.ariel.ac.il/wp/i-olymp>, задача 9). Дан выпуклый четырёхугольник. Впишите в него параллелограмм так, чтобы его стороны имели данные направления. (А. Я. Канель-Белов)

⁴⁾ Ещё одно решение, которое также использует линейное варьирование, см. в книге: Башмаков М. И., Беккер Б. М., Гольховой В. М. Задачи по математике. Алгебра и анализ. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982. С. 191. Другое решение этой задачи см.: Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988. С. 217.

РЕШЕНИЕ. Возьмём точку P на стороне четырёхугольника m . Проведём из P прямые данных направлений до пересечения с соседними сторонами. Полученный треугольник достроим до параллелограмма. Его вершина P' , противоположная P , не обязательно лежит на четвёртой стороне n четырёхугольника. Однако если двигать P с постоянной по стороне m , то точка P' тоже движется с постоянной скоростью по прямой.

Поэтому берём на стороне m две точки P_1, P_2 , строим точки P'_1, P'_2 и проводим прямую $P'_1P'_2$. Если она пересекает сторону n в точке P' , то P' — вершина искомого параллелограмма. Предоставляем читателю проанализировать, при каких условиях точка P' попадает на продолжение стороны n , а также когда прямая $(P'_1P'_2)$ параллельна прямой (CD) .

3 (Теорема Холла для нагруженных графов). *Имеется n юношей и n девушек, каждому юноше нравятся несколько девушек (возможно, одна) и наоборот. Суммарная сила симпатии у каждого равна единице. Сила симпатии A к B равна силе симпатии B к A . Докажите, что можно поженить юношей с девушками так, чтобы между супругами была ненулевая симпатия.*

Доказательство. Пусть X_1 — юноша, ему нравится девушка Y_1 , она симпатизирует ещё юноше X_2 , X_2 симпатизирует Y_2 и т. д. Если цепочка кончится тупиком (человеком, которому никто не нравится, кроме предыдущего), то предыдущему человеку нравится только последний и на самом деле это изолированная пара, которую можно выбросить. В противном случае появляется цикл. Пусть L — минимальная сила симпатии в этом цикле, ей отвечает ребро E . Вычтем L из нагрузки (силы симпатии) ребра E (тем самым его уничтожив), равно как и из нагрузки рёбер с номерами той же чётности в порядке прохождения цикла. В то же время прибавим L к нагрузке рёбер с номерами противоположной чётности. Условие баланса сохранится, мы перешли к графу с меньшим числом рёбер и дальше действуем аналогично. $\square$

Построенный алгоритм позволяет эффективно строить паросочетание и в частном случае — классической теореме Холла. Как видите, для построения эффективного алгоритма иногда бывает выгодно задачу обобщить.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Матрица с неотрицательными коэффициентами называется *бистохастической*, если сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна 1. Матрица *перестановки* есть матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой один элемент равен единице, а остальные нулю. Докажите, что бистохастическая матрица есть линейная

комбинация матриц перестановок с неотрицательными коэффициентами⁵⁾.

2. Известно, что сумма модулей попарных разностей набора неотрицательных чисел равна 1. Найдите наименьшее возможное значение суммы этих чисел.
3. Последовательность целых чисел $x_0, x_1, x_2, \dots$ такова, что $x_0 = 0$ и $|x_n| = |x_{n+1} + 1|$ для каждого натурального n . Каково наименьшее возможное значение выражения $|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1985}|$?
4. На складе 300 сапог: 100 хромовых, 100 кирзовых и 100 яловых. При этом левых и правых поровну. Докажите, что 50 пар сапог можно составить.
5. Докажите, что площадь треугольника, вписанного в параллелограмм, не превосходит половины площади последнего.
Более общий факт:
6. Докажите, что вершины максимального по площади k -угольника, вписанного в n -угольник, лежат на вершинах последнего.
7. Каждая диагональ пятиугольника отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей треугольников больше площади пятиугольника.
8. Внутри куба находится выпуклое тело, проекции которого на грани куба полностью их покрывают. Докажите, что минимальный объём этого тела — не менее $1/3$ объёма куба.
9. На окружности отмечено k чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$; при этом $a_1 = 1$, а сумма всех чисел равна нулю.
 - а) Докажите, что найдутся два числа, отличающиеся не менее чем на $4/k$.
 - б) Докажите, что найдётся число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее, чем на $8/k^2$. На какую наибольшую константу можно заменить число 8?
10. Какова максимальная площадь объединения n треугольников, вписанных в единичную окружность?
11. Известно, что $a_0 + a_1 \cdot \cos x + \dots + a_n \cdot \cos nx \geq -1$ при всех x . Докажите, что $a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq n$.
12. Докажите, что уравнение $x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_n = 0$ при любых $a_i \geq 0$ не может иметь двух положительных корней.
13. Округление числа — это замена его любым из целых, между которыми оно заключено. Докажите, что можно так округлить числа из таблицы $n \times k$, чтобы суммы по строкам и по столбцам также округлились.

⁵⁾ Сравните с только что разобранный теоремой.

(Данная задача принадлежит А. П. Савину. Её развитием послужил проект А. В. Шаповалова «Округление сумм» на X Летней конференции Турнира городов: X Летняя конференция Турнира Городов. Информационный центр Турнира городов. М.: МЦНМО, 1999. С. 45–49 (условия), 133–144 (решения) <https://www.turgor.ru/1ktg/1998/1ktg1998.pdf>.)

14. Докажите, что можно так округлить n произвольных чисел, чтобы сумма любого их множества после округления отличалась от его суммы до округления не более чем на $(n + 1)/4$.
15. Пусть $\sum x_i = 1$ и $\forall i \ x_i \geq 0$. Найдите максимум
- а) $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$;
 - б) $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$.
16. Положительные числа $a_1, \dots, a_k$ и $b_1, \dots, b_n$ таковы, что $a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_n$. Докажите, что в прямоугольной таблице $k \times n$ можно расставить неотрицательные числа так, чтобы суммы чисел в строках равнялись $a_1, \dots, a_k$, а в столбцах $b_1, \dots, b_n$, причём нулей в таблице будет не менее $(k - 1)(n - 1)$.
17. Дана невозрастающая последовательность положительных чисел $\{a_i\}$ такая, что $a_1 = 1/(2k)$, $\sum a_i = 1$. Докажите, что существует k чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод линейного варьирования используется и в задачах 1.6 (выпуск 1, с. 194, см. решение: выпуск 5, с. 221–223; выпуск 10, с. 274) и 24.11 (выпуск 24, с. 177). См. также: Канель А., Ковальджи А. Треугольники и катастрофы // Квант. 1992. № 11. С. 42–50; https://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Робертса_о_треугольниках.

Одна задача о треугольниках, вписанных в конику

А. А. Заславский, А. И. Сгибнев

Статья посвящена решению задачи 26.5 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 26, 2020, с. 266).

Задача 26.5. Даны коника Γ и её хорда AB . Найдите геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC .

(А. А. Заславский, А. И. Сгибнев)

Для начала отметим известные частные случаи задачи.

Предложение 1. Если Γ — окружность, то искомое ГМТ — окружность, симметричная Γ относительно AB .

Для доказательства достаточно заметить, что точка, симметричная ортоцентру H относительно AB , лежит на окружности Γ .

Предложение 2. Если Γ — равносторонняя гипербола, то искомое ГМТ совпадает с Γ .

Несколько различных доказательств этого факта приведены в книге [1]. Например, можно воспользоваться теоремой о пучке коник и тем фактом, что в уравнении коники сумма коэффициентов при квадратах координат равна нулю в точности тогда, когда коника является равносторонней гиперболой или парой перпендикулярных прямых.

Перейдём к общему случаю. Качественный ответ на вопрос задачи можно дать с помощью следующей леммы (доказательство см. [1, с. 123]).

Лемма 1. Пусть даны точки A, B и преобразование f , которое сопоставляет каждой прямой l , проходящей через A , прямую $f(l)$, проходящую через B , причём f проективно (т. е. сохраняет двойные отношения четвёрок прямых). Тогда геометрическим местом точек пересечения l и $f(l)$ является коника, проходящая через A и B . Если при этом $f(AB) = AB$, то коника распадается на две прямые, одна из которых совпадает с AB .

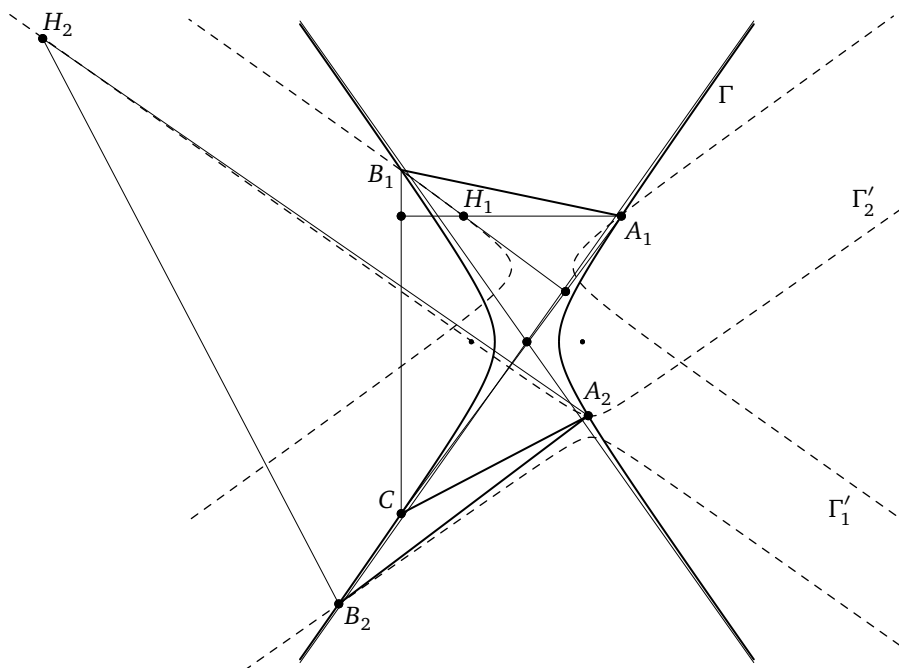


Рис. 1

Преобразование, ставящее в соответствие прямой AC прямую BC (где C — произвольная точка), проективно. Следовательно, соответствие между перпендикулярными прямыми AH и BH также проективно и из леммы 1 следует, что геометрическим местом ортоцентров также будет коника, обозначим её Γ' . Более того, асимптоты Γ' (действительные или мнимые) перпендикулярны асимптотам Γ , откуда получаем

Предложение 3. 1. Если Γ — эллипс, то Γ' — эллипс, подобный Γ , причём большие оси Γ и Γ' перпендикулярны.

2. Если Γ — гипербола и хорда AB перпендикулярна одной из её асимптот, то Γ' — прямая, перпендикулярная второй асимптоте (самую прямую AB в этом случае логично тоже включать в ΓMT , так как при стремлении точки C к бесконечности обе прямые AH , BH стремятся к AB). В остальных случаях Γ' — гипербола с асимптотами, перпендикулярными асимптотам Γ . Действительные оси Γ и Γ' могут при этом быть как параллельными, так и перпендикулярными (рис. 1).

3. Если Γ — парабола и хорда AB перпендикулярна её оси, то Γ' — прямая, параллельная AB (самую прямую AB в этом случае логично тоже включать в ΓMT). В остальных случаях Γ' — парабола с осью, перпендикулярной оси Γ (рис. 2).

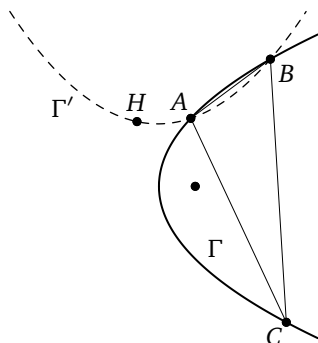


Рис. 2

Для более точного описания коники Γ' используем аналитический подход. Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс совпала с прямой AB . Тогда уравнение коники примет вид

$$(x - x_A)(x - x_B) + y(ax + by + c) = 0. \quad (1)$$

Ортоцентр H треугольника ABC имеет координаты (x_C, h) , где h находится из условия перпендикулярности прямых AH и BC , т. е.

$$(x_C - x_A)(x_C - x_B) + y_C h = 0.$$

Если $b = 0$ (т. е. у Γ есть асимптота, параллельная оси ординат), то $h = -(ax_C + c)$ и H лежит на прямой, перпендикулярной второй асимптоте (при $a = 0$ оси параболы). При $a \neq 0$ эта прямая пересекает AB в точке, являющейся проекцией центра гиперболы.

При $b \neq 0$ прямая $x = x_C$ вторично пересекает Γ в точке с координатами (x_C, y') и по теореме Виета $(x_C - x_A)(x_C - x_B) = by_C y'$. Следовательно, $h = -by'$, т. е. коника Γ' является образом Γ при сжатии к прямой AB . Заметим, что коэффициент сжатия, равный $-b$, не меняется при параллельном переносе системы координат, следовательно, размеры коники Γ' зависят только от направления хорды AB . Точнее, можно сформулировать следующее

Предложение 4. Пусть A_1B_1, A_2B_2 — две параллельные хорды коники Γ , а H_1, H_2 — ортоцентры треугольников A_1B_1C, A_2B_2C . Тогда вектор H_1H_2 не зависит от точки C (рис. 3).

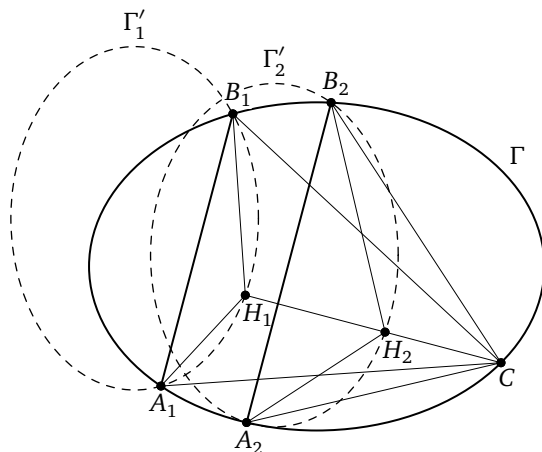


Рис. 3

Если Γ — не парабола, то коэффициент b в уравнении (1) равен отношению квадратов диаметров, параллельного и перпендикулярного хорде AB (для гиперболы один или оба диаметра могут быть мнимыми). Это позволяет получить ещё одно описание коники Γ' .

Предложение 5. *Проведём касательные к Γ , параллельную и перпендикулярную AB . Пусть P — точка их пересечения, Q — точка пересечения AB с диаметром, проходящим через P , $A'B'$ — хорда, проходящая через Q и перпендикулярная AB . Тогда поворотная гомотетия с центром Q , переводящая $A'B'$ в AB , переводит Γ в Γ' (рис. 4).*

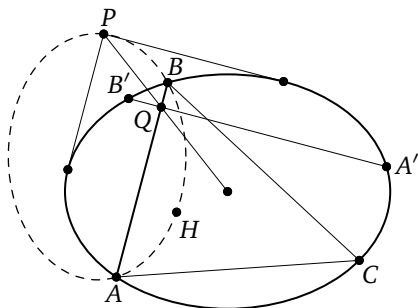


Рис. 4

Для гиперболы коэффициент поворотной гомотетии может оказаться мнимым. В этом случае направления действительных осей Γ и Γ' совпадают. Для параболы предложение 5 также будет справедливо, если заменить диаметр на прямую, параллельную оси.

В заключение отметим, что если Γ — окружность или равносторонняя гипербола, то коэффициент сжатия равен соответственно -1 и 1 , что позволяет получить альтернативные доказательства предложений 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ
 zaslavsky@mccme.ru

Алексей Иванович Сгибнев, школа «Интеллектуал» (Москва)
 a.i.sgibnev@gmail.com

Об инвариантах равноставленности

И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов

Многие задачи решаются с помощью построения полной системы инвариантов, характеризующих некоторый тип математических объектов. Например, это понятие оказывается полезным в следующей задаче, опубликованной в «Математическом просвещении» (сер. 3, вып. 26, 2020, с. 266).

Задача 26.6. Две фигуры на плоскости называются *равноставленными*, если одну из них можно *перекроить* в другую. Это означает, что фигуру можно разрезать на конечное число частей, из которых можно сложить вторую фигуру (части можно параллельно переносить и поворачивать, но не переворачивать на другую сторону). Если это можно сделать, перенося части параллельно самим себе, но не поворачивая, то фигуры называются *T-равноставленными*. Для пространственных тел определения аналогичны.

- а) Даны два многоугольника на плоскости (не обязательно выпуклых). При каком условии они *T-равноставлены*? (Фольклор)
- б) Докажите, что любые два параллелепипеда одинакового объёма *T-равноставлены*. (Г. Хадвигер)
- в) Даны две фигуры на плоскости, их границы — участки окружностей и отрезки. При каком условии эти фигуры *равноставлены*? Тот же вопрос, когда к частям фигур можно дополнительно применять гомотетии. (Фольклор)
- г) Можно ли круг перекроить в выпуклую фигуру, отличную от круга? Можно ли две выпуклые фигуры, чьи границы состоят из участков окружностей, перекроить в одну? (И. А. Иванов-Погодаев)

Решение. а) Укажем полную систему инвариантов, которая определяет *T-равноставленность*. Прежде всего, это *площадь*. Далее, с каждым ориентированным направлением $\vec{L}$ свяжем *сумму длин сторон фигуры*,

Работа поддержана грантом Israel science foundation № 1994/20.

параллельных $\vec{L}$, со знаком: для стороны, лежащей слева от фигуры, если смотреть в направлении $\vec{L}$, знак будет плюс, в противном случае минус. Легко видеть, что стороны, параллельные $\vec{L}$, при разрезании фигуры возникают парами равной длины с противоположными знаками. Кроме того, наша сумма не меняется при параллельном переносе. Поэтому она — инвариант. Остаётся показать, что площадь вместе с набором указанных сумм по всем $\vec{L}$ образует полную систему инвариантов.

Выберем ортогональную систему координат XOY . Направления, параллельные осям координат, будем называть *осевыми*, а не параллельные — *косыми*. Считаем, что все изначальные направления сторон косые, так что инварианты, связанные с осевыми направлениями, — нулевые. Преобразуем фигуру следующим образом.

Шаг 1. Добиваемся, чтобы в каждой из фигур у косых участков не было общих вершин (вначале все вершины таковы). Если такая вершина есть, вырезаем около границы маленький прямоугольник со сторонами осевых направлений, диагональ которого имеет направление одного из участков, примыкающих к этой вершине. Разрезав прямоугольник по этой диагонали, приложим один из треугольников к данному участку.

Шаг 2. Для данного $\vec{L}$ берём в каждой фигуре граничный участок минимальной длины, параллельный $\vec{L}$, соединяем его концы близкой ломаной внутри фигуры со звеньями осевых направлений (для этого нам нужен шаг 1 — иначе два соседних граничных участка могут образовать острый угол, в котором нет осевых направлений, вырезаем полученную полоску и прикладываем к звену противоположного знака. Таким образом мы уменьшаем суммарную длину косых звеньев (сохраняя свойство, полученное на первом шаге). В итоге мы добьёмся того, что все граничные косые звенья у обеих фигур Φ и Φ' — одного знака.

Шаг 3. Для данного $\vec{L}$ берём в паре фигур Φ и Φ' звено s минимальной длины среди звеньев, параллельных $\vec{L}$ (пусть это звено фигуры Φ). Находим звено того же направления в фигуре Φ' и отмечаем на нём отрезок s' , равный s . Соединяем концы каждого из звеньев s и s' близкими к ним ломаными b и b' соответственно, имеющими звенья осевых направлений и такими, чтобы фигурки, ограниченные контурами sb и $s'b'$, были равны (для этого нам снова нужен шаг 1 — если два граничных звена образуют острый угол, не содержащий осевого направления, у нас ничего не получится). Выбрасывая эти фигурки, мы сохраним итог первого и второго шага и уменьшим число косых граничных фрагментов. В итоге мы добьёмся того, что все косые звенья у обеих фигур Φ и Φ' исчезнут.

Шаг 4. Итак, мы избавились от косых участков. Каждая фигурка без косых участков на границе разбивается на прямоугольники со сторонами,

параллельными осям координат. Остаётся проверить, что каждый набор из таких прямоугольников превращается в квадрат. Квадраты, полученные из фигурок Φ и Φ' , окажутся равными в силу равенства площадей.

Возьмём квадрат нужной площади и разрежем его параллельно одной из сторон на прямоугольники, соответственно равновеликие данным. Достаточно показать, что равновеликие прямоугольники T -равносоставлены. Это доказано для любых равновеликих параллелограммов в статье С. Б. Гашкова «Разрезы и распилы» в настоящем выпуске (с. 216, задача 44).

Замечание. Утверждение п. а) обобщается на многомерный случай. Только инвариантом теперь является *флаг*: направление грани, направления граней этой грани, направления граней этой грани и т. д.

б) Решение этого пункта содержится в статье С. Б. Гашкова «Разрезы и распилы» опубликованной в этом выпуске (с. 219–221).

в) Решение похоже на решение п. а). Снова убеждаемся, что величина «сумма длин выпуклых дуг минус сумма длин вогнутых дуг радиуса r » является инвариантом для любого r . Добавим к этой системе инвариантов *площадь* и покажем, что *полученная система инвариантов полна*.

Шаг 1. Разрезав, если нужно, фигуры Φ и Φ' , считаем, что у каждой из фигур есть прямолинейные участки границы. Пусть у одной из фигур есть и граничная дуга. Вырежем маленький прямоугольник (у прямолинейного участка границы), противоположные вершины которого соединены такой же дугой. Разрежем его по этой дуге и приложим к граничной дуге нужную половинку прямоугольника. Обработав все такие контакты, считаем, что у *граничных дуг нет общих вершин*.

Шаг 2. Для данного r берём дугу минимальной длины радиуса r , соединяем её концы близкой ломаной (для этого нам нужен шаг 1 — иначе две граничные дуги равного радиуса могут касаться и у нас ничего не получится) и прикладываем к дуге противоположного типа. Таким образом мы уменьшаем количество дуг (сохраняя свойство, достигнутое на первом шаге). В итоге мы добьёмся того, что *все граничные дуги у обеих фигур Φ и Φ' — одного знака*.

Шаг 3. Для данного r берём в паре фигур Φ и Φ' дугу s минимальной длины среди выпуклых или вогнутых радиуса r (пусть это дуга фигуры Φ), находим дугу того же направления в фигуре Φ' и откладываем на ней дугу той же длины s' . Соединяем концы каждой из дуг s и s' близкими к ним ломаными b и b' соответственно, так чтобы фигурки ϕ и ϕ' , ограниченные контурами sb и $s'b'$, были равны. Для этого нам также нужен шаг 1: если две граничные дуги равного радиуса касаются, образуя остриё, то у нас

ничего не получится. Выбрасывая фигурки ϕ и ϕ' , мы сохраним итог первого и второго шага и уменьшим число криволинейных граничных фрагментов. В итоге мы добьёмся того, что *все граничные дуги у обеих фигур Φ и Φ' исчезнут*.

Шаг 4. Итак, мы избавились от криволинейных участков. Осталось применить знаменитую *теорему Бойяи — Гервина*, утверждающую, что *равновеликие фигуры с границами из прямолинейных участков равносоставлены*.

В ситуации, когда разрешены *гомотетии*, можно скопировать доказательство с небольшими измерениями, но мы сведём задачу к уже полученному результату. Для этого действуем так. Выполняем *шаг 1*. Далее режем каждую фигуру Φ_i на фигурки с единственным криволинейным участком границы и хотя бы одну фигурку с границей из прямолинейных участков.

Теперь гомотетией приведём фигурки с криволинейным участком к одному и тому же радиусу кривизны. Все граничные инварианты у преобразованных фигурок Φ_i совпадут. Осталось разобраться с площадями. Для этого выберем из разбиения каждой Φ_i по одной фигурке ϕ_i с только прямолинейными границами. Растянув их подходящим образом, обеспечим совпадение площадей, не изменив остальные инварианты. Остаётся воспользоваться уже решённой задачей о полноте системы инвариантов для евклидовых движений без гомотетий.

г) Покажем, что *круг нельзя перекроить в выпуклую фигуру Φ , отличную от круга*. Пусть это возможно. В силу только что доказанного, граница фигуры будет составлена из дуг, образующих полную окружность, и прямолинейных участков (если бы таких участков не было, выпуклая фигура являлась бы кругом). При обходе дуг касательный вектор поворачивается в сумме на 2π . На прямолинейных участках он не поворачивается, а на стыках участков может поворачиваться только в одну сторону ввиду выпуклости фигуры. Но суммарный поворот при обходе выпуклой фигуры равен 2π , поэтому на стыках участков касательный вектор не поворачивается, т. е. соседние участки имеют на стыке одинаковое направление.

Убедимся, что площадь Φ строго больше площади круга. Для этого снимем с Φ и с круга «шкуру» толщины ε . Возникнет фигура с тем же свойством, при этом около криволинейных участков границы снимется столько же, сколько с круга (с учётом того, что соседние граничные участки касаются). Ещё что-то снимется с прямолинейных участков, т. е. в итоге снимется больше, чем с круга. Процесс продолжается до исчезновения граничных участков. К этому моменту от фигуры отнимется строго больше чем площадь круга. Поэтому и площадь фигуры строго больше.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически мы доказали, что если у выпуклой фигуры граница состоит из прямолинейных участков и полного набора дуг круга, то фигура есть сумма по Минковскому круга и выпуклого множества (например, отрезка).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Решение задачи вытекает также из формулы, позволяющей по границе выпуклой фигуры определять её площадь. Разобьём границу фигуры на бесконечно малые участки ds_i . Тогда её площадь будет равна

$$\sum_{ij} |ds_i \wedge ds_j| \quad \text{или} \quad \iint d\vec{s} \wedge d\vec{l},$$

где $\wedge$ обозначает *внешнее произведение*. О понятии внешнего произведения см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Внешняя_алгебра, а также: Каминский Дж. Й., Канель-Белов А. Я., Тайхер М. «Задача о 3-секущих» (настоящий выпуск, с. 171–174).

Для многомерного случая общая формула имеет вид

$$V = \frac{1}{2^n} \iint \dots \int |\wedge d\vec{n}_i|.$$

Приведём теперь *примеры*, когда две выпуклые фигуры, чьи границы состоят из участков окружностей, можно перекроить в одну.

ПРИМЕР 1. Разрезав криволинейный шестиугольник с дугами в качестве сторон, можно сложить криволинейный «квадрат» и линзу (рис. 1).

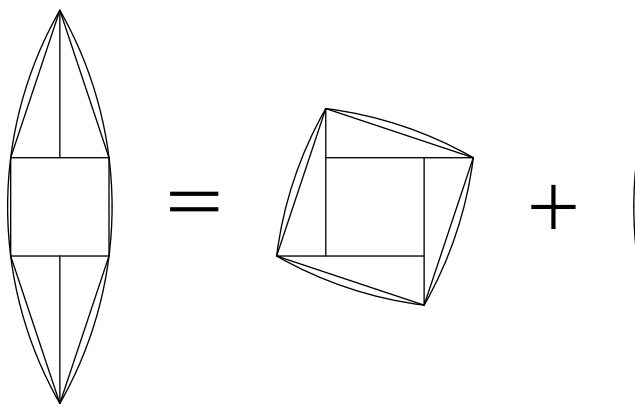


Рис. 1

ПРИМЕР 2. Рассмотрим трапецию $ABCD$, у которой $AB = BC = CD = 1$ и площадь равна площади правильного треугольника со стороной 1. Известно, что из любого многоугольника, разрезав его на подходящие части, можно сложить любой другой многоугольник той же площади; разрежем

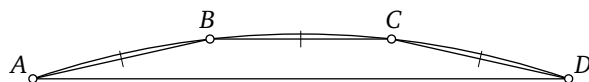


Рис. 2

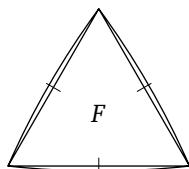


Рис. 3

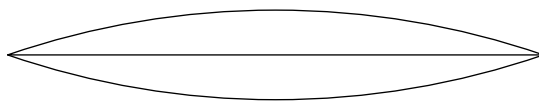


Рис. 4

трапецию на несколько многоугольников и сложим из них правильный треугольник. Проведём теперь дугу окружности через вершины трапеции. Отрезав от сегмента, ограниченного дугой и отрезком AD , три маленьких сегмента по сторонам трапеции AB , BC , CD (рис. 2) и приставив их к сторонам правильного треугольника, получим выпуклую фигуру F (рис. 3), ограниченную тремя дугами окружностей. Тогда фигуру, составленную из двух таких сегментов, симметричных относительно общей хорды (рис. 4), можно разрезать на части и сложить из них две фигуры, равные F .

Пример 3 (набросок). Основная идея построения — сначала создать два многоугольника, множество сторон которых эквивалентно множеству сторон другого многоугольника.

Рассмотрим два правильных 10-угольника с единичными сторонами и правильный 20-угольник также с единичными сторонами. Нетрудно видеть, что площадь 20-угольника превосходит суммарную площадь 10-угольников. Возьмём 20-угольник за две противоположные стороны и будем тянуть в противоположных направлениях, не меняя длины сторон, а меняя лишь величины углов. Пусть углы вершин, за которые мы тянем, уменьшаются, а остальные углы увеличиваются. Очевидно, площадь такого всё более сужающегося 20-угольника уменьшается, поэтому в какой-то момент она сравняется с суммарной площадью двух 10-угольников. В этот момент мы процесс заканчиваем и выбираем радиус окружности настолько большим, чтобы её сегменты с хордой 1, приклеенные к сторонам 20-угольника и 10-угольников, не нарушали выпуклость. Для обклеивания 20-угольника и 10-угольников понадобится одинаковый набор таких сегментов. Осталось применить теорему о равносоставленности любых многоугольников одинаковой площади.

Замечание 3. Приведём подборку задач на полноту системы инвариантов.

1. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета? Докажите, что для проверки этой возможности достаточно совпадения попарных разностей количеств хамелеонов разных цветов по модулю 3.
2. По кругу стоят 44 дерева, на каждом — по чижу. За каждую секунду один чиж смещается на 1 по часовой стрелке, а другой — против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве? Когда от одного расположения чижей можно перейти к другому?
3. В клетках квадратной таблицы $m \times m$ расставлены плюсы и минусы. Известно, что в каждом подквадратике 2×2 стоит чётное число плюсов. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что все знаки можно сделать плюсами.
4. Имеется несколько лампочек и несколько кнопок, каждая кнопка соединена с некоторыми из лампочек. Нажатие кнопки меняет состояние соединённых с ней лампочек на противоположное. Известно, что для каждого набора лампочек найдётся кнопка, соединённая с нечётным числом лампочек из данного набора. Докажите, что все лампочки можно погасить.
5. Имеется несколько лампочек и несколько кнопок, каждая кнопка соединена с некоторыми из лампочек. Нажатие кнопки меняет состояние соединённых с ней лампочек на противоположное. Назовём инвариантом такой набор лампочек, что каждая кнопка соединена с чётным числом лампочек из данного набора. Докажите, что если изначально в каждом инварианте горит чётное число лампочек, то все лампочки можно погасить.

Илья Анатольевич Иванов-Погодаев, МФТИ
ivanov-pogodaev@mail.ru

Алексей Яковлевич Канель-Белов, университет Бар-Илана
kanel@mccme.ru

Разрезы и распилы

С. Б. Гашков

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Речь пойдёт о некоторых типах задач на разрезание плоских фигур и распиливание пространственных тел. Задач на разрезание очень много. Значительная их часть — это головоломки (задачи частного характера с искусственными формулировками в виде, скажем, различных ограничений или с использованием экзотических фигур). В большом количестве они представлены в сборниках головоломок и занимательных задач (см., например, [8, 11, 12, 21, 31]), но встречаются также в сборниках задач по геометрии (например, [13]) и в сборниках олимпиадных задач (см. [14–16]).

Далее рассматриваются некоторые задачи, представляющие математический, а иногда и определённый прикладной интерес. Они, как правило, имеют достаточно общий характер. Основное внимание уделяется задачам на преобразование фигур с помощью полигональных разрезов (хотя некоторые приведённые далее утверждения верны и для криволинейных разрезов). К их числу относятся, например, задача Бойяи — Гервина о превращении одного многоугольника в другой и её частные случаи. Некоторые из них известны с незапамятных времён и, вероятно, возникли (одновременно с самой геометрией) как ответы на практические вопросы (например, о перекройке кусков материи или земельных участков). Поэтому такие задачи естественно формулировать в форме оптимизационных задач.

Напрашиваются различные варианты их постановки. Можно минимизировать число частей, на которые разрезается одна фигура для преобразования в другую путём перемещения этих частей. Можно также минимизировать не число частей, а число прямолинейных разрезов. Тогда опять возможны различные варианты:

- когда разрезы делаются последовательно и очередной кусок режется по прямой от края до края, причём полученные части не сдвигаются

до окончания выполнения всех разрезов («гильотинные» разрезы или разрезы стеклорезом; в этом случае число получившихся частей на единицу больше числа разрезов — известная задача для младших школьников о числе разломов шоколадки);

- когда разрезы делаются произвольно, т. е. общие границы получающихся частей могут быть ломаными линиями и под числом разрезов понимается общее число их звеньев, не лежащих на границе фигуры (например, в задачах 3, 5);
- в предыдущем варианте можно выделить отдельно случай, когда любые два соприкасающихся куска имеют только общую вершину или общая часть их границ является отрезком («стеклорезное» разрезание обладает таким свойством, но не любое разрезание с таким свойством — «стеклорезное»).

Во всех вариантах можно разрешить передвигать части перед тем, как сделать следующий разрез, тогда число вариантов удвоится. Ещё один вариант возникает в случае «стеклорезных» разрезов: если два или несколько разрезов вдоль одной прямой можно заменить одним разрезом (рассекающим несколько кусков сразу), то его один и надо рассматривать вместо упомянутых нескольких.

Возможно, в некоторых случаях больший прикладной интерес представляет задача минимизации не числа разрезов или количества частей, а их суммарной длины (например, при перераспределении земельных участков или при перекройке кусков ткани).

Задачи о преобразовании фигур путём разрезания можно перенести и в трёхмерное, и даже в многомерное пространство. Часть из них представляют теоретический интерес и оказались очень трудными (о таких задачах идёт речь в третьей проблеме Гильберта, см., например, [3, 25]). Некоторые из таких задач имеют приложения в теории меры (см. [22]).

Задачи о разрезании можно рассматривать и в теоретико-множественной постановке, а именно, искать разрезание на части, которые не пересекаются как множества (в первоначальной формулировке разные части могли иметь частично общую границу). Такая постановка не имеет практического смысла (получающиеся в ней части являются не многоугольниками, а иногда довольно сложными точечными множествами), но любопытна с теоретической точки зрения (см. [23]). Минимизировать в ней можно только число частей. К таким задачам относится знаменитый парадокс Банаха — Тарского для многомерного пространства (см., например, [7, 29, 37, 39, 41]). На плоскости этого парадокса нет, и те же авторы доказали соответствующий вариант теоремы Бойяи — Гервина.

§ 2. ПЕРЕКРОЙКА СКАТЕРТИ В РЕМЕНЬ

Сначала предложим читателю несколько несложных задач на эту тему.

Задача 1. Превратите прямоугольник с отношением сторон 4:1 в квадрат, разрезав его на две части.

Задача 2. Преобразовать в квадрат прямоугольник со сторонами 1×2 , 1×3 , 2×3 , 1×5 , 2×5 , 4×9 .

Задача 3. Как превратить прямоугольник размера 6×60 в прямоугольник размера 5×72 , 4×90 , 3×120 , разрезав его на две части?

В каком смысле понимать оптимальность перекройки? Можно минимизировать число частей, появившихся при разрезании, но мы рассмотрим задачу о минимизации суммарной длины разрезов. Начнём со следующей задачи, тридцать лет назад предложенной автором на Московскую математическую олимпиаду.

Задача 4 (ЛП Московская математическая олимпиада, 1989 г., 10 класс, задача 5). Вычислить с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

Решение можно найти в [16], но для удобства читателя ниже приводятся два его варианта.

Первое решение. Обозначим через $L(a)$ наименьшую суммарную длину разрезов, необходимую для перекройки единичного квадрата в прямоугольник размера $a \times 1/a$, $a > 1$ (тонкий вопрос о достижимости минимума далее не существует и не обсуждается). Докажем, что

$$a + \frac{1}{a} - 2 \leq L(a) \leq a + \frac{1}{a},$$

что даёт решение задачи.

Нижняя оценка. Пусть квадрат разрезан на n многоугольников M_i с периметрами p_i , $i = 1, \dots, n$. Очевидно, сумма всех p_i равна $4 + 2L(a)$, так как эта сумма равна периметру квадрата, т. е. 4, плюс удвоенная суммарная длина разрезов. Действительно, в ней длина каждой стороны многоугольника M_i учитывается один раз, если сторона лежит на границе квадрата, и два раза, если она лежит внутри квадрата. В последнем случае она является общей стороной двух соседних многоугольников M_i , M_j , поэтому лежит на линии разреза и учитывается в его суммарной длине. Перемещая многоугольники M_i (без пересечений друг с другом по внутренним точкам), по условию можно составить из них прямоугольник размера $a \times 1/a$ с периметром $2a + 2/a$. Так как при перемещениях

периметры многоугольников не меняются, повторяя уже проведённое рассуждение, получаем, что сумма всех p_i равна $2a + 2/a + 2L'(a)$, где $L'(a)$ — сумма длин разрезов прямоугольника, которые дают указанное выше разбиение его на сдвиги многоугольников M_i . Отсюда

$$4 + 2L(a) = 2a + \frac{2}{a} + 2L'(a),$$

т. е.

$$L(a) = a + \frac{1}{a} + L'(a) - 2 > a + \frac{1}{a} - 2$$

(можно доказать, что если $L'(a)$ — наименьшая суммарная длина разрезов, необходимая для перекройки прямоугольника размера $a \times 1/a$ в единственный квадрат, то

$$L(a) = a + \frac{1}{a} + L'(a) - 2,$$

но это далее не понадобится).

Верхняя оценка. Достаточно указать разрезание с длиной $a + 1/a$. Его можно получить следующим образом (рис. 2). Это разрезание, по-видимому, впервые найдено известным французским математиком и историком математики Жаном-Этьеном Монтюкла (1725–1799) (об этом и о многом другом автор узнал, случайно купив книжку [21], впервые изданную ещё в начале двадцатого века, но переизданную только в 2000 г.).

Составим из $\lfloor \sqrt{a^2 - 1} \rfloor + 1$ единичных квадратов прямоугольник размера $1 \times \lfloor \sqrt{a^2 - 1} \rfloor + 1$. Наложим на него параллелограмм единичной площади со сторонами 1 и a так, чтобы единичная сторона совпала с той



Рис. 1. Жан-Этьен Монтюкла (1725–1799)

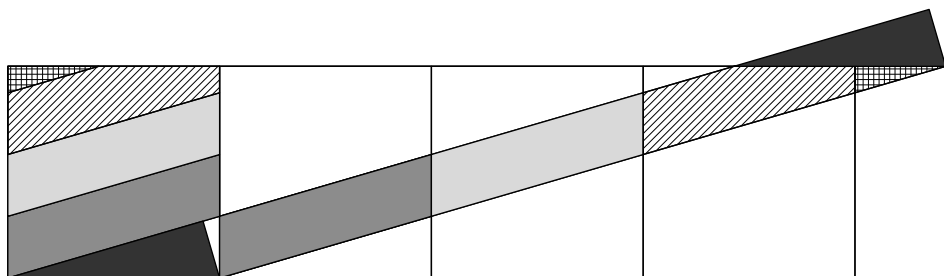


Рис. 2. Превращение единичного квадрата в прямоугольник размера $a \times 1/a$ с суммарной длиной разрезов $a + 1/a$

стороной самого левого из квадратов, составляющих прямоугольник, которая лежит на длинной стороне прямоугольника, а другая единичная сторона лежала на противоположной стороне прямоугольника (вылезающая за его пределы, если $\sqrt{a^2 - 1}$ — нецелое число). Квадраты, из которых составлен прямоугольник, разрезают указанный параллелограмм на $\lfloor \sqrt{a^2 - 1} \rfloor - 1$ равных параллелограммов (если $a < \sqrt{2}$, то их вообще не будет), один пятиугольник и два треугольника (если $\sqrt{a^2 - 1}$ — целое число, пятиугольника не будет). Параллельно перенося указанные части параллелограмма, можно составить из них единичный квадрат (на рисунке он слева, одинаковые части покрашены одним цветом). Сумма длин разрезов единичного квадрата, после которых из его частей путём параллельного переноса можно составить указанный параллелограмм, равна длине боковой стороны параллелограмма a (это верно при любом $a > 1$). Чтобы превратить параллелограмм в данный прямоугольник, достаточно провести ещё один разрез длины $1/a$ вдоль высоты параллелограмма, опущенной на боковую сторону так, чтобы эта высота разрезала треугольную часть параллелограмма на два подобных ей прямоугольных треугольника. Число частей, возникающих при указанном разрезании, равно $\lfloor \sqrt{a^2 - 1} \rfloor + 3$ или на единицу меньше, если $\sqrt{a^2 - 1}$ — целое число. По условию задачи $a^2 + 1/a^2 = 100^2$, значит, число частей в этом разрезании равно 102.

ВТОРОЕ РЕШЕНИЕ. Есть и другой способ разрезания (рис. 3).

Пусть $n < a < n + 1$. Параллельными прямыми разрежем единичный квадрат на $n - 1$ прямоугольников размера $1/a \times 1$ и один прямоугольник размера $b \times 1$, $b = 1 - (n - 1)/a > 1/a$. Суммарная длина разрезов равна

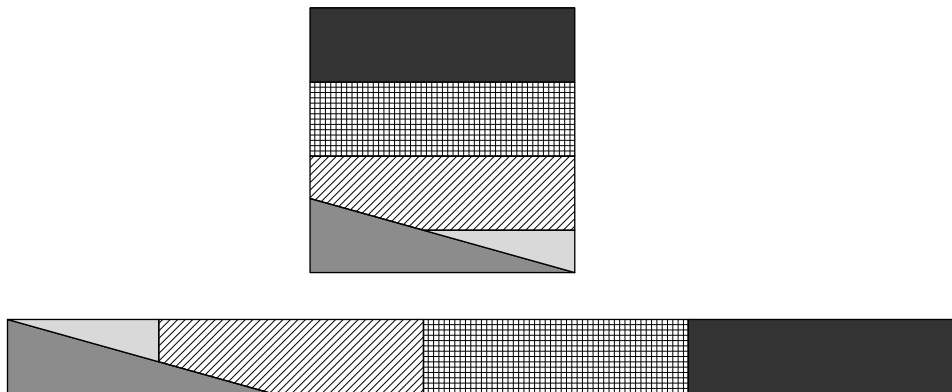


Рис. 3. Превращение единичного квадрата в прямоугольник размера $a \times 1/a$ с суммарной длиной разрезов $a + \sqrt{1 + 1/a^2} - 1$

$n - 1$. Последний прямоугольник разрежем на два треугольника и пятиугольник, проведя два разреза, один из которых отсекает прямоугольный треугольник с катетами 1 и $1/a$ (длина разреза равна его гипотенузе $\sqrt{1 + 1/a^2}$), а второй проводится параллельно единичной стороне и отсекает от оставшейся трапеции треугольник, подобный уже отрезанному, с катетами

$$b - \frac{1}{a} = 1 - \frac{n}{a}, \quad a\left(b - \frac{1}{a}\right) = a\left(1 - \frac{n}{a}\right) = a - n < 1$$

(длина разреза равна катету $a - n$). Сдвигая параллельно полученные части, составим из них прямоугольник с высотой $1/a$ и длиной $1 + (a - n) + (n - 1) = a$. Суммарная длина разрезов равна

$$n - 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + (a - n) = a - 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}.$$

Так как $\sqrt{1 + 1/a^2} < 1 + 1/a$ (гипотенуза меньше суммы катетов), суммарная длина указанных разрезов чуть меньше, чем в первом решении, и число полученных частей $n + 2$ на одну меньше (в случае, если $\sqrt{a^2 - 1}$ — целое, число частей совпадает). В случае целого a очевидное разрезание на a равных прямоугольников имеет суммарную длину $a - 1$, т. е. ещё меньше.

Указанную нижнюю оценку можно усилить: $L(a) \geq a - 1$ для любого $a > 1$. А для числа частей, полученных при разрезании, нижней оценкой является a . Обе оценки достигаются при целом a .

Сначала покажем, что справедлива

Лемма о транспозиции. Пусть многоугольник периметра p_1 с помощью разрезов суммарной длины l_1 разрезан на n частей, после перемещения которых получен многоугольник периметра p_2 . Тогда последний многоугольник можно разрезать с помощью разрезов суммарной длины $l_2 = l_1 + (p_1 - p_2)/2$ на n частей, после перемещения которых можно получить исходный многоугольник периметра p_1 .

Доказательство. Пусть периметры получившихся фигур Q_i равны q_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда справедливо равенство

$$q_1 + \dots + q_n = p_1 + 2l_1,$$

так как длины частей границ фигур Q_i , лежащих на границе многоугольника p_1 , учитываются в сумме один раз, а длины частей их границ, лежащих на линиях разреза, — два раза.

Так как при перемещении фигур их периметры не меняются, справедливо аналогичное равенство

$$q_1 + \dots + q_n = p_2 + 2l_2,$$

откуда следует, что

$$p_1 + 2l_1 = p_2 + 2l_2.$$

Доказательство очевидно справедливо также для криволинейных разрезов и для криволинейных фигур. $\square$

Следствие. Если l_i — минимальная суммарная длина разрезов, нужных, чтобы перекроить данный многоугольник M_i периметра p_i в данный многоугольник (той же площади, конечно) периметра p_{3-i} , $i = 1, 2$, то справедливо равенство

$$p_1 + 2l_1 = p_2 + 2l_2.$$

Доказательство. Предполагаем, что минимум длины разреза существует, в противном случае в формулировке следствия надо минимум заменить точной нижней гранью.

Пусть минимум l_1 достигается на некотором разрезе, который перекраивает M_1 в M_2 . Тогда согласно лемме существует разрез длины $l_2 = l_1 + (p_1 - p_2)/2$, который перекраивает M_2 в M_1 . Если бы существовал разрез меньшей длины l'_2 для той же цели, то согласно той же лемме существовал бы разрез длины

$$l'_1 = l'_2 + \frac{p_2 - p_1}{2} < l_2 + \frac{p_2 - p_1}{2} = l_1,$$

перекраивающий M_1 в M_2 , что невозможно.

Докажем теперь, что $L(a) \geq a - 1$ для любого $a > 1$. Пусть разрезами суммарной длины $L(a)$ можно разрезать единичный квадрат на части Q_i , $i = 1, \dots, n$, из которых после перемещения составлен прямоугольник $a \times 1/a$, $a > 1$. Перемещённые фигуры Q_i по-прежнему обозначаем Q_i . Обозначим через q_i суммарную длину частей границы фигуры Q_i , не лежащих на границе прямоугольника $a \times 1/a$. Очевидно, $q_1 + \dots + q_n$ равно удвоенной длине $l(a)$ разреза, делящего прямоугольник $a \times 1/a$ на части Q_i . Согласно лемме справедливо равенство

$$2L(a) + 4 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + 2l(a),$$

откуда $L(a) = a + 1/a - 2 + l(a)$. Докажем, что $l(a) \geq 1 - 1/a$, откуда будет следовать неравенство $L(a) \geq a - 1$. Очевидно, что при целом a указанная оценка точная (она достигается, если делать разрезы параллельно меньшей стороне прямоугольника на равных расстояниях друг от друга). Обозначим через s_i суммарную длину частей границы фигуры Q_i , лежащих на сторонах прямоугольника длины $1/a$ (возможно, $s_i = 0$), а через h_i — ширину минимальной полосы, накрывающей эту фигуру и имеющей края, параллельные стороне прямоугольника длины a . Рас-

смотрим две линии, ограничивающие фигуру Q_i вместе с краями указанной полосы. Очевидно, длина каждой из этих линий не меньше h_i , так как концы линии лежат на противоположных краях полосы и поэтому расстояние между ними не меньше h_i . Следовательно, $q_i \geq 2h_i - s_i$, так как указанные линии лежат на границе фигуры Q_i и за исключением своих частей суммарной длины s_i не лежат на границе прямоугольника $a \times 1/a$. Значит,

$$2l(a) = q_1 + \dots + q_n \geq 2(h_1 + \dots + h_n) - (s_1 + \dots + s_n) \geq 2(h_1 + \dots + h_n) - \frac{2}{a},$$

так как $s_1 + \dots + s_n \leq 2/a$ (эти части не пересекаются и лежат на сторонах длины $1/a$). Остаётся доказать, что $h_1 + \dots + h_n \geq 1$. Каждая из указанных полос ширины h_i накрывает фигуру Q_i . Так как после перемещения этих фигур они составляют единичный квадрат, указанные полосы после соответствующего перемещения покрывают тот же квадрат, а значит, и вписанный в него круг единичного диаметра.

Но, согласно известной теореме Тарского, сумма ширин дощечек, накрывающих круглое отверстие не меньше его диаметра. Значит,

$$h_1 + \dots + h_n \geq 1$$

и неравенство $L(a) \geq a - 1$ доказано. Заметим ещё, что $h_i \leq 1/a$, так как каждый Q_i накрывается полосой ширины $1/a$, поэтому

$$\frac{n}{a} \geq h_1 + \dots + h_n \geq 1,$$

откуда $n \geq a$. □

Для удобства читателя далее приводится доказательство теоремы Тарского о дощечках (приписываемое известному польскому математику Гуго Штейнгаузу). Это доказательство можно найти в [9, с. 75–100], в [17, с. 214–218] и в [20], там же приведены доказательства обобщающей теореме Тарского теореме Банга, высказанной Тарским в качестве гипотезы, а также много других интересных фактов.

Рассмотрим сферу единичного диаметра и её проекцию на экваториальное сечение (т. е. на круг того же диаметра, являющийся сечением шара плоскостью, проходящей через его центр). Пусть этот круг покрыт n полосами ширины h_i , $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим область сферы, проектирующуюся на полосу ширины h_i . Эта область является сферическим слоем (кольцом) ширины h_i . Согласно известной теореме элементарной стереометрии (известной ещё Архимеду), площадь сферического кольца радиуса R и ширины h равна $2\pi Rh$, а площадь всей сферы (являющейся слоем ширины $2R$) равна $4\pi R^2$. При $R = 1/2$ получаем, что площадь сферы равна π , а площади колец ширины h_i равны πh_i . Очевидно, указанные

кольца накрывают в совокупности сферу, так как их проекции (полосы) накрывают круг (экваториальное сечение). Поэтому сумма их площадей $\pi(h_1 + \dots + h_n)$ не меньше площади сферы, равной π .

§ 3. АЛЬФРЕД ТАРСКИЙ И РАЗРЕЗАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Выдающийся польский математик, логик и философ Альфред Тарский (живший потом в США), известный, например, своей теоремой об «арифметической невыразимости арифметической истины» (т. е. о том, что множество всех истинных формул арифметики само не является арифметическим множеством), в молодости преподавал геометрию и активно интересовался геометрией всю жизнь.

Например, он разработал свою (компактную и удобную) аксиоматику евклидовой стереометрии, основанную только на одном тернарном отношении $J(A, B, C)$, которое истинно тогда и только тогда, когда треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). Тарский показал, что аксиоматику планиметрии нельзя построить, используя только это отношение (см. об этом в [18]). Вместе с Банахом он открыл знаменитый парадокс Банаха — Тарского и доказал теоретико-множественную версию теоремы Бойяи — Гервина (см. § 8).



Рис. 4. Альфред Тарский (1901–1983)

Из статьи [9] автор узнал, что Тарский в молодёжном польском математическом журнале в 30-е годы опубликовал статью [40], в которой оценил по порядку точно число частей, на которые надо разрезать квадрат, чтобы превратить его в равновеликий прямоугольник с отношением сторон $a^2 : 1$. Чуть позже Х. Мёзе [35] уточнил оценку Тарского и получил точную формулу в случае целого a (англ. перевод этих статей см. в [30, с. 135–151]). В его доказательстве в неявном виде и появилась впервые теорема Тарского о покрытии круга дощечками.

Обобщением задачи 3 является

Задача 5 (Тарский). Докажите, что прямоугольник с отношением сторон $(n + 1)^2 / n^2$, где n — целое число, можно превратить в квадрат, сделав один ломаный разрез (который делит прямоугольник на две части).

УКАЗАНИЕ. Общая граница двух частей будет ломаной с углами поворота 90 градусов.

§ 4. ПЕРЕКРОЙКА ПРОСТЫНИ В ПЛАТКИ

Первым эту задачу, по-видимому, изучал персидский математик Абул-Вафа (940–998). Она имеет понятный прикладной смысл: как сшить из трёх маленьких платков один большой? Обратная задача тоже представляет прикладной интерес.

Задача 6 (Абул-Вафа). Разрежьте квадрат на 9 частей и сложите из них три равных квадрата.

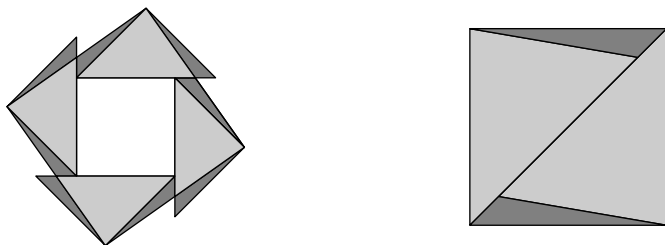


Рис. 5. Превращение квадрата в три равных квадрата и обратно способом Абул-Вафы

На рис. 5 справа показано, как разрезать два квадрата на 4 части каждый (эти разрезания одинаковы), при этом третий квадрат резать не надо. В обратном преобразовании квадрат режется на те же 9 частей, но число разрезов уже не 6, а девять. Способ Абул-Вафы очень красив, но не оптимален ни по числу частей, ни по суммарной длине разрезов. В этом можно убедиться, решив следующую задачу.

Задача 7 (Г. Дьюдени). Как разрезать квадрат на 6 частей и сложить из них три равных квадрата?

Решение этой задачи известного английского составителя головоломок Дьюдени (1843–1930) можно найти в его книге [8]. На самом деле оно получается, если переделать квадрат в прямоугольник с отношением сторон 3 : 1 способом, указанным во втором решении задачи 4, а потом разрезать прямоугольник на 3 квадрата (фактически это метод Монтюкла). При этом все части переносятся параллельно (рис. 7).

Обозначим через $p(n)$ минимальное число частей, на которые надо разрезать квадрат, чтобы из них можно было составить n равных квад-

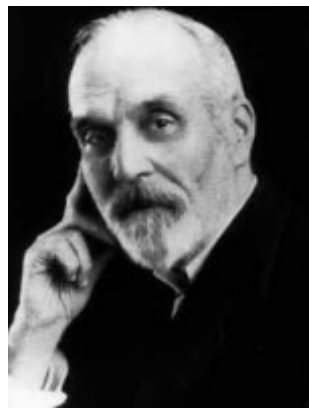


Рис. 6. Генри Дьюдени (1843–1930)

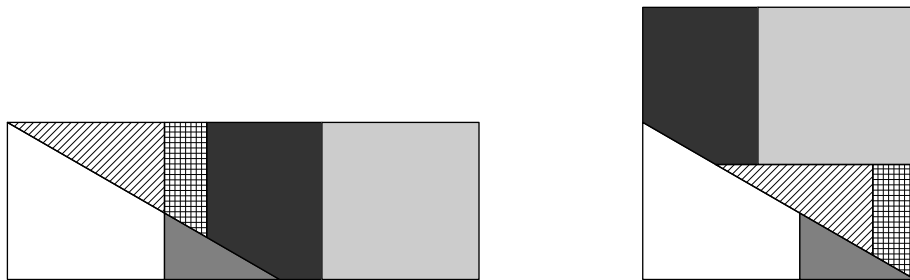


Рис. 7. Превращение квадрата в три равных квадрата и обратно способом Дьюдени

ратов (той же суммарной площади). Через $r(n)$ обозначим наименьшее число прямолинейных разрезов, которые нужно сделать, чтобы решить предыдущую задачу (при этом полученные части не передвигаются до окончания всех разрезов). Через $l(n)$ обозначим наименьшую суммарную длину всех разрезов, решающих предыдущую задачу для квадрата со стороной единица.

Сначала несколько простых задач.

Задача 8. Докажите, что $p(2) \leq 4$.

Задача 9. Докажите, что $p(n) \geq n$, причём $p(n) = n$, если $n = m^2$ (n — полный квадрат).

Задача 10. Докажите, что если $n = m^2$, то

$$r(n) \leq 2(m-1), \quad l(n) \leq 2(m-1).$$

Следующая задача уже не столь проста.

Задача 11. Докажите, что

$$n \leq p(n) \leq n + 2\sqrt{n} - 2,5, \quad \sqrt{n} \leq r(n) \leq 8\sqrt{n}, \\ 2\sqrt{n} - 2 \leq l(n) \leq 2\sqrt{n} + 3.$$

РЕШЕНИЕ. Хотя одинаковые значения $p(n)$, $r(n)$, $l(n)$ могут достигаться при разных разрезаниях, для получения верхних оценок мы применим одну и ту же схему разрезания (она имеется в [19], но применяется с другой целью).

Выберем целое m такое, что $\sqrt{n} - m < 1$, и сделаем $2m$ разрезов суммарной длины $2m^2/\sqrt{n}$, вырезав из данного единичного квадрата m^2 квадратов со стороной $1/\sqrt{n}$, составляющих вместе квадрат, один из углов которого совпадает с углом исходного квадрата. Оставшуюся Г-образную часть разделим разрезом длины $1 - m/\sqrt{n}$ на две части, из которых

составим прямоугольник размера

$$\left(1 - \frac{m}{\sqrt{n}}\right) \times \left(1 + \frac{m}{\sqrt{n}}\right).$$

Разделим его на $n - m^2$ равных прямоугольников размера

$$\left(1 - \frac{m}{\sqrt{n}}\right) \times \frac{1 + m/\sqrt{n}}{n - m^2},$$

сделав $n - m^2 - 1$ разрезов с суммарной длиной

$$(n - m^2 - 1) \left(1 - \frac{m}{\sqrt{n}}\right).$$

Отношение сторон полученных прямоугольников равно

$$\frac{1 + m/\sqrt{n}}{(n - m^2)(1 - m/\sqrt{n})} = \frac{1}{n(1 - m/\sqrt{n})^2} = \frac{1}{(\sqrt{n} - m)^2}.$$

Применяя задачу 4 при $a = 1/(\sqrt{n} - m)$, превращаем каждый из этих прямоугольников в квадрат, разделив его двумя разрезами суммарной длины

$$\frac{1 - 1/a + \sqrt{1 + 1/a^2}}{\sqrt{n}}$$

на три части. Суммарная длина сделанных $3(n - m^2) + 2m$ разрезов равна

$$\begin{aligned} \frac{2m^2}{\sqrt{n}} + (n - m^2) \left(1 - \frac{m}{\sqrt{n}}\right) + \frac{(n - m^2)(1 - 1/a + \sqrt{1 + 1/a^2})}{\sqrt{n}} = \\ = \frac{2m^2}{\sqrt{n}} - \frac{(n - m^2)m}{\sqrt{n}} + \frac{(n - m^2)(2 + m - \sqrt{n} + \sqrt{1 + (\sqrt{n} - m)^2})}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

На рис. 8–13 представлен описанный выше алгоритм разрезания квадрата на 21 равный квадрат.

Задача 12. Применяя указанный выше способ разрезания, докажите, что при $n = m^2 + 1$

$$l(n) < 2\sqrt{n} - 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Задача 13. Применяя метод Монтюкла, докажите, что

$$p(n) \leq n + \sqrt{n} - 2, \quad l(n) < 2\sqrt{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этот метод лучше предыдущего за исключением числа разрезов: здесь $r(n) = O(n)$ (но в частном случае — в задаче 12 — оценка для $l(n)$ чуть лучше.)

Приведём ещё один метод разрезания на n квадратов, пригодный для случая, когда n равно сумме квадратов двух натуральных чисел. В книжке [21] этот метод приписывается Абул-Вафе.

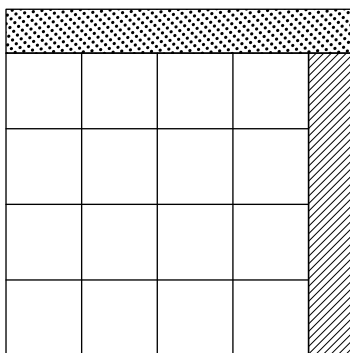


Рис. 8. Первый шаг: вырезание 16 квадратов и двух прямоугольников



Рис. 9. Второй шаг: склеивание двух прямоугольников в один прямоугольник



Рис. 10. Третий шаг: перекройка полученного прямоугольника в прямоугольник с отношением сторон 5 : 1

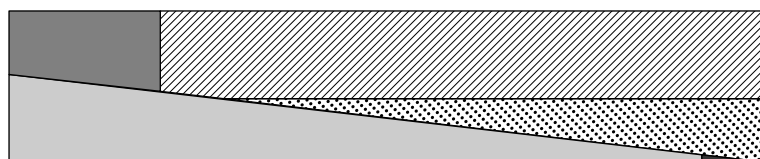


Рис. 11. Четвёртый шаг: сдвиг полученных частей и превращение прямоугольника рис. 9 в прямоугольник с отношением сторон 5:1

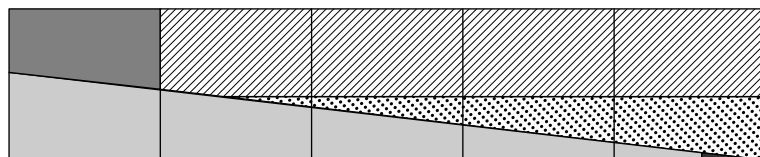


Рис. 12. Пятый шаг: разрезание прямоугольника с отношением сторон 5 : 1 на 5 равных квадратов



Рис. 13. Шестой шаг: разрезание прямоугольника рис. 9 на 5 равных квадратов

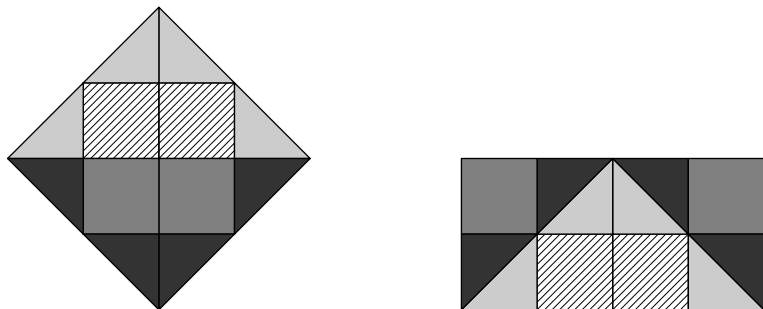


Рис. 14. Пример разрезания на $2m^2$ квадратов при $m = 2$. Слева схема разрезов, справа — схема сдвигов и склеек, после которых возникает 8 квадратов

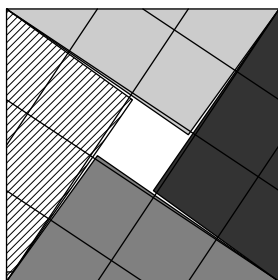


Рис. 15. Разрезание квадрата на 13 равных квадратов

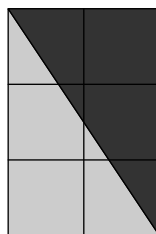
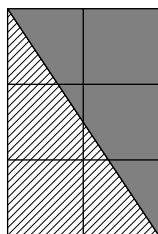


Рис. 16. Составление 12 равных квадратов после разрезания рис. 15 (один квадрат уже есть на рис. 15)

Сначала рассмотрим пример разрезания для $n = 2m^2$ (рис. 14).

Задача 14. Докажите, что в указанном методе $l(n) = 2\sqrt{n}$ при $n = 2m^2$.

Задача 15. (Абул-Вафа) Превратите пять равных квадратов в один квадрат, разрезав их на 8 частей (один квадрат оставив неразрезанным).

Далее приводится пример разрезания на $n = a^2 + b^2$ квадратов при $a \neq b$ (рис. 15, 16).

Задача 16. Докажите, что в указанном методе

$$l(n) = 2\sqrt{n}, \quad r(n) < 2\sqrt{2n} + O(1) \quad \text{для } n = a^2 + b^2.$$

Для произвольного n в силу теоремы Лагранжа (доказательство см. в [10, с. 124–127]). можно найти натуральные a, b, c, d , такие, что $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Положим $n_1 = a^2 + b^2$, $n_2 = c^2 + d^2$. Разрезав квадрат на части, из которых можно сложить два квадрата с отношением сторон $\sqrt{n_1/n_2}$ (см. задачу 18), сведём задачу к разрезаниям полученных двух квадратов на n_1 и n_2 квадратов соответственно.

В следующих двух задачах речь идёт о доказательстве теоремы Пифагора с помощью разрезов. Первое из них предложено древнекитайским математиком.

Задача 17 (Лю Хуэй). Превратите два квадрата в один, разрезав их на 6 частей.

Второй способ широко известен.

Задача 18. Превратите два квадрата в один, разрезав их на 5 частей. Если их стороны равны a, b , $a^2 + b^2 = 1$, то суммарная длина разрезов равна 2. Суммарная длина разрезов при обратном преобразовании равна $2(a + b) \leq 2\sqrt{2}$.

Задача 19. Докажите, что в указанном методе Абул-Вафы

$$l(n) < 2\sqrt{n} + 2\sqrt{2} \quad \text{при любом } n.$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 16, 18. Равенство возможно было бы только при $n_1 = a^2 + b^2 = n_2 = c^2 + d^2$, но тогда

$$n = 2n_1 = 2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2,$$

и можно применить задачу 16 без задачи 18.

Задача 20. Докажите, что в методе Абул-Вафы

$$r(n) < 4\sqrt{n} + O(1), \quad p(n) = n + O(\sqrt{n}) \quad \text{при любом } n.$$

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 16, 18 и неравенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x + y)}.$$

Если n представимо в виде суммы большого квадрата и трёх малых, то оценка $r(n)$ будет ближе к $2\sqrt{n}$.

Оценка для $r(n)$ в этом методе лучше, чем в двух предыдущих. Оценка для $l(n)$ в общем случае тоже чуть лучше, чем в первом методе, хотя чуть хуже, чем в задачах 12, 13.

Разрезания в этом методе делать просто, но затруднительно быстро найти представление большого числа в виде суммы четырёх квадратов (несколько проще найти разложение в сумму двух квадратов). В двух предыдущих методах используется число $1/\sqrt{n}$, точнее отрезок такой длины. Его надо предварительно построить, прежде чем выполнить построения всех разрезающих прямых; в [6] (задача 15.33) показано, что это можно сделать, проведя $o(\log_2 n)$ линий. Остальные построения используют $O(\sqrt{n})$ линий в первом методе и $O(n)$ линий во втором; для

проведения этих построений предварительные вычисления не требуются. В методе Абул-Вафы построения тоже требуют проведения $O(\sqrt{n})$ линий.

Ситуация, в которой перед разрезаниями нужно проводить обширные вычисления, встречается довольно редко. Поэтому, отвлекаясь немного в сторону, остановимся на этом подробнее. Тем более, что задача о разложении числа в сумму квадратов кажется чисто теоретической, а изложенный выше способ разрезания квадрата можно рассматривать как пример её прикладного применения.

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ СУММАМИ КВАДРАТОВ

Следующая теорема была получена Пьером Ферма в XVII веке. Не знакомый с ней читатель может попробовать доказать её самостоятельно.

Задача 21. Докажите, что число n представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда все его простые делители вида $4k + 3$ входят в его разложение на простые множители в чётных степенях.

Впоследствии Карл Якоби даже нашёл формулу для числа всех таких представлений, так же как и для числа представлений в виде суммы четырёх квадратов. Трудный вопрос о представимости чисел в виде суммы трёх квадратов решил Карл Фридрих Гаусс.

Для нахождения какого-нибудь представления числа n в виде суммы двух квадратов достаточно найти его разложение на множители, и задача сводится к той же задаче для простых вида $4k + 1$, если воспользоваться тождеством Фибоначчи.

Задача 22. Докажите тождество Фибоначчи

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2.$$

Задача 23. Для простых $n = 4k + 1$ разложение в сумму двух квадратов единственно (с точностью до перестановки слагаемых).

В книге [2, с. 26–31] есть два красивых элементарных доказательства существования такого разложения. Но из них не вытекает никакой алгоритм поиска этого разложения, кроме перебора всех квадратов, меньших числа n . Стандартное доказательство можно найти, например, в [10, с. 115–118].

Задача 24. Покажите, что разложение в сумму двух квадратов можно выполнить за $O(\sqrt{n}M(\log_2 n))$ операций над нулями и единицами, где $M(k)$ — число операций для умножения двух k -разрядных двоичных чисел¹⁾.

¹⁾ Недавно было доказано, что $M(n) = O(n \log_2 n)$.

Но есть и более быстрый алгоритм, принадлежащий французскому математику Серре (см. [10, с. 120–124]), где приведены четыре явные формулы для представления простого в виде суммы двух квадратов, но способ Серре из них самый эффективный в смысле объема вычислений). Кратко изложим его. Вначале находим квадратичный невычет по модулю p — иными словами, такое число a , что $a^{(p-1)/2} = -1 \pmod p$. Это можно сделать перебором натуральных чисел начиная с 2.

Задача 25. Докажите, что вычетов и невычетов среди чисел $1, 2, \dots, p-1$ поровну.

Это означает, что на невычет мы наткнёмся скоро.

Задача 26. Докажите, что для вычисления $a^n \pmod p$ достаточно

$$O(\log_2 n M(\lceil \log_2 p \rceil))$$

операций с нулями и единицами (называемых далее битовыми операциями).

УКАЗАНИЕ. См., например, [6, задачи 15.23–25, 17.53].

В частности, при $p = 2017$ первый невычет будет 5. Если a является невычетом, то $b = a^{(p-1)/2}$ удовлетворяет равенству $b^2 = -1 \pmod p$ (является корнем из минус единицы). Например, при $p = 2017$ имеем $b = 229$. В случае простых $p = 8k + 5$ первый невычет всегда будет 2 согласно квадратичному закону взаимности: из него следует, что двойка является квадратичным невычетом по модулю p тогда и только тогда, когда $(p^2 - 1)/8$ нечётно, т. е. в случаях $p = 8k + 3, 8k + 5$, а в случаях $p = 8k + 1, 8k + 7$ двойка является вычетом (например, $2 \equiv 3^2 \pmod 7$, $2 \equiv 6^2 \pmod{17}$).

Далее согласно алгоритму Серре раскладываем p/a в цепную дробь. Например,

$$\frac{2017}{229} = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}}}}$$

В общем случае можно доказать, что число элементов в дроби будет чётно и вторая половина совпадает с первой с точностью до перестановки в обратном порядке.

Задача 27. Число элементов цепной дроби для числа $\frac{m}{n}$ равно $O(\log_2 n)$.

УКАЗАНИЕ. См., например, [5].

Задача 28. Число операций для разложения $\frac{m}{n}$ в цепную дробь равно $O(\log_2^2 n)$.

УКАЗАНИЕ. Достаточно оценить число операций при применении алгоритма Евклида к паре чисел (m, n) . Совсем просто доказывается чуть более слабая оценка $O(\log_2 n M(\lambda(n)))$, где $\lambda(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Используя быструю версию алгоритма Евклида (предложенную Арнольдом Шенхаге и дополненную Фолкером Штрассеном), можно число этих операций оценить как $O(\log_2 \log_2 n) M(\lambda(n))$. Далее берём две подходящие дроби для этой цепной дроби с числом этажей $k - 1$ и k , где $2k$ — число этажей всей цепной дроби для p/a . Сумма квадратов их числителей оказывается равной n . В рассматриваемом примере это $8 + 1/(1 + 1/4) = 44/5$ и $8 + 1/1 = 9/1$. Тогда $44^2 + 9^2 = 2017$.

Число операций для этих вычислений можно оценить как $\log_2 p M(\lambda(p))$. В реальности число операций может быть меньше, так как число этажей в дроби может быть небольшим. В среднем оно скорее $O(\lambda(\lambda(p)))$. В нашем примере оно равно 5 и довольно велико в сравнении с $\lambda(2017) = 12$. Впрочем, потом вычисления проводятся с дробями вдвое меньшей этажности.

Для вычисления представления простого $p = 4k + 1$ в виде суммы двух квадратов можно применять и стандартный алгоритм (см. [10, с. 117–120]). Начнём с пары (x_1, y_1) , где $y_1 = 1$, $x_1 = b$, $b^2 = -1 \pmod p$, и положим $r_1 = (x_1^2 + y_1^2)/p$, $r_1 < p$. Далее положим

$$x_2 = \frac{x_1 \cdot x'_1 + y_1 \cdot y'_1}{r_1}, \quad y_2 = \frac{x_1 \cdot y'_1 - y_1 \cdot x'_1}{r_1},$$

где $x'_1 = x_1 \pmod{r_1}$, $|x'_1| \leq r_1/2$. Тогда

$$y_2 = 0 \pmod{r_1}, \quad x_2 = x_1^2 + y_1^2 \pmod{r_1} = pr_1 \pmod{r_1} = 0,$$

поэтому в силу тождества Фибоначчи

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{(x_1^2 + y_1^2)((x'_1)^2 + (y'_1)^2)}{r_1^2} \leq \frac{pr_1 r_1^2/2}{r_1^2} = \frac{pr_1}{2},$$

откуда $r_2 = (x_2^2 + y_2^2)/p$ целое и $r_2 \leq r_1/2$ (в случае $r_1 > 2$ можно доказать и строгое неравенство). Дальше повторяем эти вычисления. Последовательность r_i не позднее, чем за $\lambda(p)$ шагов, закончится единицей. Значит, $x_k^2 + y_k^2 = p$, $k \leq \lambda(p)$. Оценим число необходимых в указанных вычислениях операций. Воспользуемся известными оценками числа битовых операций для умножения m -битного числа на n -битное: $M(m, n) = O(mM(n)/n)$, и для деления m -битного числа на n -битное: при $n < m < 2n$

$$D(m, n) = O\left(\frac{nM(m-n)}{m-n} + 4M(m-n)\right),$$

а при $m > 2n$

$$D(m, n) = O\left(\frac{nM(m-n)}{m-n}\right).$$

Очевидно, что $|x_i|, |y_i| \leq \sqrt{pr_i}$, $|x'_i|, |y'_i| \leq r_i/2$, поэтому число битовых операций во всех вычислениях на i -м шаге равно по порядку

$$\frac{\lambda(p)M(\lambda(r_i))}{\lambda(r_i)} + \lambda(r_i)M\left(\frac{\lambda(p)}{\lambda(r_i)}\right).$$

Суммируя и пользуясь при $m > n$ неравенством $M(n)/n \leq M(m)/m$, получаем такую же окончательную оценку $\lambda(p)M(\lambda(p))$, что и в алгоритме Серре. В реальности оценка может быть меньше, так как число шагов алгоритма может быть небольшим. Например, в уже рассмотренном случае $p = 2017$ этот алгоритм даёт ответ уже на втором шаге:

$$\begin{aligned} x_1 &= 229, & y_1 &= 1, & r_1 &= 26, \\ x_2 &= 44, & y_2 &= -9, & r_2 &= 1, & 44^2 + 9^2 &= 2017. \end{aligned}$$

Последний алгоритм выглядит более быстрым и не требует разложения в непрерывную дробь, а все деления в нём выполняются нацело. Однако общее количество выполненных операций умножения, деления и сложения в обоих алгоритмах оказалось одинаковым и равным 10, причём во втором алгоритме числа в выполняемых операциях больше (после возведения в квадрат и суммирования они больше $p = 2017$, и делить приходится на p). Поэтому для выяснения, какое из вычислений короче, надо кропотливо подсчитать битовые операции, что мы оставляем желающим.

Если же n не простое, то стандартный способ его представления в виде суммы двух квадратов или хотя бы выяснения возможности такого представления требует разложения n на простые множители в силу задачи 21, а для этой задачи пока неизвестны достаточно быстрые алгоритмы.

Стандартный алгоритм для представления в виде суммы четырёх квадратов также требует предварительного разложения на простые множители (и к тому же ещё простые вида $4k + 3$ надо разлагать в сумму четырёх квадратов, а это дольше, чем разложение простых вида $4k + 1$, для которых можно найти представление в виде суммы двух квадратов). Однако потом вычисления проводятся с использованием тождества Эйлера для произведения двух сумм четырёх квадратов, и их можно выполнить быстро.

Опишем кратко стандартный алгоритм Эйлера — Лагранжа разложения числа в сумму четырёх квадратов.

Задача 29 (тождество Эйлера). Проверьте, что

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2,$$

где

$$X_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4, \quad X_2 = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3,$$

$$X_3 = x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_4 - x_4y_2, \quad X_4 = x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2.$$

Достаточно указать алгоритм разложения только для простых вида $4k + 3$.

Задача 30. Пусть $p = 4k + 3$. Докажите, что найдутся два квадратичных вычета, сумма которых — невычет.

УКАЗАНИЕ. В противном случае вычеты вместе с нулём образуют группу относительно сложения, но тогда минус вычет является вычетом, откуда следует, что минус единица — вычет, что противоречит равенству $(-1)^{(p-1)/2} = -1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В действительности утверждение верно для любого простого $p > 2$.

Задача 31. Выведите из задачи 30 разрешимость сравнения

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \pmod{p}.$$

Решать его приходится перебором. На самом деле число его решений (число точек на «окружности мнимого радиуса» над полем из p элементов) равно $p + O(1)$, поэтому перебор имеет в худшем случае размер $O(p)$. Дальше алгоритм напоминает приведённый выше для суммы двух квадратов.

Начинаем с четвёрки $(x_1 = x, y_1 = y, z_1 = 1, w_1 = 0)$ такой, что

$$r_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2}{p}$$

— целое число, вычисляем x'_1 такое, что $|x'_1| \leq r_1/2$, $x'_1 = x_1 \pmod{r_1}$, аналогично находим y'_1, z'_1, w'_1 и вычисляем

$$x_2 := \frac{x_1x'_1 + y_1y'_1 + z_1z'_1 + w_1w'_1}{r_1},$$

$$y_2 := \frac{x_1y'_1 - y_1x'_1 + z_1w'_1 - w_1z'_1}{r_1},$$

$$z_2 := \frac{x_1z'_1 - z_1x'_1 + y_1w'_1 - w_1y'_1}{r_1},$$

$$w_2 := \frac{x_1w'_1 - w_1x'_1 + y_1z'_1 - z_1y'_1}{r_1},$$

$$r_2 := \frac{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + w_2^2}{p}.$$

Далее итерации повторяются, пока не получится $r_k = 1$.

ЗАДАЧА 32. Докажите корректность алгоритма.

УКАЗАНИЕ. То, что x_2 — целое число, следует из равенства

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = pr_1.$$

Для y_2, z_2, w_2 это очевидно. Далее, из тождества Эйлера следует, что

$$\begin{aligned} r_2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2) \frac{(x'_1)^2 + (y'_1)^2 + (z'_1)^2 + (w'_1)^2}{pr_1^2} = \\ = \frac{(x'_1)^2 + (y'_1)^2 + (z'_1)^2 + (w'_1)^2}{r_1} \leq r_1. \end{aligned}$$

Равенство $r_2 = r_1$ при $r_1 > 4$ невозможно, так как тогда

$$x_1, y_1, z_1, w_1 = 0 \pmod{\frac{r_1}{2}},$$

откуда

$$pr_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 0 \pmod{\frac{r_1^2}{4}}.$$

При $r_1 = 2$

$$x_1, y_1, z_1, w_1 = 1 \pmod{2},$$

но тогда

$$2p = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 0 \pmod{4}.$$

При $r_1 = 4$

$$x_1, y_1, z_1, w_1 = 2 \pmod{4},$$

но тогда

$$4p = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 = 0 \pmod{16}.$$

Поэтому последовательность r_i убывает, $r_1 \leq (p-3)/2$, значит, число итераций не больше $(p-5)/2$. Очевидная оценка числа битовых операций в этом алгоритме $O(pM(\lambda(p)))$. Такая же оценка получается и для решения сравнения $x^2 + y^2 + 1 = 0 \pmod{p}$. Видно, что в случае четырёх квадратов алгоритм работает медленнее.

ЗАДАЧА 33. Число операций для представления n в виде суммы двух или четырёх квадратов в предположении, что разложение на множители выполнено и для них такие представления уже найдены, оценивается как $O(\log_2 \log_2 n)M(\lambda(n))$.

УКАЗАНИЕ. Разобьём число n на два множителя n_1, n_2 , разложения которых на простые имеют по возможности почти одинаковую длину

(в случае двух квадратов нужно ещё, чтобы они имели такие разложения). Можно предполагать, что это сделано «бесплатно» (так как разложение на простые уже нам известно). Обозначим минимальное число битовых операций, используемых для получения разложения в сумму квадратов, через $S(\lambda(n))$. Тогда справедливо рекуррентное соотношение

$$S(\lambda(n)) \leq S(\lambda(n_1)) + S(\lambda(n_2)) + O(M(\lambda(n))).$$

Используя его и неравенство

$$M(m_1) + M(m_2) \leq M(m_1 + m_2),$$

получаем, что

$$S(\lambda(n)) = O(\lambda(k)M(\lambda(n))),$$

где k — число сомножителей в разложении n на простые. Очевидно, $2^k \leq n$, т. е. $k \leq \lambda(n)$.

§ 6. ТЕОРЕМЫ БОЙЯИ — ГЕРВИНА И ХАДВИГЕРА — ГЛЮРА

Фаркаш Бойяи — отец знаменитого Яноша Бойяи. Гервин — немецкий офицер и любитель математики, независимо доказавший ту же теорему. Когда-то в связи с этой теоремой упоминали только их, но сейчас вспоминаются также Уоллес (Wallace) и Лаур (Lowre), которые, похоже, пришли к ней даже раньше.

Сначала рассмотрим некоторые частные случаи.

Задача 34 (Дьюдени). Превратите правильный треугольник в равновеликий квадрат, разрезав его на 4 части.

Решение этой задачи есть во многих книгах, в частности в [1, 10, 24]. Оно интересно тем, что части разрезания можно скрепить шарнирами и при повороте в одну сторону они сложатся в треугольник, а при повороте в другую — в квадрат. В интернете [42] можно найти соответствующую анимацию, а также аналогичные анимации, в которых шестиугольник превращается в треугольник и обратно, а шестиугольник превращается в квадрат.

Далее слово «равновеликий» в формулировках опускается.

Следующие задачи несложные и также имеются во многих книгах, например в [13].

Задача 35. Превратите треугольник в прямоугольник, разрезав его на три части.

УКАЗАНИЕ. Выберите наибольшую среднюю линию и продолжите её до пересечения с перпендикулярами к параллельной стороне, восстано-

ленными из её концов. Треугольные части при этом передвигаются с поворотом на 180 градусов.

Задача 36. Превратите равнобедренный треугольник в прямоугольник, разрезав его на две части.

Задача 37. Превратите параллелограмм в прямоугольник, разрезав его на две части.

УКАЗАНИЕ. Опустите высоты на наибольшую сторону из противоположных вершин.

Задача 38. Превратите прямоугольник с отношением сторон, меньшим $9/4$, в квадрат, разрезав его на три части и перенеся их параллельно.

УКАЗАНИЕ. См. решение задачи 4.

Задача 39. Превратите правильный шестиугольник в прямоугольник, разрезав его на три части.

УКАЗАНИЕ. Сначала разрежьте пополам и составьте параллелограмм.

Задача 40. Превратите правильный шестиугольник в квадрат, разрезав его на шесть частей четырьмя разрезами так, что части будут переноситься параллельно.

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 39, 38.

Задача 41. Превратите правильный шестиугольник в квадрат, разрезав его на пять частей четырьмя разрезами так, что части будут переноситься параллельно.

Решение: «смотри».

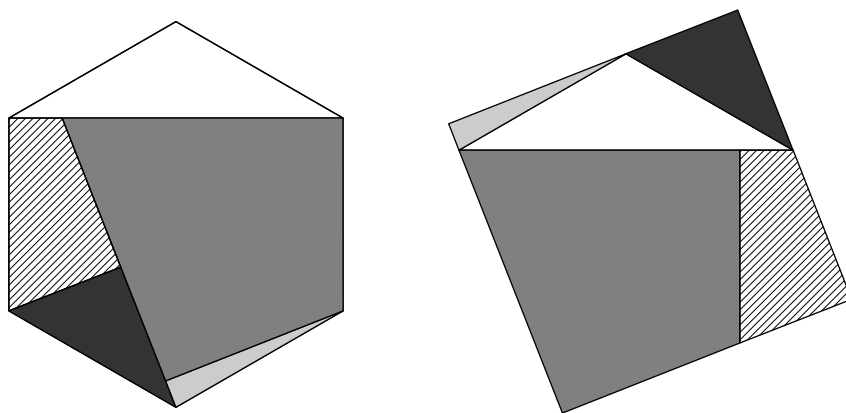


Рис. 17. Превращение правильного шестиугольника в квадрат четырьмя разрезами

В задачах на разрезание полезна

Задача 42 (лемма о трёх фигурах). Пусть фигуру F_1 преобразовали в фигуру F_2 , разрезав на n частей, а фигуру F_3 переделали в F_2 , разрезав на m частей. Тогда из F_1 можно получить F_3 , разрезав не более чем на nm частей.

Эта лемма справедлива, конечно, и для теоретико-множественных разрезов (доказательство можно найти в [23], но оно достаточно очевидно).

Задача 43 (теорема Бойяи — Гервина). Докажите, что любые два многоугольника равной площади равноставлены²⁾.

УКАЗАНИЕ. Возьмите один многоугольник, разрежьте на треугольники, переделайте их в прямоугольники, сведите эти прямоугольники к прямоугольникам заданной ширины, например единичной, и составьте из них большой прямоугольник той же ширины. Со вторым многоугольником сделайте то же самое. Потом примените задачу 42.

Теорему Бойяи — Гервина можно усилить, наложив ограничения на перемещения частей после разрезания.

Будем говорить, что две фигуры S -равноставлены, если одну из них можно разрезать на части и, подвергая их преобразованиям центральной симметрии, составить из них вторую фигуру. Аналогично определим отношение T -равноставленности, заменяя центральные симметрии на параллельные переносы (это определение имеет смысл и для пространственных тел). Лемма о трёх фигурах очевидно верна и для S - и T -равноставленности.

Следующая задача имеется в книге [22], написанной известным швейцарским геометром Гуго Хадвигером.

Задача 44 (Хадвигер). На плоскости даны два равных квадрата. Превратить один в другой, разрезав его не более чем на 5 частей и параллельно передвинув некоторые из них. То же самое сделать и с любыми равновеликими параллелограммами (только число частей может быть больше).



Рис. 18. Гуго Хадвигер (1908–1981)

²⁾ То есть их можно сложить из одного и того же конечного набора плоских фигур, причём у фигур нет общих внутренних точек.

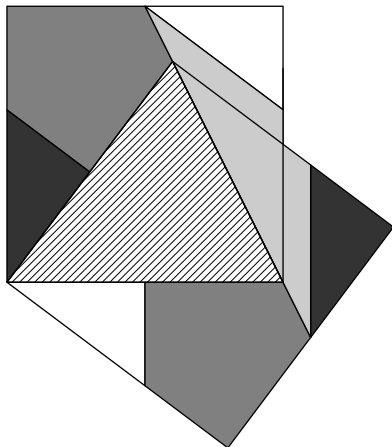


Рис. 19. T -равносоставленность двух квадратов

УКАЗАНИЕ. Примените преобразование, указанное на рис. 19, и задачу 42. Преобразования квадрата в параллельно расположенный прямоугольник из секции 2 очевидно доказывают их T -равносоставленность.

Задача 45. Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

Задача 46. Превратите два центрально-симметричных треугольника в прямоугольник, перенося части параллельно.

УКАЗАНИЕ. Параллельно перенеся один из них, получаем параллелограмм, который потом можно превратить в прямоугольник параллельным переносом частей.

Доказательство следующей теоремы имеется в [25, с. 162–166] (статья В. Г. Болтянского), поэтому она предлагается в виде задачи.

Задача 47 (Хадвигер — Глюр). Докажите, что любые два многоугольника равной площади S -равносоставлены.

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 35, 4, 44, 45, 42. Сначала разрезаем один из многоугольников на треугольники, потом их превращаем в прямоугольники, при этом некоторые треугольные части подвергаются центральной симметрии. Далее прямоугольники преобразуются в прямоугольники с единичным основанием, поворачиваются параллельно друг другу и из них составляется один прямоугольник. Потом его можно превратить и в квадрат. При этом все части переносятся параллельно, а параллельный перенос выполняется посредством двух симметрий согласно задаче 45. Поэтому все части подвергаются только преобразованиям

центральной симметрии. Такое же преобразование делаем со вторым многоугольником. В заключение применяем задачу 42.

Задача 48 (Хадвигер — Глюр). Докажите, что любые два центрально-симметричных многоугольника равной площади T -равносоставлены.

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 46, 44, 42. Сначала разрезаем один из многоугольников на пары центрально-симметричных треугольников с общей вершиной в его центре симметрии, потом каждую пару превращаем в прямоугольник. Далее действуем как в указании к задаче 47.

Ещё одно усиление теоремы Бойяи — Гервина имеется в [28]. Там доказано, что преобразование любого многоугольника в любой равновеликий можно выполнить подобно решению Дьюдени задачи 34, соединив части шарнирами.

Количественный вариант теорем Бойяи — Гервина и Хадвигера — Глюра, близкий к оптимальному, получить непросто. Некоторая работа в этом направлении сделана в [32]. Там рассмотрен случай преобразования правильного m -угольника в правильный n -угольник. Через $p(m, n)$ авторы обозначили наименьшее число многоугольных частей, на которые надо разрезать правильный m -угольник, для того чтобы его превратить в правильный n -угольник (общие границы разных частей при этом могут быть ломаными линиями). Был рассмотрен также второй вариант задачи, а именно, когда части можно получать только делая последовательно разрезы стеклорезом, то есть прямолинейные разрезы от края и до края (не передвигая части между разрезаниями). В этом случае минимальное число необходимых частей авторы обозначили через $g(m, n)$. Очевидно, что $p(m, n) = p(n, m)$ и $p(m, n) \leq g(m, n)$, но функция $g(m, n)$ не обязана быть симметричной. Очевидно также, что минимальное число разрезов стеклорезом равно $g(m, n) - 1$.

Задача 49. Покажите, что треугольник можно преобразовать в некоторую трапецию и обратно с помощью двух разрезов стеклорезом (разрезав на три части). Покажите, что правильный треугольник нельзя преобразовать в трапецию с углами 30 градусов при основании, равном его удвоенной стороне, с помощью двух разрезов стеклорезом, но обратное преобразование можно выполнить таким образом (т. е. разрезав трапецию на три части двумя разрезами).

В [32] получены следующие довольно точные оценки при $m \leq n$:

$$\max \left\{ \left\lceil \frac{n-m}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right\} \leq g(m, n) \leq \frac{m+n}{2} + o(n),$$

$$\left\lceil \frac{n-m}{4} \right\rceil + 1 \leq p(m, n) \leq \frac{m+n}{2} + o(n),$$

в частности

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \leq p(4, n) \leq \frac{n}{2} + o(n), \quad \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \leq g(n, 4) \leq \frac{n}{2} + o(n),$$

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - 2 \leq g(n, 4) \leq \frac{n}{2} + o(n).$$

Доказательства слишком сложные, чтобы их приводить здесь.

§ 7. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

Теорема Бойяи — Гервина не переносится на трёхмерное пространство. Бывает, что даже простые тела равного объёма нельзя преобразовать друг в друга, разрезая на части. Гильберт предположил, что такими телами могут быть правильный тетраэдр и куб. Это доказал его ученик Макс Ден спустя несколько лет после того, как Гильберт включил этот вопрос в число своих знаменитых проблем.

Теорему Дена можно сформулировать так: правильный тетраэдр не равносоставлен кубу того же объёма.

Доказательство впоследствии было упрощено профессором мехмата МГУ В. Ф. Каганом.

Ещё позднее Хадвигер и Сидлер нашли условия, которым должны удовлетворять пары многогранников для того, чтобы они не были равносоставленными.

Доказательства их результатов можно найти в интересной и сравнительно просто написанной книге [3], а также в [22].

В [22] доказано, что параллелепипеды равного объёма в пространстве любой размерности даже T -равносоставлены. В частности, куб и тот же куб, повёрнутый произвольным образом, можно преобразовать друг в друга, разрезав на части и затем передвигая их только параллельно. Этот факт использовался в [22] для простого доказательства инвариантности жорданова объёма при произвольном движении.

Лемма о трёх фигурах (задача 42) очевидно переносится и на трёхмерное (и многомерное) пространство:

Задача 50 (лемма о трёх телах). Пусть тело K_1 является n -равносоставленным с телом K_2 (т. е. преобразуется в него при разрезании не более чем на n частей), а тело K_3 является m -равносоставленным с K_2 . Тогда K_1 является nm -равносоставленным с K_3 .



Рис. 20. Макс Ден
(1878–1952)

Эта лемма справедлива и для теоретико-множественных разрезов, и для T -равносоставленности.

Задача 51. Докажите, что можно превратить произвольный параллелепипед в равнообъёмный ему прямоугольный, разрезав не более чем на 8 частей и параллельно их передвинув.

УКАЗАНИЕ. Сначала сделаем основание параллелепипеда прямоугольным, разрезав его на две части с помощью результата задачи 37 (одна из них будет треугольной, а другая — четырёхугольной призмой) и перенеся первую из них параллельно. Такое преобразование назовём «перекосом». Сделав ещё один перекосок, преобразуем параллелепипед в такой, у которого два ребра, выходящие из одной вершины, будут перпендикулярны третьему (композицию обоих перекосков можно выполнить, разрезав параллелепипед на 4 части и их параллельно передвигая). Далее делаем ещё один перекосок и получаем прямоугольный параллелепипед, который будет T -равносоставлен с исходным при разбиении не более чем на 8 частей.

Далее слово «равнообъёмный» в формулировках опускается.

Задача 52. Докажите, что прямоугольный параллелепипед T -равносоставлен любому параллельно расположенному параллелепипеду, в частности кубу.

УКАЗАНИЕ. В силу утверждения задачи 50 достаточно доказать это для куба. Преобразуем прямоугольный параллелепипед, не меняя высоты и площади основания, в такой прямоугольный параллелепипед, у которого одно из рёбер основания равно ребру куба. Для этого применяем результат задачи 4, достраивая получающиеся там части основания до прямоугольных призм с высотой, равной высоте данного параллелепипеда. Параллельно перенося эти призмы, получаем новый параллелепипед. Применим к нему тот же приём (и задачу 50), взяв за основание грань, перпендикулярную ребру, равному ребру куба. Получаем куб, T -равносоставленный данному параллелепипеду. Количество полученных частей будет зависеть от отношения между длинами рёбер исходного параллелепипеда.

Задача 53 (удвоение куба). Докажите, что прямоугольный параллелепипед размера $1 \times 1 \times 2$ можно преобразовать в куб, разрезав на 9 частей и параллельно их передвинув.

УКАЗАНИЕ. Примените задачи 52, 38, 4, 50.

В [1] есть аналогичная задача (№ 301), но про произвольную равносоставленность. Число частей там равно 8.

Задача 54. Докажите, что любые два прямоугольных параллелепипеда (не обязательно параллельно расположенных) T -равносоставлены.

УКАЗАНИЕ. Преобразуйте их в кубы. Для доказательства T -равносоставленности двух кубов примените результат задачи 44. Достаточно совместить параллельным переносом их вершины и перевести один куб в другой, сделав два поворота вокруг рёбер (в механике этот трюк называется поворотами на углы Эйлера).

Согласно задачам 44, 50 число используемых частей не больше 25.

Результаты задач 51, 54, 50 дают решение задачи 26.66 (см. [36, с. 246]): *Докажите, что любые два равнообъёмных параллелепипеда T -равносоставлены.*

§ 8. РАЗБИЕНИЯ НА НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы понимаем равносоставленность в теоретико-множественном смысле, т. е. предполагаем, что части разбиения не должны иметь общих точек (в обычных разбиениях соседние части имеют общие граничные точки). Справедлива следующая теорема Банаха — Тарского: два многоугольника равносоставлены (в теоретико-множественном смысле) тогда и только тогда, когда они имеют равную площадь.

В её доказательстве используется теорема Кантора — Бернштейна — Банаха: если множества A и B таковы, что A является m -равносоставленным с $B' \subset B$, а B является n -равносоставленным с $A' \subset A$, то A является mn -равносоставленным с B .

Тарский поставил также вопрос: можно ли подобным образом преобразовать круг в квадрат (квадратура круга по Тарскому)?

Оказалось, что можно, и это было доказано Миклошем Лацковичем в 1990 г. [33]. На самом деле он доказал, что любой многоугольник T -равносоставлен кругу. Позднее появилось упрощённое доказательство [34], но оно всё ещё слишком сложно для изложения здесь.

В трёхмерном пространстве подобная теорема оказалась неверной: Банах и Тарский доказали, что можно разбить шар на несколько частей и, передвинув их, получить два шара того же радиуса (парадокс Банаха — Тарского). Более того, они показали, что любое множество, содержащее в себе шар любого радиуса, можно таким же образом превратить в шар

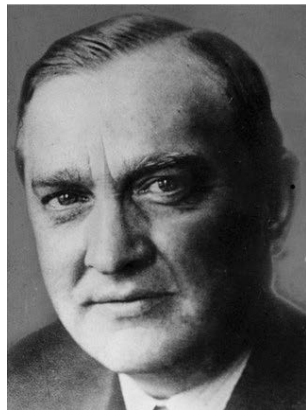


Рис. 21. Стефан Банах (1892–1945)

любого заданного радиуса. Разумеется, это возможно только при разбиении на очень сложно устроенные подмножества, которые, в частности, не измеримы, т.е. им нельзя разумным способом приписать объём (разумным — это значит, что объём должен сохраняться при движениях и складываться при объединении непересекающихся по внутренним точкам множеств).

Доказательства этих утверждений всё ещё остаются сложными, но их можно прочитать, например в [7, 27].

Доказательство теоремы Банаха — Тарского о равновеликости равносоставленных многоугольников тоже непросто. Но доказательство равносоставленности равновеликих многоугольников не так сложно (его можно найти в [7]) и далее оно будет изложено в виде цепочки задач.

Для построения соответствующего разрезания используется

Задача 55. Пусть $K_\alpha(R)$ — множество полуинтервалов с началом в нуле и концами в точках $e^{2n\pi i\alpha}R$, $n = 0, 1, \dots$, где α иррационально («колесо радиуса R с бесконечным числом спиц»). Обозначим через $K_{\alpha,n}(R)$ это же «колесо» с удалёнными первыми n «спицами» $e^{2k\pi i\alpha}R$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Докажите, что $K_\alpha(R)$ получается из $K_{\alpha,n}(R)$ поворотом на угол $2\pi n\alpha$ и оба множества всюду плотны в круге радиуса R с центром в нуле (последнее утверждение далее не понадобится).

Из этой задачи следует, что «колесо» $K_\alpha(R)$ является $n+1$ -равносоставленным с тем же колесом, объединённым с n не пересекающимися с ним и друг с другом, а в остальном произвольно расположенными на плоскости полуинтервалами длины R . Действительно, само «колесо» $K_\alpha(R)$ можно представить в виде объединения «колеса без n спиц» $K_{\alpha,n}(R)$ и n полуинтервалов длины R . Очевидно, что такое же утверждение верно для «колеса без обода», состоящего не из полуинтервалов, а из интервалов той же длины (и в его формулировке полуинтервалы заменяются на интервалы).

Следующие две классические задачи не связаны с дальнейшим изложением, но трудно удержаться от того, чтобы не привести их здесь.

Задача 56 (Штейнгауз). Докажите, что «спицы колеса» $K_\alpha(R)$ разбивают его «обод» (окружность радиуса R с центром в нуле) на дуги только трёх различных длин, причём длина большей дуги равна сумме длин обеих меньших.

Задача 57. Докажите, что десятичная запись чисел последовательности 2^n может начинаться с любой комбинации цифр. Докажите, что с цифры 1 она начинается чаще, чем с 2.

Задача 58. Докажите, что квадрат равносоставлен тому же квадрату и точке (или полуинтервалу, или отрезку) вне его.

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 55.

Задача 59 (Серпинский). Докажите, что квадрат 15-равносоставлен равнобедренному прямоугольному треугольнику.

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 55. Решение есть в [23].

Задача 60. Докажите, что квадрат можно разбить на конечное число подмножеств, сдвинув которые, можно получить прямоугольник с отношением сторон $4 : 1$. Оцените число частей в этом разбиении.

УКАЗАНИЕ. Примените задачу 55.

Задача 61. Для любого n можно найти числа $1, a_1, \dots, a_n$, все попарные отношения которых иррациональны.

УКАЗАНИЕ. Например, $a_i = \sqrt{p_i}$, $i = 1, \dots, n$, где все p_i — различные простые числа. Можно даже найти n чисел, линейно независимых над полем рациональных чисел.

Задача 62. Докажите, что n -угольник без границы («ободранный») периметра p , у которого максимальный радиус лежащего внутри круга равен r , равносоставлен равному ему n -угольнику с границей, причём разбиение содержит не более чем $2 + 2n + \lfloor p/r \rfloor$ частей.

УКАЗАНИЕ. Разобьём каждую сторону n -угольника (их считаем полуинтервалами) на не более чем a/r полуинтервалов длины $r - \varepsilon$ и один более короткий, тогда всего их будет не более чем $p/r + n$. Обозначим их длины через R_i , где $R_1 = r - \varepsilon$, $R_i < R_1$, $i > 1$, и рассмотрим «колёса без нескольких спиц»

$$K_{\alpha_1, \lfloor p/r \rfloor}(R_1), K_{\alpha_i, 1}(R_i), \quad i = 2, 3, \dots, n + 1,$$

«насаженные на одну ось», которая проходит через центр круга радиуса $R_1 = r - \varepsilon$, лежащего внутри n -угольника. Чтобы спицы у разных колёс не совпадали (а значит, и не пересекались, так как центры колёс им не принадлежат), выберем α_i с помощью результата задачи 61. Добавим к каждому «колесу без нескольких спиц» недостающие спицы, коих всего будет $\lfloor p/r \rfloor + n$. Вместе с «колёсами без нескольких спиц» получим $\lfloor p/r \rfloor + 2n + 1$ непересекающихся подмножеств. Ещё одно подмножество получим, удалив из «ободранного» n -угольника $K_{\alpha_1}(R_1) \bigcup \bigcup_{i=2}^{n+1} K_{\alpha_i}(R_i)$ — объединение рассматриваемых концентрических «колёс». Оставляя это подмножество неподвижным, поворачивая «колёса без спиц» на углы $n_i \alpha_i$, где n_i — число недостающих спиц (при этом у них спицы откуда

ни возьмись вырастут, и из них получатся полные колёса со всеми спицами $K_{\alpha_i}(R_i)$) и передвигая $\lfloor p/r \rfloor + n$ спиц так, чтобы из них составила ломаная граница n -угольника, получаем, что «ободранный» n -угольник $(2 + 2n + \lfloor p/r \rfloor)$ -равносоставлен n -угольнику с границей.

Пусть многоугольник M обычным образом разрезан на несколько частей, тогда их внутренности не пересекаются и образуют в объединении открытое множество M_0 .

Задача 63. Докажите, что граница множества M_0 может быть представлена в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых ломаных и незамкнутых ломаных, из которых удалены концы. Далее, её можно разбить на попарно не пересекающиеся полуинтервалы и интервалы.

УКАЗАНИЕ. Ломаные можно выбирать последовательно. Если ломаная пересекается с ранее построенными, то, удалив из неё точки пересечения, получим несколько «ломаных без концов».

Пусть граница множества M_0 состоит из n попарно непересекающихся полуинтервалов и интервалов с суммарной длиной P , а круг, который лежит в M и не пересекается с границей M_0 , но возможно касается её, имеет радиус r .

Задача 64. Докажите, что многоугольник M и множество M_0 являются $(2 + 2n + \lfloor P/r \rfloor)$ -равносоставленными.

УКАЗАНИЕ. Решение аналогично задаче 62, но некоторые колёса могут быть «ободранными» — их спицы являются нужными нам интервалами, а не полуинтервалами.

Теперь можно доказать лёгкую часть теоремы Банаха — Тарского даже без использования теоремы Кантора — Бернштейна.

Пусть многоугольники M_1, M_2 равновелики. Согласно теореме Бойи — Гервина они N -равносоставлены при некотором N . Разрежем их на N попарно равных (конгруэнтных) частей и рассмотрим соответствующие множества $M_{1,0}, M_{2,0}$. Очевидно, они N -равносоставлены в теоретико-множественном смысле. Согласно задаче 62 множества M_i и $M_{i,0}$ являются $(2 + 2n_i + \lfloor P_i/r \rfloor)$ -равносоставленными, где n_i — число отрезков границы, а P_i — их суммарная длина (эти числа могут быть разными у множеств M_i , но r — одинаковое). Применяя результат задачи 42, получаем, что M_1 и M_2 равносоставлены при разбиении не более чем на

$$\left(2 + 2n_1 + \left\lfloor \frac{P_1}{r} \right\rfloor\right) \left(2 + 2n_2 + \left\lfloor \frac{P_2}{r} \right\rfloor\right) N$$

частей. Но на самом деле число частей не больше

$$N + 1 + \left\lfloor \frac{P}{r} \right\rfloor + 2n_1 + 2n_2,$$

где $P = \max\{P_1, P_2\}$. Действительно, превращение M_1 в M_2 выглядит так: разбиваем границу $M_{1,0}$ на $n_1 + \lfloor P_1/r \rfloor$ интервалов и переносим их на $n_1 + 1$ концентрических колёс с центром в круге радиуса $r - \varepsilon$, лежащем в одной из N частей множества $M_{1,0}$. Эти колёса, приняв добавленные спицы, превращаются в $n_1 + 1$ полных колёс. Кроме них, есть ещё N частей (одна из которых получена удалением из неё этих колёс). Объединение всех этих частей равно $M_{1,0}$. Передвигаем их так, чтобы они образовали множество $M_{2,0}$. Для превращения $M_{2,0}$ в M_2 в той части, которая содержала $n_1 + 1$ концентрических колёс, выделим ещё $n_2 + 1$ колёс подходящего радиуса с тем же центром, что и первая система колёс, и $n_2 + \lfloor P_2/r \rfloor$ спиц. Переносим эти спицы, составим из них границу $M_{2,0}$, а поворачивая колёса, заполним щели, оставшиеся от передвинутых спиц, и в результате получим многоугольник M_2 . Для того, чтобы обе системы колёс не пересекались, подбираем углы поворота с помощью результата задачи 61. Впрочем, колёса одинакового радиуса $R_1 = r - \varepsilon$ могут совпадать или содержать одно другое, поэтому их можно выбрать с одинаковым углом между спицами α_1 . Тогда вместо двух колёс $K_{\alpha_1, \lfloor P_1/r \rfloor}(R_1)$, $K_{\alpha_1, \lfloor P_2/r \rfloor}(R_1)$ и $\lfloor P_1/r \rfloor + \lfloor P_2/r \rfloor$ недостающих в них спиц можно взять одно колесо $K_{\alpha_1, \lfloor P/r \rfloor}(R_1)$ и $\lfloor P/r \rfloor$ спиц, где $P = \max\{P_1, P_2\}$. Поэтому общее число используемых частей будет равно $N + 1 + \lfloor P/r \rfloor + 2n_1 + 2n_2$.

Задача 65. Докажите, что величина P_i будет больше у того многоугольника, у которого больше периметр.

Указание. Если суммарные длины разрезов в многоугольниках равны l_i , а их периметры p_i , то

$$P_i = p_i + l_i, \quad p_1 + 2l_1 = p_2 + 2l_2.$$

Для радиуса r , участвующего в приведённых выше оценках, в некоторых случаях можно получить оценку снизу, зависящую только от числа N частей в разбиении.

Задача 66. Если разрезы в многоугольнике сделаны стеклорезом, число частей равно N , а радиус наибольшего круга, лежащего в многоугольнике, равен R , то наибольший радиус r круга, лежащего в одной из получившихся частей, будет не меньше R/N .

Указание. Если обозначить через r_i радиусы максимальных кругов в полученных N частях, то $r_1 + \dots + r_N \geq R$. Последнее неравенство до-

казывается по индукции. Шаг индукции основан на том, что если круг радиуса R разделить прямой на два сегмента, то их максимальные радиусы удовлетворяют неравенству $R_1 + R_2 \geq R$.

§ 9. РАЗРЕЗАНИЯ С ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ ЧАСТЕЙ

Такие задачи рассматривались в [19]. Речь идёт о том, что после каждого разреза полученные части можно передвинуть, перед тем как сделать новый разрез. Эти разрезы, конечно, делаются стеклорезом, то есть мы режем по прямой от края одного куска до края другого, в результате каждый из этих кусков разрезается на две части. Есть и «усовершенствованные» способы разрезания: куски можно накладывать друг на друга, перед тем как сделать разрез. За счёт этого можно ещё уменьшить число разрезов. Например:

Задача 67. Покажите, как из трёх равных квадратов сделать один большой квадрат, выполнив лишь два разреза.

УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь приёмом Абул-Вафы из задачи 20.

Задача 68. Квадрат можно разрезать на a^2 единичных квадратов $2a$ разрезами, где $2^{a-1} < a \leq 2^a$.

УКАЗАНИЕ. Сначала квадрат режем на прямоугольники размера $1 \times a$, сделав a разрезов. Для этого режем квадрат пополам или почти пополам (на части размера $a \times \lceil a/2 \rceil$, $a \times \lfloor a/2 \rfloor$), потом, прикладывая их друг к другу в длину, режем разрезом длины $2a$ оба куска пополам или почти пополам и т. д. Сложив a полученных прямоугольников размера $1 \times a$ опять в квадрат, повторяем ту же процедуру, делая разрезы в перпендикулярном направлении к старым. Потребуется ещё a разрезов. Полученные куски при этом передвигаются только параллельно. Число разрезов, как видим, сильно уменьшается, но их суммарная длина остаётся такой же. Её тоже можно сильно уменьшить, если разрешить накладывать части друг на друга. Тогда суммарная длина разрезов будет равна $2aa = O(a \log_2 a)$. Но из-за увеличения толщины многослойных кусков делать разрезы будет с каждым разом всё труднее.

Так как при каждом разрезе число кусков не более чем удваивается, меньше чем $2a - 1$ разрезами обойтись нельзя. Если известно, что все разрезы делаются параллельно сторонам квадрата, то нельзя обойтись меньше чем $2a$ разрезами.

Конечно, если разрешать каждый раз резать только один из получившихся кусков, то число разрезов будет на единицу меньше числа кусков.

Задача 69. Для того чтобы перекроить квадрат в прямоугольник $a \times 1/a$, $2^{k-1} \leq a < 2^k$, где a — целое, достаточно сделать $k + 2$ разреза и необходимо не менее $k/2$ разрезов.

В [19] рассматривалась также следующая задача о распиле прямоугольного параллелепипеда (и написано, что она может иметь применения в сыроварении).

Задача 70. Параллелепипед размера $a \times b \times c$ можно разрезать на единичные кубики, сделав $\alpha + \beta + \gamma$ разрезов, где $2^{\alpha-1} \leq a < 2^\alpha$, $2^{\beta-1} \leq b < 2^\beta$, $2^{\gamma-1} \leq c < 2^\gamma$, но затраченное время (пропорциональное суммарной площади распилов) такое же, как при тривиальном отпиливании кубик за кубиком.

Очевидно, что эта задача решается аналогично предыдущей.

Задача 71. Квадрат можно разрезать на n равных квадратов не более чем $k + O(1)$ разрезами, где $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Менее чем за $k - 1$ разрезов это сделать нельзя.

УКАЗАНИЕ. Примените алгоритмы задач 68 и 20.

§ 10. РАЗРЕЗАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА НА КВАДРАТЫ И ПОЛОСЫ

В [5], в частности, рассматривался вопрос о разрезании прямоугольников с целыми сторонами на не обязательно равные квадраты (и без передвижения частей). Как ни странно, результат тоже оказывается любопытным.

Например, это можно сделать фактически с помощью алгоритма Евклида. Действительно, работу алгоритма Евклида можно представить следующим образом: в прямоугольник размерами $l_1 \times l_2$ укладываем a_1 квадратов размера $l_2 \times l_2$, в оставшийся прямоугольник размерами $l_2 \times l_3$ укладываем a_2 квадратов размера $l_3 \times l_3$ и т. д., пока не покроем прямоугольник размера $l_1 \times l_2$ квадратами k разных размеров в общем количестве $a_1 + \dots + a_k$ штук (см. §8). Обозначим через $l(r)$ сумму элементов цепной дроби, представляющей рациональное число r . Число квадратов в покрытии прямоугольника размерами $m \times n$, которое строится алгоритмом Евклида, равно $l(m/n)$.

Если считать целью алгоритма Евклида покрытие прямоугольника квадратами, то он действует как *жадный алгоритм*: на каждом шаге помещает в прямоугольник на свободное место квадрат максимальных размеров.

На первый взгляд кажется, что алгоритм Евклида всегда разрезает на минимальное число квадратов. Но это не так.

Наименьшее число квадратов, на которое можно разрезать прямоугольник размером $m \times n$, обозначим через $L(m, n)$.

Задача 72. Докажите, что $L(5, 6) = 5$, $l(5/6) = 6$.

Почему рассматриваются прямоугольники с целыми сторонами? Поэтому, что справедлива *теорема Дена*: если прямоугольник разрезан произвольным образом на квадраты, то его стороны соизмеримы.

Задача 73 (VII Московская математическая олимпиада, 1941 г., второй тур). а) Докажите, что из 5 попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник (7–8 класс, № 1).

б) Докажите, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник (9–10 класс, № 1).

Задача 74. Докажите, что имеются только два разных разбиения прямоугольника не более чем на девять разных квадратов (и более чем на один).

Задача 75. а) Разрежьте прямоугольник размера 11×10 на 6 квадратов (не обязательно равных).

б) Разрежьте прямоугольник размера $\frac{2 \cdot 4^n + 1}{3} \times \frac{2 \cdot 4^n - 2}{3}$ на $3n$ квадратов (не обязательно равных).

Можно рассмотреть более широкий класс разрезов прямоугольника. Разрежем прямоугольник на два прямоугольника, потом какой-нибудь из них разрежем на два прямоугольника и т. д. до тех пор, пока не получим разбиение исходного прямоугольника на квадраты. Такие разбиения назовём *последовательно-параллельными* (сокращённо П) разбиениями (покрытиями) и обозначим минимальное число квадратов в П-разбиении прямоугольника $m \times n$ через $L_{\Pi}(m, n)$.

Задача 76. Докажите, что

$$l\left(\frac{m}{n}\right) \geq L_{\Pi}(n, m) \geq \left\lceil \log_{\phi} \left(\sqrt{5} \left(\max(m, n) - \frac{1}{2} \right) \right) \right\rceil \geq \left\lceil \log_{\phi} \left(\sqrt{5} \left(l\left(\frac{m}{n}\right) - \frac{1}{2} \right) \right) \right\rceil,$$

а для $q = F_n F_{n+1}$ или $F_n F_{n+2}$, $n \geq 2$,

$$L_{\Pi}(q+1, q) = \left\lceil \log_{\phi} \left(\sqrt{5} \left(l\left(\frac{q+1}{q}\right) - \frac{1}{2} \right) \right) \right\rceil = \left\lceil \log_{\phi} \left(\sqrt{5} \left(\max(q+1, q) - \frac{1}{2} \right) \right) \right\rceil.$$

Задача 76 показывает, в частности, что $L_{\Pi}(n, m)$ может быть гораздо меньше $l(m/n)$, и устанавливает точное неравенство между ними.

Задача 77. Докажите, что $L(m, n)$ может быть меньше $L_{\Pi}(m, n)$.

Задача 78. Докажите, что для некоторых последовательностей m_k и n_k

$$\frac{L(m_k, n_k)}{L_{\Pi}(m_k, n_k)} < 0,89.$$

Задача 79. Докажите оценку $L(m, n) > \log_2(m + n)$.

В [26] можно прочитать доказательство теоремы Шпрага о том, что любой прямоугольник с рациональным отношением сторон можно разрезать на попарно различные квадраты.

В 1978 г. голландец А. Дёйвестейн нашёл разбиение квадрата на 21 различных квадрат и доказал, что нет такого разбиения на меньшее число квадратов.

Широко известно простое доказательство того, что куб нельзя разбить на попарно различные кубы.

Любопытен также вопрос о разрезании прямоугольника на полосы одинаковой ширины (но не обязательно равной длины). Следующая задача предлагалась на XXXVII Московской олимпиаде (1974 г., второй тур, 9 класс, № 5) двукратным победителем Международной математической олимпиады и известным в то время задачным композитором Аркадием Климовым.

Задача 80 (А. В. Климов). Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ см разрезан на прямоугольные полосы, каждая из которых имеет сторону 1 см. Линии разрезов параллельны сторонам исходного листа. Доказать, что хотя бы одно из чисел a или b целое.

Она кажется очевидной (так как обратное утверждение очевидно) и получила от участников много неверных (или неполных) решений. В статье [38] приведено 14 её различных решений. Любопытно, что хотя эта теорема приписана в ней известному голландскому математику Николасу де Брейну, в его статье рассматривалась похожая, но всё же другая задача. Статья [38] опубликована в 1987 г. и, по-видимому, все приведённые в ней решения появились не ранее 1985 г. Ссылок на Московскую олимпиаду в ней нет. Некоторые из этих решений приведены также в книге [2, с. 184–188].

Из одного из приведённых в [38] решений вытекает решение следующей задачи.

Задача 81. Если у прямоугольника наименьшая целая сторона равна a , то наименьшее число полос единичной ширины, на которые его можно разрезать, равно a .

Достижимость оценки здесь очевидна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly». М.: Либроком, 2009.
- [2] Айгнер М., Циглер Г. Доказательства из книги. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
- [3] Болтянский В. Г. Третья проблема Гильберта. М.: Наука, 1977.
- [4] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.
- [5] Гашков С. Б., Алгоритм Евклида, цепные дроби, числа Фибоначчи и квадрирование прямоугольников // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 6. М.: МЦНМО, 2002. С. 93–115.
- [6] Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика, алгоритмы, сложность вычислений. М.: Дрофа, 2005.
- [7] Губа В. С., Львовский С. М. «Парадокс» Банаха — Тарского. М.: МЦНМО, 2014.
- [8] Дьюдени Г. Кентерберийские головоломки. М.: Мир, 1979.
- [9] Доледенюк А. В., Доледенюк А. Н. Покрытие полосками // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 24. 2019. С. 75–100.
- [10] Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. М.: URSS, 2010.
- [11] Кордемский Б. Математическая смекалка М.: АСТ, 2018.
- [12] Линдгрэн Г. Занимательные задачи на разрезание. М.: Мир, 1977
- [13] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2019.
- [14] Московские математические олимпиады 1935–1957. М.: МЦНМО, 2010.
- [15] Московские математические олимпиады 1958–1967. М.: МЦНМО, 2013.
- [16] Московские математические олимпиады 1981–1992. М.: МЦНМО, 2017.
- [17] Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 1. М.: ГИТТЛ, 1957.
- [18] Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 6. М.: ГИТТЛ, 1961.
- [19] Саати Т. Целочисленная оптимизация и связанные с ней экстремальные задачи. М.: Мир, 1973.
- [20] Смуров М. В., Спивак А. В. Покрытие полосками (продолжение) // Квант. 1998. № 5. С. 6–12.
- [21] Фурре Е. Геометрические головоломки и паралогизмы. М.; Ижевск: РХД, 2000.
- [22] Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.
- [23] Серпинский В. О теории множеств. М.: Просвещение. 1966.
- [24] Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981.

- [25] Энциклопедия элементарной математики. Кн. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966.
- [26] Яглом И. М. Как разрезать квадрат. М.: URSS, 2018.
- [27] Яценко И. В. Парадоксы теории множеств. М.: МЦНМО, 2014.
- [28] Abbot T. G., Abel Z., Charlton D., Demaine E. D., Demaine M. L., Kominers S. D. Hinged Dissections Exist // <https://arxiv.org/abs/0712.2094>
- [29] Robinson A. The Banach — Tarski Paradox // <http://math.uchicago.edu/~may/REU2014>
- [30] McFarland A., McFarland J., Smith J. T. (editors). Alfred Tarski: Early Work in Poland — Geometry and Teaching. Birkhäuser, 2014.
- [31] Frederickson G. N. Dissections: Plane and Fancy. Cambridge University Press, 2003.
- [32] Kranakis E., Krizanc D., Urruita J. Efficient regular polygon dissections // JCD CG 1998: Discrete and Computational Geometry. P. 172–187.
- [33] Laczkovich M. Equidecomposability and discrepancy: a solution to Tarski's circle-squaring problem // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 404. P. 77–117.
- [34] Marks A. S., Unger S. T. Borel circle squaring // Ann. Math. 2017. Vol. 186, iss. 2. P. 581–605.
- [35] Moese H. Przyczynek do problemu A. Tarskiego: «O stopniu równoważności wielokątów» (English: A contribution to the problem of A. Tarski “On the degree of equivalence of polygons”) // Parametr. 1931–1932. Vol. 2. P. 305–309.
- [36] Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020.
- [37] Su F. E. The Banach — Tarski Paradox. 1990 // <https://math.hmc.edu/su/wp-content/uploads/sites/10/2019/06/The-Banach-Tarski-Paradox.pdf>
- [38] Wagon S. Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle // Amer. Math. Monthly. 1987. Vol. 94. № 7. P. 601–617.
- [39] Tao T. The Banach — Tarski Paradox // www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf
- [40] Tarski A. O stopniu równoważności wielokątów (English: On the degree of equivalence of polygons) // Młody Matematyk. 1931. Vol. 1. P. 37–44.
- [41] Tomkowicz G., Wagon S. The Banach — Tarski Paradox. Cambridge University Press, 2016.
- [42] https://ru.wikipedia.org/wiki/Шарнирная_равносоставленность

Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Можно ли заполнить 99 % пространства попарно непересекающимися шарами? (Имеется в виду заполненная доля объема шара, радиус которого стремится к бесконечности.)

(А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов)

2. Первоначально во всех целых точках числовой прямой расставлены натуральные числа. На первом шаге между каждыми двумя соседними числами записывается их среднее арифметическое, а исходные

числа стираются. На втором шаге с записанными числами проделывается та же операция, и так далее. Оказалось, что все числа, которые мы получаем на каждом шаге, натуральные. Можно ли утверждать, что на некотором шаге все числа равны между собой? (Фольклор)

3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n -мерного пространства. (А. Я. Канель-Белов)

4. Дробно-кубическое отображение — это отображение вида

$$z \rightarrow \frac{a_1 z^3 + b_1 z^2 + c_1 z + d_1}{a_2 z^3 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде композиции отображений вида $z \rightarrow z^2$, $z \rightarrow z^3$, $z \rightarrow az + b$, $z \rightarrow 1/z$? (А. Я. Канель-Белов)

5. а) Для любых ли длин биссектрис существует треугольник с такими биссектрисами и однозначно ли определяется?

б) Можно ли построить треугольник по трём биссектрисам циркулем и линейкой? (Фольклор)

6. Назовём матрицу *нильпотентной*, если некоторая её степень равна нулю.

а) Докажите, что любая матрица с нулевым следом есть сумма нильпотентных матриц. Каково минимальное их число, достаточное для любой такой матрицы? (Л. Радзивилловский)

б) Докажите, что любая матрица с нулевым следом представима в виде суммы 22 матриц с нулевым квадратом. (Можно ли уменьшить число 22, редакции не известно). (М. Брезар)

7. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \ln n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \ln k. \quad (\Phi. В. Петров)$$

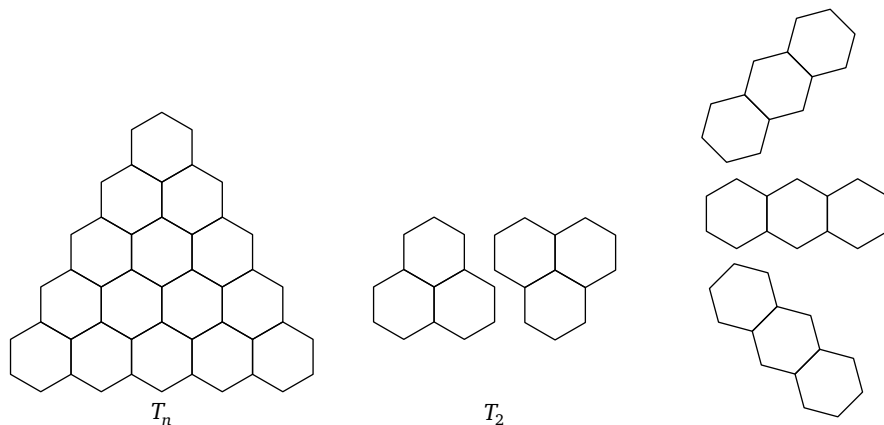


Рис. 1

8. Из $\binom{n}{2}$ правильных шестиугольников составили треугольную доску T_n со стороной n (рис. 1).

а) Докажите, что её нельзя разбить на ряды из троек правильных шестиугольников, стоящих в ряд.

б) Докажите, что её можно разбить на доски T_2 из троек шестиугольников тогда и только тогда, когда $n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$.

Допустим, что мы можем класть плитки из вещества или антивещества. Если плитка из вещества целиком лежит на плитке из антивещества или наоборот, то они аннигилируют. Можно ли замостить T_n в этом случае так, чтобы после аннигиляции каждая клетка была покрыта ровно по разу?

в) Докажите, что T_n замощается досками T_2 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \not\equiv 1 \pmod{3}$.

г) Докажите, что T_n замощается палочками с рис. 1 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \equiv 0, 8 \pmod{9}$.

(Дж. Х. Конвей, Дж. К. Лагариас)

9. Многочлен $p(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$p(x+1) - p(x) = x^{100} \quad \text{при всех } x.$$

Докажите, что $p(1-t) - p(t) \geq 0$ при всех $0 \leq t \leq 1/2$. (Д. Клюев)

10. Даны числа $1, 2, \dots, \lfloor e \cdot n! \rfloor$. Докажите, что их нельзя разбить на n классов так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство $a = b + c$.

(И. Шур)

11. Плотность в последовательности членов с данным свойством равна пределу при $n \rightarrow \infty$ их плотности среди первых n членов последовательности.

а) Пусть $s_{10}(n)$ — сумма по модулю 10 десятичных цифр числа n . Число n назовём k -хорошим, если $s_{10}(n) = s_{10}(n + k)$. Докажите, что плотность количества k -хороших чисел в последовательности $s_{10}(n)$ заключена между $9/11$ и $10/11$.

б) Слово Фибоначчи получается как предел при $n \rightarrow \infty$ последовательности слов S_n , где $S_0 = 0$, $S_1 = 01$, $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ при $n > 1$, т. е. S_n получается приписыванием S_{n-1} слева к S_{n-2} . Если сдвинуть слово Фибоначчи по себе на k позиций, то возникают рассогласования: 0 наезжает на 1 или наоборот. Докажите, что для любого k плотность рассогласования в слове Фибоначчи существует и при подходящем выборе k может быть сколь угодно малой.

в) Слово Трибоначчи получается из 1 последовательным применением подстановок $1 \rightarrow 12$, $2 \rightarrow 23$, $3 \rightarrow 1$ и переходом к пределу по расширяющейся последовательности подслов: 1213121121312. Докажите, что для любого k плотность рассогласования существует и при подходящем выборе k может быть сколь угодно малой.

(А. Я. Канель-Белов, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов)

12. а) Укажите полную систему инвариантов обычного кубика Рубика (т. е. опишите, из каких начальных конфигураций можно его собрать).

б) Укажите полную систему инвариантов кубика Рубика с ребром n .

в) Исследуйте многомерный аналог данной задачи.

(А. Я. Канель-Белов)

ПОПРАВКИ К ЗАДАЧНИКУ ПРЕДЫДУЩИХ ВЫПУСКОВ

1. Приводим уточнённое условие задачи 25.6, п. (в):

Задача 25.6. в) Пусть a_{ij} , c_i , $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + c_i$$

целое и делится на $k!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \dots, a_{in}$, c_i все числа целые?

(С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов)

2. Автором задачи 26.6, п. (в) является А.Я.Канель-Белов.

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 194, см. решение: выпуск 6, с. 139–140) опубликована

Задача 1.5. Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

(А. К. Ковальджи)

Стиль решения этой задачи непривычен для многих «олимпиадников». Тут дело вовсе не в каком-то трюке. Надо осознать, что значит *две равные части*. Это значит, что *есть движение, переводящее одну часть в другую*. А все типы движений плоскости описаны в теореме Шаля. Далее следует небольшой перебор. (Подробнее — см. решение: «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 6, 2002, с. 139–140.) Похожие рассуждения используются и в такой задаче из второй серии «Математического просвещения»:

Вторая серия, выпуск 2, задача Б.9 (см. решение: сер. 2, выпуск 6, с. 345–347). *Правильным n -угольником (на плоскости или в пространстве) называется замкнутая ломаная, состоящая из n равных звеньев и такая, что углы между соседними звеньями все равны между собой.*

Известно, что на плоскости правильные n -угольники существуют при любом n . При каких n существуют неплоские правильные многоугольники?
(В. И. Арнольд)

В связи с этим возникает

Задача 1.5'. а) Ломаная делит центрально-симметричную выпуклую фигуру на две равные части. Докажите, что она проходит через её центр.

б) Аналогичный вопрос для шаров произвольной размерности, а также для кубов.

в) Аналогичный вопрос для центрально-симметричного выпуклого тела произвольной размерности.

г) Центрально-симметричная фигура покрыта двумя конгруэнтными частями. Верно ли, что центр лежит на их границе?

(А. Я. Канель-Белов, С. В. Маркелов)

См. А. Я. Белов, С. В. Маркелов, «Разбиения на равные части», <http://www.turgor.ru/problems/zktg/>, а также: Задачи заочного конкурса Турнира Городов // Математическое образование, № 3–4 (6–7), июль–декабрь 1998, с. 142–150.

Решение этих задач может стать темой публикации.

В выпуске 1 (с. 194, см. решение: выпуск 4, с. 220) опубликована

Задача 1.8. а) Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчётным, если для любых двух подмножеств из этого семейства одно строго содержится в другом?

б) Тот же вопрос, если пересечение любых двух множеств в семействе конечно.
(Фольклор)

В этой связи возникает

Задача 1.8'. Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчётным, если пересечение любых двух множеств в семействе состоит из не более чем 2020 элементов?
(Л. Радзивилловский)

В выпуске 3 (с. 232, см. решение: выпуск 4, с. 223–224) опубликована

Задача 3.2. Пусть $|\varepsilon_i| < 1$ и произведение $\prod (1 - \varepsilon_i)$ сходится. Верно ли, что сходится ряд $\sum \varepsilon_i$?
(А. Белов)

Известна классическая задача:

Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится. Следует ли из этого, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^3$ сходится?

Обобщением задачи 3.2 и этого классического вопроса служит

ЗАДАЧА 3.2'. Для каких функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено следующее: если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ тоже сходится? (А. Белов)

В выпуске 4 (с. 217, см. решение: выпуск 7, с. 194–195) опубликована

ЗАДАЧА 4.10. Известно, что ранг коммутатора двух матриц $[A, B] = AB - BA$ равен единице. Докажите, что матрицы A и B имеют общий собственный вектор. (Фольклор)

На международной студенческой олимпиаде IMC-2020 была предложена задача на схожий сюжет (день 1, задача 2):

ЗАДАЧА 4.10'. Пусть A и B — матрицы порядка n с вещественными коэффициентами, E — единичная матрица. Известно, что $\text{Rk}([AB] + E) = 1$, где E — единичная матрица порядка n . Докажите, что

$$\text{Tr}((AB)^2) - \text{Tr}(A^2B^2) = \binom{n-1}{2}.$$

(Рустам Турдибаев, В. И. Романовский)

В выпуске 5 (с. 217, см. решение: выпуск 8, с. 252–254) опубликована

ЗАДАЧА 5.5. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр. (А. Я. Белов)

Она связана с задачей, которую В. А. Сендеров дал на матбое между школами 2 и 179 в 1979 году (см. выпуск 23, с. 217):

ЗАДАЧА 5.5'. Дан додекаэдр. Какое наименьшее число его движений этого додекаэдра нужно взять, чтобы любое движение додекаэдра можно было представить в виде их композиции? (Фольклор)

В этой связи уместно напомнить классику:

ЗАДАЧА 5.5''. Докажите, что группа вращений додекаэдра изоморфна A_5 (группе всех чётных перестановок множества из 5 элементов). (Фольклор)

В выпуске 6 (с. 133, см. решение: выпуск 8, с. 255) опубликована

ЗАДАЧА 6.1. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдётся один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдётся цепочка из 12 вложенных людоедов. (В. Сендеров)

Родственная задача 6' опубликована в выпуске 23, с. 217, см. решение выпуск 25, с. 176–177. Продолжением темы служит

Задача 6.1''. а) *Натуральные числа от 1 до n расставляются в ряд в произвольном порядке (число n фиксировано). Расстановка называется k -разбиваемой, если в ней можно отметить k чисел (не обязательно стоящих подряд), идущих в порядке убывания. Остальные расстановки называются k -хорошими. Докажите, что количество k -хороших расстановок не превосходит $(k-1)^{2n}$.*

б) *Докажите, что число 3-хороших расстановок есть число Каталана (https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Каталана).*

(В. Н. Латышев, А. Я. Белов)

В выпуске 8 (с. 247, см. решение: выпуск 9, с. 233) опубликована

Задача 8.8. В граничных клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы так, чтобы каждое число равнялось среднему арифметическому своих соседей.
(М. З. Двейрин)

Приведём более общий факт, который доказывается точно так же:

Задача 8.8'. В конечном графе в некоторых вершинах стоят числа, а некоторые вершины — пустые. Докажите, что все пустые вершины можно заполнить так, чтобы число, стоящее в пустой вершине, равнялось среднему арифметическому его соседей. Если же граф связан, то это осуществляется однозначно. (Такие расстановки называются дискретными гармоническими функциями.)

В выпуске 9 (с. 223, см. решение выпуск 14, с. 277) опубликована

Задача 9.5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?
(Фольклор)

В этой связи возникают следующие вопросы.

Задача 9.5'. а) *Существует ли функция, разрывная во всех рациональных точках и непрерывная во всех иррациональных?* (Фольклор)

б) *Функция бесконечно дифференцируема во всех рациональных точках. Верно ли, что в какой-то иррациональной точке она также бесконечно дифференцируема? Аналогичный вопрос про k раз дифференцируемые функции.* (А. Белов)

в) *Производная функции равна нулю во всех рациональных точках. Верно ли, что эта функция — константа?* (Фольклор)

В выпуске 12 (с. 235, см. решение: выпуск 14, с. 236–237) опубликована

Задача 12.1. $\cos \alpha = 1/3$. Докажите, что градусная мера угла α иррациональна.
(Фольклор)

Продолжением темы служит

ЗАДАЧА 12.1'. Пусть $\varphi = \arctg(m/n)$. Докажите неравенство на дробную часть

$$\left\{ \frac{k \cdot \varphi}{\pi} \right\} > \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \right)^k. \quad (\text{Л. Радзивиловский})$$

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 14, с. 270–271, А. А. Заславский «О вычислении объёма n -мерного шара») опубликована

ЗАДАЧА 13.2. К чему стремится объём n -мерного шара радиуса 2008 при $n \rightarrow \infty$? (А. Я. Белов)

В качестве упражнения к решению советуем найти классический интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$$

С задачей 13.2 связан следующий сюжет:

ЗАДАЧА 13.2'. Последовательность непрерывных функций $\{f_i\}_{i=0}^\infty$ такова, что

$$f_{i+1}(x) = \int_0^x f_i(t) dt.$$

Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2020)$. (Л. Радзивиловский)

В выпуске 13 (с. 179–180, см. решение выпуск 20, с. 258–263) опубликована

ЗАДАЧА 13.6. Докажите, что в алгебре матриц порядка n выполняются следующие тождества.

а) Тождество Размыслова:

$$\begin{aligned} n \cdot \text{Tr}(A) \cdot \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 x_{\sigma(3)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(n^2-1)} y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)} = \\ = \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma A x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdot \dots \cdot y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)} + \\ + \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 A x_{\sigma(2)} y_2 \cdot \dots \cdot y_{n^2-1} x_{\sigma(n^2)} + \\ + \dots + \sum_{\sigma \in S_{n^2}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdot \dots \cdot y_{n^2-1} A x_{\sigma(n^2)}. \end{aligned}$$

б) Тождество Амицура — Левицкого:

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(2n)} = 0.$$

Здесь x_i, y_i, A — произвольные матрицы, S_k — группа перестановок из k элементов, $(-1)^\sigma = +1$ для чётных перестановок и $(-1)^\sigma = -1$ для нечётных.

С этим сюжетом связана

Задача 13.6'. а) Пусть A — матрица второго порядка. Тогда

$$\det(A) = \frac{(\operatorname{Tr}(A))^2 - \operatorname{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) Пусть A — матрица n -го порядка. Тогда $\det(A)$ есть многочлен с рациональными коэффициентами от величин $\operatorname{Tr}(A)^k$, $1 \leq k < n$.

(Фольклор)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

Задача 13.10. k -параллелепипедом называется прямоугольный параллелепипед, среди рёбер которого имеется не более k различных. Докажите, что если параллелепипед P можно разрезать на k -параллелепипеды, то длины его рёбер порождают векторное пространство размерности не выше k над $\mathbb{Q}$.

(Л. Радзивилловский, И. Феценко, Д. Радченко, М. Танцюра)

Решение см.: Радзивилловский Л., Радченко Д., Танцюра М., Феценко И. Разрезание параллелепипеда на бруски // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 215–227.

Родственная задача 13.10' опубликована в выпуске 24 (с. 179, см. решение пп. а), б): настоящий выпуск, с. 254–258.

Продолжением темы служит следующее обобщение задачи Турнира городов (Шестой турнир, весна 1985 г., основной вариант):

Задача 13.10''. а) Квадрат разбит на прямоугольники. Цепочкой называется такое подмножество K множества этих прямоугольников, что существует сторона квадрата A , целиком закрытая проекциями прямоугольников из K , но при этом ни в какую точку не проектируются внутренние точки двух прямоугольников из K . Докажите, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.

б) Аналогичная задача для (многомерного) куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки нужно заменить сторону на ребро).

(А. И. Гольберг, В. А. Гурвич)

В выпуске 16 (с. 232) опубликована

Задача 16.12. а) Куб $n \times n \times n$ разбит на n^3 единичных кубиков, каждый раскрашен в один из трёх цветов. Докажите, что найдётся одноцветный путь, соединяющий противоположные грани большого кубика. Соседними считаются кубики, имеющие хотя бы одну общую точку.

(Теорема Лебега о покрытиях)

б) k -мерный куб $n \times n \times \dots \times n$ разбит на n^k единичных кубиков, каждый раскрашен в один из l цветов. Докажите, что найдётся связный кластер объёма $C(k)n^{k+1-l}$.

(Г. В. Кондаков, А. Я. Белов)

Продолжением темы служит

Задача 16.12'. Пусть n -мерная сфера единичного радиуса разбита на многоугольники, которые раскрашены в k цветов так, что точки на расстоянии $\pi - 0,001$ раскрашены в разные цвета. Тогда найдётся точка, к которой примыкают не менее $n + 1$ попарно разноцветных многоугольников.

(А. Я. Белов, Д. Черкашин, В. Воронов)

Эта задача связана также со следующей (выпуск 21, с. 273–274):

Задача 21.12. а) Область между двумя параллельными прямыми раскрашена в 2 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета.

(Л. А. Емельянов)

б) Область между двумя параллельными плоскостями раскрашена в 4 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета.

(А. Я. Белов, Д. Черкашин, В. Воронов)

В выпуске 17 (с. 196, см. решение: выпуск 20, с. 264–265) опубликована

Задача 17.1. Можно ли в куб достаточно большой размерности с ребром 1 см вложить здание МГУ?

(Ф. Ивлев)

Продолжением темы служит

Задача 17.1'. а) Найдите минимально возможное n такое, что равносторонний треугольник со стороной 100 содержится в n -мерном единичном кубе $[0, 1]^n$. Каков максимальный периметр треугольника, лежащего в 11-мерном кубе?

б) Тот же вопрос для квадрата со стороной 10.

в) (Задача на исследование.) Аналогичный вопрос для вложения k -мерного куба в n -мерный.

г) Каков максимальный радиус трёхмерного шара, лежащего внутри четырёхмерного куба?

(Л. Радзивиловский)

В выпуске 22 (с. 232) опубликована

Задача 22.5. а) Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий биекцию между точками с неотрицательными целыми координатами и целыми неотрицательными числами? (Фольклор)

б) (Задача на исследование.) Какова его возможная степень?

(И. Г. Царьков)

в) Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства.

(А. Я. Канель-Белов)

Решение п. а) опубликовано в статье: *Гашков С. Б.* Замечания к задачнику «Математического просвещения» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 259–262 (там же обсуждался п. б)). Решение п. в) см. выпуск 26, с. 282–284.

Отметим следующее.

1. В решении п. а) использовалась следующая конструкция:

$$P_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i + n - 1 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + n - 2 \right) + \dots + x_1. \quad (1)$$

Важный факт: если многочлен $Q(x_1, \dots, x_n)$ принимает целые значения в целых точках, то он есть целочисленная комбинация многочленов вида

$$Q_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \binom{x_i}{n_{i,\alpha}},$$

где $n_{i,\alpha}$ — степень многочлена Q_α по x_i . Таким образом, хотя коэффициенты многочлена Q могут оказаться нецелыми, они рациональны и знаменатель делит $\prod_{i=1}^n n_{i,\alpha}!$ (при $n = 1$ он делит $\deg(Q)!$).

2. То, что степень искомого многочлена не может быть меньше k (т. е. числа переменных), доказывается с помощью асимптотического перехода (см. выпуск 26, с. 261). Подобные рассуждения распространены в науке и в олимпиадной практике. См. *Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2016.

Упражнения. 1. а) Докажите, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^{2020} = C$$

при подходящем C может иметь сколь угодно много решений в целых числах.

1. б) Докажите, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^{2021} = C$$

при бесконечно многих натуральных C не имеет решений в целых числах.

1. в) Известно, что каждое натуральное число представимо в виде суммы l членов возрастающей последовательности $\{a_n\}$. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^l} \geq \frac{1}{l!}.$$

2. Обозначим через $S(y)$ сумму цифр числа y . Докажите, что существует бесконечно много номеров n , таких, что $S(3^n) \geq S(3^{n+1})$. Докажите, что существует бесконечно много номеров n , таких, что $S(2^n) > S(2^{n+1})$.

3. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Доказать, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

См. также подборки, посвящённые асимптотикам, из книг: Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2016; а также Канель-Белов А. Я., Трепалин А. С., Яценко И. В. Олимпиадный ковчег. М.: МЦНМО, 2016.

Родственная задача 22.5' опубликована в выпуске 26 (с. 273, см. решение: настоящий выпуск, с. 259–260).

В упомянутой работе С. Б. Гашкова был поставлен открытый вопрос, который удалось решить. Сформулируем его в виде задачи:

Задача 22.5''. а) Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий инъекцию множества точек с целыми координатами в множество целых чисел?

б) (Задача на исследование.) Какова его возможная степень?

(С. Б. Гашков)

В выпуске 23 (с. 216) опубликована

Задача 23.6. Все вершины выпуклого 10^9 -угольника имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не меньше 10^{12} .

(А. Я. Канель-Белов)

Задача была предложена на 3 Краснодарском фестивале юных математиков в 1992 году. Следующая задача была на олимпиаде 239 школы г. Санкт-Петербурга в 1998 году.

Задача 23.6'. Вершины выпуклого $2n$ -угольника ($n \geq 2$) лежат в узлах целочисленной решётки. Пусть S_n — минимальное возможное значение его площади.

а) Докажите, что $S_n \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

б) Докажите, что существует положительное число α такое, что при всех натуральных n выполнено неравенство $S_n > \alpha \cdot n^3$.

(С. Иванов)

Вот задачи на родственный сюжет:

Задача 23.6''. а) (Международная студенческая олимпиада IMC-2020, день 1, задача 3.) Пусть $d \geq 2$ — натуральное число. Докажите, что существует константа $C(d)$ такая, что для любого центрально-симметричного выпуклого многогранника¹⁾ $K \subset \mathbb{R}^d$ и любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдётся выпуклый многогранник $L \subset \mathbb{R}^d$ с не более чем $C(d)\varepsilon^{1-d}$ вершинами, для которого

$$(1 - \varepsilon)K \subseteq L \subseteq K. \quad (\text{Ф. В. Петров})$$

б) Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$ на 4^d вершинах и все вершины имеют целые координаты. Тогда найдутся грань Γ и точка q во внутренности этой грани такие, что q лежит в минимальной решётке, натянутой на вершины Γ .

(Д. А. Захаров)

В выпуске 23 (с. 216) опубликована

Задача 23.10. а) Полицейский ловит Гангстера в городе, представляющем собой квадрат 10×10 , разбитый улицами на квадратные клетки — кварталы. Полицейский видит Гангстера, только если на него натывается, и оба они ездят только по улицам. Скорость Полицейского в 10 000 раз больше скорости Гангстера. Может ли Полицейский поймать Гангстера за ограниченное время?

б) Тот же вопрос, если потребовать, чтобы путь полицейского был конечнозвенной ломаной.

(А. Я. Канель-Белов)

Дополнения см. выпуск 24 (с. 180):

Задача 23.10'. По рёбрам правильного октаэдра бегают паук и муха. Паук видит муху, находясь с ней на одном ребре. Сможет ли он её поймать, если скорость паука в 2,5 раза больше скорости мухи? При каком наименьшем соотношении скоростей он может её поймать? (Открытый вопрос.)

Задача 23.10''. (Задача для исследования. Редакции полное решение неизвестно.) Полицейский ловит Гангстера на трёх улицах длиной 1, выходящих из одной точки. Максимальная скорость Полицейского в 2 раза больше максимальной скорости Гангстера, но Полицейский близорук,

¹⁾ В действительности утверждение верно для любого центрально-симметричного выпуклого тела. — Прим. составителя.

он видит только часть улицы длиной ε , а Гангстер видит всё вокруг и Полицейского в том числе. Определите, при каких ε Полицейский сможет поймать Гангстера. Рассмотрите тот же вопрос при других соотношениях скоростей.

(По мотивам задачи: Задачник «Кванта», М645, авторы В. Дринфельд²⁾, В. Соколов)

Наш читатель К. Э. Каибханов предлагает следующую задачу на близкую тему³⁾.

ЗАДАЧА 23.10'''. В городе Удираевске сеть дорог устроена так, что с каждого перекрёстка можно попасть на любой другой перекрёсток, а тупиков в городе нет. В начальный момент Неуловимый Джо и двое полицейских находятся на разных перекрёстках, а затем начинают двигаться по дорогам. За один ход Джо перемещается на соседний перекрёсток или остаётся на месте; следующим ходом полицейские одновременно перебираются на соседние с ними перекрёстки. Нарисуйте одну из возможных схем дорог города Удираевска, при которой Неуловимый Джо, зная местоположение полицейских, всегда сможет избежать поимки.

(К. Э. Каибханов)

Отметим, что решение задачи для трёх полицейских неизвестно.

В выпуске 25 (с. 167, см. решение: выпуск 26, с. 284) опубликована

ЗАДАЧА 25.1. Индекс Хирша исследователя — это максимальное такое n , что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору?

(А. Я. Канель-Белов)

Имеется задача на литературно схожий сюжет:

ЗАДАЧА 25.1'. Профессор доказывает равносильность n утверждений. Он задаёт своим аспирантам темы диссертационной работы вида: Докажите, что из утверждения с номером k следует утверждение с номером l . Нельзя защищать диссертацию, являющуюся прямым логическим

²⁾ В. Дринфельд — филдсовский лауреат, один из крупнейших специалистов по квантовой теории поля. Будет замечательно, если кто-то из наших читателей продвинется в этой задаче.

³⁾ Усложнение задачи того же автора о двух полицейских: см. «Квант», 2008, № 2, с. 23, задача 5. Решение см. «Квант», 2008, № 3, с. 59.

следствием из защищённых ранее. Какое максимальное число аспирантов может защитить профессор? (Фольклор)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: настоящий выпуск, с. 266–267. опубликована

Задача 26.4. Пусть $k + 2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k + 2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k , то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k . (А. Я. Канель-Белов)

Развитием темы служит

Задача 26.4'. а) Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны. (Фольклор)

б) Обобщите и решите задачу для случая попадания $k + 1$ многомерной птички в $(k - 1)$ -мерное подпространство. (А. Я. Канель-Белов)

Решения задач из прошлых выпусков

9.11. Условие. Треугольник с углами α, β, γ разбивается биссектрисой одного из углов на две части, одна из которых выбрасывается. С оставшимся треугольником производится та же процедура и т. д. Для каких значений α, β, γ может получиться треугольник, подобный исходному?

(А. Белов, А. И. Галочкин)

Ответ: среди углов должны быть два, отношение которых имеет вид $\frac{2m+1}{2n}$, где m, n натуральные.

Решение. Каждая операция из условия состоит в применении к вектору (α, β, γ) одного из шести линейных преобразований f_{ij} , где

$$f_{12}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{2}, x_2 + \frac{x_1}{2}, x_3 \right),$$

а остальные преобразования строятся аналогично. Если в результате какой-то композиции h таких преобразований числа (α, β, γ) поменялись местами, но не изменились как множество, то после шестикратного выполнения h они встанут на свои места.

Значит, наша задача сводится к описанию неподвижных точек с положительными координатами для всевозможных композиций преобразований f_{ij} .

Сначала покажем, что треугольники, описанные в ответе, подходят. Два их угла имеют вид $a\theta$ и $b\theta$, где a и b — натуральные числа, одно из которых чётное, а другое нечётное. Все операции будем выполнять лишь с этими двумя углами. Для простоты считаем, что $\theta = 1$. Будем каждый раз отнимать половину от чётного угла и прибавлять эту половину к нечётному. Получим последовательность пар чисел, например такую:

$$(5, 4) \rightarrow (7, 2) \rightarrow (8, 1) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (2, 7) \rightarrow \dots$$

Так как сумма чисел не меняется, последовательность заиклится. У неё нет предпериода, так как однозначно определено обратное действие: из

большого числа вычитается меньшее, а меньшее число удваивается. Поэтому когда-нибудь снова получится пара (a, b) , что и требовалось.

Теперь покажем, что другие треугольники не подходят. Рассмотрим некоторую композицию h преобразований f_{ij} . Множество её неподвижных точек — линейное подпространство в $\mathbb{R}^3$.

Случай 1. В множестве неподвижных векторов композиции h есть хотя бы два неколлинеарных вектора с положительными координатами. Тогда у h есть ненулевой неподвижный вектор, у которого все координаты неотрицательные и хотя бы одна координата равна нулю.

Случай 1a. Нулевая координата только одна. Без ограничения общности пусть вектор имеет вид $(\alpha, 0, 0)$. Тогда среди операций f_{ij} , образующих h , не может быть операций f_{12} и f_{13} , иначе на каком-то шаге вторая или третья координата стала бы положительной и осталась такой в дальнейшем. У h есть также неподвижный вектор, все координаты которого положительны. В комбинации, образующей h , нет f_{21} и f_{31} — иначе бы первая координата этого вектора увеличилась. Значит, h — это композиция операций f_{23} и f_{32} .

Случай 1b. У h есть неподвижный вектор с одной нулевой координатой. Без ограничения общности пусть это $(0, \beta, \gamma)$, где β и γ положительны. Тогда (аналогично предыдущему) в композиции нет множителей f_{21} и f_{31} . Поэтому первая координата не может увеличиваться. А так как есть неподвижный вектор с положительными координатами, в композиции нет f_{12} и f_{13} — иначе бы его первая координата уменьшилась. Снова получаем, что h — это композиция f_{23} и f_{32} .

Итак, можно считать, что все преобразования совершаются лишь с β и γ . В результате выполнения h получаются рациональные линейные комбинации из β и γ . Для неподвижного вектора отсюда следует, что отношение β к γ — рациональное число.

Теперь можно считать, что $\beta = n\theta$, $\gamma = m\theta$, где натуральные n и m взаимно просты. Надо показать, что n и m не могут быть оба нечётными. Но в этом случае через любое количество k операций f_{23} или f_{32} будут получаться числа вида $n_k\theta/2^k$ и $m_k\theta/2^k$, где n_k и m_k — нечётные натуральные. Поэтому мы не получим исходный вектор.

Случай 2. Пространство неподвижных точек отображения h одномерно. Тогда координаты неподвижного вектора (α, β, γ) при дополнительном условии $\alpha + \beta + \gamma = 1$ можно найти по методу Гаусса из системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами, а значит, эти координаты рациональны.

Для рационального числа определена степень вхождения двойки (разница степеней вхождения двойки в числитель и знаменатель). Если не

для всех координат эти степени одинаковы, то какие-то две координаты относятся как нечётное число к чётному, что и требовалось. В противном случае будем следить, как меняются степени вхождения двойки при преобразованиях f_{ij} . Сначала это (a, a, a) , после первой операции две степени равны $a - 1$, а одна равна a . Несложный перебор показывает, что и после любой следующей операции две степени будут равны, а третья строго больше, поэтому мы никогда не получим снова (a, a, a) .

(И. В. Митрофанов)

11.7. Условие. Рассмотрим множество непрерывных функций на отрезке $[0, 2n]$, таких, что $f(0) = 0$ и на любом интервале $(k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, производная равна ± 1 .

- а) Каких функций больше: неотрицательных или таких, что $f(2n) = 0$?
(Фольклор)
- б) Как подсчитать число таких функций¹⁾, что $-n/k < f(x) < n/k$?
(А. Я. Белов)

Ответ: а) тех и других поровну; б) см. решение 1.

Далее «функции» означает «функции, удовлетворяющие условию задачи».

РЕШЕНИЕ 1. а) Очевидно, количество функций с условием $f(2n) = 0$ равно C_{2n}^n (нужно выбрать n отрезков, на которых производная равна $+1$).

Чтобы подсчитать количество неотрицательных функций, рассмотрим такой процесс. В момент времени $t = 0$ в точке 0 написано число 1, в точке -2 написано число -1 , в остальных точках нули. Конфигурация в момент времени $t + 1$ получается из конфигурации в момент t одновременной заменой для всех x числа, написанного в точке x , на сумму чисел в точках $x - 1$ и $x + 1$. Несложно видеть, что в каждый момент в точках, симметричных относительно -1 , записаны противоположные числа, причём в точках с неотрицательной координатой записаны неотрицательные числа. Кроме этого, индукцией по t легко проверяется, что при $k \geq 0$ в момент времени t в точке k записано количество неотрицательных функций, определённых на отрезке $[0, t]$ и таких, что $f(0) = 0$ и $f(t) = k$.

При этом общее количество неотрицательных функций на отрезке $[0, 2n]$ равняется сумме всех чисел, записанных в неотрицательных точках, в момент времени $t = 2n$. Также индукцией по t можно показать, что для любого целого k в момент времени t в точке k записана разница количеств способов добраться в точку k за t прыжков на ± 1 из точки 0 и из точки -2 .

¹⁾ Здесь x — любая точка из $[0, 2n]$; k фиксировано, $k > 0$.

Из точки 0 можно сделать $2n$ прыжков 2^{2n} способами, из них C_{2n}^n ведут в 0, а в положительные и отрицательные точки ведёт поровну способов, поэтому $(2^{2n} + C_{2n}^n)/2$ способов ведёт в положительные точки. Аналогично из точки -2 в неотрицательные точки можно добраться за $2n$ прыжков $(2^{2n} - C_{2n}^n)/2$ способами. Вычитая из первого количества второе, получаем C_{2n}^n .

б) Обозначим $[n/k]$ через a . Пусть в момент времени $t = 0$ в точках вида $4ta$ (где t целое) написано число 1, в точках вида $(4t + 2)a$ написано число -1 , в остальных целых точках написан 0. Числа меняются по тому же правилу, что и в п. (а). Индукцией по t получаем, что в момент t число, записанное в i при $-a < i < a$, равняется количеству функций на $[0, t]$ с модулями значений меньше a , принимающих значение i в точке t .

Также индукцией по t получаем, что искомое количество функций равно $S_1 - S_2$, где S_1 — количество способов попасть за $2n$ прыжков длины 1 из всевозможных точек вида $4ta$ в интервал $-a < i < a$, а S_2 определяется аналогично с той разницей, что начала пути — всевозможные точки вида $(4t + 2)a$. Очевидно, за $2n$ шагов мы сможем прийти только в чётные точки. Количество способов добраться из $2at$ в $2i$ за $2n$ шагов равно C_{2n}^{n+am-i} .

Суммируя это по всем t и $-a < 2i < a$, получим в итоге

$$\sum_{-a/2 < i < a/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m C_{2n}^{n+am-i}.$$

Заметим, что все числа вида $am - i$ в этой сумме различны. Изменяя порядок суммирования, можно привести формулу к виду

$$\sum_{j=0}^{2n} \varepsilon_j C_{2n}^j,$$

где $\varepsilon_j = 0$, если $\frac{2(n-j)+a}{2a}$ целое, а в противном случае $\varepsilon_j = (-1)^{\lfloor \frac{2(n-j)+a}{2a} \rfloor}$.

(И. В. Митрофанов)

Решение 2. Приведём другую версию решения, объясняющую его основные идеи и демонстрирующую связь с физикой.

а) Рассмотрим диффузию вещества в одномерной среде. Пусть координата x определяет момент времени, а координата y — точку в среде, и пусть каждая частица вещества за единицу времени сдвигается на 1 либо вниз, либо вверх. Тогда траектория каждой частицы — ломаная, удовлетворяющая условию задачи. Количество таких ломаных равно 2^{2n} .

Поместим 2^{2n} частиц вещества в начало координат, и пусть они движутся по всем возможным траекториям. Поместим в точку $x = 0$, $y = -2$ такое же количество антивещества, и пусть его частицы также движутся по всем возможным траекториям. Рассмотрим пути частиц вещества, заходящие в какую-либо точку с координатой $y = -1$. Каждому такому пути частицы отвечает путь античастицы, симметричный ему относительно прямой $y = -1$. Соответствующие частицы вещества и антивещества аннигилируют в точках с координатой $y = -1$. Поэтому количество вещества, «выжившего» и попавшего в точки с неотрицательной координатой y , будет равно количеству неотрицательных ломаных.

Теперь подсчитаем итоговое количество вещества в области $y \geq 0$ по-другому. Разность между количествами вещества и антивещества не меняется при аннигиляции, поэтому при её определении можно считать, что сначала все частицы проходят свои траектории и лишь затем происходит аннигиляция. В точку $2m + 2$ (для целого неотрицательного m) придёт столько вещества, сколько придёт антивещества в точку $2m$. После аннигиляции количество сохранившегося вещества в области $y \geq 0$ будет равно количеству вещества, пришедшему до аннигиляции в точку 0, т. е. количеству таких ломаных, что $f(2n) = 0$.

б) Рассмотрим теперь диффузию вещества и антивещества на окружности. В точки с координатами $x = -4mk$, где m целое, поместим вещество (по 2^{2n} единиц), а в точки с координатами $2(2m + 1)k$ — антивещество (тоже по 2^{2n} единиц). Искомое количество ломаных будет равно количеству сохранившегося вещества. Аннигиляция будет происходить в точках вида $x = 2m + 1$ и только в них. Просуммируем вклады по источникам, учитывая, что ненулевой вклад могут давать слагаемые с $2mk \leq 2n$. Итоговую сумму можно записать в виде, приведённом в конце решения 1.

Комментарий. Задача возникла при исследовании уравнения диффузии.

См. также: *Ширяев А. Н.* Вероятность-1. М.: МЦНМО, 2007. Гл. I, § 10 (с. 123–131).

(А. Я. Канель-Белов)

11.7' (выпуск 26, с. 269). Условие. Докажите, что

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (\text{Фольклор})$$

Решение. Рассмотрим ломаные, описанные в задаче 11.7. Считаем, что проекция каждого звена такой ломаной на ось абсцисс занимает некоторый отрезок $[k, k + 1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Количество таких ломаных, ведущих из начала координат в точку $(2n; 0)$, равно $\binom{2n}{n}$, поскольку количество

звеньев, ведущих вверх, должно равняться количеству звеньев, ведущих вниз, т. е. равняться n .

Каждая такая ломаная должна пересечь прямую $x = n$. Число ломаных, ведущих из начала координат в точку $(n; n - 2k)$, равно $\binom{n}{k}$ (следует выбрать k шагов вниз, делается это $\binom{n}{k}$ способами. В другие точки на прямой $x = n$ ломаная привести не может (кстати, почему?)

Теперь отметим, что любая наша ломаная состоит из левой и правой части, которые проходятся независимым образом. Поэтому число ломаных, проходящих через точку $(n; n - 2k)$, равно $\binom{n}{k}^2$. Суммируя по k , получаем требуемое.

КОММЕНТАРИЙ. Рассуждая аналогично для сечения ломаных прямой $x = n + L$, где L целое, $-n \leq L \leq n$, получаем

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+L}{k} \cdot \binom{n-L}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

(А. Я. Канель-Белов)

13.10' (выпуск 24, с. 179). Условие.

а) Можно ли разбить плоскость на попарно различные квадраты?

(А. Я. Канель-Белов)

б) Докажите, что из попарно различных кубов нельзя составить кирпич.

(Фольклор)

в) (Открытый вопрос.) Можно ли разбить n -мерное пространство ($n > 2$) на попарно различные кубы? (Предполагаемый ответ — отрицательный, невозможность для размерности k влечёт невозможность для $n > k$.)

(А. Я. Канель-Белов)

Ответ: а) да; б) нет.

Решение. а) Алгоритм разбиения понятен из рис. 1.

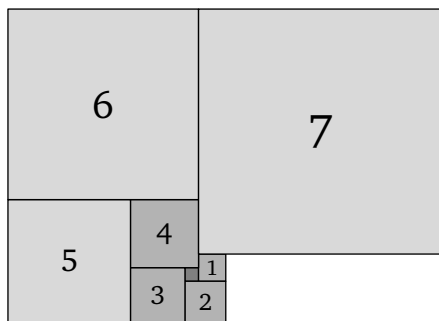


Рис. 1

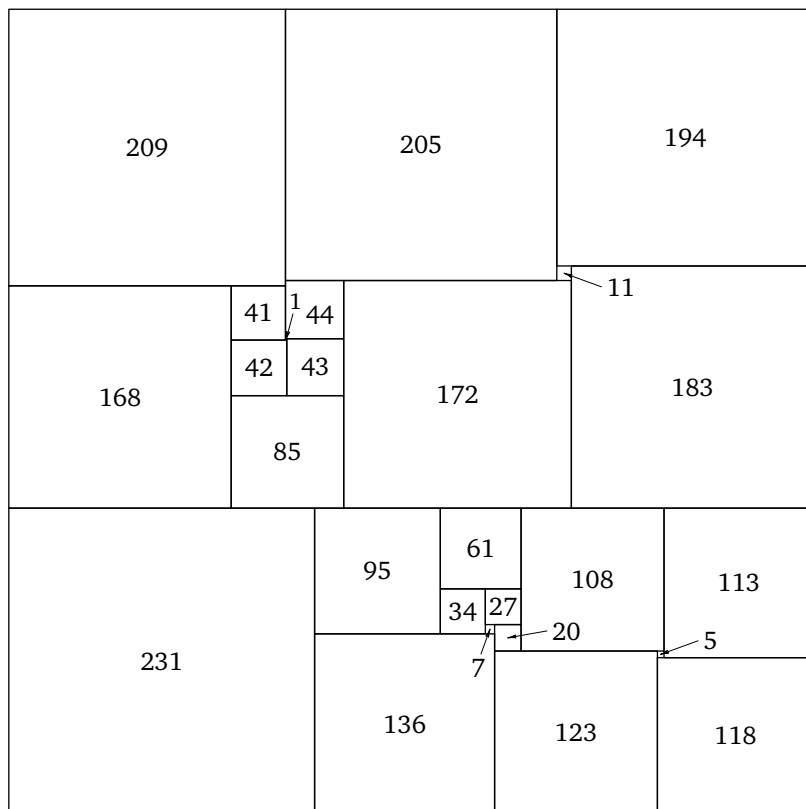


Рис. 2

Можно также действовать на основе разбиения квадрата на попарно разные квадраты (рис. 2). Оказывается, для этого можно использовать аналогию с электрическими цепями.

Возьмём однородную прямоугольную железную пластину высотой H и шириной W . На верхней стороне установим электрический потенциал H , а на нижней 0. В силу однородности материала, электрический потенциал в каждой точке равен высоте, а значит, электрический ток протекает вертикально. Поэтому если мы сделаем тонкие вертикальные разрезы или приклеим к пластине горизонтальные отрезки, сделанные из сверхпроводника, ничего не изменится. Можно считать пластину резистором, сопротивление которого пропорционально W/H . Выбрав соответствующие единицы измерения, можно считать, что W/H равно сопротивлению.

Пусть некоторый прямоугольник можно разбить на квадраты. Сделаем разрезы по вертикальным сторонам квадратов и приклеим сверхпроводниковую проволоку вдоль горизонтальных сторон квадратов. Получится,

что прямоугольник, разбитый на N квадратов, эквивалентен некоторой комбинации из N резисторов с единичным сопротивлением, а отношение длины к ширине есть суммарное сопротивление этой комбинации.

Возникает неожиданная аналогия между электрическими схемами и разрезанием прямоугольников на квадраты, которая и позволила Бруксу, Смитту, Стоуну и Татту опровергнуть «гипотезу Лузина». Дело в том, что не до конца понятно, как перебирать возможные комбинаторные конфигурации из разбиений прямоугольников на прямоугольники, но гораздо проще понять, как перебрать все способы соединить N резисторов (это примерно то же, что перебрать плоские графы с N рёбрами).

Отсюда немедленно следует теорема Дена о том, что у любого прямоугольника, разбитого на конечное число квадратов, W/H рационально. Действительно, суммарное сопротивление вычисляется по законам Кирхгофа исходя из сопротивлений данных резисторов; если все эти сопротивления равны 1, то ответ будет рациональным числом. Если же нам повезёт и ответ будет равен 1, а все токи через отдельные резисторы будут разные, мы получим контрпример к гипотезе Лузина.

Не все согласятся, что «доказательство» теоремы Дена при помощи электричества — корректное математическое доказательство; у теоремы Дена имеются и другие доказательства. Но контрпример к гипотезе Лузина реально существует, он был найден именно через аналогию с электрическими цепями, и при наличии примера можно проверить его независимо, но тогда не будет понятно, как его нашли.

Впервые эта идея была предложена в замечательной работе *Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T.* «The dissection of rectangles into squares» (*Duke Math. J.*, 1940, Vol. 7, № 1, p. 312–340) при построении разбиения квадрата на попарно различные квадратики. См. *Яглом И. М.* «Как разрезать квадрат?», М.: Наука, 1968, с. 42 и далее.

б) Предположим, что прямоугольный параллелепипед можно разбить на попарно различные кубы. У параллелепипеда есть грань Γ , к которой примыкает более одного кубика. Назовём её *нижней*. Она разбита на попарно разные квадратики, пусть S — минимальный из них.

Ему отвечает кубик K минимального размера из примыкающих к Γ . Рассмотрим верхнюю грань Γ_1 этого кубика. Она образует дно колодца, окружённого стенками, ибо другие кубики $\{K_i\}$, примыкающие к Γ , имеют больший размер. Следовательно, примыкающие к Γ_1 кубики не примыкают к верхним граням системы $\{K_i\}$. Кроме того, в силу попарного различия размеров кубиков к Γ_1 примыкает более одного кубика, и она разбивается на несколько попарно различных квадратов. Пусть S' — ми-

нимальный из них. Ему отвечает примыкающий кубик K' минимального размера. Нам потребуется

ЛЕММА 1. Пусть квадрат S разбит на несколько (больше одного) квадратов попарно разных размеров, S' — минимальный из них. Тогда S' не примыкает к границе S .

Доказательство. Пусть S' примыкает к углу квадрата S . К его двум сторонам, не примыкающим к границе S , примыкает по квадратику S_1 и S_2 . Поскольку их стороны строго больше стороны S' , они перекрываются, что невозможно (рис. 3, слева).

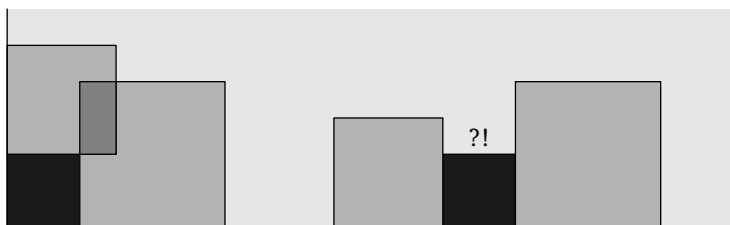


Рис. 3

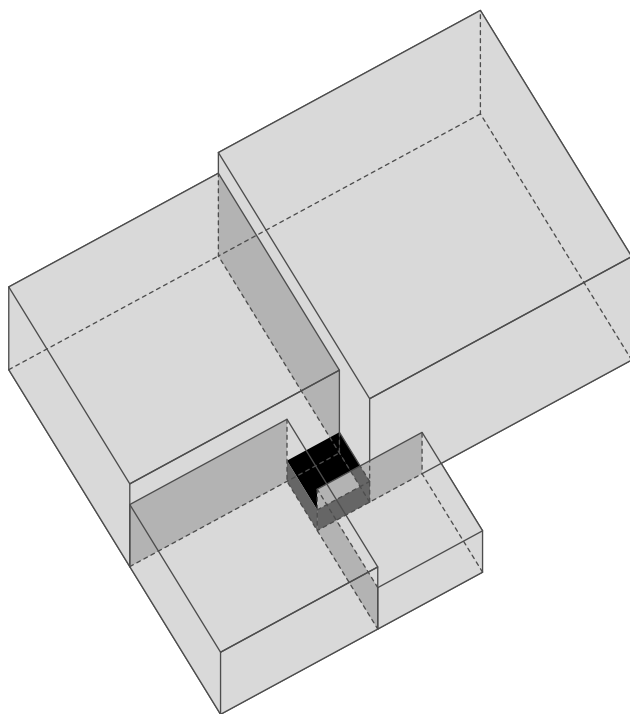


Рис. 4

Пусть S' примыкает к одной стороне L квадрата S , которую считаем горизонтальной. С обеих сторон от него к L примыкает по квадратику S_1 и S_2 . Поскольку их стороны строго больше стороны S' , возникает двумерный колодец над S' (рис. 3 справа). На дно этого колодца нельзя засунуть ни один из оставшихся квадратов, так как они больше S' . $\square$

Продолжение решения 13.10' (б). Итак, S' лежит внутри Γ_1 . Но тогда кубик K' с нижней гранью S' окружён большими кубиками, нижние грани которых примыкают к Γ_1 (рис. 4).

Обозначим через Γ_2 верхнюю грань K' . Она образует дно колодца, как и на первом шаге. Продолжаем этот процесс далее. Легко видеть, что он не может закончиться, а это противоречит конечности разбиения.

А. Я. Канель-Белов, Л. Радзивиловский

14.12' (выпуск 23, с. 220). Условие. Из резисторов спаяли цепь. Может ли сопротивление цепи увеличиться, если, ничего не размыкая, к какому-то двум клеммам припаять ещё один резистор? (Фольклор)

Ответ: нет.

Решение. Заменим резисторы конденсаторами так, чтобы ёмкость каждого конденсатора была обратно пропорциональна сопротивлению соответствующего резистора.

Уравнениям Кирхгофа, связывающим токи и напряжения, соответствующим в точности такие же уравнения, связывающие заряды и потенциалы. А именно: уравнению $I = UR$ отвечает уравнение $Q = UC$; равенству нулю суммы токов в узле отвечает равенство нулю суммы зарядов; в обоих случаях равна нулю сумма перепадов напряжений по контуру.

Таким образом, задача о неувеличении сопротивления превращается в задачу о неуменьшении ёмкости.

Но если к системе припаять конденсатор, то заряд q не изменится, а энергия может только выделиться, поэтому новая энергия $E_1 = q^2/c_1$ не больше старой энергии $E_0 = q^2/c_0$. Поэтому ёмкость c_1 не меньше c_0 . Задача решена.

Замечания. 1. Токи распределяются таким образом, чтобы сумма теплотерь $S = \sum I_i^2 R_i$ была минимальной, при соблюдении закона Ома $U_i = I_i \cdot R$. Уравнения Кирхгофа выражают условие экстремума $\delta S = 0$.

2. Аналогия между резистором и конденсатором распространяется и на сеть переменного тока (см. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Реактивное сопротивление](https://ru.wikipedia.org/wiki/Реактивное_сопротивление)).

(А. Я. Канель-Белов)

16.4' (выпуск 26, с. 271). Условие. Пусть $\operatorname{Im}(x_0) \neq 0$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$. (Фольклор)

РЕШЕНИЕ. Пусть число $z \in \mathbb{C}$ таково, что $z + z^{-1} = x_0$. Тогда $x_n = z^n + z^{-n}$. Если $x_0 \notin [-2, 2]$ (в частности, если $\operatorname{Im}(x_0) \neq 0$), то $|z| \neq 1$, так что либо $|z| > 1$, $|z^{-1}| < 1$, либо $|z^{-1}| > 1$, $|z| < 1$. В обоих случаях $x_n = z^n + z^{-n} \rightarrow \infty$. (А. Я. Канель-Белов)

22.5'. Условие. Пусть $k > 2$ — фиксированное целое число. Назовём целое число *хорошим*, если оно даёт остаток 1 при делении на k . Назовём число *отличным*, если оно хорошее и не разлагается в произведение двух или более хороших чисел. Докажите, что найдётся хорошее число, разлагающееся в произведение отличных более чем 2020 способами.

(В. А. Сендеров)

РЕШЕНИЕ. Нам потребуется

ЛЕММА 2. Пусть $k > 2$. Тогда найдётся бесконечно много простых чисел, имеющих одинаковый остаток $L \neq 1$ при делении на k .

Доказательство копирует евклидово доказательство бесконечности простых чисел. Достаточно установить, что найдётся бесконечно много простых чисел, не сравнимых с 1 по модулю k . (Из них мы выберем бесконечное подмножество чисел, сравнимых по модулю k с некоторым $L \neq 1$. Ясно, что при этом $\operatorname{НОД}(L, k) = 1$.) Предположим противное — таких чисел конечное множество. Пусть $q_1, \dots, q_s$ — их полный список. Тогда число $N = k \cdot \prod_{i=1}^s q_i - 1 \not\equiv 1 \pmod{k}$ не делится ни на одно из q_i . Значит, каждый его простой делитель q — не из нашего списка, и потому $q \equiv 1 \pmod{k}$. Но тогда и $N \equiv 1 \pmod{k}$. Противоречие. Лемма доказана. $\square$

Напомним известный, очень полезный факт:

ЛЕММА 3. Пусть $\operatorname{НОД}(L, k) = 1$. Тогда найдётся r такое, что $L^r \equiv 1 \pmod{k}$ и если $L^t \equiv 1 \pmod{k}$, то t кратно r . Если $L \not\equiv 1 \pmod{k}$, то $r > 1$.

Продолжим решение задачи 22.5'. Согласно лемме 2 найдётся бесконечно много простых, сравнимых по модулю k с некоторым $L \not\equiv 1 \pmod{k}$. Выберем r согласно лемме 3 и рассмотрим набор $\mathfrak{N}$ из $r \cdot M$ различных простых (M — натуральное число), сравнимых с L по модулю k . Произведение любых r чисел из $\mathfrak{N}$ — отличное число. Пусть P — произведение всех чисел из $\mathfrak{N}$. Это число хорошее, а его разложению в произведение отличных отвечает разбиение $\mathfrak{N}$ на поднаборы из $r > 1$ элементов. При достаточно больших M число таких разбиений становится сколь угодно большим, в частности, большим 2020. Задача решена.

Комментарий. Частным случаем леммы 2 являются утверждения о бесконечности количества простых вида $4k - 1$ и $6k - 1$. Количество простых вида $4k + 1$ также бесконечно, что вытекает из следующего факта: *любой простой делитель числа вида $n^2 + 1$ имеет вид $4k + 1$* . А именно, если количество простых вида $4k + 1$ конечно, то существует их произведение P . Теперь рассмотрим число $X = (4P)^2 + 1$. Его простые делители имеют вид $4k + 1$ и не входят в P , ибо $(X, P) = 1$.

Докажем требуемый факт. Если p делит $n^2 + 1$, то в $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ имеется корень из -1 , а именно, остаток $i = n \pmod{p}$. Но тогда все $p - 1$ остатков x из $\mathbb{Z}_p^*$ можно сгруппировать на группы по четыре: $x, ix, -x, -ix$. Любые две такие группы либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому $p - 1$ делится на 4, так что p имеет вид $4k + 1$.

Аналогично доказывается, что для любого n простых чисел вида $pk + 1$ бесконечно много, только вместо $n^2 + 1$ следует взять *многочлен деления круга* Φ_n . Если p — простой делитель числа $\Phi_n(m)$ для некоторого натурального m , то $\Phi_n(m) \equiv 0 \pmod{p}$. Тогда $m \pmod{p}$ — первообразный корень n -й степени из единицы в $\mathbb{Z}_p^*$. В этом случае число $p - 1$, равное количеству элементов в $\mathbb{Z}_p^*$, делится на n , так что p имеет требуемый вид: $p = n \cdot (p - 1)/n + 1$.

Имеет место общий факт (его доказательство не элементарно):

ТЕОРЕМА ДИРИХЛЕ О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ. Пусть $(n, k) = 1$. Тогда в арифметической прогрессии вида $nx + k$ бесконечно много простых.

(А. Я. Канель-Белов)

24.9. Условие. а) Дана последовательность (a_n) . Известно, что при всех $\gamma > 1$ выполнено равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{[\gamma^m]} = 0.$$

Верно ли, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0?$$

(Здесь $[x]$ означает целую часть числа x .)

(Фольклор)

б) Назовём число $\beta \in [0, 1]$ *хорошим*, если $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\alpha^n\}$ при некотором $\alpha > 1$ (здесь $\{x\}$ означает дробную часть числа x). Докажите, что множество хороших чисел не более чем счётно. (А. Я. Канель-Белов)

а) Ответ: верно.

Решение. Предположим противное, тогда существуют $\delta > 0$ и такое бесконечное множество индексов $M \subset \mathbb{N}$, что $|a_n| > \delta$ при всех $n \in M$. Мы получим противоречие, если найдём такое $\gamma > 1$, что бесконечно много чисел вида $[\gamma^k]$ являются элементами из M .

ЛЕММА 4. Пусть $1 < \alpha < \beta$. Существует такое n_0 , что для любого $n > n_0$ найдутся такие $k \in \mathbb{N}$ и подотрезок $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$, что $[\gamma^k] = n$ для любого $\gamma \in [\alpha', \beta']$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что, поскольку $\alpha < \beta$, при всех достаточно больших $k > k_0$ выполняется неравенство $\beta^k > \alpha^{k+1}$. Это значит, что объединение отрезков $\bigcup_{k > k_0} [\alpha^k, \beta^k]$ связно. Так как это множество содержит сколь угодно большие числа, оно содержит луч $[n_0, \infty)$ для некоторого n_0 .

Пусть $n > n_0$ и отрезок $[a, b]$ лежит в пересечении интервала $(n, n+1)$ и отрезка $[\alpha^k, \beta^k]$. Тогда для этого n мы можем взять данное k и $[\sqrt[k]{a}, \sqrt[k]{b}] \subset [\alpha, \beta]$. Лемма доказана. $\square$

Пользуясь этой леммой, несложно шаг за шагом построить последовательность вложенных отрезков $[2, 3] = I_1 \supset I_2 \supset \dots$ и такие последовательности чисел (k_i) и (n_i) , что для любого $\gamma \in I_i$ выполнено $[\gamma^{k_i}] = n_i \in M$.

Завершим доказательство пункта а), выбрав $\gamma \in \bigcap I_i$. Это пересечение непусто согласно принципу вложенных отрезков.

б) РЕШЕНИЕ. Оно идейно более сложное — поэтому пункт б) предворяется пунктом а).

Мы будем доказывать, что не более чем счётно множество A таких $\alpha > 1$, для которых последовательность дробных частей $\{\alpha^n\}$ имеет предел.

Для натурального M обозначим A_M множество чисел из A , не превосходящих M . Так как A — объединение A_M по всем натуральным M , достаточно показать, что каждое A_M не более чем счётно. Зафиксируем такое M ; можно считать, что $M > 100$.

Возьмём $\varepsilon = 1/(4M)$. Для каждого целого числа k из отрезка $[0, 4M-2]$ построим полуинтервал $I_k = [k\varepsilon, (k+2)\varepsilon)$ длины $1/(2M)$. Эти полуинтервалы, перекрываясь, покрывают полуинтервал $[0, 1)$, отвечающий дробным частям.

Если $\alpha \in A_M$, то для некоторых k и n_0 при всех $n \geq n_0$ выполняется $\{\alpha^n\} \in I_k$ (напомним, что $\{x\}$ — дробная часть числа x). Пусть A_{M,k,n_0} — множество всех $\alpha \in A_M$ с данными k и n_0 . Так как множество пар чисел (k, n_0) счётно, достаточно показать, что каждое A_{M,k,n_0} не более чем счётно. Зафиксируем k и n_0 ; можно считать, что $n_0 > 10$.

Если $\alpha \in A_{M,k,n_0}$, то $\alpha^{n_0} \in I_k + t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$ (через $I + t$ мы обозначаем сдвиг интервала I на t вправо). Пусть $A_{M,k,n_0,t}$ — множество всех α с данными k, n_0, t ; покажем, что в $A_{M,k,n_0,t}$ не более чем одно число.

Предположим противное, и пусть α_1 и α_2 — два разных числа из $A_{M,k,n_0,t}$. Обозначим $r_n = |\alpha_1^n - \alpha_2^n|$. При всех $n \geq n_0$ числа α_1^n и α_2^n лежат в целых сдвигах полуинтервала I_k , поэтому r_n отличается от целого не более чем на $|I_k| = 1/(2M)$.

Более того, $\alpha_1^{n_0}$ и $\alpha_2^{n_0}$ лежат в $I_k + m$, поэтому $r_{n_0} \leq 1/(2M)$.

ЛЕММА 5. Пусть $b^n - a^n = \varepsilon > 0$ и $n > 10$. Тогда $b^{n+1} - a^{n+1} < 1,1b\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $f(x) = x^{(n+1)/n}$. По теореме Лагранжа

$$b^{n+1} - a^{n+1} = f(b^n) - f(a^n) = (b^n - a^n)f'(c)$$

для некоторого $c \in (a^n, b^n)$. Оценка

$$f'(c) = \frac{n+1}{n}c^{1/n} < \frac{11}{10}(b^n)^{1/n} = \frac{11}{10}b$$

завершает доказательство леммы. $\square$

Покажем по индукции, что $r_n < 1/(2M)$ при всех $n > n_0$. В самом деле, если $r_n \leq 1/(2M)$, то, применяя лемму к числам α_1 и α_1 и пользуясь оценкой $|\alpha_1| \leq M$, получаем $r_{n+1} < 1,1Mr_n < 0,6$, а так как r_{n+1} положительное и отличается от целого не более чем на $1/(2M) < 1/200$, получаем, что $r_{n+1} < 1/(2M)$.

С другой стороны, если $\alpha_2 > \alpha_1$, то $\alpha_2^n - \alpha_1^n$ стремится к бесконечности, и мы получаем противоречие. Задача решена.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неизвестно, может ли при $n \rightarrow \infty$ и $\alpha > 1$ дробная часть $\{\alpha^n\}$ стремиться к единице. Неизвестно, существует ли $0 < a < 1$ такое, что $\{\alpha^n\}$ стремится к a . Все известные примеры, когда расстояние от α^n до ближайшего целого стремится к нулю, — это числа Пизо. Число α есть число Пизо, если оно целое алгебраическое, т. е. удовлетворяет уравнению с целыми коэффициентами вида

$$\alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + \dots + b_n = 0, \quad b_i \in \mathbb{Z},$$

причём $|\alpha| > 1$ и все другие комплексные корни этого уравнения по модулю строго меньше единицы. Тогда α вещественное (кстати, почему?).

Нетрудно доказать, что в таком случае расстояние от α^n до ближайшего целого стремится к нулю. А вот вопрос, обладают ли таким свойством какие-либо числа, кроме чисел Пизо, является открытой проблемой. Можно доказать, что если α алгебраическое, $|\alpha| > 1$ и $\{\alpha^n\}$ имеет предел, то α — число Пизо. Числам Пизо был посвящён проект «Дробные части степеней» на Летней конференции Турнира городов в 2000 году (<https://www.turgor.ru/1ktg/2000/index.php>).

(Л. Радзивилловский, А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

25.7. УСЛОВИЕ. Докажите, что для всех достаточно больших n справедливо следующее утверждение. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда количество целых чисел m , удовлетворяющих неравенству $|P(m)| < 2019$, не превосходит n . (А. А. Колчев)

РЕШЕНИЕ. Докажем более общее утверждение. Пусть $f(x) = Q_m(x)$ — многочлен степени $m > 0$, M — положительное число. Тогда существует некоторое натуральное число n_0 , для которого верно утверждение: если $\varphi(x) = P_n(x)$ — многочлен степени $n \geq n_0$ и старший коэффициент этого многочлена равен единице, то количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $|f(\varphi(x))| \leq M$, не превосходит n .

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ таково, что все решения неравенства $|f(x)| \leq M$ принадлежат отрезку $[-\frac{n_0!}{2^{n_0}}, \frac{n_0!}{2^{n_0}}]$; $\varphi(x) = P_n(x)$ — многочлен степени $n \geq n_0$ со старшим коэффициентом 1; $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ — любые целые числа. По интерполяционной формуле Лагранжа

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \varphi(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

выразим старший коэффициент:

$$1 = \sum_{i=0}^n \varphi(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Поскольку $x_0, \dots, x_{i-1} < x_i < x_{i+1}, \dots, x_n$, получаем

$$\varphi(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} \leq |\varphi(x_i)| \frac{1}{i!(n-i)!}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=0}^n \varphi(x_i) \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_j} < \max_i |\varphi(x_i)| \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} = \\ &= \frac{\max_i |\varphi(x_i)|}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} = \max_i |\varphi(x_i)| \cdot \frac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\max_i |\varphi(x_i)| > \frac{n!}{2^n} \geq \frac{n_0!}{2^{n_0}}.$$

Значит, хотя бы одно из чисел $x_0, x_1, \dots, x_n$ неравенству $|f(\varphi(x_i))| \leq M$ не удовлетворяет. Значит, это неравенство имеет не более n целых решений. (А. А. Колчев)

26.1. УСЛОВИЕ. Найдите предел $\lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2} \right)$. (Фольклор)

ОТВЕТ: $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2/k^2}.$

РЕШЕНИЕ 1. Положим $t = e^{-1/n^2}$. Тогда $\frac{1}{n} = \sqrt{-\ln(t)}$ и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{-\ln(t)}} = 1,$$

так что указанный в ответе предел можно переписать в виде

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{-\ln(t)} \sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2} = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2},$$

что нам и требуется.

РЕШЕНИЕ 2. Пусть

$$J = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sqrt{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J^2 &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2} \sum_{m=0}^{\infty} t^{m^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \sum_{m,n=0}^{\infty} t^{n^2+m^2} = \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) t^k, \end{aligned}$$

где $\mu(k)$ есть число решений уравнения $m^2 + n^2 = k$ при данном k в неотрицательных целых числах. Нам нужно показать, что $J^2 = \pi/4$. Перепишем наш предел в виде

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{l=0}^{\infty} t^l \mu(k) t^k &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{l,k=0}^{\infty} \mu(k) t^{k+l} = \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^s \mu(k) \right) t^s. \end{aligned}$$

Выражение $\sum_{k=0}^s \mu(k)$ есть число решений неравенства $m^2 + n^2 \leq s$ при данном s в целых неотрицательных числах, т. е. число целых точек N_s в четверти круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{s}$ из положительного квадранта. Число N_s оценивается через площадь этой четверти, равную $s\pi/4$. А именно,

$$\frac{s\pi}{4} - K(s) < N_s < \frac{s\pi}{4} + K(s),$$

где $K(s)$ — количество единичных квадратов, пересекающих границу четверти круга. Оно имеет порядок $\sqrt{s}$. Поэтому, заменяя N_s эквивалентной

величиной, достаточно установить, что

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s\pi}{4} t^s = \frac{\pi}{4},$$

или

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{s=0}^{\infty} s t^s = 1.$$

Но

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{s=0}^{\infty} s t^s &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \sum_{s=0}^{\infty} s t^{s-1} = \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \left(\sum_{s=0}^{\infty} t^s \right)' = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \left(\frac{1}{1-t} \right)' = \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^2 \left(\frac{1}{(1-t)^2} \right) = 1, \end{aligned}$$

что и требуется.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассуждая аналогично, можно установить равенство

$$I_n = \lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^{1/n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^n} \right) = \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx,$$

причём I_n^n есть объём области Ω :

$$x_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i^n = 1.$$

Легко видеть также, что

$$I_n = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-(n-1)/n} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Здесь

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

есть гамма-функция, продолжающая функцию $n!$ на комплексные числа.

См. также:

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: УРСС, 2004. Гл. 2;
Заславский А. А. О вычислении объёма n -мерного шара // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 270–271;
Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2020. Раздел «Уход на бесконечность и малые шевеления».

(А. Я. Канель-Белов)

26.4. Условие. Пусть $k + 2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k + 2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k , то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k . (А. Я. Канель-Белов)

Решение 1. Можно считать, что птички движутся внутри пространства $\mathbb{A}^{k+1}$ размерности $k + 1$. В самом деле: если в какой-то момент времени они не лежат в аффинном пространстве размерности k , то они образуют невырожденный $(k + 1)$ -мерный симплекс из $k + 2$ вершин. Но тогда его проекция на некоторое $(k + 1)$ -мерное подпространство $\mathbb{A}^{k+1}$ также является невырожденным $(k + 1)$ -мерным симплексом. Заметим, что при проекции сохраняется свойство прямолинейного равномерного движения и свойство $k + 2$ точек лежать в аффинном подпространстве размерности k .

Перейдём в подвижную систему координат, начало которой постоянно совпадает с одной и той же птичкой. Пронумеруем остальных птичек от 1 до $k + 1$. Радиус-вектор координат i -й птички в момент времени t равен

$$\vec{R}_i(t) = \vec{r}_i + t\vec{v}_i,$$

где $\vec{v}_i$ — радиус-вектор в момент $t = 0$, а $\vec{v}_i$ — скорость.

Линейная зависимость векторов $\vec{R}_i(t)$ равносильна тому, что в момент времени t птички находятся в аффинном подпространстве размерности k . Это условие можно переписать как равенство нулю определителя матрицы $M(t)$, столбцами которой являются векторы $R_i(t)$. Это матрица размера $(k + 1) \times (k + 1)$, в каждой клетке которой стоит линейная функция от t . Из формулы определителя видно, что $\det M(t)$ — многочлен степени не выше $k + 1$, поэтому обнуление его в $k + 2$ различных точках влечёт равенство $\det M(t) \equiv 0$, и птички в любой момент времени находятся в аффинном подпространстве размерности k .

Решение 2. Покажем, как провести по сути то же самое рассуждение, не понижая размерность и не переходя к подвижной системе координат. Если в n -мерном пространстве даны m точек v_i , имеющие координаты (x_{ij}) , $1 \leq j \leq n$, то размерность линейной оболочки этих точек равна уменьшенному на 1 рангу расширенной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Это несложно доказать, если вычесть первый столбец из всех остальных (проверьте!). У этого факта есть и наглядная геометрическая интерпретация: если поместить $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ как множество точек с последней координатой, равной 1, то при добавлении к множеству точек начала координат размерность линейной оболочки увеличится на 1.

Лемма 6. Пусть матрица A содержит n строк и m столбцов, $n \geq m$, и в первой строке не все элементы нулевые. Тогда $\text{rank } A = m$ в том и только том случае, когда один из миноров, содержащих первую строку, ненулевой.

Доказательство. Если $\text{rank } A = m$, то можно выбрать линейно независимые строки $s_{i_1}, \dots, s_{i_m}$. Если в это множество не входит s_1 , то s_1 является линейной комбинацией каких-то из указанных строк с ненулевыми коэффициентами. Любую строчку из этой комбинации можно заменить на s_1 , снова получив линейно независимое множество из m векторов, и соответствующий минор будет ненулевым. В другую сторону утверждение очевидно. $\square$

Перейдём к решению нашей задачи.

Пусть птички движутся в n -мерном пространстве. Рассмотрим матрицу $M(t)$ размера $(n+1) \times (k+2)$, у которой для любого $1 \leq i \leq k+2$ в i -м столбце в первой клетке стоит 1, а в остальных n клетках написаны координаты i -й птички в момент t . Тогда нахождение птичек в момент времени t в подпространстве размерности k равносильно тому, что матрица $M(t)$ имеет ранг не больше чем $k+1$. Из леммы следует, что все миноры порядка $k+2$, содержащие первую строку, нулевые. Каждый такой минор — это определитель матрицы $(k+2) \times (k+2)$, у которой первая строка состоит из одних единиц, а во всех остальных клетках линейные функции от t . Это многочлен степени не более чем $k+1$, поэтому равенство его нулю в $k+2$ точках влечёт его тождественное равенство нулю.

(А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Комментарии. 0. Подобные рассуждения (про множество миноров матрицы из векторов) удобно записывать через *внешнее произведение векторов* (см. https://en.wikipedia.org/wiki/Exterior_algebra).

1. Конструкции, связанные с внешним произведением, используются при решении задачи 17.10 (см. выпуск 17, с. 197, решение А. Скутина см. выпуск 19, с. 263):

Дано векторное пространство W , $\dim W = m$, два его подпространства U и V , такие что $U \cap V = 0$ ($\dim u = n_1$, $\dim v = n_2$), и обратимый оператор $A: W \rightarrow W$. Докажите, что $A^n(U) \cap V = 0$ при некотором

$$n \leq \min \left\{ \binom{m}{n_1}, \binom{m}{n_2} \right\}.$$

См. также: Каминский Дж. Й., Канель-Белов А. Я., Тайхер М. «Задача о 3-секущих» (настоящий выпуск, с. 171–174).

2. Многие факты из курса линейной алгебры и аналитической геометрии красиво и коротко доказываются с помощью внешних произведений. Рекомендуем читателям (в особенности преподавателям и студентам) посмотреть на них с этой точки зрения (см. замечание 2 к задаче 26.6). Например, условие того, что прямые в пространстве, заданные парами точек x_1, x_2 и y_1, y_2 , пересекаются или параллельны, записывается так. Как и в решении задачи 26.2, рассматриваем трёхмерное аффинное пространство как гиперплоскость в четырёхмерном, заданную уравнением $x_4 = 1$. Пусть $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2$ — радиус-векторы точек X_1, X_2, Y_1, Y_2 ($i = 1, 2$) соответственно. Условие пересечения прямых запишется так:

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \wedge \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = 0.$$

Условие того, что три прямые на плоскости, заданные парами точек X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2$), пересекаются в одной точке, записывается так. Считаем плоскость множеством точек в пространстве, заданным уравнением $x_3 = 1$. Пусть $\vec{R}_i, \vec{S}_i, \vec{T}_i$ — соответствующие радиус-векторы точек. Выпишем наше условие:

$$[\vec{R}_1, \vec{R}_2] \wedge [\vec{S}_1, \vec{S}_2] \wedge [\vec{T}_1, \vec{T}_2] = 0 \quad ([\cdot, \cdot] \text{ — векторное произведение}).$$

Формула легко обобщается для гиперплоскостей в многомерном пространстве. Но, например, для 7-мерных подпространств в 10-мерном пространстве всё сложнее. Призываем читателей подумать и написать нам, если они найдут что-то интересное.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Дан набор из M линейных уравнений от N неизвестных. Для каких k можно утверждать, что если любой поднабор из k уравнений совместен, то совместен набор из всех уравнений?

Ответ: для $k \geq N + 1$.

РЕШЕНИЕ 1. Линейное уравнение задаёт в N -мерном пространстве гиперплоскость. Условие *совместности* означает, что любые k гиперплоскостей имеют непустое пересечение. Из теоремы Хелли следует, что если любые $N + 1$ гиперплоскостей пересекаются, то пересекаются все. С другой стороны, если провести гиперплоскости общего положения, то любые N пересекаются, а любые $N + 1$ — нет.

РЕШЕНИЕ 2. Индукция по числу неизвестных. Случай $N = 1$ тривиален. Если $N > 1$, то можно выразить одно неизвестное из некоторого уравнения, подставить в остальные уравнения и свести задачу к случаю $N - 1$ неизвестных.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Выразите на языке внешних произведений свойство двух подпространств нетривиально пересекаться. Тот же вопрос для нескольких подпространств.

РЕШЕНИЕ. Условие, что размерность пересечения двух подпространств U и V не меньше s , записывается так. Строится набор из $\dim U - s + 1$ общих векторов $\vec{f}_i$ в U : суммируются базисные векторы $\vec{e}_i$ пространства U с общими (произвольными) коэффициентами x_{ij} :

$$\vec{f}_i = \sum_{j=1}^{\dim U} x_{ij} \vec{e}_j.$$

Затем берётся базис $\vec{g}_\mu$ пространства V . Условие на размерность переписывается как

$$\bigwedge_{i=1}^{\dim U - s + 1} \vec{f}_i \bigwedge_{\mu=1}^{\dim V} \vec{g}_\mu = 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Полезно посмотреть на аналитическую геометрию «с высшей точки зрения». Просмотрите толстый учебник по аналитической геометрии и придумайте, как сократить изложение не менее чем в 10 раз с помощью понятия внешнего произведения.

(А. Я. Канель-Белов)

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В ВЫПУСКЕ 25

СТРАНИЦА,	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
169	1 сверху	$n!$	$k!$

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В ВЫПУСКЕ 26

СТРАНИЦА,	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
22	14 сверху	Значительное	Значительно
266	8 снизу	Фольклор	А. Я. Канель-Белов
269	3 сверху	$\binom{n}{n^2}$	$\binom{n}{n}^2$
273	14 снизу	При какой максимальной высоте может не обрушиться стенка из n кирпичей?	На какую максимальную длину можно выдвинуть кирпичи в стенке из n кирпичей?

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным областям математики, а также по проблемам её истории и преподавания, интересные и доступные указанной аудитории.

2. Сборник «Математическое просвещение» не публикует существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

3. Материалы принимаются по электронной почте на адрес matpros@yandex.ru в виде двух файлов (pdf и tex) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в Word.

4. Просим обратить внимание, что материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

5. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

6. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. <http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html>

7. В конце статьи необходимо указать для каждого из авторов:

- фамилию, имя, а также отчество (если есть) полностью,
- место работы/обучения,
- электронный адрес для публикации.

8. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение (хотя бы набросок).

9. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый, просим обращаться по адресу matpros@yandex.ru

Научно-популярное издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 27

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».

г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.

Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.

E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 13.04.2021 г. Формат $70 \times 100^{1/16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 17. Тираж 800 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком



Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745-80-31.
E-mail: biblio@mccme.ru, <http://biblio.mccme.ru>
