МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 29

Москва
Издательство МЦНМО
2022

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Ильяшенко Ю. С.	Сосинский А. Б.
Вялый М. Н.	Канель-Белов А. Я.	Тихомиров В. М.
Гайфуллин А. А.	Митрофанов И. В.	Устинов А. В.
Гальперин Г. А.	Полянский А. А.	Френкин Б. Р.
Гусейн-Заде С. М.	Прасолов В. В.	Ященко И. В.
Дориченко С. А.	Райгородский А. М.	
Заславский А. А.	Семёнов А. Л.	

Главный редактор А. М. Райгородский
Отв. секретарь Б. Р. Френкин

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@yandex.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

М34 **Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 29. — М.: МЦНМО, 2022. — 288 с.
ISBN 978-5-4439-1732-0

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1732-0

© МЦНМО, 2022

10 ноября 2020 года в возрасте 92 лет скончался
выдающийся деятель российского математического
образования, основатель и многолетний директор
московской Второй школы

Владимир Фёдорович Овчинников

Светлая память Владимиру Фёдоровичу!

Содержание

Математический мир

Рассказ о московском Лицее «Вторая школа»

Этот материал посвящён основателю Второй школы Владимиру Фёдоровичу Овчинникову, который ушёл из жизни 10 ноября 2020 года, ему было 92 года, и он до последнего дня участвовал в жизни Лицея.

Историческая справка

Средняя школа № 2 основана в 1956 году, стала математической в 1966 году, преобразована в Лицей «Вторая школа» в 1992 году, ныне ГБОУ Лицей «Вторая школа».

Владимир Фёдорович Овчинников, Народный учитель Российской Федерации, был её директором в 1956–1971 и 2001–2020 гг.

Второшкольники 30 раз успешно выступали на международных олимпиадах по математике, физике, астрономии и географии, 5 раз получали дипломы на Международном научно-инженерном конкурсе Intel ISEF. В 2021 году на заключительном этапе Всероссийской олимпиады лицеисты завоевали 17 дипломов победителей и 50 дипломов призёров по 8 предметам.

Последние 10 лет Лицей становился лауреатом гранта Мэра Москвы 1 степени, а по математике и физике входил в тройку лучших школ страны.

Все выпускники Лицея продолжают учёбу в лучших вузах, большинство из них традиционно выбирают МГУ (мехмат, физфак, ВМК и др.), МФТИ, НИУ ВШЭ, МГТУ им. Баумана и др.

В состав Второй школы входят Вечерняя многопредметная школа (ВМШ) и Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ), которые реализуют вечернее и дистантное дополнительное образование.

Как начиналась Вторая школа

Владимир Фёдорович Овчинников

Школа открылась в 1956 году на окраине Москвы. Последние дома заканчивались у Калужской заставы, а дальше шли пустыри и огороды. Следующий от Калужской заставы дом (для преподавателей МГУ) стоял на Ломоносовском проспекте.

2-я школа была построена первой в районе, а рядом возводился жилой дом. Занятия начались, когда школа ещё достраивалась, поэтому старшеклассники в резиновых сапогах перетаскивали первоклашек через грязь, иначе дети не могли добраться до школы.

Мы начинали работать буквально впятером. Среди «открывателей» школы были И. С. Збарский, Н. В. Тугова, Р. Е. Кантор. Сначала мы набрали маленькие классы, но район быстро заселялся, и на третий год в школе училось 880 человек, т. е. в классах было по 45 детей, что соответствовало нормам.

Школа ничем не отличалась от других московских школ. Но было несколько учителей-энтузиастов, которые составили костяк будущей 2-й школы. Этот костяк «обрастал» молодыми учителями, и постепенно складывался очень интересный коллектив.

Как состоялась Вторая школа

Исаак Семёнович Збарский,
учитель литературы 2-й школы с 1957 по 1970 гг.

Если бы не Владимир Фёдорович Овчинников, — не было бы 2-й школы. Он — начало нашей школы. И костяк учителей он привёл.

Хочу добавить к рассказу Владимира Фёдоровича, что вдоль Калужского шоссе располагался «пунктир» академических институтов, и это помогло школе.

В первые учебные годы Н. С. Хрущёв постановил, что в школах должно быть обязательное профессиональное образование. В центре Москвы директора легко нашли себе «шефов» — швейные фабрики, автобазы и т. д. А у нас кругом пустыри и никакого производства.

И вот мы с Владимиром Фёдоровичем пошли по округе искать хоть какую-нибудь профессиональную базу. Зашли в замочную артель. Там говорят, мол, взяли бы мы вас, да нас самих отсюда выселяют.

И когда мы уже шли назад, вдруг Владимиру Фёдоровичу пришла в голову гениальная мысль, и он сказал: «Послушайте, Исаак Семёнович, а давайте зайдём в академический институт». Я говорю: «Да какая же там профессия?» В. Ф.: «Ну кто его знает, давайте зайдём».

Мы зашли сначала в ФИАН. Там сказали: «Да вы что, с ума сошли? Здесь же радиация, какие дети?!» А второй институт был, как будто Бог поднёс… Это был Институт точной механики и вычислительной техники, и директором его был академик Лебедев (теперь это институт им. Лебедева).

Он выслушал Владимира Фёдоровича и сказал: «А что, я вас возьму, мне нужно паять платы. Ну, вы напортите какую-то часть, но вы же у меня будете не в плане и, глядишь, для меня что-то сделаете. Я вам устрою цех с музыкой и цветами». И устроил на втором этаже школы.

Владимир Фёдорович первый в Москве дал объявление о наборе по специальности «радиомонтажник». Это, знаете ли, среди всех швей и автослесарей — звучало. И к нам хлынул поток учащихся. Поток сильных учащихся.

А потом, через год, Лебедев сказал: «Знаете, мне ещё и программисты нужны. Давайте откроем ещё классы по физике и математике».

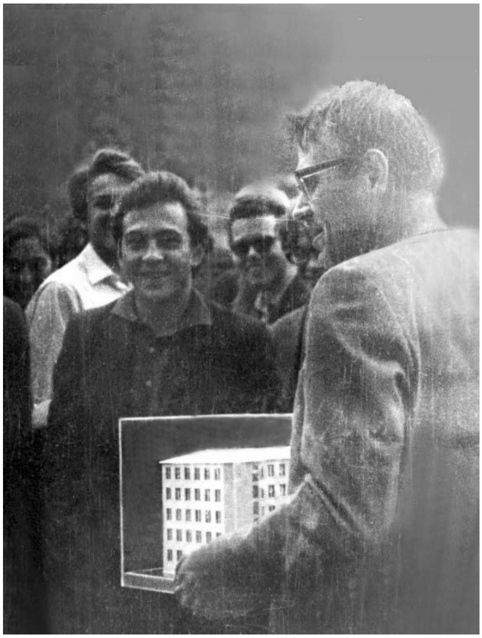
И пошёл второй поток. А тогда оказалось, что часть старых учителей с этими учениками работать не могут. И начался второй отбор — отбор учителей. Приходили уже такие учителя, которые с этой ученической элитой могли совладать.

А когда 2-я школа уже начала греметь по Москве, то слышалось, что после пушкинского лицея другой такой школы не было, начался третий поток — поток академиков и членов-корреспондентов, которые приходили к Владимиру Фёдоровичу и просили принять их детей. Это надо было видеть.

Владимир Фёдорович начинал валять дурака. Он говорил: «Знаете, у вас другой район, не положено, детям надо переходить дорогу». И так доводил этого несчастного родителя до состояния, когда тот был готов встать на колени. Тогда Владимир Фёдорович говорил: «Ну что ж, ну попробуем. Скажите, а Вы в субботу работаете? — Нет. — А мы работаем. Так вот, если мы возьмём ваше дитя, то Вы по субботам будете читать по своему предмету лекции». И тогда состоялась 2-я школа.

В чём особенность Второй школы

Владимир Фёдорович Овчинников



После увольнения в 1971 году В. Ф. Овчинникова ученики подарили ему макет школы

Нынешнему непоротому поколению — и тем, кто учится, и большинству тех, кто учит, — нелегко понять, почему их учебное заведение, ныне гордо именуемое Лицеем «Вторая школа», стало в своё время одной из московских достопримечательностей.

Казалось бы, школа как школа, обыкновенная блочная пятиэтажка на дальней в ту пору столичной окраине. Почему же именно сюда из всех концов Москвы ездили учиться? Нет, не только и не столько из-за высокого уровня, на котором в школе № 2 преподавали математику и физику, а более всего — за воздухом свободы, за возможностью окунуться в атмосферу вольномыслия, какой в любой другой школе было не сыскать.

Сегодняшнему ученику, да и учителю трудно себе представить, что директору школы тогда, 30 лет назад, могли вынести выговор за то, что в коридоре вывешена «Литературная газета», а ученика-старшеклассника таскали на Лубянку и посоветовали ему уехать из страны за то, что кто-то застал его за чтением Солженицына.

Теперь вообразите, какое мужество требовалось учителю, да и администрации школы, чтобы предложить классу тему сочинения «Один день Ивана Денисовича». Если к этому добавить, что историю преподавал известный диссидент, редактор «Хроники текущих событий» А. А. Якобсон, и он же читал лекции по русской литературе «серебряного века», да и остальные преподаватели литературы и истории не стесняли себя идеологическими ограничениями, нетрудно представить себе общую картину жизни и умонастроений в школе.

И мы, нынешние учителя и бывшие ученики, надеемся, что сегодняшние второшкольники поймут, где им довелось учиться, и постараются вписать в историю Второй школы новые яркие страницы.

Воспоминания о школе до 1971 года

Алексей Ремович Хохлов,
ученик 1968–1971 гг., вице-президент РАН

Когда я учился в 6 классе, началось преподавание физики. Этому предмету в моей «французской» школе не уделялось должного внимания. Помню, даже учителя физики не было, её нам по совместительству преподавала молоденькая девушка-киномеханик. В какой-то момент родители-физики решили меня проэкзаменовать по программе 6 класса и пришли в ужас. Это был 1967 год, престиж физики и математики тогда был очень высок. Было решено, что я должен дополнительно заниматься по этим предметам.

В это время в среде московской интеллигенции уже было известно об удивительной 2-й школе. Это была одна из первых физико-математических школ Москвы, она была расположена недалеко от МГУ — сразу за универмагом «Москва». Некоторые преподаватели университета там вели занятия, и они рассказывали коллегам по МГУ о выдающихся учителях и учениках.

При этой школе работала вечерняя математическая школа, где занятия вели в основном аспиранты и студенты МГУ. Это было как бы «подготовительное отделение». Занятия проходили раз в неделю, рассматривались вопросы, далеко выходящие за рамки обычной школьной программы, ученикам давалось объёмное домашнее задание. Родители меня записали в эту вечернюю школу, и весь 7 класс я туда ездил через всю Москву, пытался с грехом пополам выполнять домашние задания. С учётом имевшейся подготовки в гуманитарной школе, мне это давалось тяжело. Но, как я сейчас понимаю, именно за этот год я научился приёмам рационального использования своего времени, ведь нагрузку по «французской» школе никто с меня не снимал, а учился я там, в основном, на «отлично».

Всё же кое-чему в вечерней школе я научился, весной 1968 года я сдал экзамены и был рекомендован к зачислению во 2-ю школу. Родители меня уговорили воспользоваться этой возможностью, хотя мама мне потом говорила, что моя учительница французского языка не могла даже поверить, что я столь круто поменяю профиль обучения. Так или иначе, 1 сентября 1968 года я пошёл в физико-математическую школу и проучился там три года — с 8 по 10 классы (тогда учились 10 лет).

С первого дня пошли очень интенсивные занятия по математике и физике, причём нам преподавалась и обычная школьная математика и так называемая «спецматематика», которая входила в университетскую программу. Помню, что в 8 классе читались лекции по трём разделам: теория множеств, математическая логика и комбинаторика. В 9 классе мы уже изучали математический анализ. Первое время мне с моей гуманитарной подготовкой было довольно тяжело, в первой четверти 8 класса у меня было три тройки: по алгебре, геометрии и физике. Во второй четверти осталась одна тройка (по геометрии), со второго полугодия 8 класса я учился по этим предметам на четвёрки, а с 9 класса перешёл на более привычный для меня режим отличника.

Математику нам преподавала Зоя Михайловна Фотиева, физику — Галина Александровна Ефремова. Именно они привили мне основы профессионализма в этих областях. Акцент в обучении делался не только на том, чтобы ученик понял материал, важно было, чтобы он ориентировался в этом вопросе «как рыба в воде», совершенно автоматически выполняя все действия, связанные с математической техникой. Зоя Михайловна часто начинала урок с так называемой «десятиминутки» — за 10 минут надо было решить 11 простых задач, связанных с математическими преобразованиями. Надо сказать, что этот приём действовал безотказно: когда у тебя на решение задачи меньше минуты, думать нет времени — ты справляешься, только если всё выполняешь «на автомате».

На письменном вступительном экзамене по математике в МГУ это привело к тому, что я точно так же, «на автомате», решил все пять задач за 50 минут (включая очень сложную «пятую задачу», которую решили всего 10 человек на курсе). Затем ещё 40 минут потратил, чтобы всё записать, и пошёл сдавать работу. Меня даже уговаривали ещё посидеть, подумать — на экзамен отводилось 4 часа, и преподаватели были уверены, что я ничего не решил и просто ухожу с экзамена.

Кстати, много позже, когда я сдавал экзамены «теоретического минимума», задачи которого были придуманы Л. Д. Ландау, я также с удивлением обнаружил, что эти задачи требуют не «полёта мысли», а филигранного, но всё же достаточно прямолинейного, владения стандартным аппаратом математики и теоретической физики. Ландау считал, что сначала молодой учёный должен всем этим овладеть, а потом уже заниматься новыми задачами, используя имеющийся технический аппарат. То есть амбиции должны быть подкреплены соответствующей амуницией.

Так вот, «амуницией» 2-я школа вооружила нас по полной программе. Практически к моменту окончания школы мы не только понимали физику и математику в объёме первых двух курсов университета, но и могли легко применить соответствующий инструментарий для решения задач.

И ещё одно важное обстоятельство: именно 2-я школа привила мне привычку к систематической работе. Для того, чтобы изо дня в день выдерживать жёсткий режим, который задавала школа, необходимо было мобилизоваться, отказаться от многих прежних привычек. Как я теперь понимаю, учителя старались привить нам соответствующую мотивацию, умение получать удовольствие от решения сложной задачи. Нечто сродни эмоциям Пушкина, который, закончив «Бориса

Годунова», писал П. Вяземскому: «Я перечёл её вслух, один, и бил в ладоши и кричал, ай да Пушкин, ай да сукин сын!».

Поскольку во 2-ю школу можно было попасть только по результатам вступительных испытаний, практически все школьники, которые учились со мной, проявляли недюжинные способности в математике и физике. При входе в школу висели портреты её учеников, которые стали победителями Международной или Всесоюзной олимпиады по физике или математике. Со мной в одном классе учились несколько ребят, которые стали победителями Международной олимпиады (А. А. Абрикосов, Д. Ю. Логачев, М. А. Цфасман). И, конечно, такая концентрация талантливых людей требовала особых подходов в преподавании не только математики и физики, но и других дисциплин.

Директор 2-й школы, Владимир Фёдорович Овчинников, хорошо это понимал, поэтому он пригласил в школу выдающихся учителей гуманитарных предметов — литературы и истории. У нас литературу преподавала Зоя Александровна Блюмина, причём делала это очень интересно, живо, без скидки на юный возраст своих учеников. Она привила мне на всю жизнь и любовь к русской литературе, и элементы литературного вкуса. Разумеется, говоря о литературе, нельзя было избежать параллелей с сегодняшним днём, и мы получали информацию, которая отличалась от того, что писалось в советских газетах или транслировалось по телевидению. Но, ещё раз подчеркну, с нами по-другому было нельзя, мы остро чувствовали любую фальшь.

В воспоминаниях других учеников 2-й школы той поры много внимания уделяется этим вопросам, говорится об особой атмосфере, которая существовала внутри школы. Я бы её охарактеризовал как умеренно критическую по отношению к официозу того времени. Наши преподаватели, как правило, находили аргументы с опорой на здравый смысл, логику и вечные ценности. В актовом зале школы над сценой в качестве лозунга висели стихи турецкого поэта-коммуниста Назыма Хикмета: «Если я гореть не буду, если ты гореть не будешь, если мы гореть не будем, кто же здесь рассеет тьму?». Эта атмосфера, конечно же, повлияла и на меня. Могу сказать, что после 2-й школы я с трудом переносил громогласную комсомольскую буффонаду, разговоры о «ленинских зачётах» и т. д., в которые я погрузился, поступив в МГУ.

И всё же, как я теперь понимаю, В. Ф. Овчинникову до поры до времени удавалось удерживать ситуацию в допустимых для того времени рамках. Слава о школе продолжала греметь, её ученики брали половину всех наград на олимпиадах по физике и математике. Работал «принцип Овчинникова» — он говорил, что руководить школой очень просто — надо набрать хороших учителей и не мешать им работать. И всё бы хорошо, но тут вмешался случай.

Я уже говорил, что в деятельности 2-й школы принимали активное участие преподаватели, студенты и аспиранты МГУ. А в МГУ тогда была непростая ситуация: в конце 60-х годов секретарём парткома там был В. Н. Ягодкин, который строил свою карьеру на разрушении всего, что не соответствовало его ортодоксально-сталинистским взглядам. Желающие могут прочитать об этом деятеле в интернете. Разумеется, он знал о «вольнодумной» 2-й школе, но, пока оставался в МГУ, не мог прямо на неё влиять. И вот в начале 1971 года его избирают секретарём Московского горкома КПСС по идеологии. По МГУ передавались его слова в связи с этим назначением: «Вы меня ещё на палках носить будете» (имея в виду палки на демонстрациях, к которым сверху крепились портреты вождей).

И первое, что Ягодкин сделал на новом посту, — инициировал проверку 2-й школы, по результатам которой летом 1971 года был уволен Владимир Фёдорович Овчинников и все его заместители. Фактически школа была разгромлена. Я в это лето сдавал выпускные экзамены, затем вступительные, так что всё остальное для меня было как в тумане. Но Владимир Фёдорович мне рассказывал, что летом к нему приходил мой отец, Рем Викторович Хохлов, и они обсуждали, что можно сделать, чтобы спасти школу. Тогда не получилось.

2-я школа после 1971 года переживала разные времена, неизменно оставаясь одной из лучших физико-математических школ Москвы. Но, пожалуй, эту школу уже нельзя было назвать уникальной.

Владимир Фёдорович Овчинников после 1971 года долгое время работал директором Заочной математической школы, преподавал историю в разных московских школах. В 2001 году он вернулся директором в ту школу, которую он создал (ныне Лицей «Вторая школа»), и ещё 20 лет проработал на этом посту. В 2008 году ему было присвоено почётное звание Народный учитель Российской Федерации. В марте 2020 года он передал директорский пост преемнику М. И. Случу, оставаясь при нём советником.

Собеседование с директором

Евгения Искандеровна Алексеева, выпускница 2010 года

Вспоминая сегодня Владимира Фёдоровича, я обнаружила, что невозможно отделить воспоминания о человеке от его влияния на тебя.

Я окончила Вторую школу в 2010 году, поступила на биологический факультет и, окончив его, вернулась в школу учителем биологии. Проработала во Второй школе два года, а дальше аспирантура — сложно было совместить её с учительством.

Я не знала Владимира Фёдоровича близко и не работала с ним многие годы, но может быть поэтому мои воспоминания о нём так чётко и ярко разделились на воспоминания школьника и воспоминания учителя. Когда мы были школьниками, директор был на расстоянии от нас. Чаще всего мы видели его на праздниках или официальных мероприятиях. Нередко он стоял у входа школы и здоровался с каждым второшкольником. Сейчас я вспоминаю это и думаю, насколько это было трогательно — лично приветствовать каждого из нас, но тогда при такой утренней встрече у нас пробегал холодок по коже. В общем впечатление он производил весьма грозное.

Я заканчивала школу с огромной благодарностью к своим учителям, мне не нужно было объяснять, как много они мне дали, я это прекрасно чувствовала. Как и все второшкольники, я знала историю нашей школы, знала, что за этой историей стоит наш замечательный директор, но это знание мало пересекалось с тогдашней реальностью. Мне казалось, что это всё больше про ранние выпуски второшкольников, не про нас, а мы уже больше обязаны свои учителям, с которыми общались каждый день.

Прошло время, я окончила университет, но плохо понимала, куда я хочу двигаться дальше. Я хотела заниматься наукой, но нужно было определиться с областью. Единственное, что мне тогда было очевидно, что в биологии много потрясающе интересного и удивительного, и что мне невероятно здорово рассказывать об этом, если это кому-то любопытно.

Я тогда работала в институте на улице Губкина, недалеко от нашей школы, и по дороге домой часто встречала кучки второшкольников. Это избитая тема для шуток, но этих ребят действительно легко выделить из толпы, они вечно обсуждают что-нибудь эдакое. Едешь в троллейбусе, а сзади тебя кто-то спорит про великую теорему Ферма смешными детскими голосами.

И в какой-то день я подумала, а почему бы не рассказывать про биологию второшкольникам. Сперва я зашла к Александру Кирилловичу Ковальджи, потом оказалась в кабинете Владимира Фёдоровича. И тут мне стало ясно, откуда все эти люди, мои учителя, второшкольная среда. Она не сама по себе появилась, у неё есть причина.

Владимир Фёдорович не задал мне тогда ни единого «обычного» вопроса, о которых я была наслышана от знакомых. Я имею в виду вопросы при приёме на работу. Он просто побеседовал со мной, почему биология — это интересно, как она пересекается с математикой, в общем как будто пофилософствовал за чашкой чая и дальше дал возможность пробовать себя. Мне кажется, он прощупал меня, насколько я люблю свой предмет и верю в то, чему хочу учить, и именно это было важно для него, а не наличие опыта или педагогических регалий.

Вероятно, такой его подход и сделал Вторую школу такой, какая она есть: тут учат не для того, чтобы выполнить какие-то формальные обязанности или вбить что-то в голову, а пытаются показать, чем удивителен этот предмет, чем он прекрасен. Учат любви к знанию, к критическому мышлению, к рефлексии. И прекрасные учителя они не сами по себе, и не просто так собрались в одном месте.

Позже я не раз в этом убеждалась и не переставала удивляться, насколько Владимир Фёдорович был открыт к новым идеям, новым людям, был готов их поддержать. Он и сам предлагал что-то совершенно новое и неожиданное. Помню, как однажды он вызвал меня к себе и спросил: «Женя, а что, если мы сделаем онлайн курс. Его смогут слушать дети со всей страны, не только те, у кого есть возможность куда-то ходить». Это было за 5 лет до пандемии, когда обучение онлайн мало практиковалось.

Вспоминая о нём и о себе, о том, как он повлиял на меня, понимаю, что настоящая любовь к своему делу и доверие к этой любви в других людях создают такие вещи, которые существуют вне времени, затрагивают судьбы многих людей и никогда не будут забыты, и прежде всего нами, второшкольниками.

Смутные времена 1972–2001 гг.

Александр Кириллович Ковальджи,
выпускник 1973 года, директор 1998–2001 гг.

Вынужденно уходя из школы в 1971 году, Владимир Фёдорович просил учителей не уходить, но большинство его не послушалось и покинуло школу. Некоторые учителя задержались на год-два, чтобы выпустить свои классы. Дождались возвращения Владимира Фёдоровича в 2001 году только Р. К. Бега, И. Н. Хлюстиков, В. В. Татаринов, Г. А. Чувахина, И. А. Шелевич. Р. К. Бега — легендарная фигура, о нём отдельное воспоминание, фактически он оставался главным хранителем «духа» Второй школы до возвращения Владимира Фёдоровича.

В 1979 году были введены младшие классы, что привело к уменьшению числа физматклассов. Конкурсный набор сохранялся (за исключением 1980 и 1981 годов). С 1982 года один из двух старших физмат классов набирали в 9-й класс, а не в 6-й. С 1988 года набор младших классов был отменён и возобновился набор в 7-е и 8-е физмат классы. В том же году над школой взял шефство МФТИ.

В августе 1992 года школа № 2 была преобразована в Государственный лицей «Вторая школа». Директором Лицея стал её выпускник

1975 года Пётр Вадимович Хмелинский. В школу было привлечено значительное количество новых учителей. Было образовано три направления: физико-математическое, биолого-химическое и гуманитарное.

В 1997 году директор П. В. Хмелинский по ряду причин решил уходить из школы. В этой ситуации появился предприниматель, который выразил желание возглавить школу. Его программа заключалась в коммерциализации деятельности школы с опорой на её имя.

Учителя не на шутку испугались и стали искать подходящего директора Второй школы. Но все отказывались. Тогда Р. К. Бега и С. И. Васянин уговорили меня, хотя я работал в школе учителем по совместительству один год, но давно работал в ВМШ при Второй школе на общественных началах. У меня не было ни управленческого опыта, ни склонности к такой работе. Окружное начальство побоялось назначить директора и позволило учителям провести выборы. Я написал программу развития школы и схлестнулся с предпринимателем. Примерно 80 % учителей проголосовали за меня.

Дальше начались проблемы: у школы не был утверждён устав, не было лицензии, не было аккредитации, не было аттестации, не было утверждённого названия «Вторая школа», не было разрешения набирать 7-е классы. Чтобы не закрывать школу, начальство назвало её экспериментальной площадкой.

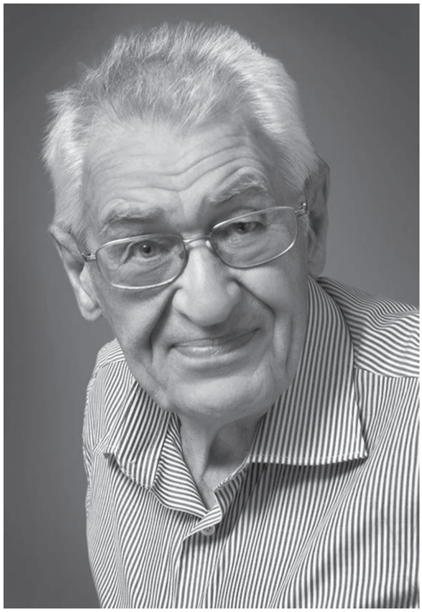
При этом внутри школы не было завуча (завуч сложила полномочия ещё при П. В. Хмелинском). Исполняли обязанности завуча две мамы учеников, которые тоже не работали в школе, но пытались составлять расписание, писать отчёты для вышестоящих инстанций, занимались текучкой.

За 3 года, к возвращению Владимира Фёдоровича, эти проблемы были решены: устав был утверждён, лицензия получена, школа прошла аккредитацию и аттестацию, название «Лицей „Вторая школа“» было разрешено в порядке исключения (лицеям Москвы присваивались четырёхзначные номера), было разрешено в порядке исключения набирать 7-е классы (в Положении о лицеях разрешался набор только с восьмого класса).

Гуманитарное направление в Лицее постепенно угасло, сами учителя в гуманитарных классах говорили, что им интереснее работать в физматклассах, поскольку там дети лучше думают. В 2001 году, уже при Владимире Фёдоровиче, ушла группа учителей биолого-химического направления, поскольку им стало тесно в Лицее, и они фактически организовали биолого-химический лицей на базе школы № 192. Из одного лицея получилось два лицея.

ВЗМШ

Владимир Фёдорович Овчинников[1)]



Раньше ВЗМШ называлась Всесоюзная заочная математическая школа, а теперь называется Всероссийская заочная многопредметная школа.

Заочная школа возникла в 1964 году в момент, когда в СССР были созданы 5 специализированных интернатов для одарённых детей на базе пяти крупнейших университетов, в том числе и МГУ. Тогда ВЗМШ курировал выдающийся математик Израиль Моисеевич Гельфанд.

Однажды он зашёл ко мне и спросил, знаю ли я, что созданы такие интернаты, в том числе при МГУ, и считаю ли я, что их достаточно, чтобы охватить всех детей страны углублённым изучением математики настолько, насколько они могут освоить. Я, естественно, сказал, что интернатов можно бы и побольше, но это дорого, и детей приходится отрывать от семьи.

Тогда у него родилась идея заниматься с детьми, живущими где-то в глубинке, по переписке, т. е. присылать им задания, которые они выполняли бы и присылали на проверку в Москву. Вот так возникла идея, с которой мы с Гельфандом пошли к тогдашнему ректору МГУ академику И. Г. Петровскому, потому что он сам происходил из небольшого

[1)] Текст относится к началу 2000-х годов.

городка Брянской губернии и понимал, как важно иметь хороших учителей.

Эту идею мы обсудили в Министерстве просвещения РСФСР, и наша идея стала обретать реальные черты. Была подготовлена вступительная работа, и осенью 1964 г. кабинет декана мехмата, профессора Ефимова, был буквально завален мешками с письмами этих ребят, их было так много, что пришлось пригласить студентов.

Наши расчёты, что в заочной школе будут тысячи полторы ребят из ближайших областей, с треском лопнули, пришло больше 20 тысяч писем. Не все, конечно, справились с работой, и в дальнейшем треть отсеялась (кому-то оказалось не по зубам, кому-то показалось неинтересно, у кого-то сложилась судьба по-другому), но заочная школа сразу получилась большая. Возник вопрос о том, где взять много учителей?

Задания для поступающих были несколько выше школьной программы, но они опирались на базовую программу, нельзя же было дать что-то заоблачное. Задачки были по-своему трудные, но интересные, их было «вкусно» решать.

Так возник вопрос: кто будет учить эти тысячи ребят? Тогда в вузах практиковалась общественная работа студентов, студенты работали в частности в ДНД — добровольной народной дружине, охраняли порядок вокруг университета, в общежитиях и проч. Ну, и студентов спросили в Комитете комсомола, что они предпочтут: работать преподавателями заочной школы или дежурить в ДНД?

Какая-то часть, имевшая педагогическую жилку, пришла в качестве преподавателей, которые не требовали зарплаты и даже не понимали, как можно брать деньги за эту работу.

Тогда в заочной школе было всего 5 штатных сотрудников, остальные были студенты, которые, кроме того, помогали составлять задания для ребят. Возникли интереснейшие учебные задания, которые до сих пор посылают школьникам, И. М. Гельфанд написал несколько интересных книжек для ВЗМШ, аспиранты, молодые учёные и студенты-старшекурсники занимались педагогической деятельностью и предлагали темы и задачи.

Потом целый ряд вузов, в основном педагогических, обратились к нам с просьбой создать филиалы. И возникли 45 филиалов заочной школы. Потом появилась ещё одна интереснейшая форма, некоторые учителя математики, узнав о заочной школе, обратились к нам с просьбой коллективно заниматься в этой школе.

Возникли группы «коллективный ученик», так они и сейчас называются, в которых группа ребят, любящих математику, решает задачи под руководством учителя математики, мы присылаем им задания, они собираются после уроков на заседание кружка, обсуждают, пишут совместную работу в общей тетради и присылают её нам на проверку.

Сначала занимались только 9–10-классники, потом, когда появилась 11-летка, появились и 11-классники, а сейчас математикой занимаются, начиная с 6 класса. Возникла проблема, как подводить итоги.

Ребята, которые заканчивали школу, спрашивали, почему им не дают никакого диплома, да и вообще, было бы хорошо подводить итоги. Мы стали выдавать им диплом, предупреждая ребят, что никаких юридических прав этот диплом не даёт, он годится только на то, чтобы повесить его над кроватью. Но тем не менее, потом оказалось, что некоторые провинциальные вузы спрашивают у ребят, не заканчивали ли они заочную школу, и относятся к этим дипломам очень серьёзно, а когда была балльная система приёма, они даже начисляли балл за окончание ВЗМШ.

В общем, у заочной школы появилась репутация серьёзного образовательного учреждения. Некоторые спрашивали, а почему дети получают диплом заочно, а может быть, занимается брат, дядя или папа, но мы говорили: пожалуйста, пусть занимается папа, но тогда ребёнок сам себя обманывает.

Потом в заочную школу пришли биологи с факультета и спросили, не стоит ли создать и биологическое отделение. Так постепенно возникли отделения биологии, потом филологии, физики, химии и даже два отделения, которых в школьной программе нет, это отделения права и экономики. В таком составе — 8 отделений — школа существует и сейчас.

Возникли подобные школы, возникло движение заочного дополнительного образования, сейчас солидные заочные школы существуют при Новосибирском университете, при целом ряде управлений образования: в Брянске, Костроме, Кирове и т. д., этих заочных школ стало много, и теперь можно говорить о некой системе заочного образования.

Из ВЗМШ в МГУ поступает меньшинство, потому что учиться в столичном городе дорого. По разным причинам, главные, конечно, материальные, но после заочной школы активно поступают в свои вузы, в свои университеты. Мы ведём частичный учёт выпускников, и действительно, большинство из них продолжает образование. Так что ВЗМШ — это толчок к высшему образованию.

Сейчас заочная школа переходит на цифровые технологии. Мы работали с помощью почты, на бумажных носителях, присылали брошюру и получали от ребят тетрадочку, но сейчас даже и в провинциальных школах довольно быстро появляются компьютеры, появляется интернет и, значит, возможность хотя бы частично заменить бумажные носители на цифровые.

Многие говорят, что заниматься только с экрана компьютера довольно трудно, и есть особое удовольствие для человека, читающего настоящую книгу, — легче воспринимать материал, а вот комбинированная система занятий полезна, она ускоряет обратную связь. И потом бывает, что у ребят возникают вопросы, они могут по электронной почте задать их и быстро получить ответ.

Математика во Второй школе

Павел Витальевич Бибиков, выпускник Второй школы 2005 г.,
зав. кафедрой математики, к. ф.-м. н.

Курс математики во Второй школе делится на 3 раздела: алгебра, геометрия и спецматематика. Конечно, присутствуют ещё кружки, и о них мы скажем отдельно, как и о Летней школе и других интенсивах.

Хотя алгебра традиционно оказывается для школьников проще геометрии (благодаря наличию достаточно чётких алгоритмов решения задач), это обстоятельство имеет и обратную сторону. Алгебра зачастую проигрывает геометрии в красоте и наглядности. В результате возникает серьёзная проблема, состоящая в снижении мотивации у школьников к изучению алгебры.

Даже если говорить о школьниках, которые готовы заниматься математикой дополнительно, в том числе для достижения высоких результатов на олимпиадах, именно алгебраическая их подготовка оказывается зачастую недостаточной. Видимо, это связано с тем, что олимпиадные алгебраические задачи требуют не столько дополнительных знаний, сколько развитых умений.

Таким образом, возникает проблема в преподавании алгебры сильным школьникам, поскольку стандартное её изложение не мотивирует ребят к её глубокому изучению. Во Второй школе удалось нащупать некоторые подходы к решению этой проблемы.

Курс организован следующим образом. 3 урока в неделю отводятся на обычную алгебру. На двух оставшихся уроках регулярно (примерно 1 раз в 2–3 недели) рассказывается о каком-то интересном факте или вопросе, связанном с темой, которая в данный момент проходится. Даже для семиклассников можно найти множество увлекательных сюжетов, в которых требуется не только серьёзная техника (что как раз и мотивирует ребят к её оттачиванию), но и владение соображениями и методами, относящимися к другим областям математики (например, к комбинаторике или теории чисел).

Пример 1. Занятие может начинаться со следующего вопроса. Возьмём прямоугольный лист бумаги и проведём на нём 10 произвольных прямых. Раз прямые произвольны, давайте считать, что никакие три прямые не проходят через одну точку, а также прямые не проходят через углы листа. В результате наш лист разобьётся на многоугольники. Каких многоугольников окажется больше — треугольников или четырёхугольников?

Если немножко поэкспериментировать, окажется, что ответы могут быть разными. Но при этом как бы мы ни старались, у нас будет мало шестиугольников и семиугольников, т. е. многоугольников с большим числом сторон. А вот треугольников и пятиугольников будет примерно поровну. Например, нет такого разрезания, на котором были бы только треугольники и четырёхугольники. Почему?

Объяснение у всех этих наблюдений одно и весьма неожиданное: среднее количество сторон у возникающих многоугольников равно 4 и оно не зависит от самого разбиения! Чтобы доказать это, потребуются индуктивные соображения, однако после проведённых экспериментов кто-нибудь из детей обычно догадывается до нужного рассуждения.

А именно, давайте посмотрим, как меняется количество многоугольников и общее количество их сторон при проведении очередной прямой. Возьмём отрезок этой прямой, который разбивает один из многоугольников на две части. Тогда проведение этого отрезка добавляет

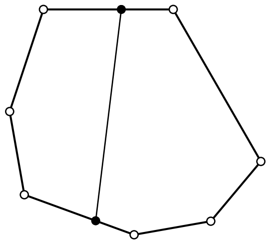


Рис. 1

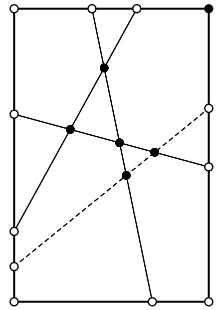


Рис. 2

один многоугольник и 4 стороны: во-первых, две стороны исходного многоугольника бьются на две части каждая, а во-вторых, добавляется сам отрезок, который считается по одному разу для каждого из двух новых многоугольников (рис. 1). Значит, если среднее количество сторон было равно 4 до проведения этого отрезка, то и после его проведения среднее количество сторон останется равным 4 (рис. 2). Вот и всё!

Кстати, из приведённого рассуждения видно, что необязательно проводить прямые; достаточно проводить отрезки с концами на сторонах уже имеющихся многоугольников. Таким образом, решая исходную задачу, мы смогли даже обобщить её!

А что будет, если резать не лист бумаги, а всю плоскость? Сколько тогда получается частей и сторон? А если разрешить прямым пересекаться в одной точке? А можно ли разрезать более сложные объекты, например, сферу? Чем тогда её резать, ведь привычных нам прямых на сфере нет?

Оказывается, что подобными вопросами можно снабдить и курс школьной алгебры (да и не только алгебры).

Пример 2. При отработке техники раскрытия скобок (о, как это уныло…) автор поставил семиклассникам следующий вопрос. Что получится, если раскрыть скобки в произведении $(1-x)(1-x^2)$? Ну, это легко: $(1-x)(1-x^2)=1-x-x^2+x^3$. А если раскрыть скобки в произведении $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$? Здесь дети догадываются, что дешевле умножить уже имеющееся выражение $1-x-x^2+x^3$ на $(1-x^3)$. В итоге получится $1-x-x^2+x^4+x^5-x^6$. Смотрите: слагаемое x^3 исчезло! А если добавить ещё скобку $(1-x^4)$? А если рассмотреть бесконечное произведение $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$? Что получится при раскрытии скобок? И как вообще понимать такую запись?

Опять же, школьники на основе эксперимента чувствуют, что при раскрытии скобок начальный кусок возникающего выражения одинаков и не меняется при добавлении новых скобок. В итоге можно выписать вот такой ряд:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

Что можно заметить, глядя на этот ряд? Видно, что знаки в нём чередуются: сначала идёт один минус, потом — два минуса, потом — два плюса и т. д. Особенно интересно, какие степени остались у слагаемых! Можно ли про них что-то понять? Оказывается, можно! Причём ответ лежит в совершенно другой области — в геометрии! Речь идёт о так называемых пятиугольных числах...

Пример 3. Ещё один интересный вопрос, связанный с формулами сокращённого умножения, — знаменитое тождество Эйлера:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Если дать эту формулу для доказательства школьникам, ничего про неё не сказав, она быстро забудется. Но ведь она тесно связана с большим количеством важнейших вопросов: здесь и нормы гауссовых комплексных чисел, и рождественская теорема Ферма, и многое другое. Например, можно проинтерпретировать данную формулу так: если два натуральных числа представимы в виде суммы двух квадратов, то и их произведение представимо в виде суммы двух квадратов (кстати, именно так можно вводить полугруппы: начиная не с формальных определений, а с содержательных примеров). Для детей осознание этой фразы и её связи с формулой Эйлера тоже требует времени, и важно дать им это время! Тогда формула не забудется как что-то ненужное, о ней останется содержательное воспоминание.

Дальше можно предложить детям самим задать вопросы, связанные с данной интерпретацией. Обычно кто-то спрашивает: верно ли, что любое натуральное число представляется в виде суммы двух квадратов? Можно сразу ограничить детей представлением простых чисел (почему? — нужно вспомнить про основную теорему арифметики). Здесь видно, что какие-то простые числа представимы суммой квадратов $(2, 5, 13, 17, 29, \ldots)$, а какие-то — нет $(3, 7, 11, 19, 23, \ldots)$. Можно ли указать общую закономерность? Можно: всё зависит от остатка при делении на 4 — если он равен 1, то представление существует, а если равен 3, то нет. Почему?

Выводы. Нужно не бояться отвечать, что ответ выходит за рамки наших сегодняшних знаний. Видя, что в процессе освоения математики естественно возникают вопросы, требующие для своего изучения новых, ещё неизвестных разделов, дети получают мотивацию к дальнейшему освоению науки. А заодно усваивают важное правило: не понимать и не знать в математике — нормально! Но при этом важно стремиться ликвидировать это непонимание, стараясь разобраться в новых для себя вещах.

Ещё одним ответом на вопрос: «А разве можно говорить о таких сложных вещах?» служит следующий аргумент. Практика показывает, что уровень человека (не обязательно в математике) ощутимо повышается при регулярных и систематических попытках освоить материал, существенно превосходящий его текущие возможности. Так и здесь: в попытках освоить новые для себя понятия, школьник неожиданно начинает лучше разбираться и в текущем материале! Видимо, они стимулируют ту «концентрацию личности», которая и обеспечивает мотивацию и работу на нужном уровне, причём во всей математике. И это соображение является важной альтернативой огромным домашним заданиям, которые задаются в попытках добиться от детей концентрации с помощью изнурительной нагрузки.

Вместе с тем, оставляя открытые вопросы, важно в нужное время вернуться к ним и показать, что наконец-то, спустя несколько лет мы можем дать ответ на то, что обсуждали ещё в 7 классе. И сразу же образуется связь между, казалось бы, разными областями математики, которые изучались ранее: и алгебра 7 класса, и теория чисел, и комплексные числа… Поэтому, продумывая курс, важно мыслить его в целом, не ограничиваясь отдельно 7 или 8 классом.

Сюжеты. Начиная с 9 класса, подобные сюжеты становятся более продолжительными. При этом они сопровождаются домашними заданиями, которые обычно заключаются в составлении аккуратного конспекта материала текущего занятия. Понятие «сюжет» здесь не равносильно «лекции». Сюжет всегда построен вокруг определённого круга задач, решая (или пробуя решать) которые, ученики и открывают для себя что-то новое. Разумеется, этот процесс сопровождается и теоретическими сведениями, и доказательством новых теорем, и разборами самих задач, но при этом школьники всегда вовлечены в процесс работы (а иногда и сами выступают в роли исследователей).

Матанализ. Во втором полугодии 10 и в первом полугодии 11 класса даётся необходимый минимум (только минимум!) математического анализа. Это связано с тем, что при обширном изучении матанализа в школе её выпускникам в вузе кажется, что они «уже всё знают» и им не нужно ходить на лекции, что приводит потом к проблемам на экзаменах. Во Второй школе задачи, связанные с техническими вычислениями, сопровождаются глубокими вопросами и содержательными примерами использования этих вычислений в ситуациях, казалось бы, далёких от данной темы. В школе важно почувствовать «дух» матанализа, научиться выяснять, что происходит «в пределе», а дублировать вузовский курс нет смысла.

В целом. Отметим, что, несмотря на снижение количества времени на освоение стандартной школьной программы алгебры (с 4–5 часов в неделю до 2–3 часов в неделю), мы ни разу не сталкивались с нехваткой времени для прохождения той или иной темы. То есть снижение времени, отводимого на техническую работу, не оказало влияния на качество усвоения материала. Зато оно позволило познакомить учеников с чем-то новым и действительно содержательным, как бы сплотить их вокруг общей идеи: математика едина, и чтобы успешно в ней работать, нужно понимать её целиком, а не только по разделам. Мы надеемся, что подобный курс формирует у школьников некоторое представление о том, как устроена наука математика.

Программы по алгебре в 7–11 классах

Указаны только темы, посвящённые содержательным вопросам и сюжетам, выходящим за рамки традиционного учебника.

Добавление к программе 7 класса (по учебнику Макарычева)

1. На сколько частей делят плоскость n прямых?
2. Последовательность Фибоначчи.
3. Цепная дробь, её приближённое вычисление.
4. Вычисление произведения $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$.
5. Геометрическое суммирование, треугольные числа, пятиугольные числа, общая формула.
6. Перевод десятичной дроби в обыкновенную. Периодические дроби. Средняя длина периода. Иррациональные числа.
7. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу. Использование теоремы Безу для разложения на множители.

Добавление к программе 8 класса (по учебнику Виленкина)

1. Вычисления квадратных корней. Методы Герона и Ньютона. Приближённое решение алгебраических уравнений.

2. Уравнение $x^2 \equiv -1 \pmod p$. Квадратичные вычеты. Формула Эйлера и рождественская теорема Ферма.
3. Комбинаторика перестановок. Композиция перестановок, уравнение $x^2 = y$. Диаграммы Юнга и функция разбиения. Группы симметрий как группы перестановок. Группы вращений правильного тетраэдра, куба, додекаэдра.
4. Алгебраические кривые на плоскости. 16-я проблема Гильберта. Род кривой. Сравнения Гудкова.
5. Задача о днях рождения. Приближённые вычисления. Логарифмирование и потенциирование.
6. Функция Эйлера и её рост в среднем. Вероятность несократимости дроби. Ряд из обратных квадратов. Гармонический ряд и логарифм.
7. Случайность и способы её определить. Случайные двоичные последовательности и операторы дискретных разностей. Графы операторов, их структура. Двоичные деревья. Графы операций в различных группах.
8. Распределение простых чисел в натуральном ряду.

Добавление к программе 9 класса (по учебнику Виленкина)

1. Формула Кардано решения кубического уравнения. Неразрешимость задачи об удвоении объёма.
2. Свойства функций при решении уравнений и неравенств. Функциональные уравнения.
3. Накрытия. Накрытие окружности прямой. Лист Мёбиуса и нетривиальное накрытие окружности. Ориентация двумерной поверхности.
4. Комплексные числа. Применения в геометрии. Построения правильных многоугольников циркулем и линейкой.
5. Гауссовы числа, деление с остатком. Доказательство рождественской теоремы Ферма.

Добавление к программе 10 класса (по учебнику Виленкина)

1. Числа Каталана и комбинаторная геометрия.
2. Производящие функции. Доказательство тождества Эйлера с пятиугольными числами. Формула для количества счастливых билетов.
3. Графы. Планарные графы и формула Эйлера. Эйлерова характеристика и топология двумерных поверхностей. Поверхности с нечёт-

ной эйлеровой характеристикой. Индукция и теорема Турана. Проблема четырёх красок и задача об охране музея. Эйлеровы графы. Деревья, формула Кэли и коды Прюфера.

4. Целочисленные решётки. Формула Пика. Приближения иррациональных чисел. Пример трансцендентного числа. Теорема Лиувилля.
5. Цепные дроби. Алгебраическая и геометрическая теории цепных дробей. Операторы сдвига. Теорема Лагранжа. Уравнение Пелля.
6. Ряды Тейлора и дифференциальные уравнения.
7. Джеты и распределение Картана.
8. Формула Эйлера. Гиперболические функции. Связь между сферической геометрией и геометрией Лобачевского.
9. Сапог Шварца.

Добавление к программе 11 класса (по учебнику Виленкина)

1. Интегрирование дифференциальных форм на поверхностях. Площадь поверхности и объём тела. Дискретное интегрирование, преобразование Абеля.
2. Применение интегралов в физике.
3. Функция нормального распределения в теории вероятностей.
4. Равномерное распределение чисел $\{an\}$ (a — иррациональное, n — целое) на окружности. Плотная обмотка тора. Первые цифры степеней двойки.
5. Разрешимость уравнений в радикалах. Теорема Абеля.
6. Римановы поверхности. Интегрируемость в элементарных функциях. Эллиптический интеграл.

О преподавании геометрии во Второй школе

Константин Владимирович Козеренко,
Заслуженный учитель г. Москвы, к. ф.-м. н.

Логически, курс геометрии состоит из:

1) обсуждения теории и комментариев к ней;
2) решения и анализа задач;
3) рассказов об истории геометрии.

Изучая теорию, важно соблюсти баланс между необходимым для математической школы уровнем строгости и наглядными представлениями. Тут полезно придерживаться принципа Н. Н. Константинова о *«честном умолчании»*, который подразумевает, что если учитель в каком-то

месте либо пропустил (умолчал) объяснение, понимая, что ученики воспримут соответствующий факт, как нечто естественное и не вызывающее возражений, либо сослался на очевидность, то после этого добавить строгое рассуждение можно, *не разрушая структуры курса*.

Как показывает наш опыт, если обратить внимание детей на то, что надо, вообще говоря, доказывать даже, что две (!) медианы в треугольнике пересекаются, то вы приведёте их в восторг (особенно, если они будут чётко понимать, что спрашивать их это не будут)! И такая реакция вполне объяснима.

Движения. Изучая теорию, я обращаю ещё особое внимание на то, как вводятся понятия. Скажем, можно ли понять (т. е., как считают многие, создать наглядный образ), что такое движение, исходя из его определения? Нет, конечно! Но самое главное, что и не надо! Например, из определения поворота, как композиции осевых симметрий, сразу и не догадаешься, причём здесь поворот.

Очень важно приучать школьников к тому, что это типичный для математики подход: сначала даётся формальное определение, так сказать, логическое ядро понятия, а затем теоремы (основные свойства), которые, являясь расширением этого ядра, помогают понять суть понятия. Кроме этого, ещё необходимы мотивировки и ключевые примеры. Всё это вместе составляет когнитивный блок.

Что касается движения, то соответствующий блок у меня состоит из определения (движение есть преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками), доказательства того, что движение переводит прямую в прямую и сохраняет углы, а также примеров движения и мотивировок. Кстати говоря, центральная, осевая симметрии, поворот и параллельный перенос как примеры движений я стараюсь ввести раньше. Мотивировками здесь служат определение равенства фигур и обобщения понятия движения, о чём стоит поговорить поподробнее. Стоит обратить внимание на то, что равенство фигур — это математическое понятие, и не такое простое. Стоит рассказать об аффинных и проективных преобразованиях, об Эрлангенской программе Клейна, о топологии и дифференциальной геометрии.

И конечно, говоря о движении, надо обязательно отметить ещё следующие его свойства: движение переводит биссектрису угла в биссектрису, ортоцентр треугольника в ортоцентр, описанную около треугольника окружность в описанную окружность и т. д. Все эти свойства являются элементами так называемого функционального мышления в геометрии, которое очень важно поставить и развивать.

Говоря о движениях, надо ещё обязательно доказать теорему о том, что два движения, образы которых для трёх точек, не лежащих на одной прямой, совпадают, — равны (т. е. у них совпадают образы всех точек). Отсюда вытекают два важных следствия. Во-первых, что любое движение есть композиция не более трёх осевых симметрий (математики в этом случае говорят, что осевые симметрии порождают группу движений). Во-вторых, что любое движение есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия, либо поворот, либо параллельный перенос, либо скользящая симметрия. Последняя теорема — пример задачи о классификации.

Векторы. Следующее понятие — вектор. Прежде всего, я различаю направленный отрезок и вектор. Вектор — это множество направленных отрезков, которые могут быть совмещены параллельным переносом. Для того чтобы сложить два вектора, мы выбираем по представителю каждого вектора, которые «торчат» из одной точки, складываем их по правилу параллелограмма, и вектор, который содержит получившийся направленный отрезок, называем их суммой. Отметим, что мы работаем с множествами, мысля их как единое целое. Здесь мы встречаемся с очень важным приёмом введения новых понятий в математике, который называется факторизацией. Школьники, вообще говоря, к этому моменту уже с ним сталкивались. Мы имеем в виду основное свойство дроби, когда много дробей являются одним числом. Чтобы сложить два числа, тоже выбирают по представителю, а именно дроби с одинаковым знаменателем, складывают их числители, и число, которое содержит получившуюся дробь, называют их суммой. Очень важно отметить эту аналогию.

Также полезно для будущего заметить, что множество векторов и плоскость с отмеченной точкой — это одно и то же (или, как говорят математики, эти объекты изоморфны). Для этого каждой точке сопоставим вектор, который представляется направленным отрезком с началом в отмеченной точке и концом в данной точке. Такие обсуждения устраняют разрывы между школьным и вузовским математическим образованием, позволяют увидеть единство на первый взгляд совсем непохожих вещей.

К подобному разрыву может привести школьное определение скалярного произведения, которое кажется единственно возможным. Чтобы избежать разрыва, надо объяснить, что скалярное произведение есть симметрическая, билинейная, положительно определённая функция. Дальше, имея такую функцию, можно определить расстояние между точками на плоскости как квадратный корень из скалярного квадрата и меру углов по известной формуле. Таким образом, скалярное произведение можно ввести разными способами — например, разлагая векторы по другому базису, мы можем получить другое скалярное произведение. Для этого перемножим сначала первые координаты двух векторов, потом вторые и сложим эти произведения. Следовательно, можно по-разному ввести меру углов. Отсюда вытекает, что перпендикулярность прямых — понятие относительное!

Кроме того, рассмотрим линейные преобразования плоскости и увидим, что они переводят любую прямую в прямую. Если при этом линейное преобразование сохраняет скалярное произведение, то оно является движением плоскости. Математики называют такие преобразования ортогональными. Добавив к ортогональным преобразованиям параллельные переносы, мы получим множество всех движений. Редко кто даже из студентов самостоятельно заметит, что ортогональные преобразования, которые появляются в курсе линейной алгебры, и школьные движения — это одно и то же!

Площадь. Это очень сложное понятие, по существу, интеграл. Наверное, стоит предварительно договориться с учащимися и разрешить им при решении задач пользоваться стандартными формулами площадей. Когда же дело дойдёт до определений и доказательств, надо особо подчеркнуть, что площадь действительно нуждается в определении. И привести пример фигуры, — скажем, классический ковёр Серпинского имеет нулевую площадь. После этого, может быть, станет понятнее, почему доказательства вроде бы простых формул такие сложные.

Гомотетия. Одним из ключевых понятий в курсе школьной геометрии является гомотетия. Это обусловлено сразу несколькими причинами. Во-первых, гомотетия является формализацией наглядного образа, связанного с раздутием или сжатием фигур. Поэтому она, как правило, легче воспринимается и лучше узнаётся при решении задач. Во-вторых, гомотетия является примером преобразования плоскости, что позволяет привнести в геометрию совершенно новую технику, новый, так называемый, функциональный язык. На наш взгляд, чрезвычайно важно научить школьников понимать этот язык и разговаривать на нём. Наконец, в-третьих, гомотетия позволяет решать очень сложные задачи.

История геометрии. На уроках я уделяю много внимания истории геометрии. Например, когда речь заходит о координатах, конечно, обсуждается вопрос о том, зачем Декарту понадобились декартовы координаты, а когда появляется прямая Эйлера, рассказываю, откуда она взялась, какую цель преследовал при этом Эйлер.

Но, пожалуй, самый важный из таких разговоров — история появления геометрии Лобачевского. Во-первых, открытие этой геометрии — это результат мирового класса, полученный российским математиком. В своё время геометрию Лобачевского не принимали такие крупные математики, как Артур Кэли и Карл Вейерштрасс. Но они считали, что в рассуждениях Лобачевского есть, может быть глубоко запрятанная, ошибка. А наши дети знают, что Лобачевский великий математик, но не могут себе представить, как через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной. Эта ситуация — яркий пример того, что мы называем неявными блокировками. Неявными потому, что никто специально не формирует неправильный интуитивный образ. Обычно он является результатом привыкания, а затем и абсолютизации определённого вида рисунков. Лобачевский — создатель аксиоматического метода, оторванного от наглядности, который позволяет «разблокировать» интуицию, развивать у школьников дедуктивное мышление.

Добавим, что евклидова гомотетия и инверсия оказываются движениями в геометрии Лобачевского (в модели Пуанкаре в полуплоскости), что отражает важнейший принцип: «в каждой новой геометрии ищи аналог движения»! Именно этот принцип позволяет использовать евклидову интуицию в геометрии Лобачевского!

Кроме того, для изучения геометрии Лобачевского не хватает обычно времени ни в школе, ни в вузе. Она располагается в нашем математическом образовании на, так сказать, «ничьей земле», хотя очень развивает математическую культуру. На «ничьей земле» оказывается и проективная геометрия. Подобные обстоятельства разрывают преемственность образования, поэтому надо делать всё возможное, чтобы устранить эти разрывы и подготовить школьников к продолжению серьёзного математического образования.

Маткружки во Второй школе

Александр Михайлович Пешнин

За последние 15 лет произошли изменения в работе кружков: в них теперь участвует больше детей, и стало больше спортивной составляющей.

Цели кружков руководители определяют по-разному. Кто-то хочет вырастить толкового учёного, кто-то — вывести детей в финал Всероса, кто-то стремится развивать талант, чтобы потом ребёнок сам придумал, куда его приложить — все эти цели в той или иной комбинации могут присутствовать. Лично мне ближе третий вариант.

На моём кружке мы обсуждаем задачи, идеи решения — как обычно. Мы просто разговариваем с детьми — и так дети чему-то учатся. А иногда (я такие моменты люблю, и они нередко встречаются) дети чему-то учат меня. Важно создать правильную атмосферу взаимодействия.

Мне помогает общение и работа с коллегами из других мест на выездных мероприятиях — возможность обсудить новые задачи и идеи. Постоянная практика нужна преподавателю не меньше, чем ученику.

На кружке обсуждаются разные идеи решений, причём детей лучше подводить к их самостоятельному изобретению. Культивируется стремление находить новые подходы к решению. Если идею решения ребёнок сам придумал, то она запомнится лучше и лучше сработает в новой ситуации. Обсуждаются разные решения и родственные задачи. В результате и у детей вырабатываются необходимые навыки продираться через «дебри».

О феномене «неувядания» Второй школы

Сергей Иванович Васянин,
Заслуженный учитель г. Москвы

Многие школы в своём развитии проходят три естественных этапа: становление, расцвет и угасание. После угасания имя школы ещё долго может быть на слуху, но обычно результатов периода расцвета школа уже не достигает. Со Второй школой происходит необычная ситуация: она переживает период нового расцвета. Попытаюсь объяснить причины такого феномена.

Первая причина — личность основателя школы Владимира Фёдоровича Овчинникова. Ему удалось создать учебное заведение, в котором сильным учителям и сильным ученикам хочется учить и учиться, это стало основой её устойчивости.

Школа смогла выжить после разгрома 1971 года, сохранилась в «идеологические» 70-е – 80-е годы и стала развиваться с момента обретения статуса лицея в 1992 году. Затем отвергла попытку её захвата бизнесменом в 1998 году, не соблазнилась превращением её в подразделение крупного вуза, преодолела борьбу между направлениями внутри школы и исход биолого-химического отделения в 2001 году, отклонила попытку объединить её с другими школами и детскими садами.

Уже с момента возвращения в школу директором В. Ф. Овчинникова в 2001 году начался и продолжается по сей день период её нового расцвета. До 1992 года Владимир Фёдорович не мог участвовать в её жизни, но школа смогла сохраниться без своего основателя.

Вторая причина. В период изгнания Владимир Фёдорович постоянно думал о школе, он руководил ВЗМШ, в которой работали некоторые ушедшие из 2-й школы учителя, там же проверяли тетрадки некоторые выпускники, которые потом пришли работать во Вторую школу. Каждая встреча выпускников и учителей сопровождалась ностальгией по временам расцвета школы и мечтами о её будущем.

Третья причина «неувядания» школы — это создание уникального учительского коллектива и неповторимой атмосферы в школе. Даже после ухода Владимира Фёдоровича в 1971 году удалось сохранять эту атмосферу. Сложно определить, что такое «дух Второй школы», но нет сомнений, что он есть. Иначе как бы смогла школа пройти все те испытания, которые выпали на её долю?

С этим связано стремление детей учиться во Второй школе. С каждым годом поток поступающих нарастает. Для многих школа становится вторым домом, из которого не хочется уходить после уроков, а особенно после окончания 11 класса. Поэтому часто выпускники возвращаются и становятся ассистентами или вожатыми, а некоторые — учителями, помогая сохранять неповторимую атмосферу Второй школы.

Летняя математическая школа — 2021

Павел Витальевич Бибиков,
зав. кафедрой математики, к. ф.-м. н.

Ежегодно в июле ученики Лицея «Вторая школа» выезжают на три недели заниматься математикой в Летней математической школе (ЛМШ). Каждый день — три пары по два академических часа.

Третий год подряд Летняя школа проводилась на базе «Университета Иннополис», который расположен в одноимённом наукограде недалеко от Волги и Свияжска, в пригороде Казани. Школьники и преподаватели жили в удобных комнатах университетского кампуса, занимались в современных аудиториях, а в свободное время посещали спорткомплекс с тренажёрным залом и бассейном, играли в настольный теннис, футбол, баскетбол и волейбол, ездили на экскурсии и ходили в походы.

В программе школы и подготовка к олимпиадам высокого уровня, и организация научно-исследовательской работы школьников, и освоение тех разделов математики, которые нужны для полноценного математического образования, но не входят в программу даже профильных школ: квадратичные вычеты, нелинейные диофантовы уравнения, проективная и неевклидова геометрии, алгебраические и трансцендентные числа, разрешимость задач на построение циркулем и линейкой, наглядная топология и др.

Состав участников ЛМШ сильно изменился по сравнению с прошлыми школами. Впервые в нашу Летнюю школу приехали многие победители и призёры Всероссийских олимпиад. Также были учащиеся из других школ. Наконец, в числе участников было пять человек, входящих в число кандидатов в сборную России и готовящихся к Международной математической олимпиаде. Это стало серьёзным вызовом для преподавателей: сумеем ли мы обеспечить, с одной стороны, высокий уровень материала, интересного таким сильным ученикам, а с другой — сохранить доступность этого материала для большинства участников? С этой непростой задачей мы справились!

Для этого к работе в Летней школе были приглашены крупные учёные-математики, которые читали школьникам лекции на важные и красивые математические темы и проводили семинарские занятия. В этом году лекторами были: член-корреспондент РАН А. А. Гайфуллин, федеральный профессор, д. ф.-м. н. А. Я. Канель-Белов, д. ф.-м. н., декан факультета математики ВШЭ В. А. Тиморин, д. ф.-м. н. В. А. Кириченко и к. ф.-м. н. В. А. Клепцын.

Успешно в Летней школе работали выпускники Лицея «Вторая школа» — призёры и победители Всероссийских олимпиад (П. П. Евсеев, Е. А. Морозов, М. Ю. Дмитриева), а также тренеры сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников (А. Б. Меньщиков, А. Ю. Кушнир, А. О. Герасименко).

За каждой группой школьников были закреплены два куратора, один из которых был учителем Лицея, а другой — приглашённым олимпиадным тренером. Кураторы сформировали список тем для разбора на Летней школе, затем эти темы были распределены между преподавателями. Таким образом, мы сохранили баланс между сложностью и доступностью, а учителя получили возможность, взаимодействуя друг с другом, узнать что-то новое для себя и познакомиться с опытом коллег, поскольку стили работы учителей в школе и тренеров на сборах сильно отличаются. Также преподаватели получили возможность планировать свою работу на будущий год, обеспечивая преемственность тем и сюжетов.

В рамках ЛМШ для преподавателей был организован специальный семинар, на котором каждый мог рассказать коллегам об интересных с его точки зрения математических вопросах и методах.

В саму Летнюю школу был организован отбор: мы приглашали к участию прежде всего детей, которые были готовы заниматься и осваивать сложные и содержательные вещи. Для удобства все школьники были поделены на группы, в каждой по 15–20 человек. Часто с одной группой работало несколько педагогов.

Сами занятия в ЛМШ проходили в формате, стандартном для олимпиадных кружков. Ежедневно было три пары. Темами занятий, как правило, были алгебра и теория чисел, геометрия и комбинаторика. На каждый листок в среднем отводилось два занятия: на первом школьники, в основном, решали задачи, на втором происходило дорешивание и разбор. Важно, что практически всегда ребята имели возможность досдать нерешённые задачи после занятий (обычно после ужина) любому свободному преподавателю.

О преподавании физики во Второй школе

Андрей Владимирович Кондратьев, к. ф.-м. н.

Выпускниками давней 2-й школы много сказано и об энтузиастах-учёных-физиках (М. С. Хайкин, Н. М. Сигаловский, В. П. Смилга, С. А. Лосев, Ю. Л. Климонтович) и о ярких педагогах (Я. В. Мозганов, В. А. Тихомирова, Л. Я. Зорина и многие другие)[2], пришедших в школу в начальный период её становления.

В последующие годы огромный вклад в развитие преподавания физики внесли два учителя: Рудольф Карлович Бега (1933–2002), посвятивший Лицею более сорока лет жизни, создавший уникальный физический практикум, воспитавший несколько поколений физиков, работающих теперь по всему миру; и Александр Рафаилович Зиль-

[2] См. «Записки о „Второй школе“». М., 2006.

берман (1946–2010), во многом определивший сегодняшний стиль работы кафедры физики[3)].

В настоящее время курс физики разделён на следующие предметы:

- уроки физики (полный класс, ведёт один учитель);
- практикум по решению задач по физике (класс делится на две группы, занятие ведёт учитель и 1–2 ассистента);
- курс физического эксперимента (ВТЭК — введение в технологию физического эксперимента);
- уроки астрономии, согласованные с курсом физики;
- для 6-х классов — подготовительный курс физики.

Уроки обычно ставятся в расписание парами — это уменьшает нагрузку на ученика (меньше предметов готовить к учебному дню), облегчает составление расписания, даёт больше возможностей учителю в планировании урока.

Уроки физики. Это основной курс, покрывающий все разделы программы, на котором излагается теория, разбираются примеры решения задач, задаются домашние задания, пишутся самостоятельные работы и к завершению темы — контрольные. Это больше всего похоже на традиционные школьные уроки.

Учителю даётся довольно большая свобода в рамках программы курса. Например, домашние задания могут задаваться на каждый

[3)] Подробнее о Р. К. Бега и А. Р. Зильбермане — в Дополнении к настоящей статье.

урок или на неделю; бывают большие задания по теме к определённому сроку. Некоторые учителя работают без домашних заданий. Это декларировал, например, А. Р. Зильберман — но у него на каждой паре дети самостоятельно решали 2–3 специально придуманных им задачи (в 5–6 вариантах разного уровня), а сам А. Р. успевал, обходя класс, обсудить решения почти с каждым учеником. Кроме того, домой всем предлагались вопросы «на подумать»; а тем, кто собирался участвовать в олимпиадах, — длинные списки задач, которые надо научиться решать.

В выборе учебников тоже нет диктата. То есть формально в 9–11 классах основное пособие — пятитомник Г. Я. Мякишева, его выдаёт библиотека, но не всё в нём устраивает всех, и поэтому для каких-то тем используются и трёхтомник Е. И. Бутикова и А. С. Кондратьева, и курс Ю. Г. Павленко, и удачные примеры из Фейнмановского курса лекций и т. д. Сейчас, когда книги можно читать с экрана компьютера, никакой проблемы в этом нет. То же и с задачниками — их существует множество, все доступны в электронной форме и отбор задач для любых заданий — дело творческое. Но всё же классика — новосибирский сборник «Задачи по физике» п/р О. Я. Савченко — на эти задачи смотришь в первую очередь, часто изложение теории следует за этими задачами, ими определены детали программы. На этой книге воспитаны многие поколения физматшкольников и, что не менее важно, — поколения учителей.

«Практикум по решению задач по физике» до 2015 года назывался «спецфизикой». История этого названия восходит к раннему периоду существования школы. Сначала возникла «спецматематика» — где действующие крупные учёные (И. М. Гельфанд, Е. Б. Дынкин и другие) читали второшкольникам «дополнительные главы» математики — комплексный анализ, комбинаторику, топологию. Название «спецфизика» возникло по аналогии, но «дополнительные главы» обычно были близки к школьной программе (например, динамика плоского вращения твёрдого тела; сейчас эта тема уже в учебнике). В основном это были семинары по решению задач вокруг школьного курса.

Задачи «Практикума по решению задач» предназначены для самостоятельного решения и соответствуют пройденному на уроках материалу. Ученик получает листок с задачами по текущей теме и приступает к решению. В первой части урока учитель или ассистент беседуют с каждым по домашнему заданию, затем начинается проверка задач нового листка. За урок каждый ученик получает две отметки — за домашнюю и классную работу.

Листки с задачами составляет учитель, ведущий практику. Задачи различаются не только от учителя к учителю, но и от года к году у одного учителя (конечно, есть некоторый канонический набор — но даже не задач, а скорее методов, скрытых в этих задачах).

Для учителя практикум — форма регулярной устной обратной связи. Можно видеть в работе каждого ученика степень владения материалом; стиль мышления; характерные ошибки; ошибки, связанные с неправильным восприятием материала; погрешности в изложении материала, которые к этим ошибкам привели; точки преткновения в рассуждениях и т. д.

С одной стороны, хорошо, когда и на уроках физики, и в задачном практикуме работает один и тот же человек. Тогда можно избежать лишних повторений в заданиях и сделать необходимые; исправить на уроках неточности изложения, «проявившиеся» при обсуждении в практикуме; разобрать на основном уроке те задачи, которые вызвали трудности. С другой стороны, если стиль учителя на уроках вдруг не подходит ученику, то другой человек в практикуме может значительно снизить возникающее напряжение. Кроме того, у школьника появляется возможность увидеть другую точку зрения на тот же предмет, а это полезный опыт. Сейчас в разных классах Лицея работают обе схемы.

Почти в каждом школьном выпуске находятся несколько человек, которые, став студентами (например, Физтеха или физфака), выражают желание и находят возможность работать в качестве ассистентов на этих уроках хотя бы один день в неделю. Некоторые из них остаются в Лицее надолго и со временем сами становятся учителями.

Зачёты. Когда заканчивается большая тема, на уроках «Практикума по решению задач» проводятся устные зачёты по теории. Первый зачёт в 7-м классе всегда ожидается детьми с трепетом; для большинства это ново и непонятно. Но велико и ликование после успешной сдачи! К середине 8-го класса зачёт уже воспринимается просто как одна из форм учебной работы. К институту человек понимает, как это работает; знает, как ему удобнее готовиться; как лучше выстроить общение с экзаменатором. Вообще, подготовить школьника к продолжению образования в вузе — одна из важных задач Лицея. Но главное в проведении зачёта — повторение материала; ещё раз взглянуть на тему целиком, вспомнить формулы, определения, формулировки законов, методы решения опорных задач. Идеально, если в процессе беседы с преподавателем школьник ещё чему-то научится. Обычно на зачёт, помимо ведущего учителя и ассистентов, приходят и другие сотрудники кафедры. Это позволяет всем «чувствовать общее положение дел», стимулирует обсуждение методических вопросов. Для школьника общение с новым человеком на зачёте иногда существенно меняет восприятие предмета и даёт толчок к более активной работе. Случается, хотя и нечасто, приглашать сильных школьников из 10–11 классов принимать зачёты в «младших» классах (7–8) — ко взаимной пользе и тех, и других.

Физический эксперимент. В позднесоветские времена цикл лабораторных работ по всем изученным темам в конце учебного года («физпрактикум») был общепринятой методикой. Особенностью второшкольного практикума было то, что все установки были оригинальные, собранные руками Р. К. Бега и его учеников. (И. Н. Хлюстиков рассказывал, что он десятиклассником по заданию Р. К. собирал для практикума баллистический маятник с использованием часового механизма от спускового устройства советского истребителя. Кто-то принёс его Р. К., и тот сразу придумал, как пустить в дело.)

В 2000-х годах, после ухода из жизни Р. К. Бега, эта система постепенно разрушалась. Новые учителя не только не использовали те оригинальные установки, но часто и не понимали, в чём их суть. Типовые же приборы постепенно пришли в негодность, оборудования перестало хватать не только на класс, но и на группу; проведение лабораторных работ превратилось из правила в достопримечательность. Объём эксперимента на уроках определялся личной инициативой, опытом и волей конкретного учителя. Появились классы, которые годами не делали ни одной лабораторной работы.

В 2012 году эту ситуацию удалось переломить. Экспериментальная часть курса физики была выделена в отдельный предмет (ВТЭК) со своим кабинетом; это стало возможным благодаря вводу в строй нового здания — пристройки к старому корпусу школы. В короткий срок был приведён в порядок и существенно обновлён парк оборудования, разработаны программы для всех параллелей, придуманы новые экспериментальные задачи, написаны пособия. Возникла команда молодых преподавателей (вдохновителем и «мотором» которой стала А. М. Критченкова) — они, помимо проведения занятий, следят за новыми идеями в экспериментальных турах физических олимпиад, поддерживают оборудование в рабочем состоянии и т. д. Учителя, ведущие уроки физики и спецфизики, получили возможность не тратить время и ресурсы на лабораторные работы. «Разделение труда» быстро продемонстрировало свою эффективность. Уже через 2–3 года после запуска курса ВТЭК число победителей и призёров, например, этапов Всероссийской олимпиады школьников выросло в разы (с 10–15 до 40–50 человек на региональном этапе и с 2–3 до 8–10 человек на заключительном этапе). Почти сразу появились индивидуальные и командные медали на проводящейся с 2012 года международной олимпиаде по экспериментальной физике (IEPhO).

Другие формы работы. Помимо самих уроков позаниматься физикой в Лицее можно в многочисленных кружках и факультативах. А для тех, кому нелегко даётся предмет, ежедневно работает «скорая помощь» — занятия после уроков с дежурным учителем физики. Раз в году в каникулы кафедра физики проводит для второшкольников «физический лагерь» — несколько дней, посвящённых физике: лекции, экскурсии, экспериментальные работы, физбои и др.

Есть несколько проектов с молодыми учёными из вузов и академических институтов — школьники могут попробовать себя в науке.

Многие наши выпускники выбирают физику своей профессией, некоторые из них возвращаются в Лицей в качестве ассистентов, а потом — учителей. Опыт и традиции передаются из поколения в поколение.

О нематематике и нефизике

Юлия Борисовна Петрухина,
зав. кафедрой гуманитарных наук

Недавно, встречаясь со старшеклассниками Лицея, декан факультета экономики МГУ А. А. Аузан поделился интересным соображением: мы ещё не знаем названий профессий, которые будут востребованы через 10–15 лет, ведь это будут специальности на стыке дисциплин —

математики и лингвистики, экономики и психологии, физики и медицины… «Прекрасное растёт на перекрёстках». Глядя в будущее, угадывая его, в Лицее всегда поддерживали желание ребят не ограничиваться в выборе своей траектории, открывать новые возможности. Мир многообразен, в нём всё взаимосвязано и взаимозависимо. Понимание этого — отличительная черта образованного, свободно мыслящего человека, интеллигента, воспитание которого Владимир Фёдорович Овчинников называл главной задачей Лицея.

Гуманитарные предметы не отходят в Лицее на периферию. Лицеисты живут «под сенью дружных муз». Основатель и директор физико-математической школы был учителем истории! Он всегда понимал важность гуманитарной составляющей образования. Во Второй школе и физики, и лирики в почёте. Это означает пристальное внимание к сути исторических и культурных явлений, умение анализировать их во взаимосвязи, критическое мышление и свободу высказывания своей позиции. В традициях школы — говорить о главном, уважая чувства и мысли учителя и ученика в попытке найти истину. Одно лишь жёсткое, но закономерное условие: говори, если читал, если думал. Поразиться многоликости мира, удивиться пусть простейшему, но неожиданному открытию — вот цель урока.

Многие годы издавался в Лицее журнал «Голос», в нём первые литературные опыты учеников, воспоминания выпускников прошлых лет, очерки о школьных событиях — всему было в нём место. А в этом учебном году эстафету журнала перенял современный формат, зазвучал голос школьного радио — «Радио Л2Ш». Новости школьной жизни от первого лица, разговор о том, что волнует, что интересно.

А интересных событий множество! Каждый год в феврале в Лицее происходит событие, объединяющее всех — Пушкинский день. В этот день лицеисты выходят на сцену, чтобы прочитать стихи или поучаствовать в спектакле, встречаются с актёрами московских театров, кинорежиссёрами, литературоведами, участвуют в квестах и пишут Пушкинский диктант. А в конце мая десятиклассников ждёт литературно-театральный фестиваль — ученики каждого класса презентуют выступление, отражающее их особенный взгляд на прочитанные произведения русской классики.

Уроку литературы тесно в стенах школьного кабинета. Выездные литературные факультативы дают возможность ребятам читать стихи Марины Цветаевой на берегу Оки в Тарусе, пушкинские строки звучат в яблоневом саду в Михайловском и на аллеях Царскосельского парка. Посещение музеев, усадеб и заповедников — обязательное условие погружения в изучаемый предмет. Два музейных дня в году, в октябре и в апреле, когда отменяются уроки по расписанию и все классы полным составом выезжают на экскурсии, — традиция Лицея.

На протяжении нескольких последних лет в Лицее развивается волонтёрское движение. Слушать и смотреть мало. Ощутить свою нужность и причастность к настоящему делу важно для ребят. Работа в лесном питомнике в Пушкинском заповеднике в Псковской области, уборка листвы в усадьбе Островского в Щелыково, расчистка территории в Коммунарке, приведение в порядок территории Мемориала памяти воинов Великой Отечественной войны «Богородицкое поле» в Смоленской области — вот неполный список мест, где добровольно трудились второшкольники. Не всякий сегодняшний подросток знает, что такое усталость от физической работы, мозоли на руках, а те, кто знает, понимают очень важное — чем дело отличается от призывов и лозунгов. Волонтёрская книжка, с которой многие выпускники выходят из Лицея, — важное свидетельство взросления.

Лицеисты не только посещают музеи, но и принимают музеи у себя. В новом здании школы есть открытое, светлое пространство, которое в последние годы стало выставочным залом. Музей истории ГУЛАГА, Галерея Ильи Глазунова, Музей Л. Н. Толстого, Международный Союз дизайнеров, Музей Нади Рушевой, Культурный центр «Интеграция» разворачивали свои выставки. Экспонаты выставок становятся наглядными пособиями для урока, учителя и ученики — экскурсоводами. Посещают экспозиции и родители, и ребята из других московских школ. Огромный успех имели выставка работ учителя математики Лицея, фотохудожника Игоря Дмитриевича Жижилкина и выставка гравюр, напечатанных участниками волонтёрского отряда в Михайловском.

В жизни лицеистов много спорта. Не зря Владимир Фёдорович Овчинников шутил: «У нас историко-литературная школа для физиков и математиков с физкультурным уклоном». Занятия в секциях и соревнования по баскетболу, волейболу и футболу, настольный теннис на переменах. И спортивный лагерь каждое лето. А это не только тренировки и соревнования, это ещё и песни под гитару у костра.

Ежегодная благотворительная ярмарка, на которой каждый может проявить свой талант, кулинарный, музыкальный, умение мастерить, рисовать, показывать фокусы — всего и не перечесть! — позволяет собрать сотни тысяч рублей в пользу детского дома. День самоуправления, когда старшеклассники становятся учителями и администраторами Лицея, хлопотный и очень весёлый, позволяет ребятам попробовать себя в новом «взрослом» качестве, ощутить ответственность, научиться работать в команде. Что-Где-Когда, викторины и конкурсы объединили учеников всех параллелей. Играют в ЧГК и учителя.

Но самое интересное — это школьные лагеря! О математическом и спортивном было сказано выше. Но самые прекрасные события происходят каждый год в конце лета. Ученики вновь набранных 6 и 7 классов несколько дней в конце августа проводят в лагере: знакомятся друг с другом и с учителями, участвуют в тематических играх, узнают о традициях школы от выпускников прошлых лет, которые в лагере главные люди — вожатые. Фантазии организаторам лагеря не занимать. Каждый год у лагеря новая тема: «Четыре стихии», «Индейский лагерь», «Парк юрского периода»… В августе 2020 и 2021 года лагерь вопреки всем трудностям состоялся. Он проходил на территории школы, которая стала средневековым городом, жители которого два дня искали лекарство от неизвестной болезни, породившей разобщение людей. Решали задачи, проходили полосы препятствий, а ещё много шутили и смеялись. И нашли! Нашли эмблему Лицея, которую у каждого лицеиста можно увидеть на форменной одежде.

Школа не подготовка к жизни, а очень важная часть жизни человека. Лицей живёт полной жизнью. Здесь знают цену словам и делам. Здесь все вместе — ребята, выпускники и учителя. Лицей — семья, Лицей — целый мир и пространство свободы.

ДОПОЛНЕНИЕ

Яркие учителя Второй школы после её разгрома в 1971 году, которых нет в живых

Имена расположены по времени преподавания от более ранних до современных.

Курсивом выделена прямая речь.

Рудольф Карлович Бега, учитель физики с 1961 по 2010 гг.

Рудольф Карлович преподавал во Второй школе более 40 лет: с 1961 года по 2002 год.

В 60-е годы прошлого века произошло становление 2-й школы и её преобразование из обычной районной школы в физико-математическую. В эти же годы выпускник Московского автодорожного института Рудольф Карлович, будучи инженером, влюблённым в физику, учился в Институте усовершенствования учителей.

С приходом в школу Рудольф Карлович быстро «оброс» учениками и начал делегировать им часть учебных задач. Например, его ученики создавали работающие установки для физического практикума. В качестве компонентов часто использовались детали и приборы, которые поступали в школу от родителей, работающих в различных серьёзных институтах. Поэтому в лаборантской все стеллажи были уставлены оптическими, измерительными и прочими приборами.

К началу 70-х годов у Рудольфа Карловича выросли ученики, поступившие на Физтех или физфак МГУ, и они приходили в школу. С этого момента Рудольф Карлович стал привлекать их к работе со школьниками. Отсюда выросли семинары, которые в разные годы назывались ещё спецфиз и пракфиз — аналог университетских семинаров по решению задач.

Двое из таких студентов физтеха — И. Н. Хлюстиков и В. В. Лебедев — впоследствии стали докторами физ-мат. наук и соавторами Р. К. Бега в написании учебника «Электростатика». В. В. Лебедев избран чл.-корр. РАН, а И. Н. Хлюстиков вёл семинары во Второй школе 43 года.

Разгром 2-й школы в 1971 году и увольнение директора В. Ф. Овчинникова и всех его заместителей повлекли за собой уход многих ведущих учителей. Но не всех! Рудольф Карлович был из числа создателей школы, помогал молодым учителям обрести себя во Второй школе, и благодаря ему во многом удалось сохранить школу до возвращения директора-основателя В. Ф. Овчинникова в 2001 году. За 30 лет с 1971 по 2001 в школе № 2 сменились 7 директоров, она стала лицеем, но не утратила статуса физико-математической школы. Приходившие с 1971 года новые учителя физики и ученики становились второшкольными, потому что Рудольфу Карловичу удавалось в одном отдельно взятом кабинете и лаборантской сохранять и развивать всё то, что было наработано.

Рудольф Карлович читал лекции 4 часа в неделю в старших классах, и за это время он успевал дать теоретический материал, показать методы решения основных задач и устроить несколько типов проверки знаний. Были контрольные, формульные диктанты и устные «расстрелы», когда у доски выстраиваются несколько «счастливчиков», Р. К. даёт вопрос и даёт 30 секунд на размышление. Не ответил — садишься. Ответил — остаёшься до следующего вопроса. Вопросов всего пять. Оценку получаешь по числу правильных ответов. Наглядно и быстро.

Практически каждая лекция сопровождалась показом эксперимента, часто — авторского. Всегда — с использованием экспериментальной установки, собранной лично Рудольфом Карловичем. Поэтому лекции были феериčными, их ждали как отдельного представления. Иногда Рудольф Карлович показывал учебные фильмы. Особую гордость учеников вызывало то, что он был их автором, работая параллельно на студии учебных фильмов центрального телевидения.

Семинары вели его ученики — студенты, аспиранты, выпускники Физтеха. Класс делили на 2 группы, семинары проходили в решении задач по теме лекции. Физпрактикум готовили и проводили вместе. Рудольф Карлович в своей лаборантской неустанно что-то собирал, приспосабливал, чинил. За год ребята осваивали несколько исследовательских задач с полной подготовкой по теории, проведением собственного эксперимента и защитой результатов.

Поразительно, насколько прочной оказалась та основа, которую он создавал на уроках физики, и которая позволяла ученикам потом самостоятельно ориентироваться, работая в различных областях науки и техники. Рудольф Карлович был ярким человеком во всём, его отношение к жизни, разнообразные способности, как магнитом, привлекали к нему ребят.

В 90-е годы Рудольф Карлович был заведующим кафедрой физики. В самое лихолетье ему удалось сохранить структуру преподавания физики в школе и удвоенное по сравнению с обычной школой количество часов. Он не гнался за победами на олимпиадах, говорил: «Участвовать или нет — ваше дело». При этом очень радовался научным достижениям выпускников и гордился тем, что его ученики становятся достойными людьми. А победы на олимпиадах и конкурсах приходили как следствие прочной базы и острого интереса к науке, которым горел сам Рудольф Карлович и заражал им своих учеников.

Учитель ушёл из жизни в 2002 году, ушёл, когда школа снова была в надёжных руках директора-основателя В. Ф. Овчинникова.

Приведём воспоминания двух учеников Р. К. Бега выпуска 1982 года, физиков, получивших мегагранты (единственный случай, когда обладателями столь высокой награды стали ученики одного школьного учителя!).

Вспоминает Дмитрий Анатольевич Иванов (Директор исследований Национального научного центра Франции (CNRS). Профессор, зав. лабораторией инженерного материаловедения факультета фундаментальной физико-химической инженерии МГУ имени М. В. Ломоносова).

> *Если меня спросят, кто из наших преподавателей мог бы стать для нас единоличным олицетворением всей Второй школы во всех её проявлениях, то я назову Рудольфа Карловича Бега. Его уроки физики, в отличие от всех остальных предметов, были целым миром. Он открывался нам в просторном и во многом загадочном кабинете на пятом этаже, соседствуя с ещё более загадочной лаборантской, где громоздились на стеллажах удивительные приборы и где иногда пили чай необычные гости: учёные, аспиранты и студенты. Попадая в этот кабинет и проникаясь тем непривычным ещё нам взглядом на привычные вещи, мы начинали ощущать, что этот предмет был действительно особенным. Именно здесь мы впервые услышали, что торможение автомобиля в физике может быть названо ускорением. Парадоксальность преподаваемых понятий на уроках Рудольфа Карловича часто подтверждалась увлекательными историями из жизни.*
>
> *Он обращался к нам на равных, разговаривая с нами как со взрослыми и открыто обсуждая сложные жизненные вопросы, в том числе нравственного порядка. Сейчас я всё больше убеждаюсь в том, что Рудольф Карлович был главным преподавателем в моей жизни, который не только привил мне любовь к своему предмету, но и стал для меня примером и вдохновляющим стимулом к постоянному профессиональному развитию.*

Вспоминает Игорь Анатольевич Абрикосов (академик Королевской Шведской академии наук, профессор теоретической физики Линчёпингского университета, Швеция).

Рудольф Карлович превращал свои уроки в представления. От него исходила удивительная энергия, сила. Рудольф Карлович уважал учеников. Не могу припомнить ни одного случая, когда «Рудик» кричал на нас. Но требования были на самом высоком уровне, и дисциплина была в порядке. Вот это умение управлять, не унижая, относясь с уважением к развивающейся личности — ещё один важнейший урок, который я взял с собой на всю жизнь.

Требовательность же у Рудольфа Карловича была серьёзная. Чего только стоят его «расстрелы»: когда несколько человек выходят к доске, и Рудик засыпает нас вопросами с пулемётной скоростью, и с такой же скоростью нужно отвечать на эти вопросы. Отличная тренировка на будущее: знания должны быть глубокими, сидеть в подкорке, тогда и спорить, и аргументировать в науке будешь с полной уверенностью.

И конечно, очень важно, что Рудольф Карлович с первого дня приучал нас к тому, что физика — точная наука, а математика — язык физики. Аргументы в физике должны быть прописаны на математическом языке, а уже потом можно и «на пальцах» объяснить физический смысл того или иного явления. Но чисто «пальцеобразное» разглагольствование не прокатит. Сейчас не менее актуальная проблема, когда математическая подготовка «физиков» не всегда на высоте.

И ещё важный урок от «Рудика», особенно в современной компьютеризированной науке: всегда проверять полученный ответ на соответствие здравому смыслу. Цитирую его по памяти: «Если вы, решая задачу, получили, что скорость поезда выше скорости света — проверьте своё решение». Эту цитату я привожу всем своим студентам и аспирантам. Те, кто запоминают, совершают меньше ошибок.

И ещё одну цитату Рудика я постоянно использую. На одном из первых уроков он рассказал притчу. Идёт человек и видит — сидит другой по уши в грязи (было другое слово). Первый протягивает ему руку и говорит: «Давай помогу выбраться». А второй отвечает: «Оставь меня, я тут живу». И закончил Рудик притчу так: «Я не смогу вас научить — это нереальная задача. Я могу вам только помочь научиться». Мне Рудольф Карлович помог, по-настоящему. Я навсегда остаюсь его благодарным и любящим учеником.

Валерий Анатольевич Сендеров, учитель математики Второй школы с 1972 по 1980 гг.

Выпускник МФТИ, автор статей по функциональному анализу и теории операторов, а также публицист, правозащитник, политзаключённый.

Вспоминает А. Я. Канель, д. ф.-м. н.

Валерий Сендеров вместе с Борисом Каневским заложили традицию олимпиад и математических боёв во Второй школе. В одном из матбоёв тех лет капитаном команды Второй школы был А. Разборов, заместителем капитана — А. Канель, а капитаном команды 91-й школы — М. Концевич — все стали известными математиками.

Сендеров научил важной вещи. Говоря о решении задач, он показывал идейное ядро, из которого вырастает решение. Оно маленькое — это как «жало» станка, но именно это — главное, что надо увидеть. Станок состоит из большой станины, приводных ремней, рычагов, зажимов и т. д., а «жало» маленькое. Так же и задача: важно выделить, где происходит решение и как оно строится. Выделению ядра или «жала» он научил нас.

Вспоминает Б. И. Каневский.

К 1972 году КГБ заставило В. Сендерова уйти из аспирантуры, и он искал работу. После разгрома 2-й школы в 1971 году не хватало учителей математики и физики. Физик Рудольф

Карлович Бега и математик Сергей Георгиевич Смирнов выдвинули лозунг: «Дети не виноваты, и их необходимо учить». Многие хорошие учителя опасались начинать работу в такой школе, а плохих по старой памяти старались не брать. В результате весьма осторожный завуч по математике согласился принять на работу В. Сендерова.

2-я школа находилась в упадке, но с приходом Сендерова изменения начались стремительно. Помимо преподавания специального и обязательного школьного курса, он ведёт кружки, готовит школьную сборную к матбоям, занимается с учениками индивидуально. Уже в 1973 году сборная 2-й школы побеждает в матбою 18-й (колмогоровский) интернат. Валерий организует в школе лекции-встречи с известными учёными, поэтами и литераторами. Атмосфера напоминает прежнюю, уровень занятий растёт, многие ученики 2-й школы становятся победителями Московской математической олимпиады. Валерий участвует в подготовке сборной СССР на Международную математическую олимпиаду.

Между тем антисемитизм при приёме на мехмат МГУ процветал, и он часто касался выпускников 2-й школы. Сендеров начал изучать это явление. Он разработал методику борьбы с официальной антисемитской практикой, составил списки каверзных задач, с помощью которых еврейских детей заваливали на экзаменах, подготовил памятку о том, как надо отвечать на экзаменах, и помогал бороться с приёмными комиссиями.

В 1978 году Сендеров знакомится с Беллой Абрамовной Субботовской, и они обсуждают идею организации альтернативного мехмата, впоследствии названного «Народным университетом». Первый набор в Народный университет произошёл на ступеньках у входа в клубную часть МГУ, куда выходили после экзаменов все абитуриенты и где каждый год (начиная с 1978 года) дежурила бригада, собранная Валерием для экстренной психологической и математической помощи заваленным. Занятия в Народном университете велись открыто, экзамены по курсам были добровольными. Сендеров стал первым лектором, в дальнейшем вели занятия такие профессионалы, как А. М. Виноградов. А. Б. Сосинский, А. Х. Шень, Д. Б. Фукс, А. В. Зелевинский. После ареста Сендерова в 1982 году вести занятия открыто многие опасались. Народный университет просуществовал с 1978 по 1982 год (семинары продолжались и позже).

Народный университет был одним из многих дел, которыми Сендеров занимался, но эти дела автоматически попадали под контроль властей. Весной 1982 года его арестовали по обвинению в «антисоветской агитации и пропаганде», и он сидел в тюрьме с 1982 по 1987 год. За отказ от выполнения требований администрации Валерий Сендеров большую часть срока провёл в карцере, что тогда, в частности, означало: 450 г. чёрного хлеба в день, горячая пища — через день, постоянный холод. Причина бойкота лагерного режима — протест против конфискации Библии, невозможность заниматься математикой.

Из воспоминаний ученика.

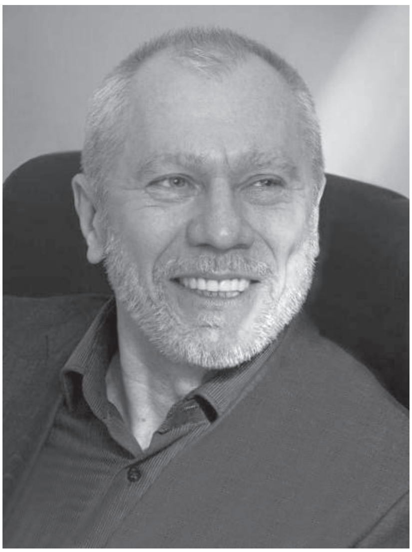
Валерий Анатольевич вышел из тюрьмы в 1987 году, когда я был в выпускном классе. Он организовал кружок для всех желающих из 2-й и 57-й школ по решению мехматских «гробов» с тем, чтобы труднее было завалить поступающих на мехмат. Разбирались очень сложные задачи, но в олимпиадных задачах предполагается элемент красоты, что для мехматских «гробов» необязательно. Валерий показывал «ядро» и «всё остальное», и делал это мастерски, как никто другой. Я первый раз в жизни ощутил красоту олимпиадных задач, и мне хотелось ходить на эти занятия независимо от мехмата. Это была красота не самих задач, а красота раскладывания на «ядро» и «всё остальное». Ну и, конечно, было ощущение, что ты общаешься с совершенно героическим человеком, просидевшим 5 лет в тюрьмах, значительную часть срока в карцере. Сендеров обладал харизмой, исходившей из его могучей внутренней силы. Когда я находился рядом с ним, соображения типа «А завалюсь, так заберут в армию» и прочее, отшибало. Этот человек пошёл на огромные лишения, и думать о собственном комфорте рядом с ним было невозможно.

Вспоминает П. А. Коловников.

Более 15 лет Валерий Сендеров вёл активную работу в методкомиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике (хотя формально не входил в неё). Он стал одним из самых плодовитых авторов задач Всероссийских олимпиад. Более 70 (!) его задач вошли в варианты, причём более 20 из них предлагались на заключительных этапах олимпиады. Некоторые его задачи становились украшением олимпиад и были высоко оценены школьниками. Например, на заключительном этапе Всероссийской олимпиады 2013 года его задача была признана *лучшей по данным опроса участников олимпиады. Некоторые особо трудные задачи Валерия использовались при подготовке команды России к Международной олимпиаде. Одна из его задач прошла многоступенчатый отбор и вошла в вариант Международной олимпиады* 2000 *года. Ещё одна задача попала в вариант престижной олимпиады Romanian Masters* 2013 *года.*

В 2000*-е годы Валерий стал одной из ключевых фигур на Всероссийской олимпиаде. Он был ценен тем, что не был ни на кого похож. В отличие от многих других составителей олимпиады, воспитанных на олимпиадном фольклоре недавних лет, Валерий черпал идеи в классических трудах. Наверное, в этом особенность его задач и причина их ценности.*

Александр Иванович Балабанов,
Заслуженный учитель РФ,
работал во Второй школе с 1976 по 2018 гг.



Александр Иванович не только блестяще преподавал свой предмет, но и был другом своих учеников.

Юлия Долженко (ученица).

Александр Иванович поразил меня интеллигентностью и увлечённостью своим предметом, он покорял спокойным нравом, рассудительностью и ненавязчивостью. Он учил личным примером. Незаметно поддерживал оступившихся, не давал в обиду, *не выделял любимчиков. Запомнился его разговор про «малую родину» на классном часе. Каждый день он ездил из Мытищ во Вторую школу ради встречи с нами, с учениками… В его образе ищу вдохновения.*

Юлия (ученица школы № 600).

Мне и моим одноклассниками очень повезло, что он преподавал в нашей нематематической школе. Математику у него любили все, даже троечники. Он читал на уроках стихи.

Алексей Курохтин (ученик).

Запомнилось, как он подарил нам книжки, каждому свою.

Миша Тамм (ученик).

Балабанов был необыкновенно деликатен. Ему приходилось разбираться со всем нашим мелким хулиганством и т. п. От необходимости делать нам замечания он смущался явно больше нас. Не помню, чтобы повышал голос. Не говоря уже про вызов родителей. Когда на втором курсе мехмата мне захотелось преподавать спецматематику в школе, он меня с радостью принял и два года под его присмотром я занимался тем, что мне было интересно. А. И. сидел на моих уроках. Иногда грустно вздыхал, что вот сегодня, кажется, не очень получилось. Иногда хвалил, иногда деликатно давал советы.

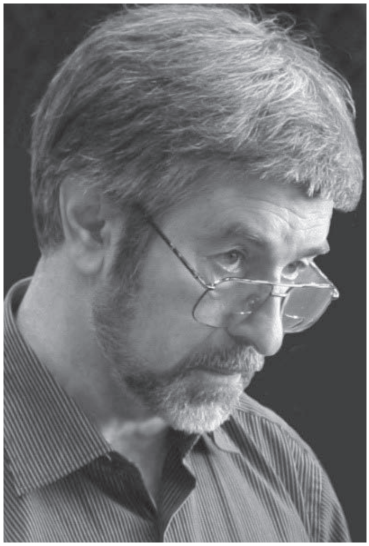
Леонид Полтерович (профессор Тель-Авивского университета).

Он спокойно относился к неумению записывать (хотя этому терпеливо учил), но всяко поощрял красивые идеи и нестандартные повороты. Если бы не Балабанов, я бы, вероятно, не стал математиком.

Александр Рафаилович Зильберман, учитель физики Второй школы с 1992 по 2010 гг.

Вспоминает А. К. Ковальджи.

Александр Рафаилович жил физикой и был её воплощением. Он учил и школьников, и учителей, и всех, кто хотел учиться. Умел заинтересовать, объяснить сложные вещи, умел видеть необычное вокруг. Он был учителем, теоретиком, композитором задач, экспериментатором и методистом. Ещё он учил детей играть в баскетбол и собирать компьютер. Сколько бы вопросов ему ни задавали, он находил время для каждого — и отличника, и отстающего.



Александр Рафаилович не делал различия между работой и жизнью, любил беседы о физике у себя дома, обсуждал с учениками и коллегами новые идеи и задачи, вовлекал их в своё творчество.

Есть высказывание: *«Гений — это* 1 % *вдохновения и* 99 % *труда», которое приписывают и О. Бальзаку, и Т. Эдисону, и К. Станиславскому, а Зильберман пошёл дальше, он учил трудиться вдохновенно.*

Сохранились видеозаписи лекций Зильбермана, на которых он передаёт смысл и словами, и глазами, и жестами, и всей своей энергетикой влюблённого в физику человека. Он завораживает слушателя и открывает тайны мироздания лично ему. Посмотрите и войдите с ним в контакт!

Не только среда определяет характер человека — сильные личности идут своей дорогой вопреки ценностям времени. Но нередко они «ломаются», и страшно подумать, скольких ломоносовых мы потеряли. Александр Рафаилович выстоял, хотя жил в криминальном Магадане, где господствовали отношения «кто сильнее, тот и прав». В юности ему пришлось даже заняться боксом, чтобы с его взглядами считались.

Он не учился в физматклассе и не было у него выдающихся учителей, ему приходилось учиться самому. Но в таких условиях выковались характер и воля. Александр Рафаилович с тех юных лет не боялся трудностей.

Он писал статьи, выступал на семинарах, 40 *лет работал в журнале «Квант», переписывался со всеми, кого интересовала физика. Во время своих отпусков он* 17 *лет готовил команду СССР к Международным физическим олимпиадам, составил все шесть Соросовских олимпиад по физике.*

Оцените нетривиальность высказываний Зильбермана на уроках:

- *Давайте я сейчас минутку помолчу — попробуйте предсказать, что мы дальше будем считать, и какая будет следующая задача.*
- *Обратите внимание на забавную тонкость*: *когда мы говорим про «хаотическое» движение — это означает, что мы не знаем, как оно происходит, но оказывается, это «незнание» можно использовать для расчётов.*
- *Попробуйте переписать эту формулу так, чтобы в ней появился какой-нибудь физический смысл.*

Евгений Викторович Те,
учитель истории Второй школы с 1992 по 2013 гг.

Вспоминает Г. И. Еселева.

Прекрасный историк, настоящий эрудит, он не позволял своим ученикам мыслить шаблонами, стереотипами. История в его изложении была живой наукой и требовала соучастия. Он приносил на урок настоящие царские монеты, старинные артефакты и рассказывал о них.

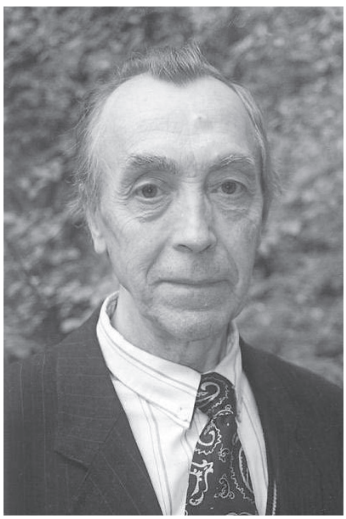
Он мог быть резок и непримирим, отстаивая свою точку зрения, но никогда не был равнодушен. Его суждения, научные пристрастия и интересы во многом определяли интеллектуальную атмосферу в Лицее.

Яркий, талантливый, остроумный, он не стремился быть в центре внимания, но всегда был заметен. Его заразительное жизнелюбие располагало к дружбе и совместной работе.

Он одинаково уважительно относился и к взрослым, и к детям и совершенно не терпел фамильярности — черта, присущая истинно интеллигентным людям. В нём счастливо сочетались глубокий ум и простота, жизненный опыт и юношеская горячность, скромность и изящество.

Его требовательность к себе и другим была очень высока, и работать вместе с ним было нелегко. Но редкое обаяние, трогательное внимание к тем, кто нуждался в его помощи, совете, защите, привлекали к нему самых разных людей.

Пётр Семёнович Пустовалов, учитель словесности во Второй школе с 1998 по 2009 гг., автор книг



Вспоминает А. К. Ковальджи.

Пётр Семёнович сочетал научную работу с учительством. Кандидат педагогических наук, автор нескольких книг и множества статей по русской словесности, он был образцом ин-

теллигентного человека, любящего свой предмет, любящего детей, не терпящего небрежности и нечестности ни в жизни, ни в работе.

Его правила жизни были строги и неизменны: он был требователен к себе и к своим ученикам. Человек должен работать не только для себя, но и для класса, школы, общества. Даже небольшая обязанность (для каждого в классе было определено поручение: следить за оформлением кабинета, собирать информацию об олимпиадах и конкурсах, готовить праздники и др.) превращалась в ответственное задание, становилась частью общего дела.

Перед тем, как изучать творчество каждого писателя, Пётр Семёнович начинал погружение в его эпоху, дети искали фотографии, картины и музыку тех времён, даже ставили мини-спектакли. А тогда творчество писателя открывалось во всей полноте. Много времени Пётр Семёнович уделял экскурсиям по литературным местам. Вместе с ребятами он разрабатывал маршруты и всегда вёл экскурсии сам: ему было важно видеть, что и как воспринимают дети.

Яркий, эмоциональный, он был открытым и щедрым, с удовольствием делился своим опытом и знаниями с коллегами.

Международные математические олимпиады IMO2020 и IMO2021 (Санкт-Петербург)

Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, Т. Г. Гдалина, П. А. Кожевников, М. Я. Пратусевич, К. А. Сухов

IMO 2020 61st International Mathematical Olympiad Saint-Petersburg Russia

IMO 2021 62nd International Mathematical Olympiad Saint-Petersburg Russia

История и значение IMO

Идея проведения международных конкурсов школьников по решению математических задач давно вызывала интерес. В 1959 году по инициативе Румынского математического общества была организована олимпиада с участием команд семи стран «социалистического лагеря»: Румынии, Болгарии, Венгрии, Германской Демократической Республики, Польши, Советского Союза и Чехословакии. Этой олимпиаде суждено было открыть страницу многолетней истории Международных математических олимпиад IMO (International Mathematical Olympiad). Проведение IMO летом каждого года сразу превратилось в добрую традицию (с 1959 по 2021 год был лишь один 1980 год, в который олимпиада не проводилась). В соответствии со своим замыслом, IMO — не только конкурс по решению задач, но и мероприятие большой научной и социальной значимости, на котором участники имеют возможность познакомиться с историей и культурными достопримечательностями страны-организатора, послушать лекции ведущих математиков мира, общаться со своими коллегами из других стран, участвовать в различной совместной деятельности (спортивные турниры, интеллектуальные конкурсы и т. д.).

IMO непрерывно развивается, количество участвующих стран почти монотонно растёт год от года. В последние годы в IMO принимают участие практически все страны Европы, большинство стран Азии и Америки, Австралия, Новая Зеландия, а также некоторые страны Африки:

Номер IMO	Год проведения	Количество участвующих стран	Количество участников
1	1959	7	52
6	1964	9	72
11	1969	14	112
16	1974	18	140
21	1979	23	166
26	1985	38	209
31	1990	54	308
36	1995	73	412
41	2000	82	461
46	2005	91	513
51	2010	95	522
56	2015	104	577
61	2020	105	616
62	2021	107	619

Как видим, IMO давно превратилась в масштабный форум. История проведения подтверждает, что IMO неплохо «маркирует» талантливых и способных на выдающиеся достижения в науке людей. Так, из 18 выдающихся математиков, получивших медаль Филдса в XXI веке, десять (включая наших известных соотечественников Григория Перельмана и Станислава Смирнова), будучи школьниками, завоёвывали медали IMO. Славная история IMO в задачах, именах и цифрах собрана на официальном сайте `http://imo-official.com/`.

За последние 10–15 лет появилось много новых интересных международных математических соревнований школьников. Из наиболее представительных олимпиад высокого уровня, которые завоевали вес и признание, выделим ежегодно проводящиеся олимпиады Romanian Master of Mathematics (RM) и European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO). Однако именно IMO остаётся «Чемпионатом мира по математике», и её престиж наиболее высок. Во многих странах развилась целая индустрия по отбору и подготовке лучших школьников к IMO.

Конкуренция как на самой олимпиаде, так и за право стать участником IMO необычайно высока, и ни для кого не секрет, что именно медаль IMO считается наилучшим вкладом в портфолио юного математика.

Правила и традиции IMO

За годы проведения IMO сложился свод и официальных правил, и неформальных традиций. Скажем о некоторых из них.

Участвовать в IMO разрешено молодым людям моложе 20 лет, которые ещё не начали обучение в университете.

Победители олимпиады определяются по сумме набранных за два тура баллов по следующим принципам: медалями награждаются около половины всех участников олимпиады, и медали среди них распределяются в пропорции $1:2:3$ (соответственно золото, серебро, бронза). Участники, решившие на полный балл (7 баллов) хотя бы одну из задач олимпиады, получают похвальный отзыв (Honorable mention). Команда страны состоит из не более чем шести участников (это правило действует с 1983 года: до 1979 года команды состояли из 8 человек, а в 1981 и 1982 годах — из 4 человек).

В первый день официальной программы IMO для школьников проводится торжественное открытие, на котором происходит представление участников и парад команд. Команды по очереди выходят на сцену с флагами, некоторые сборные одеваются в национальные костюмы и успевают за время прохода по сцене разыграть небольшую сценку. На церемонии закрытия происходит вручение медалей, в котором участвуют высокопоставленные руководители, представители науки и образования.

Руководство IMO осуществляет Консультативный совет (Advisory board, коротко — IMOB). В его функции входит решение ключевых вопросов, связанных с организацией и проведением IMO — взаимодействие со спонсорами, утверждение места проведения IMO, внесение изменений в регламент IMO и т. д. В настоящий момент в IMOB пять постоянных позиций (сроком на 4 года) занимают: Geoff Smith (Великобритания), Gregor Dolinar (Словения), Yongjin Song (Корея), Назар Агаханов (Россия), Dávid Kunszenti-Kovács (Норвегия).

Организация IMO2020 и IMO2021

Очередная 61-я IMO должна была состояться в Санкт-Петербурге в июле 2020 года. Официальная заявка России на проведение IMO2020 была подана ещё в 2017 году. Инициатором проведения выступил РГПУ им. А. И. Герцена, и эта инициатива была поддержана в Министерстве образования и науки и в Правительстве России. На закрытии 60-й IMO, проходившей в городе Бат (Великобритания) в июле 2019 года, официальная делегация России выступила с презентацией предстоящей олимпиады (красивый ролик-приглашение в Петербург можно посмотреть на канале YouTube: `https://www.youtube.com/c/IMO2020-2021`) и получила переходящий флаг IMO. Официальными организаторами IMO2020 стали: Министерство просвещения РФ, Правительство Санкт-Петербурга, Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, ГБНОУ «Академия талантов», Президентский физико-математический лицей № 239.

В июле 2019 года подготовка IMO2020 уже шла полным ходом, и до весны 2020 года не было сомнений, что в июле гости со всего мира порадуются и красоте северной столицы, и красоте математики на IMO2020. Но пандемия рушит планы. В апреле 2020 года становится ясно, что очное проведение олимпиады в запланированные сроки невозможно. В надежде на ослабление эпидемии принимается решение о переносе IMO на вторую половину сентября. Как мы знаем, этим надеждам тоже не суждено было сбыться, и новые волны пандемии охватывают на долгое время практически все страны. Олимпиада всё же будет проведена в сентябре 2020 года, но регламент в срочном порядке перестраивается под распределённый дистанционный режим. В разных странах мира организуется более 120 оснащённых видеонаблюдением и специально оборудованных экзаменационных центров, в которых участники в одно и то же время будут выполнять работу под наблюдением представителей оргкомитета IMO. На базе Президентского физматлицея № 239 был развёрнут центр видеонаблюдения, где отслеживалось соблюдение правил проведения состязания. Оргкомитет из РГПУ им. А. И. Герцена во взаимодействии с IMOB и IT-командой IMO (вебмастер — Matjaž Željko (Словения)), берёт на себя большую организационную работу, обеспечивая все необходимые коммуникации, информационную и техническую поддержку мероприятия.

Как показало время, IMO2021 тоже пришлось проводить для участников в распределённом режиме — т. е. организация IMO2021 в целом повторяла олимпиаду, прошедшую в 2020 году. Однако важный шаг по возвращению IMO в нормальный режим в 2021 году был сделан — бóльшая часть жюри и IMOB работали в Петербурге в очном режиме.

Отметим, что задолго до начала пандемии была одобрена заявка США на проведение IMO2021. Однако уже весной 2020 года американская сторона объявляет об отказе финансировать проведение IMO2021 из-за форс-мажора. Таким образом, во время проведения IMO2020 место проведения следующей международной олимпиады оставалось под вопросом. Ситуация прояснилась на закрытии IMO2020, когда заместитель Министра просвещения России Виктор Басюк предложил председателю IMOB Джеффу Смиту провести олимпиаду 2021 года также в Санкт-Петербурге. Это была официальная заявка, которую поддержал и губернатор Санкт-Петербурга Александр Беглов. который отметил, что для города на Неве будет большой честью принять олимпиаду второй год подряд. И вот в прямом эфире онлайн-закрытия IMO2020 председатель IMOB утверждает проведение IMO2021 в Санкт-Петербурге!

Внеконкурсная программа IMO2020 и IMO2021 для участников была насыщенной, хотя вынужденно проводилась дистанционно. Школьники имели возможность виртуально послушать лекции ведущих математиков мира и задать им вопросы. Лекторами выступили: Грант Сандерсон (2020 г., 2021 г.), Станислав Смирнов (2020 г., 2021 г.), Николай Андреев (2020 г., 2021 г.), Ласло Ловас (2021 г.), Андрей Райгородский (2021 г.), Даниил Мусатов (2021 г.), Тимоти Гауэрс (2020 г.), Lisa Sauermann (2020 г., 2021 г.). Также для участников IMO были проведены видеоэкскурсии на официальных языках IMO (английский, испанский, немецкий, русский, французский), на которых в реальном времени можно было прогуляться по Санкт-Петербургу с экскурсоводом. В 2021 году было разработано приложение с экскурсиями на официальных языках олимпиады, где участники могли самостоятельно в любое удобное время погулять по виртуальному Петербургу.

Был создан youtube-канал (`https://www.youtube.com/c/IMO2020-2021`), посвящённый IMO, а также официальный Instagram, в котором были организованы различные игры и конкурсы для участников. Большой интерес был проявлен к шахматам. Так, в турнире IMO Chess cup 2021 принял участие 71 участник из 51 страны, было сыграно 423 партии и сделано 28 933 хода.

На всех онлайн-активностях участникам помогали волонтёры — гиды и переводчики, большинство из которых — студенты Герценовского университета.

Организаторы постарались сделать церемонии открытия и закрытия интересными и насыщенными — онлайн-парад команд и выступления почётных гостей сменялись музыкальными номерами, развлекательными видеосюжетами об IMO и даже лазерным шоу.

Для координаторов и IMOB, которые смогли приехать в Санкт-Петербург, была организована экскурсионная программа. А традицион-

ный полуденный выстрел сигнальной пушки Нарышкина бастиона Петропавловской крепости в честь IMO2021 произвёл президент IMOB Джефф Смит.

На закрытии IMO2020 была показана анимация об интересных фактах из истории IMO, а также анимация, посвящённая развитию математики в России: обыгрывается приглашение Эйлера и других выдающихся учёных из Европы в Санкт-Петербург. Анимации доступны на YouTube канале `https://www.youtube.com/c/IMO2020-2021`.

В завершение рассказа об организации отметим, что в условиях пандемии проведение многих мероприятий выродилось в дистанционную «лайт-версию». Сейчас с уверенностью можно сказать о том, что это не относится к IMO. Усилиями многих людей IMO 2020 и 2021 года сохранили главные черты, присущие международным олимпиадам: это высокая конкурентность, честная борьба с трудными задачами и праздник общения в математической среде.

Составление варианта IMO

Задания IMO — это шесть задач, покрывающие разные разделы и темы математики, а точнее, «доуниверситетской» математики. Регламент проведения олимпиады вначале претерпевал небольшие изменения,

На церемонии закрытия IMO2021: Максим Туревский возвращает флаг IMO председателю IMOB Джеффу Смиту, который готов передать его Норвегии — стране-организатору IMO2022

но вот уже на протяжении многих лет IMO проводится в два дня (два тура), в каждом туре школьники решают в течение 4,5 часов по три задачи, которые расположены в порядке возрастающей сложности (по мнению составителей). Правильное и полное решение каждой из задач оценивается в 7 баллов (несмотря на их различную сложность).

Обычно схема отбора шести задач IMO состоит в следующем.

На начальном этапе, почти за 3 месяца до проведения IMO, формируется так называемый *лонг-лист* — список задач на основе предложений из стран-участниц IMO. Каждая страна может предложить до шести задач, и ежегодно лонг лист содержит порядка 170 задач. Далее задачный комитет (Problem Selection Committee), в который входит небольшое число специалистов страны-организатора IMO и приглашённых из других стран экспертов, работает над задачами из лонг-листа и отбирает в шорт-лист около 30 задач разной трудности, разбитых по четырём разделам школьной математики: алгебре и анализу, геометрии, теории чисел, комбинаторике. После того, как шорт-лист сформирован, уже незадолго до проведения IMO, происходит несколько закрытых заседаний руководителей команд, на которых из шорт-листа отбираются (путём весьма непростой процедуры голосования) те шесть задач, которые и будут составлять вариант олимпиады.

Традиции IMO накладывают отпечаток на стиль и тематику отбираемых задач. Так, регулярно среди шести задач варианта IMO мы видим две задачи по классической элементарной геометрии. Алгебра часто бывает представлена неравенствами и функциональными уравнениями. Примерно с частотой раз в 2–3 года в варианте IMO появляется задача по комбинаторной геометрии. В последние годы среди отобранных задач редко можно увидеть задачи, связанные с матанализом. А задачи по стереометрии вот уже долгие годы практически отсутствуют в варианте IMO. Негласный «запрет на стереометрию» возник из-за её отсутствия в школьной программе многих стран.

В 2020 и 2021 годах традиционная схема отбора задач претерпела вынужденные изменения, вызванные пандемией. Из-за невозможности проводить очные заседания руководителей команд, в 2020 году вариант IMO, так же как и шорт-лист, был сформирован задачным комитетом. В 2021 году функции руководителей команд по отбору задач взял на себя IMOB, и итоговый вариант был сформирован на совместном заседании задачного комитета и IMOB.

В 2020 году в задачный комитет вошли: Илья Богданов (председатель), Сергей Берлов, Александр Гайфуллин, Александр Голованов, Géza Kós (Венгрия), Павел Кожевников, Дмитрий Крачун, Иван Митрофанов, Фёдор Петров, Paul Vaderlind (Швеция).

Коллаж Гёзы Кош с фотографиями членов задачного комитета можно видеть на первой странице шорт-листа IMO2020 `https://drive.google.com/file/d/1kYK9XxlSkevOkMf65tt28wfJ-F9KE0-_/view?usp=sharing`.

Задачный комитет 2021 года составили: Илья Богданов (председатель), Сергей Берлов, Александр Голованов, Géza Kós (Венгрия), Дмитрий Крачун, Иван Митрофанов, Фёдор Петров, Алексей Устинов, Иван Фролов, Paul Vaderlind (Швеция), Gerhard Woeginger (Австрия).

Условия задач IMO2020 и IMO2021 и небольшую статистику, отражающую успешность решения задач участниками, приводим в конце статьи.

Проверка работ и координация

Оценка работ участников IMO осуществляется на *координации*, в которой принимают участие, с одной стороны, руководители команд, с другой — независимое жюри IMO. Членов этого независимого жюри по традиции называют *координаторами* (Coordinators). Цель команды координаторов — обеспечить качественную и единообразную проверку работ всех участников олимпиады (независимо от квалификации руководителя, языка, на котором участник пишет работу и т. д.). Работа координатора IMO ответственная и непростая. Жюри IMO формируется из числа математиков, разных стран (хотя обычно большинство представляют страну-организатора), имеющих большой опыт в проверке трудных математических текстов на разных языках. Почти все координаторы — в прошлом победители IMO или других олимпиад высокого уровня. Любое правильное решение задачи IMO, в котором присутствует полное обоснование всех выполненных шагов, оценивается в 7 баллов; при этом длина и эстетика решения не влияет на оценку. Но далеко не всегда решения в работе школьника полны, а зачастую работа содержит лишь идеи и начальные продвижения, которые могут (а иногда не могут) привести к решению. Для единообразного оценивания работ школьников жюри заранее (до чтения работ) проводит тщательный анализ различных подходов к решению задачи и вырабатывает по каждой задаче единую систему критериев (Marking Sheme).

Перечислим математиков, принявших участие в координации на IMO2021. В иностранную часть жюри вошли Evan Chen (США), Zuming Feng (США), Luis Eduardo Garcia Hernandez (Мексика), Maria-Romina Ivan (Великобритания) — старший по проверке задачи 2 IMO2021, Géza Kós (Венгрия) — старший по проверке задачи 1 IMO2021 и задачи 5 IMO2020, Marcin Kuczma (Польша), Charles Leytem (Люксембург) — старший по проверке задачи 1 IMO2020, Sofia Lindqvist (Норвегия), Jana Madjarova (Швеция), Leonardo Ignacio Martinez Sandoval (Мексика), Vlad Matei (Румыния), Jaime Mendizabal (Великобритания), Joseph Myers (Великобритания), Madalina Persu (США), Mark Saul (США), Jorge Tipe (Перу), Gerhard Woeginger (Австрия), Yufei Zhao (США). Алмаз Кунгожин (Казахстан), Медеубек Кунгожин (Казахстан). Остальные члены жюри из России (хотя у некоторых текущее место работы за границей): Марат Абдрахманов, Александр Антропов, Будимир Баев, Егор Бакаев, Дмитрий Белов, Сергей Берлов, Павел Бибиков, Иван Близнец, Илья Богданов — старший по проверке задачи 5 IMO2021 и задачи 6 IMO2020, Михаил Бондарко, Вера Буланкина, Георгий Вепрев, Надежда Власова, Алексей Волостнов, Андрей Гаврилюк, Александр Гайфуллин — старший по проверке задачи 4 IMO2020, Алексей Гарбер, Никита Гладков, Алексей Глазырин, Александр Голованов, Николай Гравин, Александр Гребенников, Михаил Григорьев, Павел Губкин, Максим Дидин, Олег Дмитриев, Мария Дмитриева, Алексей Доледенок, Сергей Дориченко, Михаил Дубашинский, Тимофей Зайцев, Алексей Заславский, Александр Зимин, Михаил Иванов (Висконсин), Михаил

Иванов (СПбГУ), Фёдор Ивлев, Никита Калинин, Алексей Канель-Белов, Дмитрий Карпов, Константин Кноп, Павел Кожевников — старший координатор, Павел Козлов, Константин Кохась, Дмитрий Крачун, Станислав Крымский, Александр Кузнецов — старший по проверке задачи 3 IMO2021, Каринэ Куюмжиян, Сергей Левин, Александр Логунов, Сергей Лучинин, Евгения Малинникова, Дауд Мамий, Александр Матушкин, Андрей Меньщиков, Иван Митрофанов — старший по проверке задачи 3 IMO2020, Евгений Молчанов. Ольга Нечаева, Фёдор Нилов, Владислав Новиков, Алексей Пастор, Владимир Петров, Фёдор Петров — старший по проверке задачи 6 IMO2021 и задачи 2 IMO2020, Олег Подлипский, Александр Полянский, Вадим Ретинский, Иван Решетников, Сергей Рукшин, Егор Рябов, Леонид Самойлов, Алина Сафиуллина, Олег Смирнов, Андрей Солынин, Александра Сонина, Дмитрий Терешин — старший по проверке задачи 4 IMO2021, Сергей Тихомиров, Юлий Тихонов, Изабелла Толокно, Кирилл Тыщук, Константин Тыщук, Алексей Устинов, Борис Френкин, Иван Фролов, Александр Храбров, Дмитрий Храмцов, Антон Целищев, Григорий Челноков, Владимир Шарич, Дмитрий Ширяев, Игорь Шнурников.

Подготовка и выступление команды России

Результаты выступлений команд разных стран на IMO зависят от многих факторов: уровень образования, численность населения, традиции и системность в олимпиадном движении; государственная поддержка и пр. По этим показателям ситуация в нашей стране совсем не плоха, и Россия достаточно уверенно занимает на IMO место в числе стран-лидеров. С 2018 года система подготовки кандидатов в сборную и сама система отбора на IMO претерпела значительные изменения, которые, возможно, также повлияли на улучшение результатов.

Сейчас полный годичный цикл подготовки кандидатов в команду России на IMO состоит из пяти очных сборов (осенние, январские, февральские, майские и летние) и порядка десяти заочных заданий. Наиболее длительные сборы проводятся с середины июня. На летние сборы приглашается команда из шести школьников, отобранная в текущем году, а также около 40 кандидатов из IMO следующего года. Отбор шести участников IMO от России происходит по формальному алгоритму на основе баллов, полученных в пяти испытаниях на протяжении текущего сезона. Эти испытания — олимпиады осенних, январских и майских сборов, а также олимпиада Romanian Master и Всероссийская олимпиада. Руководство процессом подготовки ведёт Тренерский штаб.

Команду России на IMO2020 составили:

Данила Дёмин (Сочи, 11 класс),
Алексей Львов (Новосибирск, 11 класс),
Иван Гайдай-Турлов (Москва, 11 класс),
Антон Садовничий (Москва, 10 класс),
Данил Сибгатуллин (Казань, 10 класс),
Максим Туревский (Санкт-Петербург, 9 класс).

Д. Дёмин и А. Львов завоевали золотые медали, поделив 4-е место в абсолютном рейтинге всех участников. У остальных наших участников серебро. В командном зачёте команда России второе место. Первое место — у Китая. Третье — за США, на 4-м месте Южная Корея.

В команду России на IMO2021 вошли:

Иван Бахарев (Санкт-Петербург, 10 класс),
Айдар Ибрагимов (Казань — Москва, 11 класс),
Матвей Исупов (Ижевск, 11 класс),
Данил Сибгатуллин (Казань — Москва, 11 класс),
Максим Туревский (Санкт-Петербург, 10 класс),
Андрей Шевцов (Москва, 11 класс).

Несмотря на то, что по сравнению с IMO2020 состав участников команд обновился, а вариант из шести задач был другим по стилю и содержанию, изменений в топе командного зачёта почти не произошло. В 2021 году Россия вновь на второй строчке, Китай — на первой, и только команды США и Южной Кореи поменялись строчками в таблице. И всё же 2021 год для России надо признать более успешным, чем 2020-й — отрыв от конкурентов в 2021-м более убедительный, да и достижения в медальном зачёте выше: А. Шевцов получил серебряную медаль, а у остальных наших участников — золото. Отметим отличное выступление М. Туревского — 39 баллов из 42 возможных: это 2-е место в абсолютном рейтинге всех участников. Интересно, что 20 июля, в день написания второго тура, Максиму исполнилось 16 лет. Так Максим отметил свой день рождения, решая задачи IMO. Результат — полный балл за задачи второго дня и нарисованный в работе тортик.

Сборными России на IMO2020 и IMO2021 руководил Кирилл Сухов, с 2018 года он также возглавляет тренерский штаб по подготовке команды к IMO. Заместителями руководителя являлись Владимир Брагин и Андрей Кушнир.

Кроме перечисленной команды руководителей, большой вклад в подготовку кандидатов на разных её этапах внесли: Б. Баев, С. Берлов, П. Бибиков, И. Богданов, Н. Власова, Н. Иванина, К. Кноп, П. Кожев-

Команда России только что получила медали IMO2021. Слева направо: руководитель команды К. Сухов (держит золотую медаль приболевшего Данила Сибгатуллина), А. Ибрагимов, И. Бахарев, М. Исупов, А. Шевцов, М. Туревский

ников, П. Козлов, А. Кушнир, А. Кузнецов, Ф. Петров, М. Пратусевич, А. Сухова и многие другие. С большой благодарностью отметим организации, оказавшие помощь и поддержку в вопросах подготовки команды: Образовательный центр «Сириус» (Сочи), Президентский физико-математический лицей № 239 (Санкт-Петербург), РГПУ им Герцена (Санкт-Петербург), Математический институт РАН (Москва, Санкт-Петербург), ДЦ «Компьютерия» (Тверская область), Центр педагогического мастерства г. Москвы.

Задачи IMO2020
(решения см. «Квант», 2020, № 10, с. 54–56)

Задача 1. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P, такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BA : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов ADP и PCB и серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Задача 2. Даны вещественные числа a, b, c, d, такие что $a > b > c > d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Докажите, что $(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1$.

Задача 3. Имеется $4n$ камушков массами $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Каждый из камушков покрашен в один из n цветов, причём имеется по 4 камушка каждого цвета. Докажите, что камушки можно разделить на две кучи равного суммарного веса так, чтобы в каждой куче было по два камушка каждого цвета.

Задача 4. Дано целое число $n > 1$. На горном склоне расположено n^2 фуникулёрных станций на разных высотах. Каждая из двух фуникулёрных компаний A и B владеет k подъёмниками. Каждый подъёмник осуществляет регулярный беспересадочный трансфер с одной из станций на другую, более высоко расположенную станцию. k трансферов компании A начинаются на k различных станциях; также они заканчиваются на k различных станциях; при этом трансфер, который начинается выше, и заканчивается выше. Те же условия выполнены для компании B. Будем говорить, что две станции связаны фуникулёрной компанией, если можно добраться из нижней станции в верхнюю, используя один или несколько трансферов данной компании (другие перемещения между станциями запрещены). Найдите наименьшее k, при котором заведомо найдутся две станции, связанные обеими компаниями.

Задача 5. Имеется $n > 1$ карточек, на каждой из которых написано целое положительное число. Оказалось, что для любых двух карточек среднее арифметическое написанных на них чисел равно среднему геометрическому чисел, написанных на карточках некоторого набора, состоящего из одной или более карточек. При каких n из этого следует, что все числа, написанные на карточках, равны?

Задача 6. Докажите, что существует положительная константа c, для которой выполняется следующее утверждение.

Пусть S — множество из $n > 1$ точек плоскости, в котором расстояние между любыми двумя точками не меньше 1. *Тогда существует прямая ℓ, разделяющая множество S, такая что расстояние от любой точки S до ℓ не меньше чем $cn - 1/3$.*

(Прямая ℓ разделяет множество точек S, если она пересекает некоторый отрезок, концы которого принадлежат S.)

Замечание. Более слабые результаты с заменой $cn - 1/3$ на $cn - \alpha$ могут оцениваться в зависимости от значения константы $\alpha > 1/3$.

Страны, предложившие задачи: Польша, Бельгия, Венгрия, Индия, Эстония, Тайвань.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
Количество участников (из 616), решивших задачу (набравших 5–7 баллов)	**461**	**154**	**47**	**312**	**236**	**6**

Задачи IMO2021
(решения см. «Квант», 2021, № 8, с. 47–50)

Задача 1. Дано целое число $n > 100$. Ваня написал числа n, $n+1$, …, $2n$ на $n+1$ карточке, каждое по одному разу. Затем он перемешал колоду из этих карточек и разделил её на две стопки. Докажите, что хотя бы одна из двух стопок содержит две карточки, сумма чисел на которых — точный квадрат.

Задача 2. Докажите, что для любых вещественных чисел $x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}.$$

Задача 3. Точка D внутри остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$, такова, что $\angle DAB = \angle CAD$. Точка E на отрезке AC такова, что $\angle ADE = \angle BCD$; точка F на отрезке AB такова, что $\angle FDA = \angle DBC$; точка X на прямой AC такова, что $CX = BX$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ADC и EXD соответственно. Докажите, что прямые BC, EF и O_1O_2 пересекаются в одной точке.

Задача 4. Дана окружность Γ с центром I. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что каждый из отрезков AB, BC, CD и DA касается Γ. Пусть Ω — описанная окружность треугольника AIC.

Продолжение отрезка BA за точку A пересекает Ω в точке X, продолжение отрезка BC за точку C пересекает Ω в точке Z. Продолжения отрезков AD и CD за точку D пересекают Ω в точках Y и T соответственно. Докажите, что $AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$.

Задача 5. Чип и Дейл собрали на зиму 2021 орешек. Чип пронумеровал орешки числами от 1 до 2021 и вырыл 2021 маленькую ямку вокруг их любимого дерева. На следующее утро он обнаружил, что Дейл положил в каждую ямку по орешку, ничуть не беспокоясь о порядке.

Расстроившись, Чип решил переупорядочить орешки посредством следующей последовательности из 2021 действия: во время k-го действия он меняет местами орешки, соседние с орешком под номером k. Докажите, что найдётся такое число k, что во время k-го действия поменялись местами орешки с номерами a и b такими, что $a < k < b$.

Задача 6. Дано целое число $m > 2$. В конечном множестве A, состоящем из (не обязательно положительных) целых чисел, нашлись такие подмножества $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, m$ сумма элементов множества B_k равна m_k. Докажите, что множество A содержит хотя бы $m/2$ элементов.

Страны, предложившие задачи: Австралия, Канада, Украина, Польша, Испания, Австрия.

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6
Количество участников (из 619), решивших задачу (набравших 5–7 баллов)	**360**	**19**	**15**	**315**	**184**	**39**

Назар Хангельдыевич Агаханов, МФТИ
nazar_ag@mail.ru

Илья Игоревич Богданов, МФТИ
ilya.i.bogdanov@gmail.com

Татьяна Геннадьевна Гдалина, РГПУ им. А. И. Герцена
tgdalina@mail.ru

Павел Александрович Кожевников, МФТИ
kozhevnikov.pa@phystech.edu

Максим Яковлевич Пратусевич, Президентский
физико-математический лицей № 239
max_p2005@mail.ru

Кирилл Андреевич Сухов, Президентский
физико-математический лицей № 239
cyxob239@gmail.com

Памяти Николая Николаевича Константинова (02.01.1932 – 03.07.2021)

3 июля 2021 г. ушёл из жизни выдающийся учитель и организатор математического образования Николай Николаевич Константинов. Московские матклассы, система преподавания «по листочкам», Турнир имени Ломоносова, Турнир городов, Независимый Московский университет — лишь неполный список дел, вокруг которых сплотил людей Константинов. Публикуем два текста Николая Николаевича, а также воспоминания его коллег и учеников. Материалы, посвящённые Н. Н. Константинову, можно найти также в предыдущих выпусках сборника.

Летние конференции Турнира городов, их место в становлении молодого математика

Н. Н. Константинов

Математические кружки и олимпиады, задуманные первоначально как вспомогательное средство обучения математике, накопили за сто лет своего существования такой богатый материал, что стали заметной самостоятельной частью математического образования и математической науки. Университетские студенты, прошедшие через кружки и олимпиады, выгодно отличаются от студентов, знакомых с математикой только на основании обычной школьной программы. В связи с этим некоторые коллективы школьных учителей и профессиональных математиков уделяют при обучении школьников большое внимание так называемой «олимпиадной математике».

На начальных этапах работы с будущими математиками дух соревнования играет большую роль — трудно однозначно сказать, чего больше, плюсов или минусов. Положительная роль несомненна — до организации первых кружков в математику шли единицы, о сотнях и тысячах не могло быть и речи. У молодых людей есть потребность постоянно проверять свои силы. Их не смущают поражения, они даже необходимы им для правильного выбора профессии.

Отрицательная роль состоит в том, что не все ученики увлекаются соревнованиями — у людей разные характеры, и некоторых учеников необходимость соревноваться может оттолкнуть. В олимпиадах и других математических соревнованиях приходится торопиться, что противоречит духу науки, в то же время содержание математики часто отходит на второй план. Кроме того, подхлёстывание так называемого «здорового честолюбия», которое не становится более здоровым оттого только, что мы его так назвали, может вредно сказаться на судьбе человека.

Поэтому после того, как цель соревнования — привлечь начинающих к решению задач — достигнута, дальше следует направлять внимание учащихся к познавательному и созидательному содержанию науки. «Олимпиада — это не соревнование школьников друг с другом, а наше общее соревнование с вечностью» — так сказал один из организаторов математических олимпиад и автор красивых олимпиадных задач Сергей Маркелов.

Вот какие шаги предприняты в этом направлении в некоторых популярных математических соревнованиях.

В многопредметном Турнире им. М. В. Ломоносова, проводимом примерно в двадцати городах России (в Москве около 7000 участников, сдавших около 30 000 работ)[1], грамотами награждается почти половина участников, причём в грамоте перечисляются успехи ученика во всех конкурсах, в которых он принял участие, но не определяются места (первое, второе и т. д.). Ни в одной формулировке нет признаков того, что успех не наивысший. Ученики и учителя могут сами судить об уровне выступлений учащихся, но жюри от этого устраняется. (Жюри берёт на себя только роль присяжных — виновен или невиновен, — но не роль судей.) Конечно, всё же есть граница между теми, кто получил грамоту, и теми, кто её не получил, но и она смягчается тем, что все школьники, пришедшие на заключительное заседание, получают небольшие памятные подарки.

В Турнире городов Диплом победителя Турнира выдаётся всем, кто набрал определённое число баллов (в 27 Турнире — 10 баллов), но тоже не указывается, какое место занято. Те, кто набрал от четырёх до десяти баллов, награждаются премиями от имени местного жюри. Таким образом, есть две границы, но они несущественны для самых сильных учеников, для которых как раз игра на самолюбии наиболее опасна. Правило зачёта по трём лучшим задачам делает ненужной спешку. В Турнире городов каждый год четыре тура, и в зачёт идёт лучшее из четырёх выступлений. Это правило (выбора максимума, а не суммирования) также приводит к снижению стресса.

Если в работе со школьниками дух соревнования остаётся на первом месте, то легко себе представить, как молодой человек может видеть перспективу своей жизни в математике. Это — достижение всё более высоких результатов в олимпиадах всё более высокого уровня, вплоть до IMO (Международной математической олимпиады). К сожалению, эта перспектива уводит многих школьников в сторону от нау-

[1] Данные 2000-х годов.

ки. Уж не говоря о том, что для большинства эта дорога заканчивается поражением, но даже в случае победы Международная олимпиада учит не тому, что необходимо для занятия наукой.

Летняя конференция Турнира городов показывает продвинутым школьникам иную перспективу, о её организации — ниже.

Но если не соревнование, то что же подогревает стремление к успеху, а главное — в чём же ученик будет видеть успех?

Главное в этот период — это интересные задачи, наградой служит внимание учителя к мысли ученика, а главным результатом становятся успехи в решении задач, ощущение собственного могущества, возникающее, когда преодолеваются настоящие трудности.

Скажем условно, что это — второй этап развития интереса ученика к математике, хотя границы этого этапа размытые. Для многих математиков этот этап оказывается последним, и это не так уж плохо, так как силами этих людей математика развивается и достигает больших высот.

Третий этап наступает тогда, когда математик задумывается о том, как его наука связана с реальными жизненными проблемами. «Люди вокруг нас так трудно живут, а мы ничем не можем им помочь, хотя решаем трудные задачи, но эти задачи не для них» — говорил замечательный русский математик А. Витушкин.

Молодые математики, с которыми мы работаем, в большинстве случаев, по молодости, не доросли до третьего этапа. И всё же мы не пропускаем случая напомнить им о том, что математика в наше время всё чаще и всё успешнее вмешивается в реальную жизнь.

Уместно отметить, что кружки, олимпиады и летние конференции — не самое подходящее место для такого напоминания.

Во-первых, у наших подопечных слишком слабое образование. Подчёркивание прикладного значения некоторых математических задач часто бывает неуместным на начальных этапах обучения. Учитель физики, с которым я работал, так сформулировал свои пожелания к курсу математики: «Я хотел бы, чтобы математика была похожа на математику, а то, что мне от неё нужно, — логарифмы, производные, интегралы — я лучше сам объясню». Я с этим подходом согласен. Чтобы быть привлекательной, каждая наука должна быть прежде всего похожа на себя.

Во-вторых, время работы над одной задачей на олимпиадах слишком мало.

В-третьих, тематика математических олимпиад и конференций не может сильно выходить за пределы школьной программы.

На олимпиадах и летних конференциях школьникам предлагаются новые, ранее не опубликованные задачи, методы решения которых школьникам заранее не известны. Тем не менее, здесь иногда появляются задачи, либо имеющие непосредственное практическое значение, либо тесно связанные с проблемами других наук. В подтверждение я приведу два примера.

На одной из последних Московских математических олимпиад была предложена задача «можно ли уложить в один ряд на плоскости бесконечное количество одинаковых кубиков так, чтобы ни один из них нельзя было убрать со своего места, не подвинув соседей?» Задачу предложил российский математик А. Канель-Белов. Задача стала известна в строительной фирме в Австралии, и на её основе была разработана технология производства потолочных перекрытий повышенной прочности.

Второй пример относится к генетике. Количество поколений, отделяющих два близких вида от общего предка, можно оценить по числу перевёрнутых участков ДНК в сходных хромосомах. Дело в том, что частота таких переворотов (как считают генетики) не зависит от внешних условий, а потому число переворотов годится для такой оценки. На одной из летних конференций Турнира городов была, предложена задача, основанная на этом явлении.

Здесь уместно обратить внимание на то, в чём, в основном, состоит роль математика, работающего с представителями смежных паук или с техникой. Бытующее мнение, что математик решает задачи, которые перед ним ставят прикладники, не совсем точно. В наше время многие прикладники прекрасно решают трудные прикладные задачи, используя пакеты готовых прикладных программ, и делают это часто лучше математиков. Но нет таких пакетов, которые помотают грамотно поставить задачу. Творчески мыслящий математик тогда оказывается наиболее полезным, когда он вместе с прикладником вникает в суть задачи и находит такую её постановку, при которой задача оказывается математически разрешимой. Чтобы так получалось, требуется, чтобы математик был не только знающим, но и творчески мыслящим. Новые задачи не укладываются в старые рамки, и знания быстро устаревают. Поэтому в наше время ставка в математическом образовании делается не на энциклопедические знания, а на развитие творческих способностей, и эта ставка полностью соответствует интересам внутреннего развития самой математики.

Но чтобы математик был полезным участником такого сотрудничества, он не только должен творчески мыслить, но необходимо, чтобы он с интересом относился к проблемам соседних видов деятельности, а это могут быть и науки, и производство, и социальные и экономические проблемы. Как построить математическое образование, чтобы избежать узости, когда хорошо образованный математик просто не знает, что творится кругом? Включать в программу всё на свете невозможно, рассчитывать на любопытство каждого — недостаточно.

В кружке для 8-го класса, который мы со студентами сейчас ведём, мы попробовали такое нововведение: через пять минут после окончания занятия математического кружка проходит независимо от первого второй кружок — по современным проблемам естествознания. Прошли занятия по биологии и физике, намечены занятия по геологии, астрономии и изобретательству. Пока половина участников математического кружка посещает и второй кружок.

Те же цели преследовались при организации многопредметного Турнира им. М. В. Ломоносова — конкурсы по различным предметам проходят рядом, и никому не навязываются предметы, которые неинтересны. При этом оказывается, что многим интересно многое.

Летняя конференция Турнира городов ежегодно проходит для небольшого количества участников (в Турнире городов ежегодно участвует около 10 000 старшеклассников примерно двадцати стран, около 1000 из них награждаются дипломами победителя от имени Центрального жюри Турнира, и примерно 70 школьников приглашаются на Летнюю конференцию). Конференция международная, рабочие языки — русский и английский.

Было бы желательно проводить подобное мероприятие для большего числа учащихся, но пока у организаторов нет на это сил.

Конференция длится неделю. В первый же час после заезда участников им предлагаются заранее напечатанные задачи. На следующий день проходит презентация задач — это лекции, которые помогают понять условия задач и мотивировки. Затем на протяжении всей конференции школьники решают эти задачи. Каждая задача — это целая исследовательская тема, в которой бывают десятки задач от сравнительно простых, необходимых, чтобы войти в тему, до трудных, иногда ещё никем не решённых. Школьникам рекомендуется выбрать для работы одну задачу, с тем чтобы продвинуться в ней максимально далеко. Ценится именно максимальное продвижение, а не число решённых задач. Разрешаются совместные работы. В середине недели назначается промежуточный финиш, когда фиксируются промежуточные достижения и добавляются новые пункты.

В последний день проводится заключительный семинар. Школьники награждаются грамотами, в которых фиксируются достижения, но не определяются занятые места. О своих и чужих достижениях школьники и их руководители могут сами судить, так как все результаты всех участников публикуются. Жюри от таких оценок устраняется (как и в Турнире им. М. В. Ломоносова). Все участники награждаются памятными подарками и математическими книгами.

Дух Летней конференции максимально приближён к обычной научной работе математика — участника еженедельного научного семинара. Это сходство усиливается тем, что некоторые школьники продолжают работу над взятой темой после конференции, общаясь с руководителем темы по электронной почте.

Вот краткий обзор тех начинаний, которые предпринимают московские организаторы кружков, турниров и конференций для большей согласованности их результатов с высшими целями математического образования.

Памятка поступающим в 9-й класс 179-й школы

от Н. Н. Константинова, научного руководителя физико-математических классов

Старшеклассники, которые задумываются о своём будущем, ставят перед собой несколько трудных задач.

Во-первых, это время физического развития организма. От того, как оно проходит, зависит здоровье на всю жизнь.

Во-вторых, в эти годы укрепляются трудовые навыки.

В-третьих, развиваются навыки общения; заводятся новые друзья, с которыми жить и работать многие годы.

В-четвёртых, необходимо проверить свои способности к разного рода деятельности, чтобы не ошибиться в выборе профессии.

В-пятых, нужно выбрать такую область своей будущей работы, чтобы интерес к ней не угас и продолжал развиваться.

И, наконец, нужно получить знания, достаточные для поступления в выбранное высшее учебное заведение.

Все эти задачи требуют большого напряжения в течение трёх лет.

И при этом необходимо жить бодро и весело, не приходя в состояние переутомления и, как следствие, безразличия ко всему.

Именно об этом последнем я попробую дать несколько советов, к которым я пришёл, работая в школе.

1. Откуда взять время

Большинство учеников, для которых учёба в школе до сих пор не создавала трудностей, не задумывалось о том, куда уходит время. До школы и в младших классах общему развитию детей способствуют самые разнообразные занятия: катание по полу автомобильчиков, всякая беготня без правил; затем идут игры по правилам — футбол, компьютерные игры, карты, шахматы; кроме того сидение подолгу перед телевизором и тому подобное. И все эти занятия до поры до времени действительно помогают физическому и умственному развитию.

Но чтобы выиграть время, придётся среди развлечений сделать отбор. Из всех приятных и интересных занятий выбирайте самые полезные, а из полезных отдавайте предпочтение самым интересным, хотя это и не всегда просто и не всегда поощряется нашими начальниками.

2. Что самое важное

Допустим, Вы сделали некоторую работу, за которую Вас похвалили. Другой случай — Вы сделали то, за что Вы сами себя можете похвалить. Что важнее? Важное второе. Вот слова А. С. Пушкина: «Ты сам свой высший суд, всех строже оценить сумеешь ты свой труд».

Но верно ли, что свой суд самый строгий? Это можно проверить. Допустим, Вы решили задачу, а Вам говорят — неверно! Это плохой признак, есть о чём задуматься. А вот другой вариант — Вам сказали, что всё верно, а Вы видите недостатки и стараетесь их устранить, хотя задача уже принята и от Вас не требуется исправление недоделок. Это — хороший признак, Вы оказались для себя строгим судьёй.

3. Как получать удовольствие от работы

Дело в том, что даже любимая работа не всегда доставляет радость, потому что в ней бывают такие длинные и нудные составные части, что пропадает всякое желание.

Вот такой совет даёт Махатма Ганди в книге о том, как следует принимать пищу. Он пишет, что пищу нужно прожёвывать до тех пор, пока она не станет сладкой. В наших условиях этот совет применительно к пище выглядит более странным, но, видимо, в Индии другая пища. Но я применяю этот совет к решению задач. Если в задаче встретилось скучное и трудное место, его нужно «прожёвывать до тех пор, пока оно не станет сладким» — в переносном смысле.

Делайте всякую работу аккуратно, чтобы на неё приятно было смотреть. А иначе голова зарастает грязью, подобно тому, как и Ваше рабочее место. Ваш стол, за которым Вы работаете дома, если его не убирать, становится противным, и за него не хочется садиться.

Убирайте стол так, чтобы за него приятно было сесть, а задачи решайте и записывайте так, чтобы было приятно вспомнить и прочитать своё решение. Тогда эти решения будут помогать Вам решить новые задачи.

4. Как проверять свои способности

Всякая олимпиада, если человек сумел на ней отличиться, помогает ему поверить в свои способности. Но не нужно преувеличивать значение этого способа. Есть люди, которые мучают себя проблемой: «я гений» или «я дурак»?

Не тратьте силы на ерунду. Если Вы достигли в чём-либо реального успеха, Вы сами это почувствуете, и чужие похвалы Вам не нужны. Вот слова пантеры Багиры из сказки Киплинга про Маугли: «Когда я поняла, что я Чёрная Пантера (Black Panthera), я легко сбила лапой с клетки замок, к которому прежде боялась и прикоснуться, и ушла в джунгли. Теперь в джунглях я не боюсь никого, а меня все боятся». И у Вас должен быть когда-то момент, когда Вы осознаете себя если и не Чёрной Пантерой, то кем-то соответствующим.

5. Как готовиться к поступлению в вуз

Панический страх перед вступительными экзаменами не приводит ни к чему хорошему. Главное, что необходимо для поступления в математические, физические и технические вузы, — это хорошее общее развитие в математике и физике, которое позволяет ориентироваться в различных неожиданных ситуациях. Люди, хорошо выступающие на олимпиадах, обычно легко готовятся к экзаменам, тем более, что сейчас вполне реально поступление через олимпиады.

Но конкретная подготовка к экзаменам в данный вуз тоже необходима. Во многих вузах есть своя специфика, свои фокусы, в которых набили руку преподаватели этого вуза. К этому нужно подготовиться. Такой подготовкой следует заниматься, как правило, не раньше второго полугодия 11-го класса, хотя эти сроки в зависимости от успехов ученика могут и изменяться. Важно учитывать факт, который знают все спортсмены, — возможность перетренировки. Это значит, что занятие становится противным, после чего невозможно решать задачи в полную силу. А оно неизбежно становится противным, после чего невозможно решать задачи в полную силу. А оно неизбежно становится противным, так как вступительные задачи придумываются отнюдь не для того, чтобы доставить радость.

Наша школа обеспечивает такую подготовку. Некоторые родители полагают, что не помешают ещё и занятия в группах при институтах или с репетиторами. Это ошибка — помешают, и серьёзно. Ученик не выдерживает двойной нагрузки и где-то начинает халтурить — обычно там, где не нужно платить деньги. И вот результат — на пробном вступительном экзамене, проведённом в 11-м классе в этом году, ученик, занимавшийся у знаменитого репетитора (и по этой причине не работавший в классе), написал эту работу хуже своих одноклассников.

6. Самое главное

Самое главное, по-моему, чтобы у человека были сильные желания и чтобы они нашли результативное направление.

Некоторые очень ценят факт раннего развития. Но я думаю, что это не очень важное преимущество. Таланты тоже важны, но и это не самое главное.

Для подтверждения своей мысли я сошлюсь на Ч. Дарвина, который в своей автобиографии анализирует свои способности и результаты своей работы. Способности он оценивал скромно, но признавал, что в результате его работы изменились взгляды целого поколения биологов. Он объясняет этот факт постоянством своих интересов. Биографы Дарвина отмечают кроме этого его способность неотступно думать над главной для него проблемой.

Я знаю очень много случаев, когда хорошие способности ни к чему не приводили. Причину я вижу в отсутствии сильных желаний. Уже и среди профессоров немало таких, которые не знают, зачем они работают, и эти профессора, очевидно, не могут в этих вопросах быть полезными своим студентам и аспирантам. Впору вспомнить слова М. Лермонтова — «Печально я гляжу на наше поколенье…»

Но не всё так грустно. Не на этих профессоров нужно смотреть. И были, и есть такие люди — и учёные, и деятели разных областей, которые знают, зачем живут и зачем работают. Перед миром стоят острейшие проблемы, и если мы будем спать, эти проблемы нас раздавят.

Задача молодых — увидеть новые задачи, чтобы делалось не то, что задали старики. А чтобы увидеть, нужно смотреть, замечать и радоваться увиденному. Среди учеников, которые ходили ко мне на кружок в этом году, были такие, кто никогда не замечал, что Луна иногда бывает видна на небе днём. На вопрос, почему Луна не всегда бывает круглая, некоторые отвечали, что это Земля бросает тень. Мало кто правильно ответил на вопрос, какого цвета ворона.

Я думаю, что те, кто ходит по земле с закрытыми глазами и ничего не замечает, хотя бы и имел стопроцентное зрение, рискуют утратить способность радоваться жизни, так как им может показаться, что они уже всё видели.

7. Наши выводы

На занятиях по профильным предметам мы широко применяем принцип обратной связи. Это значит, что мы строго следим, чтобы не обгонять своих учеников. Раздел курса пройден не тогда, когда мы его рассказали, а тогда, когда ученики сами в той или иной форме представили такой рассказ. Задачи часто весьма трудны. Как следствие, они не могут составлять обязательного задания. Некоторые ученики, следуя привычкам, принесённым из младших классов, выполняют только обязательные задания, Но на них многому не научишься. Не научишься главному — работать под влиянием внутреннего интереса. А тот, кто этому не научился, может быть только подмастерьем у богатых и выполнять зачастую не очень грамотные задания ради зарплаты, но без всякого внутреннего удовлетворения.

Ученики, которые приходят в наши профильные классы, часто не представляют точно, в какой области они предпочитают работать. Учёту этого факта школа придаёт большое значение. Кроме базового уровня знаний по математике, физике и информатике, ученики получают дополнительные знания по тем направлениям, которые соответствуют их природе и вкусам. Бывают случаи перехода из инженерных классов в физико-математические и обратно (после выполнения дополнительных заданий). В школе сеть гуманитарные классы — по издательскому делу и переводу. И здесь возможны переходы, если у ученика сменились интересы.

В школе есть предмет — математический практикум, который, может быть, правильнее назвать межпредметным практикумом. Ученики получают темы для курсовых работ. Вот некоторые темы.

1. Расчёт траектории планеты и проверка законов Кеплера.
2. «Гадалка» — программа, которая, получив некоторую строку из нулей и единиц, проанализировав эту строку, пытается угадать, какой следующий знак должен быть в этой строке.
3. Программа, которая анализирует отчёт об опытах Г. Менделя по скрещиванию гороха с точки зрения соответствия законам вероятности.

Задача матпрактикума — чтобы ученик пе только умел написать программу на заданную тему, но чтобы у него было по возможности широкое представление о том, что вообще можно делать, владея компьютером.

8. Предостережения

Не думайте, что, попав в сильную школу, Вы автоматически обеспечиваете себе хорошее образование. Всё зависит от Вас. И в плохой школе можно хорошо учиться, и в хорошей можно ничему не научиться.

Не бойтесь трудностей. Вот, что сказал, обращаясь к студентам, Иван Георгиевич Петровский — один из крупнейших математиков XX века, многолетний ректор МГУ: «Математик всю жизнь чувствует себя неудачником. Ведь он ставит перед собой трудные задачи. А они не всегда решаются. А если решаются, то редко. Конечно, иногда математик чувствует себя молодцом, но это редко и через несколько дней проходит. А дальше опять неудачи. Если такая жизнь вас устраивает, можете идти в математики».

Я думаю, что это относится не только к математике, но и к любой творческой профессии, в которой человек ставит перед собой задачи, которые ранее не были решены. А способность и склонность ставить такие задачи — это и есть свойство таланта (я так думаю).

Константинов и его кружок

С. Г. Смирнов

Впервые я узнал о Константинове в сентябре 1960 г., когда я увидел в старом здании МГУ на Моховой список математических кружков для школьников разных классов. Из фамилий ведущих кружки мне была знакома лишь одна: Андрей Леман, который кончал ту же школу № 103, будучи на пять лет старше нас и учась у тех же учителей, очень хороших. Ярче других был физик Виктор Раскин — выпускник военно-инженерной академии, участник парада Победы и член космической команды Королёва, изгнанный за пятый пункт в анкете. Наш математик Наталья Токарь тоже была королева моложе 40 лет — и тоже с проколом в анкете, ибо урождённая немка. Похожих на неё математических дам я позже встретил в Петербурге во главе сильных физматшкол — и сразу подружился с ними.

Всё это мы узнали и осознали позже, когда сами поступали в разные вузы, чьи приёмные комиссии кое-кого отвергли по непонятным для нас причинам. А тогда, после 8 класса, мы рвались решать непривычные задачи из любых наук, с явным перевесом математики, где кружков было много, а задачи уже опубликованы в трёх толстых томиках с именами «Шклярский, Ченцов, Яглом» на обложке.

В школе нас недокармливали этим даже лучшие учителя, поскольку половина класса была тупа к любой науке. Но четверть была не тупа: этого хватало для взаимного подогрева научных интересов. Вот Токарь и Раскин и пихали нас в объятия своих вчерашних выпускников. Среди них был будущий профессор мехмата Альфред Шмелькин — украшение теории групп и кафедры алгебры. Из питомцев Раскина особенно прославился потом Рудольф Бега — столп Второй школы, с которым я подружился на 40 лет благодаря общим ученикам.

Андрей Леман тоже был крупной личностью в роли просветителя. Развивая традицию братьев Ягломов, он составил в 1965 г. первый полный сборник задач Московских математических олимпиад за 30 лет с решениями. А мы — дети Победы, уроженцы 1944/46 гг. — охотно ходили на несколько кружков сразу. Кроме Лемана и Константинова мы посещали вечернюю матшколу в Николо-Песковском переулке — близ Старого Арбата. Там преподавали в разные годы Альфред Шмелькин и Юрий Манин, Эрнст Винберг и Стас Молчанов. Других я не упомню, но конспекты их лекций и тексты задач регулярно печатались в «Библиотечке физматшколы» и в «Математическом просвещении» (серия 2). Для меня этот сборник стал вратами учёности: там в 4 номерах был опубликован «Очерк основных идей топологии» Болтянского и Ефремовича. Я его прочёл с восторгом и с большой натугой в 10 классе. После трёх семестров общения с Константиновым я уже мог понимать такое изложение высокой геометрии. А после освоения «Очерка» я был готов понимать (с ещё бо́льшей натугой) лекции Дмитрия Фукса по алгебраической топологии, где главным слушателем и вопрошателем был Владимир Арнольд, сильнейший ученик Колмогорова.

Не диво, что Арнольд и Фукс были младшими друзьями Константинова и что он щедро передавал им своих учеников после двух лет тренировки в кружке. Ибо на третьем году кружковщины всякий школяр насыщается олимпиадной культурой и либо начинает пижонить, либо вступает в зрелую науку, часто меняя научного руководителя. Так я перешёл сперва от Токарь и Раскина к Константинову и Леману, потом от них к Фуксу и Алексееву и дальше к Арнольду и Манину, Новикову и Кириллову. Но это всё потом. А как начинался кружок Константинова?

За год до нашей с ним встречи (1959 г.) он как-то уловил десяток очень толковых кружковцев нашего возраста и за год довёл их команду до олимпиадной зрелости. Среди них был Иосиф Бернштейн — хронический лауреат всех математических олимпиад, начиная с 7 класса. Позже он стал моим однокурсником, другом и соратником по оргкомитету Московской математической олимпиады и аспирантом грозного старика Гельфанда. Докторантуру Ося проходил уже в США, перескочив туда в 1980 г. ещё до распада СССР. После многих лет успешной профессуры в США Ося устал и (как многие) перебрался в Израиль, где трудится поныне в окружении многих москвичей.

Другой пример — Лида Гончарова, прозванная «Бернштейн среди девчонок». Она тихая, истовая труженица: к 10 классу дозрела до победы на Московской математической олимпиаде и вошла в состав российской команды на Международной олимпиаде в Чехии. Там ещё одна победа — и через год Лида стала моей однокурсницей с тем же Фуксом в роли научного руководителя. В педагогике наши пути разошлись: я пошёл преподавать во Вторую школу, а Лида угнездилась в Заочной математической школе под эгидой Гельфанда. В аспирантуру Лида прошла и сделала хорошую диссертацию по гомологической алгебре под руководством Фукса и Гельфанда.

А ещё Лида сделалась многодетной матушкой-попадьёй, создав семью с ещё одним питомцем Константинова и Манина: Александром Геронимусом, внуком профессора МГУ. После успешной аспирантуры у Манина Саша обратился к Богу и ушёл в священники на всю жизнь. Лида же, воспитав своих детей и овдовев, устроила коммунальную школу христианского толка, а заодно ведёт кружок по математике для младших школьников на Старом Арбате.

Третий пример из той же команды — Гриша Маргулис, очень тихий и замечательно талантливый предтеча Григория Перельмана (только в Москве, а не в Питере). Я ни разу не слышал, чтобы Гриша что-либо рассказывал интересно или красноречиво. Но думать оригинально о математике он умеет: став аспирантом Кириллова и Гельфанда, Маргулис доказал давно ожидаемую теорему о дискретных алгебраических подгруппах компактной группы Ли. За это он был в 1978 г. удостоен международной премии Филдса, став вторым (после Сергея Новикова) её лауреатом в России. Тихо дожив до перестройки в СССР, Маргулис стал, как и Гельфанд, обычным международным математиком: часть времени он работает в России, а другую часть — в разных университетах за рубежом.

Такова была продукция на выходе кружка Константинова. Какое сырьё он принимал на входе в нашем лице? Можно сказать так: взбудораженное послевоенное поколение, которое уже не голодало и которое уже хорошо учили. Наши отцы либо вернулись с фронта, либо погибли там (как мой отец), либо работали на военных заводах, либо сидели в лагерях, как отец моего друга Володи Митрофанова. Он, как и я, поступил на мехмат, а после пошёл работать в ЦЭМИ и там дорос до завлаба (уже в эпоху перестройки). Взбудораженные люди часто жаждут знаний и охотно ищут им применение где угодно.

В середине мая 1961 г., в одно из воскресений, я получал третью премию на физфаковской олимпиаде. Выхожу из дверей физфака с авоськой, полной дарёных книг, и вижу на ступенях толпу молодых людей, кое-кто одет по-гречески. Оказалось, что студенческий театр показывает свою оперу «Архимед», а наверху в креслах, как почётные гости, сидят Лев Ландау и Нильс Бор. И тоже веселятся: сохранилась эта фотография. Через год её уже нельзя было бы снять…В январе 1962 г. Ландау попал в автокатастрофу и выбыл из активной физики. Бор умер через полгода — но успел обеспечить премию Нобеля для Ландау.

Понятно, что Константинов не оповещал свеженьких кружковцев о своих планах на два грядущих года — вплоть до поступления сегодняшних новичков-девятиклассников в разные ВУЗы. Но в голове у него был план. За первый год школяры должны стать профессионалами-олимпиадниками и полюбить сам процесс решения незнакомых задач по математике — пока элементарной, школьной. На второй год добавятся задачи неэлементарные — т. е. азы Анализа Функций, начиная с Пределов числовых последовательностей и внутренней архитектуры всего ансамбля Чисел: рациональных, действительных, комплексных. Хорошей основой для такого обучения могут стать «Восемь лекций по математическому анализу» Хинчина, где чётко описаны все нужные понятия и необходимые операции над ними. В книжке Хинчина нет ансамбля задач: их придётся придумывать по ходу учёбы. Как Рыбкин Шклярский и Яглом преобразили всю школьную учёность алгебраистов и геометров в упорядоченный ансамбль увлекательных олимпиадных задач. За два года школяры должны усвоить эту премудрость — в той мере, какую Природа пожаловала каждому из нас. И, конечно, все новички должны освоить трудное ремесло *рассказывания* своих решений преподавателю-контролёру. Без этого ремесла не удастся сдать никакой экзамен по математике — даже школьный, а тем более мехматский!

И вот пришли на первое занятие больше сотни новичков: от зубров лет 16 с двухлетним кружковым опытом до малышей из 7 класса. Всем нужно дать возможность самовыразиться, решая вкусные задачи нарастающей сложности и трудности. Например, делимость числа (p^2-1), где $p>3$ — простое число. Не надо сразу раскрывать все карты! Пусть сначала самые смышлёные сообразят, что в тройке последовательных чисел $(p-1), p, (p+1)$ хоть одно делится на 3; значит, (p^2-1) делится на 6. Дальше можно провоцировать умников: не делится ли (p^2-1) на нечто бо́льшее! Хотя бы на 12 или на 24? Это видно из примера $p=5$.

Чтобы ответом на такие вопросы не стал общий гвалт, ведущему кружок нужны ассистенты — хотя бы по одному на каждый десяток школяров. Константинов сразу призвал к себе всех друзей-студентов и школяров-ветеранов из прежнего набора, наделённых хоть минимальным педагогическим даром. И работа пошла! В конце первого семестра мы уже сдавали зачёт: каждый хвастался хотя бы дюжиной решённых им лично задач, рассказывая их решения понятливому и въедливому партнёру: иногда года на три старше тебя, а иногда твоему ровеснику. Я рассказывал Володе Фишману — однокласснику Лиды Гончаровой и Оси Бернштейна, а потом моему однокурснику на мехмате. Беседа получилась приятная для обеих сторон, а для меня — очень полезная. Ведь это был мой первый устный экзамен по математике, и я его выдержал! Второй экзамен того же сорта я сдавал уже в 11 классе — и не в школе, а в стенах мехмата МГУ на семинаре Павла Сергеевича Александрова. Сдавал ему самому, у доски — строил такое счётное множество на отрезке, для которого ансамбль предельных точек — всё канторово множество. Решение совсем простое: на каждом смежном интервале строим две последовательности точек, стремящиеся к его концам. Академику моё решение понравилось, и он спросил: с какого я курса? Мне пришлось признаться, что я ещё школьник. Александров отнёсся к этому спокойно: он явно не одобрял эту хрущёвскую инновацию — добавить к десятилетке ещё один учебный год, чтобы все школяры на выходе обретали ещё и рабочую профессию. У меня, например, была квалификация «чертёжник-деталировщик». Разве это сравнимо с квалификацией «выпускник кружка Константинова»?

Кстати: в конце первого кружкового года мы все сдавали письменный экзамен, участвуя в Московской математической олимпиаде. Я этот экзамен провалил: пришёл на второй тур, но там не заслужил даже похвальный отзыв. Почему так? Видимо, по сочетанию моих личных качеств. Я стремлюсь решать не всякую задачу по математике, а только такую, где формулировка мне нравится, или такую, где я чую возможные подходы к решению. Нет у меня чемпионского умения быстро влюбиться в любую незнакомую задачу! И не смог Константинов мне такое умение привить — поскольку сам им не обладал. В отличие от Оси Бернштейна, или Гриши Маргулиса, или Димы Каждана из той же компании.

Мне Каждан запомнился трижды. Сначала он (вместе с Маргулисом) ушёл из своей (не очень хорошей) школы в вечернюю школу, где обучение кончалось в 10 классе. Так они двое оказались на курс старше нас — большинства константиновцев. Там они соперничали с Анатолием Фоменко: геометром, художником в стиле Эшера — Дали и историком-фантастом в стиле Николая Морозова.

Затем Каждан, Маргулис и Бернштейн стали учениками в команде Гельфанда или Кириллова. Я был на защите Каждана, где руководитель — Кириллов, а главный оппонент — Юрий Манин, сильнейший из учеников Шафаревича. И вот великий Манин откровенно говорит, что он не заметил одну тонкость в работе Каждана, которую ему разъяснил только Кириллов. Такое случалось не каждый год! Впрочем, возможно, что диссертация Каждана была написана не очень аккуратно — как и моя диссертация несколько позже. В моём случае дешифровщиком недописанного выступил не научный руководитель Фукс, а главный оппонент Чернавский, ученик строгой дамы Людмилы Келдыш. Он просто заставил меня дважды переписать мою диссертацию; в итоге она стала намного лучше, хотя все формулировки сохранились. Вероятно, Манин не столь диктаторски обращался с Кажданом.

В третий раз я заметил Диму во время Московского математического конгресса (лето 1966 г.). По подсказке наших руководителей мы оба набросились на тех героев-иностранцев, результаты коих мы хотели превзойти. Для меня это был Андре́ Хефлиге́р из Швейцарии, а для Каждана и Кириллова — Майкл Атья, Филдсовский лауреат 1966 г., создатель *K*-теории и творец очень простого доказательства, что только три сферы размерностей 1, 3, 7 можно оснастить полем невырожденных касательных реперов.

Так вот, я говорил с Хефлигером только о топологии узлов, а Каждан убедил Атью принять его в докторантуру, когда Дима сумеет приехать в США. Дима это сумел — исчез с московского горизонта раньше многих москвичей. Человек — не дерево, он может сам себя пересадить. Я не уехал в основном потому, что меня не давил пятый пункт анкеты, и потому что мне здесь всегда хватало и учителей, и учеников. Так же было и с Константиновым.

Надо ещё сказать о наших финальных экзаменах весною и летом 1963 г. Сначала была математическая олимпиада: здесь Бернштейн и Гончарова получили свои всегдашние первые премии, Фишман и Геронимус получили, кажется, вторые премии, а я — третью. Так я в математике достиг того рубежа, на который в физике вышел двумя годами раньше. Но физфак меня не прельщал: ведь ради третьей премии пришлось участвовать в третьем туре, а он экспериментальный. Вот математику я готов пить из любого источника — лучше всего из уст живых людей.

Вот спросил я Константинова об аксиомах Арифметики в сравнении с аксиомами Геометрии. Он мне посоветовал суперстрогую книгу Эдмунда Ла́ндау. Я заглянул туда — и понял всё, что хотел, хотя стиль изложения подходит больше компьютеру, чем человеку. Зато проясняется смысл Теоремы Гёделя — и почему мне не следует разбирать детали её доказательства. Хорошо, что в мои студенческие годы на мехмате не было обязательного курса математической логики! Но обязательного курса топологии тоже не было: это тоже радовало кого-то из моих товарищей по кружку и по мехмату.

На мой взгляд, высшим пиком в карьере Константинова как «учителя героев» был 1961/62 — второй год нашего кружка, когда Коля (мы все так его звали) повёл наш отряд (от 30 до 40 бойцов) на штурм матанализа по трассе, намеченной «лекциями» Хинчина. Первый наш штурм действительных чисел едва ли кто из нас забудет. Октябрь; сухо и холодно; вечер во дворе старого здания МГУ. Там идёт ремонт, и свободной аудитории большого объёма не нашлось. Коля решил вести занятия во дворе — благо вдоль стенки лежит штабель обтёсанных брёвен. Где-то нашли выброшенную драную доску из бурого линолеума и поставили перед брёвнами. Мы на них расселись, а Коля плясал с куском мела у доски — и рассказывал нам теорию Дедекинда о сечениях в поле рациональных чисел. Так мы входили в новый мир — как Суворов через Альпы. Каждые минут 20 делали перерыв и бегали-прыгали по двору, чтобы согреться. Так мы освоили топологию числовой прямой. В качестве домашнего задания Коля предложил нам подумать о том, как занумеровать все рациональные числа и почему невозможно заштриховать все сечения в них. Имя Кантора он, кажется, упомянул — но общей теорией множеств мы занялись через полгода, уже освоив возню с непрерывными функциями и производными. Так ведь было и в реальной истории математики XIX века: Коля вёл нас по путям Коши и Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда. Вёл через лес задач, которые вырастали из каждой щели. Ощущал ли он себя в том маршруте прямым наследником Давида Шклярского? Видимо, да. Ведь Константинов моложе Шклярского всего на 13 лет. На столько же мы были моложе Константинова. Но Шклярский погиб на фронте, и Коля у него не учился, мы же учились у Коли и надеялись повторить его подвиги. Вот Гагарин слетал в космос и уцелел там, а он моложе Коли на 2 года и, наверное, ещё полетит! А куда нас судьба забросит? Где нам найти своего Королёва или Келдыша? Впрочем, эти имена тогда были мало кому известны и секретны; наш физик Раскин говорил нам о своём знакомом Феоктистове — но тот ещё в космос не летал, а был наземным инженером в хозяйстве Королёва.

Константинов же во главе нашего отряда строил свой космический проект — завтрашние физматшколы. Все их элементы присутствовали на нашем кружке. Во-первых, курс матанализа, разложенный в ряд олимпиадных задач: можно назвать его «рядом Константинова» по аналогии с рядом Тейлора и рядом Фурье. Во-вторых, система «старших братьев» (тьюторов), регулярно беседующих с младшими о решениях всё новых и новых задач с участием новой семантики. В-третьих, регулярные вылазки в соседние науки — для начала в теорию групп и в генетику. Туда Константинов и его друзья водили нас на экскурсии в следующем учебном году (1962/63 гг.), когда мы вынужденно задержались в школе и в кружках (по воле Хрущёва)[1]. Константинов тогда

[1] 10-летнее образование было заменено на 11-летнее.

повёл нас в общую топологию числовой прямой и в пространство всех непрерывных функций. Так мы шли по программе 3 курса мехмата, ещё не освоив второй курс. И доходили до хороших высот. Например, в списке задач Константинова была такая: построить на отрезке функцию, которая на любом интервале принимает любое действительное значение. Я сам её решил где-то в школьном коридоре, на перемене между уроками химии и литературы. Потому что мы на третьем году общения с Константиновым привыкли думать о математике в любой час, в любом месте — хотя бы для того, чтобы не скучно было.

Наши учителя это одобряли. Они тоже хотели преобразить нашу школу № 103 в новомодную физматшколу — по примеру уже возникших школ № 2 и № 444, где угнездились разные академики и доктора точных наук. Во Второй школе это были Гельфанд и Дынкин, Кириллов и Смилга (физик из Курчатника). В школе № 7 ядро математиков составили Кронрод и Константинов. Но я в этом не участвовал, будучи поглощён мехматом МГУ с десятками разных факультативных курсов и семинаров. Константинов за три года подготовил нас к роли ангелов в этом раю, а другие архангелы нас там встретили и продолжили наше воспитание. Вскоре и мы сделались архангелами — порою в совсем неожиданных небесах.

Разве мог я вообразить, что моё второе высшее образование сплетётся с третьим и что я пройду вторую аспирантуру у Льва Гумилёва? А потом (в условиях перестройки СССР) перенесу кружково-задачную культуру из математики в историю? И что сам Константинов призовёт меня на роль человека-задачника по истории в универсальных турнирах имени Ломоносова? Что на этой почве, под флагом информатизации нашей школы, я подружусь с самыми дерзкими учителями и гимназистами Петербурга — распевая с ними вместе «Гаудеамус» и принимая небывалые многопредметные экзамены с 6 по 11 класс?

Дивно играет Природа нашими жизнями и нашей свободной волей. Коля Константинов нутром чуял эту природную игру — и охотно следовал завету Шота Руставели: «Что ты спрятал — то пропало; что ты отдал — то твоё». Спасибо ему за пример!

Сергей Георгиевич Смирнов,
sgsmirnovsg@gmail.com

О Николае Николаевиче Константинове

А. К. Толпыго

1

Вначале я хотел бы рассказать о наших разговорах. Коля Константинов был человеком весьма разносторонним и необычайно деятельным. Он никогда не жаловался на трудные обстоятельства (хотя часто приходилось жить в непростых обстоятельствах); он всегда искал, что́ можно сделать. И находил. Я напишу прежде всего о Турнире городов.

Всё началось с того, что москвичи стали жаловаться: на Всесоюзную олимпиаду посылают до смешного мало москвичей — в команде только шесть человек. А ведь в Москве было (и есть) много сильных школьников, которые, однако, на олимпиаду не попадают.

Что же делать? Я не знаю точно, кто первым предложил идею, но уверен, что без Константинова тут не обошлось. Решили: в день олимпиады собирать желающих московских школьников в такой-то школе; звонить в Ташкент или Ригу, спрашивать, какие задачи сегодня даны на олимпиаде — и давать их ребятам. Пусть они не получат грамот Всесоюзной олимпиады, но всё равно — они как бы её участники.

Потом этим заинтересовались Киев и Рига, но… тут как раз состав жюри Всесоюзной олимпиады сменился, и там решили, что не следует давать задачи олимпиады. Почему не следует? — Ну, как же! не положено.

Досадно… Но мы нашли выход: а давайте сами составим задачи! Неужто мы составим хуже Всесоюзного жюри?! — И так начался Турнир городов.

Вскоре в нём уже участвовали десятки городов СССР, потом он перемахнул через границы и океаны… И конечно же, когда работы Турнира городов стали присылать в Москву для перепроверки — посылали их Константинову на дом (а куда же ещё?). Долгие годы их посылали тетрадками (только в последние годы оказалось, что вместо этого можно посылать электронный вариант), так что Коля ходил за бандеролями на почту. Но — хорошо, если их посылали на имя Н. Н. А если на имя «Турнира городов?» Да ещё, не дай Бог, заказным письмом? Как его получать?

Но на всякую проблему есть способ решения. Редакция журнала «Квант» давала какому-нибудь Сидорову доверенность на получение ценного или заказного письма на имя Турнира Городов, заверяла её печатью журнала, и Сидоров получал ценное письмо для господина Т. Г. по своему паспорту.

Часто также работы ТГ возили «с оказией». Вот, к примеру, моя запись за апрель 1994 г.:

> Побывал у Конста — отвёз ему работы ТГ. Он мне рассказал, что когда стали искать документы, откуда же взялся ФИАН (чтоб можно было сдать часть территории коммерческой структуре) — нашли только решения Совета министров о присвоении ФИАНу имени Лебедева. Стали искать глубже, в царском времени. И докопались: исторически ФИАН есть отделившийся кусок петровской кунсткамеры.

Эта запись типична: он всегда попутно рассказывал что-то интересное. Но об этом чуть ниже. А вот другая запись, десятью годами раньше, ещё в СССР:

> 1984 г. …Мы обсудили, почему в Латвии такие высокие результаты [на олимпиадах]. Он утверждает, что в Латвии опорой нации является интеллигенция как таковая. И в частности, после олимпиад они лучших детей берут в 1-ю школу. NB: русский, выучивший латышский язык, пусть даже он говорит с акцентом, — вызывает уважение.

Вслед за Турниром городов Коля организовал систему летних конференций (тоже, разумеется, для школьников). И на первой или второй такой конференции (она проходила в Эстонии, тогда ещё советской) устроили спектакль под названием «Ар-хи-мед!». Пьесу когда-то сочинили на физфаке МГУ; в заглавной роли выступал Коля Константинов.

2

После 1991 года Коля стал много ездить на математические конгрессы: в Канаду, в Болгарию, в Боливию… В 2012 году Константинову исполнилось 80 лет, но это не помешало ему навострить лыжи в Южную Корею — делать там какой-то доклад. «Южная Корея, — сообщил он, — с прошлого года начала участвовать в Турнире городов — и сразу в широком масштабе. 25 городов. Это потому, что за дело взялось правительство». И вообще, по его словам, в Южной Корее с образованием дело обстоит неплохо. Это вам не Европа, где учителя уже не знают, как перемножать числа в столбик.

«Револьт Пименов, — заметил я, — ещё 20 лет назад как-то говорил мне: изобретение компьютера есть величайший прорыв человечества к дикости».

Константинов ответил, что у нас рассуждают так: «В Австрии множить в столбик не умеют — и хорошо живут. Надо и нам разучиться перемножать числа, и будем жить, как в Австрии».

Словом, в 80 лет Константинов был бодр телом, молод душой и не желал ныть о том, как всё вокруг плохо. Когда я ему это сказал, он заявил, что у Моцарта есть сатирическая песня[1)]; петь её полагается гнусавым голосом (так и написано автором), а речь идёт о том, что «когда я была молода, всё было не так, и таких плохих книжек не читали», и что-то подобное.

В последний раз я встречался с Константиновым в 2019 году. Ему было 87 лет, его уже приходилось в основном возить в колясочке. И тем не менее встреча наша произошла… в Сербии, в городе Аранджеловац, на очередной Летней конференции. И Коля там ещё являлся на вечерние посиделки «с самоваром»…

Об этом самоваре он, кстати говоря, рассказывал, что поскольку его возят на все летние конференции (часто — через государственную границу), то на самовар всегда берут две справки. В одной говорится, что это вещь музейной ценности и потому требует к себе самого бережного отношения, в другой — что вещь не имеет никакой особой ценности и потому может быть вывезена из России. Справки кладутся в разные карманы, и предъявляют одну или другую, в зависимости от обстоятельств.

…Так вот, он не только приходил на посиделки — он ещё и пел там — например, о том, как

…море Лаптевых ревело и стонало,
На скалы грозные взлетал за валом вал,
Как будто море жертву принимало,
Стальной гигант кренился и стонал…

[1)] Это песня «Старуха» `http://www.notarhiv.ru/zarubkomp/mozart/noti/1%20(112).pdf`.

3

Моё знакомство с Константиновым началось году этак в 1967-м, и у меня сохранилось довольно много записей; некоторые из них я и приведу.

Содержание записей однотипно, но в то же время весьма разнообразно, поскольку рассказы Константинова о том, о сём можно определить как «разнотемье». Поэтому мой о нём рассказ будет несвязным: я могу только упомянуть, какую историю он мне рассказал в 1980 году, а какую — в 2015-м. Не удивляйтесь, пожалуйста, что мой рассказ будет «прыгать» по годам, и не ищите тут логику.

Разговор мог начаться, скажем, с того, как его приятель-физик, давно живущий в Германии, много лет держал на плаву немецкую партию зелёных: писал им программы. Но брал внушительные деньги; за период написания чуть не 5000 марок в день. Перед последними выборами зелёные пожадничали, решили «у них и так хороший рейтинг, обойдутся» — и в результате к моменту выборов партия с удивлением обнаружила, что ей никто не написал программу.

Тут я заметил, что ведь не обязательно себя ограничивать: можно писать программу и нескольким партиям сразу. Коля: «А если партии договорились между собой — подчеркнуть их различия, чтобы уловить побольше избирателей». Я: «А если партии конкурируют — наоборот. Писать им идентичные программы. Ведь понравиться надо одним и тем же избирателям. Как интересно получается…»

«Но надо же, — удивлялся Константинов, — какой опасной вещью оказалась представительная демократия». — Шёл 1993 год, и мы ещё многого не понимали.

Иной рассказ (год 2006): какие у него несообразительные семиклассники. Требовалось покрыть доску 6х6 доминошками; сколько доминошек для этого требуется?

Этого школьники не знали. Константинов предложил поэкспериментировать; эксперимент дал число 18.

«А если положить костяшки по-другому?» — спросил Коля. Попробовали; опять вышло 18.

Тут кто-то сказал: «Наверно, всегда будет получаться 18». В общем, минут за десять кое-как разобрались…

Затем Константинов начал расспрашивать их, видели ли они луну днём. — Один видел. — А месяц в виде серпа? — Тут видели все. — А неполную луну?

Оказалось, что неполную луну не видел никто; он их подвёл к окну и показал в окно — они смотрели с большим интересом.

«А почему она неполная?» — спросил Константинов. — Ответ: наверно, Земля загораживает. — «Но тогда ведь Земля должна быть кривой формы?..»

Впрочем, версию о том, что «Земля загораживает», К-в слышал и от студентов физфака. И после такой беседы со школьниками Константинов сказал Арнольду… Владимир Игоревич, как известно, очень рьяно критиковал западное образование, тех студентов, которые без калькулятора не знают, что $4/7 < 1$. Так вот, после этой беседы Константинов сказал Арнольду: «за дураками нечего ездить во Францию; сходите в соседнее общежитие».

А мораль он вывел такую: маразм крепчал.

* * *

И ещё о грамотности. Как-то он слышал, что «СССР был великой державой, одна шестая часть суши. Ну, Россия тоже великая, самая большая в мире — пусть не одна шестая, так одна пятая». (Ну, это, впрочем, понять легко: пять меньше шести, это пока ещё знают все; а что такое дроби — этого большинство уже не знает).

В другой раз он слышал по радио, что «число пи иррационально и точного значения не имеет».

Это было в постсоветские годы. Но и в советские… Коля тогда работал в экономическом институте; и вот однажды ему дали рецензировать диссертацию; она была по экономике, но при этом имела солидный математический уровень — кому же её рецензировать, как не математику?

Так каков же был солидный уровень этой диссертации? Сейчас узнаем.

«Я быстро понял, — рассказывал Коля, — как она сделана: первая половина — общие бессодержательные рассуждения, а вторая выписана из учебника по математике. Но как же её рецензировать? Я попросил Сашу Геронимуса, который тогда работал под моим началом, поговорить с диссертантом. Он спросил его: Что Вы знаете об операторах? — ?!? — Саша начал снижать уровень требовательности, в конце концов дошёл до вопроса: сколько будет $1/2 + 1/3$?

Тут диссертант просветлел и сказал:

— Да! Я знаю, что этот вопрос не так прост. Складывать числитель с числителем и знаменатель со знаменателем — это неправильно. Нам в школе объяснили другой способ, но я его забыл.

Ну, защитился он, конечно, блестяще, единогласно, и оппоненты особо отмечали большое количество математических формул в диссертации».

* * *

Как-то раз некий его знакомый написал доказательство теоремы Ферма. Коля нашёл ошибку и написал отрицательную рецензию. После чего мама автора приходила к нему с предложением: Коля напишет положительную рецензию, а они его за это возьмут в соавторы.

А впрочем — что ж, бывает и хуже. К примеру, в Калифорнии попечительский совет отклонил две образовательных программы из-за допущенных в них ошибок. Вот одна такая ошибка: в программе написано, что 36×45 делится на 30, чего быть не может, так как ни 36, ни 45 на 30 не делятся. Вот так!

Ещё рассказы Константинова. Год 1987. Перестройка. В частности, начались реальные, а не формальные выборы.

И Константинов рассуждал о том, что экономисты в его бывшем институте неспособны понять, что если надо из 20 кандидатов отобрать 10, то не обязательно, чтоб каждый оставлял в списке 10; что не обязательно набирать больше 50 % — это только правила игры, которые можно менять.

Я ему: Дети требуют, чтобы сказка рассказывалась очень точно.

Коля: Нет, дети могут сказать: «А теперь давай играть, будто… Чур, здесь не прятаться!». Они умеют менять правила игры.

…А в одном институте ввели анкеты: каждый пишет характеристики на сослуживцев. Сначала объявили, что они будут анонимными, но при сборе бумажек велели их подписывать: кто отказывался — парторг сам надписывал фамилию. Многие, конечно, строчили с наслаждением. Идиоты, затеявшие анкеты, просто не понимали, что это не «чистый эксперимент», а эксперимент с сильной обратной связью. На ту же тему: физики, отбиравшие команду на международную олимпиаду, решили сделать её дружной — и предложили ребятам писать характеристики друг на друга. Двое сговорились — и исключили из команды самого сильного конкурента.

Следующий рассказ — из года 2016-го:

— Математик К. мне сказал, что «миссия родителей состоит в том, чтобы спасти детей от школы». — И что интересно: в тот же день (пусть это чистое совпадение, а всё же…) директор школы мне высказал мнение, что «школа нужна, чтобы спасать детей от родителей».

— Сестра этого директора уехала в Финляндию, там тоже руководит школой. И очень успешно, её школа — в числе наилучших. Вообще в Финляндии в школах очень хороший климат, отношения учителей и учеников прекрасные. Есть только один недостаток: в школах ничему не учат. (Естественно, тут прямая взаимосвязь.) Потому-то эта сестра и выбилась так быстро в люди: в её школе ещё и чему-то учат.

— Дориченко недавно вызвали с утра — принимать экзамен по английскому языку. Он пытался отбиться, ссылаясь на то, что английского языка он не знает.

— Они ответили: «это неважно», — вставил я.

— Нет!! — быстро возразил Константинов. — Это важно! Если бы он знал английский — его бы нельзя было брать, потому что он, несомненно, начал бы подсказывать своим друзьям. Принимать должен только человек, который сам ничего не знает, тогда результат будет объективным.

Так что бедному Дориченко пришлось вставать в 7 утра, ехать туда; там выяснилось, что его вызвали не на то время, и он 4 часа сидел без дела…

Тема моя не исчерпана, но где-то надо поставить точку, и я ставлю её здесь.

Алексей Кириллович Толпыго,
tolpygoa@gmail.com

Воспоминания о Коле Константинове

А. Г. Кушниренко

Я хочу начать эти короткие воспоминания с описания эпизода, который определил ход всей моей жизни.

Весной 1962 года Николай Николаевич Константинов по своей инициативе, через своих знакомых матшкольников разыскал меня, незнакомого ему лично ученика 11 математического класса 425 школы (на следующий год она превратилась в знаменитую 444) и пригласил к себе на беседу. В этой беседе он за 2 часа полностью убедил меня в том, что у меня большие математические способности, что мне не нужно становиться радиоинженером, а надо поступать на мехмат МГУ и становиться математиком. К середине нашей встречи я принял твёрдое решение последовать рекомендации Николая Николаевича и через полгода действительно поступил на мехмат МГУ и впоследствии действительно стал профессиональным математиком.

До этого я не был с Константиновым знаком лично, но упоминания об удивительном человеке «Коле Константинове», так его тогда называли, часто проскальзывали в разговорах с моими, на класс младше меня, матшкольными приятелями. Приятели эти крутились в математической кружково-олимпиадной тусовке, уже занимались почти профессионально математикой с какими-то гениальными математиками, а про Константинова рассказывали романтическую историю, что он 10 лет не спал, не ел, не встречался с девушками, а доказывал континуум-гипотезу. Поскольку я, как любой ученик математической школы, слушал лекции-рассказы по канторовской теории множеств, потратил пару дней, пытаясь доказать теорему Кантора — Бернштейна, и помнил восторг, который меня охватил, когда я понял доказательство этой теоремы, эта история про 10 лет попыток решения математической задачи в ущерб земным радостям была очень правдоподобна:

На английском языке текст публикуется в журнале Notices of the American mathematical society.

формулировка континуум-гипотезы была мне, разумеется, известна, и непреодолимое желание решить задачу, которая не поддаётся, также было известно на личном опыте.

Разумеется, получив подобное приглашение на встречу со знаменитым человеком по не названному мне поводу и прибыв на встречу в квартиру Коли на шоссе Энтузиастов, я был одновременно польщён, взволнован и встревожен. Тревога моя прошла в первые 10 минут. Успокоили меня не слова, которые произносил Коля, а манера, в которой началось общение. У Коли была совершенно неповторимая, особая манера общения, в каком-то смысле одинаковая для любых собеседников: детей, подростков, взрослых, включая официальных лиц любого уровня. При разговоре с ним у тебя мгновенно возникало ощущение, что ты личность, мнение которой Константинову важно и интересно, а если у тебя по какому-то вопросу неполное или неверное мнение, то Колю в первую очередь беспокоит, что это нанесёт вред тебе, и Коля считал своей задачей тебя переубедить, чтобы ты, по неведению или заблуждению, не совершил какого-нибудь вредного тебе же поступка. Это возникающее у собеседника ощущение бескорыстности Колиных намерений было убедительным, поскольку было верным. По опыту последующего многолетнего общения с Колей могу сказать, что если в разговоре по какому-то важному вопросу Коле не удавалось тебя убедить, то при расставании ты понимал, что у Коли после встречи остаётся не чувство личной обиды на тебя, а чувство грусти и тревоги за тебя.

Оглядываясь назад и вспоминая первую встречу с Колей, могу сказать, что Коля построил разговор со мной так, что я, впервые в жизни, почувствовал себя взрослым и, со смешанным чувством грусти и гордости, понял, что ответственность за себя я всю оставшуюся жизнь буду нести сам.

Предыстория этой встречи такова. Да, я учился в математическом классе, с удовольствием решал разные задачки, с азартом занимался программированием, но параллельно я занимался радиолюбительством, с приятелем по классу Вадиком Флегонтовым сконструировал и собрал радиостанцию для УКВ-связи, которую мы легализовали в радиокружке одного из московских домов пионеров (позывной был UA3KPT). Мы участвовали в соревнованиях, в 10-м классе я заработал 1-й спортивный разряд по УКВ-радиосвязи и мечтал о звании мастера спорта. Наша команда была известна в УКВ-тусовке. Мы экспериментировали с транзисторами и однажды установили связь с Хабаровском с помощью радиопередатчика, работающего на батарейке от карманного фонарика. (Для протокола замечу, что приёмник у нас всё-таки работал от сети). Моя мама была радиоинженером, среди знакомых нашей семьи было много знаменитых радистов. Я даже был знаком со знаменитым полярником Эрнестом Кренкелем (позывной UARAA). Себя я в будущем видел не учёным-математиком, а радиоинженером.

Ещё в 5–8 классах школа посылала меня на разные олимпиады по математике и физике — школьные, районные, городские. Я получал какие-то грамоты, но не считал это значимым достижением. В 8 классе я получил вторую премию на московской олимпиаде по физике и был несколько удивлён кучей книг, которые мне вручили на награждении, но это не возбудило во мне никаких мыслей о научной карьере.

В 10 классе у меня был некоторый конфликт в школе — я не пошёл на математическую олимпиаду в МГУ, так как по времени 1-й тур совпал с радиосоревнованиями, на которых я заработал 1-й разряд по связи на УКВ. А вот в 11 классе я пошёл на Московскую математическую олимпиаду и заработал третью премию. Это и привело меня ко встрече, которая, по-видимому, определила всю мою жизнь.

Вернусь к моему визиту к Коле Константинову. В начале разговора Коля рассказал мне, что, будучи в жюри Московской математической олимпиады 1962 года, он был впечатлён работой 11-классника, который пытался решить задачу о максимальной площади тени, которую может отбросить спичечный коробок, с помощью высшей математики и хотя и не получил полного решения, но сумел отгадать правильный ответ. И вдруг он, Константинов, случайно узнаёт, что этот 11-классник, некий Кушниренко, будучи активным радиолюбителем и перворазрядником по УКВ-радиосвязи, собирается стать радиоинженером. Поскольку он, Константинов, считал, что такое решение призёра лучшей в мире математической олимпиады для школьников было бы катастрофически неправильным, он немедленно попросил разыскать меня, чтобы при личной встрече объяснить мне, чего я могу себя лишить.

И Коля объяснил мне, сколь почётно звание призёра Московской математической олимпиады, сколь уникальны мои личные качества, которые позволили мне, любителю, обыграть многих профессионалов-олимпиадников, сколь прекрасны, хотя и трудны, занятия математикой. Сколь важен и полезен приход в математику людей с инженерным мышлением. К концу второго часа этой беседы мне стало ясно, какую ошибку я мог бы по неведению совершить, подавшись в радиоинженеры. Но беседа продолжалась после этого ещё два часа, посвящённые собственно математике. Я уехал от Константинова на последнем поезде метро, увозя с собой данные мне на время лекции по высшей алгебре Куроша и приглашение звонить и приезжать, если что.

Много лет спустя Андрей Леман, другой член того самого жюри Московской математической олимпиады 1962 года, которое присудило мне третью премию, рассказал мне некоторую закулисную часть истории. Моя олимпиадная работа была не очень сильной, мнения жюри разделились между почётной третьей премией и поощрительным призом первой степени. Константинов, которого действительно впечатлили мои попытки решить задачу не олимпиадными методами, а регулярными методами высшей математики, выступил за присуждение третьей премии, высказав точку зрения, что присуждение этой премии может подтолкнуть перспективного подростка к выбору математической карьеры. Так оно и случилось.

На протяжении всей своей жизни я много раз в самых разных ситуациях общался с Колей Константиновым. Будучи очарован первой встречей, ещё до поступления в МГУ несколько раз ездил к нему на дачу на платформу 43 километр Ярославского направления. Целый год преподавал вместе с ним и Мишей Гервером в математическом классе знаменитой 7-й московской школы. Готовил вместе с ним подробные статьи о его методах преподавания математики школьникам. Будучи сотрудником мехмата, несколько раз вместе с ним хлопотал о неотчислении разных способных, но неорганизованных студентов факультета. Несколько раз ездил навещать своего сына-школьника в летние биолого-математические школьные лагеря, которые Константинов много лет организовывал в Эстонии. Содействовал усилиям Коли в организации Независимого Московского университета. При всех этих встречах он оставался тем же удивительным, умным и добрым Колей Константиновым, с которым я познакомился в 1962 году, шестьдесят лет назад.

Анатолий Георгиевич Кушниренко, НИИСИ РАН,
выпускник мехмата МГУ
agk_@mail.ru

КОНСТАНТИНОВ
Городец, поездки на «копейке», «Море Лаптевых», две задачи и Турнир городов

Е. В. Хинко

Формально с Николаем Николаевичем Константиновым я познакомился весной 2005 года, перед очередным собеседованием в 9 класс 179 школы. Я приехал пораньше и ждал начала, а какой-то немолодой дяденька вышел из 312 кабинета и стал меня расспрашивать. О самом разном: про собеседования, какие задачи с прошлых разов показались мне интересными, про мои интересы и про что-то ещё, но остальные вопросы я уже не помню. Это и был Константинов.

Осознанное знакомство состоялось несколькими неделями позже в Городце, куда НикНик и Сергей Дориченко, который собственно и набирал мой класс, вывезли нас на три недели. Смена начиналась 11 июня, но Николай Николаевич и несколько моих будущих одноклассников («квартирьеров», как называл их Константинов) заехали на несколько дней раньше — 7 июня.

Как только мы приехали, Константинов провёл нам экскурсию по Городцу, после чего сказал, что надо растопить самовар, чтобы приготовить чай к обеду, и предложил нам, только что приехавшим, это сделать. Для меня, домашнего мальчика, имевшего к тому моменту нулевой опыт колки дров и растопки самовара, это было немного удивительно, но интересно: прям сразу с места в карьер и надо что-то делать руками. Дрова готовые, правда, уже были. Сейчас, глядя на участников Летних конференций Турнира городов, которые впервые видят самовар, я каждый год вспоминаю, как тогда смотрел на него и так же, как и они, думал, как эта штуковина работает. Надо сказать, что коллективный разум победил проблему, и кипяток к обеду был.

Смена была рабоче-математической. То есть если ты не был в данный момент в бригаде «кухменов» (повара) или «кухбоев» (мытьё посуды), то предполагалось, что ты занят другими работами: выравнивание поля, ремонт лестницы к реке, строительство плота, изготовление кроватей, шпатлёвка стен и многое другое. И, конечно, работы по обеспечению быта.

Кроме работы, раз в два дня проходили математические занятия. Уже не помню, что и как на них было, только обрывки, но одну задачу оттуда я запомнил очень хорошо.

Задача 1. На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток. На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки, соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки, обе свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается (рис. 1). Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток (рис. 2). Можно ли достигнуть этой цели, если в исходной позиции имеется всего одна фишка и она стоит в левой нижней отмеченной клетке?

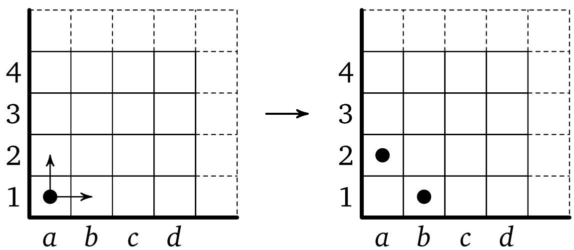


Рис. 1

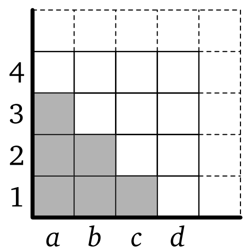


Рис. 2

Как я узнал уже сильно позже, это задача филдсовского лауреата Максима Концевича, которую он в своё время предложил на второй Турнир городов в 1981 году. Правда, это был пункт б). В оригинальной версии, которую давали на тургоре, был ещё пункт а), где фишек было уже 6 и они занимали все отмеченные клетки.

Я в тот момент был ещё совсем «зелёным» матшкольником, поэтому не думая начал строить пример, как впрочем и многие мои будущие одноклассники. После примерно десяти минут наших раздумий, Николай Николаевич дал нам другую версию задачи — попроще: нужно было выяснить, можно ли вывести фишку из фигуры, состоящей уже из 10 клеток, т. е. отсекающей первые четыре диагонали. Помню, что шестиклеточную версию за то занятие никто не решил, но решение для десятиклеточной задачи мы узнали (уже не помню, решил кто-то или нам рассказали).

Решение (десятиклеточный случай). Пусть исходная фишка, стоящая в $a1$, имеет вес 1. За ход она разбивается на две фишки веса $1/2$. И так далее, т. е. фишка на i-й диагонали имеет вес $1/2^{i-1}$. Подсчитаем общий вес доски, если бы в каждой клетке стояло по фишке. Нетрудно видеть, что он будет равен 4: сумма весов столбца a равна

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^i}+\ldots=2,$$

сумма весов столбца b равна 1, сумма весов столбца c равна $1/2$ и т. д. Подсчитав сумму по всем столбцам, получим 4. Теперь заметим, что вес доски вне десятиклеточной фигуры равен

$$4-1-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}<1.$$

То есть даже если предположить, что мы заполнили фишками все клетки вне десятиклеточной области, их общий вес будет меньше 1, значит, вывести фишку не удастся.

Решение (шестиклеточный случай). Рассуждая аналогично решению десятиклеточного случая, получаем, что вес клеток вне шестиклеточной фигуры равен

$$4-1-2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}>1,$$

т. е. противоречия не получается. Заметим теперь, что в столбце a и строке 1 может в любой момент времени находиться не более чем по одной фишке. Другими словами, если мы смогли вывести исходную фишку за пределы области, суммарный вес фишек в первом столбце и первой строке не превосходит $2\cdot 1/8=1/4$. Вес всей оставшейся области, если предположить, что мы заполним фишками всю бесконечную доску, будет равен $3/4$, т. е. в полученной задаче вес не превосходит $3/4$. Таким образом, снова получаем, что вес фишек вне области не может достигать $1/4+3/4=1$. Противоречие.

По вечерам мы собирались и пели песни под гитару. В основном пел Сергей Александрович, но иногда брал гитару и Константинов. Я запомнил в его исполнении только «Море Лаптевых», его фирменный номер. Особенно здорово было, когда солировал Сергей, «соло» состояло из одного слова «нет», но этот дуэт был великолепен.

Городец был в некотором смысле продолжением системы эстонских лагерей Конста, правда в несколько видоизменённом формате.

Я ездил туда на протяжении 15 лет каждый год, и это было всегда прекрасное время. Там я научился готовить (отдельное спасибо Сергею Дориченко), работать молотком, проводить (с моим учителем математики Семёном Григорьевичем Слободником) технический водопровод из Угры и многому другому.

Отдельным приключением были поездки с Константиновым на машине. Думаю, у всех, кто с ним ездил на его «копейке», остались незабываемые впечатления. Николай Николаевич получил права, когда ему было уже за 70. Как он сам говорил, до этого его опыт вождения ограничивался велосипедом. Почти любая поездка сопровождалась элементами экстрима, но Николай Николаевич относился ко всему совершенно спокойно. Например, один раз после того, как он уснул за рулём по пути из Городца в Москву и машина перевернулась (его во многом спасло то, что он был пристёгнут), он, не получивший каких-либо особых повреждений, добравшись до Москвы, сразу поехал в школу. Машина подождёт! А в другой раз, встретив нас с автобуса в Юхнове, он вёз нас 15 км до Городца и по дороге спросил, хотим ли мы душ. Мы знали, что в Городце душа раньше не было, но подвоха не раскусили и ответили, что «хотим». Когда мы свернули с трассы на просёлочную грунтовку, Константинов разогнался и на скорости порядка 60 км/ч въехал в огромную лужу. Машину шикарно окатило, это и был обещанный душ! «Копейку», правда, повело в луже, и мы чуть не врезались в дерево.

В одно из последующих лет, когда мы уже закончили школу, но ещё не начали учиться в вузе (это состояние называлось «полустуденты»), Константинов в Городце давал нам «на подумать» задачи про канторово множество, его несчётность и что в отрезке $[0;1]$ на нём реализуются все действительные расстояния от 0 до 1.

Определил он множество классическим образом: возьмём отрезок $[0;1]$, разделим на три равные части, удалим интервал $(1/3;2/3)$, в оставшемся множестве из двух отрезков снова удалим средние трети и т. д. Мы над задачей подумали, но сходу решить не получилось. Николай Николаевич предложил подумать, как это множество описывается в троичной системе счисления. Как я уже потом узнал, это классическая идея, но когда думаешь и осознаёшь впервые, выглядит очень здорово: ведь с ней первая часть задачи (про несчётность) решается в одно касание, по аналогии с доказательством несчётности последовательностей из 0 и 1.

Тогда же Николай Николаевич рассказывал нам про аксиому выбора и связанные с ней идеи и дал «на подумать» такую задачу.

Задача 2. Пусть множество A имеет мощность континуум. Разобьём его на два подмножества B и C: $A = B \bigsqcup C$. Доказать, что одно из них имеет мощность континуум (без использования континуум-гипотезы).

Решение. Как известно, континуум — это мощность отрезка $[0; 1]$. Отрезок равномощен квадрату, поэтому положим $A = [0; 1] \times [0; 1]$. Теперь пусть есть некоторое разбиение A на B и C. Рассмотрим всевозможные горизонтальные отрезки $[0; 1]$ в нашем квадрате. Их очевидно континуум. Если в каждом из них найдётся точка множества B, то B имеет мощность не менее чем континуум. Если же найдётся отрезок, состоящий только из точек множества C, значит, C имеет мощность не менее чем континуум.

Я очень хорошо запомнил эту задачу, потому что идея мне очень понравилась. Впоследствии я снова столкнулся с ней. Через полтора года, когда я учился на втором курсе мехмата, наш преподаватель по действительному анализу Александр Николаевич Бахвалов дал нам её в качестве домашнего задания на одном их первых семинаров.

Там же в Городце я впервые начал проверять работы Турнира городов. Николай Николаевич знал, что я довольно неплохо владею немецким языком, и в какой-то год привёз из Москвы папку с работами Тургора из Гамбурга и нескольких австрийских городов. В тот год не нашли человека, на достаточном уровне владеющего немецким, который мог бы проверить эти работы, и Константинов предложил мне. Тогда в Городце я проверил всего несколько задач, всё-таки я ж туда не для этого приехал, но сами работы посмотрел (интересно же, как там немецкие и австрийские школьники пишут), и потом, уже вернувшись в Москву, пришёл в 179 школу на очередную проверку и сел проверять. Так и втянулся. А через полгода меня позвали помогать в оргкомитете Тургора, и я с головой погрузился в это замечательное детище Николая Николаевича, которым занимаюсь до сих пор.

Евгений Викторович Хинко, председатель центрального оргкомитета Турнира городов, школа № 179 г. Москвы

`evgeny.v.khinko@turgor.ru`

Геометрия: классика и современность

Изгибания поверхностей и многогранников

И. Х. Сабитов

§ 1. Введение

В соответствии с происхождением своего названия *геометрия* (т. е. измерения на земле) изучает в первую очередь закономерности, связывающие такие численные характеристики различных объектов, как длина, площадь, объём, а также описание их взаиморасположения с использованием таких понятий, как угол, расстояние, кратчайший путь и т. д. И ещё в древности было замечено, что измерения и способы вычисления всех таких характеристик зависят от того, расположены ли изучаемые объекты на ровном плоском участке земли или на неровной местности (например, в горах) или, более общó, на плоскости или на какой-либо поверхности. В идеализированной форме такой поверхностью чаще всего была сфера как самая простая и широко распространённая форма поверхности, тем более, что небесная сфера открывалась взору людей каждую ночь, доставляя любознательным умам мучительные загадки и радости открытия.

Разницу между измерениями на равнинной и на гористой местности проще всего объяснить примером поведения птицы и какого-нибудь не умеющего летать животного (назовите сами!) для скорейшего попадания из точки A в точку B на земле: в гористой местности птица может просто полететь из точки A по прямой в точку B, а неназванному несчастному животному придётся двигаться по земле, спускаясь и поднимаясь в соответствии с рельефом местности, да ещё и угадать, какой путь будет самым коротким. Очевидно, этот путь и его длина будут зависеть от конкретного рельефа данной местности[1].

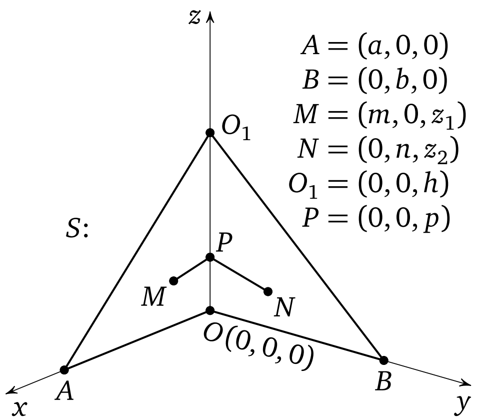
Мы видим, проблема в том, что при нахождении кратчайшего пути между точками на поверхности и вычисления его длины как расстояния между точками нужно, чтобы этот путь располагался *только на самой* поверхности. И если даже эти точки в пространстве одни и те же, но рассматриваются на разных поверхностях, то в зависимости от поверхностей кратчайший путь, а значит, и расстояния между точками могут быть разными. Более того, предположим, что кривая задана как пересечение двух поверхностей, например, окружность задана как пересечение некоторой сферы радиуса R и плоскости. Предположим, что жители плоскости просто видят окружность и не знают, что она получена пересечением со сферой. Тогда они будут измерять её длину своими методами, применяя законы планиметрии на плоскости. А если есть разумные существа на сфере, тоже не знающие, что окружность получена пересечением их мира с плоскостью, то они будут измерять длину этой окружности тоже своими методами, присущими геометрии на сфере, т. е. они должны будут применять все вспомогательные построения, оставаясь на сфере, а на сфере, например, не верна теорема Пифагора (однако, если они знают радиус своей сферы и поступают правильно, то длина этой окружности получится та же, что и на плоскости, но её дуги могут оказаться кратчайшими линиями между концами дуги, в то время как на плоскости кратчайшим путём между концами любой дуги является соответствующая хорда). Таким образом, каждой поверхности присущи свои собственные законы измерения длин расположенных на ней линий. Эти законы определяют то, что называется *метрикой* поверхности, а все свойства поверхности, которые можно получить на основании только знания и использования её метрики, составляют содержание *внутренней геометрии* поверхности. Очевидное, но важное свойство внутренней геометрии состоит в наблюдении, что она *не изменяется* при движении поверхности в пространстве как твёрдого тела, т. е. конгруэнтные поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию. В природе это проявляется, например, в том, что при движении Земли в пространстве (вращение вокруг своей оси и вокруг Солнца) расстояния на Земле не изменяются.

[1] Про общее понятие *расстояния* и связанное с ним понятие *метрического пространства* можно прочитать, например, в работах [3, 11, 13].

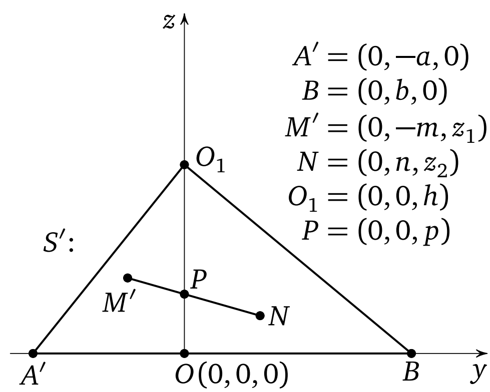
§ 2. Примеры

Первый пример. Пусть дана поверхность в виде двугранного угла S, составленного из двух треугольников AOO_1 и BOO_1 (далее T_1 и T_2) с вершинами $A(a,0,0)$, $O(0,0,0)$, $O_1(0,0,1)$ и $B(0,b,0)$ в указанной на рис. 1 *а* системе координат. Длина произвольной линии и расстояния между точками в пределах одного треугольника совпадают с обычными длинами и расстояниями на плоскости, и поэтому кратчайший путь между ними идёт по соединяющему их прямолинейному отрезку. Если же некоторая кривая имеет участки как в одном, так и в другом треугольнике, то её длина равна сумме длин этих участков. А кратчайший путь на S между точками $M(m,0,z_1) \in T_1$ и $N(0,n,z_2) \in T_2$ находится следующим образом: повернём один треугольник, скажем, T_1, вокруг оси Oz на 90° по часовой стрелке и получим новый двугранный угол S' (рис. 1 *б*) с гранями, каждая из которых в отдельности конгруэнтна исходной грани (грань T_2 и, в частности, точка N остаются на месте, а первая грань вращается по часовой стрелке, в частности, точка $M(m,0,z_1)$ переходит в точку $M'(0,-m,z_1)$, положение которой относительно вершин первой грани не изменяется). В новом положении точки M' и N находятся в пределах одного плоского треугольника $A'O_1B$ и соединяющая их линия кратчайшей длины идёт по прямолинейному отрезку $M'N$. Концевые точки отрезка известны, поэтому расстояние d между ними вычисляется по известной формуле

$$d(M',N) = \sqrt{(m+n)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



а)



б)

Рис. 1

Пусть теперь P — точка пересечения отрезка $M'N$ со стороной OO_1. Так как отрезок $M'N$ лежит на плоскости yOz, найти P — точку его пересечения с осью Oz — легко. Получим

$$P = (0, 0, p), \quad \text{где } p = \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}.$$

При вращении вокруг оси Oz точка P остаётся на месте. Вычисляем длины $|MP|$ и $|PN|$ на S и находим, что сумма $|MP| + |PN|$ равна вычисленному ранее значению $d(M', N)$. Теперь ясно, что длина пути в виде ломаной MPN на исходном угле S является кратчайшей среди длин всех путей на S, соединяющих точки M и N, так как любой *другой* путь перейдёт на S' в равный ему по длине путь, который заведомо длиннее, чем длина прямолинейного отрезка $M'N$. Значит, длина пути MPN является *расстоянием* между точками M и N в метрике поверхности S. В частности, кратчайший путь между A и B имеет длину $a + b$ (в этом случае $P = O$), что и равно расстоянию между ними. Тем самым мы убедились, что расстояния между соответствующими точками на двугранных углах S и S' одни и те же. Заметим также, что и угол между отрезками AO и OB, *измеренный на* S(т. е. как сумма $\measuredangle AOO_1 + \measuredangle O_1OB = \pi$), равен углу между соответствующими отрезками $A'O$ и OB, *измеренному на* S'(т. е. сумме $\measuredangle A'OO_1 + \measuredangle O_1OB = \pi$). Менее очевидно, но такое же равенство верно для сумм $\measuredangle MPO_1 + \measuredangle O_1PB$ и $\measuredangle M'PO_1 + \measuredangle O_1PB = \pi$. Это значит, что на изометричных поверхностях сохраняются и углы между соответствующими отрезками. Но и расстояния, и углы в окружающем пространстве могут быть другими. В нашем примере пространственное расстояние между A и B из S равно $\sqrt{a^2 + b^2}$, между их образами на S' оно равно $a + b$, а углы в пространстве между соответствующими отрезками равны $\pi/2$ и π.

Далее, если мы будем поворачивать треугольник AOO_1 на некоторый угол α (со знаком «—» или «+» в соответствии с поворотом по или против часовой стрелки), тогда двугранный угол перейдёт в двугранный угол S_α, в котором точке A будет соответствовать точка A_α с координатами $(a\cos\alpha, a\sin\alpha, 0)$, а точка M перейдёт в точку M_α с координатами $(m\cos\alpha, m\sin\alpha, z_1)$. Сумма $|M_\alpha P| + |PN|$ тогда будет равна

$$\sqrt{(m\cos\alpha)^2 + (m\sin\alpha)^2 + (z_1 - b)^2} + \sqrt{n^2 + (z_2 - b)^2} = \\ = \sqrt{m^2 + (z_1 - b)^2} + \sqrt{n^2 + (z_2 - b)^2} = d(M, N),$$

следовательно, деформация $S \mapsto S'$ сохраняет на поверхности S расстояния между всеми точками.

Этот пример заслуживает внимания с двух точек зрения. Во-первых, видим, что проделанное нами преобразование двугранного угла S не является его движением как твёрдого тела (так как один треугольник остаётся неподвижным), тем не менее его внутренняя геометрия при этом преобразовании не изменилась. Это же верно, если мы повернём треугольник T_1 или T_2 вокруг оси Oz на любой угол α. Тем самым мы получаем *непрерывное семейство неконгруэнтных* двугранных углов S_α, которые изменяют свою конфигурацию (т. е. внешнюю геометрию, так как изменяется, например, величина двугранного угла в пространстве), но все линии на них сохраняют свои длины и тем самым сохраняют внутреннюю геометрию поверхности. Такая деформация поверхности и называется её *изгибанием* (наряду с термином «изгибание» используют также слова *непрерывная изометрическая деформация*). При движении поверхности как твёрдого тела все кривые на ней тоже сохраняют свою длину. Такие деформации поверхности называются её *тривиальными изгибаниями*, а изгибания, не сводящиеся к движению поверхности как твёрдого тела, называются *нетривиальными*. Нетривиальные изгибания поверхности характеризуются тем, что при сохранении на ней длин кривых найдётся хотя бы одна хорда, у которой длина при её измерении по закону окружающего пространства изменяет свою величину.

Такую деформацию можно назвать деформацией поверхности с сохранением метрики. Имея в виду, что слово «изо» по-гречески значит «равное» или «одинаковое», получаемые при этом поверхности называют *изометричными*, т. е. имеющими одинаковую метрику.

Во-вторых, как показывает представление двугранного угла S' в виде одного треугольника $A'O_1B$, внутренняя геометрия двугранного угла локально (т. е. в некоторой малой окрестности каждой точки) оказалась обычной евклидовой геометрией. Про поверхности с такой метрикой говорят, что их метрика является *локально евклидовой* или что эти поверхности имеют *локально евклидову метрику* или ещё, что на этих поверхностях локально *реализована* евклидова метрика.

Замечание 1. Рассмотренное изгибание двугранного угла S можно связать и с изменением положения каждой грани. Действительно, такую деформацию можно описать так: в данной системе координат вершина $A(a,0,0)$ переходит в вершину $A_t(a\cos t, -a\sin t, 0)$, вершина $B(0,b,0)$ переходит в вершину $B_t(-b\sin t, b\cos t, 0)$, а вершины O и O_1 неподвижны. При $t=0$ имеем исходное положение двугранного угла S, при непрерывном изменении параметра t получаем непрерывное семейство изометричных поверхностей, в частности, при $t=\pi/4$ приходим к положению, когда величина двугранного угла равна π и вся поверхность имеет вид одного треугольника с основанием длины $a+b$, что и доказывает локальную евклидовость метрики.

Задача 1. Пусть треугольники $T_1 : OO_1A$ и $T_2 : OO_1B$ таковы, что после приведения их поворотом грани T_1 вокруг оси Oz к одной плоскости $x = 0$ получается невыпуклый четырёхугольник $OA'O_1B$. Каким будет кратчайший путь от точки $M \in T_1$ до точки $N \in T_2$ в зависимости от их расположения?

Задача 2. Изучите внутреннюю геометрию поверхности куба с ребром единичной длины. Для этого пронумеруйте следующие точки куба — все его вершины, центры граней и середины рёбер и найдите кратчайшие пути для каждой пары пронумерованных точек; вычислите их длины и сравните их с соответствующими расстояниями во внешней геометрии куба; определите и вычислите значения углов между диагоналями граней куба, сходящимися в одной вершине; установите вид окружностей радиуса 1 с центрами: а) в вершине куба; б) в середине ребра куба; в) в центре грани куба.

Второй пример. Пусть дан прямой круговой цилиндр конечной высоты h. Его строение можно описать следующим образом: в основании находится окружность некоторого радиуса R, и в каждой точке окружности перпендикулярно к плоскости основания проведён прямолинейный отрезок длины h. Эти отрезки называются (прямолинейными) *образующими* цилиндра. Пусть система координат $Oxyz$ выбрана так, чтобы окружность C_1 основания лежала на плоскости $z = 0$ и имела центр в точке $A_1(0, R)$. Тогда её уравнение имеет вид $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ и координаты (x, y) её точек можно представить следующим образом:

$$x = R\sin\varphi, \quad y = R - R\cos\varphi, \quad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

(угол φ в точке $O(0, 0)$ равен 0 и далее отсчитывается от радиуса A_1O к радиусу A_1M, $M \in C_1$, в обе стороны с соответствующим знаком). Если положение точек на окружности описывать не с помощью угла φ, а длиной s дуги окружности от начала координат до рассматриваемой точки, тогда с учётом равенства $s = R\varphi$ координаты точки $M_s(x, y) \in C_1$ можно записать так:

$$x = R\sin\frac{s}{R}, \quad y = R - R\cos\frac{s}{R} = 2R\sin^2\frac{s}{2R}, \quad -\pi R \leqslant s \leqslant \pi R.$$

Сначала предположим, что мы разрезали цилиндр вдоль некоторой его образующей. Тогда цилиндр можно аккуратно разворачивать, со-

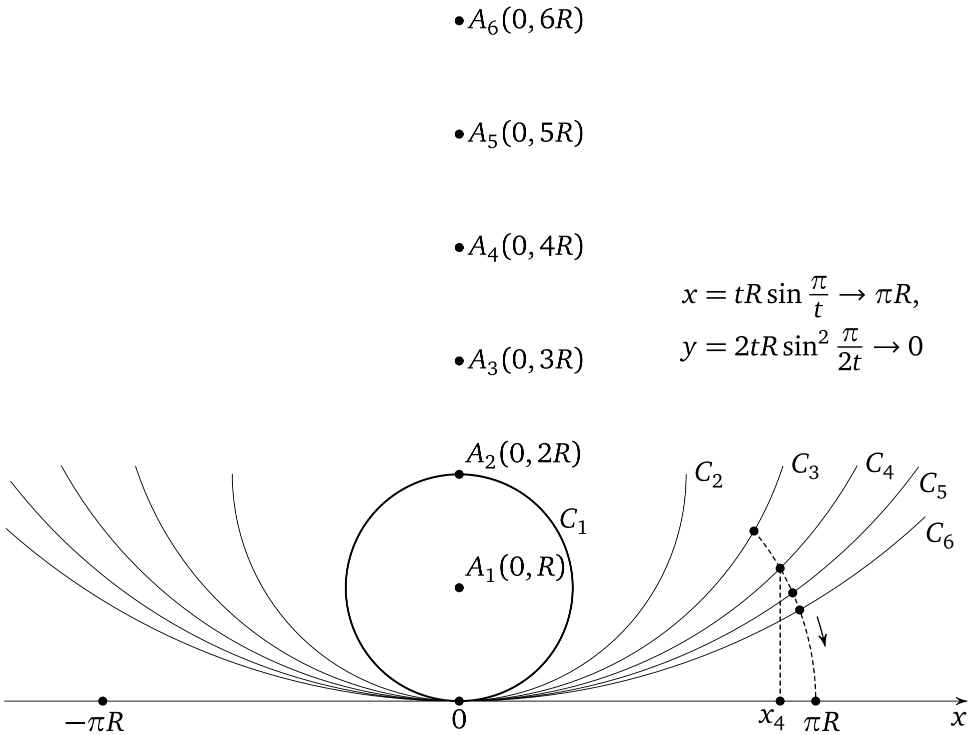


Рис. 2

храняя образующие параллельными их исходным положениям, и в конце концов положить его поверхность на плоскость $y = 0$, т. е. на плоскость Oxz (рис. 2). Для этого достаточно уметь разворачивать окружность C_1 с одной проколотой точкой на прямую. Это можно сделать многими способами. Опишем один из них. Пусть из окружности C_1 удалена точка $M(0, 2R)$. Тогда полуокружности окружности C_1 на полуплоскостях $x > 0$ и $x < 0$ можно постепенно положить с сохранением длин дуг на ось Ox с использованием семейства окружностей C_t, $t \in [1, \infty)$, возрастающего радиуса tR и с удаляющимся центром в точках $A_t(0, tR)$. При этом точка $O(0, 0)$ остаётся на месте, а точка M раздвоится в точки M'_t и M''_t, которые на окружности C_t будут ограничивать дугу длины $2\pi R$. Каждая точка M_s окружности C_1 при фиксированном s, $|s| \in (0, \pi R)$, опишет кривую Γ_{ts} с уравнениями

$$x = tR\sin\frac{s}{tR}, \quad y = 2tR\sin^2\frac{s}{2tR},$$

которая при $t \to \infty$ и $s = \pm\pi R$ асимптотически имеет вид $y \sim \gamma\sqrt{\pi R - |x|}$ с $\gamma = \pi\sqrt{6\pi R}$ (рис. 2). Таким образом, проколотая точка M опишет справа кривую с уравнением $x = tR\sin(\pi/t)$, $y = tR - tR\cos(\pi/t)$ и в пределе при $t \to \infty$ правая полуокружность «ляжет» на отрезок $[0, \pi R]$ на оси Ox, а левая полуокружность — на отрезок $[-\pi R, 0]$ оси Ox. При такой непрерывной деформации окружности C_1 с исключённой точкой M расположенная над C_1 цилиндрическая поверхность непрерывно перейдёт на евклидову плоскость Oxz в прямоугольный лист с основанием длины $2\pi R$ и высотой h. Рассмотренную деформацию можно описать формулами так: у разрезанного по образующей $(0, 2R, z)$ цилиндра каждая точка с координатами $x = R\sin(s/R)$, $y = 2R\sin^2(s/(2R))$, z, где $-\pi R < s < \pi R$, $0 \leqslant z \leqslant h$, непрерывно изменяет своё положение в пространстве, переходя в точки с координатами

$$x(t) = tR\sin\frac{s}{tR}, \quad y(t) = 2tR\sin^2\frac{s}{2tR}, \quad z(t) = z$$

и, в частности, оказываясь в пределе при $t \to \infty$ на плоскости xOz.

Процесс сворачивания листа бумаги в круговой цилиндр можно считать обратным к разворачиванию на плоскость цилиндра без одной образующей. Этот непрерывный процесс можно описать уравнениями

$$x = \frac{R}{\tau}\sin\frac{s\tau}{R}, \quad y = \frac{2R}{\tau}\sin^2\frac{s\tau}{2R}, \quad z = z,$$
$$0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad -\pi R < s < \pi R, \quad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

где параметр τ при значении $\tau = 0$ соответствует (в предельном смысле) начальному положению листа бумаги, точки которого имеют координаты (s, z), где $-\pi R < s < \pi R$, $0 \leqslant z \leqslant h$, а при значении $\tau = 1$ получается поверхность цилиндра без одной образующей.

Длины соответствующих дуг на окружностях $z = \mathrm{const}$ от t не зависят, так же как и длины соответствующих отрезков на образующих. Представляется довольно очевидным, и это мы формально докажем позже методами дифференциальной геометрии, что при этой деформации длины и остальных кривых на поверхностях не изменяются. Следовательно, мы описали *изгибание* поверхности цилиндра без одной образующей в плоский прямоугольник и, обратно, листа бумаги в круговой цилиндр без одной образующей.

Заметьте, что расстояние в пространстве между точками цилиндра O и $A_2(0, 2R)$ в исходном положении равно $2R$, а между их образами O и $M(\pm\pi R, 0)$ на листе в конце деформации оно равно $\pi R \neq 2R$, поэтому ни разворачивание, ни сворачивание не могут быть движениями, в частности, не могут быть вращениями.

Задача 3. Попробуйте найти уравнение траектории точки M в виде уравнения $f(x, y) = 0$.

Замечание 2. Во-первых, мы видим, что цилиндр оказался новым примером поверхности с локально евклидовой метрикой. Во-вторых, при изгибании цилиндра в прямоугольник мы предполагали, что из цилиндра удалена одна образующая. Без этого условия провести изгибание невозможно. Действительно, рассмотрим на цилиндре две близкие точки, расположенные по разные стороны от удаляемой образующей. Если образующая не удалена, то на цилиндре между ними расстояние маленькое и их можно соединить короткой линией, а на прямоугольнике соединить их линией той же длины не удаётся, так как соответствующие им точки расположены близко к противоположным сторонам прямоугольника. Вот тут появляется новая тема исследований: построение поверхностей с локально евклидовой метрикой, не сводимых изгибанием к областям на плоскости. Про такие поверхности можно прочитать в статье автора [8].

Замечание 3. На самом деле цилиндрическая поверхность допускает изгибания и без удаления какой-либо её образующей. Проведите такой опыт: склейте модель прямого кругового цилиндра из листа бумаги, положите её на стол и слегка нажмите ладонью сверху, держа ладонь параллельно образующим. Модель деформируется так, что образующие останутся прямыми, а окружность основания перестанет быть окружностью и превратится в некоторую замкнутую кривую в форме овала или, если достаточно сильно нажать, в кривую с «талией». Общее утверждение такое. Пусть окружность основания превращена на той же плоскости в некоторую замкнутую кривую, на которой каждая дуга имеет ту же длину, что и её прообраз на окружности[2)], а образующие в соответственных точках по-прежнему ортогональны плоскости кривой и сохраняют свою длину. Тогда новая цилиндрическая поверхность будет изометрична исходной поверхности *Ц*. При этом непрерывное изменение её формы в процессе надавливания будет изгибанием цилиндра *Ц*, в том числе и изгибанием всех новых положений поверхности. В частности, исходный цилиндр может быть приведён изгибанием в такое положение, когда он окажется дважды покрытым прямоугольником и тем самым не будет гладкой поверхностью (на боковых рёбрах прямоугольника направленная наружу нормаль к изометричным цилиндрам меняет своё направление скачком на 180°). Как видим, в задачах изгибаний важным является и вопрос о классах регулярности рассматриваемых поверхностей.

[2)] Образно про возможность такой деформации говорят, что окружность не сделана из эластичного материала, т. е., например, она не резиновая.

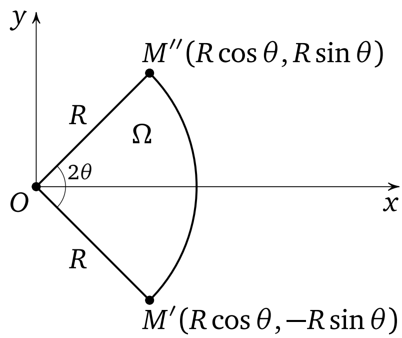


Рис. 3

Третий пример. Покажем, что боковая поверхность кругового конуса K_0 без одной образующей изгибается в некоторую область на плоскости.

Пусть у прямого кругового конуса K_0 с вершиной внизу в начале координат $O(0,0,0)$ образующие имеют длину R, высоту H, а длина окружности основания равна $2l$. Считаем, что угол между образующими конуса и осью конуса, идущей вдоль оси Oz, равен 45°. Тогда радиус ρ окружности основания равен H, причём $\rho = l/\pi$, $R = (l/\pi)\cdot\sqrt{2}$.

Рассмотрим теперь на плоскости $z = 0$ сектор Ω круга радиуса R с центром в начале координат $O(0,0)$, ограниченный двумя радиусами OM' и OM'', расположенными симметрично относительно оси Ox (рис. 3). Считаем, что длина дуги $M'M''$ равна $2l$, так что угол 2θ между радиусами OM' и OM'' определяется из соотношения $2\theta = 2l/R$. Так как $R = (l/\pi)\cdot\sqrt{2}$, получаем, что $\theta = \pi\sqrt{2}/2$, а координаты точек дуги $M'M''$ представимы в следующем виде:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad -\theta \leqslant \varphi \leqslant \theta.$$

Покажем, что если из конуса удалить одну образующую (включая вершину), то боковую поверхность конуса можно непрерывной деформацией перевести в сектор Ω с сохранением длин кривых, т. е. существует *изгибание* любой области на данном конусе в некоторую область на плоскости (тем самым мы покажем, что геометрия на конусе является локально евклидовой).

Проведём сферу радиуса R с центром в начале координат. Тогда основание конуса окажется на сфере окружностью C_0 радиуса ρ на высоте $z = H = \rho$, сам конус будет внутри сферы, его образующие будут радиусами, проведёнными из начала координат — вершины конуса — к точкам окружности C_0, а область Ω будет расположена тоже внутри сферы на плоскости её экватора $z = 0$ (рис. 4 a). Удалим из конуса обра-

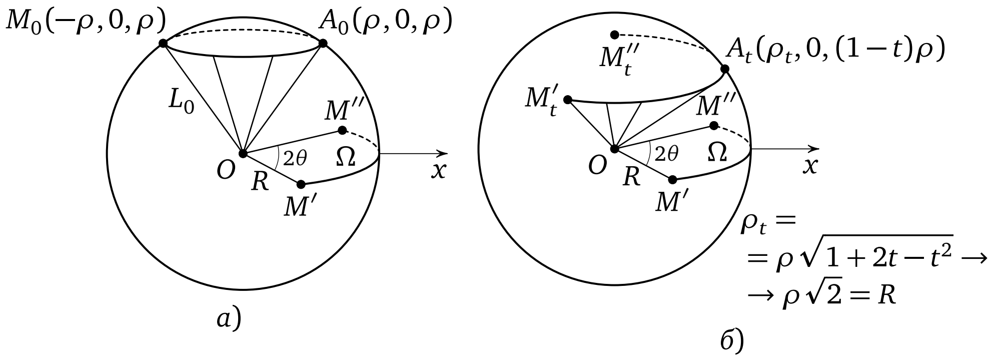


Рис. 4

зующую L_0, лежащую на полуплоскости $y=0$, $x<0$, тогда из окружности C_0 удалится точка $M_0(-\rho, 0, \rho)$. Будем изменять конус, расширяя его угол при вершине, и следя при этом за его частью, ограниченной образами удалённой образующей. Основанием этих конусов K_t будут окружности C_t, $0 \leqslant t < 1$, расположенные на горизонтальных плоскостях $z = z_t = \rho - t\rho$ и имеющие радиус

$$\rho_t = \sqrt{R^2 - (\rho - t\rho)^2} = \rho\sqrt{1+2t-t^2},$$

а точка M_0 раздвоится и перейдёт в две точки

$$M'_t\left(\rho_t \cos\frac{R\theta}{\rho_t},\ -\rho_t \sin\frac{R\theta}{\rho_t},\ (1-t)\rho\right)$$

и

$$M''_t\left(\rho_t \cos\frac{R\theta}{\rho_t},\ \rho_t \sin\frac{R\theta}{\rho_t},\ (1-t)\rho\right)$$

(эти значения координат получены из условия, что длина дуги $M'_tM''_t$ на окружности C_t остаётся равной $2l$).

При такой деформации образующие конуса K_0, идущие от его вершины к точкам окружности C_0, переходят в конусе K_t в образующие той же постоянной длины R, идущие от неподвижной вершины к соответствующим по длине дуги точкам окружности C_t (для ориентировки: точка $A_0(\rho, 0, \rho) \in C_0$ переходит в точку $A_t(\rho_t, 0, (1-t)\rho) \in C_t$, остающуюся на плоскости $y=0$, см. рис. 4 *б*). Для описания траекторий остальных точек конуса вспомним, как получаются координаты точек конической поверхности. По определению, коническая поверхность состоит из лучей, проведённых из одной точки, называемой *вершиной*, к точкам некоторой кривой, называемой *направляющей*. В нашем случае вершина конуса K_t — это начало координат $O(0,0,0)$, а направляющая — дуга окружности C_t постоянной длины $2l$. Точки дуги $M'_tM''_t$

окружности C_t имеют следующую параметризацию в функциях от s:

$$x(s,t)=\rho_t\cos\frac{s}{\rho_t},\quad y(s,t)=\rho_t\sin\frac{s}{\rho_t},\quad z(s,t)=(1-t)\rho,$$
$$-R\theta\leqslant s\leqslant R\theta,\quad \rho_t=\rho\sqrt{1+2t-t^2},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Точки отрезков образующих от вершины до точек дуги $M_t'M_t''$ на окружности C_t имеют следующие координаты (использованы координаты векторов постоянной длины R с началом в вершине конуса и с концами на дуге $M_t'M_t''$ окружности C_t):

$$x(s,t,r)=\frac{r}{R}x(s,t),\, y(s,t,r)=\frac{r}{R}y(s,t),\, z(s,t,r)=\frac{r}{R}z(s,t),\, 0<r\leqslant R. \tag{1}$$

Пусть B_h^0 — произвольная точка конуса K_0 на высоте $h<H$. Длина отрезка образующей, идущей до неё от вершины, равна $h\sqrt{2}$. Найдём на отрезках прямых (1) точки, отстоящие от вершины на то же расстояние $h\sqrt{2}$. Поскольку концевые точки отрезков образующих лежат на сфере радиуса R, достаточно взять $r=h\sqrt{2}$, т. е. все они лежат на горизонтальной плоскости

$$z=\frac{h\sqrt{2}}{R}(1-t)\rho.$$

Следовательно, все образующие конусов K_t при $t\to 1$ переходят на плоскость $z=0$ в отрезки

$$x(s,1,r)=r\cos\frac{s}{R},\quad y(s,1,r)=r\sin\frac{s}{R},\quad z=0,\quad 0\leqslant r\leqslant R,$$

т. е. боковая поверхность конуса без одной образующей непрерывным образом переходит в круговой сектор Ω, при этом горизонтальные сечения в виде круговых дуг тоже переходят в дуги окружностей той же длины. Позже мы покажем, что сохранится также и длина *любой* кривой.

Таким образом, мы продемонстрировали существование изгибания боковой поверхности конуса (без одной образующей) в область на плоскости. В частности, если мы выделили на конусе с самого начала произвольную область, то она при изгибании всей поверхности непрерывным образом перейдёт в некоторую плоскую область с сохранением длин всех кривых, значит, любая область конуса изгибается в плоскую область (в такой ситуации говорят, что одна поверхность *наложима* на другую).

Задача 4. Проведите аналогичные построения в случае, когда угол между осью конуса и его образующими имеет произвольное значение $\alpha<\pi$.

Задача 5. Исследуйте, в каком случае между боковыми поверхностями двух круговых конусов можно установить изометрическое соответствие.

Задача 6 (трудная). Пусть на прямом круговом цилиндре с осью Oz есть «прямоугольная заплатка» П в виде куска, ограниченного двумя образующими и двумя дугами окружностей, полученных сечениями цилиндра плоскостями, ортогональными образующим. Найдите на прямом круговом конусе с той же осью Oz область, изометричную П. (Представьте себе, что вы хотите заклеить прямоугольной неэластичной, но изгибаемой заплаткой дыру на поверхности в виде прямого кругового конуса. Вопрос — какую форму примет заплатка на конусе?)

§ 3. Общее описание метрики и изгибаний

Как измеряются длины кривых и расстояния между точками на плоскости в разных координатах?

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат Oxy с выбранной единицей длины. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две точки с указанными координатами (рис. 5). Тогда длина $s(M_1, M_2)$ отрезка между ними на основании теоремы Пифагора вычисляется по формуле
$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$
Эта величина одновременно является и расстоянием между точками M_1 и M_2, так как отрезок прямой является кратчайшей линией между его концевыми точками (а *расстоянием* между данными точками и называется *длина кратчайшей линии* между этими точками). Формула (2) верна для всех положений точек M_1 и M_2 независимо от того, расположены они близко или далеко друг от друга. Чтобы не указывать каждый раз расположение точек, закон вычисления расстояния

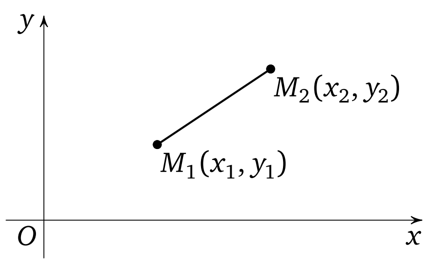


Рис. 5

между точками кратко записывают в следующем виде:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

или, более изящно,

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{3}$$

где Δs обозначает расстояние между точками, а Δx и Δy обозначают, соответственно, разности абсцисс и ординат рассматриваемых точек. Если одна из точек фиксирована, то Δx и Δy называют *приращениями* координат.

Используем формулу (3) для вычисления длины произвольной кривой на плоскости. Идея состоит в следующем: данную кривую L разобьём точками $M_i \in L$, $1 \leqslant i \leqslant n$, на маленькие дуги M_iM_{i+1} и, вычислив длины *хорд* M_iM_{i+1} по формуле (3), примем *сумму* их длин за приближённое значение длины всей кривой. Очевидно, чем мельче разбиение кривой L на дуги, тем меньше хорды этих дуг отличаются от самих дуг и тем ближе сумма их длин к интуитивно ожидаемой длине всей кривой. Пусть кривая L задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, а точки M_i имеют координаты $(x_i, y_i = f(x_i))$, где $x_1 = a$, $x_n = b$. Предположим, что функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$. Тогда

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) \approx f'(x_i)\Delta x_i$$

(вспомним, что производная $f'(x)$, как предел отношения $\Delta f/\Delta x$, близка к $\Delta f/\Delta x$ при малых Δx). Выражение $f'(x_i)\Delta x_i$ обозначается $df(x_i)$, и называется оно *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке $x = x_i$ (рис. 6). Основное его свойство состоит в том, что его значение при малых приращених аргумента Δx мало отличается от значения соответствующего приращения функции[3)]. Если переменная независимая, то её приращение одновременно принимается за её дифференциал, так что в нашем случае $\Delta x = dx$ и тогда для дифференциала имеем более симметричную запись $df = f'(x)\,dx$. Соответственно, неизвестная пока функция $s(x)$ имеет дифференциал $ds = s'(x)\,dx$. (Величины dx, dy и ds являются *главными членами* или *главными частями* бесконечно малых величин Δx, Δy и Δs при бесконечном приближении соседних точек к рассматриваемой точке, и все они называются *дифференциалами* соответствующих величин).

[3)] Например, для функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ имеем $y(1) = 1$ и $\Delta y(1) = (1+\Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$, так что $\Delta y(1)$ отличается от $dy(1) = 2\Delta x$ при малых Δx на величину, на порядки меньшую самóго значения $\Delta y(1)$, скажем, если $\Delta x \approx 10^{-2}$, то $\Delta y(1)$ отличается от dy на величину порядка 10^{-4}.

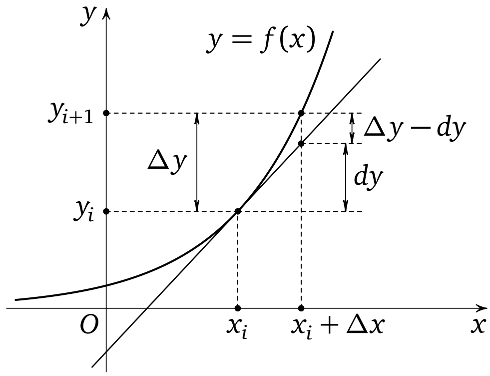


Рис. 6

Теперь формулу (3) можно представить в виде

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + f'^2(x_i)}\Delta x_i,$$

и сумма величин Δs_i по всем i будет не чем иным, как интегральной суммой для функции $\sqrt{1 + f'^2(x_i)}$, и после предельного перехода при бесконечном измельчении кривой L на малые дуги длина кривой представится как определённый интеграл

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{4}$$

По-другому, в дифференциалах эту формулу можно получить так: заменим в (3) равенства в приращениях равенствами в дифференциалах и получим соотношение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

определённый интеграл которого от a до b и даст ту же самую формулу (4).

Пусть теперь на плоскости введена *косоугольная* система координат, в которой угол между осями равен ω. Координаты точек в такой системе получаются как длины проекций точки на оси параллельно другой оси (рис. 7), а расстояние s между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

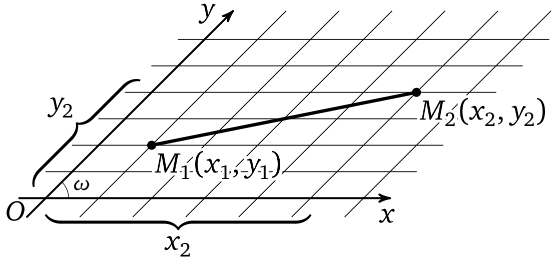


Рис. 7

вычисляется по формуле

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + 2\cos\omega(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2$$

или, по аналогии с (3),

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + 2\cos\omega\Delta x\Delta y + \Delta y^2 \tag{5}$$

(для получения этой формулы используется теорема косинусов).

В общем случае, на осях Ox и Oy могут быть введены разные единицы длины (или разные масштабы), тогда закон измерения расстояний принимает более общий вид

$$\Delta s^2 = a\Delta x^2 + 2b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2, \tag{6}$$

где a, b, c — некоторые постоянные с условиями

$$ac - b^2 > 0, \quad a > 0, \quad c > 0. \tag{7}$$

Формула (6) называется *представлением евклидовой метрики в аффинных координатах*. То, что эта метрика изометрична обычной евклидовой метрике (3) в стандартных декартовых координатах, доказывается следующим образом. Перепишем формулу (6), переобозначив аффинные координаты, чтобы отличать их от декартовых, как $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$:

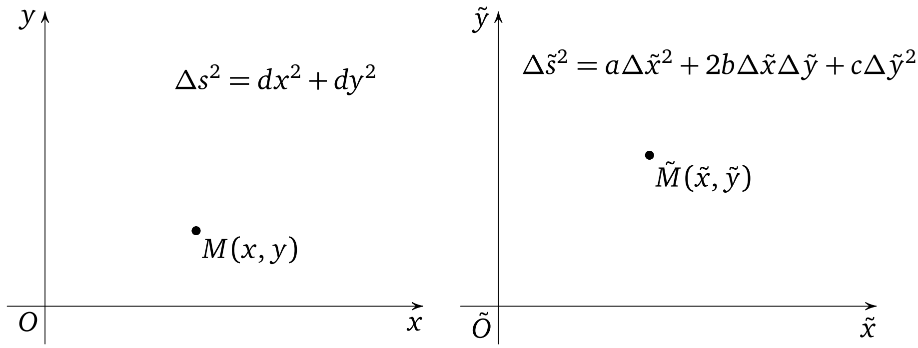
$$\Delta\tilde{s}^2 = a\Delta\tilde{x}^2 + 2b\Delta\tilde{x}\Delta\tilde{y} + c\Delta\tilde{y}^2. \tag{8}$$

Введём взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны соответствие между точками с декартовыми координатами (x, y) и с аффинными координатами $(\tilde{x}, \tilde{y})$ по закону

$$\begin{cases} x = \sqrt{a}\tilde{x} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}\tilde{y}, \\ y = \dfrac{\sqrt{ac-b^2}}{\sqrt{a}}\tilde{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{x}{\sqrt{a}} - \dfrac{b}{\sqrt{a}\sqrt{ac-b^2}}y, \\ \tilde{y} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{ac-b^2}}y. \end{cases} \tag{9}$$

Нетрудно подсчитать, что расстояние между двумя соответствующими точками, вычисленное в метриках (3) и (8), т. е. как в (6), но с пониманием, что буквы x, y обозначают уже аффинные координаты, получается одинаковым (рис. 8). Значит, отображение (9) является изометрией между плоскостью с евклидовой метрикой (3) и плоскостью, на которой расстояния измеряются по закону метрики (6).

Это наблюдение можно истолковать так: пусть на двух плоскостях введены обычные декартовы координаты с разными обозначениями (x, y) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и с разными законами измерения расстояний (3) и (8), см. рис. 8. Так вот, для соответствующих по формуле (9)



Связь: $x = \sqrt{a}\tilde{x} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}\tilde{y},\ c = \dfrac{\sqrt{ac - b^2}}{\sqrt{a}}\tilde{y}$

Расстояние: $\Delta s = |OM| = |\tilde{O}\tilde{M}| = \Delta\tilde{s}$

Рис. 8

пар точек эти законы дают одинаковые значения расстояний. Это и означает, что плоскости с этими законами измерения расстояний изометричны и изометрия между ними задаётся формулой (9). Как видим, на плоскости закон измерения расстояний между точками можно задать в двух видах — в виде (3) и в виде (6), в обоих случаях геометрия получится одинаковая — евклидова, а разница будет в том, что наглядные представления взаиморасположения геометрических объектов будут разными. Например, если две прямые перпендикулярны, то в первом случае они изобразятся прямыми, пересекающимися визуально под прямым углом, а во втором случае видимый на рисунке угол между ними не обязательно будет прямым: прямые $x = 0$ и $y = 0$ в метрике (3) будут ортогональными, но в случае метрики (6) или (8) соответствующие прямые визуально не будут ортогональными. Если считать, что оба закона измерения расстояний даны на одной и той же плоскости, тогда расстояние между любой парой точек можно измерять по двум разным законам, и на плоскости в принципе могут получиться две разные геометрии (для описания такой ситуации как раз и подходит термин Лобачевского «воображаемая геометрия»).

Задача 7. Возьмите конкретные числовые значения коэффициентов a, b, c, удовлетворяющие условиям (7), и нарисуйте несколько пар прямых на плоскости xOy и, соответственно, на плоскости $\tilde{x}\tilde{O}\tilde{y}$. В силу изометричности метрик углы в парах между соответствующими прямыми должны быть равными, но визуально они, вообще говоря, будут разными. Бывают ли случаи, когда углы будут равными?

Способы задания евклидовой и локально евклидовой метрики на плоскости можно расширить ещё больше. Например, положение точек на плоскости можно описать также *полярными координатами* r и φ. Координата r называется *полярным радиусом* и имеет значения $0 \leqslant r < \infty$. Геометрически значение r равно расстоянию от некоторой точки P, называемой *полюсом*, до рассматриваемой точки M. Координата φ называется *полярным углом*, и она равна величине в радианах угла между лучом PM и некоторым исходящим из полюса лучом, называемым *полярной осью* (рис. 9). Значение угла φ обычно считается положительным, и тогда он принимает значения от 0 до 2π, или же он берётся со знаком по обычному правилу выбора знака, и тогда он принимает значения в промежутке $(-\pi, \pi]$.

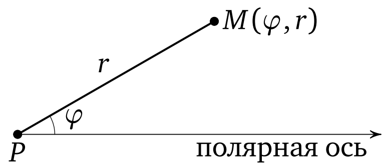


Рис. 9

Если на той же плоскости П введена система декартовых координат, у которой начало координат совпадает с полюсом полярных координат, а ось Ox идёт по полярной оси, такие две системы координат называются *согласованными*. В согласованных системах координат декартовые координаты (x, y) и полярные координаты (φ, r) одной и той же точки связаны следующими соотношениями (рис. 10):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Координаты на плоскости, отличные от декартовых, называются *криволинейными* координатами. Такое их название в случае полярных координат объясняется следующим построением. Введём отдельно вспомогательную плоскость Π_1 с *декартовыми* координатами, которые обозначим как (φ, r) (рис. 11). Рассмотрим на Π_1 вертикальную полуполосу Ω: $(0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant r < \infty)$. Отображение $\Phi\colon \Omega \to \Pi$ по фор-

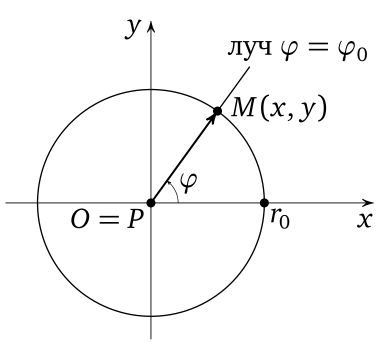


Рис. 10

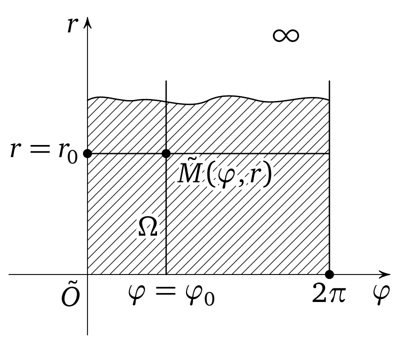


Рис. 11

муле
$$x = x(\varphi, r) = r\cos\varphi, \quad y = y(\varphi, r) = r\sin\varphi \tag{10}$$
переводит точку $\tilde{M}(\varphi, r) \in \Omega$ в точку $M(x, y) \in \Pi$, для которой (φ, r) будут полярными координатами (рис. 11). При этом координатная полупрямая $\varphi = \mathrm{const} = \varphi_0 < 2\pi$ из Ω переходит в основной плоскости Π в луч, исходящий из начала координат под углом φ_0 к положительной полуоси Ox, отложенным в положительном направлении. Этот луч называется *r-линией*, так как вдоль него изменяется только полярный радиус r. Координатный отрезок $r = \mathrm{const} = r_0 > 0$ из Ω отображается в Π в окружность радиуса r_0 с центром в начале координат. Эта окружность называется *φ-линией*. Мы видим, что в полярных координатах одна из координатных линий, а именно φ-линия, является кривой. Существуют ещё другие системы координат, в которых обе координатные линии оказываются *кривыми* линиями, что и объясняет их название.

Из разных видов евклидовой метрики на плоскости выберем самый простой:
$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{11}$$
соответствующий формуле (3). Мы помним, что $dx \approx \Delta x$, $dy \approx \Delta y$, а из (11) имеем
$$\begin{aligned} dx \approx \Delta x &= x(\varphi + \Delta\varphi, r + \Delta r) - x(\varphi, r) = \\ &= (r + \Delta r)\cos(\varphi + \Delta\varphi) - r\cos\varphi = \\ &= ((r + \Delta r) - r)\cos(\varphi + \Delta\varphi) + r(\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos\varphi) \approx \\ &\approx \Delta r\cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \Delta\varphi \end{aligned}$$
(учтено, что $\cos\Delta\varphi \approx 1$, $\sin(\Delta\varphi/2) \approx \Delta\varphi/2$ при $\Delta\varphi \to 0$, и отброшены все произведения двух бесконечно малых величин). Аналогично получим, что
$$dy \approx \Delta y \approx \Delta r\sin\varphi + r\cos\varphi \cdot \Delta\varphi$$
(мы просто вычислили дифференциалы функций $x(\varphi, r)$ и $y(\varphi, r)$ из (10)). Подставляя найденные значения dx и dy в (11), с заменой Δr и $\Delta\varphi$ соответственно на dr и $d\varphi$ получим
$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2. \tag{12}$$
Полученную формулу называют *представлением евклидовой метрики в полярных координатах*. Проверим на двух примерах, что она действительно позволяет вычислять длины кривых на евклидовой плоскости. Пусть на луче $L\colon x = t\cos\varphi_0$, $y = t\sin\varphi_0$, $t > 0$, даны две точки

$M_1(t_1\cos\varphi_0,\ t_1\sin\varphi_0)$ и $M_2(t_2\cos\varphi_0,\ t_2\sin\varphi_0)$. Расстояние между ними вычисляется по формуле (3) и равно $|t_2-t_1|$. С другой стороны, эти точки имеют полярные координаты (φ_0, t_1) и (φ_0, t_2). Так как вдоль луча угол φ постоянен, получаем, что $d\varphi=0$, поэтому по формуле (12) имеем $ds=dr$ и $s(M_1, M_2)=|r_2-r_1|=|t_2-t_1|$, т. е. получаем ту же самую длину, что и вычислили в обычной метрике.

В качестве второго примера вычислим в полярных координатах длину окружности радиуса R с центром в начале координат. Она, как известно, равна $2\pi R$. Обратимся к формуле (11). В ней $dr=0$, так как вдоль окружности r не изменяется, значит, $ds=R\,d\varphi$. А координата φ изменяется от 0 до 2π. Интегрируя, как это объяснялось при получении формулы (4), получаем

$$s=\int_0^{2\pi} R\,d\varphi = 2\pi R,$$

что и требовалось показать.

Вычисление длин кривых на поверхностях

Сначала рассмотрим, как задаются поверхности. В простейшем варианте они определяются как образы отображений плоских областей в пространство. Пусть D — некоторая область на плоскости с декартовыми координатами (u, v), и $\Phi: D\to R^3$ — некоторое отображение этой области в пространство, в котором введена декартова координатная система $Oxyz$. Тогда отображение Φ задаётся тремя функциями

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D. \tag{13}$$

Наглядно это иллюстрируется так: точка $M(u,v)\in D$ отображением Φ переводится в точку $P\in R^3$ с координатами $x=x(u,v)$, $y-y(u,v)$, $z=z(u,v)$; точка M «бегает» по области D, и при этом её образы P располагаются в пространстве в точках с координатами, определяемыми формулой (13), см. рис. 12, и их совокупность и образует то, что мы называем поверхностью. Если мы обозначим её буквой S, то можно написать, что $S=\Phi(D)$. Для каждой точки $P\in S$ построим вектор

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}(u,v)=\{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\},$$

тогда можем сказать, что концевые точки этих векторов «пробегают» поверхность S. Вектор-функция $\mathbf{r}(u,v)$ называется *радиус-вектором* поверхности, а значения величин (u,v) называются *внутренними координатами* точек поверхности (соответственно, (x,y,z) называются

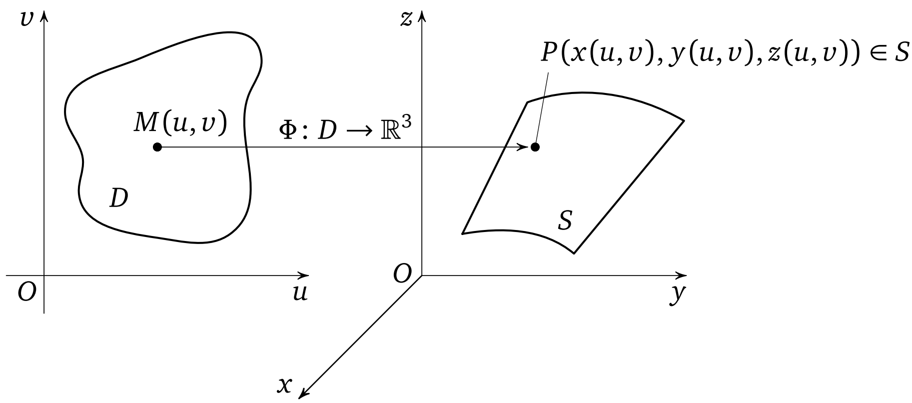


Рис. 12

пространственными координатами точек поверхности). Дополнительно предположим, что функции в отображении (13) непрерывны и, более того, имеют непрерывные производные по переменным u и v. Тогда их приращения

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u,v),\\ \Delta y &= y(u+\Delta u, v+\Delta v) - y(u,v),\\ \Delta z &= z(u+\Delta u, v+\Delta v) - z(u,v)\end{aligned}$$

при малых Δu и Δv имеют линейные части вида $A\Delta u + B\Delta v$, где коэффициенты A и B выражаются соответственно производными по u и v от функций $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$. Эти линейные части называются дифференциалами соответствующих функций и обозначаются dx, dy, dz. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Delta x \approx dx &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\,du + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\,dv,\\ \Delta y \approx dy &= \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\,du + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,dv,\\ \Delta z \approx dz &= \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\,du + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\,dv.\end{aligned} \tag{14}$$

Эти формулы помогут нам найти правила вычисления длин кривых на поверхностях. Начнём с вычисления в пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) расстояния $s(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Аналогично случаю плоскости, в пространстве тоже есть формула для расстояния, полученная двукратным применением теоремы Пифагора:

$$s^2(M_1, M_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

которую можно переписать в виде

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Заменяя по (14) приращения функций их дифференциалами, получим формулу для вычисления элемента длины кривых на поверхности:

$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{r}_u'^2 = \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_u' = x_u'^2(u,v) + y_u'^2(u,v) + z_u'^2(u,v),\\ F(u,v) &= \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v' = x_u'(u,v)x_v'(u,v) + y_u'(u,v)y_v'(u,v) + z_u'(u,v)z_v'(u,v),\\ G(u,v) &= \mathbf{r}_v'^2 = \mathbf{r}_v' \cdot \mathbf{r}_v' = x_v'^2(u,v) + y_v'^2(u,v) + z_v'^2(u,v). \end{aligned} \tag{16}$$

Формула (15) называется *первой основной квадратичной* или *метрической формой* поверхности, и она позволяет вычислять длины расположенных на ней кривых. Действительно, кривую на поверхности обычно задают следующим образом: сначала в области D изменения внутренних координат (u,v) задаётся некоторая кривая γ уравнением, связывающим переменные u и v, например, $u = u(t)$, $v = v(t)$. Затем отображением $\Phi\colon D \to R^3$ эта кривая переносится в R^3 и на поверхности S получается кривая Γ с уравнением

$$\begin{aligned} x &= x(t) = x(u(t), v(t)),\\ y &= y(t) = y(u(t), v(t)),\\ z &= z(t) = z(u(t), v(t)). \end{aligned}$$

Если теперь вычислять длину кривой Γ по формуле $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, то получится, что

$$\begin{aligned} ds^2 = \left[E(u,v)u'^2(t) + 2F(u,v)u'(t)v'(t) + G(u,v)v'^2(t)\right] dt^2 = \\ = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2, \end{aligned}$$

т. е. каждой поверхности соответствует на плоскости внутренних координат (u,v) *свой* закон измерения длин. Теорема, установленная ещё в XVIII веке Эйлером, гласит, что *для того, чтобы две поверхности с общей областью внутренних координат были изометричны, необходимо и достаточно, чтобы их первые основные квадратичные формы в этих координатах совпадали.*

Отсюда имеем признак изгибаемости поверхности: *для того, чтобы данная поверхность S с радиус-вектором $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, была изгибаемой, необходимо и достаточно, чтобы её можно было включить в семейство поверхностей S_t с радиус-векторами $\mathbf{r}(u,v,t)$, $(u,v) \in D$,* *непрерывно зависящими от параметра t в некотором интервале его изменений, и с одной и той же независимой от t первой основной квадратичной формой* (15).

На самом деле проверка изгибаемости — операция не очень простая, так как предъявить конкретное семейство изгибаний S_t удаётся только в редких случаях. Сделаем это для рассмотренных выше примеров цилиндрических и конических поверхностей.

Изгибание прямого кругового цилиндра без одной образующей

Пусть цилиндр расположен как это описано в пункте *Второй пример*. Тогда поверхности S_τ с координатами точек

$$x = \frac{R}{\tau}\sin\frac{u\tau}{R}, \quad y = \frac{2R}{\tau}\sin^2\frac{u\tau}{2R}, \quad z = v,$$
$$0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad -\pi R < u < \pi R, \quad 0 \leqslant v \leqslant h$$

имеют при всех τ первую основную квадратичную форму с коэффициентами $E(u,v) = 1$, $F(u,v) = 0$, $G(u,v) = 1$, т. е. у них у всех одна и та же евклидова метрика $ds^2 = du^2 + dv^2$. При $\tau = 1$ поверхность S_1 имеет уравнение

$$x = x(u,v) = R\sin\frac{u}{R}, \quad y = y(u,v) = 2R\sin^2\frac{u}{2R}, \quad z = z(u,v) = v,$$
$$(u,v) \in D = -\pi R \leqslant u \leqslant \pi R, \quad 0 \leqslant v \leqslant h,$$

так что S_1 совпадает с рассматриваемым прямым круговым цилиндром, а при $\tau \to 0$ предельная поверхность S_0 представляет собой прямоугольник $D = -\pi R \leqslant x \leqslant \pi R$, $0 \leqslant z = v \leqslant h$ в плоскости (x,z), на который изгибанием наложился цилиндр S_1 без одной образующей.

Рассмотрим теперь *третий пример*. В нём деформация прямого кругового конуса описывалась поверхностями с координатами точек (см. формулу (2))

$$\begin{aligned} x = x(\varphi, r, t) &= \frac{r}{R}\rho_t\cos\frac{R\varphi}{\rho_t}, \\ y = y(\varphi, r, t) &= \frac{r}{R}\rho_t\sin\frac{R\varphi}{\rho_t}, \\ z(\varphi, r, t) &= \frac{r\rho}{R}(1-t), \end{aligned} \tag{17}$$
$$0 < r \leqslant R, \quad -\theta \leqslant \varphi \leqslant \theta, \quad \rho_t = \rho\sqrt{1+2t-t^2}.$$

Если мы вычислим коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности, то при всех $t \in [0,1]$ получим

$$E = x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2 = 1, \quad F = 0, \quad G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = r^2,$$

т. е. $ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2$, а это есть в точности евклидова метрика (12) области Ω в полярных координатах. Значит, семейство поверхностей (17) представляет собой наложение на евклидову область Ω конуса K_0 без одной образующей.

§ 4. Некоторые сведения об изгибаниях поверхностей

Первый локальный результат об изгибаниях поверхностей, как сказано выше, был установлен ещё Л. Эйлером. Он же отметил, что фактическая проверка изгибаемости/неизгибаемости данной поверхности «в целом» (т. е. не в малых окрестностях точек) является чрезвычайно трудной задачей, и предположил, что замкнутая поверхность без края является неизгибаемой. Но это его предположение требует уточнений, так как свойство изгибаемости данной поверхности существенно зависит и от класса регулярности самой поверхности, и от того, в каком классе деформаций должны происходить изгибания. В классической постановке предполагается, что поверхность и её изгибания должны быть по крайней мере класса гладкости C^2 (т. е. радиус-вектор поверхности должен иметь непрерывные вторые производные). В такой постановке проблема, известная в литературе под названием *гипотеза Эйлера о неизгибаемочти компактной поверхности*, до сих пор остаётся не доказанной (но и не опровергнутой каким-нибудь контрпримером). Мы думаем, что гипотеза Эйлера верна в классе аналитических поверхностей[4)], и есть основания предполагать, что она неверна в классе бесконечно дифференцируемых поверхностей.

Но есть классы поверхностей, для которых эта гипотеза доказана. К ним относятся выпуклые поверхности. Прежде всего в конце XIX века была доказана неизгибаемость сферы, затем постепенно доказательство распространялось на более широкие классы выпуклых поверхностей и, наконец, в 1949 г. харьковский математик А. В. Погорелов доказал это свойство выпуклых поверхностей в самом широком классе без всяких дополнительных условий регулярности: любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема в классе выпуклых поверхностей, более того, любые две выпуклые изометричные поверхности конгруэнтны (т. е. априори не требуется даже предположение, что одна из них получена из другой путём изгибания). В применении

[4)] То есть заданных аналитическими функциями — это некоторый класс функций, например, все элементарные функции аналитические в области их существования, исключая их граничные точки, если они есть.

к многогранникам это означает, что любые два выпуклых многогранника, составленных из одинакового набора граней с одинаковым законом их взаимного соединения по рёбрам, будут конгруэнтны (доступное школьникам изложение доказательства неизгибаемости сферы и вообще более «продвинутое» и более подробное изложение обсуждаемых здесь вопросов можно найти в работе [12]).

Однако для многогранников гипотеза Эйлера оказалась неверной. Хотя первый общий результат, принадлежащий Лежандру (1794) и Коши (1813), о неизгибаемости выпуклых многогранников как будто и подтверждал предположение Эйлера, но в 1977 г., через более чем полтора века после Лежандра — Коши американский математик Р. Коннелли построил пример невыпуклого изгибаемого многогранника. Подробнее о теореме Лежандра — Коши см. в работах [7] и [4], а об изгибаемых многогранниках см. работы [1, 5, 6, 9, 10]. Более того, оказалось, что и выпуклые многогранники можно изгибать, если разрешать изменять их комбинаторное строение, т. е. разрешать разбивать их грани на меньшие треугольники и сгибать грани по проведённым линиям их разбиения, получая тем самым некоторые невыпуклые многогранники, изометричные исходному выпуклому многограннику, см. об этом работу [2]. Поскольку мы уже знаем, что область плоскости можно изометрически представить в виде части цилиндра или конуса, появилась задача о возможности построения кусочно-гладкой поверхности, которая была бы изометрична выпуклому многограннику (например, кубу или тетраэдру) и состояла бы из кусков цилиндрических и конических поверхностей. Эта задача тоже была решена в общем виде, с указанием алгоритма построения изгибаемых моделей в случаях правильных многогранников, см. [14].

Одним из важных достижений в теории изгибаемых многогранников было доказательство так называемой *гипотезы кузнечных мехов*, утверждающей постоянство объёма любого изгибаемого многогранника в ходе его изгибания. В свою очередь, доказательство этой гипотезы стало возможным благодаря открытию существования полиномиального уравнения, позволяющего находить объём многогранника только на основе знания его комбинаторного строения и длин его рёбер, что можно назвать обобщением формулы Герона (выражающей площадь треугольника через длины его сторон) на многогранники, подробности см. в [9] и [10]. Это полиномиальное уравнение для объёма многогранника замечательно тем, что его можно выписать, зная только натуральную развёртку будущего многогранника, т. е. схему соединения треугольных граней и длины всех рёбер, и поэтому мы можем найти все *возможные* значения объёма многогранника ещё до его построения в пространстве. Параллельно с этим, во многих случаях мы можем заранее проверить, будет ли построенный многогранник изгибаемым или нет.

Первые результаты об изгибаниях конкретных классов поверхностей появились в середине XIX века. В России умением находить явные изгибания различных классов поверхностей прославился К. М. Петерсон (1828–1883), о котором другой знаток теории изгибаний Б. К. Млодзеевский (1858–1923) писал, что Петерсон, по-видимому, обладал неизвестными нам общими методами для решения задачи об изгибании поверхностей. Для примера приведём найденные Петерсоном уравнения семейства поверхностей с координатами точек

$$x = r\cos\varphi\cos u, \quad y = r\sin\varphi\cos u,$$
$$z = \int\sqrt{a^2(1-t^2)\sin^2 u + c^2\cos^2 u}\,du,$$

где

$$r = \sqrt{a^2t^2 - (a^2-b^2)\sin^2 v},$$
$$\varphi = \int\frac{a\sqrt{t^2(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v) - (a^2-b^2)\sin^2 v}}{a^2t^2-(a^2-b^2)\sin^2 v}\,dv,$$

представляющих собой изгибание эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(конечно, рассматриваются эллипсоиды с разрезом, так как эллипсоиды в целом как выпуклые поверхности являются неизгибаемыми, а разрез может быть, например, вдоль линии $y = 0$ на участке $x < 0$).

Задача 8. Тем, кто знаком с операциями дифференцирования и интегрирования, предлагаем убедиться, что коэффициенты E, F, G метрических форм поверхностей указанного Петерсоном семейства действительно не зависят от параметра t, но уравнения самих поверхностей в элементарных функциях не выражаются (кроме исходного эллипсоида, получаемого при значении $t = 1$). В случае сферы, когда $a = b = c$, поверхности семейства будут поверхностями вращения вокруг оси Ox.

Из общих результатов упомянем, что локально, т. е. в достаточно малой окрестности почти каждой своей точки, все поверхности являются изгибаемыми. Существование точек, никакая малая окрестность которых не является изгибаемой, доказано Н. В. Ефимовым в 1940 г.

Напомним, что поверхности с общей метрической формой называются *изометричными*. Таким образом, все поверхности, составляющие семейство изгибаний данной изгибаемой поверхности, являются изометричными между собой. Вместе с тем, существуют поверхности, имеющие одинаковую первую квадратичную форму, но не связанные *непрерывным* семейством изометричных поверхностей (т. е. не наложимые друг на друга). Тогда про них говорят, что они связаны *дискретной изометрией*[5)]. Так вот, в классе дискретно изометричных поверхностей гипотеза Эйлера неверна: существует бесконечная последовательность C^∞-гладких (т. е. бесконечное число раз дифференцируемых) замкнутых поверхностей, которые дискретно изометричны между собой и в пределе стремятся к некоторой изометричной им всем C^∞-гладкой поверхности S. Однако эти поверхности не составляют вместе с S непрерывное семейство, так что они не являются контрпримером к классической гипотезе Эйлера.

§ 5. Заключение

О приложениях свойств изгибаемости/неизгибаемости поверхностей и многогранников можно прочитать, например, в [1, 2, 12]. Мы же хотим обратить внимание на следующее. Поверхности являются абстракцией, порождённой человеческим разумом. В природе их нет — как бы ни были тонки плёнка мыльного пузыря, сплетённая пауком паутина или листы графена, они имеют ненулевую толщину. Все поверхности, которые созданы природой или сделаны человеком, являются только приближением к идеальной поверхности. Но такие идеальные поверхности существуют не в виде материализованных объектов, а как подмножества точек пространства, объединённых некоторым общим свойством, например, сфера есть множество точек пространства, равноудалённых от одной точки. Предполагаемое гипотезой Эйлера свойство неизгибаемости замкнутых поверхностей позволяет охарак-

5) Для случая многогранников пример дискретной изометрии получается очень просто: удалим у куба (как поверхности) верхнюю грань и закроем полученное отверстие «крышкой», состоящей из боковых граней четырёхугольной пирамиды. Получится некоторый многогранник P, который не изгибается, поскольку он выпуклый. Проделаем такую же операцию, но расположим крышку вершиной вниз. Тогда получим новый многогранник P', уже невыпуклый, составленный из тех же граней с тем же законом их взаимного соединения, поэтому изометричный многограннику P, но ему заведомо неконгруэнтный. Значит, эти два многогранника изометричны дискретно.

теризовать их как *высокоорганизованные множества*, стремящиеся сохранить свою форму (что таинственным образом уподобляет их живым формам материи). Обратим внимание, что в ходе эволюции живых организмов природа создала такие объекты, как, например, птичьи яйца, в форме выпуклых оболочек, которые как поверхности являются в математическом смысле неизгибаемыми, а в физическом смысле защищают яйца от разрушения (природа как будто «знает» неизгибаемость или устойчивость выпуклых поверхностей!). Это значит, что для описания изменения формы поверхностей с сохранением их метрики в уравнение их деформации надо добавить эффект действия какой-то силы или что в объединении точек в множестве, называемом замкнутой поверхностью, действует какой-то закон сохранения организации точек, требующий приложения энергии для его преодоления. Этот подход, возможно, приведёт к открытию новых законов связи между бесформенным пространством (хаосом) и его организованными (в каком-то смысле упорядоченными) подмножествами.

Список литературы

[1] *Александров В. А.* Изгибаемые многогранные поверхности // Соросовский образовательный журнал. 1997. № 5. С. 112–117.

[2] *Александров В. А.* Как смять пакет от молока, чтобы в него вошло больше // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 2. С. 121–127.

[3] *Васильев Н. Б.* Метрические пространства // Квант. 1970. № 10. С. 11–21, 62; 1990. № 1. С. 16–23.

[4] *Долбилин Н. П.* Жемчужины теории многогранников. М.: МЦНМО, 2012.

[5] *Залгаллер М. А.* Непрерывно изгибаемый многогранник // Квант. 1978. № 9. С. 13–19.

[6] *Медяник А. И.* Модель многогранника Коннелли // Квант. 1979. № 7. С. 39.

[7] *Милка А. Д.* Что такое геометрия «в целом». М.: Знание, 1986.

[8] *Сабитов И.* Так ли прост евклидов мир? // Квант. 1984. № 1. С. 14–20.

[9] *Сабитов И. Х.* Вторая молодость формулы Герона, или почему кузнечные меха нельзя сделать в форме многогранников // Природа. 2000. № 4. С. 19–26.

[10] *Сабитов И. Х.* Объёмы многогранников. М.: МЦНМО, 2009.

[11] *Скворцов В. А.* Примеры метрических пространств. М.: МЦНМО, 2002.

[12] *Фоменко В. Т.* Изгибание поверхностей // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 5. С. 122–127.

[13] *Шрейдер Ю. А.* Что такое расстояние? М.: Физматгиз, 1963.

[14] *Штогрин М. И.* Специальные изометрические преобразования поверхностей платоновых тел // УМН. 2005. Т. 60, вып. 4(364). С. 221–222.

Иджад Хакович Сабитов, мехмат МГУ

isabitov@mail.ru

О фигурах с одинаковыми поперечниками

А. С. Кочуров, В. М. Тихомиров

§ 1. Введение

Через $\mathscr{X}^2$ обозначим евклидову плоскость. Точки плоскости будем обозначать большими латинскими буквами. Расстояние между точками X и Y из $\mathscr{X}^2$ обозначим $d(X, Y)$.

Любую совокупность точек из $\mathscr{X}^2$ будем называть *фигурой* (или множеством). Примерами фигур могут служить точки, прямые, отрезки, окружности, круги, треугольники, квадраты, их пересечения и объединения и т. п.

Один из наших замечательных соотечественников — Павел Самуилович Урысон (1898–1924) — ввёл некоторые понятия, которые назвал термином *поперечники*. Их стали именовать *поперечники по Урысону*, и эти величины связаны с размерностью фигур. Размерность изучается в топологии, которая изучает непрерывные отображения. Потом были введены другие величины, также получившие названия поперечников — поперечники по Александрову, по Колмогорову и др. Каждый из поперечников, помимо прочего, характеризуется *порядком*, т. е. числом, задающим размерность приближающих множеств, — точек, прямых или плоскостей и т. д., то есть нулём, единицей, двойкой… Отличными от нуля у плоских фигур могут быть лишь поперечники порядка 0 и 1.

§ 2. Поперечники по Колмогорову

Проще всего определить поперечник по Колмогорову. Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) — один из крупнейших учёных прошлого столетия — ввёл поперечники, характеризующие, в случае плоских фигур, аппроксимативные возможности их приближения точками и прямыми.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 20, 2022 (146–154)

Пусть $\mathscr{F}$ — плоская фигура и Z — точка плоскости. Наименьший радиус круга с центром в Z, содержащего $\mathscr{F}$, обозначим $d(\mathscr{F}, Z, \mathscr{X}^2)$. Наименьший радиус круга, покрывающего $\mathscr{F}$, называется *нульмерным* (или *порядка* 0) *поперечником по Колмогорову фигуры* $\mathscr{F}$ и обозначается $d_0(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$. Он характеризует аппроксимативные возможности точек по отношению к данной фигуре.

Легко понять, что нульмерный поперечник по Колмогорову треугольника равен: для остроугольного треугольника радиусу описанного круга, для прямоугольного тоже радиусу описанного круга, но можно сказать точнее, что он равен половине длины максимальной стороны (т. е. половине длины гипотенузы), а для тупоугольного треугольника нульмерный поперечник равен половине длины максимальной стороны.

Одномерный (или *порядка* 1) *поперечник* фигуры $\mathscr{F}$ характеризует аппроксимативные возможности прямых по отношению к данной фигуре. Обозначим для прямой L через $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ половину ширины минимальной полосы с параллельными L сторонами, содержащей фигуру $\mathscr{F}$. Половину ширины наименьшей полосы, содержащей $\mathscr{F}$, называют одномерным поперечником по Колмогорову данной фигуры. Его обозначают $d_1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$.

Упражнение 1. Найдите поперечники прямоугольника с длинами сторон a и b и одномерный поперечник треугольника с длинами сторон a, b и c.

Как видно, понятие колмогоровского поперечника, введённое А. Н. Колмогоровым в 1936 году, относится к геометрии, оно является обобщением таких известных геометрических понятий как радиус описанного круга, ширина полосы и других. С понятиями, подобным поперечникам, каждый из нас сталкивается постоянно. Например, когда мы говорим о размере телевизора, мы указываем величину диагонали прямоугольного экрана, а это не что иное, как удвоенный нульмерный поперечник. Меньшая сторона экрана — это удвоенный одномерный поперечник экрана. А в прямоугольном бассейне половина его глубины — это двумерный поперечник бассейна.

Вместе с тем в понятия поперечников включён некий общезначимый смысл — термин «поперечник» фигурирует при обсуждениях фундаментальнейшей проблемы преобразования в конечную той бесконечной информации, которая заложена в наши понятия о числе, функции и отображении. Как мы знаем, число $\sqrt{2}$ не может быть выражено конечным набором целых чисел, даже если допустить возможность производить над ними всякие арифметические действия. Поэтому в теории чисел возникает проблема приближения чисел конечными совокупностями целых чисел — скажем, десятичными дробями с конечным числом знаков. В случае функций речь идёт об их аппроксимации каким-то множеством функций, которые допускают конечное описание, как, например, алгебраическими полиномами заданной степени. И именно поперечники призваны характеризовать точность, с которой можно достигнуть бесконечного чем-то более простым, в идеале конечным.

Таким образом, понятие поперечников подготовлено формированием и развитием той части математики, в которой изучаются методы вычислений. Среди теоретических баз, на которых основываются целесообразные методы вычисления, выделяется специальный раздел математики, называемый теория приближений. В этом разделе исследуются структуры, где можно ввести расстояния между точками, где имеются аналоги прямых, плоскостей, пространств большего числа измерений. Такие пространства называются нормированными. Для подмножеств этих пространств ставится задача об определении подпространств заданного числа измерений, наилучшим образом аппроксимирующих эти подмножества. Таково общее определение поперечника по Колмогорову. Развитие теории поперечников привело ко многим интересным результатам в геометрии, математическом анализе, теории приближений, вычислительной математике и др.

§ 3. Линейные ко-поперечники

Определим ещё одно понятие поперечника, для которого нет устойчивого названия, а мы будем называть его *линейным ко-поперечником* и обозначать $d_\ell^n(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ (ℓ от «linear»). Нульмерный такой ко-поперечник — это просто диаметр множества, т. е. наибольшее расстояние между точками X и Y множества $\mathscr{F}$. Одномерный ко-поперечник определяется так. Проведём на плоскости прямую L, и пусть $d_\ell(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ — максимальная длина отрезка, параллельного L, концы которого расположены в $\mathscr{F}$. Тогда $d_\ell^1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ — это минимум $d_\ell(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ по всем L.

Отметим, что величины поперечников по Колмогорову не меняются при овыпуклении множества $\mathscr{F}$ и при его замыкании. Напомним, что выпуклым множеством называется такое множество, которое вместе с любой парой точек X и Y содержит весь отрезок $[X, Y]$, а замкнутым — такое множество $\mathscr{F}$, для которого у любой точки, не принадлежащей $\mathscr{F}$, найдётся круг с центром в этой точке, с $\mathscr{F}$ не пересекающийся. Овыпуклением (замыканием) множества называется наименьшее выпуклое (замкнутое) множество, его содержащее.

Перейдём к вопросу о том, как описываются множества, поперечники (или ко-поперечники) которых одинаковы. В случае поперечников по Колмогорову этот вопрос решается очень просто. Имеет место

Предложение 1. *Выпуклое и замкнутое множество имеет равные поперечники по Колмогорову, нульмерный и одномерный, тогда и только тогда, когда оно является кругом.*

Доказательство этого предложения очень просто. Нульмерный поперечник множества по определению — это радиус минимального описанного круга, его содержащего. Если выпуклое множество расположено внутри этого круга, не заполняя его целиком, то легко построить полосу ширины меньше удвоенного радиуса круга, содержащую это множество. □

В отношении ко-поперечника дело обстоит по-другому. Напомним, что фигурой $\mathscr{F}$ постоянной ширины называется такая плоская фигура, у которой все минимальные полосы, её содержащие, имеют одинаковую ширину, т. е. $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$ не зависит от L. Этой теме посвящён § 7 книги [2]. Нетривиальным примером такой фигуры может служить *треугольник Рёло* — объединение трёх секторов единичных кругов с центрами в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1. Боковыми сторонами этих секторов являются стороны треугольника, рассматриваемые как радиусы.

Предложение 2. *Выпуклая и замкнутая фигура имеет равные линейные ко-поперечники, нульмерный и одномерный, тогда и только тогда, когда она является фигурой постоянной ширины.*

Доказательство. Нульмерный линейный ко-поперечник фигуры равен её диаметру и, очевидно, равен её ширине в направлении диаметра и не меньше её ширины в любом другом направлении. Поэтому одномерный ко-поперечник равен нульмерному тогда и только тогда, когда ширина в любом направлении одинакова. □

§ 4. Поперечники по Александрову

Прежде чем переходить к определению поперечника по Урысону, дадим определение поперечника по Александрову. Павел Сергеевич Александров (1896–1982) — один из крупнейших топологов прошлого века и близкий друг П. С. Урысона — дал определение поперечника, связанного с непрерывными отображениями в комплексы разной размерности. Нульмерным комплексом на плоскости является конечный набор отдельно взятых точек, одномерным комплексом — конечный набор отрезков.

Далее мы рассматриваем только связные замкнутые ограниченные фигуры, т. е. такие, которые можно поместить в какой-то круг и нельзя разбить на две замкнутые непересекающиеся фигуры. Такие множества называют связными компактами. Образ связного множества при непрерывном отображении есть связное множество (непрерывность ничего не разрывает), и поэтому непрерывное отображение связного компакта в нульмерный комплекс есть не что иное, как отображение в точку. Пусть Z — это точка, в которую отображаются все точки фигуры $\mathscr{F}$. Разумеется, это будет непрерывное отображение. Расстояние от Z до наиболее удалённых точек фигуры $\mathscr{F}$ было обозначено $d(\mathscr{F}, Z, \mathscr{X}^2)$. *Нульмерным поперечником по Александрову* $a_0(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ *фигуры* $\mathscr{F}$ называется минимальная величина $d(\mathscr{F}, Z, \mathscr{X}^2)$ по всем Z. Конечно, это не что иное, как наименьший радиус круга, содержащего $\mathscr{F}$. Таким образом, нульмерный поперечник по Александрову равен нульмерному поперечнику по Колмогорову.

Далее рассмотрим отображение фигур в одномерные комплексы. Пусть K — связный одномерный комплекс и Φ — непрерывное отображение $\mathscr{F}$ в K. Обозначим через $d(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^2)$ максимальное расстояние $d(X, \Phi(X))$ по всем X из $\mathscr{F}$. *Одномерным поперечником по Александрову* $a_1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^2)$ называется минимум всех $d(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^2)$ по всем (Φ, K). Понятно, что одномерный поперечник по Александрову не больше нульмерного. Мы будем рассматривать поперечники по Александрову только для компактных связных множеств.

Упражнение 2. Пусть единичный квадрат I разделён на n^2 подквадратов со стороной $1/n$, K — объединение границ этих квадратов. Тогда K — это одномерный комплекс. Сопоставим каждой точке X квадрата I какую-либо точку $\Phi(X)$ из K, ближайшую к X. Можно ли, пользуясь такими отображениями, показать, что одномерный александровский поперечник плоской фигуры I равен нулю?

Покажем, что *одномерный александровский поперечник треугольника не больше радиуса вписанного круга*. Пусть в треугольник с вершинами A, B и C вписан круг с центром в O. Соединим O с A, B и C. Объединение отрезков $[O, A]$, $[O, B]$, $[O, C]$ образует комплекс $\widehat{K}$. Определим непрерывное отображение $\widehat{\Phi}$ треугольника ABC в комплекс $\widehat{K}$. Для этого треугольник ABC представим как объединение трёх треугольников OAB, OBC и OCA. Через каждую точку $\Delta\, OAB$ проведём прямую, параллельную высоте этого треугольника, опущенной из вершины O

на сторону AB. Она пересекает этот треугольник по отрезку $[Z, Y]$, один из концов которого, Z, лежит на $[A, B]$, а другой, Y, — на одном из отрезков $[O, A]$ или $[O, B]$. Длина наибольшего из таких отрезков равна длине высоты. Каждой точке отрезка $X \in [Z, Y]$ сопоставим $\widehat{\Phi}(X) := Y$. Из этого построения видно, что $d(X, \widehat{\Phi}(X))$ не превосходит длины отрезка $[Z, Y]$ и, значит, не превосходит радиуса вписанного круга. Построенное отображение $\widehat{\Phi}$ непрерывно на треугольнике OAB, причём $\widehat{\Phi}(X) = X$, если X — точка одного из отрезков $[O, A]$ или $[O, B]$. Таким же способом построим отображение $\widehat{\Phi}$ и на треугольниках OBC, OCA. Эти три отображения, определённые на трёх различных частях треугольника ABC, можно соединить в одно, так как на общих частях их областей определения — отрезках $[O, A]$, $[O, B]$, $[O, C]$ — соответствующие отображения совпадают. Отображение $\widehat{\Phi}$ доказывает наше утверждение.

На самом деле *одномерный александровский поперечник треугольника ABC равен радиусу вписанного круга*. Действительно, этот поперечник не меньше, чем одномерный поперечник вписанного круга, поэтому достаточно доказать следующее

Предложение 3. *Связная компактная фигура $\mathcal{F}$ на плоскости имеет одинаковый нульмерный и одномерный поперечник по Александрову в том и только в том случае, если она является кругом.*

Обобщение этого результата на n-мерный случай было доказано К. А. Ситниковым [1].

Доказательство. Как было сказано выше, нульмерный поперечник по Александрову фигуры $\mathcal{F}$ — это наименьший радиус круга, содержащего $\mathcal{F}$. Пусть александровские поперечники нулевого и первого порядка равны 1 и круг B радиуса 1 с центром O содержит $\mathcal{F}$. Допустим, что $\mathcal{F} \neq B$, точка D лежит строго внутри круга B и не принадлежит $\mathcal{F}$. Рассмотрим окружность S с центром в середине отрезка $[O, D]$ и радиусом $1/2$. Эта окружность лежит внутри круга B. Впишем в эту окружность правильный многоугольник с числом сторон k, пусть S_k — объединение его сторон. Тогда S_k — это одномерный комплекс. Устроим непрерывное отображение, сопоставив точке X из $\mathcal{F}$ точку на пересечении S_k с лучом, начинающимся в D и проходящим через X. Легко понять, что, выбрав число сторон k достаточно большим, можно найти такое α, $0 < \alpha < 1$, для которого построенное отображение является α-сдвигом $\mathcal{F}$ в S_k, т. е. таким отображением, для которого при любом $X \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство $d(X, \Phi(X)) \leqslant \alpha$. Это означает, что александровский поперечник первого порядка множества $\mathcal{F}$ меньше единицы. Противоречие.

А то, что ненулевые поперечники круга одинаковы, следует из известного в топологии результата о том, что для непрерывного отображения Φ, являющегося α-сдвигом единичного круга B при $\alpha < 1$, образ $\Phi(B)$ содержит круг радиуса $1-\alpha$, т. е. не может быть нульмерным или одномерным комплексом, и поэтому одномерный поперечник единичного круга не может быть меньше единицы. Этот результат об α-сдвиге выполняется и в трёхмерном пространстве. Для его формулировки нужно в сделанном утверждении заменить слова «круг» на «шар». □

§ 5. Трёхмерный случай

Все определения поперечников и полученные для них результаты могут быть рассмотрены и в трёхмерном пространстве $\mathscr{X}^3$. В этом случае кроме поперечников порядка нуль и один появляются поперечники порядка два. Они позволяют судить о том, сколь хорошо трёхмерная фигура $\mathscr{F}$, связная, ограниченная и замкнутая, может быть приближена плоскостью или, в случае александровского поперечника, конструкцией, определяемой парой (Φ, K), где Φ — непрерывное отображение $\mathscr{F}$ в комплекс K размерности 2, т. е. конечный набор треугольников, расположенных в $\mathscr{X}^3$.

Определения поперечников порядка нуль переносятся в пространство $\mathscr{X}^3$ с минимальными изменениями: в них «круг» заменяется на «шар». Как и для поперечников на плоскости $\mathscr{X}^2$, поперечник порядка нуль трёхмерной фигуры $\mathscr{F}$ в пространстве $\mathscr{X}^3$ — это наименьший возможный из радиусов шаров, содержащих $\mathscr{F}$. Для колмогоровских поперечников основой их определения служит величина $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^2)$. Если L — прямая в трёхмерном пространстве, то $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ — это минимальный радиус основания цилиндра, ось которого параллельна L и который содержит $\mathscr{F}$. А если L — плоскость, то $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ — это половина ширины $\mathscr{F}$ в направлении, перпендикулярном L. Минимум величин $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ по всем прямым L, лежащим в $\mathscr{X}^3$, называют поперечником 1-го порядка по Колмогорову фигуры $\mathscr{F}$ и обозначают $d_1(\mathscr{F}, \mathscr{X}^3)$, а минимум $d(\mathscr{F}, L, \mathscr{X}^3)$ по всем плоскостям L в $\mathscr{X}^3$ — поперечником 2-го порядка по Колмогорову $d_2(\mathscr{F}, \mathscr{X}^3)$. Подобный принцип обобщения соблюдается также и при определении александровских поперечников и линейных ко-поперечников.

Назовём слоем в пространстве $\mathscr{X}^3$ множество точек, расположенных между двумя параллельными плоскостями, а минимальным слоем, содержащим $\mathscr{F}$, — слой, который не может быть уменьшен за счёт сближения граничных плоскостей без потери того, что $\mathscr{F}$ лежит внутри слоя. Так же как в плоском случае, в трёхмерном пространстве существуют нетривиальные трёхмерные фигуры $\mathscr{F}$ постоянной ширины — такие фигуры, все минимальные слои которых имеют одинаковую ширину. Тривиальной фигурой постоянной ширины является шар. Нетривиальный пример такой фигуры получается при вращении вокруг оси симметрии двухмерной фигуры постоянной ширины, рассмотренной выше.

Предложение 4. 1) *Выпуклое замкнутое множество в* $\mathscr{X}^3$ *имеет одинаковые колмогоровские поперечники* 0*-го,* 1*-го и* 2*-го порядков тогда и только тогда, когда оно — шар.*

2) *Связная компактная фигура в пространстве* $\mathscr{X}^3$ *имеет одинаковые александровские поперечники* 0*-го,* 1*-го и* 2*-го порядков в том и только в том случае, если она является шаром.*

3) *Выпуклое и замкнутое множество в* $\mathscr{X}^3$ *имеет равные линейные ко-поперечники* 0*-го,* 1*-го и* 2*-го порядков тогда и только тогда, когда оно является множеством постоянной ширины.*

Доказательство предложения 4 предоставляется провести читателю.

§ 6. Ко-поперечники по Александрову

В заключение давайте вернёмся к тому, с чего мы начинали. Не приводя определения поперечника по Урысону, дадим ему эквивалентное, которое естественно назвать ко-поперечником по Александрову. Пусть K — комплекс размерности 0, 1 или 2. Любое непрерывное отображение Φ множества $\mathscr{F}$ в K разбивает $\mathscr{F}$ на подмножества $\Phi^{-1}(Z)$, $Z \in K$, для которых значение $\Phi(X)$ одинаково при $X \in \Phi^{-1}(Z)$ (эти подмножества называются прообразами точек $Z \in K$ при отображении Φ). Пусть $a(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^3)$ — максимальный из диаметров подмножеств $\Phi^{-1}(Z)$, $Z \in K$. Тогда $a^n(\mathscr{F}, \mathscr{X}^3)$, $n = 0, 1, 2,$ — это минимум $a(\mathscr{F}, (\Phi, K), \mathscr{X}^3)$ по всем парам (Φ, K), для которых размерность комплекса K равна n.

Проблема совпадения ненулевых поперечников порядка $0, 1, 2, \ldots$ по Урысону (т. е. ко-поперечников по Александрову) была поставлена Л. А. Тумаркиным для сферы в пространстве $\mathscr{X}^3$ и в пространствах размерности больше 3. Она оказалась не простой. В пространстве $\mathscr{X}^2$ сфера является окружностью и для неё имеется только один ненулевой поперечник по Урысону — поперечник порядка 0. В пространстве $\mathscr{X}^3$ ненулевые поперечники Урысона единичной сферы — поперечники порядка 0 и порядка 1 — совпадают и равны двум (Д. О. Шклярский [3]).

В пространстве размерности больше 3 ненулевые поперечники по Урысону единичной сферы уже не совпадают. Этот результат был получен Е. В. Щепиным [4].

Вопрос о выпуклом компакте с равными поперечниками по Урысону остаётся открытым.

Список литературы

[1] *Sitnikov K.* Über die Rundheit der Kugel // Nachr. Akad. Wiss. Göttingern. 1958. Kl. IIa. P. 213–215.

[2] *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Выпуклые фигуры. М.-Л.: ГТТИ, 1951.

[3] *Шклярский Д. О.* О разбиениях двумерной сферы // Матем. сб. 1945. Т. 8(58), № 2. С. 25–128.

[4] *Щепин Е. В.* Об одной проблеме Л. А. Тумаркина // ДАН СССР. 1974. Т. 217, № 1. Р. 42–43.

Александр Савельевич Кочуров, мехмат МГУ
kchrvas@yandex.ru

Владимир Михайлович Тихомиров, мехмат МГУ
vmtikh@gmail.com

О соосных окружностях и конфигурации типа Понселе

А. А. Шевцов

§ 1. Введение

Одной из наиболее известных теорем в геометрии является знаменитая теорема Понселе (см., например, [1, с. 63]). Это пример так называемых теорем о замыкании, когда процесс построения новых точек в результате проведения тех или иных линий (в данном случае — хорд одной окружности, касающихся другой окружности) зацикливается через некоторое количество шагов.

Цель данной статьи — доказательство теоремы, которая является некоторым синтезом конструкции, аналогичной конструкции из теоремы Понселе (т. е. связанной с проведением прямых, касающихся каких-то соосных окружностей), и знаменитой формулы Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника [2]. Как известно, из формулы Эйлера следует теорема Понселе для случая треугольника. По сути, в основной теореме нашей статьи предлагается обобщение формулы Эйлера для случая, когда две окружности не обязательно образуют вписанно-описанную пару для треугольника (или многоугольника). Отсюда в свою очередь будет следовать конфигурационная теорема, по конструкции похожая на классическую теорему Понселе.

Теорема 1 (основная теорема). *Рассмотрим две окружности ω и γ и произвольную точку X на окружности ω. Проведём две касательные из точки X к окружности γ и обозначим через A и B вторые точки пересечения этих касательных с ω. Пусть Z — полюс прямой AB относительно окружности ω. Обозначим через P и Q точки пересечения касательных, проведённых из точки Z к окружности γ, с касательной k к окружности ω в точке X. Тогда при движении точки X*

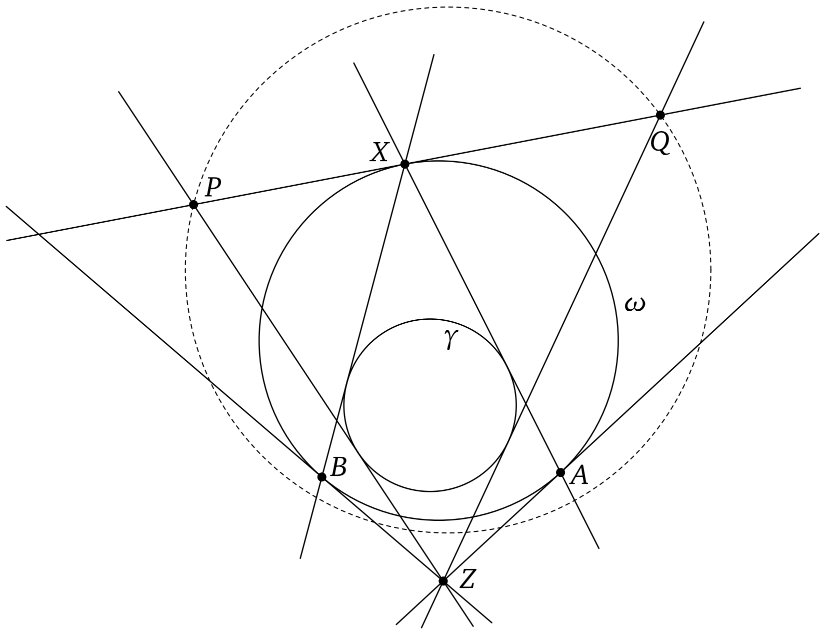


Рис. 1

по окружности ω точки P и Q движутся по окружности, соосной с окружностями ω и γ (рис. 1).

Замечание 1. Всюду далее мы предполагаем, что окружность γ целиком лежит внутри окружности ω, однако доказательство работает и в случае, когда окружности γ и ω пересекаются (рис. 2).

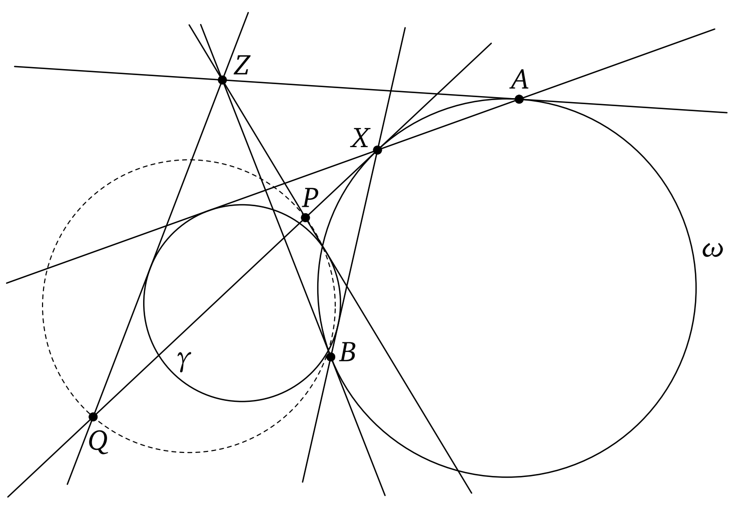


Рис. 2

Предыстория этой теоремы такова. В [5] П. Долгирев сформулировал следующую гипотезу, являющуюся более слабой версией основной теоремы.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть его вписанная окружность ω касается его сторон в точках A', B' и C'. Обозначим через γ вписанную окружность треугольника $A'B'C'$. Проведём из вершин треугольника ABC касательные к окружности γ. Тогда шесть точек пересечения этих касательных с соответствующими сторонами треугольника ABC лежат на одной окружности, соосной с окружностями ω и γ (рис. 3).

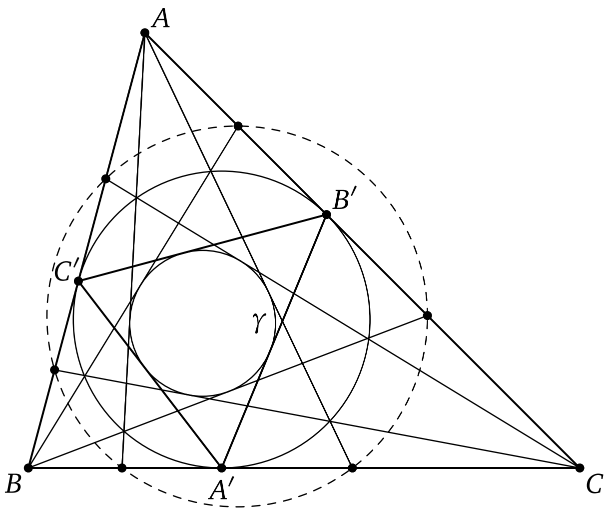


Рис. 3

Затем в [4] А. Шутов и Ф. Герасимов доказали эту гипотезу, после чего А. Заславский сформулировал в виде гипотезы утверждение основной теоремы. Наша цель — доказать эту гипотезу.

§ 2. Степени точек

В этом разделе мы переформулируем основную теорему в терминах степеней точек. Будем доказывать основную теорему только для точки P, поскольку для точки Q доказательство совершенно аналогично. Прежде всего заметим, что достаточно доказать (см. [1, с. 62]) равенство

$$\frac{\deg_\gamma P}{\deg_\omega P} = \mathrm{const}\,.$$

Разберёмся, как можно преобразовать левую часть этого равенства.

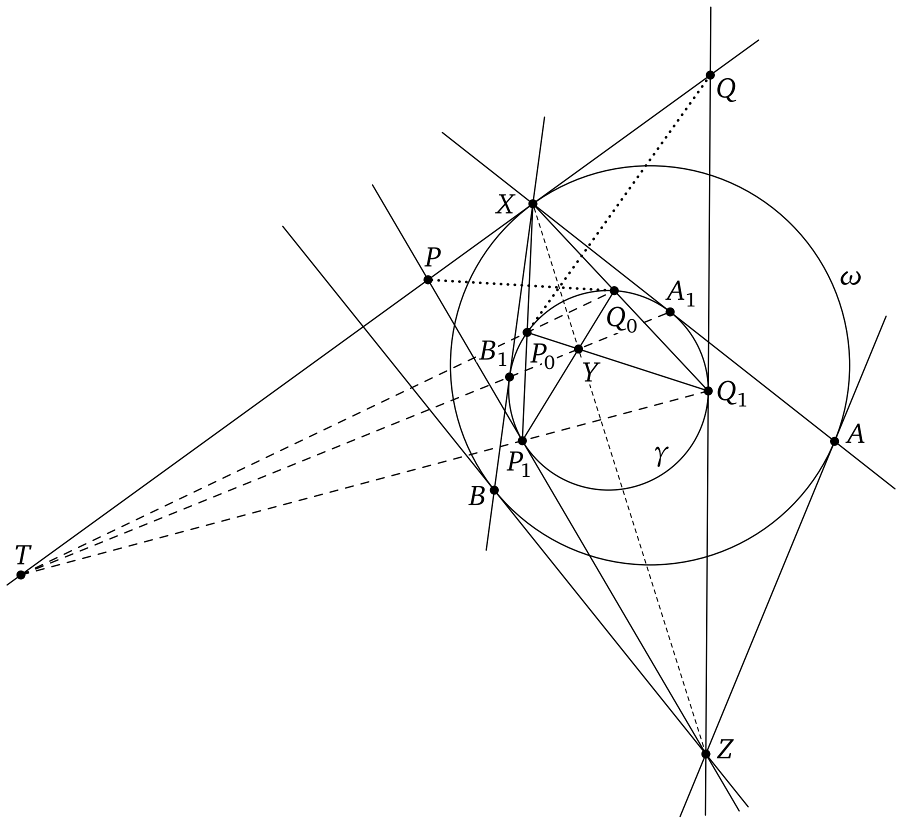


Рис. 4

Для этого обозначим через P_1 и Q_1 точки касания прямых ZP и ZQ с окружностью γ, через P_0 и Q_0 — вторые точки пересечения прямых XP_1 и XQ_1 с окружностью γ, а через A_1 и B_1 — точки касания прямых XA и XB с окружностью γ. Исследуем более подробно получившуюся конфигурацию (рис. 4).

Предложение 1. (*а*) *Прямые P_0Q_1, P_1Q_0 и A_1B_1 пересекаются в одной точке Y.*

(*б*) *Точки X, Y и Z лежат на одной прямой.*

(*в*) *Прямые P_0Q_0, P_1Q_1, A_1B_1 и k пересекаются в одной точке T.*

Доказательство. Определим точку Y как точку пересечения прямых P_0Q_1 и P_1Q_0, а точку T — как точку пересечения прямых P_0Q_0 и P_1Q_1. Заметим, что точки A_1, B_1, Y и T лежат на поляре точки X относительно γ. Отсюда сразу следует п. (а).

Далее, рассмотрим поляры точек X, Y и Z относительно окружности γ. Эти поляры — в точности прямые A_1B_1, XT и P_1Q_1 соответственно. Поскольку эти прямые пересекаются в одной точке T, по принципу двойственности (см., например, [3, с. 39]) точки X, Y и Z лежат на одной прямой — поляре точки T относительно γ. Таким образом, п. (б) также доказан.

Остаётся доказать, что прямая XT касается окружности ω. Для этого заметим, что $-1=(B_1, A_1; Y, T)=(XB_1, XA_1; XY, XT)=(XB, XA; XZ, XT)$. Но XZ — симедиана в треугольнике BXA, поэтому прямая XT касается окружности ω, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Прямые PQ_0 и QP_0 касаются окружности γ.*

Доказательство. В самом деле, прямая XT — поляра точки Y относительно γ, поэтому по принципу двойственности прямая P_1Q_0 — поляра точки P относительно γ. Так как PP_1 — касательная к окружности γ, то и прямая PQ_0 — касательная к γ. Рассуждения для прямой QP_0 совершенно аналогичны. □

Теперь рассмотрим точку X_P пересечения прямой XP_1 с окружностью ω (рис. 5). Обозначая радиусы окружностей ω и γ через R и r, а их центры — через O и I, получаем следующую цепочку равенств:

$$\frac{\deg_\gamma P}{\deg_\omega P}=\left(\frac{PP_1}{PX}\right)^2=\left(\frac{\sin\angle PXX_P}{\sin\angle PP_1X}\right)^2=\left(\frac{XX_P/2R}{P_0P_1/2r}\right)^2=\left(\frac{XX_P}{P_0P_1}\cdot\frac{r}{R}\right)^2.$$

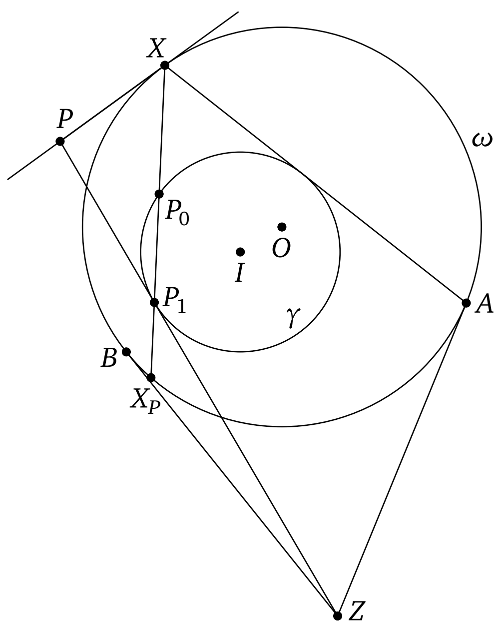


Рис. 5

Таким образом, для доказательства основной теоремы достаточно показать, что отношение $XX_P : P_0P_1$ не зависит от выбора точки X на окружности ω.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\frac{XX_P}{P_0P_1} = 1 + \frac{R^2 - OI^2}{2r^2}. \tag{1}$$

Именно эту теорему мы будем доказывать в следующих разделах.

§ 3. Переформулировка теоремы 2

Для доказательства теоремы 2 переформулируем её в терминах четырёхугольника $P_0P_1Q_1Q_0$, вписанного в окружность γ, и определим остальные точки в терминах этого четырёхугольника.

Итак, начнём строить наш чертёж 4, оставив на нём сначала лишь окружность γ с центром в точке I. Зафиксируем на этой окружности точки A_1, B_1, P_0, P_1. Далее, точку Y выберем на прямой A_1B_1 произвольным образом, точки Q_0 и Q_1 определим как вторые точки пересечения прямых P_0Y и P_1Y с окружностью γ, а точку X — как полюс прямой A_1B_1. Заметим, что по принципу двойственности прямая Q_0Q_1 проходит через X.

Теперь определим точку T как точку пересечения прямых P_1Q_1 и P_0Q_0, а точку Z — как полюс прямой P_1Q_1 относительно окружности γ. Нам осталось построить окружность ω. Для этого в свою очередь достаточно построить точку O.

Заметим, что прямая XT является полярой точки Y относительно окружности γ, а также она должна касаться окружности ω. Поэтому $TX \perp IY$ и $TX \perp OX$, откуда $IY \parallel OX$.

Теперь построим точки A_1 и B_1 как точки пересечения поляры X относительно окружности γ с самой окружностью γ. Заметим, что точка O должна лежать на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Но этот серединный перпендикуляр антипараллелен прямой OX относительно угла $\angle B_1XA_1$ и проходит через точку Z, поэтому мы можем построить его.

Таким образом, теорема 2 равносильна следующему утверждению.

Теорема 3. *На окружности γ с центром в точке I отмечены точки A_1, B_1, P_0, P_1, причём прямая P_0P_1 проходит через полюс X прямой A_1B_1. На прямой A_1B_1 произвольным образом выбрана точка Y. Определим точки Q_0 и Q_1 как вторые точки пересечения прямых P_0Y и P_1Y с окружностью γ. а точку Z — как полюс прямой P_1Q_1 относительно*

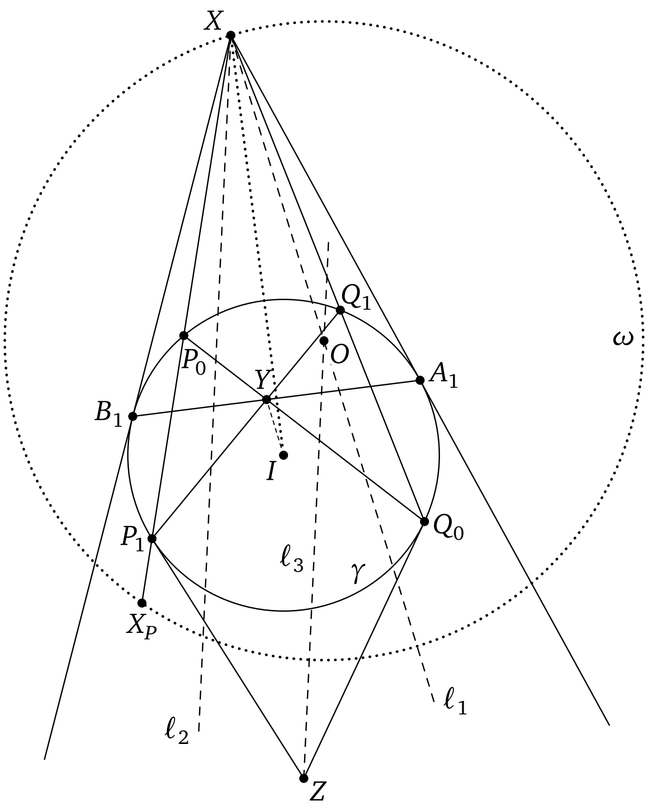


Рис. 6

окружности γ. Далее, пусть ℓ_1 — прямая, проходящая через X параллельно IY, ℓ_2 — образ прямой ℓ_1 при отражении относительно IX, а ℓ_3 — прямая, проходящая через Z параллельно ℓ_2. Обозначим через O точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_3. Наконец, пусть X_p — вторая точка пересечения прямой P_0P_1 с окружностью с центром в O и радиусом $R = OX$. Тогда имеет место равенство (1) (рис. 6).

§ 4. Проективные движения

Ключевую роль в доказательстве теоремы 3 играют проективные движения точек и проверка формулы (1) в трёх положениях. Для этого мы будем двигать не точку X по окружности ω, а точку Y по прямой A_1B_1. Поймём, как меняются левая и правая части формулы (1), если точка Y двигается проективно. Для этого нам потребуется

Предложение 2. *Если проективно двигать точку Y по прямой A_1B_1, то точка O будет проективно двигаться по некоторой прямой.*

Доказательство. Определим Z как точку пересечения прямой XY и касательной к окружности γ в точке P_1. Обозначим через O_{A_1} и O_{B_1} положения точки O, соответствующие ситуациям $Y=B_1$ и $Y=A_1$ соответственно. Пусть O' — точка пересечения прямых $O_{A_1}O_{B_1}$ и ℓ_1. Докажем, что $O'=O$.

Сразу отметим, что если это верно, то наше предложение будет доказано, поскольку прямая $O_{A_1}O_{B_1}$ неподвижна, точка Y движется проективно, значит, прямая IY проективно вращается вокруг точки I, откуда следует, что прямая ℓ_1 вращается проективно вокруг точки X. Поэтому точка $O'=O$ будет двигаться проективно.

Итак, докажем, что $O'=O$. Для этого достаточно доказать, что $ZO' \parallel \ell_2$.

Обозначим через A' и B' точки пересечения касательной к окружности γ в точке P_1 и прямых XA_1 и XB_1 соответственно (рис. 7). Несложно видеть, что тогда

$$XO_{A_1} \perp XA' \perp B'O_{B_1}, \quad XO_{B_1} \perp XB' \perp A'O_{A_1}.$$

Отсюда $\angle XO_{A_1}A' = \angle A'XB' = \angle B'O_{B_1}X$ и треугольники $A'XO_{A_1}$ и $B'XO_{B_1}$ подобны. По определению точек O_{A_1}, O_{B_1} и O' имеют место следующие параллельности:

$$XO_{A_1} \parallel IA_1, \quad XO_{B_1} \parallel IB_1, \quad XO' \parallel IY.$$

Отсюда получаем цепочку равенств:

$$\frac{O'O_{A_1}}{O'O_{B_1}} = \frac{XO_{A_1}}{XO_{B_1}} \cdot \frac{\sin\angle O'XO_{A_1}}{\sin\angle O'XO_{B_1}} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{\sin\angle YIA_1}{\sin\angle YIB_1} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{YA_1}{YB_1}.$$

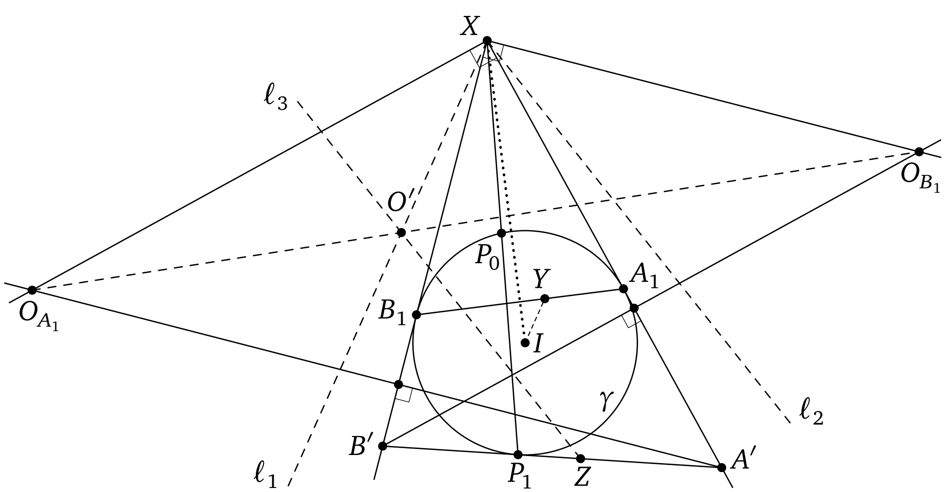


Рис. 7

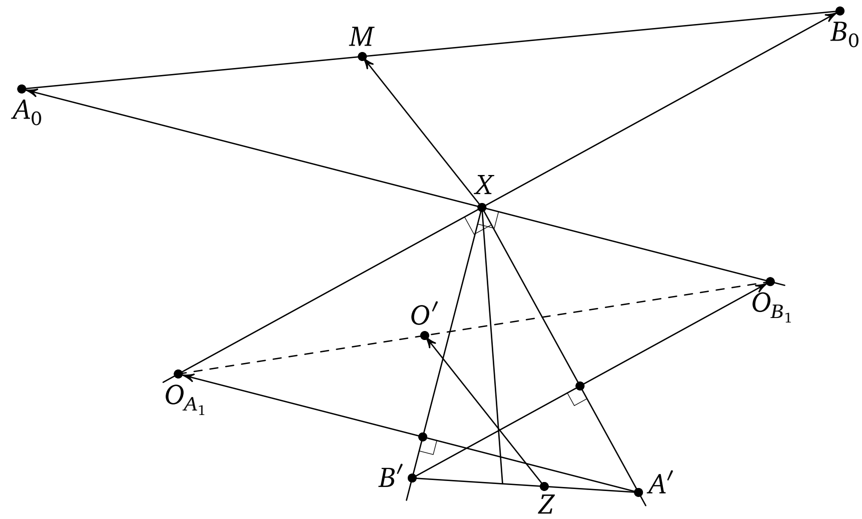


Рис. 8

В то же время
$$\frac{A'Z}{B'Z} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{\sin\angle A'XY}{\sin\angle B'XY} = \frac{XA'}{XB'} \cdot \frac{YA_1}{YB_1},$$
откуда мы получаем, что
$$\frac{O'O_{A_1}}{O'O_{B_1}} = \frac{ZA'}{ZB'} = \frac{\alpha}{\beta}.$$
Выразим отсюда вектор $\overline{ZO}'$:
$$\overline{ZO}' = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \overline{B'O}_{B_1} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \overline{A'O}_{A_1}.$$

Пусть точки A_0 и B_0 таковы, что $\overline{XA}_0 = \overline{A'O}_{A_1}$ и $\overline{XB}_0 = \overline{B'O}_{B_1}$ (рис. 8). Ясно, что точка B_0 лежит на прямой XO_{A_1}, а точка A_0 лежит на прямой XO_{B_1}. Тогда $\overline{XM} = \overline{ZO}'$, где M — точка, делящая отрезок A_0B_0 в таком же отношении, в каком точка O' делит отрезок $O_{A_1}O_{B_1}$.

Заметим, что
$$\triangle A_0XO_{A_1} = \triangle A'O_{A_1}X \sim \triangle B'O_{B_1}X = \triangle B_0XO_{B_1},$$
откуда следует, что треугольники A_0XB_0 и $O_{A_1}XO_{B_1}$ подобны. Значит, точки M и O' соответствуют друг другу при подобии, переводящем треугольник A_0XB_0 в треугольник $O_{A_1}XO_{B_1}$. Отсюда следует, что прямые XO' и XM антипараллельны относительно угла $\angle O_{A_1}XO_{B_1}$, а значит, и относительно угла $\angle B'XA'$. Наконец, мы получаем, что $O'Z \parallel XM \parallel \ell_2$, что и требовалось доказать. □

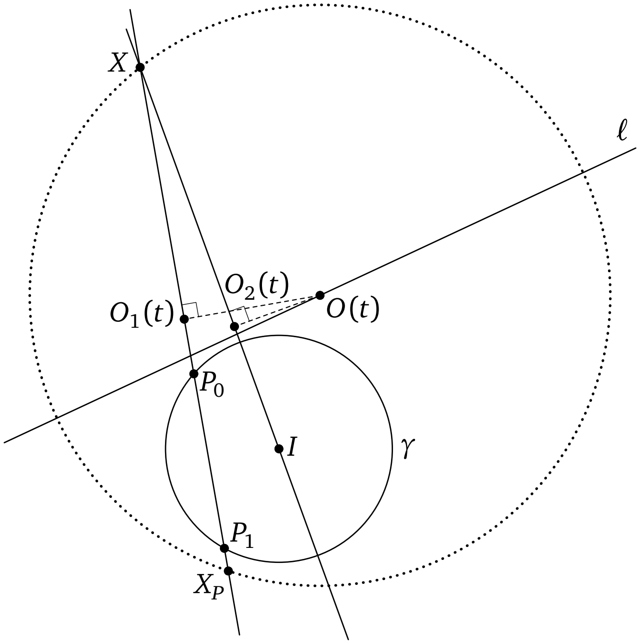


Рис. 9

Итак, мы доказали, что при проективном движении точки Y по прямой A_1B_1 точка O движется проективно по некоторой прямой ℓ. Посмотрим, как ведут себя обе части равенства (1) при таком движении.

Введём на прямых A_1B_1 и XI оси координат с началом в точке X. Через t обозначим координату точки Y, а через $O_1(t)$ и $O_2(t)$ — координаты проекций точки O на прямые P_0P_1 и XI соответственно (рис. 9).

Ясно, что функции $O_1(t)$ и $O_2(t)$ дробно-линейны, поэтому

$$\frac{XX_P}{P_0P_1} = \frac{2O_1(t)}{P_0P_1}$$

— дробно-линейная функция. Таким образом, левая часть равенства (1) меняется дробно-линейно.

Теперь посмотрим на правую часть этого равенства. Обозначим через i координату точки I на прямой XI. Тогда

$$1+\frac{OX^2-OI^2}{2r^2} = 1+\frac{O_2(t)^2-(O_2(t)-i)^2}{2r^2} = 1+\frac{2i\cdot O_2(t)-i^2}{2r^2},$$

т. е. правая часть равенства (1) тоже меняется дробно-линейно.

Таким образом, для доказательства равенства (1) нам достаточно проверить его при трёх положениях точки Y.

§ 5. Три положения точки Y

В качестве первого положения точки Y выберем полюс прямой P_0P_1 (ясно, что такая точка лежит на A_1B_1). Тогда $X = X_P$. Обозначим через M середину отрезка P_0P_1, через K — основание перпендикуляра из точки Y на прямую XI, а через N — точку пересечения прямых OY и XI. Тогда $\angle OXN = \angle NIY = \angle YNI$, т. е. $OX = ON$ (рис. 10). Тогда

$$1+\frac{OX^2-OI^2}{2r^2}=1-\frac{\deg_\omega I}{2r^2}=1-\frac{IX\cdot IN}{2r^2}=1-\frac{IK\cdot IX}{r^2}=1-\frac{IM\cdot IY}{r^2}=0,$$

что и требовалось доказать.

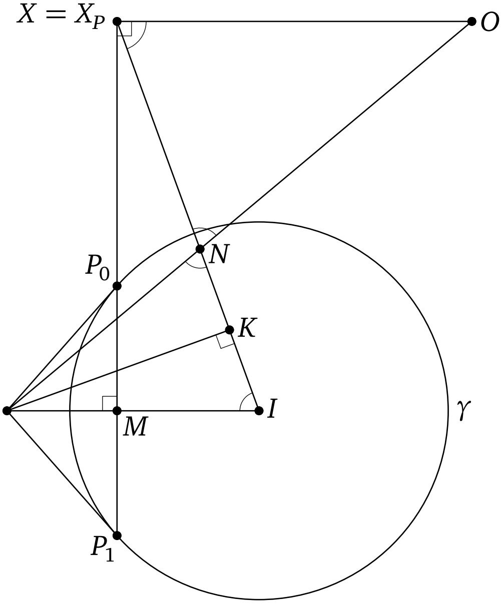


Рис. 10

В качестве оставшихся двух положений выберем $Y = B_1$ и $Y = A_1$. Будем рассматривать только положение $Y = B_1$, поскольку второе положение разбирается аналогично (рис. 11). Здесь вычисления несколько сложнее.

Обозначим через M середину отрезка B_1P_1, через N — точку пересечения прямых BO и XI, а через K — проекцию точки X на прямую B_1P_1. Положим $\angle B'XI = \angle IXA_1 = \alpha$ и $\angle XB'I = \beta$. Заметим, что

$$\angle XNO = 90^\circ - \angle NXA_1 = 90^\circ - \alpha = \angle IXO,$$

т. е. снова $OX = ON$.

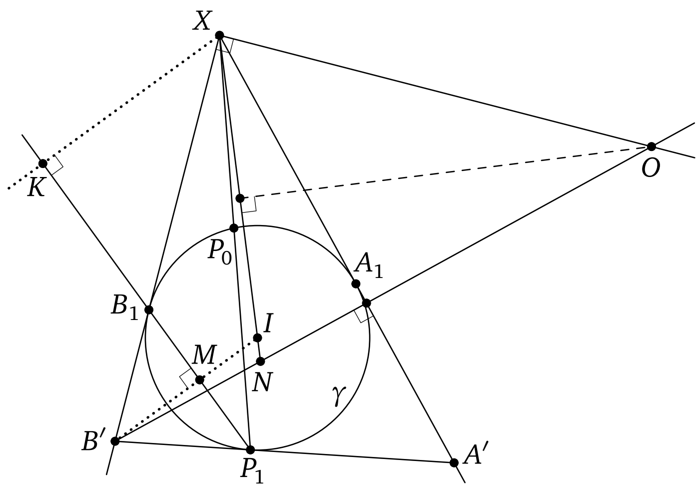


Рис. 11

Вычислим правую часть равенства (1). Имеем:

$$1+\frac{OX^2-OI^2}{2r^2}=1-\frac{\deg_\omega I}{2r^2}=1-\frac{IN\cdot IX}{2r^2}=1-\frac{IX}{2r}\cdot\frac{IN}{IB'}\cdot\frac{IB'}{r}=$$

$$=1-\frac{1}{2\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\beta-(90^\circ-2\alpha))}{\sin(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{1}{\sin\beta}=1+\frac{\cos(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Теперь вычислим левую часть равенства (1). Имеем:

$$\frac{XX_P}{P_0P_1}=\frac{2OX\cdot\sin\angle B_1XP_1}{XP_1-XB_1^2/XP_1}=\frac{2(XB'\operatorname{ctg}2\alpha)\cdot\sin\angle B'XP_1\cdot XP_1}{XP_1^2-XB_1^2}=$$

$$=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{2XB'\cdot XP_1\cdot\sin\angle B'XP_1}{KP_1^2-KB_1^2}=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{4S_{\triangle B'XP_1}}{B_1P_1\cdot(B_1P_1+2KB_1)}=$$

$$=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{2XB'\cdot B'P_1\cdot\sin 2\beta}{2P_1M\cdot 2KM}=\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{XB'\cdot B'P_1\cdot\sin\beta\cos\beta}{P_1B'\sin\beta\cdot XB'\sin\beta}=\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\beta.$$

Таким образом, равенство (1) для оставшихся двух положений доказано. Значит, оно верно всюду, откуда и следует основная теорема. Доказательство закончено.

§ 6. Обобщения и приложения

В этом разделе мы рассмотрим одно обобщение основной теоремы, а также один её частный случай.

Начнём с обобщения. Как мы уже отмечали во введении, конфигурация из основной теоремы напоминает конфигурацию из теоремы Понселе, принадлежащей к проективной геометрии. Это наводит

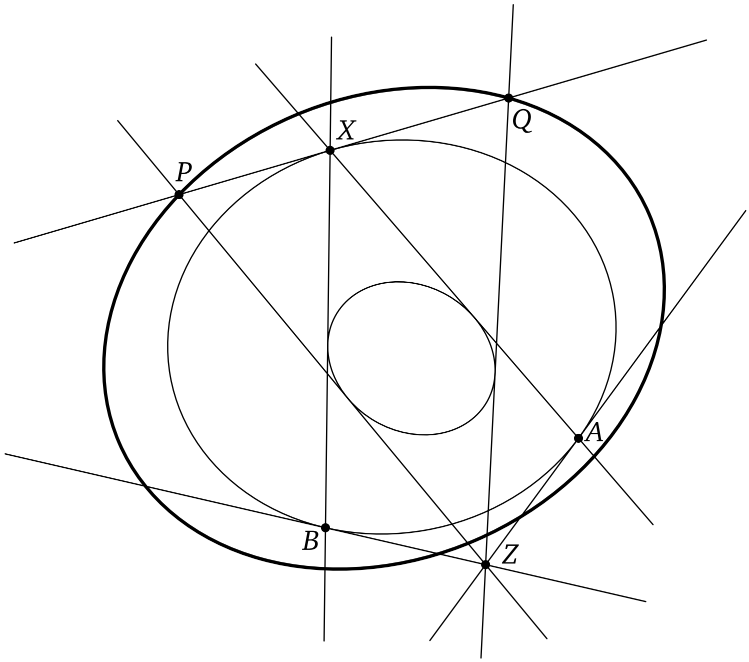


Рис. 12

на мысль о возможности заменить в формулировке основной теоремы слово «окружность» на слово «коника» (рис. 12).

Если коники γ и ω не пересекаются, то согласно известной теореме из проективной геометрии (см. [1, с. 73]) существует проективное преобразование, переводящее пару этих коник в пару окружностей. Таким образом, основная теорема справедлива в случае, когда γ и ω — непересекающиеся коники. Поскольку это свойство сохраняется при малом шевелении, отсюда в свою очередь следует справедливость основной теоремы и для произвольно расположенных коник: достаточно воспользоваться теоремой об аналитическом продолжении.

Теперь рассмотрим один частный случай основной теоремы. Формула (1) очень похожа на знаменитую формулу Эйлера для расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника. Поэтому рассмотрим ситуацию, когда γ является вписанной окружностью треугольника XAB (рис. 13).

В таком случае из основной теоремы следует, что

$$\frac{PP_1^2}{PX^2} = \frac{\deg_\gamma P}{\deg_\omega P} = \left(\frac{XX_P}{P_0P_1} \cdot \frac{r}{R}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{r}{R} \cdot \left(1 + \frac{R^2 - OI^2}{2r^2}\right)\right)^2 = \left(\frac{r}{R} \cdot \left(1 + \frac{2rR}{2r^2}\right)\right)^2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2,$$

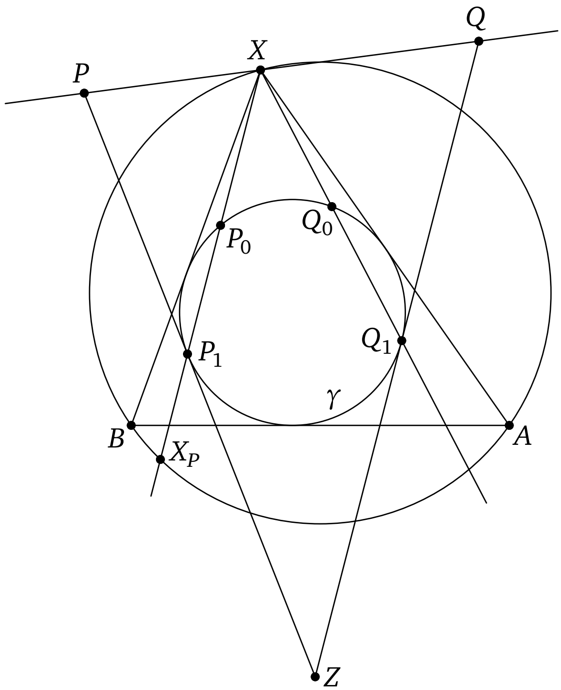


Рис. 13

откуда мы получаем красивую формулу:

$$\frac{PP_1}{PX} = \frac{QQ_1}{QX} = 1 + \frac{r}{R}.$$

Попробуем переписать её более удобным образом. Для этого обозначим через A_1, B_1 и X_1 точки касания окружности γ со сторонами треугольника ABX, через R и S — точки пересечения прямой A_1B_1 с окружностью ω, а через S' — вторую точку пересечения прямой X_1S с окружностью ω (рис. 14).

Предложение 3. *Точка Q_1 лежит на прямой X_1S.*

Доказательство. Обозначим через S_0 вторую точку пересечения прямой X_1S и окружности γ и докажем, что $S_0 = Q_1$. Для этого проведём касательную к окружности γ в точке S_0, и пусть она пересекает стороны AB и AX в точках E и F соответственно. Обозначим точку пересечения прямых XS и AB через G, а точку пересечения прямых XE и A_1B_1 — через V (рис. 14).

Заметим, что по принципу двойственности точки B, F и S лежат на поляре точки пересечения прямых B_1X_1 и A_1S_0 относительно окруж-

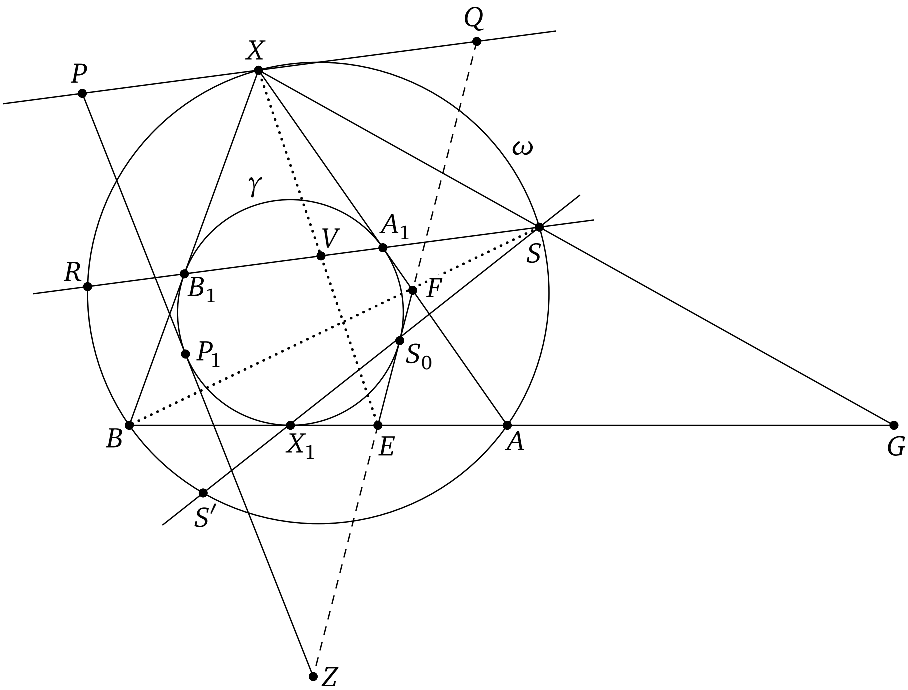


Рис. 14

ности γ. Далее, прямая XE является полярой точки S относительно γ, откуда следует, что

$$-1 = (B_1, A_1; V, S) = (B, A, E; E, G).$$

Значит, точка E лежит на поляре точки G относительно ω. Но точки Z и F тоже лежат на поляре точки G относительно ω. Поэтому прямая EF проходит через Z, а ZS_0 — касательная к окружности γ. Отсюда следует, что $S_0 = Q_1$, что и требовалось доказать. □

Предложение 4. *Прямая QS касается окружности ω.*

Доказательство. В самом деле, из доказательства предыдущего утверждения следует, что прямая FZ является полярой точки G относительно окружности ω, поэтому по принципу двойственности на ней также лежит точка пересечения касательных к ω в точках X и S. Но так как точка Q лежит на касательной в точке X и на прямой FZ, то QS — касательная к окружности ω, что и требовалось доказать. □

Теперь мы готовы преобразовать формулу

$$\frac{PP_1}{PX} = \frac{QQ_1}{QX} = 1 + \frac{r}{R}.$$

Имеем
$$1+\frac{r}{R}=\frac{QQ_1}{QX}=\frac{QS_0}{QS}=\frac{\sin\angle S'SQ}{\sin\angle QS_0S}=\frac{SS'/(2R)}{X_1S_0/(2r)}=\frac{SS'}{X_1S_0}\cdot\frac{r}{R},$$
откуда получаем, что
$$\frac{SS'}{X_1S_0}=1+\frac{R}{r}.$$

Из данной формулы следует, в частности, что отношение $SS' : X_1S_0$ не зависит ни от выбора вершины треугольника XAB, ни от выбора самого треугольника XAB, вписанного в окружность ω и описанного около окружности γ. Удивительно, но даже этот, казалось бы, несложный факт, по-видимому, не допускает простого доказательства…

Благодарности

Автор благодарит П. В. Бибикова за внимание к работе и помощь в подготовке статьи.

Список литературы

[1] *Акопян А., Заславский А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Кушнир И.* О двух формулах Эйлера // Квант. 1992. № 12. С. 43–46.

[3] *Жижилкин И.* Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.

[4] *Shutov A., Gerasimov F.* On an interesting circle in a triangle. `https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works2019/shutgera2.pdf`

[5] Problem section // Journal of Classical Geometry. 2014. Vol. 3. P. 53. `https://jcgeometry.org/articles/volume3/jcg2014v2pp53-55.pdf`

Андрей Алексеевич Шевцов, ученик лицея «Вторая школа»
andreyshevtsov2003@gmail.com

Геометрическое доказательство теоремы об инцентрах и её аналогов

М. И. Толовиков

Биссектрисы разбивают произвольный треугольник на шесть треугольников. Теорема об инцентрах утверждает, что инцентры этих треугольников лежат на одной конике. Мы даём геометрическое доказательство теоремы об инцентрах и её аналогов, включающих центры вневписанных окружностей треугольника.

Введение

Биссектрисы разбивают произвольный треугольник на шесть треугольников. Теорема об инцентрах утверждает, что инцентры этих треугольников лежат на одной конике (рис. 1). Утверждение теоремы об инцентрах появилось в печати в виде гипотезы в [4] и [5]. В [1] найдено доказательство этой теоремы, использующее вычисления в барицентрических координатах и тригонометрию. В [2] и [3] теорема об инцентрах доказана с помощью комплексных чисел. Вычисления при этом выполнялись с привлечением системы компьютерной алгебры. Там же сформулирована теорема, в которой, наряду с инцентрами,

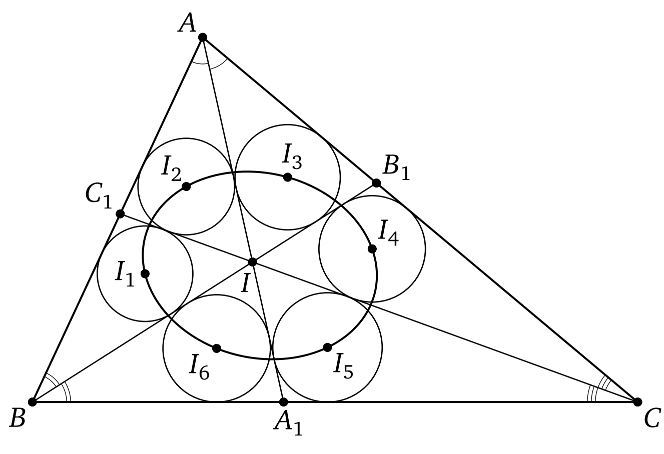


Рис. 1

рассматриваются центры вневписанных окружностей треугольников разбиения. Найденные доказательства вычислительные, причём вычисления относительно громоздки. Применение вычислительных методов выглядит вполне естественным, поскольку инцентры треугольников достаточно удобно описывать аналитически.

Нам удалось найти довольно простое геометрическое (или, как ещё говорят, синтетическое) доказательство теоремы об инцентрах. Это и послужило поводом к написанию данной статьи. В первом разделе мы приводим некоторые хорошо известные геометрические конструкции и утверждения. Цель — сделать статью доступной наиболее широкому кругу читателей. Все используемые в нашем доказательстве средства элементарны. Первый раздел описывает те из них, которые, пожалуй, наиболее далеко отстоят от стандартной школьной программы. Второй раздел содержит доказательство теоремы об инцентрах. В третьем разделе приводятся аналоги теоремы об инцентрах, в которых вместо центров вписанных окружностей треугольников разбиения или исходного треугольника рассматриваются центры их вневписанных окружностей. Доказательства при этом аналогичны доказательству исходной теоремы.

§ 1. Предварительные сведения

Многие теоремы о кониках естественно рассматривать в контексте проективной геометрии. Мы будем работать в модели проективно-евклидовой плоскости, в которой к обычной евклидовой плоскости добавлена бесконечно удалённая прямая. Впрочем, кроме использования проективного преобразования в одном шаге доказательства, всё остальное происходит в рамках обычной евклидовой геометрии. И для этого шага мы приводим эквивалентное рассуждение, не требующее рассмотрения бесконечно удалённых элементов.

Основные инструменты, которые будут использованы при доказательстве, — теорема Паскаля и двойные отношения четвёрок точек. Теорема Паскаля утверждает, что шесть точек A, B, C, D, E, F лежат на одной конике тогда и только тогда, когда три точки $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$, $Z = CD \cap AF$ лежат на одной прямой (рис. 2). Символом $a \cap b$ мы обозначаем точку пересечения прямых a и b. Из точек X, Y и Z одна или все три точки могут принадлежать бесконечно удалённой прямой. В этом случае на евклидовой плоскости соответствующие прямые параллельны. Например, противоположные стороны центрально-симметричного шестиугольника попарно параллельны. На проек-

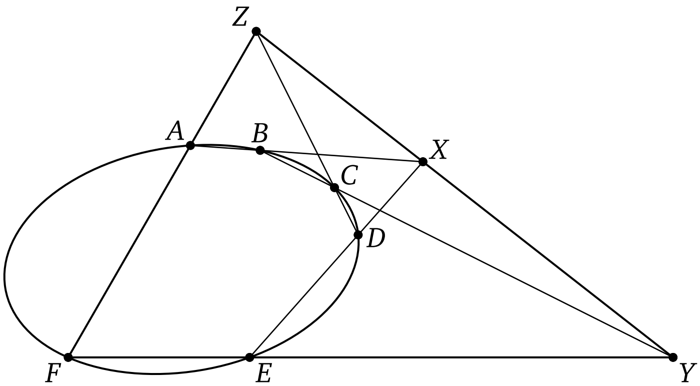


Рис. 2

тивной плоскости они пересекаются в точках бесконечно удалённой прямой. По теореме Паскаля вершины такого шестиугольника лежат на одной конике. С учётом теоремы Паскаля, принадлежность шести точек одной конике можно рассматривать просто как утверждение о принадлежности трёх точек одной прямой. В теореме об инцентрах это точки пересечения прямых I_1I_2 с I_4I_5, I_2I_3 с I_5I_6, I_3I_4 с I_1I_6.

Ещё один инструмент, который мы будем использовать, — двойное отношение четвёрки точек. Для упорядоченной четвёрки различных точек (A, B, C, D) одной прямой их двойным отношением называется число

$$[A, B; C, D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Отрезки здесь считаются ориентированными. Отношение одинаково направленных отрезков равно отношению их длин, а отношение противоположно направленных противоположно отношению их длин. Двойное отношение считается определённым и в тех случаях, когда числитель и знаменатель некоторой дроби одновременно равны бесконечности. Значение дроби при этом считается равным 1. Бесконечные значения получаются тогда, когда один конец некоторого отрезка — бесконечно удалённая точка, а другой конец не принадлежит бесконечно удалённой прямой.

Важное свойство двойных отношений — их сохранение при центральном проектировании одной прямой на другую. Пусть точка S не принадлежит прямым a и b. Проекцией из центра S точки A прямой a на прямую b называется точка A' пересечения прямой SA с прямой b. Если SA параллельна b на евклидовой плоскости, то A' — бесконечно удалённая точка прямой b. Можно доказать, что для любых точек A,

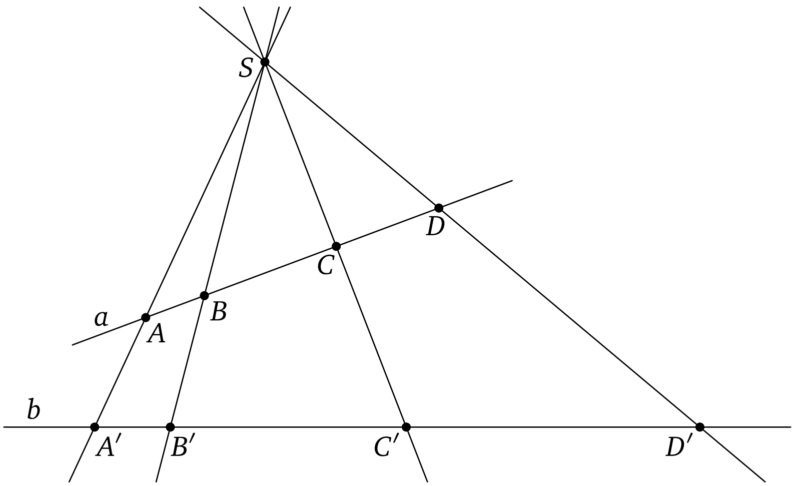


Рис. 3

B, C и D прямой a и их проекций A', B', C' и D' на прямую b двойные отношения равны: $[A,B;C,D]=[A',B';C',D']$ (рис. 3). Ещё одно свойство двойных отношений: из равенства $[A,B;C,D]=[A,B;C,D_1]$ следует, что точки D и D_1 совпадают (аналогичное верно для точек на любой другой позиции в четвёрке). Эти факты удобно использовать при решении ряда задач. Мы приведём один пример, который будет полезен в дальнейшем.

Задача 1. Пусть AD и BL — биссектрисы треугольника ABC, CN — биссектриса его внешнего угла C. Через точку D проведена прямая, пересекающая прямые AB и AC в точках E и F, а прямые BL и CN в точках P и Q соответственно. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ (рис. 4).

Решение. По свойству биссектрисы (для внутренних и внешнего углов треугольника ABC)

$$\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC},\quad \frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB},\quad \frac{BN}{NA}=\frac{BC}{AC}.$$

Отсюда

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\cdot\frac{\overline{BN}}{\overline{NA}}=-1,$$

и по теореме Менелая заключаем, что точки L, D и N лежат на одной прямой. При проектировании из точки B точки E, P, D и F прямой EF переходят соответственно в точки A, L, C и F прямой AC. Следовательно, $[E,P;D,F]=[A,L;C,F]$. При проектировании из D

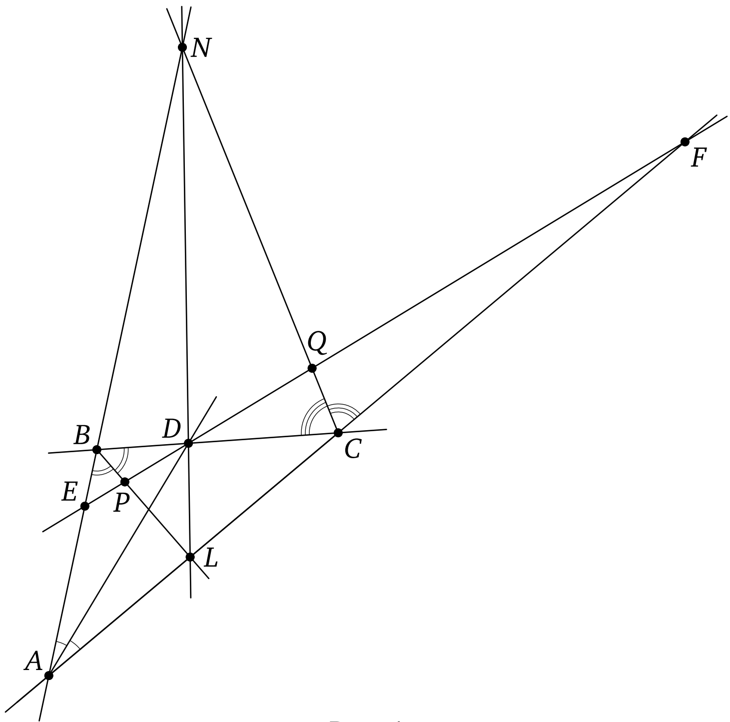


Рис. 4

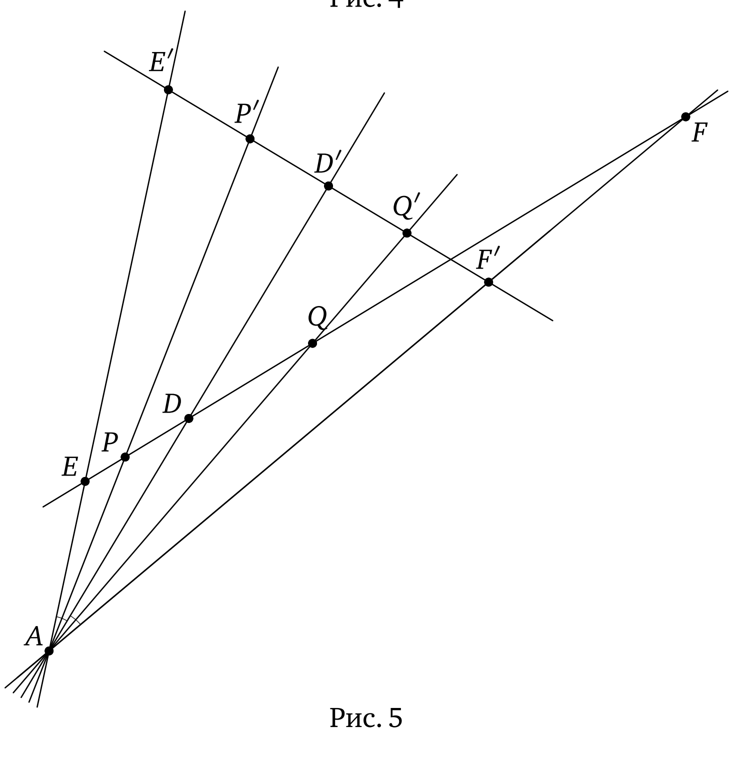


Рис. 5

точки A, L, C и F переходят в точки A, N, B и E прямой AB. Отсюда $[A, L; C, F] = [A, N; B, E]$. Наконец, при проектировании из C точки A, N, B и E переходят в точки F, Q, D и E прямой EF. Поэтому $[A, N; B, E] = [F, Q; D, E]$. Таким образом, справедливо равенство двойных отношений $[E, P; D, F] = [F, Q; D, E]$. Спроецируем теперь точки E, P, D, Q, F из центра A на некоторую прямую, перпендикулярную AD (рис. 5). Пусть E', P', D', Q', F' — их проекции. Тогда $[E', P'; D', F'] = [F', Q'; D', E']$, т. е.

$$\frac{\overline{E'D'}}{\overline{E'F'}} : \frac{\overline{P'D'}}{\overline{P'F'}} = \frac{\overline{F'D'}}{\overline{F'E'}} : \frac{\overline{Q'D'}}{\overline{Q'E'}}.$$

Поскольку $E'D' = F'D'$, получаем, что

$$\frac{\overline{P'D'}}{\overline{P'F'}} = \frac{\overline{Q'D'}}{\overline{Q'E'}},$$

и тогда $P'D' = Q'D'$. Следовательно, AD' — биссектриса угла $P'AQ'$ или, что то же самое, AD — биссектриса угла PAQ.

§ 2. Доказательство теоремы об инцентрах

Теорема об инцентрах. *Пусть I — инцентр треугольника ABC, $A_1 = IA \cap BC$, $B_1 = IB \cap AC$, $C_1 = IC \cap AB$. Тогда инцентры I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 треугольников BIC_1, AIC_1, AIB_1, CIB_1, CIA_1, BIA_1 соответственно лежат на одной конике.*

Доказательство. Пусть I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, т. е. точки пересечения биссектрис его внешних углов при вершинах B и C, A и C, A и B соответственно. Положим $T_A = I_1I_4 \cap I_BI_C$, $T_B = I_2I_5 \cap I_AI_C$, $T_C = I_3I_6 \cap I_AI_B$ (рис. 7). Доказательство теоремы будет опираться на несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 лежат вне друг друга, I — точка пересечения их внутренних касательных, и пусть из точки A к ω_1 и ω_2 проведены касательные AN_1 и AN_2 так, что O_1 и O_2 либо обе лежат внутри, либо обе вне угла N_1AN_2* (рис. 6). *Если луч AI является биссектрисой угла N_1AN_2, то он является и биссектрисой угла O_1AO_2* (*верно и обратное*).

Доказательство. и O_2M_2 — перпендикуляры из точек O_1 и O_2 на AI. Тогда

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

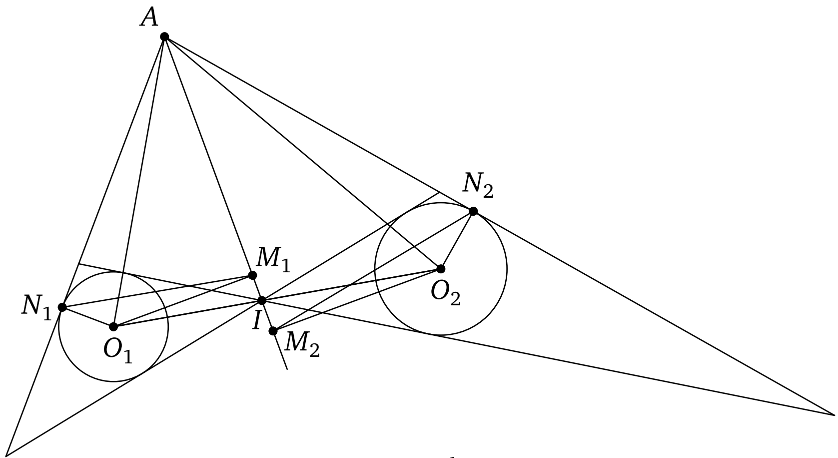


Рис. 6

— отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2 (считаем, что N_1 и N_2 — точки касания). Это следует из того, что гомотетия с центром I и коэффициентом $-r_2/r_1$ переводит ω_1 в ω_2, а отрезок O_1M_1 в O_2M_2. Поскольку четвёрки точек A, M_1, O_1, N_1 и A, M_2, O_2, N_2 лежат на одной окружности (это следует) из $\angle O_1N_1A = \angle O_1M_1A = 90^\circ$, $\angle O_2N_2A = \angle O_2M_2A = 90^\circ$), то, во-первых, из равенства углов N_1AM_1 и N_2AM_2 вытекает равенство углов $M_1O_1N_1$ и $M_2O_2N_2$. Следовательно, треугольники $M_1O_1N_1$ и $M_2O_2N_2$ подобны, и поэтому углы $O_1N_1M_1$ и $O_2N_2M_2$ равны. Во-вторых, углы O_1AM_1 и O_2AM_2 равны соответственно углам $O_1N_1M_1$ и $O_2N_2M_2$ и потому равны между собой, что и требовалось. (Доказательство подходит для обоих случаев взаимного расположения касательных и окружностей.) □

Замечание. Утверждение леммы следует также из утверждения задачи 1. Обратно, утверждение задачи 1 можно вывести из утверждения доказанной леммы.

Лемма 2. *Четвёрки точек* (I_1, I_4, I, T_A), (I_2, I_5, I, T_B), (I_3, I_6, I, T_C) — *гармонические* (см. рис. 7; *четвёрка точек называется гармонической, если её двойное отношение равно* -1). *Пусть* O_1M_1

Доказательство. В силу леммы 1 прямая AI является биссектрисой угла I_1AI_4 треугольника I_1AI_4. Поскольку AI_A — биссектриса угла BAC, получаем, что $AI \perp AT_A$. Следовательно, AT_A — биссектриса внешнего угла треугольника I_1AI_4. Из свойств отношений отрезков, связанных с биссектрисами

$$[I_1, I_4; I, T_A] = \frac{\overline{I_1I}}{\overline{I_4I}} : \frac{\overline{I_1T_A}}{\overline{I_4T_A}} = -\frac{AI_1}{AI_4} : \frac{AI_1}{AI_4} = -1,$$

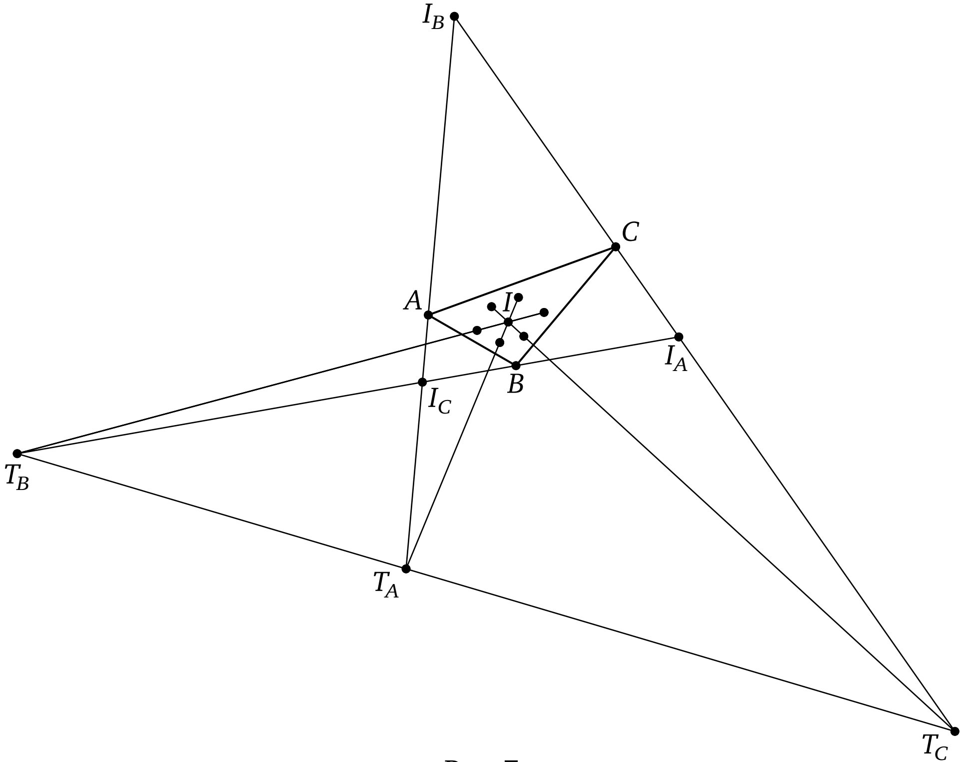


Рис. 7

следует, что (I_1, I_4, I, T_A) — гармоническая четвёрка точек. Для других четвёрок доказательство аналогично □

Лемма 3. *Точки T_A, T_B, T_C лежат на одной прямой* (рис. 7).

Доказательство. Прямая I_1I_4 является биссектрисой внешнего угла при вершине I треугольника I_BI_CI, следовательно,

$$\frac{\overline{I_CT_A}}{\overline{T_AI_B}} = -\frac{I_CI}{I_BI}.$$

Записав ещё два аналогичных равенства, получаем

$$\frac{\overline{I_CT_A}}{\overline{T_AI_B}} \cdot \frac{I_BT_C}{T_CI_A} \cdot \frac{I_AT_B}{T_BI_C} = -\frac{I_CI}{I_BI} \cdot \frac{I_BI}{I_AI} \cdot \frac{I_AI}{I_CI} = -1.$$

Отсюда по теореме Менелая заключаем, что T_A, T_B, T_C лежат на одной прямой. □

Доказательство теоремы об инцентрах (продолжение). Переведём проективным преобразованием прямую T_AT_B в бесконечно удалённую прямую. Поскольку (I_1, I_4, I, T_A), (I_2, I_5, I, T_B), (I_3, I_6, I, T_C) —

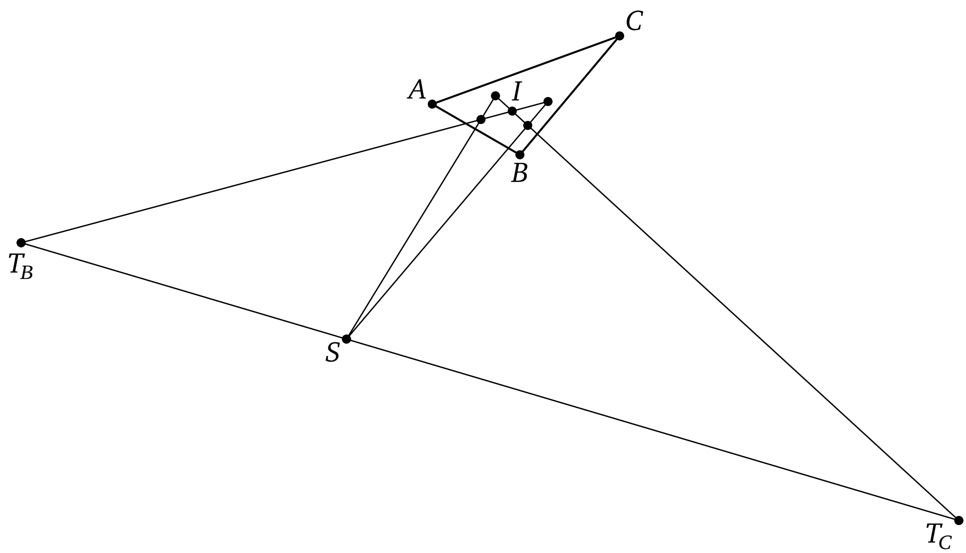


Рис. 8

гармонические четвёрки точек, точка I перейдёт в точку I' — общую середину отрезков $I'_1I'_4$, $I'_2I'_5$, $I'_3I'_6$ (буквы со штрихом обозначают образы точек). Следовательно, шестиугольник $I'_1I'_2I'_3I'_4I'_5I'_6$ центрально-симметричен, и поэтому он вписан в некоторую конику. Прообраз этой коники есть коника, содержащая точки I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6. Этим теорема об инцентрах доказана.

Можно провести последний шаг доказательства и без использования проективного преобразования плоскости. Обозначим через S точку пересечения прямых I_2I_3 и I_5I_6 (рис. 8). Рассмотрим проектирование с центром S прямой I_2I_5 на прямую I_3I_6. При этом проектировании точка I_2 переходит в I_3, I_5 — в I_6, I в себя, а точка T_B — в точку T'_B такую, что $[I_3, I_6; I, T'_B] = -1$. Но и $[I_3, I_6; I, T_C] = -1$, поэтому T'_B совпадает с T_C. Следовательно, точка пересечения прямых I_2I_3 и I_5I_6 лежит на прямой T_BT_C. Аналогично доказывается, что точки пересечения прямых I_1I_2 и I_4I_5, I_3I_4 и I_1I_6 лежат на прямой T_BT_C. Отсюда по теореме Паскаля заключаем, что шесть точек I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 лежат на одной конике. □

§ 3. Аналоги теоремы об инцентрах для центров вневписанных окружностей

Наряду с вышеприведённой теоремой об инцентрах, в [2] сформулирована и доказана полная теорема об инцентрах, в которой вместе с центрами вписанных окружностей рассматриваются центры вневписанных окружностей тех же самых треугольников. Сформулируем и докажем эту теорему.

Кроме инцентров I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 треугольников BIC_1, AIC_1, AIB_1, CIB_1, CIA_1, BIA_1, рассмотрим центры вневписанных окружностей этих треугольников. Обозначения будем использовать такие: для треугольника с инцентром I_k точка J_k^S есть центр вневписанной окружности, которая вписана во внутренний угол S этого треугольника. Все точки вида I_k, J_k^S лежат на шести прямых: I_1I_4, I_2I_5, I_3I_6 и перпендикулярных им прямых $J_1^BJ_4^C$, $J_2^AJ_5^C$, $J_3^AJ_6^B$. Первые три мы будем называть линиями инцентров, а последние три — линиями внешних центров. На прямой I_1I_4 лежит пара инцентров I_1, I_4 и пара центров вневписанных окружностей J_1^I, J_4^I.

На прямой $J_1^BJ_4^C$ — две пары центров вневписанных окружностей: J_1^B, $J_1^{C_1}$ и J_4^C, $J_4^{B_1}$. Действительно, прямая $J_1^BJ_4^C$ является биссектрисой пары вертикальных углов BIC и B_1IC1 — внешних углов треугольников BIC_1 и CIB_1, поэтому на ней лежат центры J_1^B, $J_1^{C_1}$ и J_4^C, $J_4^{B_1}$ вневписанных окружностей этих треугольников. Аналогично на остальных прямых. Перечисленные пары точек мы будем называть парами сопряжённых точек.

Теорема (полная теорема об инцентрах). *Пусть из прямых I_1I_4, I_2I_5, I_3I_6, $J_1^BJ_4^C$, $J_2^AJ_5^C$, $J_3^AJ_6^B$ выбраны три прямые так, что среди них нечётное число линий инцентров, и пусть на каждой из этих трёх прямых выбрана пара сопряжённых точек. Тогда эти шесть точек лежат на одной конике.*

Доказательство. Обозначим через U_A, U_B, U_C точки пересечения $J_1^BJ_4^C$, $J_2^AJ_5^C$, $J_3^AJ_6^B$ с I_BI_C, I_AI_C, I_AI_B соответственно. Будем следовать схеме доказательства теоремы об инцентрах. Сформулируем только утверждения лемм, поскольку они выводятся аналогично леммам 2 и 3.

Лемма 2$'$. *Четвёрки точек (I_1, I_4, I, T_A), (I_2, I_5, I, T_B), (I_3, I_6, I, T_C), (J_1^I, J_4^I, I, T_A), (J_2^I, J_5^I, I, T_B), (J_3^I, J_6^I, I, T_C), $(J_1^B, J_4^{B_1}, I, U_A)$, $(J_1^{C_1}, J_4^C, I, U_A)$, $(J_2^A, J_5^{A_1}, I, U_B)$, $(J_2^{C_1}, J_5^C, I, U_B)$, $(J_3^A, J_6^{A_1}, I, U_C)$, $(J_3^{B_1}, J_6^B, I, U_C)$ — гармонические.* □

Лемма 3$'$. *Тройки точек T_A, T_B, T_C; T_A, U_B, U_C; U_A, T_B, U_C; U_A, U_B, T_C лежат на одной прямой.* □

Далее, переведём, например, прямую U_BU_C в бесконечно удалённую прямую. Тогда пары точек I_1, I_4; J_1^I, J_4^I; $J_2^A, J_5^{A_1}$; $J_2^{C_1}, J_5^C$; $J_3^A, J_6^{A_1}$;

$J_3^{B_1}, J_6^B$ перейдут в пары точек, симметричных относительно точки I' (символ со штрихом обозначает образ соответствующей точки при рассматриваемом преобразовании). Поэтому, выбрав на каждой из прямых $I_1'I_4'$, $J_2^{A'}J_5^{C'}$, $J_3^{A'}J_6^{B'}$ пару точек, симметричных относительно I', получаем, что они являются вершинами центрально-симметричного шестиугольника. Вершины такого шестиугольника лежат на одной конике, поскольку его противоположные стороны пересекаются на одной прямой — бесконечно удалённой. Тогда прообразы его вершин также лежат на одной конике. Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Всего в полной теореме об инцентрах получаются 32 шестёрки точек, принадлежащих 32 различным коникам. Действительно, на каждой линии инцентров и каждой линии внешних центров будет по две пары сопряжённых точек. Учитывая 4 способа выбора прямых и по 2 способа независимого выбора точек на каждой прямой, получаем $4 \cdot 2^3 = 32$ различные шестёрки точек, лежащих на одной конике.

На самом деле и эту конструкцию можно ещё расширить, рассмотрев, наряду с инцентром I исходного треугольника ABC, центры его вневписанных окружностей I_A, I_B, I_C. Для каждого из этих центров образуется шесть треугольников, стороны которых лежат на сторонах или биссектрисах углов (внутренних или внешних) исходного треугольника. Например, для I_A это треугольники BI_AC_2, AI_AC_2, AI_AB_2, CI_AB_2, CI_AA_1, BI_AA_1, где A_2, B_2, C_2 — основания биссектрис внешних углов треугольника ABC. Через точку I_A проходит шесть биссектрис углов, образованных при пересечении прямых AA_1, BB_2 и CC_2. На этих биссектрисах лежит по четыре центра вписанных и вневписанных окружностей перечисленных треугольников. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 теперь обозначают центры соответствующих окружностей данных треугольников (в указанном порядке), причём I_2 и I_3 — центры вневписанных окружностей $\triangle AI_AC_2$ и $\triangle AI_AB_2$, касающихся сторон I_AC_2 и I_AB_2, а I_1, I_4, I_5, I_6 — центры вписанных окружностей остальных треугольников. Символ J_k^S теперь обозначает центр вписанной (для $k = 2, 3$ и $S = I_A$) или вневписанной (в остальных случаях) окружности, которая вписана во внутренний угол S треугольника с центром I_k. Тогда получаем пары сопряжённых точек I_1, I_4; $J_1^{I_A}, J_4^{I_A}$; I_2, I_5; $J_2^{I_A}, J_5^{I_A}$; I_3, I_6; $J_3^{I_A}, J_6^{I_A}$; $J_1^B, J_4^{B_2}$; $J_1^{C_2}, J_4^C$; $J_2^A, J_5^{A_2}$; $J_2^{C_2}, J_5^C$; $J_3^A, J_6^{A_2}$; $J_3^{B_2}, J_6^B$. Эти точки группируются в четвёрки, лежащие на одной прямой. В свою очередь, шесть прямых разбиваются на две группы по три прямые. В нашем перечислении снова записаны вначале точки первых трёх прямых (условно говоря, линий инцентров), а за ними последних трёх условно говоря, линий внешних центров). Теперь мы можем сформулировать окончательный результат, аналогичный полной теореме об инцентрах: *пусть выбраны три прямые, среди которых нечётное число линий инцентров, и на каждой из этих прямых выбрана пара сопряжённых точек*; *тогда эти шесть точек лежат на одной конике.*

Все проведённые доказательства (с соответствующими изменениями) сохраняются. Поскольку у исходного треугольника один инцентр и три центра вневписанных окружностей, получаем уже $4 \cdot 32 = 128$ шестёрок точек, лежащих на кониках. И это далеко не всё, что можно обнаружить в рассмотренной конфигурации. Для примера два утверждения сформулированы ниже в виде задачи.

Задача 2. Пусть I_Δ обозначает инцентр треугольника Δ, а J^S_Δ — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся сторон его внутреннего угла S. Докажите следующие утверждения.

1) Точки $J^B_{ABB_1}$, $J^B_{CBB_1}$, $J^C_{BCC_1}$, $J^C_{ACC_1}$, $J^A_{BAA_1}$, $J^A_{CAA_1}$ лежат на одной конике.

2) Точки $J^B_{ABB_1}$, $J^C_{ACC_1}$, I_{CAA_1}, I_{CBB_1}, I_{BAA_1}, I_{BCC_1} лежат на одной конике.

Список литературы

[1] *Григорьев Д. С., Мякишев А. Г.* И снова о гипотезах Штейнгарца // Математическое образование. 2013. № 3(67). С. 40–56.

[2] *Осипов Н. Н.* Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО, 2014. С. 205–216.

[3] *Осипов Н. Н.* О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. 2014. № 2. С. 41–50.

[4] *Штейнгарц Л.* Гипотезы о медианах, высотах, биссектрисах и... эллипсах // Математическое образование. 2012. № 2(62). С. 41–48.

[5] *Штейнгарц Л. А.* Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. 2012. № 6. С. 53–61.

Михаил Игоревич Толовиков, МАОУ «Общеобразовательный лицей „АМТЭК“» (г. Череповец)

`tolovikov@rambler.ru`

Наш семинар: математические сюжеты

Элементарное доказательство существования полинома Конвея

Т. Р. Гараев

В настоящей заметке приводится элементарное доказательство существования полинома Александера — Конвея, знаменитого инварианта в теории узлов. Предварительных знаний по этой теории не предполагается, так что читатель сможет здесь попутно ознакомиться с основами этой увлекательной науки.

Этот полином был придуман в двадцатые годы прошлого столетия американским математиком Джоном Александером. Его определение было совсем не элементарным — оно основано на достаточно продвинутых понятиях алгебраической топологии. В 1970 году Джон Конвей придумал элементарное определение полинома, который отличался от полинома Александера простой заменой переменной. Этот полином принято называть полиномом Конвея, и именно его существование доказывается в нашей заметке.

§ 1. Узлы, зацепления и их диаграммы

Узлом K называется замкнутая ориентированная ломанная без самопересечений, вложенная в евклидово пространство: $K \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. *Зацеплением* L называется конечное множество попарно не пересекающихся ориентированных замкнутых ломанных без самопересечений, вложенных в евклидово пространстве: $L \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Каждую ломаную в зацеплении L будем называть *компонентой*. Разумеется, узел — частный

Автор поддержан грантом РФФИ 19-01-00169.

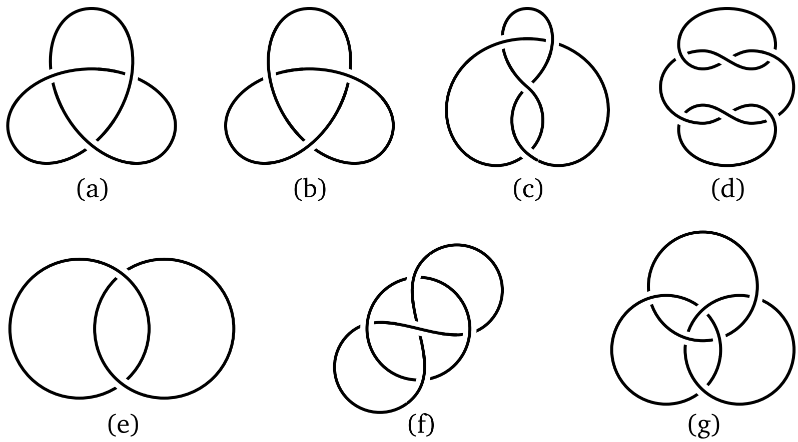


Рис. 1. Примеры диаграмм узлов и зацеплений: (a) правый трилистник, (b) левый трилистник, (c) узел “восьмёрка”, (d) узел бабушки, (e) зацепление Хопфа, (f) зацепление Уайтхеда, (g) зацепление Борромео

случай зацепления, а именно — однокомпонентное зацепление. Пустое множество мы будем считать зацеплением, а именно — зацеплением с пустым множеством компонент.

Диаграммой зацепления L называется проекция зацепления L в общем положении[1)] на плоскость, в которой показано, какая часть «проходит под», а какая «проходит над» в каждом конкретном пересечении. Примеры диаграмм узлов и зацеплений приводятся на рис. 1.

Кроме обычных зацеплений (определенных выше), нам потребуются *упорядоченные зацепления*. Они определяются так же, как обычные, только фиксируется порядок (нумерация) компонент. Очевидно, что узлы можно считать как обычными зацеплениями, так и упорядоченными. Для упорядоченных зацеплений определяется понятие диаграммы точно так же, как для обычных. Однако в дальнейшем слово «диаграмма», если не оговорено противное, будет означать «ориентированная диаграмма зацеплений».

§ 2. Эквивалентность диаграмм

На множестве диаграмм мы сейчас введём естественное отношение эквивалентности. Для этого нам нужно научиться перестраивать

[1)] Будем говорить, что проекция находится в общем положении, если никакие три вершины проекции не лежат на одной прямой и никакие три различных отрезка, соединяющих вершины проекции L, не имеют общей внутренней точки.

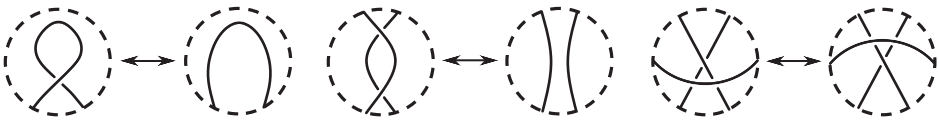


Рис. 2. Движения Рейдемейстера

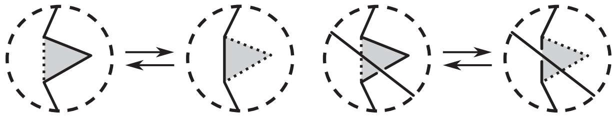


Рис. 3. Плоские изотопии

диаграммы с помощью движений Рейдемейстера R_1, R_2, R_3 (рис. 2) и с помощью плоских изотопий R_0 (рис. 3).

При движении R_1 находящаяся внутри пунктирной окружности петля заменяется на простую дугу (без скрещиваний), а часть диаграммы вне окружности не изменяется. При R_2 две дуги, одна из которых дважды проходит над другой внутри пунктирной окружности, заменяются на две непересекающиеся дуги. При R_3 внутри пунктирной окружности содержится одна дуга, проходящая над двумя скрещивающимися дугами, и она «перепрыгивает» через точку скрещивания.

Как действуют плоские изотопии, читатель легко поймёт, изучив рис. 3 и сопоставив с движениями Рейдемейстера.

Две диаграммы K_1 и K_2 называются *эквивалентными*, если от одной к другой можно перейти с помощью конечной последовательности движений Рейдемейстера и плоских изотопий. На рис. 4 мы приводим

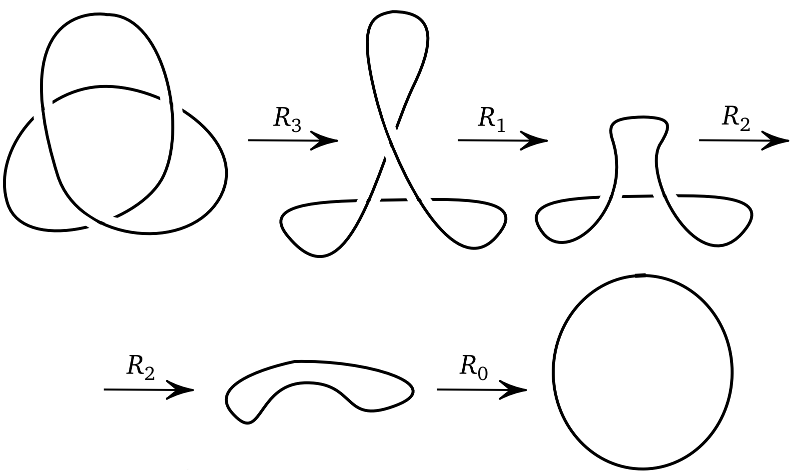


Рис. 4. Пример применения движений Рейдемейстера

пример последовательности из движений Рейдемейстера и плоских изотопий, соединяющей две разные диаграммы.

Функция $f(\cdot)$, сопоставляющая каждой диаграмме целое число или полином, называется *инвариантом*, если она принимает одинаковые значения на эквивалентных диаграммах.

§ 3. Формулировка основного результата

Основная Теорема. *Каждой диаграмме неупорядоченного зацепления можно сопоставить такую бесконечную последовательность целочисленных инвариантов* $c_{-1}=0, c_0, c_1, c_2, \ldots$, *принимающих на тривиальной однокомпонентной диаграмме* $\bigcirc$ *(т. е. на однокомпонетной диаграмме без скрещиваний) значения* $c_{-1}(\bigcirc) = 0$, $c_0(\bigcirc) = 1$, $c_1(\bigcirc) = 0$, $c_2(\bigcirc) = 0$, $\ldots$, *что для любых трёх диаграмм* K_+, K_-, K_0 *совпадающих вне пунктирного круга и имеющих внутри круга вид как на* рис. 5, *для любого* $n \geqslant 0$ *выполняется равенство* $c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0)$.

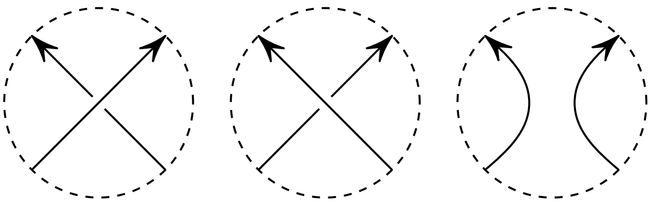


Рис. 5. К основной теореме

Упражнение 1. Покажите, что последовательность $c_{-1} = 0$, c_0, c_1, c_2, $\ldots$, из основной теоремы определяется однозначно.

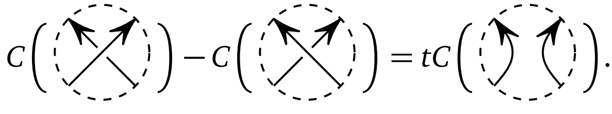
Из упражнения 1 следует, что корректно определён многочлен

$$C(K) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \ldots,$$

называемый *полиномом Конвея* диаграммы K. Равенство из теоремы эквивалентно соотношению

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0),$$

которое называется *скейн-соотношением Конвея*. Это соотношение часто изображают в виде



Скейн-соотношение Конвея сыграло решающую роль в создании других полиномиальных инвариантов, в том числе знаменитого полинома Джонса [3] и полинома HOMFLY [7].

§ 4. Вычисление полинома Конвея

Скейн-соотношение Конвея и соотношение $C(\bigcirc) = 1$ позволяют быстро найти полином Конвея любой не слишком сложной диаграммы, не вычисляя по отдельности коэффициенты $c_0(K), c_1(K), c_2(K), \ldots$

Мы предлагаем читателю, не откладывая, произвести несколько простейших таких вычислений.

Упражнение 1. Проверьте, что $C(\bigcirc\bigcirc) = 0$: полином Конвея тривиального зацепления из двух компонент равен нулю.

Упражнение 2. Вычислите полином Конвея от зацепления Хопфа и от зеркального образа (рис. 6 a, b) этого зацепления. Совпадают ли они?

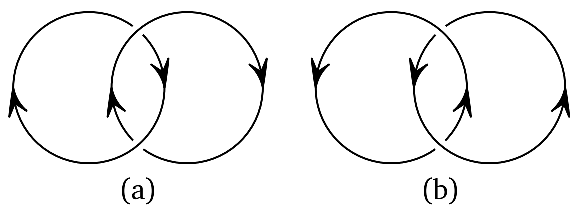


Рис. 6. К основной теореме

Упражнение 3. Вычислите полином Конвея от левого и правого трилистника (рис. 1 a, b). Совпадают ли они?

Упражнение 4. Вычислите полином Конвея от узла «восьмёрка». Эквивалентна ли восьмёрка трилистнику?

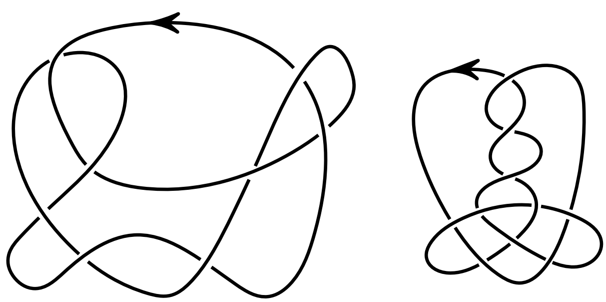


Рис. 7. Пример неэквивалентных узлов
с одинаковым значением полинома Конвея

Ответы на упражнения приводятся в конце статьи.

Замечание 1. Заметим, что полином Конвея — достаточно сильный инвариант, но не полный. Говоря иначе, совпадение значений полинома Конвея на разных неупорядоченных диаграммах не гарантирует эквивалентность этих диаграмм. На рис. 7 приведены два узла, значение полинома Конвея на которых совпадает (проверьте!), но диаграммы при этом не эквивалентны.

§ 5. Ключевые леммы

Будем говорить, что перекрёсток (точка самопересечения) a диаграммы зацепления K имеет *знак* $+1/-1$, если он выглядит как на рис. 8, т. е. MNL обходится против/по часовой стрелке. Через $\varepsilon(K, a)$ обозначим знак перекрёстка a диаграммы K.

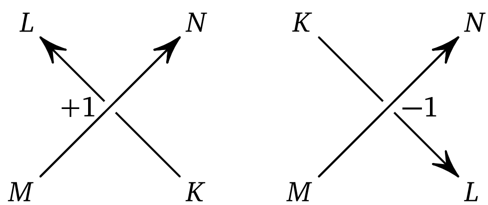


Рис. 8. Знаки перекрёстков

Для любой диаграммы зацеплений K с перекрёстком a обозначим через K_a диаграмму, полученную из K заменой a на перекрёсток противоположного знака (рис. 8), а через $K_{[a]}$ — неупорядоченную диаграмму, полученную из K удалением перекрёстка a (рис. 9).

Замечание 2. Заметим, что диаграмма K_a может быть как упорядоченной, так и неупорядоченной, в зависимости от диаграммы K, а диаграмма $K_{[a]}$ может быть только неупорядоченной. Это связано с тем, что после удаления перекрёстка количество компонент у диаграммы меняется и придумать «разумное» правило упорядочивания компонент у диаграммы $K_{[a]}$ непросто.

Будем называть *тривиальной диаграммой* диаграмму с непересекающимися несамопересекающимися компонентами.

Лемма 1. *Пусть дана пара (α, β) целочисленных инвариантов неупорядоченных диаграмм, причём $\beta(T) = 0$ для любой неупорядоченной тривиальной диаграммы T, у которой больше одной компоненты, и*

$$\beta(K) - \beta(K_a) = \varepsilon(a, K)\alpha(K_{[a]})$$

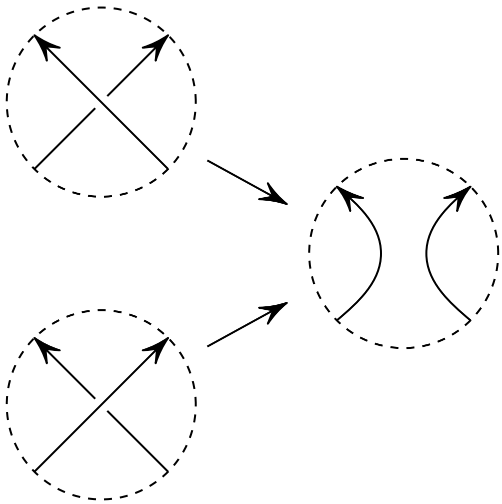


Рис. 9. Удаление перекрёстка

для любой неупорядоченной диаграммы K. Тогда существует такой инвариант γ неупорядоченных диаграмм зацеплений, что

1) $\gamma(K)-\gamma(K_a)=\varepsilon(a,K)\beta(K_{[a]})$ *для любой неупорядоченной диаграммы K;*
2) $\gamma(K)=0$ *для любой тривиальной неупорядоченной диаграммы K с двумя или более компонентами.*

Заметим, что соотношение

$$\beta(K)-\beta(K_a)=\varepsilon(a,K)\alpha(K_{[a]})$$

равносильно соотношению

$$\beta(K_+)-\beta(K_-)=\alpha(K_0),$$

где K_+, K_-, K_0 — диаграммы с рис. 5, совпадающие вне пунктирных кругов.

Упражнение 1. Покажите, что инвариантов γ из леммы 1, для которых $\gamma(\bigcirc)=0$, не более одного.

Напомним, что диаграммой упорядоченного зацепления называется диаграмма, компоненты которой упорядочены (занумерованы). Вторая лемма формулируется аналогично первой, только в ней γ является инвариантом диаграмм упорядоченных зацеплений. Мы в дальнейшем покажем, что основная теорема следует из первой леммы, затем покажем, что первая лемма следует из второй, после чего докажем вторую лемму.

Лемма 2. *Пусть дана такая пара (α, β) инвариантов диаграмм неупорядоченных зацеплений, что $\beta(T) = 0$ для любой тривиальной неупорядоченной диаграммы T, у которой больше одной компоненты, причём*

$$\beta(K) - \beta(K_a) = \varepsilon(a, K)\alpha(K_{[a]})$$

для любой неупорядоченной диаграммы K. Тогда существует такой инвариант γ упорядоченных диаграмм, что

1) $\gamma(K) - \gamma(K_a) = \varepsilon(a, K)\beta(K_{[a]})$ *для любой упорядоченной диаграммы K;*
2) $\gamma(K) = 0$ *для любой тривиальной упорядоченной диаграммы K с двумя или более компонентами.*

§ 6. Вывод основной теоремы из леммы 1

Положим $c_0(K) = 1$ для любой неупорядоченной диаграммы K с одной компонентой и $c_0(K') = 0$ для любой неупорядоченной диаграммы K' с двумя или более компонентами. Тогда для любых неупорядоченных диаграмм K_+, K_-, и K_0, которые совпадают вне пунктирной окружности, а внутри неё имеют вид, показанный на рис. 5, справедливо равенство

$$c_0(K_+) - c_0(K_-) = c_{-1}(K_0).$$

Пусть существует последовательность $c_{-1}, c_0, c_1 \ldots, c_n$ инвариантов неупорядоченных диаграмм, удовлетворяющая условиям основной теоремы. Тогда пара (c_{n-1}, c_n) удовлетворяет условию леммы 1. Следовательно, существует целочисленный инвариант c_{n+1} неупорядоченных диаграмм такой, что для любых неупорядоченных диаграмм K_+, K_- и K_0 выполняется равенство

$$c_{n+1}(K_+) - c_{n+1}(K_-) = c_n(K_0).$$

Так строится последовательность $c_{-1}, c_0, c_1 \ldots,$ удовлетворяющая заключению основной теоремы.

§ 7. Вывод леммы 1 из леммы 2

Для доказательства леммы 1 достаточно показать, что инвариант γ упорядоченных диаграмм из леммы 2 совпадает на диаграммах, отличающихся только порядком компонент.

Упражнение 1. Покажите, что у любой диаграммы K можно так изменить перекрёстки, что полученная диаграмма будет эквивалентна тривиальной (а именно, покажите, что любую диаграмму можно свести средствами изменения перекрёстков к диаграмме из упражнения 1 § 8).

Обозначим через K упорядоченную диаграмму с двумя или более компонентами. Пусть $u(K)$ минимальное число изменений перекрёстков, необходимое для получения упорядоченной тривиальной диаграммы из упорядоченной диаграммы K (что возможно согласно упражнению 1).

Докажем индукцией по u, что $\gamma(K)=\gamma(K')$.

Если $u(K)=0$, то K — упорядоченная тривиальная диаграмма. Обозначим через K' упорядоченную диаграмму, полученную из K изменением порядка компонент. Тогда $\gamma(K)=\gamma(K')=0$. Предположим, что $u(K)>0$. Обозначим через a такой перекрёсток упорядоченной диаграммы K, что $u(K_a)<u(K)$. Тогда

$$\gamma(K)-\gamma(K_a)=\varepsilon(a,K)\beta(K_{[a]}) \quad \text{и} \quad \gamma(K')-\gamma(K'_a)=\varepsilon(a,K')\beta(K'_{[a]}).$$

Заметим, что упорядоченные диаграммы K_a и K'_a совпадают с точностью до порядка компонент, а неупорядоченные диаграммы $K_{[a]}$ и $K'_{[a]}$ равны. Следовательно, $\beta(K_{[a]})=\beta(K'_{[a]})$. Так как $u(K_a)<u(K)$, по предположению индукции имеем $\gamma(K_a)=\gamma(K'_a)$. Следовательно, $\gamma(K)=\gamma(K')$.

Таким образом, для доказательства основной теоремы остается лишь доказать лемму 2. Мы начнем её доказательство с построения инварианта γ.

§ 8. Построение функции γ из леммы 2

До конца статьи мы будем называть *диаграммой* именно упорядоченную диаграмму, *контуром* — замкнутую ориентированную ломаную на плоскости, *набором контуров* — упорядоченный набор контуров, множество вершин которых находится в общем положении.

Пусть $\kappa=(\kappa_1,\dots,\kappa_n)$ — набор контуров, а $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ — такой упорядоченный набор точек, что $\xi_i\in\kappa_i$ и ξ_i не является точкой самопересечения контура κ_i для $i=1,\dots,n$. Будем называть пару (κ,ξ) *набором контуров с отмеченными точками*.

Для диаграммы K с компонентами $\bar\kappa_1,\dots,\bar\kappa_n$ будем говорить, что $\bar\kappa_i$ *лежит под* $\bar\kappa_j$, если любой отрезок компоненты $\bar\kappa_i$ либо не пересекается с $\bar\kappa_j$, либо лежит под отрезком, лежащим в $\bar\kappa_j$.

Для набора $\mathscr{K} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками обозначим через $\overline{\mathscr{K}}$ диаграмму с компонентами $\bar{\kappa}_1, \ldots, \bar{\kappa}_n$, получающуюся из набора κ добавлением информации, какой из пересекающихся отрезков лежит ниже, а какой выше, причём

- для любого $i < j$ компонента $\bar{\kappa}_i$ диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$ лежит под компонентой $\bar{\kappa}_j$ той же диаграммы;
- для любого i при обходе компоненты $\bar{\kappa}_i$ в соответствии с её ориентацией, начиная с точки ξ_i, каждый отрезок KL компоненты $\bar{\kappa}_i$ лежит выше любого отрезка, который был пройден раньше отрезка KL.

На рис. 10 мы приводим пример, как по набору $\mathscr{K} = (\kappa, \xi)$ строится диаграмма $\overline{\mathscr{K}}$.

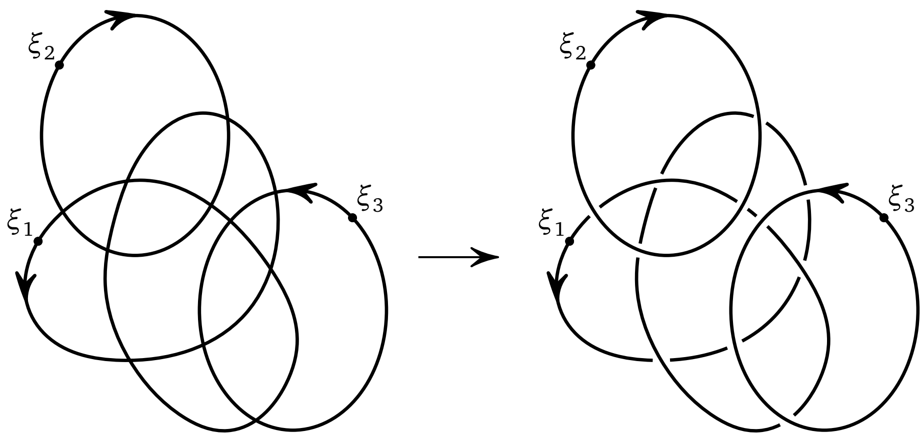


Рис. 10. Пример построения $\overline{\mathscr{K}}$

Упражнение 1. Покажите, что любая диаграмма, построенная по алгоритму, описанному выше, — тривиальная[2)].

Мы будем использовать результат упражнения 1 без доказательства.

Пусть $x_1, \ldots, x_j$ — некоторые перекрёстки (не обязательно различные) некоторой диаграммы K; $x := (x_1, x_2, \ldots, x_j)$; K_x — диаграмма, полученная из диаграммы K изменением перекрёстков $x_1, \ldots, x_j$.

Опишем построение функции γ. Каждый набор κ контуров произвольно дополним до набора $(\kappa, \xi(\kappa))$ контуров с отмеченными точками. Обозначим через $\mathbb{B}$ множество всех пар (x, κ), где κ — набор контуров, а x — упорядоченный набор из некоторых перекрёстков

2) Построение диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$ схоже с описанным в доказательстве теоремы 3.8 из [8].

(не обязательно различных) диаграммы $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}$. Если набор x пуст, то пару (x, κ) будем записывать как (κ).

Зададим функцию $\widehat{\gamma}\colon \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\widehat{\gamma}(\kappa) := 0 \quad \text{и} \quad \widehat{\gamma}(x, a, \kappa) := \widehat{\gamma}(x, \kappa) - \varepsilon\big(a, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_x\big)\beta\big(\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_{x,[a]}\big).$$

Для каждой диаграммы K, которая получается из упорядоченного набора κ контуров добавлением информации, какой из пересекающихся отрезков проходит ниже, а какой выше, выберем такой упорядоченный набор $y = y\big(K, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}\big)$ перекрёстков, что $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_y = K$.

Зададим функцию γ из леммы 2 формулой

$$\gamma(K) := \widehat{\gamma}(y, \kappa).$$

Значение $\gamma(K)$ зависит от выбора набора $(\kappa, \xi(\kappa))$ для κ, но этот выбор считается фиксированным. Функция γ корректно определена, а именно, $\gamma(K)$ не зависит от выбора $y\big(K, \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}\big)$, поскольку справедливо

Утверждение 1. *Пусть κ — набор контуров. Если наборы x, y перекрёстков диаграммы $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}$ таковы, что $\overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_x = \overline{(\kappa, \xi(\kappa))}_y$, то $\widehat{\gamma}(x, \kappa) = \kappa(y, \kappa)$.*

Доказательство. Положим $\mathscr{K} = (\kappa, \xi(\kappa))$. Обозначим через $z_1, \ldots, z_j$, a, b перекрёстки диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$, где $a \neq b$ (в остальном перекрёстки не обязательно различны). Положим $z := (z_1, z_2, \ldots, z_j)$.

Получаем

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(z, a, a, \kappa) &= \widehat{\gamma}(z, a, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_{z,a})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,a,[a]}) = \\ &= \widehat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_z)\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,[a]}) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_{z,a})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,a,[a]}) = \widehat{\gamma}(z, \kappa),\end{aligned}$$

так как $\varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_z) = -\varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_{z,a})$.

Далее,

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}(z, a, b, \kappa) &= \widehat{\gamma}(z, a, \kappa) - \varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}_{z,a})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,a,[b]}) = \\ &= \widehat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_z)\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,[a]}) - \varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}_{z,a})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,a,[b]}) = \\ &= \widehat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_z)\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,[a]}) - \\ &\qquad - \varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}_{z,a})\big(\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,[b]}) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_{z,[b]})\alpha(\overline{\mathscr{K}}_{z,[a],[b]})\big) = \\ &= \widehat{\gamma}(z, \kappa) - \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_z)\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,[a]}) - \\ &\qquad - \varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}_z)\beta(\overline{\mathscr{K}}_{z,[b]}) + \varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}_z)\varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}_z)\alpha(\overline{\mathscr{K}}_{z,[a],[b]}).\end{aligned}$$

Так как $\overline{\mathscr{K}}_{z,[a],[b]} = \overline{\mathscr{K}}_{z,[b],[a]}$, последнее выражение симметрично по a и b. Следовательно, $\widehat{\gamma}(z, a, b, \kappa) = \widehat{\gamma}(z, b, a, \kappa)$. Поэтому $\widehat{\gamma}(z, \kappa)$ не зависит от порядка, в котором идут элементы в упорядоченном наборе z.

Из этого, а также из равенства $\widehat{\gamma}(z,a,a,\kappa)=\widehat{\gamma}(z,\kappa)$, следует, что $\widehat{\gamma}(z,\kappa)$ зависит только от чётности числа вхождений каждого перекрёстка в набор z.

Так как $\overline{\mathscr{K}_x}=\overline{\mathscr{K}_y}$, знак перекрёстка a диаграммы $\overline{\mathscr{K}_x}$ совпадает со знаком перекрёстка a диаграммы $\overline{\mathscr{K}_y}$. Поэтому чётность числа вхождений перекрёстка a в x и в y одинакова. Следовательно, $\widehat{\gamma}(x,\overline{\mathscr{K}})=$ $=\widehat{\gamma}(y,\overline{\mathscr{K}})$. □

Упражнение 2. Покажите, что для построенной функции γ, любой упорядоченной диаграммы K и любого перекрёстка a диаграммы K справедливо равенство

$$\gamma(K)-\gamma(K_a)=\varepsilon(a,K)\beta(K_{[a]}).$$

Решение. Нетрудно видеть, что существует такой набор κ контуров, что диаграммы K и K_a получаются из κ добавлением информации, какой из пересекающихся отрезков проходит ниже, а какой выше. Выберем такой набор x перекрёстков, что $\overline{(\kappa,\xi(\kappa))}_x=K$. Тогда $\overline{(\kappa,\xi(\kappa))}_{x,a}=K_a$ и $\overline{(\kappa,\xi(\kappa))}_{x,[a]}=K_{[a]}$.

Имеем

$$\begin{aligned}\gamma(K)-\gamma(K_a)&=\widehat{\gamma}(x,\kappa)-\widehat{\gamma}(x,a,\kappa)=\\&=\varepsilon\big(a,\overline{(\kappa,\xi(\kappa))}_x\big)\beta\big(\overline{(\kappa,\xi(\kappa))}_{x,[a]}\big)=\varepsilon(a,K)\beta(K_{[a]}).\end{aligned}$$

Для доказательства леммы 2 теперь достаточно показать инвариантность функции γ, что будет сделано в следующем параграфе.

§ 9. Доказательство инвариантности функции γ

Будем называть две диаграммы K и K' *схожими*, если K' может быть получена из K операциями изменения перекрёстков.

Упражнение 1. Для любого набора $\mathscr{K}=(\kappa,\xi)$ из двух или более контуров с отмеченными точками выполняется $\gamma(\overline{\mathscr{K}})=0$.

Решение. Из построения функции γ следует, что для диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$ существует набор $\mathscr{K}'=(\kappa,(\xi'_1,\ldots,\xi'_n))$ контуров с отмеченными точками, для которого $\gamma(\overline{\mathscr{K}'})=0$. Для доказательства утверждения 1 достаточно рассмотреть случай, когда набор $\mathscr{K}$ получен из $\mathscr{K}'$ заменой отмеченной точки ξ'_i на другую точку ξ_i.

Если точки ξ'_i и ξ_i принадлежат одной и той же дуге (кривой на диаграмме, ограниченной перекрёстками), то $\overline{\mathscr{K}'}=\overline{\mathscr{K}}$ (рис. 11).

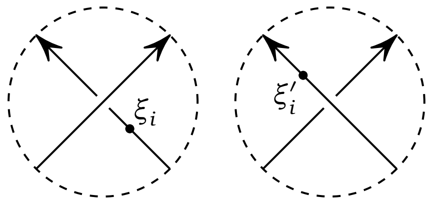


Рис. 11. Диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$ и $\overline{\mathscr{K}}'$

Если точки ξ_i' и ξ_i принадлежат разным дугам, то достаточно рассмотреть случай, когда точка ξ_i' принадлежит дуге ab (дуге, ограниченной перекрёстками ab), а точка ξ_i принадлежит дуге bc. Если перекрёсток b образован пересечением двух разных компонент, то $\overline{\mathscr{K}}' = \overline{\mathscr{K}}$. Если перекрёсток b образован самопересечением компоненты $\bar{\kappa}_i'$, то

$$\varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}')\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{[b]}) = \gamma(\overline{\mathscr{K}}') - \gamma(\overline{\mathscr{K}}'_b) = \gamma(\overline{\mathscr{K}}') - \gamma(\overline{\mathscr{K}}).$$

Нетрудно видеть, что неупорядоченная диаграмма $\overline{\mathscr{K}}_{[b]}$ тривиальна и содержит больше одной компоненты. Следовательно, $\beta(\overline{\mathscr{K}}_{[b]}) = 0$. Значит,

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}') = \gamma(\overline{\mathscr{K}}'_b) = \gamma(\overline{\mathscr{K}}) = 0.$$

Утверждение 1 доказано.

Обозначим через K_{R_i} любую диаграмму (упорядоченную или неупорядоченную), полученную из диаграммы K преобразованием R_i для $i = 0, 1, 2, 3$ (т. е. плоскими изотопиями или преобразованиями Рейдемейстера).

В ситуации на рис. 12 будем говорить, что перекрёстки x_1 и x_2 *участвуют* в движении Рейдемейстера R_i для $i = 1, 2, 3$. Если перекрёстки $x_1, \ldots, x_j$ (не обязательно различные) диаграммы K не участвуют в движении Рейдемейстера R_i для $i = 1, 2, 3$, то обозначим через $x_1', \ldots, x_j'$ перекрёстки диаграммы K_{R_i}, в которые переходят перекрёстки $x_1, \ldots, x_j$ при R_i. Обозначим через $x_1', \ldots, x_j'$ перекрёстки неупорядоченной диаграммы K_{R_0}, в которые переходят перекрёстки $x_1, \ldots, x_j$ (не обязательно различные) при плоской изотопии R_0. В ситуации на рис. 12 будем говорить, что перекрёстки $x_1, \ldots, x_j$ *не участвуют* в плоской изотопии. Положим $x' := (x_1', \ldots, x_j')$.

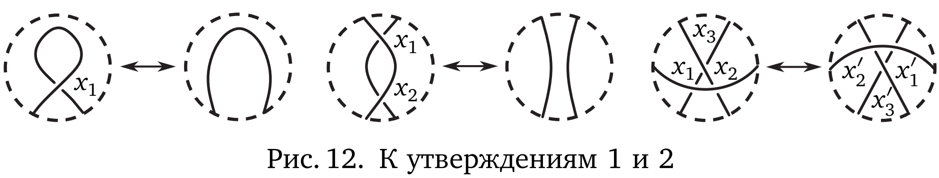


Рис. 12. К утверждениям 1 и 2

Утверждение 2. *Если $\gamma(K)=\gamma(K_{R_i})$, где $i=0,1,2,3$, и перекрёсток a не участвует в преобразовании R_i, то $\gamma(K_a)=\gamma(K_{R_i,a'})$.*

Доказательство. Имеем

$$\gamma(K_a)=\gamma(K)+\varepsilon(a,K_a)\beta(K_{[a]})=\gamma(K_{R_i})+\varepsilon(a',K_{R_i,a'})\beta(K_{R_i,[a']})=\gamma(K_{R_i,a'}).$$

Так как $\gamma(K)=\gamma(K_{R_i})$ и $\beta(K_{[a]})=\beta(K_{R_i,[a']})$, получаем, что $\gamma(K_a)=$ $=\gamma(K_{R_i,a'})$. □

Покажем инвариантность функции γ относительно каждого из преобразований R_i, где $i=0,1,2,3$.

Доказательство равенства $\gamma(K)=\gamma(K_{R_0})$. Выберем такой набор $\mathscr{K}=(\kappa,\xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}$ схожа с диаграммой K. Обозначим через $\mathscr{K}'=(\kappa',\xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}'$ схожа с диаграммой K_{R_0}, причём $\overline{\mathscr{K}}'$ получена из $\overline{\mathscr{K}}$ преобразованием R_0. По утверждению 1 получаем $0=\gamma(\overline{\mathscr{K}})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}')=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_0})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_x)=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_0,x'})=\gamma(K)=\gamma(K_{R_0}).$$ □

Доказательство равенства $\gamma(K)=\gamma(K_{R_1})$. Выберем такой набор $\mathscr{K}=(\kappa,\xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}$ схожа с диаграммой K. Обозначим через $\mathscr{K}'=(\kappa',\xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}'$ схожа с диаграммой K_{R_1}, причём $\overline{\mathscr{K}}'$ получена из $\overline{\mathscr{K}}$ движением R_1. Обозначим через a перекрёсток диаграммы K_{R_1}, участвующий в R_1. Нетрудно видеть, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}'_{[a]}$ тривиальна и имеет более одной компоненты. Следовательно, $\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{[a]})=0$. Имеем

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}')-\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_a)=\varepsilon(a,\overline{\mathscr{K}}')\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{[a]})=0.$$

Поэтому $\gamma(\overline{\mathscr{K}}')=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_a)$. Заметим, что либо у диаграммы $\overline{\mathscr{K}}'_a$, либо у диаграммы $\overline{\mathscr{K}}'$ перекрёсток, участвующий в R_1, совпадает с перекрёстком диаграммы K_{R_1}, участвующим в R_1. Обозначим соответствующую диаграмму через $\overline{\mathscr{K}}_{R_1}$. Выберем такое x, что $K=\overline{\mathscr{K}}_x$ и x не содержит перекрёстка a. По утверждению 1 получаем $0=\gamma(\overline{\mathscr{K}})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}')=$ $=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_1})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_x)=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_1,x'})=\gamma(K)=\gamma(K_{R_1}).$$ □

Доказательства равенства $\gamma(K)=\gamma(K_{R_i})$ для оставшихся движений Рейдемейстера схожи с доказательством этого равенства при $i=1$. Мы приводим их ниже, но читатель может проделать необходимые рассуждения самостоятельно.

Доказательство равенства $\gamma(K) = \gamma(K_{R_2})$. Выберем такой набор $\overline{\mathscr{K}} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}$ схожа с диаграммой K. Обозначим через $\overline{\mathscr{K}}' = (\kappa', \xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}'$ схожа с диаграммой K_{R_2}, причём $\overline{\mathscr{K}}'$ получена из $\overline{\mathscr{K}}$ движением R_2. Обозначим через a и b перекрёстки диаграммы K_{R_2}, участвующие в R_2 (рис. 13).

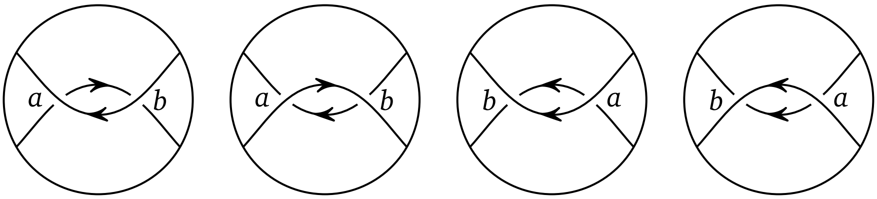


Рис. 13. К равенству $\gamma(K) = \gamma(K_{R_2})$

Имеем

$$\begin{aligned}\gamma(\overline{\mathscr{K}}') &= \gamma(\overline{\mathscr{K}}'_b) + \varepsilon(b, \overline{\mathscr{K}}')\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{[b]}) = \\ &= \gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{a,b,a}) + \varepsilon(a, \overline{\mathscr{K}}'_{a,b})\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{a,b,[a]}) = \gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{a,b}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\gamma(\overline{\mathscr{K}}') = \gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{a,b})$. Заметим, что либо у диаграммы $\overline{\mathscr{K}}'_{a,b}$, либо у диаграммы $\overline{\mathscr{K}}'$ перекрёстки, участвующие в R_2, совпадают с перекрёстками диаграммы K_{R_2}, участвующими в R_2. Обозначим соответствующую диаграмму через $\overline{\mathscr{K}}_{R_2}$. Выберем такое x, что $\overline{\mathscr{K}}_x = K$ и x не содержит перекрёстков a и b. По утверждению 1 получаем

$$0 = \gamma(\overline{\mathscr{K}}) = \gamma(\overline{\mathscr{K}}') = \gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_2}).$$

Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_x) = \gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_2,x'}) = \gamma(K) = \gamma(K_{R_2}). \qquad \square$$

Доказательство равенства $\gamma(K) = \gamma(K_{R_3})$. Обозначим через x_1, x_2, x_3 перекрёстки диаграммы K, участвующие в преобразовании R_3 (рис. 12).

Построим такой набор $\overline{\mathscr{K}} = (\kappa, \xi)$ контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}$ схожа с диаграммой K и отмеченные точки не лежат на дугах x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1 диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$. Обозначим через $\overline{\mathscr{K}}' = (\kappa', \xi')$ такой набор контуров с отмеченными точками, что диаграмма $\overline{\mathscr{K}}'$ схожа с диаграммой K_{R_3}, причём $\overline{\mathscr{K}}'$ получена из $\overline{\mathscr{K}}$ движением R_3.

Предположим, что перекрёстки x_1 и x_2 у диаграмм $\overline{\mathscr{K}}$ и K совпадают. Тогда выберем такое x, при котором $K = \overline{\mathscr{K}}_x$ и в x нет перекрёстков

x_1 и x_2. По утверждению 1 получаем $0=\gamma(\overline{\mathscr{K}})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}')=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_3})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_x)=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{R_3,x'})=\gamma(K)=\gamma(K_{R_3}).$$

Предположим теперь, что у диаграммы $\overline{\mathscr{K}}$ перекрёсток x_i, где i равно 1 или 2, не совпадает с перекрёстком диаграммы K. Нетрудно видеть, что неупорядоченные диаграммы $\overline{\mathscr{K}}_{[x_i]}$ и $\overline{\mathscr{K}}'_{[x_i']}$ эквивалентны. Имеем

$$\begin{aligned}\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i})&=\gamma(\overline{\mathscr{K}})+\varepsilon(x_i,\overline{\mathscr{K}}_{x_i})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{[x_i]})=\\&=\gamma(\overline{\mathscr{K}})+\varepsilon(x_i',\overline{\mathscr{K}}'_{x_i'})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{[x_i']})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i'}).\end{aligned}$$

Выберем такое x, что $K=\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x}$ и в x нет перекрёстков x_1 и x_2. Имеем $\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i'})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,R_3})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,R_3,x'})=\gamma(K)=\gamma(K_{R_3}).$$

Предположим, что перекрёстки x_1 и x_2 у диаграмм $\overline{\mathscr{K}}$ и K не совпадают. Нетрудно видеть, что для какого-то i диаграммы $\overline{\mathscr{K}}_{[x_i]}$ и $\overline{\mathscr{K}}'_{[x_i']}$ эквивалентны. Получаем

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i})=\gamma(\overline{\mathscr{K}})+\varepsilon(x_i,\overline{\mathscr{K}}_{x_i})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{[x_i]})=\gamma(\overline{\mathscr{K}})+\varepsilon(x_i',\overline{\mathscr{K}}'_{x_i'})\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{[x_i']})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i'}).$$

Далее, для $j\neq i$ диаграммы $\overline{\mathscr{K}}_{x_i,\,[x_j]}$ и $\overline{\mathscr{K}}'_{x_i',\,[x_j']}$ эквивалентны. Имеем

$$\begin{aligned}\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j})&=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i})+\varepsilon(x_j,\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j})\beta(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,\,[x_j]})\\&=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i'})+\varepsilon(x_j',\overline{\mathscr{K}}'_{x_i',x_j'})\beta(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i',\,[x_j']})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i',x_j'}).\end{aligned}$$

Выберем такое x, что $K=\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j,x}$ и в x нет перекрёстков x_1 и x_2. Получаем $\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}'_{x_i',x_j'})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j,R_3})$. Тогда по утверждению 2

$$\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j,x})=\gamma(\overline{\mathscr{K}}_{x_i,x_j,R_3,x'})=\gamma(K_{R_3})=\gamma(K).$$

Основная теорема доказана. □

Ответы к упражнениям § 4

2. $C(a)=-C(b)=x$.

3. $C(a)=C(b)=1+x^2$.

4. $C(c)=1-x^2\neq C(a)$. Так как полином Конвея является инвариантом и принимает разные значения на диаграмме восьмёрки и на диаграмме трилистника, эти диаграммы неэквивалентны.

Благодарности

Автор благодарен В. Мантурову, Е. Морозову, А. Скопенкову и А. Сосинскому за помощь в подготовке статьи.

Список литературы

[1] *Alexander J. W.* Topological invariants of knots and links // Trans. AMS. 1928. Vol. 30, № 2. P. 275–306.

[2] *Conway J. H.* An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties // Computational Problems in Abstract Algebra. Oxford, England: Pergamon Press, 1970. P. 329–358.

[3] *Jones V. F. R.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bull. AMS. 1985. Vol. 12, № 1. P. 103–111.

[4] *Kauffman L. H.* Formal knot theory. Dover Publications, 2006.

[5] *Lickorish W. B. R.*, *Millett K. C.* A polynomial invariant of oriented links // Topology. 1987. Vol. 26, № 1. P. 107–141.

[6] *Manturov V.* Knot theory. CRC pressm, 2018.

[7] *Przytycki J. H.*, *Traczyk P.* Conway algebras and skein equivalence of links of Conway type // Proc. AMS. 1987. Vol. 100. P. 744–748.

[8] *Прасолов В. В.*, *Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.

[9] *Скопенков А. Б.* Основы теории узлов и зацеплений для пользователя // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 128–165.

Тимур Рустемович Гараев, студент мехмата МГУ

turgar04@yandex.ru

Дельта-функции и парадоксы конкуренции в периодической среде

В. Г. Ильичёв

Ничто в мире не существует.
… А ежели, что и существует, то непознаваемо для человека.
… А ежели всё-таки познаваемо, то непередаваемо ближнему.
… Если мы и сможем что-то рассказать, то никто не заинтересуется.

Д. Фон-дер-Флаасс. Теоремы софиста Горгия и современная математика // Квант. 2010. № 5. С. 16–23

Нелинейные модели экологи — популярная область для применения и развития математических методов исследования динамических систем. В отличие от известных моделей математической физики здесь пока не предложено однозначного описания процессов. Возможно, тут ещё не родился свой Ньютон, но тем не менее усилиями Вольтерра [2] и других учёных описан допустимый класс нелинейных уравнений в экологии. В практических приложениях авторы вольны выбирать те или иные конкретные схемы.

Важно отметить, что не существует «экологии без эволюции». Так, в процессе воспроизводства особей создаются их копии (мутанты) с несколько отличными параметрами. Далее на уровне сообщества мутантов происходит конкуренция, выявляются «сильнейшие», их (т. е. новые) параметры постепенно закрепляются в популяции. Формально, структура таких эколого-эволюционных моделей включает в себя связку уравнений для переменных (= вектор X) и параметров (= вектор α):

$$\dot{X} = F(X, \alpha) \quad \text{и} \quad \dot{\alpha} = G(X, \alpha).$$

Здесь оператор G производит селекцию параметров. Его структура связана с найденными критериями конкурентного вытеснения. Поэтому актуальна проблема поиска признаков отбора.

Здесь существенную роль играет пространственно-временная неоднородность природных факторов. Ниже на основе нового специального класса моделей (D-системы) обсудим один из аспектов данной тематики: «загадочную» динамику конкурентов при периодическом изменении, например, температуры среды. Основная идея в конструкции D-систем заключается в использовании коэффициентов роста популяций, заданных периодическими дельта-функциями. В таких моделях нелинейные взаимодействия проявляются достаточно редко (каждая популяция на периоде имеет лишь одну свою точку роста). Таким образом, от полноценного нелинейного взаимодействия остаётся лишь некоторый «нелинейный скелет», сохраняющий однако конкурентную суть явлений.

Неожиданно оказалось, что поиск периодических режимов сводится к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений[1)]. А для обоснования устойчивости равновесий вполне достаточно элементарных средств (сжатые отображения, теория монотонных операторов и др). D-системы представляют собой своеобразные модели-«разведчики». Так, зачастую полученные в них признаки отбора или

Рис. 1. Сосуществование или вытеснение?

[1)] Заветная мечта каждого интеллектуала — свести логику к вычислениям.

сосуществования (рис. 1) верны и для моделей с произвольными коэффициентами.

Часть простых, но полезных результатов оформлена в статье в форме задач. А определённый набор подстрочных замечаний призван смягчить строгость математического изложения.

§ 1. Основные уравнения математической экологии. Постоянная среда

В этом вводном разделе для простоты считаем среду постоянной.

1. *Динамика одной популяции.* Обозначим через x численность популяции. Тогда её динамика задаётся в традиционной форме

$$\dot{x} = xf(x), \tag{1}$$

где $f(x)$-строго убывающая гладкая функция. Эта результирующая скорость уменьшается с увеличением численности популяции. Приведём примеры: $f(x) = 1 - x$ (Вольтерра [2]) и $f(x) = -1 + 2/(1 + x)$ (Контуа [10]).

Полагаем $f(0) > 0$ и $f(\infty) < 0$. Первое неравенство означает способность популяции возродиться при малой численности, а второе — запрет на её неограниченный рост.

При таких допущениях уравнение (1) имеет ровно два равновесия: тривиальное 0 и положительное $c > 0$. Последнее значение находится единственным образом из уравнения $f(c) = 0$. Ниже величину c будем называть продуктивностью популяции.

Уравнение (1) в фазовом пространстве $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ задаёт векторное поле, направленное к точке c. Формально, справедлива простая

Теорема 1. *Равновесие c глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+$.*

Идея обоснования. Построим непрерывную функцию так называемого ляпуновского типа $L(x) = |c - x|$. Она положительна и дифференцируема за исключением одной точки $x = c$; $L(c) = 0$. Легко убедиться, что функция Ляпунова L убывает на всякой траектории (1) при положительном начальном условии. Более того, $L[x(t)] \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому $x(t)$ монотонно стремится к c.

2. *Динамика двух близких конкурентов.* Пусть x, y — численности двух конкурентов. Тогда их совместная динамика задаётся моделью:

$$\dot{x} = xf(x, y) \quad \text{и} \quad \dot{y} = yg(x, y), \tag{2}$$

в которой f и g — убывающие функции по всем аргументам. Ниже мы будем предполагать, что конкуренты — это мутанты одной популяции, определяющие процессы отбора. Поэтому они оказывают одинаковое давление на скорость роста. Формально выполняется равенство:

$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) \quad \text{для всех } x, y. \tag{3}$$

Аналогично совпадают частные производные и у функции g.

Оказывается, из (3) вытекает, что f на самом деле является функцией одной переменной и зависит лишь от $(x+y)$. Действительно, рассмотрим вспомогательную функцию $h(z) = f(x+z, y-z)$. Из (3) сразу получаем $h'_z(z) = 0$ для всех z. При $z = y$ получаем $f(x, y) = f(x+y, 0)$.

Теперь удобно в модели (2) положить

$$\dot{x} = xf(x+y) \quad \text{и} \quad \dot{y} = yg(x+y). \tag{4}$$

Как и ранее считаем, что f и g — строго убывающие гладкие функции, удовлетворяющие «граничным» условиям:

$$f(0) > 0,\ f(\infty) < 0 \quad \text{и} \quad g(0) > 0,\ g(\infty) < 0.$$

В этом случае существуют положительные величины a, b — корни уравнений $f(a) = 0$ и $g(b) = 0$. Разумеется, точки $(a, 0)$ и $(0, b)$ — точки равновесия для (4). При этом первая точка соответствует вымиранию (= вытеснению) второй популяции, а вторая точка возникает при вымирании первой популяции.

Пусть заданы положительные начальные значения переменных, тогда каков исход конкуренции в модели (4)? Справедлива

Теорема 2. *Если $a > b$, то x-популяция вытесняет y-популяцию.*

Идея обоснования. В первом квадранте плоскости (x, y) построим непрерывную неотрицательную функцию

$$L(x, y) = \max\{|a - x|, y\}.$$

Она почти всюду дифференцируема и равна нулю лишь в одной равновесной точке. Самое главное, на каждой траектории системы (4) данная функция убывает и стремится к 0. Поэтому фазовая точка (x, y) стремится к $(a, 0)$.

Задача 1. Приведите строгое доказательство данной теоремы.

Этот простой результат иллюстрирует так называемый *принцип Гаузе*: при наличии одного кормового ресурса в постоянной среде может выжить лишь одна (наиболее продуктивная) популяция. Имеет место и более общий результат: при наличии m кормовых ресурсов выживает не более m конкурентов [3].

Последнее замечание. Формально в процессе эволюции как-то деформируются нелинейные[2)] функции скорости роста f в модели (1). Согласно теореме 2 это должно приводить к росту численности популяции.

§ 2. Рост популяции в периодической среде. Дельта-функции

Представляет интерес проблема о возможных явлениях в динамике конкурентов при периодическом (период обозначим T) изменении какого-либо из факторов среды. Известный пример физического маятника с колеблющейся точкой подвеса показывает, что здесь могут возникать парадоксальные ситуации (= стабилизация неустойчивого равновесия) [1]. Неожиданно оказалось, что в периодической среде на одном ресурсе может устойчиво сосуществовать любое конечное число конкурентов [9]. Авторы указанной статьи использовали простую нелинейную модель с кусочно-постоянными скоростями роста популяций. Путём прямых и очень громоздких вычислений они получили искомый результат. Ниже мы предлагаем более эффективную технику, основанную на применении периодических дельта-функций в качестве коэффициентов размножения:

$$\dot{x} = x\Big(-1 + \frac{\beta(t)}{1+x}\Big), \tag{5}$$

где $\beta(t)$ — скорость размножения. Считаем, что $\beta(t)$ — неотрицательная непрерывная функция с условием $\beta(t) = \beta(t+T)$ для всех t.

Для скорости роста переменной в (5) имеют место оценки:

$$\dot{x} \geqslant -x \quad \text{и} \quad \dot{x} \leqslant x(-1+\beta(t)). \tag{6}$$

Поэтому данное решение растёт не быстрее экспоненты и, значит, продолжается вперёд и назад неограниченно.

Разумеется, при $x_0 > 0$ выполнено $x_t > 0$ для всех t.

Также выполняется условие Липшица (= ограниченность производной правой части (5) по x), гарантирующее существование и единственность решения [1].

Напомним традиционную схему исследования моделей с T-периодической правой частью, основанную на тех или иных свойствах отображения Пуанкаре $P\colon x_0 \to x_T$. Очевидно, $P(0) = 0$. Справедлива (рис. 2 a)

[2)] На их (динозавров и др.) могилах можно было написать «Они были слишком линейны для этого мира» (А. М. Молчанов).

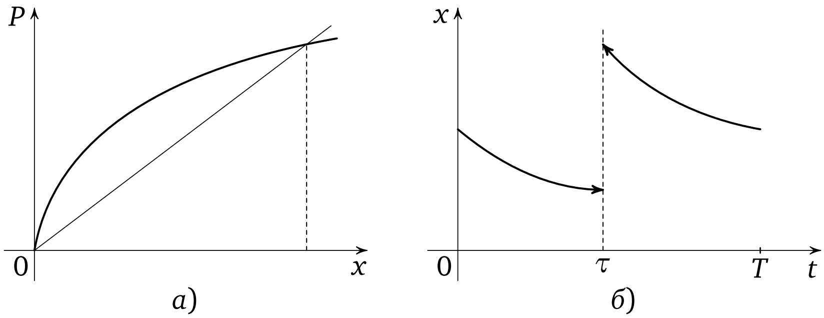


Рис. 2. *а*) Отображение Пуанкаре для (5); *б*) вид решения (11)

Теорема 3. *Функция P монотонно возрастает и вогнута.*

Идея обоснования. Для краткости представим (5) в форме

$$\dot{x} = F(x, t). \tag{7}$$

1. *Монотонность P.* Предположим противное: для некоторых двух значений аргумента одновременно выполняются противоположные неравенства $x_0 < y_0$ и $x_T > y_T$. Значит, существует точка θ из $[0, T]$, в которой $x_\theta = y_\theta$. Обратим время в уравнении (7), тогда из точки $t = \theta$ выходят две траектории. Но это противоречит теореме единственности.

2. *Вогнутость P.* В качестве иллюстрации рассмотрим частный случай выпуклой комбинации переменных — их полусумму. Положим $z = (x + y)/2$ и через $\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ обозначим траектории, выходящие из точек x_0, y_0, z_0. Из вогнутости F по первому аргументу следует: для всех $t \geqslant 0$ выполняется

$$\dot{z} = F(z, t) > \frac{F(x, t) + F(y, t)}{2} = \frac{\dot{x} + \dot{y}}{2}.$$

Поэтому при $z_0 = (x_0 + y_0)/2$ получаем $z_t > (x_t + y_t)/2$ для всех $t > 0$. Иными словами, Γ_z всегда лежит выше кривой $(\Gamma_x + \Gamma_y)/2$. Значит, P — вогнутая функция.

Пусть

$$\lambda = \int_0^T \beta(t)\, dt.$$

С помощью (6) легко решается

Задача 2. Доказать соотношения: $P(x) \approx x \cdot e^{-T+\lambda}$ для малых x и $P(x) \approx x \cdot e^{-T}$ для больших x.

При $\lambda > T$ график P пересекается с биссектрисой первого ортанта в единственной точке x^*. Очевидно, $P(x^*) = x^*$. Точка x^* соответствует началу и концу T — периодического решения.

При выбранном $x_0 > 0$ построим бесконечную рекурсию $x_{k+1} = P(x_k)$.

Задача 3. Покажите, что $\{x_k\}$ монотонно сходится к x^*.

Значит, найденное периодическое решение глобально устойчиво в $\mathbb{R}_+$.

В рамках модели Контуа (см. (5)) многие вычисления сильно упрощаются. Это будет продемонстрировано в следующих разделах. Пока неявно подсчитаем среднюю численность популяции в периодическом режиме. Перепишем (5) в форме соотношения

$$\frac{\dot{x}}{x} + \dot{x} + x = \beta(t) - 1.$$

После его интегрирования в промежутке $[0, T]$ с учётом $x(0) = x(T)$ находим

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{\lambda}{T} - 1 \tag{8}$$

Поэтому λ — мера продуктивности популяции. Неравенство $\lambda/T > 1$ является необходимым и достаточным условием невымирания популяции.

Следующий важный шаг на пути упрощений заключается в специальном выборе коэффициентов роста популяций $\beta(t)$. Как правило, у каждого фактора есть свой диапазон (= интервал толерантности), в котором он оказывает благоприятное воздействие на рост популяции, и поэтому здесь β достаточно велико. А вне данного интервала значение β равно нулю. Поэтому график β на $[0, T]$ имеет один или несколько горбов. Ограничимся случаем одного горба. Предельным случаем одного горба (в точке τ) является дельта-функция $\delta(t-\tau)$ С наивной точки зрения — это бесконечно узкий и одновременно бесконечно высокий горб с площадью, равной 1. Разумеется, такой математический объект как «вещь в себе» не может существовать. Однако в рамках теории дифференциальных уравнений его можно определить как «вещь для нас» вполне допустимым образом. Так, формально рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(x, \delta(t-\tau)) \tag{9}$$

с начальным условием x_0. Согласно известной методологии [8] решение уравнения (9) является поточечным пределом решений

$$\dot{x}_n = F(x_n, h_n(t-\tau)) \tag{10}$$

с начальным условием $x_n(0) = x_0$ для всех n. Здесь каждая h_n является гладкой функцией, положительной на своём отрезке $I_n = [\tau - a_n, \tau + b_n]$;

вне I_n функция h_n равна нулю; интеграл h_n по I_n равен 1. Положительные параметры a_n и b_n стремятся к 0 при $n \to \infty$.

Решение считается корректным, если от выбора дельтаобразной последовательности $\{h_n\}$ оно не зависит[3)]. Но, как показывают простые примеры, такое определение оказывается слишком жёстким (см. приложение 1).

Поэтому будем считать решение корректным, если существуют однозначные пределы слева и справа в точках разрыва.

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ чуть более сложную модель Контуа

$$\dot{x} = x\left(-1 + \frac{\lambda\delta(t-\tau)}{1+K+x}\right), \tag{11}$$

где K — положительная константа, например, численность конкурента в момент τ. Ясно, что решение (11) является почти всюду убывающей экспонентой за исключением τ — точки скачка (рис. 2 *б*).

В приложении 2 приведено вычисление пределов решения слева и справа в точке разрыва. Получена следующая формула:

$$\varphi(x_+, K) = \varphi(x_-, K) + \lambda, \tag{12}$$

где

$$\varphi(z, K) = (1+K)\ln(z) + z; \quad x_+ = x(\tau+0),\ x_- = x(\tau-0).$$

Далее будем считать, что δ является T-периодической функцией, т. е. $\delta(t+T) = \delta(t)$ для всех t. Теперь решение (11) продолжается вперёд неограниченно. На каждом отрезке $[m \cdot T,\ m \cdot T + T]$ обозначим через

$$y^m = x(m \cdot T + \tau + 0)$$

значение решения в точке разрыва справа. Как вычислить y^{m+1}? Воспользуемся соотношением (12), положив $x_+ = y^{m+1}$ и $x_- = y^m \cdot e^{-T}$. Тогда после элементарных преобразований получаем

$$\varphi(y^{m+1}, K) = \varphi(y^m, K) + T\left(\mu - K - \frac{y^m}{r}\right), \tag{13}$$

где $1/r = (1-e^{-T})/T$ и $\mu = \lambda/T - 1$. Эти обозначения будут использованы в дальнейшем. Если μ не слишком мало, то рекурсия (13) сходится к положительному равновесному значению $y^* = (\mu - K)/r$.

Ниже модели конкуренции в форме Контуа и с коэффициентами в виде периодических дельта-функций будем называть D-системами [4].

[3)] По сути, это запрет: в одной и той же реке нельзя утонуть дважды.

§ 3. D-система двух конкурентов

Сначала обсудим случай двух конкурентов. Тогда модель имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_1\left(-1 + \frac{\lambda_1\delta(t-\tau_1)}{1+x_1+x_2}\right), \quad \dot{x}_2 = x_2\left(-1 + \frac{\lambda_2\delta(t-\tau_2)}{1+x_1+x_2}\right). \tag{14}$$

Здесь $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$. Обозначим $\mu_i = \lambda_i/T - 1 > 0$ для всех i.

Обозначим $y_i^m = x_i(m \cdot T + \tau_i + 0)$ при целых $m \geqslant 0$. Положим

$$b_{12} = e^{\tau_2-\tau_1-T} \quad \text{и} \quad b_{21} = e^{\tau_1-\tau_2}.$$

Согласно рекурсии (13) находим

$$\varphi_1(y_1^{m+1}, y_2^m) = \varphi_1(y_1^m, y_2^m) + T\left(\mu_1 - \frac{y_1^m}{r} - y_2^m b_{12}\right), \tag{15}$$

где

$$\varphi_1(y_1, y_2) = (1 + b_{12}y_2)\ln(y_1) + y_1.$$

Для второй переменной устанавливаем, что

$$\varphi_2(y_1^{m+1}, y_2^{m+1}) = \varphi_2(y_1^{m+1}, y_2^m) + T\left(\mu_2 - y_1^{m+1}b_{21} - \frac{y_2^m}{r}\right), \tag{16}$$

где

$$\varphi_2(y_1, y_2) = (1 + b_{21}y_1)\ln(y_2) + y_2.$$

Отметим, что коэффициенты b_{ij} можно рассматривать как выражение $e^{-\rho_{ij}}$, в котором ρ_{ij} является расстоянием от точки τ_j до точки τ_i при движении по часовой стрелке на циклической шкале времени длины T. Эта трактовка полезна при построении отображения Пуанкаре для D-систем произвольной размерности.

Далее, отображение Пуанкаре

$$P\colon (y_1^m, y_2^m) \to (y_1^{m+1}, y_2^{m+1})$$

допускает явное расщепление в композицию двух «простых» отображений $g_2 \circ g_1$, где

$$g_1\colon (y_1^m, y_2^m) \to (y_1^{m+1}, y_2^m) \quad \text{и} \quad g_2\colon (y_1^{m+1}, y_2^m) \to (y_1^{m+1}, y_2^{m+1}).$$

Очевидно, каждое простое отображение изменяет только одну («свою») координату, при этом оно является монотонно возрастающей и вогнутой функцией. Поэтому здесь возникает ступенчатое движение фазовой точки, подобное перемещению ладьи на шахматной доске (рис. 3).

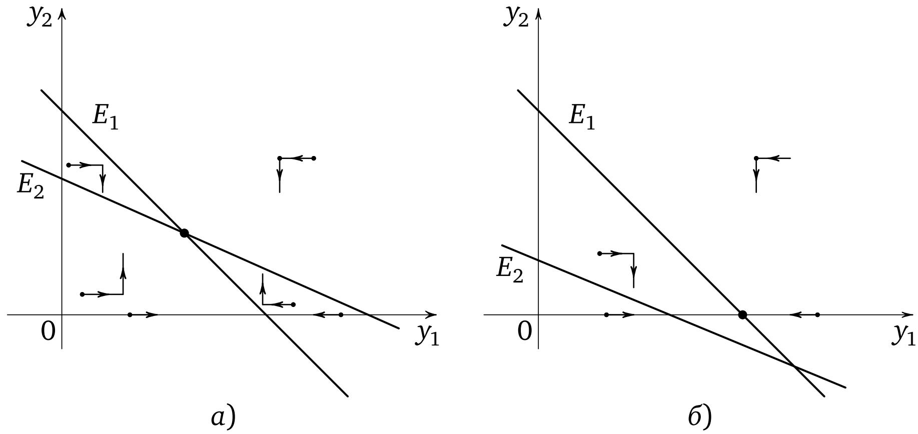


Рис. 3. Исход конкуренции в зависимости от расположения изоклин: *а*) сосуществование; *б*) первый вытесняет второго

Ключевую роль в исследовании динамики дискретной модели (15)–(16) играет взаимное расположение двух изоклин[4)]:

$$E_1 = \{Y = (y_1, y_2) \mid g_1(Y) = Y\} \quad \text{и} \quad E_2 = \{Y = (y_1, y_2) \mid g_2(Y) = Y\}.$$

Разумеется, здесь каждая изоклина является прямой, а их точка пересечения определяет равновесие (y_1^*, y_2^*), которое удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{y_1^*}{r} + y_2^* b_{12} = \mu_1, \quad y_1^* b_{21} + \frac{y_2^*}{r} = \mu_2. \tag{17}$$

Определитель системы (17) равен $\Delta = 1/r^2 - e^T$ и больше нуля при всех $T > 0$. Поэтому возникает такое пересечение изоклин, которое порождает устойчивость положительного равновесия (рис. 3 *а*).

Далее, пусть при решении (17) одна из компонент, скажем y_i^*, оказалась отрицательной, тогда в D-системе переменная x_i стремится к 0.

В результате анализа системы (17) при $T = 3$ обнаружены следующие парадоксальные явления [6].

1. *Слабо продуктивная популяция может вытеснять сильно продуктивную.* В частности, положим $\tau_1 = 0{,}01$, $\tau_2 = 2{,}99$ и $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2{,}9$.

Теперь из (17) находим $y_1^* < 0$, $y_2^* > 0$. Значит, менее продуктивная (с меньшим μ) популяция вытесняет более продуктивную (первую) популяцию.

---

4) Изоклимна дифференциального уравнения первого порядка — это кривая на плоскости, вдоль которой векторное поле, имеет один и тот же наклон. Здесь E_1 и E_2 определяют горизонтальное и вертикальное направления соответственно.

Таким образом, исход конкуренции зависит не только от параметров $\{\mu_i\}$, но и от расположения точек роста популяций. В данном случае вторая популяция находится сравнительно далеко на циклической шкале времени от первой, формально, $\rho_{21} > \rho_{12}$. Поэтому конкурентное давление второй более сильное.

2. *Нетранзитивность вытеснения.* Положим $x_i \succ x_j$, когда i-я популяция вытесняет j-ю. Тогда возможна ситуация:

$$x_1 \succ x_2, \quad x_2 \succ x_3 \quad \text{и} \quad x_3 \succ x_1.$$

Например, это имеет место при $\tau_1 = 1/2$, $\tau_2 = 3/2$, $\tau_3 = 5/2$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 6$.

3. *Нетранзитивность сосуществования.* Положим $x_i \sim x_j$, когда i-я и j-я популяция сосуществуют. Тогда следующее вполне допустимо[5]:

$$x_1 \sim x_2 \quad \text{и} \quad x_2 \sim x_3, \quad \text{но} \quad x_3 \quad \text{вытесняет} \quad x_1.$$

Это наблюдается при $\tau_1 = 0{,}01$, $\tau_2 = 4/3$, $\tau_3 = 8/3$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 6$.

Последние два парадокса дополнительно демонстрируют, как тонкое расположение точек роста популяций влияет на исход конкуренции.

И при большем числе (n) конкурентов поиск равновесия сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений. Это связано с удачным выбором нелинейной схемы Контуа. Такое равновесие будет всегда устойчивым [6] при достаточно большом T. Отсюда сразу вытекает классический результат о возможности устойчивого сосуществования любого числа конкурентов на одном кормовом ресурсе в периодической среде. Действительно, рассмотрим D-систему с параметрами $\tau_i = (i-1)T/n$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n > T$. Здесь при любом T существует положительное равновесие с $y_1^* = \ldots = y_n^*$. Когда T достаточно велико, оно является глобально устойчивым.

А если равновесие неустойчиво, то происходит так называемое «самоизреживание» сообщества — часть конкурентов вымирает, а для оставшихся популяций реализуется устойчивый равновесный режим.

Правильная трактовка парадокса 1 следующая: простого превосходства в продуктивности для конкурентной победы недостаточно. Но, вероятно, продуктивность с некоторым запасом всё-таки может обеспечить конкурентное преимущество. Так, в рамках D-систем обнаружено: *при условии $\lambda_1 > \lambda_i \cdot e^T$ для всех $i = 2, \ldots, n$ первая популяция вытесняет остальные*. Замечательно, что константа запаса равномерно ограничена по n. Оказалось, что аналогичный результат справедлив и для моделей конкурентов с традиционными непрерывными скоростями роста [5].

---

[5] Каждый хочет жить среди людей, но без соседей (В. Коняхин).

Последнее. В математическом плане взаимодействие «хищник (x) — жертва (y)» сложнее конкуренции. Так, даже в простейшей модели Вольтерра с постоянными параметрами положительное равновесие окружено семейством циклов (некоторого периода w). Теперь представим себе, что здесь некоторые коэффициенты выбраны T-периодическими. Тогда какие динамические режимы следует ожидать в такой модели? Наверное, ответ зависит от отношения w/T. В качестве «разведчика» можно использовать модель с T-периодическими дельта-функциями:

$$\dot{x} = \delta(t-\tau_1)xy - x \quad \text{и} \quad \dot{y} = y - \delta(t-\tau_2)xy \tag{18}$$

при $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$. Читателю предлагается простая

Задача 4. Построить отображение Пуанкаре для системы (18).

В работе [6, с. 75] указано, что его можно преобразовать к виду

$$\ln X^{m+1} = \ln X^m - T + Y^m \quad \text{и} \quad \ln Y^{m+1} = \ln Y^m + T - X^{m+1}. \tag{19}$$

В системе (19) имеется равновесие $X^* = Y^* = T$, которое неустойчиво при всех T. При $T = 1$ возникает локально устойчивый цикл длины 6.

§ 4. Мистическая эффективность дельта-функций

Давно замечено, что решение многих задач в линейной алгебре или функциональном анализе сильно зависит от выбора базиса пространства. Так, при удачном выборе линейный оператор приобретает совсем простой вид. Например, искомая матрица становится диагональной или превращается в набор жордановых клеток.

Нечто подобное имеет место и при обсуждении скоростей роста популяций с фиксированной площадью их графиков на $[0, T]$. В самом деле, их семейство представляет собой выпуклое, но, к сожалению, некомпактное множество. Как такое «плохое» множество сделать «хорошим»? Воспользуемся здесь аналогиями из теории Шоке [7], в которой обсуждается геометрия теоретико-вероятностных функций плотности $\{p(t)\}$. Считаем, что они заданы для неотрицательных t, а интеграл от p равен 1. Рассмотрим сильное сжатие этого множества путём применения вещественного преобразования Лапласа:

$$L\colon p(t) \to q(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot p(t)\, dt \quad \text{при } s \geqslant 0.$$

Очевидно, $q(0) = 1$. Основное свойство таких функций — это последовательное чередование знаков их производных: $q'(s) < 0$, $q''(s) > 0$,

… (такие функции называются вполне монотонными). Данное семейство (Q) допускает компактификацию в рамках специальной метрики Фреше. Напомним, что компактификация — это добавка к семейству несобственных элементов (= присоединение «горизонта»), после чего семейство становится компактным.

Поскольку Q — выпуклый компакт, представляет интерес описание всех его крайних точек (=вершин), поскольку всякая его точка Q является выпуклой комбинацией крайних точек (теорема Крейна — Мильмана). Здесь С. Н. Бернштейн установил замечательный результат:

крайние точки Q — это экспоненты вида $e^{-\tau s}$ при $\tau \geqslant 0$.

Известно, что дельта-функция $\delta(t-\tau)$ есть L-прообраз экспоненты $e^{-\tau s}$. Поэтому набор дельта-функций — это «удачный» базис в множестве скоростей роста, «затаившихся за горизонтом».

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. *О корректности*. При $\tau > 0$ рассмотрим уравнение $\dot{x} = \delta(t-\tau)$ с начальным условием x_0. Для каждого $\alpha \in [0,1]$ зададим α-параметрическое семейство «ступенек»

$$W_n(t) = \begin{cases} \alpha \cdot n & \text{при } t \in \left[\tau - \frac{1}{n}, \tau\right], \\ (1-\alpha) \cdot n & \text{при } t \in \left(\tau, \tau + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Очевидно, площадь всякой ступеньки равна 1.

Пусть $h_n(t-\tau)$ — гладкое приближение к $W_n(t)$. Тогда имеем:

$$x_n(t) = x_0 \quad \text{при } t \leqslant \tau - \frac{1}{n}; \quad x_n(\tau) = x_0 + \alpha;$$
$$x_n\left(\tau + \frac{1}{n}\right) = x_0 + 1 \quad \text{при } t \geqslant \tau + \frac{1}{n}.$$

Для предельного решения устанавливаем: оно является кусочно-постоянной функцией с точкой разрыва τ. При этом находим

$$x(\tau - 0) = x_0, \quad x(\tau) = x_0 + \alpha, \quad x(\tau + 0) = x_0 + 1.$$

Разумеется, с точкой τ «дела совсем плохи», поскольку решение зависит от α. Но зато однозначно определяются пределы решения (9) слева и справа от точки τ.

2. *Формула скачка*. Выберем какую-либо гладкую функцию $h_n(t-\tau)$ и для соответствующего решения x_n получим уравнение:

$$(1+K)\frac{\dot{x}_n}{x_n} + \dot{x}_n + x_n = \lambda h_n(t-\tau) - 1 - K. \tag{П.1}$$

Проинтегрируем каждое слагаемое (П. 1) в малом промежутке I_n. Отметим, что интеграл от x_n будет мал, поскольку данная функция медленно изменяется (не быстрее экспоненты). Поэтому в пределе находим

$$\varphi(x_+, K) = \varphi(x_-, K) + \lambda, \tag{П.2}$$

где $\varphi(z, K) = (1 + K)\ln z + z$. Очевидно, $x_- = x_0 \cdot e^{-\tau}$.

Соотношение (П. 2) задаёт отображение $x_0 \to x_T$, которое является монотонно возрастающей и вогнутой функцией (см. теорему 3).

Список литературы

[1] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

[2] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

[3] *Дегерменджи А. Г.* Динамика гетерогенной популяции в постоянных и периодически меняющихся условиях среды // Динамика микробных популяций в открытых системах. Красноярск: СО АН СССР. 1975. С. 55–78.

[4] *Ильичёв В. Г.* Фрагмент математической теории конкуренции биологических видов в переменной среде // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 437–447.

[5] *Ильичёв В. Г.* Универсальные константы запаса и критерии отбора в переменной среде // Матем. заметки. 2001. Т. 70, вып. 5. С. 691–704.

[6] *Ильичёв В. Г.* Устойчивость, адаптация и управление в экологических системах. М.: Физматлит, 2009.

[7] *Фелпс Р.* Лекции о теоремах Шоке. М.: Мир, 1968.

[8] *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

[9] *Armstrong R. A., Mc. Gehee R.* Coexistence of species competing for shared resources // Theor. Pop. Biol. 1976. Vol. 9, № 3. P. 317–328.

[10] *Contois D. E.* Kinetics of bacterial growth relationship between population density and specific growth rate of continuous culture // J. Gen. Microbiol. 1959. Vol. 21, № 1. P. 40–50.

Виталий Григорьевич Ильичёв, Южный научный центр РАН, г. Ростов-на-Дону

vitaly369@yandex.ru

Бросание кости до первой шестёрки

И. Р. Высоцкий

Нижеприведённая задача была предложена в разделе «Темы для эссе» на заочной олимпиаде по теории вероятностей в 2020/2021 учебном году. В ответ оргкомитет получил несколько сочинений на эту тему, среди которых выделялось эссе, написанное Александрой Нестеренко, на тот момент ученицей 8 класса школы 1278 Москвы. Публикуем его с сокращениями.

Задача

На открытом уроке учительница математики моделировала геометрическое распределение[1)] для иллюстрации распределения случайной величины «число попыток до достижения первого успеха». Она попросила каждого ученика бросать кубик до тех пор, пока не выпадет шестёрка, и записать, сколько на это потребовалось бросков. Каждый ученик должен был повторить этот эксперимент три раза. Набор полученных чисел дал распределение случайной величины «число бросков до первой шестёрки».

На уроке присутствовала другая учительница, которая решила повторить такую работу в своём классе. Она заметила, что у некоторых учеников три шестёрки выпали довольно быстро и они бездельничали, поджидая, пока невезучие одноклассники их нагонят.

Поэтому вторая учительница усовершенствовала опыт: она попросила каждого из своих учеников бросать кубик ровно пять минут, отмечать выпадение шестёрок и каждый раз записывать, через сколько бросков случилась очередная шестёрка. После этого она взяла все числа, записанные школьниками, и тоже построила распределение величины «число бросков до первой шестёрки».

[1)] Название связано с тем, что вероятности в этом распределении образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и со знаменателем $q=1-p$ (p и q — традиционные обозначения вероятностей успеха и неудачи в каждом отдельном испытании).

Действительно ли два этих опыта моделируют одно и то же геометрическое распределение? Если они различаются, то каким образом и почему?

Для написания эссе на эту тему потребуется довольно много экспериментировать. Для экспериментов можно использовать готовые программы для бросания игральных костей или даже обычный Excel.

Эссе Александры Нестеренко

В первом эксперименте честно моделируется распределение длин серий до первой шестёрки. Если длина серии (включая конечную шестёрку) k, то вероятность такой серии $g_k = pq$, где $p = 1/6$, $q = 1 - p = 5/6$.

Во втором эксперименте моделируется какое-то другое распределение R. Представим себе, что вторая учительница дала на эксперимент не 5 мин, а так мало времени, что хватит сделать только один бросок кости. Тогда примерно у шестой части учеников выпадет шестёрка и они сообщат, что число бросков до шестёрки — единица. Все остальные ученики не сообщат ничего. Мы должны заключить, что вероятность шестёрки после одного броска равна 1, после двух и больше бросков — 0.

Если времени хватит на два броска, то не равные нулю вероятности будут для чисел бросков 1 и 2, равные нулю — для всех чисел бросков, больших, чем 2. Из этого можно сделать несколько выводов.

1. Вероятность серии длины k из второго эксперимента зависит не только от k, но и от числа бросков L, которое успеет сделать ученик, т. е. распределение R имеет параметры p и L: $R = R(L, p)$ Обозначим функцию вероятности этого распределения $r_{L,k}$:

$$r_{L,k} = P(X = k), \quad \text{если } X \sim R(L, p).$$

2. Во втором эксперименте по сравнению с первым завышается вероятность коротких серий и занижается вероятность длинных серий.

3. $r_{1,1} = 1$. Можно вычислить вероятность $r_{L,L}$. Если N учеников делают по L бросков, то математическое ожидание количества учеников, которые сообщат о длине серии L равно $pq^{L-1}N$. В среднем за L бросков будет Lp успехов. Поэтому ученики сообщат о в среднем LpN экспериментах до первого успеха. Тогда

$$r_{L,L} = \frac{pq^{L-1}N}{LpN} = \frac{q^{L-1}}{L}.$$

Если во втором эксперименте число бросков ограничено шестью и измеряется вероятность серии до первого успеха длины 6, то вероятность серии длины 6, совпадает с геометрической:

$$r_{6,6} = \frac{qp^5 N}{6pN} = pq^5 = g_6.$$

Обозначим $\delta_{L,k}$ относительное отклонение $r_{L,k}$ от g_k:

$$\delta_{L,k} = \frac{r_{L,k} - g_k}{g_k} = \frac{r_{L,k}}{g_k} - 1.$$

Уже выяснилось, что

$$\delta_{1,1} = \frac{r_{1,1}}{g_1} - 1 = \frac{1}{p} - 1, \quad \delta_{6,6} = 0$$

и

$$\delta_{L,L} = \frac{r_{L,L}}{g_L} - 1 = \frac{1}{pL} - 1 = \frac{1/p - L}{L}.$$

В числителе выражения для $\delta_{L,L}$ заменим L переменной k и положим

$$\delta_{L,k} = \frac{1/p - k}{L}. \tag{1}$$

Формула (1) даёт правильное значение относительного отклонения для случаев, когда измеряется вероятность серии до первого успеха той же длины, что разрешённое число бросков. Но (1) имеет и другие достоинства.

1. Для данной длины серии k отклонение $R(L, p)$ от геометрического распределения $G(p)$ уменьшается с ростом L. А это и ожидалось. Ведь если последовательность бросков очень длинная, уже не важен вклад одной серии до первой шестёрки, которая не завершена и отброшена.

2. Формула (1) правильно показывает, что вероятность для малых длин серий больше, а для больших — меньше по сравнению с вероятностями геометрического распределения.

3. Формула (1) простая. Если бы надо было придумать выражение, которое меняет знак с ростом k и уменьшается с ростом L, то проще, чем $(\mathrm{const} - k)/L$, не получилось бы, наверное.

Примем формулу (1) в качестве рабочей гипотезы для относительного отклонения $\delta_{L,k}$. Если гипотеза (1) верна, то функция вероятности распределения $R(L, p)$ из второго эксперимента равна

$$r_{L,k} = (\delta_{L,k} + 1) g_k = \frac{1/p + L - k}{L} pq^{k-1} = \frac{(L-k)p + 1}{L} q, \quad k = 1, 2, \ldots, L. \tag{2}$$

* * *

На рис. 1 показаны результаты численного моделирования второго эксперимента для $N_2 = 10\,000$ учащихся и количества бросков $L = 100$.

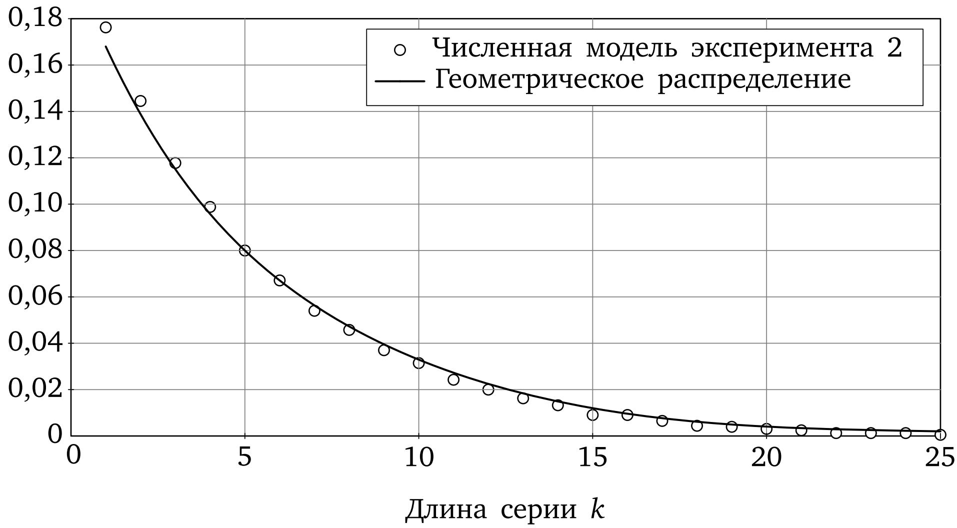


Рис. 1

Отмеченными точками показаны частоты длин серий, полученные при моделировании второго эксперимента. Сплошная линия — график вероятности $g_k = pq^{k-1}$. Вероятность в геометрическом распределении и частота $\rho_{100,k}$ серий различаются не сильно, и видна закономерность: при $k < 6$ частота $\rho_{100,k}$ выше соответствующей вероятности геометрического распределения, при $k > 6$ — ниже. Это подтверждает вывод, что в условиях второго эксперимента вероятность по сравнению с геометрическим распределением перераспределяется в пользу коротких серий за счёт длинных. Но рассеивание частот при моделировании геометрического распределения намного больше, чем разность между вероятностями двух распределений. Отсюда можно сделать два вывода.

1. Во втором эксперименте невозможно заметить, что моделируется распределение, отличающееся от геометрического.
2. «Нечестный» второй эксперимент в данных условиях может измерять геометрическое распределение даже с большим успехом, чем «честный» первый.

Гораздо лучше различия между распределениями видны на графике относительной погрешности (рис. 2).

Отмеченные точки на рис. 2 — это относительное отклонение частот серий в численной модели от геометрической вероятности. Чёрная прямая — график гипотетического относительного отклонения, вычисленного по формуле (1). При не очень больших длинах серий

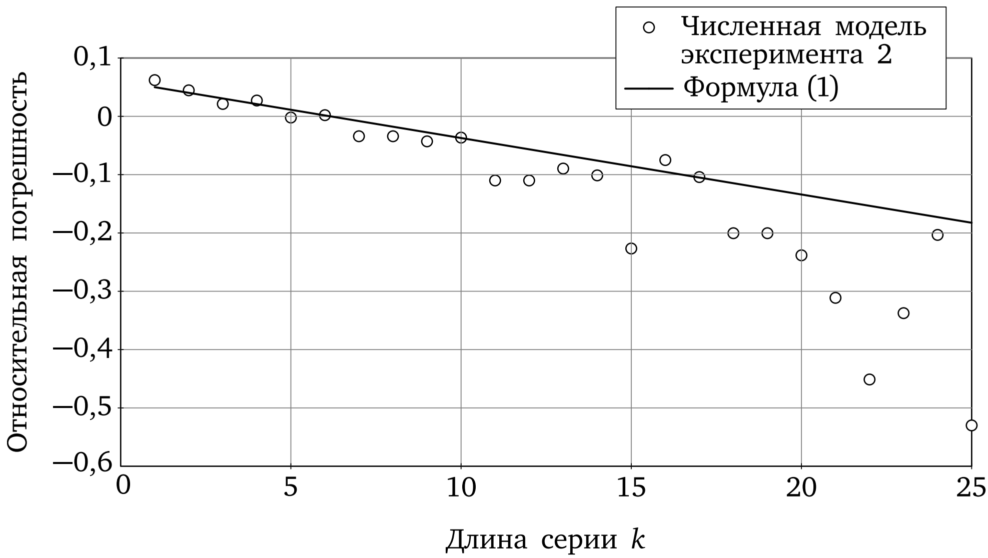


Рис. 2

($k < 15$) точки лежат близко к прямой, при больших длинах серий разброс точек становится слишком большим и трудно сказать что-то определённое.

Комментарий

Когда я предлагал эссе о различиях двух распределений, меня вдохновляла совершенно реальная ситуация. Часто учителя, проводящие у себя в классе практическую работу, допускают именно эту ошибку: не фиксируют количество серий бросков до шестёрки, а позволяют школьникам бросать кость «до свистка», отбрасывая затем конечные броски, не давшие шестёрку.

При этом я не без оснований полагал, что получающееся распределение, если можно так выразиться, обрезанное геометрическое с функцией вероятности

$$r_{L,k} = \mathrm{E}\frac{X_k}{Y} = \frac{pq^{k-1}}{1-q} \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, L$$

и

$$r_{L,k} = 0 \quad \text{при } k > L,$$

где L — число бросков, которое экспериментатор успел сделать до окончания отведённого времени[2], X_k — число серий длины k, окон-

[2] Во избежание путаницы в комментарии оставлены все буквенные обозначения из текста эссе.

чившихся шестёркой, а Y — общее случившееся количество серий, окончившихся шестёркой, во всей последовательности из L бросков.

Говоря «не без оснований», я имею в виду, что это действительно так, если мы имеем одну последовательность из L бросков, и вычисляем $r_{L,k}$ как отношение числа X_k серий, давших шестёрку при k-м броске, к общему количеству Y серий, окончившихся шестёркой. Это можно показать с помощью несложной комбинаторики или с помощью рассуждений, привлекающих симметрию: вопрос эквивалентен вопросу о том, какова вероятность того, что первая серия в такой последовательности будет иметь длину ровно k.

Иными словами, если бы вторая учительница попросила каждого из своих учеников в своём индивидуальном эксперименте подсчитать отношение числа серий длины k к общему числу серий, окончившихся шестёркой, а потом усреднила бы все полученные частоты, то получила бы что-то близкое к тому, что написано выше.

Поэтому, получив эссе Александры Нестеренко, я решил, что где-то ошибка. Во всяком случае, гипотеза о том, что относительное отклонение распределения второй учительницы от геометрического равно $\delta_{L,k} = (6-k)/L$, уж точно, как мне казалось, не выдерживает критики: она не согласуется с распределением

$$r_{L,k} = \frac{pq^{k-1}}{(1-q)}$$

и не может быть получена из сравнения одной-единственной пары известных вероятностей.

Однако, разбираясь в тексте, я понял, что не могу найти ошибку. Тогда я занялся компьютерным моделированием, которое раз за разом подтверждало Сашину правоту. Теперь я искал ошибку уже у себя, и, наконец, нашёл.

Ошибка оказалась поучительной. Дело в том, что данные не являются частотами из повторяющихся последовательностей бросков, а частота собирается по всему классу, где кости бросают ученики с номерами i от 1 до N и каждый из них получает в результате своей деятельности Y_i серий, из которых $X_{i,k}$ имеют длину k. Тогда частотная оценка вероятности зависит от всех Y_i и $X_{i,k}$, т. е. искомое распределение имеет не параметр L «число сделанных бросков», а векторный параметр $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, \ldots, L_N)$, содержащий длины всех последовательностей бросков, выполненных классом, а, значит, ещё и параметр N «число учащихся». Таким образом, получается не одно распределение, а целое семейство распределений $R(N, \boldsymbol{L}, p)$, а оценки вероятностей какого-то из этих распределений, сделанные второй учительницей, равны

$$\widehat{r}_{L,k} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N} Y_i}.$$

Говоря о каком-то распределении, я имею в виду то, которое получается при конкретном числе учащихся N и конкретном случившемся векторе $\boldsymbol{L}$.

Чтобы хоть как-то понять, с чем мы имеем дело, разумно найти предельное распределение этого семейства при $N \to \infty$, считая, что все случайные компоненты L_i имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}L$. Переходя к пределу по вероятности, получаем:

$$r_{\mathrm{E}L,k} \xleftarrow[N\to\infty]{P} \widehat{r}_{L,k} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N} Y_i} \xrightarrow[N\to\infty]{P} \frac{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{N} X_{i,k}}{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{N} Y_i} = \frac{\mathrm{E}X_k}{\mathrm{E}Y} = \frac{\mathrm{E}X_k}{p\mathrm{E}L},$$

Предпоследнее равенство вытекает из естественного предположения, что все величины $X_{i,k}$ имеют одно и то же распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}X_k$, где X_k — число серий длины k в случайной последовательности бросков до первой шестёрки, полученной случайным школьником, и что все величины Y_i также распределены одинаково и имеют математическое ожидание $\mathrm{E}Y$ (Y — общее число серий в этой случайной последовательности).

Обозначим среднее число бросков $\mathrm{E}L$, сделанных учеником, просто L. Это, конечно, нехорошо, но не вызывает путаницы и согласуется с обозначением из Сашиного эссе. В интерпретации с бросанием костей в классе такой переход можно оправдать предположением, что все бросают кости с одинаковой скоростью, например, раз в две секунды, повинуясь ритмичным взмахам учительских бровей.

Тогда предельное распределение R получает параметр L, и закон больших чисел вкупе с единственностью предела обеспечивает для предельного распределения функцию вероятности

$$r_{L,k} = \frac{\mathrm{E}X_k}{pL}.$$

Найдём числитель правой части. Каждая серия длины k начинается с какого-то броска. Пусть I_j — индикатор события «серия длины k началась с броска номер j» и, следовательно, закончилась, броском номер $j+k-1$.

$$\mathrm{E}I_j = P(I_j = 1) = \begin{cases} q^{k-1}p & \text{при } j = 1, \\ p \cdot q^{k-1}p = q^{k-1}p^2 & \text{при } 1 < j \leqslant L-k+1, \\ 0 & \text{при } j > L-k+1. \end{cases}$$

Тогда, переходя к математическим ожиданиям в равенстве $X_k = \sum_{j\geqslant 1} I_j$, получаем:

$$\mathrm{E}X_k = q^{k-1}p + (L-k+1-1)q^{k-1}p^2 = ((L-k)p+1)q^{k-1}p,$$

откуда

$$r_{L,k} = \frac{(L-k)p+1}{L}q^{k-1},$$

что совпадает с выражением (2), полученным Сашей Нестеренко на основе гипотетической формулы относительного отклонения

$$\delta_{L,k} = \frac{1/p-k}{L},$$

которую Саша вывела из весьма эфемерных предположений и сравнения чисел $r_{L,L}$ и g_L и о достоинствах которой пишет: *«Если бы надо было придумать выражение, которое меняет знак с ростом k и уменьшается с ростом L, то проще, чем $(\mathrm{const}-k)/L$ не получилось бы, наверное»*. Согласитесь, мы видим пример незаурядной математической интуиции.

Интересно и заключение: *«„Нечестный“ второй эксперимент в данных условиях может измерять геометрическое распределение даже с большим успехом, чем „честный“ первый»*.

Мы не хотим агитировать за нечестность. Саша, видимо, тоже. Так или иначе, она не повторила вслух резон второй учительницы, хотя тоже, возможно, согласна с тем, что при такой организации опыта дисциплина крепче.

Иван Ростиславович Высоцкий, МЦНМО

i_r_vysotsky@hotmail.com

По мотивам задачника

Разрезание треугольника на равные треугольники

А. Д. Рябичев

Настоящая статья содержит решение задачи 23.8 («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 23, с. 216):

При каких n любой треугольник можно разрезать на n равных треугольников? (*А. Ю. Сойфер*)

А именно, в статье доказывается, что *почти любой* треугольник можно разрезать лишь на n^2 равных между собой треугольников, причём для каждого n такое разбиение единственно. Для решения этой «школьной» задачи мы используем чуть более продвинутую технику, чем просто школьная геометрия, — некоторые приёмы из линейной алгебры, анализа и теории меры.

§ 1. Введение

Любой треугольник можно разрезать на n^2 равных между собой треугольников для любого $n \in \mathbb{N}$. Схема такого разрезания показана на рис. 1. Будем называть такие разбиения *стандартными*.

Некоторые треугольники допускают и другие разрезания на m равных между собой треугольников, в том числе для чисел m, не являющихся полными квадратами. Мы предлагаем читателю рассмотреть самые простые примеры, приведённые ниже, самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что если треугольник Δ можно разбить на 2 равных между собой треугольника, то Δ равнобедренный.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России».

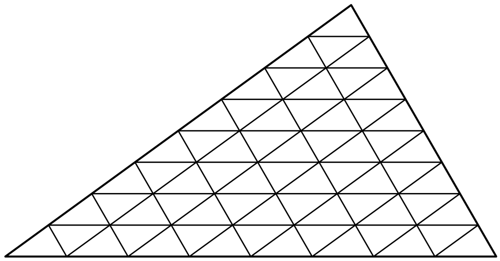


Рис. 1. Разрезание треугольника на n^2 равных треугольников

Задача 2. а) Докажите, что если треугольник Δ можно разбить на 3 равных между собой треугольника, то Δ имеет угол $\pi/3$.

б) Докажите, что таких треугольников всего два (с точностью до подобия).

Задача 3. Постройте треугольник, который можно разбить на 4 равных между собой треугольника способом, отличным от стандартного.

Задача 4. Существует ли треугольник, который можно разбить на 5 равных между собой треугольников?

При большом m анализ способов разбить треугольник на m равных довольно сложен. В нашей статье мы поговорим о следующей задаче.

Вопрос. *Существует ли треугольник, который можно разрезать лишь на n^2 равных между собой треугольников*?

В книге [1] А. Сойфер даёт положительный ответ на этот вопрос, демонстрируя ряд изящных и весьма полезных приёмов из линейной алгебры, так что приведённое им доказательство вполне доступно заинтересованному старшекласснику.

Мы дадим немного другое доказательство существования такого треугольника. При этом мы выходим за рамки школьной геометрии и используем более продвинутые приёмы из анализа и теории меры. Как нам кажется, эта техника довольно естественна для решения нашей задачи. В частности, она легко приводит к более общему результату, чем просто теорема существования:

Теорема 1. *Почти любой треугольник допускает разбиение лишь на n^2 равных между собой треугольников для всех натуральных n.*

Более тщательный анализ разбиений даёт следующее интересное обобщение:

Теорема 2. *Почти для любого треугольника все разбиения на равные между собой треугольники могут быть устроены только как на* рис. 1.

В формулировках теорем 1 и 2 требуется уточнить, что означают слова *почти любой*. В следующих двух разделах мы даём необходимые определения.

§ 2. Множества меры нуль

Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}^k$ имеет *меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество X можно покрыть не более чем счётным числом параллелепипедов со сторонами, параллельными координатным осям, и суммарным объёмом меньше ε. В этих терминах фраза «*почти любая точка из* $\mathbb{R}^k$» означает «*любая точка из* $\mathbb{R}^k$, *не принадлежащая заданному множеству меры нуль*».

Легко показать, что подмножество множества меры нуль также является множеством меры нуль. Объединение не более чем счётного числа множеств меры нуль будет иметь меру нуль. В частности,

Предложение 1. *Объединение счётного числа прямых в* $\mathbb{R}^2$ *имеет меру нуль.*

Пусть даны открытые подмножества $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Мы называем отображение $f: U \to V$ *гладким*, если его координатные функции непрерывно дифференцируемы. Следующее утверждение нетрудно вывести из локальной липшицевости гладкого отображения (см., например, [2, с. 610–611]).

Предложение 2. *Для любого множества меры нуль* $X \subset \mathbb{R}^2$ *и любого гладкого отображения* $f: U \to V$ *множество* $f(X \cap U)$ *имеет меру нуль.*

Здесь существенна гладкость отображения f. Пример негладкого f, для которого утверждение предложения 2 неверно, может быть построен при помощи кривой Пеано.

Используя компактность, несложно убедиться, что никакой куб ненулевого размера в $\mathbb{R}^k$ не является множеством меры нуль (см., например, [2, с. 103]). Из этого легко выводится

Предложение 3. *Если множество* $M \subset \mathbb{R}^k$ *имеет непустую внутренность, то для любого множества меры нуль* $Z \subset \mathbb{R}^k$ *множество* $M \setminus Z$ *также непусто.*

§ 3. Пространство треугольников

Каждому треугольнику Δ сопоставим упорядоченную тройку длин его сторон (a, b, c). Ясно, что для нашей задачи достаточно рассмотреть лишь те треугольники, у которых одна из сторон равна единице. Поэтому будем считать, что $c = 1$.

Таким образом, множество всех треугольников (с упорядоченными вершинами, с точностью до подобия) отождествляется с подмножеством $T \subset \mathbb{R}^2$, заданным неравенствами $x+1>y$, $y+1>x$ и $x+y>1$.

Далее мы построим такое множество $\Sigma \subset T$ меры нуль, что любой $\Delta \in T \setminus \Sigma$ обладает свойствами из теорем 1 и 2. Очевидно, теорема А. Сойфера вытекает из теоремы 1: множество $T \subset \mathbb{R}^2$ имеет непустую внутренность и, следовательно, по предложению 3 не может являться множеством меры нуль.

§ 4. Несоизмеримость углов

Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — подмножество, заданное уравнениями $x>0$, $y>0$ и $x+y<\pi$. Для $(\alpha, \beta) \in A$ существует единственный треугольник $\Delta \in T$ с упорядоченным набором углов $(\alpha, \beta, \pi-\alpha-\beta)$. Этим задано отображение $f: A \to T$.

Предложение 4. *Отображение f гладко.*

Доказательство. Возьмём произвольный треугольник ABC, в котором $AB=1$. Тогда по теореме синусов

$$AC = \frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}, \quad BC = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}.$$

Отношение гладких функций гладко, поэтому зависимость сторон треугольника ABC от его углов является гладкой, что и требовалось. □

Для каждой тройки рациональных чисел $(q_1, q_2, q_3) \neq (0,0,0)$ уравнение

$$q_1 x + q_2 y + q_3(\pi - x - y) = 0$$

задаёт прямую либо пустое множество. Пусть $\Sigma_A \subset \mathbb{R}^2$ — объединение всех прямых такого вида, и пусть $\Sigma_1 = f(\Sigma_A \cap A)$. Тогда по предложению 1 множество Σ_A имеет меру нуль, а по предложению 2 множество Σ_1 имеет меру нуль.

Про треугольники из $T \setminus \Sigma_1$ говорят, что *их углы несоизмеримы*.

Замечание. Если α, β, γ — набор углов некоторого треугольника, причём $(\alpha, \beta) \in \Sigma_A$, то тогда также $(\beta, \alpha) \in \Sigma_A$, $(\alpha, \gamma) \in \Sigma_A$, и т. д. (т. е. не важно, какую пару углов брать).

Лемма 1. *Пусть $\Delta \in T \setminus \Sigma_1$. Тогда если Δ разбит на треугольники, равные Δ', то Δ и Δ' подобны.*

Доказательство. Предположим обратное: Δ разбит на треугольники, равные Δ', и при этом Δ' не подобен Δ. Пусть $\alpha < \beta < \gamma$ — углы Δ, а $\alpha' \leqslant \beta' \leqslant \gamma'$ — углы Δ'.

Заметим, что обязательно выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$ или $\gamma' > \gamma$. В противном случае Δ' и Δ окажутся подобны.

Если $\alpha' > \alpha$, то внутри угла α не поместится ни один из углов Δ', что противоречит наличию разбиения.

Если $\beta' > \beta$, то, ввиду существования разбиения, внутри α и β помещается целое число углов, равных α', откуда $(\alpha, \beta) \in \Sigma_A$.

Наконец, пусть $\gamma' > \gamma$. Тогда каждый угол в Δ может быть составлен из углов α', β'. Другими словами, для некоторых $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ мы имеем

$$\begin{cases} \alpha = u_1\alpha' + u_2\beta', \\ \beta = v_1\alpha' + v_2\beta', \\ \gamma = w_1\alpha' + w_2\beta'. \end{cases}$$

Но три вектора $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ и $w = (w_1, w_2)$ линейно зависимы в $\mathbb{Q}^2$. Это значит, что $q_1u + q_2v + q_3w = 0$ для некоторой тройки рациональных чисел $(q_1, q_2, q_3) \neq (0, 0, 0)$. Отсюда следует равенство $q_1\alpha + q_2\beta + q_3\gamma = 0$, что противоречит предположению $\Delta \notin \Sigma_1$. $\square$

§ 5. Несоизмеримость сторон

Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ — наименьшее подполе, содержащее квадратные корни всех натуральных чисел. Опишем его явно: все элементы $\mathbb{K}$ суть дроби вида

$$\frac{\pm\sqrt{m_1} \pm \ldots \pm \sqrt{m_k}}{\pm\sqrt{n_1} \pm \ldots \pm \sqrt{n_l}}$$

с ненулевыми знаменателями, где $m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ и $\mathbb{K}$ счётно.

Для каждой тройки q_1, q_2, q_3 элементов из $\mathbb{K}$, такой что $(q_1, q_2) \neq \neq (0, 0)$, возьмём прямую в $\mathbb{R}^2$, заданную уравнением $q_1x + q_2y + q_3 = 0$. Пусть $\Sigma_2 \subset \mathbb{R}^2$ — объединение всех прямых такого вида.

Про треугольники из $T \setminus \Sigma_2$ говорят, что *их стороны несоизмеримы над* $\mathbb{K}$. По предложению 1 множество Σ_2 имеет меру нуль.

Лемма 2. *Пусть* $\Delta \in T \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. *Тогда если* Δ *разбит на треугольники, равные* Δ', *то* Δ *и* Δ' *подобны с коэффициентом* $1/n^2$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть Δ разбит на m копий треугольника Δ'. По лемме 1 треугольники Δ и Δ' подобны. Из соотношения площадей, коэффициент подобия равен $1/\sqrt{m}$.

Обозначим длины сторон треугольника Δ через a, b, c, причём $c=1$. Тогда Δ' имеет стороны длиной $\frac{1}{\sqrt{m}}a$, $\frac{1}{\sqrt{m}}b$, $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Рассмотрим замощение стороны длины c. Для некоторых $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ имеем

$$c = n_1\frac{1}{\sqrt{m}}a + n_2\frac{1}{\sqrt{m}}b + n_3\frac{1}{\sqrt{m}},$$

откуда

$$\frac{n_1}{\sqrt{m}}a + \frac{n_2}{\sqrt{m}}b + \frac{n_3-\sqrt{m}}{\sqrt{m}} = 0.$$

Из предположения $\Delta \notin \Sigma_2$ следует, что оба числа n_1, n_2 равны нулю. Поэтому $n_3 = \sqrt{m}$, т. е. $m = n_3^2$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Нам достаточно положить

$$\Sigma = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap T.$$

Действительно, Σ имеет меру нуль, а согласно лемме 2 любой треугольник $\Delta \in T \setminus \Sigma$ можно разбить лишь на n^2 равных между собой треугольников. $\square$

§ 6. Области со стандартным разбиением

Начнём техническую подготовку к доказательству теоремы 2. Пусть дано разбиение некоторого подмножества плоскости на равные треугольники. Будем называть разбиение *стандартным*, если все треугольники лежат в некоторой решётке как на рис. 1.

Зафиксируем треугольник $\Delta \in T$. Возьмём ограниченное множество $U \subset \mathbb{R}^2$, допускающее стандартное разбиение на треугольники, равные Δ.

Пусть δ — компонента границы множества U. Более точно, δ является замкнутой ломаной, по одну сторону к δ по всей длине примыкает U, а по другую сторону вблизи δ лежит незаполненная часть плоскости и, возможно, некоторые треугольники, которые соприкасаются с δ лишь вершиной (рис. 2). Также предположим, что хотя бы одна неограниченная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus U$ примыкает к δ хотя бы по одному ребру.

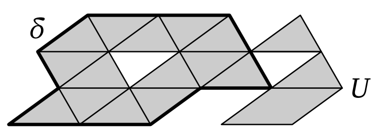


Рис. 2. Компонента границы U

Будем считать вершинами δ только те точки, где она делает излом. Углы δ будем мерить так, что вблизи вершины внутренняя часть угла покрыта областью U. Таким образом, углы δ принимают значения в $(0;\pi)\cup(\pi;2\pi)$. Выберем направление обхода δ.

Лемма 3. *У δ найдутся либо два угла $<\pi$, идущих подряд, либо угол $>\pi$, оба соседних с которым $<\pi$.*

Доказательство. Заметим, что для рёбер δ есть всего шесть вариантов направления. Отметим на единичной окружности 6 точек, соответствующих этим направлениям. Мы получили своего рода циферблат с шестью «делениями».

Можно сказать, что если мы проходим угол $<\pi$, то следующее ребро δ поворачивается относительно предыдущего на 1 или 2 деления, а если мы проходим угол $>\pi$, то следующее ребро δ поворачивается относительно предыдущего на -1 или -2 деления.

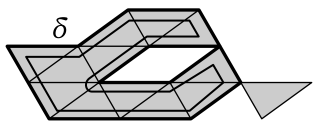


Рис. 3. Компонента границы U и идущая вдоль неё кривая внутри U

Вообще говоря, δ может иметь самопересечения. Но если взять кривую, идущую вдоль δ внутри U, она будет несамопересекающейся (рис. 3). Поэтому, суммируя количество делений (при повороте следующего ребра относительно предыдущего) по всем углам δ, за один полный круг мы получим ровно 6, что соответствует повороту на 2π в выбранном направлении.

Однако если после каждого угла $<\pi$ идут хотя бы два угла $>\pi$, суммарный вклад этих трёх углов в число делений будет $\leqslant 0$ — противоречие. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

§ 7. Доказательство теоремы 2

Возьмём ограниченное множество $U\subset\mathbb{R}^2$ и треугольник $\Delta\in T\setminus\Sigma$. Таким образом, и его углы, и его стороны несоизмеримы. Предположим, что U допускает стандартное разбиение на треугольники, равные Δ. Определим ломаную δ как в предыдущем разделе.

Предположим, что U также имеет разбиение на равные Δ треугольники, не совпадающее со стандартным разбиением. Обозначим это разбиение $\mathscr{P}$.

Предложение 5. *Пусть I — ребро в δ, оба угла при котором $< \pi$. Тогда хотя бы один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, примыкающий к I, совпадает с треугольником из стандартного разбиения.*

Доказательство. Пусть a, b, c — длины сторон Δ. Для краткости будем так обозначать и сами стороны. Треугольники стандартного разбиения примыкают к I одной и той же стороной, скажем, a. Тогда $|I| = ma$ с натуральным m. Поскольку a, b и c несоизмеримы, все треугольники разбиения $\mathscr{P}$ примыкают к I стороной a.

Пусть α, β, γ — углы в Δ, лежащие против сторон a, b, c соответственно. Возьмём вершину B ребра I. Пусть треугольник стандартного разбиения, примыкающий к I и содержащий B, имеет там угол β. Тогда угол ломаной δ в вершине B равен либо β, либо $\beta + \alpha$ (в зависимости от того, один или два треугольника стандартного разбиения он содержит).

Ввиду несоизмеримости α, β и γ угол ломаной δ в вершине B может быть представлен в виде линейной комбинации α, β и γ с рациональными коэффициентами единственным способом. Поэтому треугольник разбиения $\mathscr{P}$, примыкающий к I и содержащий B, не может иметь там угол γ. Следовательно, этот треугольник имеет угол β при B, т. е. расположен как в стандартном разбиении.

(Итерируя это рассуждение, можно показать, что вообще все треугольники $\mathscr{P}$, примыкающие к I, расположены как в стандартном разбиении. Впрочем, нам это не требуется.) □

Предложение 6. *Пусть I, I' — пара рёбер δ, имеющая общий угол $> \pi$, причём другой угол при каждом из них $< \pi$. Тогда хотя бы один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, примыкающих к I или к I', совпадает с треугольником из стандартного разбиения.*

Доказательство. Пусть A — общая вершина I и I'. Тогда один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, примыкающих к I и I' и содержащих точку A, имеет в A вершину.

Пусть для определённости такой треугольник примыкает к I стороной b. Тогда нам остаётся повторить рассуждение из доказательства предложения 5 для ребра I. Мы получим, что треугольник разбиения $\mathscr{P}$, имеющий вершину на другом конце ребра I, расположен как в стандартном разбиении. □

Доказательство теоремы 2. Возьмём треугольник $\Delta \in T \setminus \Sigma$. Предположим, что Δ допускает разбиение $\mathscr{P}$, отличающееся от стандартного. По лемме 2 тогда $\mathscr{P}$ — разбиение на n^2 треугольников, подобных Δ с коэффициентом $1/n$.

Определим U как объединение треугольников из $\mathscr{P}$, которые расположены не как в стандартном разбиении. Тогда, применяя лемму 3, а затем предложение 5 или предложение 6, мы видим, что один из треугольников разбиения $\mathscr{P}$, принадлежащий U, совпадает с треугольником из стандартного разбиения. Но это противоречит построению U. $\square$

Список литературы

[1] *Soifer A.* How does one cut a triangle? Springer, 2009.

[2] *Зорич В. А.* Математический анализ. Часть II. М.: МЦНМО, 2019.

Андрей Дмитриевич Рябичев, НМУ, матфак ВШЭ
ryabichev@179.ru

О четырёх центрах вписанных окружностей в четырёхугольнике

И. И. Фролов

Следующая задача сформулирована в [1] и предлагалась в «Задачнике МП» под номером 23.4′. Решение, использующее разные модели плоскости Лобачевского, можно найти в [2].

Задача 1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности. Тогда центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности.

Следующая задача предлагалась в «Задачнике Кванта» под номером M1254. Вычислительное решение приведено в [3]. Геометрическое решение, идейно близкое к этой заметке, опубликовано в [4].

Задача 2. Диагонали описанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P (рис. 1). Тогда центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA лежат на одной окружности.

У задачи 1 имеется обобщение:

Задача 3. Внутри описанного четырёхугольника $ABCD$ взята точка P, такая что $PA = PC$ и $PB = PD$ (рис. 2). Тогда центры вписанных

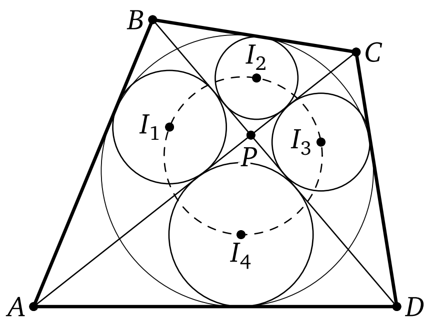


Рис. 1

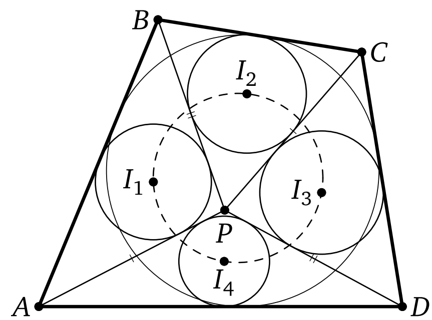


Рис. 2

окружностей треугольников PAB, PBC, PCD и PDA лежат на одной окружности.

Эта заметка посвящена доказательству теоремы, обобщающей все вышеприведённые задачи.

Теорема. *Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Внутри него взята точка P. Пусть PL и PK — биссектрисы треугольников PAC и PBD. Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Точки L, K и I лежат на одной прямой.*
2. *Прямые I_1I_2 и I_3I_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC.*
3. *Точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности.*

Решение задачи 3 следует из теоремы, поскольку середины диагоналей и центр вписанной окружности описанного четырёхугольника лежат на прямой Гаусса.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 1. *Внутри угла ABC взята точка P. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников PAB и PBC, а BL_1 и BL_2 — биссектрисы этих треугольников* (рис. 3). *Тогда прямые I_1I_2 и L_1L_2 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC.*

Доказательство. Для треугольников L_1PB, L_2PB и L_1PL_2 применяем свойство биссектрисы делить противолежащую сторону пропорционально прилежащим. Затем используем теорему Менелая для треугольника L_1BL_2 и прямой I_1I_2. □

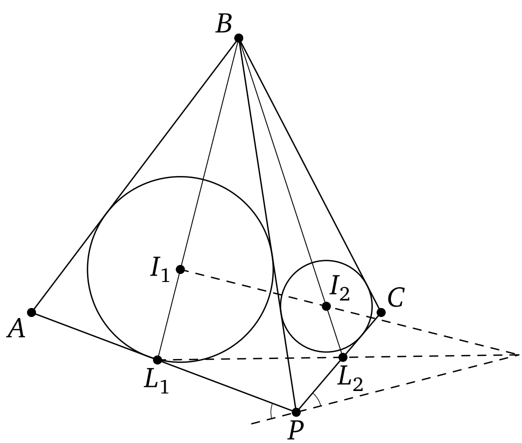


Рис. 3

Замечание. Если P лежит на AC, то утверждение предложения 1 бессмысленно, но из доказательства видно, что точка пересечения I_1I_2 с AC дополняет L_1, L_2 и P до гармонической четвёрки.

Лемма. *На луче PA выбраны точки L_1 и L_4, а на луче PC — точки L_2, L_3. Прямые L_1L_2 и L_3L_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{PL_1} + \frac{1}{PL_3} = \frac{1}{PL_2} + \frac{1}{PL_4}. \qquad (*)$$

Доказательство. Оставляем читателю в качестве упражнения. □

Предложение 2. *Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята точка P. Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Прямые I_1I_2 и I_3I_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC.*
2. *Прямые I_2I_3 и I_1I_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла BPD.*
3. $\dfrac{AB}{AP \cdot BP} + \dfrac{CD}{CP \cdot DP} = \dfrac{BC}{BP \cdot CP} + \dfrac{AD}{DP \cdot AP}$.

Доказательство. Достаточно доказать равносильность утверждений 1 и 3. Пусть BL_1 и BL_2, DL_3 и DL_4 — биссектрисы треугольников PAB и PBC, PCD и PDA. В силу предложения 1 утверждение 1 равносильно тому, что L_1L_2 и L_3L_4 пересекаются на внешней биссектрисе угла APC (если P не лежит на AC).

В силу леммы утверждение 1 равносильно $(*)$. (Если P лежит на AC, то утверждение 1 по-прежнему равносильно $(*)$, но доказательство немного меняется.)

Поскольку биссектриса делит противолежащую сторону треугольника пропорционально прилежащим, получаем

$$PL_1 = \frac{PA \cdot PB}{AB + PB}, \quad PL_2 = \frac{PC \cdot PB}{BC + PB}, \quad PL_3 = \frac{PC \cdot PD}{CD + PD}, \quad PL_4 = \frac{PA \cdot PD}{DA + PD}.$$

Отсюда ясно, что $(*)$ равносильно утверждению 3. □

Предложение 3. *На стороне AD описанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка P* (рис. 4). *Тогда P и центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD лежат на одной окружности.*

Замечание. Утверждение остаётся верным, если угол D четырёхугольника $ABCD$ больше $180°$ и существует окружность, касающаяся отрезков AB, BC и продолжений AD, CD за точку D.

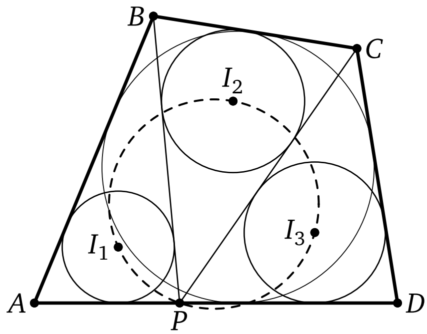


Рис. 4

Доказательство. Пусть I_1, I_2 и I_3 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, а I — центр вписанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Тогда для точки I есть изогонально сопряжённая относительно четырёхугольника BCI_3I_1 точка I_2. Остаётся посчитать углы.

Подробности и более общее утверждение приведены в [5, задача 2].

Другое доказательство можно получить, заметив сначала, что вписанные окружности треугольников PAB, PBC, PCD имеют общую касательную. После этого остаётся посчитать углы. □

Предложение 4. *Внутри описанного четырёхугольника $ABCD$ взята точка P. Пусть I_1, I_2, I_3, I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA соответственно* (рис. 5). *Тогда*

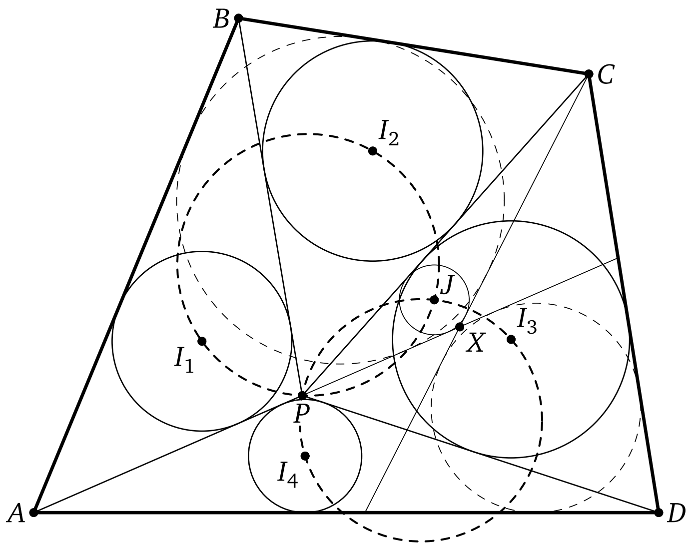


Рис. 5

внешняя биссектриса угла APC является радикальной осью окружностей (PI_1I_2) и (PI_3I_4).

Доказательство. Из соображений непрерывности можно считать, что P не лежит на AC и $AP - PC \neq AB - BC$. Без ограничения общности $AP - PC < AB - BC$. На продолжении AP за точку P отметим точку X так, что $AX - XC = AB - BC$ (несложно видеть, что она лежит внутри четырёхугольника $ABCD$). Четырёхугольники $ABCX$ и $ADCX$ описанные.

Пусть J — центр вписанной окружности треугольника CPX. Применяя предложение 3 к четырёхугольникам $ABCX$ и $ADCX$ и точке P на стороне AX, получаем, что точки P, I_1, I_2 и J лежат на одной окружности, как и точки P, I_3, I_4 и J. Значит, PJ — радикальная ось окружностей (PI_1I_2) и (PI_3I_4). □

Замечание. Более простое доказательство предложения 4, без ссылки на предложение 3, можно получить, используя широко известные «леммы о воробьях» (факты 1 и 2 в [6]).

Доказательство теоремы. Точка L делит отрезок AC в отношении PA/PC, а точка K делит отрезок BD в отношении PB/PD. Будем обозначать ориентированную площадь треугольника XYZ через S_{XYZ}. Из линейности ориентированной площади получаем

$$\begin{aligned}
S_{KIL} &= \frac{PC \cdot S_{KIA} + PA \cdot S_{KIC}}{PA + PC} = \\
&= \frac{PC \cdot PD \cdot S_{BIA} + PC \cdot PB \cdot S_{DIA} + PA \cdot PD \cdot S_{BIC} + PA \cdot PB \cdot S_{DIC}}{(PA + PC)(PB + PD)} = \\
&= \pm \frac{r}{2} \cdot \frac{PC \cdot PD \cdot AB - PC \cdot PB \cdot DA - PA \cdot PD \cdot BC + PA \cdot PB \cdot CD}{(PA + PC)(PB + PD)}
\end{aligned}$$

(где r — радиус вписанной окружности), поскольку треугольники BIA и DIC ориентированы в одну сторону, а треугольники DIA и BIC — в другую. Получаем, что равенство $S_{KIL} = 0$ равносильно утверждению 3 предложения 2. Остаётся заметить, что равенство $S_{KIL} = 0$ равносильно утверждению 1 теоремы, и применить предложение 2.

Равносильность утверждений 2 и 3 в теореме немедленно следует из предложения 4. □

Приведём ещё несколько фактов про эту картинку. В обозначениях из доказательства предложения 4 пусть ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и γ — вписанные окружности треугольников PAB, PBC, PCD, PDA и CPX соответственно. Аналогично будем считать, что $DP - PB < DA - AB$, и отметим на луче DP такую точку X', что $DX' - X'B = DA - AB$; пусть

γ' — вписанная окружность треугольника $BX'P$, а J' — её центр. Пусть ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d — вторые внутренние касательные к парам окружностей ω_4 и ω_1, ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_4.

Предложение 5.

(a) *Прямые ℓ_b и ℓ_d касаются γ, а прямые ℓ_a и ℓ_c касаются γ'.*

(b) *Существует окружность* Г, *касающаяся ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, ℓ_d.*

(c) *Окружности (JI_2I_3), (JI_1I_4), $(J'I_1I_2)$, $(J'I_3I_4)$ пересекаются в центре* Г. □

Замечание. Если выполнены утверждения 1–3 теоремы, то выполняются и следующие утверждения.

4. Центры вневписанных окружностей треугольников PAB, PBC, PCD, PDA напротив вершины P лежат на одной окружности.

5. Центры вневписанных окружностей треугольников PAB, PBC напротив вершины B и центры вневписанных окружностей треугольников PCD, PDA напротив вершины D лежат на одной окружности.

В заключение предлагаем читателю рассмотреть ситуацию, когда точка P лежит на кубике фокусов четырёхугольника $ABCD$ (т. е. имеет изогонально сопряжённую относительно этого четырёхугольника). Для простоты рассмотрим один случай расположения точек.

Задача 4. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I (рис. 6). Точка P такова, что $ABPD$ — выпуклый четырёхугольник, содержащий точку C, и $\angle APD = \angle BPC$. Пусть ω_1, ω_2, ω_3,

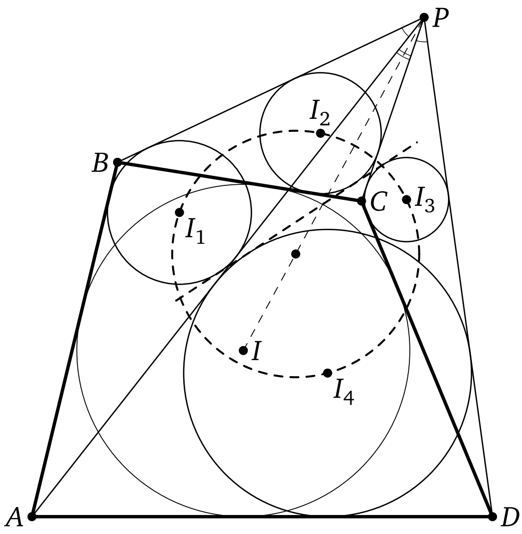


Рис. 6

ω_4 — вписанные окружности треугольников PAB, PBC, PCD, PDA, а I_1, I_2, I_3, I_4 — соответственно их центры. Тогда

(a) окружности ω_1, ω_3 и ω имеют общую касательную (а также ω_2, ω_4 и ω имеют общую касательную);
(b) окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 имеют общую касательную;
(c) точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности с центром на PI;
(d) точка Микеля четырёхугольника $I_1I_2I_3I_4$ совпадает с P.

Благодарности

Автор благодарен Николаю Белухову за постановку задачи, а также Алексею Заславскому, Павлу Кожевникову, Виталию Курину и Ивану Постнову за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] *Dao Thanh Oai.* http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h572848

[2] *Заславский А.* О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 163–166.

[3] *Вайнштейн И.* Решение задачи М1524 // Квант. № 3. 1996. С. 25–26.

[4] *Белухов Н.* Решение задачи М2213 // Квант. № 4. 2011. Задачник «Кванта».

[5] *Уткин А.* Изогональное сопряжение в четырёхугольнике // Квант. № 2. 2019. С. 37–42.

[6] *Полянский А.* Воробьями по пушкам! // Квант. 2012. № 2. С. 49–50.

Иван Ильич Фролов, НИУ ВШЭ, НМУ
frolov1999@yandex.ru

Итерации функции Эйлера

К. С. Зюбин

Настоящая статья содержит решение задачи 2.3′ («Математическое просвещение», сер. 3, вып. 28, с. 237):

Пусть (a_i) — *бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, удовлетворяющая условию*:

для каждого номера $i > 0$ *выполняется равенство* $\varphi(a_i) = a_{i-1}$. $(*)$

Опишите все такие последовательности. (*К. С. Зюбин*)

В статье доказывается, что всякая такая последовательность, начинающаяся с $a_0 = 1$, является либо последовательностью степеней двойки $1, 2, 4, \ldots$, либо последовательностью вида $1, 2, 4, \ldots, 2^{l-1}, 2^l, 2^l \cdot 3, 2^l \cdot 3^2, \ldots$, где l — некоторое натуральное число.

Напомним, что значение функции Эйлера $\varphi(n)$ по определению равно количеству натуральных чисел, не превосходящих данное натуральное n и взаимно простых с ним. При этом $\varphi(1) = 1$.

Функция Эйлера мультипликативна для взаимно простых n и m: в этом случае $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$. Пусть $n = p_1^{b_1} \ldots p_m^{b_m}$ — разложение на простые множители. Тогда [5, глава 10, теорема 116]

$$\varphi(n) = p_1^{b_1-1} \ldots p_m^{b_m-1}(p_1 - 1) \ldots (p_m - 1). \qquad (1)$$

Изучались различные вопросы, связанные с функцией Эйлера и её обратной, см. обзор в разделе B36 книги [3]. В той же книге, в разделе B39, обсуждается гипотеза Кармайкла, утверждающая, что уравнение $\varphi(x) = m$ либо не имеет решений, либо имеет более одного решения. На веб-странице [4] обсуждается задача о поиске наименьшего решения уравнения $\varphi(x) = m$. Следует также упомянуть результаты К. Форда и Х. Гупты. В статье [1] К. Форд доказывает, что для каждого целого $k \geqslant 2$ существует такое натуральное m, что уравнение $\varphi(x) = m$ имеет ровно k решений. В статье Х. Гупты [2] описывается метод нахождения множества всех решений уравнения $\varphi(x) = m$.

В настоящей статье рассматриваются последовательности попарно различных натуральных чисел $(a_0, a_1, \ldots)$, такие что для каждого $i > 0$ выполняется $\varphi(a_i) = a_{i-1}$, и изучается вопрос о их бесконечности.

Можно заметить, что $\varphi(a)=a$ только при $a=1$. Во всех остальных случаях значение функции Эйлера меньше аргумента. Поэтому, если многократно применить её к какому-нибудь числу, то в некоторый момент будет получена единица. Например, $\varphi(12)=4$, $\varphi(4)=2$, $\varphi(2)=1$, $\varphi(1)=1$. Члены последовательности $(1,2,4,12)$ удовлетворяют равенству $\varphi(a_i)=a_{i-1}$. Её можно продолжить, добавив, например, число 13. Полученную последовательность продолжить уже нельзя, потому что значение функции Эйлера в силу формулы (1) не может быть равно никакому нечётному числу, кроме 1.

Рассмотрим бесконечные последовательности, члены которых удовлетворяют равенству $\varphi(a_i)=a_{i-1}$ и первый член которых равен 1. Будем называть последовательностью вида I последовательность, в которой $a_i=2^i$ для каждого номера i начиная с 0. К последовательностям вида II будем относить последовательности, в которых $a_i=2^i$ при $i\leqslant l$ и $a_i=2^l3^{i-l}$ при всех $i>l$ для некоторого натурального l. Приведём примеры последовательностей вида II:

$$(1,2,4,12,36,108,\ldots),\quad l=2;$$
$$(1,2,4,8,16,48,\ldots),\qquad l=4.$$

Поскольку

$$\varphi(2^i)=2^{i-1},\quad \varphi(2^l\cdot 3)=2^l \quad\text{и}\quad \varphi(2^l\cdot 3^{i-l})=2^l\cdot 3^{(i-1)-l},$$

члены последовательностей вида I или II удовлетворяют равенству

$$\varphi(a_i)=a_{i-1}.$$

Теорема. *Пусть (a_i), $i=0,1,\ldots,$ — бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, удовлетворяющая условию:*

$$\textit{для каждого номера } i>0 \textit{ выполняется равенство } \varphi(a_i)=a_{i-1}. \qquad (*)$$

Тогда если $a_0=1$, то эта последовательность имеет либо вид I, либо вид II.

Для доказательства теоремы потребуется

Лемма 1. *Пусть бесконечная последовательность (a_i) удовлетворяет условию $(*)$, начинается с $a_0=1$ и не является последовательностью вида I. Тогда существует такой член последовательности, что в разложении этого и всех последующих членов на простые множители степень двойки одинакова.*

Доказательство леммы 1. Пусть последовательность (a_i) не имеет вида I. Тогда существует наибольшее k, для которого a_k является степенью двойки (возможно, $k=0$ и $a_k=1$). Рассмотрим члены последовательности a_i при $i\geqslant k$. Покажем, что степень двойки в разложении на простые множители этих чисел не может возрастать. Предположим противное. Пусть степень двойки в разложении на простые множители числа a_i меньше, чем в разложении a_{i+1}.

Согласно (1), если

$$a_{i+1}=2^b p_1^{b_1}\dots p_m^{b_m},$$

где p_i — нечётные простые, то

$$\varphi(a_{i+1})=2^{b-1}p_1^{b_1-1}\dots p_m^{b_m-1}(p_1-1)\dots(p_m-1).$$

Так как все числа p_i нечётные, получаем, что p_i-1 чётны. Поэтому $a_i=\varphi(a_{i+1})$ делится на 2^{b-1+m}. Однако по нашем предположению $b-1+m<b$, что возможно только при $m=0$, когда a_{i+1} является степенью двойки. Так как $i+1>k$, это противоречит выбору k.

Степень двойки в разложении члена последовательности может уменьшиться лишь конечное число раз. Следовательно, начиная с какого-то члена степень двойки в разложении на простые множители остаётся постоянной. $\square$

Напомним, что простые числа p, такие что число $2p+1$ также является простым, называются *простыми числами Софи Жермен*. Примером служат числа 2 и 3, так как $2\cdot2+1=5$ и $3\cdot2+1=7$ — простые числа.

Определение. *Последовательностью Софи Жермен* назовём последовательность натуральных чисел, каждый член которой, кроме первого, имеет вид $2^l(2p+1)$, где 2^lp — предыдущий член, p — число Софи Жермен и l — некоторое фиксированное для данной последовательности натуральное число.

Пример последовательности Софи Жермен при $l=1$:

$$(4,10,22,46,94).$$

Лемма 2. *Не существует бесконечной последовательности Софи Жермен.*

Доказательство леммы 2. Пусть первое число в последовательности Софи Жермен равно 2^lp. Докажем по индукции, что m-й член последовательности имеет вид $2^l(2^mp+2^m-1)$. База индукции $m=0$ очевидна. Шаг индукции: пусть $(m-1)$-й член последовательности имеет вид $2^l(2^{m-1}p+2^{m-1}-1)$. Тогда следующий член имеет вид

$$2^l(2(2^{m-1}p+2^{m-1}-1)+1)=2^l(2^mp+2^m-2+1)=2^l(2^mp+2^m-1),$$

что и требовалось. Значит, $(p-1)$-й член последовательности равен $2^l(2^{p-1}p+2^{p-1}-1)$. По малой теореме Ферма [5, глава 11, теорема 119] если $p\neq 2$, то $2^{p-1}-1 \vdots p$. Следовательно, число $2^{p-1}p+2^{p-1}-1$ делится на p и не является простым. Итак, последовательность Софи Жермен, начинающаяся не с $2^l\cdot 2$, конечна. В последовательности же, начинающейся с $2^l\cdot 2$, шестой член равен $2^l\cdot 95$, а $95=5\cdot 19$ не является простым. □

Доказательство теоремы. Предположим противное: пусть бесконечная последовательность (a_i) удовлетворяет $(*)$, начинается с $a_0=1$ и не имеет ни вида I, ни вида II.

По лемме 1 существует такой член a_s, что степень двойки в разложении на простые множители a_s и всех последующих членов последовательности одинакова. Обозначим эту степень l.

Пусть a_r — член последовательности с наибольшим номером, являющийся произведением степеней двойки и тройки. Такой член существует, иначе последовательность будет иметь вид II: если некоторый член является произведением степеней двойки и тройки, то каждый из предыдущих членов также таков либо является степенью двойки. Выберем номер t такой, что $t>s$ и $t>r$. В членах $a_t, a_{t+1}, \ldots$ степень двойки в разложении на простые множители остаётся неизменной. Пусть

$$a_{t+2}=2^l p_1^{b_1}\ldots p_m^{b_m},$$

где p_i — нечётные простые. Тогда

$$a_{t+1}=\varphi(a_{t+2})=2^{l-1}p_1^{b_1-1}\ldots p_m^{b_m-1}(p_1-1)\ldots(p_m-1) \vdots 2^{l-1+m}.$$

Положим $a_{t+1}=2^l a'_{t+1}$, где a'_{t+1} — нечётное число. Тогда $l-1+m\leqslant l$ и $m\leqslant 1$. Поскольку $t>r$, число a_{t+2} не является степенью двойки и, значит, $m=1$. Таким образом, $a_{t+2}=2^l p^b$ и $a_{t+1}=\varphi(a_{t+2})=2^{l-1}p^{b-1}(p-1)$.

Предположим, что $b>1$. Пусть $p-1=2^s d$, где d — нечётное число. Имеем

$$a_{t+1}=\varphi(a_{t+2})=2^{l-1}p^{b-1}(p-1)=2^{l-1+s}p^{b-1}d.$$

Поскольку двойка входит в разложение a_{t+1} в степени l, получаем, что $s=1$. Номер $t+2$ больше r, поэтому $p>3$, $d>1$ и $\varphi(d) \vdots 2$. Число $p-1$ взаимно просто с p, следовательно, d взаимно просто с p. Имеем:

$$a_t=\varphi(a_{t+1})=\varphi(2^l p^{b-1}d)=2^{l-1}p^{b-2}(p-1)\varphi(d).$$

Так как $(p-1) \vdots 2$, получаем, что $a_t \vdots 2^{l-1}\cdot 2\cdot 2=2^{l+1}$, что противоречит неизменности степени двойки в разложении на простые множители чисел a_t, a_{t+1} и a_{t+2}. Таким образом, $0<b\leqslant 1$, т. е. $b=1$ и $a_{t+2}=2^l p$.

Повторяя проведённые рассуждения для a_{t+3}, получим, что $a_{t+3} = 2^l q$, где q — некоторое простое число. Имеем $\varphi(a_{t+3}) = a_{t+2}$, т. е. $\varphi(2^l q) = 2^l p$, $2^{l-1}(q-1) = 2^{l-1} \cdot 2p$. Отсюда $2p+1 = q$.

Положим $a_{t+2} = 2^l p_1$ и $a_{t+3} = 2^l p_2$. Повторим рассуждения, применённые к a_{t+2}, двигаясь дальше по последовательности (a_i). Получаем $a_{t+j} = 2^l p_{j-1}$ при $j = 4, \ldots$ Все p_j являются числами Софи Жермен, т. е. бесконечная последовательность $a_{t+3}, a_{t+4}, \ldots$ является последовательностью Софи Жермен. Но это противоречит лемме 2. Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Каждую бесконечную последовательность* (c_i), $i = 0, 1, \ldots$ *попарно различных натуральных чисел, удовлетворяющую условию* $(*)$, *можно достроить до последовательности вида I или II, добавляя в начало последовательности значения итераций функции Эйлера от первого члена* c_0.

Доказательство. Если первый член $c_0 = 1$, то по доказанной теореме (c_i) имеет вид I или II. Пусть $c_0 \neq 1$. Тогда $\varphi(c_0) < c_0$. Многократно применяя функцию Эйлера к c_0, рано или поздно получим единицу: $\varphi^k(c_0) = 1$ для некоторого k. Возьмём наименьшее такое k. Последовательность $(\varphi^k(c_0),\ \varphi^{k-1}(c_0),\ \ldots,\ \varphi(c_0),\ c_0, c_1, c_2, \ldots)$ по доказанной теореме имеет вид I или II. $\square$

Список литературы

[1] *Ford K.* The Number of Solutions of $\varphi(x) = m$ // Annals of Math. 1999. Vol. 150, № 1. P. 283–311.

[2] *Gupta H.* Euler's Totient Function and its Inverse // Indian J. Pure Appl. Math. 1981. Vol. 12, № 1. P. 22–29.

[3] *Guy R. K.* Unsolved Problems in Number Theory. N. Y.: Springer, 2004.

[4] Inversion of the Euler totient function `https://math.stackexchange.com/questions/265397/inversion-of-the-euler-totient-function/265700`

[5] *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М.: Лань, 2015.

Константин Сергеевич Зюбин, ученик МАОУ СОШ № 32, Томск

kostya.zyubin@gmail.com

Структурированное доказательство теоремы Колмогорова о суперпозициях

С. В. Дженжер, А. Б. Скопенков

Мы представляем хорошо структурированное детальное изложение известного доказательства важного результата, являющегося решением 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях. Для функций двух переменных он формулируется так.

Теорема Колмогорова. *Существуют непрерывные функции*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_5 \colon [0,1] \to [0,1]$$

такие, что для любой непрерывной функции $f \colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *существует непрерывная функция* $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ *такая, что для любых* $x, y \in [0,1]$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{5} h\bigl(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y)\bigr).$$

Доказательство доступно неспециалистам, в частности, студентам, знакомым только с основными свойствами непрерывных функций.

§ 1. Введение

Читатель понимает, что многочлен от нескольких переменных выражается через сложение и умножение (с использованием констант). Возможно, читатель знаком также с выражением одних функций алгебры логики через другие (см., например, [ZSS, § 24.5]; впрочем, это знакомство не требуется для понимания настоящей статьи).

Теорема Колмогорова 1.1 показывает, что любая непрерывная функция двух и более переменных «может быть выражена» через непрерывные функции одной переменной и сложение. (Чёткая формулировка понятия «может быть выражена» не нужна для этой теоремы; впрочем, читатель может найти эту формулировку и её обсуждение, например, в [Ar].) Эта теорема решает 13-ю проблему Гильберта.

Поддержано грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-01-00169.

Мы представляем хорошо структурированное детальное изложение известного доказательства этой важной теоремы.

Теорема 1.1 (Колмогоров). *Для любого целого $n > 1$ существуют действительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и непрерывные функции*

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n+1} \colon [0,1] \to [0,1]$$

такие, что для любой непрерывной функции $f \colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ существует непрерывная функция $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{2n+1} h\biggl(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_k(x_i)\biggr).$$

Замечание 1.2. (a) В качестве $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ мы можем взять квадратные корни из попарно различных простых чисел. Или, для $n = 2$, взять $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Например, для функции $f(x, y) = x + \sqrt{2}y + 2$ мы можем взять $h(x) = x$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 2/(1 + \sqrt{2})$ и $\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = 0$. Тем не менее, мы не знаем функций φ, h даже для таких простых функций f, как сложение и умножение. И, конечно, мы не знаем явного выражения для «универсальных функций» $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n+1}$.

(b) Классическое изложение доказательства, формулировка и обсуждения 13-й проблемы Гильберта приведены, например, в [Ar, He, Ko], [LGM, Chapter 17], [St, § 1–4]. Чтобы сделать наше изложение хорошо структурированным, мы, например, явно ввели понятие λ-предколмогоровского отображения и явно сформулировали аппроксимативную теорему Колмогорова 1.3. Чтобы сделать наше изложение более детальным, мы, например, явно сформулировали утверждения 2.1 и 2.2 и привели их простые доказательства. Ср. с [BCM].

(c) Эта тема активно изучается не только в анализе, но также и в топологии и в компьютерной науке, см., например, работы [St, Vi, Sk, Br, SH] и ссылки в них.

В 27-м и 28-м выпусках Матпросвещения опубликованы задачи соответственно 27.4 (с. 234) и 27.4′ (с. 248), связанные по тематике с 13-й проблемой Гильберта.

План доказательства теоремы 1.1 Колмогорова. Мы представляем доказательство для $n = 2$, полагая $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Доказательство в общем случае аналогично. Для доказательства нам необходимы некоторые соглашения, обозначения и определения.

Далее в тексте «функция» означает «непрерывная функция», и «отображение» означает «непрерывное отображение».

Обозначим $I := [0,1]$. Мы рассматриваем упорядоченный набор функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_5 \colon I \to I$ как отображение (= вектор-функцию) $\varphi \colon I \to I^5$. Для функции $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ обозначим

$$S_\varphi h(x,y) := \sum_{k=1}^{5} h\bigl(\varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y)\bigr).$$

Для компактного подмножества $M \subset \mathbb{R}^s$ и функции $f \colon M \to \mathbb{R}$ обозначим[1] $\|f\| := \sup_{z \in M} |f(z)|$. Назовём **$\lambda$-предколмогоровским отображением** для ненулевой функции $f \colon I^2 \to \mathbb{R}$ отображение $\varphi \colon I \to I^5$, для которого найдётся функция $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\|f - S_\varphi h\| < \lambda \|f\| \quad \text{и} \quad \|h\| \leqslant \|f\|.$$

Для функции $f \equiv 0$ любое отображение $\varphi \colon I \to I^5$ является λ-предколмогоровским.

Теорема 1.3 (аппроксимативная теорема Колмогорова). *Существует отображение $\varphi \colon I \to I^5$, являющееся $(7/8)$-предколмогоровским для любой функции $f \colon I^2 \to \mathbb{R}$.*

Вывод теоремы 1.1 для $n = 2$, $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \sqrt{2}$ из теоремы 1.3. Для целых неотрицательных m определим функции $h_m \colon [0,3] \to \mathbb{R}$ индуктивно[2]. Положим $h_0 \equiv 0$. Обозначим через h_m функцию, полученную применением Теоремы 1.3 к $f - \sum_{k=0}^{m-1} S_\varphi h_k$. Тогда, обозначив $\lambda = 7/8$, имеем

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{m} S_\varphi h_k \right\| < \lambda \left\| f - \sum_{k=0}^{m-1} S_\varphi h_k \right\| < \ldots < \lambda^m \|f\|. \qquad (*)$$

Так как

$$\|h_m\| \leqslant \left\| f - \sum_{k=0}^{m-1} S_\varphi h_k \right\| < \lambda^{m-1} \|f\|,$$

функциональный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} h_m$ сходится равномерно к функции $h \colon [0,3] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_\varphi h_m = S_\varphi \sum_{m=0}^{\infty} h_m = S_\varphi h.$$

[1] Все функции в дальнейшем имеют компактную область определения, которая и берётся в качестве M для каждой из функций (т. е. для разных функций множества M разные).

[2] Заметим, что нам достаточно определить h_m и h на $[0, 1+\sqrt{2}]$, но мы вместо этого пишем $[0,3]$ для краткости.

Так как $\lambda^m \xrightarrow{m\to\infty} 0$, переходя к пределу в (*), получаем $\|f - S_\varphi h\| = 0$, т. е. $S_\varphi h = f$. Продолжим функцию $h\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ до функции $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. □

Лемма 1.4 (счётная аппроксимативная лемма Колмогорова). *Существует отображение $\varphi\colon I\to I^5$, являющееся (6/7)-предколмогоровским для любого многочлена $g\colon I^2\to\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами.*

Доказательство теоремы 1.3 по модулю леммы 1.4. Возьмём любые функцию $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ и отображение $\varphi\colon I\to I^5$, данное леммой 1.4. Если $f\equiv 0$, то φ является (7/8)-предколмогоровским для f по определению. Теперь предположим, что $\|f\|>0$. Тогда для любых достаточно близких к $\frac{111}{112}f$ функций $g\colon I^2\to I$ выполнено

$$\|g\|<\|f\| \quad \text{и} \quad \|f-g\|<\frac{1}{56}\|f\|.$$

Из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций многочленами следует, что существует многочлен $g\colon I^2\to\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами, удовлетворяющий этим неравенствам. Так как φ является (6/7)-предколмогоровским для g, найдётся функция $h\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ такая, что

$$\|h\|\leqslant\|g\|\leqslant\|f\| \quad \text{и} \quad \|g-S_\varphi h\|<\frac{6}{7}\|g\|\leqslant\frac{6}{7}\|f\|.$$

Тогда

$$\|f-S_\varphi h\|\leqslant\|f-g\|+\|g-S_\varphi h\|<\frac{1}{56}\|f\|+\frac{6}{7}\|f\|=\frac{7}{8}\|f\|.$$

Следовательно, φ является (7/8)-предколмогоровским для f. □

Лемма 1.5. *Для любой функции $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ выполнено следующее*:

(стабильность) *любое отображение, достаточно близкое к* (6/7)-*предколмогоровскому для f, само является* (6/7)-*предколмогоровским для f*;

(аппроксимация) *для любого отображения $\varphi\colon I\to I^5$ найдётся сколь угодно близкое* (6/7)-*предколмогоровское отображение для f.*

Для функции $f\colon I^2\to\mathbb{R}$ обозначим через $PK(f)$ семейство всех (6/7)-предколмогоровских отображений для f.

Вывод[3] *леммы* 1.4 *из леммы* 1.5. Обозначим через Q семейство всех многочленов $I^2\to\mathbb{R}$ с рациональными коэффициентами. По лемме 1.5, для любой функции $g\in Q$ множество $PK(g)$ открыто и всюду

[3] Вывод использует теорему Бэра о категории. Если вы не знакомы с этой теоремой, то просто пропустите этот вывод или замените применение этой теоремы на применение принципа вложенных шаров.

плотно в пространстве всех непрерывных отображений $I \to I^5$. Известно, что это пространство полно. Тогда по теореме Бэра о категории [KF, § 2.3.3], [Sk', § 2], счётное пересечение $\bigcap_{g\in Q} PK(g)$ непусто. Любое отображение φ из этого пересечения является искомым. $\square$

§ 2. Доказательство леммы 1.5

Доказательство стабильности в лемме 1.5. Если $f\equiv 0$, то утверждение тривиально. Поэтому предположим, что $\|f\|>0$.

Предположим, $\psi \in PK(f)$ — некоторое отображение. Тогда существует функция $h\colon [0,3]\to\mathbb{R}$ такая, что $\|f-S_\psi h\| < \frac{6}{7}\|f\|$. Обозначим

$$\varepsilon := \frac{1}{5}\Big(\frac{6}{7}\|f\| - \|f-S_\psi h\|\Big) > 0.$$

Так как h равномерно непрерывна, найдётся такое δ, что

$$|h(x)-h(y)|<\varepsilon \quad \text{при } |x-y|<\delta.$$

Достаточно показать, что любое отображение φ, являющееся $\left(\frac{\delta}{3}\right)$-близким к ψ, лежит в $PK(f)$.

Для любых $x, y\in I$ и $k=1,\dots,5$

$$\Big|\big(\psi_k(x)+\sqrt{2}\,\psi_k(y)\big)-\big(\varphi_k(x)+\sqrt{2}\,\varphi_k(y)\big)\Big| < (1+\sqrt{2})\frac{\delta}{3} < \delta.$$

Следовательно,

$$\Big|h\big(\psi_k(x)+\sqrt{2}\,\psi_k(y)\big)-h\big(\varphi_k(x)+\sqrt{2}\,\varphi_k(y)\big)\Big| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\|S_\psi h - S_\varphi h\| < 5\varepsilon.$$

Наконец,

$$\|f-S_\varphi h\| \leqslant \|f-S_\psi h\| + \|S_\psi h - S_\varphi h\| < \frac{6}{7}\|f\| - 5\varepsilon + 5\varepsilon = \frac{6}{7}\|f\|.$$

Следовательно, $\varphi \in PK(f)$. $\square$

Подготовка к доказательству аппроксимации в лемме 1.5: рационально разделяющие функции

Обозначим $[a,b]+c := [a+c, b+c]$ и $[a,b]\cdot d := [ad, bd]$.

Возьмём любое $k=1,\dots,5$. Обозначим

$$Z_k = Z_k(N) := \Big[-1, \frac{N-k}{5}\Big] \cap \mathbb{Z}.$$

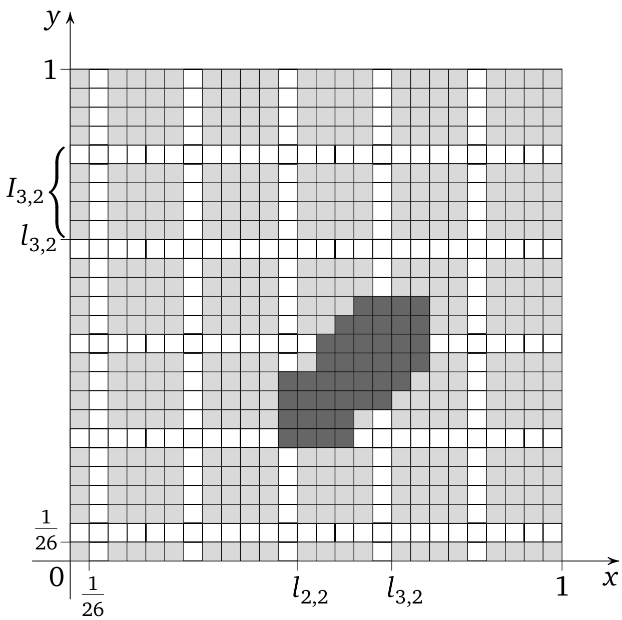


Рис. 1. Серые квадраты $I_{i,2}(26) \times I_{j,2}(26)$ параметризованы парами $i, j \in Z_2(26)$. Чёрные квадраты суть $I_{2,k} \times I_{1,k}$ для $k = 1, 3, 4, 5$

Для каждого $j \in Z_k(N)$ обозначим

$$I_{j,k} = I_{j,k}(N) := \frac{4I + 5j + k}{N} \quad \text{и} \quad l_{j,k} = l_{j,k}(N) := \max\left\{\frac{5j + k}{N}, 0\right\}.$$

Очевидно, $l_{j,k}$ является левым концом отрезка[4)] $I_{j,k}$ (рис. 1).

Предложение 2.1. *Пусть N — целое положительное число. Для любых $(x, y) \in I^2$ и не менее чем для трёх $k = 1, \ldots, 5$ найдутся $i, j \in Z_k(N)$ такие, что*

$$(x, y) \in I_{i,k}(N) \times I_{j,k}(N).$$

Доказательство. Имеем

$$(x, y) \in I_{i,k}(N) \times I_{j,k}(N) \quad \Leftrightarrow \quad (Nx, Ny) \in I_{i,k}(1) \times I_{j,k}(1).$$

Обозначим $m := [Nx/5]$ и через r обозначим остаток от деления числа $[Nx]$ на 5. Тогда $Nx \in [5m + r, 5m + r + 1)$, и для любого $s = 0, 1, 2, 3$ имеем

$$Nx \in [5m + (r - s), 5m + (r - s + 4)] = 4I + 5m + (r - s).$$

[4)] Для фиксированных k и N отрезки $I_{j,k}(N)$ при всевозможных $j \in Z_k(N)$ имеют длины $4/N$, они не пересекаются и расстояния между соседними отрезками равны $1/N$, причём самый первый отрезок покрывает точку 0, а самый последний — точку 1.

Поэтому для $k \equiv r - s \pmod 5$ найдётся $i \in Z_k(N)$ такое, что $Nx \in I_{i,k}(1)$. Тогда для не менее чем четырёх $k = 1, \ldots, 5$ существует подходящее i. Аналогично для не менее чем четырёх $k = 1, \ldots, 5$ найдётся $j \in Z_k(N)$ такое, что $Ny \in I_{j,k}(1)$. Тогда для не менее чем трёх $k = 1, \ldots, 5$ найдутся такие $i, j \in Z_k(N)$, что $(Nx, Ny) \in I_{i,k}(1) \times I_{j,k}(1)$. □

Функция $\varphi : I \to I$ *рационально разделяет* семейство попарно непересекающихся отрезков на прямой, если φ принимает постоянные рациональные попарно различные значения на этих отрезках[5]. Для отображения $\varphi : I \to I^5$ обозначим $\|\varphi\| = \max_{k=1,\ldots,5} \|\varphi_k\|$.

Предложение 2.2. *Пусть ε — некоторое положительное число.*

(a) *Пусть $\psi : I \to I$ — некоторая функция и $k \in \{1, \ldots, 5\}$.*
Тогда найдётся целое $N_0 = N_0(\psi, k) > 0$ такое, что для любого целого $N > N_0$ и для любого конечного множества G рациональных чисел существует функция $\varphi : I \to I$ такая, что

- $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$;
- *φ рационально разделяет семейство отрезков $I_{j,k} = I_{j,k}(N)$ с параметром $j \in Z_k(N)$;*
- *$\varphi(I_{j,k}) \notin G$ для любого $j \in Z_k(N)$.*

(b) *Пусть $\psi : I \to I^5$ — некоторое отображение.*
Тогда найдётся такое целое $N_0 > 0$, что для любого целого $N > N_0$ существует отображение $\varphi : I \to I^5$ такое, что

- $\|\varphi - \psi\| < \varepsilon$;
- *для каждого $k = 1, \ldots, 5$ функция φ_k рационально разделяет семейство отрезков $I_{j,k} = I_{j,k}(N)$ с параметром $j \in Z_k(N)$;*
- *числа $\varphi_k(I_{j,k})$ попарно различны для различных $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и $j \in Z_k(N)$.*

Доказательство пункта (a). В силу равномерной непрерывности функции ψ, найдётся $\delta > 0$ такое, что $|\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon/2$ при $|x - y| < \delta$. Положим $N_0 := \lceil 5/\delta \rceil$. Рассмотрим любое $N > N_0$. Возьмём кусочно-линейную функцию $\varphi : I \to I$ такую, что

- на каждом отрезке $I_{j,k}$ значение $\varphi(I_{j,k})$ рационально и $\frac{\varepsilon}{2}$-близко к $\psi(l_{j,k})$;
- все значения $\varphi(I_{j,k})$ различны и не лежат в G;
- φ линейна на промежутках между отрезками.

[5] Напомним, что в данном тексте «функция» означает «непрерывная функция», а «отображение» означает «непрерывное отображение».

Поскольку $0\in I_{-1,k}$ и $1\in I_{\max Z_k,k}$ для любого $k=1,\ldots,5$, определение значений $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ осмысленно.

Теперь φ рационально разделяет семейство отрезков $I_{j,k}$, и её значения на отрезках не лежат в G. Остаётся показать, что

$$|\varphi(x)-\psi(x)|<\varepsilon \quad \text{для любого } x\in I. \qquad (**)$$

Для любой точки $x\in I_{j,k}$ из $\varphi(x)=\varphi(l_{j,k})$ и $|x-l_{j,k}|\leqslant 4/N<\delta$ получаем

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant \left|\varphi(l_{j,k})-\psi(l_{j,k})\right|+\left|\psi(l_{j,k})-\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Для любой точки x, не принадлежащей ни одному отрезку $I_{j,k}$, выберем $j\in Z_k(N)$ такое, что x находится между двумя отрезками $I_{j,k}$ и $I_{j+1,k}$, т. е. $l_{j,k}+4/N<x<l_{j+1,k}$. Концы отрезков связаны между собой очевидным соотношением $l_{j,k}+5/N=l_{j+1,k}$. Тогда найдётся $\alpha\in(0,1)$ такое, что $x=l_{j+1,k}-\alpha/N$. Теперь $(**)$ следует из того, что

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\alpha\left|\varphi\left(l_{j+1,k}-\frac{1}{N}\right)-\psi(x)\right|+(1-\alpha)\left|\varphi(l_{j+1,k})-\psi(x)\right|< \\ <\alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon=\varepsilon.$$

Здесь первое неравенство следует из того, что φ линейна на промежутке $l_{j+1,k}+[-1/N,0]$ (т. е. из $\varphi(x)=\alpha\varphi(l_{j+1,k}-1/N)+(1-\alpha)\varphi(l_{j+1,k})$). Второе неравенство доказывается следующим образом. Так как

$$\varphi\left(l_{j+1,k}-\frac{1}{N}\right)=\varphi(l_{j,k}) \quad \text{и} \quad |x-l_{j,k}|\leqslant\frac{5}{N}<\delta,$$

получаем, что

$$\left|\varphi\left(l_{j+1,k}-\frac{1}{N}\right)-\psi(x)\right|\leqslant\left|\varphi(l_{j,k})-\psi(l_{j,k})\right|+\left|\psi(l_{j,k})-\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Так как $|x-l_{j+1,k}|\leqslant 1/N<\delta$, имеем

$$\left|\varphi(l_{j+1,k})-\psi(x)\right|\leqslant\left|\varphi(l_{j+1,k})-\psi(l_{j+1,k})\right|+\left|\psi(l_{j+1,k})-\psi(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \qquad \square$$

Доказательство пункта (b). Выберем $N_0=\max_{k=1,\ldots,5}N_0(\psi_k,k)$, где $N_0(\psi_k,k)$ приходят из применения пункта (a) утверждения. Возьмём любое $N>N_0$. Применим пункт (a) к ψ_1, $k=1$ и $G=\varnothing$. Получим некоторую функцию φ_1. Теперь применим пункт (a) к ψ_2, $k=2$ и $G=\{\varphi_1(I_{j,1})\}_{j\in Z_1}$. Получим функцию φ_2. Аналогично на k-м шаге применяем пункт (a) к функции ψ_k и множеству $G=\bigcup_{s=1}^{k-1}\{\varphi_s(I_{js})\}_{j\in Z_s}$. Так получим функцию φ_k. После пяти шагов получим требуемое отображение $\varphi:=(\varphi_1,\ldots,\varphi_5)$. $\square$

Доказательство аппроксимации в лемме 1.5. Если $f \equiv 0$, то утверждение тривиально. Поэтому предположим, что $\|f\| > 0$.

Зафиксируем любое отображение $\psi : I \to I^5$ и любое $\varepsilon > 0$. Нужно указать $\varphi \in PK(f)$, ε-близкое к ψ.

В силу равномерной непрерывности функции f найдётся такое целое N_1, что

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{1}{6}\|f\| \quad \text{при } |x - x'| < \frac{4}{N_1} \text{ и } |y - y'| < \frac{4}{N_1}.$$

Применим утверждение 2.2(b) к отображению ψ и числу ε. Получим число N_0. Положим $N := \max(N_0, N_1) + 1$. Применим утверждение 2.2(b) к этому числу. Получим отображение $\varphi : I \to I^5$.

Для каждого k определим функцию $\widetilde{\varphi}_k : I^2 \to [0,3]$ формулой

$$\widetilde{\varphi}_k(x,y) = \varphi_k(x) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y).$$

В следующем абзаце мы покажем, что $\widetilde{\varphi}_k$ принимает различные постоянные значения на различных квадратах, образованных декартовым произведением отрезков $I_{j,k}$.

В самом деле, предположим, что для некоторых x_1, x_2, y_1, y_2, принадлежащих некоторым из этих отрезков,

$$\varphi_k(x_1) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y_1) = \varphi_k(x_2) + \sqrt{2}\,\varphi_k(y_2).$$

По определению рациональной разделяемости числа $\varphi_k(x_1)$, $\varphi_k(x_2)$, $\varphi_k(y_1)$ и $\varphi_k(y_2)$ рациональны. Тогда $\varphi_k(x_1) = \varphi_k(x_2)$ и $\varphi_k(y_1) = \varphi_k(y_2)$. Следовательно, пары x_1, x_2 и y_1, y_2 принадлежат одним и тем же отрезкам. Тогда точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) принадлежат одному квадрату.

В следующем абзаце мы покажем, что числа $\widetilde{\varphi}_k(I_{i,k} \times I_{j,k})$ попарно различны для различных троек (i, j, k).

В самом деле, предположим, что $\widetilde{\varphi}_k(I_{i,k} \times I_{j,k}) = \widetilde{\varphi}_n(I_{p,n} \times I_{q,n})$. Тогда $\varphi_k(I_{i,k}) = \varphi_n(I_{p,n})$. Поэтому $k = n$ и $i = p$. Аналогично $j = q$.

Возьмём кусочно-линейную функцию $h : [0,3] \to \mathbb{R}$ такую, что

$$h(\widetilde{\varphi}_k(I_{i,k} \times I_{j,k})) = \frac{1}{3} f(l_{i,k}, l_{j,k})$$

для любых $k = 1, \ldots, 5$ и $i, j \in Z_k$. Тогда $\|h\| \leqslant \frac{1}{3}\|f\|$. Теперь лемма следует из того, что для любого $z \in I^2$

$$|S_\varphi h(z) - f(z)| \leqslant \frac{1}{6}\|f\| + \frac{2}{3}\|f\| < \frac{6}{7}\|f\|.$$

Здесь второе неравенство очевидно. Первое неравенство доказывается следующим образом. Так как $N > N_1$, получаем, что

$$|f(z) - f(z')| < \frac{1}{6}\|f\|$$

для любых $k=1,\dots,5$, $i,j\in Z_k$ и $z,z'\in I_{ik}\times I_{j,k}$. По утверждению 2.1, существует не менее трёх троек $(i_s,j_s,k_s)\in Z_{k_s}\times Z_{k_s}\times\{1,\dots,5\}$, $s=1,2,3$, таких, что $I_{i_s,k_s}\times I_{j_s,k_s}\ni z$. Для них

$$h(\widetilde{\varphi}_{k_s}(z))=\frac{1}{3}f(l_{i_s,k_s},l_{j_s,k_s}).$$

Эти значения отличаются от $\frac{1}{3}f(z)$ не более, чем на $\frac{1}{18}\|f\|$. Следовательно,

$$\left|\sum_{s=1}^{3}h(\widetilde{\varphi}_{k_s}(z))-f(z)\right|\leqslant\frac{1}{6}\|f\|.$$

Другие два значения $h(\widetilde{\varphi}_k(z))$ не превосходят $\frac{1}{3}\|f\|$ по абсолютной величине. □

Благодарности

Благодарим С. В. Шапошникова и анонимного рецензента за полезные обсуждения.

Список литературы

[Ar] *Арнольд В. И.* О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных // Математическое просвещение. Сер. 2. Вып. 3. М.: МЦНМО, 1958. С. 41–61. https://www.mccme.ru/free-books/djvu/mp2/mp2-3.htm

[BCM] *Белов А., Митрофанов И., Скопенков А., Чиликов А., Шапошников С.* 13-я проблема Гильберта о суперпозициях функций // 28-я Летняя конференция международного математического Турнира городов http://www.turgor.ru/lktg/2016/5/index.htm

[Br] *Brattka V.* From Hilbert's 13th Problem to the theory of neural networks: constructive aspects of Kolmogorov's Superposition Theorem // Kolmogorov's Heritage in Mathematics. Berlin: Springer, 2007. P. 253–280. https://doi.org/10.1007/978-3-540-36351-4_13

[He] *Hedberg T.* The Kolmogorov superposition theorem, Appendix II to H. S. Shapiro, Topics in Approximation Theory. Springer, 1971. (Lecture Notes in Math.; Vol. 187). P. 267–275.

[KF] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[Ko] *Колмогоров А. Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // ДАН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956. http://www.mathnet.ru/links/90e35c02a59c4c5009b53e9ca17ab3a2/dan22050.pdf

[LGM] *Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.* Constructive Approximation: Advanced Problems. New York: Springer, 1996.

[SH] *Schmidt-Hieber J.* The Kolmogorov-Arnold representation theorem revisited // Neural Networks. 2021. Vol. 137. P. 119–126. https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.01.020

[Sk] *Скопенков А. Б.* Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 14. М.: МЦНМО, 2010. С. 143–174. http://arxiv.org/abs/1001.4011

[Sk'] *Скопенков А. Б.* Объемлемая однородность. М.: МЦНМО, 2012. http://arxiv.org/abs/1003.5278

[St] *Sternfeld Y.* Hilbert's 13th problem and dimension // Geometric aspects of functional analysis. Berlin: Springer, 1989. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1376) P. 1–49.

[Vi] *Витушкин А. Г.* 13-я проблема Гильберта и смежные вопросы // УМН. 2004. Т. 59, вып. 1(355). С. 11–24; Russian Math. Surveys. 2004. Vol. 59, № 1. P. 11–25. https://doi.org/10.4213/rm698

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. М.: МЦНМО, 2018. http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf

---

Святослав Вадимович Дженжер, МФТИ

sdjenjer@yandex.ru

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ

skopenko@mccme.ru

Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Докажите иррациональность числа e.

   а) Докажите, что при целых a, b величина $ae+be^{-1}$ не является целой. Выведите из этого, что e не является квадратичной иррациональностью.

   б) Усовершенствовав рассуждение, докажите, что e не является алгебраическим числом четвёртой степени.

   в) Рассмотрим интеграл

$$I_n = q^{2n}\int\limits_0^\pi (x(\pi-x))^n.$$

Докажите, что $I_n > 0$, $I_n \to 0$ при $n \to \infty$ и если $\pi = p/q$, где p, q — целые числа, то I_n — целое число. Выведите отсюда иррациональность числа π.

г) Докажите иррациональность числа e^n при любом целом n.

(*Фольклор*)

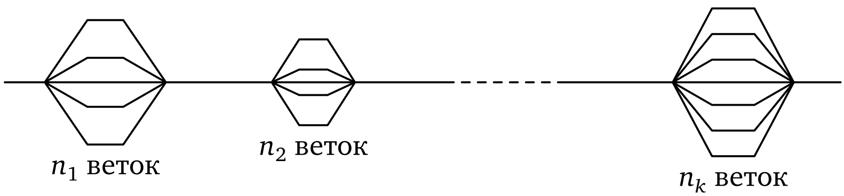
2. Докажите, что некоторое сечение тора является парой окружностей. (*Л. Радзиviловский*)

3. Дан эллипс с фокусом F. Найдите геометрическое место проекций F на хорды, видные из F под фиксированным углом.

(*А. Заславский, по мотивам А. Сгибнева*)

4. Дано натуральное число n, не являющееся полным квадратом. Назовём *хорошими* числа вида $a + b\sqrt{n}$, где a и b рациональные. При каком условии хорошее число можно представить в виде суммы квадратов нескольких хороших чисел? (*Фольклор*)

5. Схема железнодорожного узла имеет следующий вид:



Справа к узлу приближается состав из m локомотивов, которые могут двигаться лишь справа налево, при этом на одной ветке может уместиться любое число локомотивов. При каком наибольшем m локомотивы при прохождении через узел могут перестроиться в любом порядке? (*Фольклор*)

6. Дана матрица размера $k \times 667$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{667}$. Известно, что в разности между любыми двумя различными строками каждый остаток $x \in \mathbb{Z}_{667}$ встречается ровно k раз. Докажите, что то же самое верно и для столбцов. (*А. Я. Канель-Белов*)

7. Перестановке (биекции) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отвечает преобразование рядов:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \to \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}.$$

Назовём перестановку *полезной*, если она может преобразовать расходящийся ряд в сходящийся, и *зловредной*, если она может преобразовать сходящийся ряд в расходящийся.

а) Существует ли полезная и не зловредная перестановка?

б) Назовём перестановку *могучей*, если она может преобразовать сходящийся ряд в сходящийся, но с другой суммой. Верно ли, что могучая перестановка является и полезной и зловредной? Верно ли, что полезная и зловредная перестановка является могучей?

(*М. Л. Гервер*)

8. Многочлены P, Q с целыми коэффициентами степени ровно n не имеют общих корней, $R(x) = P(x)/Q(x)$. Натуральное число q есть *знаменатель* $d(\alpha)$ рационального числа α, если $\alpha = p/q$, дробь p/q несократима, $d(0) = 1$. Докажите, что существует такая величина $C(R) > 0$, зависящая только от R, что при всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ выполняется неравенство $d(R(\alpha)) > C(R) \cdot d(\alpha)$. (*С. Ленг «Алгебра»*)

9. Пусть Γ_1 и Γ_2 — два графа, у каждого счётное число вершин, и каждое ребро в этих графах проводится случайно и независимо с вероятностью $1/2$. С какой вероятностью графы изоморфны?

(*И. В. Митрофанов*)

10. а) Можно ли прямую представить в виде счётного объединения непересекающихся замкнутых ограниченных множеств?

(*Фольклор*)

б) Существует ли бесконечное семейство замкнутых множеств диаметра меньше единицы каждое, покрывающих плоскость, причём никакие 3 из них не имеют общей точки? (*Л. Радзивиловский*)

11. Дан звёздный n-угольник. (Многоугольник называется *звёздным*, если внутри него имеется точка, из которой видны все вершины.) Если он не выпуклый, то берутся две его стороны, образующие впадину (т. е. внутренний угол между которыми больше 180°), на них строится параллелограмм и присоединяется к многоугольнику. Эта операция повторяется с полученным многоугольником и т. д.

а) Докажите, что за конечное число шагов получится выпуклый многоугольник, и оцените максимально возможное число шагов.

б) Рассмотрим аналогичный процесс, когда впадина «переворачивается», т. е. её стороны отражаются относительно прямой, соединяющей её концы. Может ли при этом многоугольник перестать быть звёздным?

в) Предположим, что процесс из п. б) организован так, что многоугольник остаётся звёздным. Может ли он продолжаться бесконечно? Тот же вопрос, если отказаться от условия «звёздности».

(*А. Я. Канель-Белов*)

12. Известно, что $a^2+b^2=4$ и $cd=4$. Покажите, что $(a-d)^2+(b-c)^2 \geqslant \frac{8}{5}$. (*Фольклор*)

13. Треугольник разрезан на выпуклые многоугольники так, что каждая прямая пересекает не более 10 из них. Может ли их количество быть сколь угодно большим? (*С. Г. Слободник*)

14. На какое а) минимальное, б) максимальное число частей могут разбить пространство n полуплоскостей? Аналогичный вопрос для k-мерного случая. (*А. Я. Канель-Белов*)

    в) На какое число частей разбивают k-мерное пространство n гиперплоскостей общего положения? (*Фольклор*)

15. а) Рассматривается последовательность первых цифр степеней двойки 1248136125… Каково количество различных подслов длины 13?

    б) Рассматривается последовательность W первых цифр чисел вида 2^{n^2}: 1215636… Докажите, что существует такой многочлен $P(k)$, что для всех достаточно больших k количество всех различных подслов в W длины k есть в точности $P(k)$. (*А. Я. Канель-Белов*)

Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 193, см. решение: выпуск 4, с. 218) опубликована

Задача 1.3. Может ли сумма чисел вида $a\sin(k\pi/n)$, где a — рациональное число, k, n — целые, равняться $\sqrt{1997}$?

(*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

В этой связи стоит привести полезные тождества.

Задача 1.3$'$. *Докажите равенства*:

$$\text{а)}\ \sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2};\qquad \text{б)}\ \sum_{k=0}^{p-1}e^{k^2\cdot 2\pi i/p}=\begin{cases}\sqrt{p} & \textit{при } p=4k+1,\\ \sqrt{-p} & \textit{при } p=4k-1.\end{cases}$$

Пункт б) *используется при доказательстве* квадратичного закона взаимности. (*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 4, с. 222) опубликована

Задача 2.5. Дано выпуклое тело в пространстве. Докажите, что можно отметить 4 точки на его поверхности так, чтобы касательная (т. е. опорная плоскость) в каждой отмеченной точке была параллельна плоскости, проходящей через остальные три. (*А. Я. Белов*)

Решение этой задачи использует *экстремальный принцип*. Похожие идеи весьма распространены в комбинаторной геометрии, в частности, используются в следующей задаче:

Задача 2.5′. а) *Дана выпуклая фигура. Докажите, что вокруг неё можно описать n-угольник так, чтобы точки касания были серединами звеньев.*

б) *Тот же вопрос для пятиконечной звезды.*

в) *Дан выпуклый n-угольник M. Докажите, что существует замкнутая ломаная, вписанная в M, соседние звенья которой имеют равные углы с соответствующими сторонами M.* (*А. Я. Белов*)

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.

(*Теорема Гаусса — Люка*)

См. также задачу на схожий сюжет (выпуск 28, с. 239):

Задача 3.5′. *Даны многочлены P, Q степени n с вещественными корнями $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. Пусть $z_1 < \ldots < z_{n-1}$; $t_1 < \ldots < t_{n-1}$ — корни производных P' и Q' соответственно, и пусть кроме того $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n$. Докажите, что $z_1 < t_1 < z_2 < t_2 < \ldots < z_{n-1} < t_{n-1}$.* (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 3.5″. *В условиях задачи* 3.5 *докажите, что центры тяжести многоугольника корней многочлена и многоугольника корней его производной совпадают.* (*Фольклор*)

Приведем ещё одну задачу на схожие идеи с Московской городской студенческой олимпиады по математике (1 секция, 1981 год).

Задача 3.5‴. *Пусть все корни многочлена $P(x)$ степени n — различные действительные числа, и пусть $c > 0$. Множество точек x таких, что $P'(x)/P(x) > c$, есть объединение конечного числа непересекающихся интервалов. Докажите, что сумма их длин равна n/c.*

(*Фольклор*)

В выпуске 4 (с. 216, см. решение: выпуск 5, с. 228–229) опубликована

Задача. Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного:

$$F(x+y) = A(x) + B(x)C(y).$$

(*А. Я. Канель-Белов, Б. Р. Френкин*)

В выпуске 28 (с. 239) опубликована

Задача 4.8′. *Решите функциональное уравнение для непрерывных вещественных функций вещественного переменного*:

$$\Phi(a+b+c) = \phi(a)\phi(b)\phi(c). \qquad \text{(Дж. Максвелл)}$$

В этой связи мы предлагаем подумать над *функциональным неравенством*:

Задача 4.8″. а) *Пусть функция f вещественного переменного удовлетворяет функциональному неравенству* $|f(x+y)-f(x)-f(y)|<1$. *Докажите, что существует решение g* уравнения Коши $g(x+y) = g(x)+g(y)$ *такое, что* $|f(x)-g(x)|<1$. (*U. Vishne*)

По аналогии возникает задача

б) *Решите функциональное неравенство*:

$$|F(x+y)-(A(x)+B(x)C(y))|<1. \qquad \text{(А. Я. Канель-Белов)}$$

Функциональные уравнения — распространенная олимпиадная тема, особенно на Международной математической олимпиаде (см. также: 18-я Летняя конференция международного математического Турнира городов, 2006. Задача 3. Функциональные уравнения `https://www.turgor.ru/lktg/2006/3/index.htm`). Удивительно, что тема *функциональных неравенств* на олимпиадах практически не представлена.

В выпуске 4 (с. 217, см. решение: выпуск 7, с. 194–195) опубликована

Задача 4.10. Известно, что ранг коммутатора $[A,B] = AB - BA$ равен единице. Докажите, что матрицы A и B имеют общий собственный вектор. (*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 239) опубликована

Задача 4.10′. *A и B — матрицы порядка n с вещественными коэффициентами, E — единичная матрица. Известно, что* $\mathrm{Rk}([AB]+E)=1$ *Докажите, что*

$$\mathrm{Tr}((AB)^2) - \mathrm{Tr}(A^2B^2) = \binom{n-1}{2}.$$

(*Рустам Турдибаев, В. И. Романовский*)

Вот задачи на схожий сюжет:

Задача 4.10$''$. а) *Пусть A и B — операторы в $\mathbb{R}^n$ такие, что* $[A, B] = \alpha B$, $\alpha \neq 0$. *Докажите, что оператор B* нильпотентен, *т. е.* $B^k = 0$ *при некотором k.*

б) *Докажите, что матричное уравнение $AX - XB = C$ при всех C имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрицы A и B не имеют общего собственного значения.* (*Фольклор*)

В выпуске 5 (с. 217, см. решение: выпуск 10, с. 230–231) опубликована

Задача 5.9. а) В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трёх соседей слева и трёх справа. Докажите, что числа равны.

б) На клетчатой плоскости в клетках расставлены положительные числа так, что каждое записанное число равно среднему арифметическому 4 своих соседей. Докажите, что все числа равны.

в) Верно ли аналогичное утверждение для пространственной решетки? (*И. Ф. Шарыгин*)

Решению этой задачи были посвящены статьи П. Шольце[1] «О неотрицательных гармонических функциях на решётке» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, М.: МЦНМО, 2006, с. 236–242) и С. Г. Слободника «Дискретные положительные гармонические функции» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 11, М.: МЦНМО, 2007, с. 145–148).

На тот же сюжет читателю предлагается

Задача 5.9$'$. *Функция $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ называется* дискретно гармонической, *если значение в любом узле решётки равно среднему арифметическому значений в соседних узлах. Предположим, что известны значения такой функции f во всех ненулевых точках решётки с чётными координатами. Можно ли по этой информации восстановить значение f в начале координат?* (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 8 (с. 246, см. решение: выпуск 9, с. 215–217) опубликована

Задача 8.5. Для иррационального $\alpha > 1$ обозначим

$$N(\alpha) = \{[n\alpha] \mid n \in N\}.$$

[1] Ныне Петер Шольце — лауреат Филдсовской премии 2018 г. В 2005 г. был членом сборной Германии на Международной математической олимпиаде, тогда он решил эту задачу и написал статью для «Математического просвещения».

При каких k найдутся такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что множества $N(\alpha_1), \ldots, N(\alpha_k)$ задают разбиение натурального ряда?

(*А. А. Заславский, А. В. Спивак*)

Предваряя разговор об обобщении этого сюжета, напомним задачу 4-го Турнира городов (весна 1983 г., 9–10 кл., № 5т).

Задача 8.5′. *Закрашены k вершин правильного n-угольника P. Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального m верно следующее условие: если $M1$ — множество m расположенных подряд вершин и $M2$ — другое такое множество, то количество закрашенных вершин в $M1$ отличается от количества закрашенных вершин в $M2$ не больше, чем на 1. Доказать, что для любых натуральных n и k $(k < n)$ почти равномерная закраска существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.*

(*М. Л. Концевич*)

Совет. Поиграйте с малыми n и k.

В выпуске 26 (с. 269, см. решение: выпуск 27, с. 253–254) опубликована

Задача 11.7′. *Докажите, что*

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \qquad (\textit{Фольклор})$$

Продолжением темы служит

Задача 11.7″. *Докажите, что*

$$p \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p-kq)^{k-1}(r+kq)^{n-k} = (p+r)^n. \qquad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 27 (с. 242) опубликована

Задача 13.6′. а) *Пусть A — матрица второго порядка. Тогда*

$$\det(A) = \frac{\mathrm{Tr}^2(A) - \mathrm{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) *Пусть A — матрица n-го порядка. Тогда* $\det(A)$ *есть многочлен S_n с рациональными коэффициентами от величин* $\mathrm{Tr}(A^k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

(*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 13.6″. а) *Определим функции*

$$t_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $R\left(t_1^{(n)},\ldots,t_{n+1}^{(n)}\right)=0$ *для некоторого многочлена* R. *Докажите, что* R *делится на* S_{n+1}. (*Определение многочлена* S_m *см. выше в п.* б) *задачи* 13.6′.

б) *Определим функции*

$$t_k^{(n,m)}=\sum_{i=1}^{n}x_i^k-\sum_{j=n+1}^{m+n}x_i^k,\quad k=1,2,\ldots$$

Докажите, что существует такой многочлен Q_{n+1}, *что если*

$$R\left(t_1^{(n,m)},\ldots,t_{m+n+1}^{(n,m)}\right)=0$$

для некоторого многочлена R, *то* R *делится на* Q_{n+1}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

Задача 13.12. Докажите, что следующие числа могут начинаться с любой комбинации цифр: а) 2^{n^2}; б) $2^{2^n3^k}$.

в) Докажите, что множество $A\subset\mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{2^n}, $c\in A$, периодична, счётно, а множество $B\subset\mathbb{R}$ чисел таких, что последовательность первых цифр c^{10^n}, $c\in B$, периодична, несчётно. (*А. Канель*)

С ней связана

Задача 13.12′. а) *Пусть* $\alpha\notin\mathbb{Q}$. *Докажите, что множество дробных частей* $\{\alpha\cdot n\}$, *где* $n\in\mathbb{N}$, *всюду плотно и равномерно распределено на единичном отрезке.* (*Фольклор*)

б) Лемма Кронекера. *Пусть* α_i, $i=1,\ldots,k$, *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Докажите, что множество векторов из дробных частей* $\{\alpha_1\cdot n\}$, …, $\{\alpha_k\cdot n\}$, *где* $n\in\mathbb{N}$, *всюду плотно и равномерно распределено в единичном кубе.*

Лемма Вейля. *Пусть многочлены* P_i, $i=1,\ldots,k$, *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$ *по модулю многочленов с рациональными коэффициентами и констант. Докажите, что множество векторов из дробных частей* $\{P_1(n)\},\ldots,\{P_k(n)\}$, *где* $n\in\mathbb{N}$:

в) *всюду плотно*;

г) *равномерно распределено в единичном кубе.*

В выпуске 17 (с. 197) опубликована

Задача 17.7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами взяли по точке A_i. Найти объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотреть все 5 возможностей. (*А. Я. Канель*)

Развитием темы служит

Задача 17.7′ (на исследование). *На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами в n-мерном пространстве взяли по точке A_i. Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите случаи кубов, октаэдров, тетраэдров, а также три исключительных многогранника в четырёхмерье* (*три правильных многогранника, не аналогичных трёхмерным*).

Рассмотрите случай k-мерных граней. (*А. Я. Канель*)

В выпуске 20 (с. 250–251) опубликована

Задача 20.8. а) Дан полный граф на n вершинах. Двое по очереди красят его рёбра. Первый красит одно ребро красным, второй красит 100 рёбер в синий цвет, и так повторяется, пока все рёбра не будут покрашены. Может ли первый при достаточно больших n добиться появления полного подграфа со 100 вершинами и всеми красными рёбрами? (*А. Я. Канель-Белов*)

б) В красный цвет раскрашены 99 % рёбер полного графа из n вершин. Верно ли, что при достаточно большом n найдётся полный подграф из 1000 вершин с рёбрами одного цвета? (*А. Я. Канель-Белов*)

в) Каждое k-элементное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$ раскрашено в один из s цветов. Докажите, что при достаточно большом n найдётся такое подмножество $U \subset \{1, \ldots, n\}$, что все его k-элементные подмножества — одного и того же цвета, причём если x — минимальный элемент из U, то число элементов в U не меньше $x+2s$. (*Фольклор*)

Развитием темы служит

Задача 20.8′. а) *Рассмотрим полный граф на $2^{\aleph_0}$ вершинах, ребра которого раскрашены в $\aleph_0$ цветов. Верно ли, что найдётся одноцветный треугольник*?

б1) [Для доказавших существование такого треугольника.] *Для какого максимального k можно гарантированно найти одноцветный полный подграф на k вершинах*?

б2) [Для доказавших, что такой треугольник может не найтись.] *Для какой максимальной мощности числа вершин полного графа, раскрашенного в $\aleph_0$ цветов, одноцветный треугольник может не найтись*? (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 24 (с. 175–176) опубликована

Задача 24.2. а) Пусть 0 — притягивающая точка непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ (т. е. $0<|f'(0)|<1$). Положим $k=f'(0)$.

Докажите для всех x_0 из некоторой окрестности нуля существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n}=: g(x_0),$$

непрерывность функции g и тождество $g(k\cdot g^{(-1)}(x))=f(x)$.

б) Докажите, что если f бесконечно дифференцируема, то и g тоже бесконечно дифференцируема.

в) Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}{2}\cdots=\frac{4-x^2}{\sqrt{2\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)}}.$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служит

Задача 24.2$''$. *Пусть $f(0)=0$, $f'(0)=k\neq 0$. Нас будет интересовать, когда функцию комплексного переменного $f(x)$ можно сопрячь с функцией $k\cdot x$ в окрестности нуля. (Функции f_1, f_2* сопряжены, *если $f_1=G\circ f_2\circ G^{(-1)}$ для некоторой функции G.)*

а) *Пусть функция f аналитична и $|k|\neq 1$. Тогда существует аналитическая функция G такая, что $f(x)=G(kG^{(-1)}(x))$ для всех x.*

б) *Пусть $k^n=1$, где n целое. Приведите пример аналитической функции f, не сопряжённой с линейной в окрестности нуля.*

в) *Пусть f бесконечно дифференцируема, k не есть корень из единицы. Тогда f сопряжена линейной функции как формальный степенной ряд.*

г) *Покажите, что при некотором k этот ряд может расходиться.*

д) *Докажите, что для некоторых k, таких что $|k|=1$, функция f всё же всегда сопряжена линейной, если она аналитична.*

(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 24 (с. 176, см. решение: выпуск 25, с. 186–187) опубликована

Задача 24.6. Пусть $P_1,\ldots,P_k$ — многочлены от $x_1,\ldots,x_n$, $k<n$, с а) комплексными; б) действительными коэффициентами. Возможно ли равенство многочленов:

$$P_1^2+\ldots+P_k^2=x_1^2+\ldots+x_n^2? \qquad (\textit{Фольклор})$$

Продолжением темы служит

Задача 24.6$'$. *Докажите, что многочлен*

$$P(x,y)=1+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$$

принимает только неотрицательные значения, но при этом не является суммой квадратов многочленов. (*Фольклор*)

В выпуске 26 (с. 265, см. решение: выпуск 27, с. 263–265) опубликована

Задача 26.1. Найдите предел

$$\lim_{t\to 1-0}\sqrt{1-t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{k^2}\right). \qquad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 28 (с. 246–247) опубликована

Задача 26.1′. а) *Сравнивая сумму* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *с интегралом* $\int_1^k \frac{1}{x}\,dx$, *докажите, что*

$$n! \sim \sqrt{2c\cdot n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

для некоторого c. (*Абрахам де Муавр*)

б) *Оценивая биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}$ *с помощью пункта* а), *воспользовавшись равенством*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

и интегралом Гаусса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},$$

покажите, что константа c *из предыдущего пункта равна* π.

(*Джеймс Стирлинг*)

в) *Докажите, что*

$$n! = \sqrt{2\pi\cdot n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\exp\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}a_k n^{-k}\right),$$

при этом все a_k — *рациональные числа.* (*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 26.1″. *Найдите*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2n}(n-|n-k|)\cdot\sqrt[n]{e^k}}{n^2}. \qquad (\textit{Фольклор})$$

В выпуске 26 (с. 265–266) опубликована

Задача 26.3. Пусть n — натуральное число, p — простое число. Докажите, что число способов представить n в виде суммы нескольких натуральных чисел, идущих в порядке невозрастания и не делящихся на p, равно числу способов представить n в виде суммы натуральных чисел, среди которых нет p одинаковых. (*А. Я. Канель-Белов*)

Продолжением темы служат следующие задачи.

Задача 26.3′. Разбиением *натурального числа называется его представление в виде суммы натуральных слагаемых* (*разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми*). *Число всех разбиений данного числа* n *обозначается* $P(n)$. *Назовем* длиной *разбиения число различных слагаемых в нём. Докажите, что сумма длин всех разбиений числа* n *равняется* $P(1)+P(2)+\ldots+P(n-1)$. (*Фольклор*)

Задача 26.3″. *Докажите тождество*:

$$(1-x)\cdot(1-x^2)(1-x^3)\ldots=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(x^{(3k^2-k)/2}+x^{(3k^2+k)/2}).$$

(*Фольклор*)

В выпуске 27 (с. 234, см. решение: выпуск 28, с. 261–262) опубликована

Задача 27.3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Родственная задача 27.3′ опубликована в выпуске 28 (с. 247). Продолжением темы служит

Задача 27.3″. *Можно ли расположить в пространстве между двумя параллельными плоскостями систему выпуклых тел так, чтобы ни одно из них нельзя было выдвинуть*? (*Фольклор*)

В выпуске 28 (с. 234) опубликована

Задача 28.6. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI, где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности. (*К. В. Козеренко*)

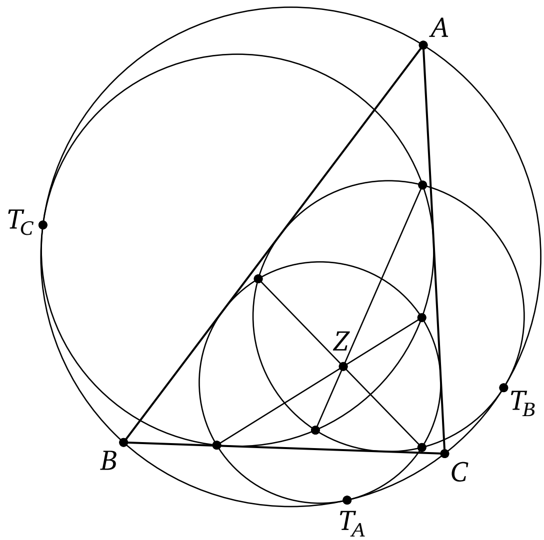


Рис. 1

В развитие сюжета:

Задача 28.6$'$. *Обозначим через Z радикальный центр трёх полувписанных окружностей ω_A, ω_B и ω_C треугольника ABC* (рис. 1). *Пусть T_A, T_B, T_C — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Рассмотрим следующую инверсию (точнее говоря, антиинверсию) с полюсом в точке Z: точке X ставится в соответствие такая точка X', что $\overrightarrow{XZ}\cdot\overrightarrow{X'Z}=D$, где D — степень точки Z относительно любой из трёх полувписанных окружностей. Положим $T'_A=\mathrm{Inv}_Z(T_A)$, $T'_B=\mathrm{Inv}_Z(T_B)$, $T'_C=\mathrm{Inv}_Z(T_C)$.*

а) *Докажите, что точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности (аналогично для четвёрок точек A, T'_A, T'_B, B и A, T'_A, T'_C, C)*, см. рис. 2. *Эти окружности назовём* полуописанными.

б) *Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей. Докажите, что точка Q лежит на прямой OI.*

(*К. В. Козеренко*)

В выпуске 28 (с. 234–235) опубликована

Задача 28.7. Докажите равенства

а) $\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\sqrt{7}\sin\frac{2\pi}{5}\right)$. (*В. А. Сендеров*)

б) $$\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}+\cos\frac{11\pi}{19}}+\sqrt[3]{\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{17\pi}{19}}+$$
$$+\sqrt[3]{\cos\frac{9\pi}{19}+\cos\frac{13\pi}{19}+\cos\frac{15\pi}{19}}=$$

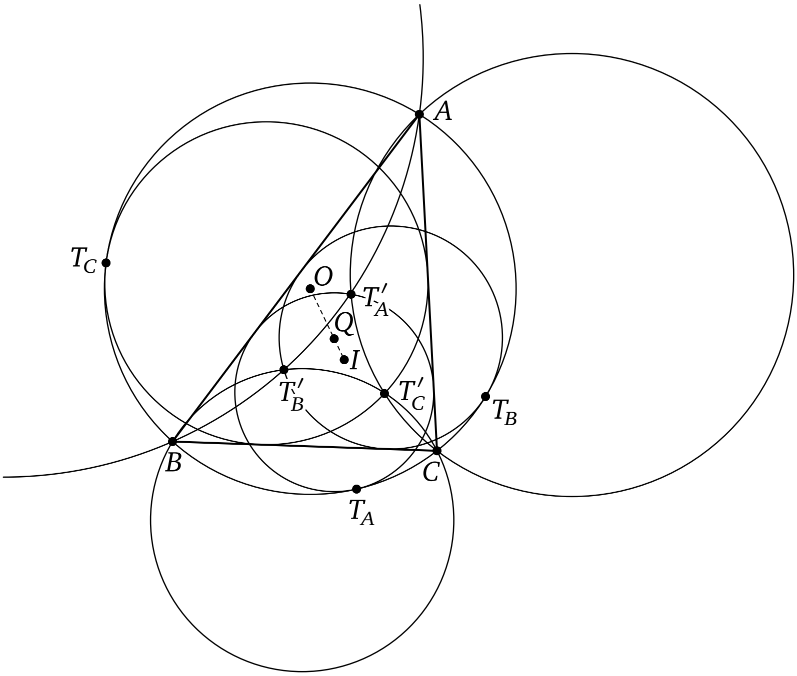


Рис. 2

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{2}-3\sqrt[3]{7}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49}+18\sqrt[3]{7}-25}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{3\sqrt[3]{49}+18\sqrt[3]{7}-44}}.$$

(*С. В. Маркелов*)

в) $$\sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}}+\sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11)\cos(8\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}}+$$
$$+\sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(16\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}}+\sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}}+$$
$$+\sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}}=$$
$$=\sqrt[5]{276+170\sqrt[5]{11}-40\sqrt[5]{11^2}-80\sqrt[5]{11^3}-15\sqrt[5]{11^4}}.$$

(*С. В. Маркелов, К. И. Пименов*)

В продолжение сюжета:

Задача 28.7′. *Докажите равенства*:

а) $$\sqrt[5]{\frac{\cos(2\pi/11)\cos(8\pi/11)}{\cos^2(4\pi/11)}}+\sqrt[5]{\frac{\cos(4\pi/11)\cos(16\pi/11)}{\cos^2(8\pi/11)}}+$$

$$+\sqrt[5]{\frac{\cos(8\pi/11)\cos(32\pi/11)}{\cos^2(16\pi/11)}}+\sqrt[5]{\frac{\cos(16\pi/11)\cos(2\pi/11)}{\cos^2(32\pi/11)}}+$$
$$+\sqrt[5]{\frac{\cos(32\pi/11)\cos(4\pi/11)}{\cos^2(2\pi/11)}}=$$
$$=\sqrt[5]{177-40\sqrt[5]{11}-5\sqrt[5]{11^2}+15\sqrt[5]{11^3}-25\sqrt[5]{11^4}};$$

б) $$\sqrt[3]{\sin\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sin\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sin\frac{8\pi}{7}}=$$
$$=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[6]{7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-2+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{7}-4}+\sqrt[3]{3\sqrt[3]{7}-5}};$$

в) $$\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-1\right)^{1/3}+\frac{1}{3}6^{2/3}}+\sqrt[3]{-\left(-\sqrt{3}\sin\frac{1\pi}{9}+1\right)^{1/3}+\frac{1}{3}6^{2/3}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\left(\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+1\right)^{1/3}+\frac{1}{3}6^{2/3}}=$$
$$=\frac{1}{2}(-2073\cdot 3^{1/3}+6912\cdot 3^{2/3}+18\,432)^{1/9};$$

г) $$\sqrt[3]{\left(27\left(2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}-1\right)^{1/3}-18\cdot 3^{1/3}\right)^{1/3}+3^{4/9}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\left(27\left(2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9}+1\right)^{1/3}+18\cdot 3^{1/3}\right)^{1/3}+3^{4/9}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\left(-27\left(2\sqrt{3}\sin\frac{1\pi}{9}+1\right)^{1/3}+18\cdot 3^{1/3}\right)^{1/3}+3^{4/9}}=$$
$$=-(-1458\cdot 3^{2/3}+81\cdot 3^{1/3}+2916)^{1/9}.$$

(*С. В. Маркелов*, *К. И. Пименов*)

См. также: *Маркелов С. В.* О тождествах Рамануджана // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 218–219.

В выпуске 28 (с. 235) опубликована

Задача 28.13. Внутри тетраэдра единичного объёма находится параллелепипед. Каков максимально возможный его объём?

(*А. Я. Канель-Белов*)

Можно поставить обратный вопрос:

Задача 28.13′. *В единичный n-мерный куб вписан тетраэдр* (*не обязательно правильный*). *Каков максимально возможный его объём*?

Решите задачу сначала в случаях $n=3, 7$. (*Л. Радзивиловский*)

Решения задач из прошлых выпусков

2.4″ (выпуск 22, с. 234). Условие. Можно ли раскрасить более половины (вариант — более 99 % вершин какого-нибудь правильного n-угольника так, что объединение любых десяти поворотов раскраски не закроет весь n-угольник? Постарайтесь получить по возможности лучшие оценки на n, а также явные конструкции. (*А. Я. Канель-Белов*)

Ответ. Да, но может потребоваться большое количество вершин.

Первое решение. Возьмём $10\,000^{10}$-угольник и пронумеруем его вершины по кругу в 10 000-ричной системе 10-значными числами.

Пусть множество S состоит из всех таких чисел, в записи которых отсутствуют 0 и 1.

Тогда

$$\frac{|S|}{|V|} = \left(1 - \frac{2}{10\,000}\right)^{10} \geqslant \frac{99}{100},$$

например в силу неравенства Бернулли:

$$\left(1 - \frac{2}{10\,000}\right)^{10} \geqslant 1 - 10 \cdot \frac{2}{10\,000} = 1 - \frac{2}{1000} \geqslant 1 - \frac{1}{100}.$$

Второе решение. Циклический сдвиг чисел из S означает прибавление одного и того же числа ко всем элементам. Если в k-м разряде прибавляемого числа стоит a, то ни в одном числе из полученного множества в k-й позиции не стоит $a + 1 \pmod{10\,000}$. Пусть S_1, S_2, …, S_{10} — десять циклических сдвигов множества S. Найдутся такие цифры $d_1, \ldots, d_{10}$, что ни в каком элементе из S_i не стоит d_i в i-й позиции. Поэтому число $\overline{d_1 d_2 \ldots d_{10}}$ не принадлежит $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$.

(*Л. Радзивиловский*)

2.10. Условие. Пусть $K(n)$ — наибольшее число слагаемых в разложении натурального числа n в сумму таких натуральных чисел, что каждое следующее делится на предыдущее и строго его больше. Докажите, что $K(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. (*С. Маркелов*)

Решение. Мы докажем несколько более сильное утверждение:

Пусть $K(n)$ — наибольшее возможное количество слагаемых в разложении $n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$, где $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$ — натуральные числа и каждое предыдущее делит следующее. Тогда существует такое $C > 0$, что $K(n) > C\sqrt{\log n}$ при любом n.

Пусть q — наименьшее натуральное число, на которое n не делится. Разделим с остатком: $n = sq + a$, где a — остаток. Тогда $n - a$ делится на a и на q.

Положим $a = a_1$, заменим n на $(n-a)/\operatorname{lcm}(a, q)$ и будем повторять эту процедуру пока возможно. Получим разложение, удовлетворяющее условию задачи.

Как долго это могло продолжаться? Применим следующую теорему о простых числах:

$$\sum \lim_{p,k} \lim_{p\text{ простое}} \lim_{p^k < m} \log p \sim m,$$

или, в другой формулировке,

$$\log(\operatorname{lcm}(1, 2, 3, \ldots, m-1)) \sim m.$$

Заметим, что n делится на $\operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, q-1)$ и, следовательно, больше его, поэтому $\log(aq) < 2\log q < 2\log\log n$. Разделив n на aq, мы уменьшим $\log n$ не более чем на $2\log\log n$. Эта граница уменьшается при уменьшении n. Поэтому количество шагов не меньше чем

$$\frac{\log n}{2\log\log n} \gg \sqrt{\log n}.$$

(*Л. Радзивиловский*)

8.11′ (выпуск 23, с. 218). Условие. Предположим, что предел

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$$

существует. Докажите, что тогда ряд $\sum a_n$ сходится, если:

а) $a_n = o(1/n)$;

б) $a_n = O(1/n)$. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Для удобства обозначим

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k.$$

а) Числа M_n ограниченны, поскольку их последовательность сходится. Поэтому $|M_n| \leqslant M$для некоторого M. при Для любого $\varepsilon > 0$

существует такое N, что $|a_n| < \varepsilon/n$ при любом $n > N$. При $\varepsilon = 1/k^2$ получаем

$$|a_n|, |a_{n+1}|, \ldots \leqslant \frac{1}{k^2 n}.$$

При $n \leqslant m \leqslant kn$ получаем

$$|s_m - s_{kn}| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{$*$}$$

Далее,

$$M_{kn} = \frac{n}{kn} M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}) = \frac{1}{k} M_n + \frac{n-1}{n}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn})$$

Таким образом,

$$\left| M_{kn} - \frac{k-1}{k} \cdot s_{kn} \right| = \left| \frac{n}{kn} M_n + \frac{1}{kn}(s_{n+1} + \ldots + s_{kn}) - \frac{kn-n}{kn} s_{kn} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{k} + \left| \frac{1}{kn} \cdot \sum_{m=n+1}^{kn} (s_m - s_{kn}) \right| \leqslant \frac{M}{k} + \left| \frac{1}{kn} \cdot \frac{1}{k}(k-1)n \right| \leqslant \frac{M+1}{k}.$$

Если n достаточно велико, то M_{kn} достаточно близко к α, поэтому если k достаточно велико, то $(k-1)/k \cdot s_{kn}$ достаточно близко к α, тогда s_{kn} достаточно близко к $k\alpha/(k-1)$ и, значит, достаточно близко к α. Согласно $(*)$ любое s_m при $m > n$ достаточно близко к α.

б) Сведём этот случай к предыдущему. Преобразуем последовательность так, что сходимость s_k и M_k сохранится, а последовательность a_k станет $o(n)$ вместо $O(n)$.

Ключевой шаг — добавление нулей. Добавление нуля в позиции n означает, что последовательность a_n заменяется на $\tilde{a}_1 = a_1$, $\tilde{a}_2 = a_2$, …, $\tilde{a}_{n-1} = a_{n-1}$, $\tilde{a}_n = 0$, $\tilde{a}_{n+1} = a_n$, $\tilde{a}_{n+2} = a_{n+1}$, $\tilde{a}_{n+3} = a_{n+2}$, …

На этом шаге сходимость $s_k \to \alpha$ не меняется.

Теперь проверим, как меняется $\lim\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right)$ при добавлении нулей в позициях $p, 2p, 3p, 4p, \ldots$ (можно выбрать большое p, например 999 999).

Положим $q = p - 1$. При $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ с большим n получаем взвешенное среднее величин вида $\frac{1}{m}\sum_{k'=1}^{m} s_{k'}$ (где $m \approx n \cdot (p-1)/p$, вес примерно равен $p-1$, а k' пробегает значения k, не превосходящие n и не кратные p) и $\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} s_{kp}$ (где $\ell \approx n/p$ и вес примерно равен 1). Заметим, что обе усредняемые величины стремятся к α. Действительно, из условия это следует для суммы и для второго слагаемого, а следовательно, и для первого.

Вторая величина $\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} s_{kp}$ при больших ℓ распадается на два слагаемых:

$$\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{L} s_{kp} + \frac{1}{\ell}\sum_{k=L+1}^{\ell} s_{kp}.$$

Первое слагаемое стремится к нулю, а второе достаточно близко к $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$, так как при $|kp-n|<p$ разности малы: $|s_{kp}-s_n|<Cp/L$ при $kp, n>L$. При этом $\frac{1}{\ell p}\sum_{k=Lp+1}^{\ell p} s_k$ достаточно близко к α.

Добавление нулей в позициях p, $2p$, $3p$, $4p$, ... будем называть p-разбавлением. Мы показали, что после p-разбавления обе величины $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ и s_k имеют общий предел. После p-кратного p-разбавления плотность исходной последовательности в новой равна $(1-1/p)^p$.

Положим $p_n = 10^{10\cdot n}$. Выполним p_1-разбавление p_1 раз, затем выполним p_2-разбавление p_2 раз и т. д.

Последовательность из $N>p_{k+1}$ начальных членов становится менее плотной примерно в e^k раз. Поэтому граница $|a_n|<C/n$ превращается в $|a_n|<C/(e^k n)$, где k — наибольшее число, для которого $N>p_{k+1}$. При $k\to\lim_{n\to\infty}\infty$ получаем $a_n=o(n)$.

С другой стороны, каждый элемент исходной последовательности сдвигается лишь конечное количество раз, поэтому $\lim s_k$ остаётся прежним. (*Л. Радзивиловский*, *А. Я. Канель-Белов*)

13.8 (поправка в выпуск 24, с. 177). Условие. Непрерывная функция f такова, что

$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 1 \quad \text{для любого } k\in\{1,\ldots,n-1\}.$$

Докажите, что

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant n^2.$$

(*SEEMOUS* 2008, *Mircea Dan Rus*)

Первое решение. Первая идея: спроектируем на пространство меньшей размерности. Предположим, что существует многочлен $p(x)$ степени меньше n, удовлетворяющий условиям на f. Положим $g=f-p$. Тогда

$$\int_0^1 x^k g(x)\,dx = 0 \quad \text{для } k=1,\ldots,n-1$$

и
$$\int_0^1 q(x)g(x)\,dx = 0$$
для любого многочлена q степени меньше n. Далее,
$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \int_0^1 (g(x)+p(x))^2\,dx =$$
$$= \int_0^1 g^2(x)\,dx + 2\int_0^1 g(x)p(x)\,dx + \int_0^1 p^2(x)\,dx \geqslant \int_0^1 p^2(x)\,dx.$$
Значит, если указанный многочлен $p(x)$ существует, то он минимизирует $\int_0^1 f^2(x)\,dx$. Такой многочлен $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ существует и единствен: он является основанием перпендикуляра в пространстве многочленов от x степени ниже n, опущенного из 0 на гиперплоскость
$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 1.$$
При этом
$$\int_0^1 p^2(x)\,dx = \int_0^1 p(x)\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \int_0^1 p(x)x^i\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i. \qquad (**)$$
Таким образом, надо доказать, что $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = n^2$.

Применим следующий приём. Рассмотрим функцию
$$r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x+i} - 1.$$
Из условия следует, что она имеет n корней $1, 2, \ldots, n$. Приведём слагаемые к общему знаменателю. Тогда числитель будет многочленом степени не выше n:
$$r(x) = \frac{q(x) - x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}.$$
Нетрудно видеть, что $q(x)$ имеет степень $n-1$, а его старший коэффициент равен $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$, что нам и требуется вычислить.

Числитель имеет степень n, его старший коэффициент равен -1 и мы знаем его корни. Отсюда находим:
$$q(x) = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n-1) - (x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n).$$

Осталось вычислить коэффициент при x^{n-1} в обоих произведениях. В итоге получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = (1+2+\ldots+(n-1)) - (-(1+2+\ldots+n)) = n^2,$$

что и требовалось. (*И. Фещенко*)

Второе решение. Выберем многочлен $p(x)$ как в первом решении. Заметим, что в формуле $(**)$ имеем $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = p(1)$. Зададим следующую последовательность многочленов:

$$p_0(x) = p(x), \quad p_{i+1}(x) = \int_0^x p_i(t)\,dt.$$

Утверждение. $\int_0^1 t^k p_i(t)\,dt = 0$ *при* $0 < i < n-k$.

Доказательство. Пусть $i = 1$, $k < n-1$:

$$1 = \int_0^1 t^{k+1} p_0(t)\,dt = t^{k+1} p_1(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 k+1 t^k p_1(t)\,dt,$$

$$t^{k+1} p_1(t)\Big|_0^1 = p_1(1) = \int_0^1 p(t)\,dt = 1, \quad \int_0^1 t^k p_1(t)\,dt = 0.$$

Шаг индукции по i: пусть $k < n-i-1$, тогда

$$0 = \int_0^1 t^{k+1} p_i(t)\,dt = t^{k+1} p_{i+1}(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 k+1 t^k p_{i+1}(t)\,dt,$$

$$t^{k+1} p_{i+1}(t)\Big|_0^1 = p_{i+1}(1) = \int_0^1 p_i(t)\,dt = 0, \quad \int_0^1 t^k p_{i+1}(t)\,dt = 0,$$

что и требовалось. □

Продолжим решение задачи. По построению $p_i(0) = 0$. По доказанному $p_i(1) = 0$ при $i \leqslant n$. Следовательно, p_n делится на $x^n(x-1)^{n-1}$. При этом $\deg(p_n) < 2n$, так как $\deg(p_0) < n$. Поэтому $p_n = \alpha x^n (x-1)^{n-1}$ для некоторой константы α. Вспомним формулу Лейбница:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^k f\right) \times \left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} g\right)$$

(доказывается индукцией по n). С её помощью получаем:

$$p_1(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} p_n(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \left(\alpha x^n (x-1)^{n-1}\right) = \\ = q(x)(x-1) + (n-1)!\alpha x^n$$

для некоторого $q(x)$. Отсюда $1 = p_1(1) = (n-1)! \cdot \alpha$, поэтому

$$p_n(x) = \frac{x^n (x-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

После n-кратного дифференцирования этой функции единственным ненулевым слагаемым будет

$$n \cdot \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dx}\right) x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x-1)^{n-1} = n^2 x^{n-1}.$$

Положив $x = 1$, получаем $p(1) = n^2$, что и требовалось.

(*Л. Радзивиловский*)

Набросок третьего решения. Как и в первом решении, потребуется решить задачу из линейной алгебры. Нужно решить уравнение $Ax = \mathbf{1}$, где A — матрица Гильберта, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $1/(i+j-1)$, а $\mathbf{1}$ — единичный вектор. Матрица Гильберта является частным случаем матрицы Коши, в которой на пересечении строки i и столбца j стоит $1/(s_i + t_j)$. Все подматрицы в матрице Гильберта — также матрицы Коши.

Если уметь вычислять определитель матрицы Коши, можно обратить матрицу Гильберта по правилу Лейбница — Крамера.

(*Л. Радзивиловский*)

Четвёртое решение. Скалярное произведение удобнее рассматривать в ортогональном базисе. Для рассматриваемого скалярного произведения такой базис хорошо известен: это *смещённые* (*сдвинутые*) *многочлены Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n ((x^2 - x)^n)$$

(с обычными многочленами Лежандра, ортогональными относительно скалярного произведения $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, они связаны подстановкой $x \mapsto 2x - 1$).

Выбранный базис не ортонормирован, но ортогонален: $\langle P_n, P_n\rangle = 1/(2n+1)$ и $\langle P_m, P_n\rangle = 0$ при $m \neq n$ (доказывается интегрированием по частям). При этом $P_n(1) = 1$, что доказывается с помощью формулы Лейбница (приведённой во втором решении).

Многочлен $p(x)$ степени меньше n, имеющий скалярное произведение 1 с многочленами $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, характеризуется следующим образом. Для любого многочлена

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

степени меньше n имеем

$$\langle p, q \rangle = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = q(1).$$

Отсюда получаем разложение $p(x)$ по смещённым многочленам Лежандра: $\langle p, P_k \rangle = P_k(1) = 1$. Следовательно,

$$p = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) P_n$$

и

$$\langle p, p \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2 \langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2.$$

(*Шахар Папини*)

23.10′ (выпуск 24, с. 180). Условие. По рёбрам октаэдра бегают паук и муха. Паук видит муху, находясь с ней на одном ребре. Сможет ли он её поймать, если скорость паука в 2,5 раза больше скорости мухи?[1)] (*Фольклор*)

Ответ. Да.

Решение. Обозначим вершины октаэдра (рис. 1) через A, B, C, D, E, F, где A противоположна D, B противоположна E, а C противоположна F. Пусть паук бегает по пути (назовём его «путём паука»)

$$A - B - C - D - E - F - A - B - C - D - E - F \ldots,$$

пока не увидит муху. С этого момента паук бежит по направлению к мухе, пока не поймает её. Докажем, что рано или поздно паук увидит муху.

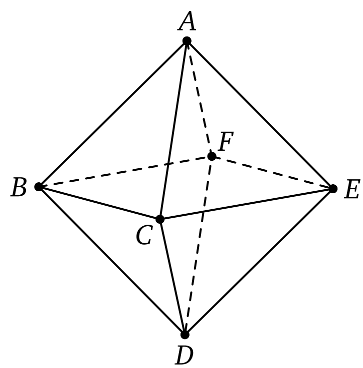


Рис. 1

Пусть некоторая окружность разделена шестью точками A', B', C', D', E', F' (в указанном порядке) на равные части. Точку A' считаем

[1)] Задача содержала также открытый вопрос: при каком наименьшем соотношении скоростей паук может поймать муху? Вопрос остаётся открытым.

тенью точки A, точку B' — тенью точки B и т. д. Когда точка равномерно движется от некоторой вершины октаэдра X к другой вершине Y, её тень равномерно движется от соответствующей тени X' к тени Y' по кратчайшей дуге. Это определение корректно, поскольку противоположные вершины шестиугольника соответствуют противоположным вершинам октаэдра.

Заметим, что если кто-то бежит по «пути паука», то его тень движется вдвое медленнее, чем если бы он бежал по одному из остальных рёбер. Но так как паук бежит в 2,5 раза быстрее мухи, его тень всё равно догонит тень мухи. Если в этот момент муха находится на «пути паука», она уже поймана. Если нет, то муха находится на ребре между какими-то вершинами X и Y, а паук бежит из X в Y через вершину Z, причём XYZ — грань октаэдра.

Возможны два случая: либо муха ближе к X, чем к Y, либо нет.

В первом случае паук увидит муху, будучи в вершине X, поскольку в это время муха уже будет находиться на ребре XY.

Во втором случае паук увидит муху из точки Y, поскольку в этот момент муха ещё находится на ребре XY. В обоих случаях паук поймает муху. (*Л. Радзивиловский*)

24.11. Условие. б) Известно, что $0<a_0<a<\ldots<a_n$. Докажите, что тригонометрический многочлен $a_0+a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx$ на отрезке $[0, \pi]$ ровно n раз обращается в нуль.

(*В. А. Сендеров, А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Нам потребуется

Лемма. *Если $0<a_0<a_1<\ldots<a_n$, то все корни многочлена $p(z)=$ $=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$ находятся в открытом единичном круге $\{|z|<1\}$.*

Из леммы следует по принципу аргумента, что если z пробегает окружность $|z|=1$, то $p(z)$ совершает ровно n оборотов вокруг нуля, так что $p(z)$ пересекает положительную полуось не меньше n раз и отрицательную полуось также не меньше n раз.

Такими образом, $\mathrm{Re}(p(z))$ имеет не меньше $2n$ нулей на окружности $|z|=1$.

Покажем, что нулей ровно $2n$. Положим $q(x, y)=\mathrm{Re}(p(x+iy))$.

Произведение $q(x, y)\cdot q(x, -y)$ является многочленом степени $2n$, чётным по y. Возьмём $y=\sqrt{1-x^2}$. Получаем многочлен

$$Q(x)=q\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\cdot q\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$$

от x степени $2n$, поскольку корень входит лишь в чётных степенях. Каждый корень появляется в Q дважды, поскольку из $q(x,y)=0$ следует $q(x,-y)=0$, а вещественные значения $x=\pm1$ не являются корнями для Q, поскольку $p(\pm1)$ имеет ненулевую действительную часть. Значит, Q имеет не больше n различных корней, а $\mathrm{Re}(p(z))$ имеет не больше $2n$ нулей на окружности $|z|=1$.

Итак, $\mathrm{Re}(p(z))$ имеет ровно $2n$ нулей на окружности $|z|=1$.

Положив $z=e^{ix}$, переформулируем доказанный факт: многочлен из условия задачи имеет ровно n нулей на $[-\pi,\pi]$, причём все они не равны 0 или $\pm\pi$. Поскольку многочлен чётен, ровно половина из этих корней принадлежит интервалу $(0,\pi)$.

Осталось доказать лемму. Приведём два доказательства.

Первое доказательство леммы. Докажем, что

$$a_nz^n+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0\neq0\quad\text{при } |z|\geqslant1.$$

В последовательности комплексных чисел a_nz^n, …, a_2z^2, a_1z, a_0 аргументы образуют арифметическую прогрессию, а абсолютная величина убывает. Заметим, что если в последовательности $z_n, z_{n-1}, \ldots, z_0$ абсолютная величина постоянна, а аргументы составляют арифметическую прогрессию, то последовательность частичных сумм 0, z_n, z_n+z_{n-1}, $z_n+z_{n-1}+z_{n-2}$, … расположена на комплексной плоскости в точках окружности (рис. 2), так как каждые четыре последовательных элемента образуют равнобокую трапецию.

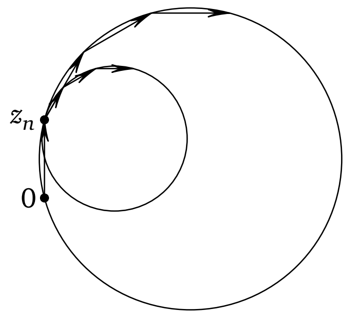


Рис. 2

Одновременно уменьшим абсолютные величины $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots, z_1, z_0$, а именно сохраним аргументы и $|z_n|$ и положим $|z_n|>|z_{n-1}|=\ldots=|z_0|$. Тогда все частичные суммы, кроме 0 и z_n, а именно z_n+z_{n-1}, $z_n+z_{n-1}+z_{n-2}$, … гомотетически сжимаются к z_n. Теперь они на меньшей окружности, которая касается исходной в точке z_n с коэффициентом гомотетии $|z_{n-1}|/|z_n|$.

Теперь положим $|z_{n-2}|=\ldots=|z_0|$ и заметим, что $z_n+z_{n-1}+z_{n-2}$, … принадлежат ещё меньшей окружности, и т. д. В итоге сумма оказывается внутри последовательности вложенных окружностей. Исходная окружность проходит через нуль, вторая касается её в точке $z_n\neq0$, так что сумма заведомо не нуль. Лемма доказана. □

Второе доказательство леммы. Умножим многочлен на $z-1$:

$$(z-1)(a_nz^n+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0)=a_nz^n-b_{n-1}z^{n-1}-\ldots-b_2z^2-b_1z-b_0.$$

Если $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, то $b_k > 0$ при любом k, причём

$$a_n = b_{n-1} + \ldots + b_2 + b_1 + b_0,$$

поскольку 1 является корнем нового многочлена. Если $|z| \geqslant 1$, то

$$|a_n z^n| \geqslant |b_{n-1} z^{n-1}| + \ldots + |b_2 z^2| + |b_1 z| + |b_0| \geqslant |b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0|.$$

Равенство здесь возможно лишь при $z = 1$. Это корень нового многочлена, но не корень исходного. □ (*Л. Радзививиловский*)

25.6. Условие. а) Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — такие вещественные числа, что при любых целых x и y по крайней мере одно из чисел $a_1x + b_1y + c_1$, $a_2x + b_2y + c_2$ целое и чётное. Докажите, что по крайней мере в одной из троек коэффициентов a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 все числа целые. Что получится, если требовать только целочисленность значений одной из линейных форм? (*С. Л. Крупецкий*)

б) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i$$

число рациональное. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа рациональные?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

в) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + c_i$$

число целое, делящееся на $n!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа целые?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

а) Ответ. Целочисленности значений одной из форм недостаточно.

Решение. Рассмотрим множество M из девяти точек решётки, образующих квадрат. Покрасим в красный цвет те точки $(x, y) \in M$, для которых выражение $a_1x + b_1y + c_1$ целое и чётное, а в синий цвет те точки, для которых выражение $a_2x + b_2y + c_2$ целое и чётное (допускается покраска узла в два цвета).

Из 9 узлов не менее 5 покрашены в один цвет, пусть это красный. По принципу Дирихле, в одном из горизонтальных рядов имеется два красных узла. Их координаты (x_1, y) и (x_2, y), где $|x_1 - x_2|$ равно 1 или 2. Подставляя эти координаты в первое выражение и вычитая, получим, что $a_1(x_1 - x_2)$ целое и чётное, а стало быть, a_1 целое. Рассмотрев вертикальные ряды, аналогично находим, что и b_1 целое. Но тогда целым будет и c_1, что и требовалось доказать.

Если требовать только *целочисленность* значений одной из линейных форм $a_1x + b_1y + c_1$ и $a_2x + b_2y + c_2$, то утверждение задачи перестаёт быть верным. Вот простейший контрпример: положим

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = 1.$$

Если x и y разной чётности, то первое выражение целое. Если одной чётности, то второе. (*А. Я. Канель-Белов*)

Переходя к пп. б), в), напомним, что *подгруппой* в $\mathbb{Z}^n$ является центрально-симметричное подмножество векторов A, содержащее нулевой вектор и замкнутое относительно сложения. Оно порождается как абелева группа не более чем n своими элементами. Мощность фактор-группы $\mathbb{Z}^n/A$ называется *индексом* подгруппы A в $\mathbb{Z}^n$. Индекс конечен тогда и только тогда, когда в A можно выбрать n линейно независимых над $\mathbb{Z}$ векторов. В этом случае индекс равен минимальному ненулевому значению модуля определителя матрицы $n \times n$, столбцы которой — векторы из A. Если индекс A в $\mathbb{Z}^n$ равен d, то $\mathbb{Z}^n$ можно покрыть d непересекающимися сдвигами множества A.

Подробнее о подгруппах конечно порождённых абелевых групп можно прочитать, например, в учебнике «Курс алгебры» Э. Б. Винберга.

Лемма 1. *Пусть $M \subset \mathbb{Z}^n$ — подмножество, состоящее из целочисленных точек n-мерного пространства. Обозначим $M - M$ множество всех векторов, соединяющих точки M, а $\langle M - M \rangle$ — подгруппу в $\mathbb{Z}^n$, порождённую множеством $M - M$ (т. е. множество всех конечных целочисленных линейных комбинаций элементов из $M - M$). Допустим, что $\langle M - M \rangle$ является подгруппой конечного индекса d в $\mathbb{Z}^n$.*

Пусть $f(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — линейная функция, т. е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c$$

для некоторых $a_1, \ldots, a_n, c$. Допустим, что для любой точки $v \in M$ число $f(v)$ является целым. Тогда все коэффициенты a_i и c являются целыми числами, делёнными на d.

Доказательство. Обозначим g функцию f без свободного члена, т. е. $g(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

Для любых двух точек $v_1, v_2 \in M$ имеем

$$g(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) \in \mathbb{Z}.$$

Так как g принимает целые значения на элементах, порождающих $\langle M - M \rangle$, то g принимает целые значения на всех векторах из $\langle M - M \rangle$. Факторгруппа $\mathbb{Z}^n / \langle M - M \rangle$ содержит d элементов, и из теоремы Лагранжа о порядке группы следует, что для любого вектора $v \in \mathbb{Z}^n$ выполнено $d \cdot v \in \langle M - M \rangle$, а значит, $dg(v) \in \mathbb{Z}$. Беря i-й базисный вектор в качестве v, получаем, что a_i — целое число, делённое на d. Так как это выполнено для всех a_i, утверждение леммы выполнено также и для c. $\square$

Пусть M — подмножество в $\mathbb{Z}^n$. *Плотностью* $\rho(M)$ назовём предел

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\text{число элементов из } M \text{ в шаре с центром в нуле и радиусом } R}{\text{число целых точек в шаре с центром в нуле и радиусом } R},$$

если такой предел существует. Соответствующий верхний предел назовём *верхней плотностью* $\bar{\rho}(M)$, а нижний предел *нижней плотностью*.

Лемма 2. *Если для некоторого k пространство $\mathbb{Z}^n$ содержит k непересекающихся параллельных переносов множества M, то верхняя плотность множества M не превосходит* $1/k$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ — векторы сдвигов. Обозначим $D = \max |e_i|$. Обозначим B_R и B_R^+ соответственно множества всех целых точек внутри шара радиуса R и внутри шара радиуса $R + D$ (оба шара с центром в нуле). Пусть $M_R = B_R \cap M$. Легко видеть, что сдвиги $M_R + e_i$ не пересекаются и лежат в B_R^+, поэтому $|M_R| \leqslant |B_R^+|/k$. Утверждение леммы следует из того, что $\lim_{R \to \infty} |B_R^+|/|B_R| = 1$. $\square$

Следующие леммы доказывается аналогично, и их доказательство мы оставляем читателю как упражнение.

Лемма 3. *Если для некоторого k пространство $\mathbb{Z}^n$ является объединением k параллельных переносов множества M, то нижняя плотность M не меньше* $1/k$.

Лемма 4. *Если пространство $\mathbb{Z}^n$ является объединением конечного числа множеств $M_1, \ldots, M_k$, то сумма их верхних плотностей хотя бы* 1.

Лемма 5. *Если два множества $M_1, M_2 \subset \mathbb{Z}^n$ переводятся друг в друга сдвигом, то их верхняя (нижняя) плотность совпадает.*

Из этих лемм следует, что *у любой подгруппы A в $\mathbb{Z}^n$ существует плотность*. При этом $\rho(A) > 0$ в том и только том случае, когда индекс d подгруппы A в $\mathbb{Z}^n$ конечен, и в этом случае $\rho(A) = 1/d$.

(*А. Я. Канель-Белов*)

б) Ответ. Да, верно.

Решение. Покрасим точку $v \in \mathbb{Z}^n$ в цвет i, если t_i рациональное. По лемме 4, плотность хотя бы одного из цветов положительна. Не умаляя общности считаем, что это точки первого цвета, и пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1$$

— соответствующая линейная функция. Точки первого цвета не могут лежать в одной гиперплоскости, иначе можно было бы рассмотреть непересекающиеся сдвиги этой гиперплоскости и из леммы 2 получить, что плотность этого цвета равна 0. Значит, найдутся $n+1$ точек первого цвета, являющиеся вершинами симплекса ненулевого объёма. Обозначим это множество точек M. Векторы, соединяющие вершину симплекса со всеми остальными, линейно независимы. Поэтому в множестве $M - M$ есть n линейно независимых векторов, и согласно сказанному выше подгруппа $\langle M - M \rangle$ имеет конечный индекс в $\mathbb{Z}^n$. При этом существует натуральное N такое, что $Nf(v) \in \mathbb{Z}$ для любой точки $v \in M$ (например, можно взять НОК знаменателей всех значений f на множестве M).

Теперь утверждение задачи следует из леммы 1.

(*И. В. Митрофанов*)

в) Ответ. Да, верно.

Решение. Действуем так же, как в п. (б): покрасим точку $v \in \mathbb{Z}^n$ в цвет i, если t_i рациональное. По лемме 4 верхняя плотность одного из цветов не меньше чем $1/k$. Пусть это первый цвет. Обозначим соответствующее множество через M, а линейную функцию t_i через f. Пусть d — индекс подгруппы $\langle M - M \rangle$ в $\mathbb{Z}^n$. Если $d > k$, то

$$\bar{\rho}(M) \leqslant \rho(\langle M - M \rangle) = \frac{1}{d} < \frac{1}{k}$$

и мы получим противоречие. Значит, d является делителем числа $k!$. Применяя лемму 1 к множеству M и функции $f/k!$, получаем утверждение задачи. (*И. В. Митрофанов*)

От редакции

В выпуске 25 (с. 167) опубликована задача 25.1, посвящённая индексу Хирша, а в выпуске 26 (с. 284) — её решение. Мы получили письмо одного физика, которое показывает, что затронутый в ней вопрос актуален.

Нам пишут: «Нормальный учёный не может полноценно руководить десятью аспирантами, и аспиранты не публикуют 12 статей в год. В лучшем случае 4–5».

Действительно, если говорится, что за 56 месяцев 10 аспирантов выходят на нобелевский уровень, — преувеличение очевидно. Однако искусственное «накачивание» индекса цитирования весьма распространено (см. библиографию к решению, которая состоит из басни Крылова «Кукушка и петух»).

В письме уточняется также, что индекс 50, согласно Хиршу, — уровень не нобелевского лауреата, а американского академика (но в основном американские академики ближе к 80).

Опечатки, замеченные в выпуске 28

Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
47	11 сверху	= 21 493 759	= 21 493 760
52	6 сверху	для недели	дня недели
239	11 сверху	$3.5'$	$3.5''$

Поправка

При публикации статьи А. Б. Скопенкова «Основы теории узлов и зацеплений для пользователя» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 27) допущена погрешность на с. 129 в рис. 1. Третий слева узел в верхнем ряду должен быть таким, как соответствующий узел на рис. 1 в `https://arxiv.org/abs/2001.01472`

Информация для авторов

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Издание публикует материалы по различным областям математики, а также по проблемам её истории и преподавания, интересные и доступные указанной аудитории.

2. Сборник «Математическое просвещение» не публикует существенно новые научные результаты, оценка которых доступна лишь специалистам в соответствующей области. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

3. Материалы принимаются по электронной почте на адрес `matpros@yandex.ru` в виде двух файлов (`pdf` и `tex`) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в `Word`.

4. Просим обратить внимание, что материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

5. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

6. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

7. В конце статьи необходимо указать для каждого из авторов:

— фамилию, имя, а также отчество (если есть) полностью,

— место работы/обучения,

— электронный адрес для публикации.

8. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение (хотя бы набросок).

9. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый, просим обращаться по адресу `matpros@yandex.ru`

Научно-популярное издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 29

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано с электронных носителей издательства в ООО «Паблит».
г. Москва, ул. Полярная, 31В, стр. 1. Тел.: (495) 230–20–52.
E-mail: info@publitprint.ru

Подписано в печать 04.04.2022 г. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 18. Тираж 500 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745–80–31.
E-mail: biblio@mccme.ru, http://biblio.mccme.ru