

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 31

Москва
Издательство МЦНМО

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

*Издано при поддержке
Фонда развития теоретической
физики и математики «БАЗИС»*

Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Ильяшенко Ю. С.	Сосинский А. Б.
Вялый М. Н.	Канель-Белов А. Я.	Тихомиров В. М.
Гайфуллин А. А.	Митрофанов И. В.	Устинов А. В.
Гальперин Г. А.	Полянский А. А.	Френкин Б. Р.
Гусейн-Заде С. М.	Прасолов В. В.	Ященко И. В.
Дориченко С. А.	Райгородский А. М.	
Заславский А. А.	Семёнов А. Л.	

Главный редактор А. М. Райгородский
Отв. секретарь Б. Р. Френкин

Адрес редакции:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: matpros@yandex.ru

WEB PAGE: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Математическое просвещение. Третья серия, вып. 31. —
М34 М.: МЦНМО, 2023. — 232 с.
ISBN 978-5-4439-1802-0

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1802-0

© МЦНМО, 2023

Поздравляем членов редколлегии:



*Алексея Яковлевича Канель-Белова
с 60-летием*



*Григория Александровича Гальперина
с 70-летием*



*Бориса Рафаиловича Френкина
с 75-летием*

Содержание

Математический мир

А. В. Булинский

Краткий очерк жизни и творчества академика А. А. Маркова . . . 5

Григорий Маргулис: я старался работать в разных областях математики над трудными задачами 37

С. Б. Стечкин

Как писать работы 48

Наш семинар: математические сюжеты

А. М. Райгородский

Ещё немного о математике раскрасок 55

А. Б. Скопенков

Инварианты изображений графов на плоскости 74

С. Б. Гашков

Вокруг правильного многоугольника 128

Г. Галяпин, Т. Карягин, Г. Шарафетдинова

О неевклидовой теореме Фейербаха 166

Популяризация и преподавание математики

Г. Б. Шабат

О Законе Всемирного Тяготения и его объяснениях 187

Задачник (составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач 209

Дополнение и комментарии к задачнику 213

Решения задач из прошлых выпусков 221

Об электронных публикациях по геометрии 230

Математический мир

Краткий очерк жизни и творчества академика А. А. Маркова

А. В. Булинский

Прошло 100 лет со дня смерти А. А. Маркова. Его жизнь — яркий пример служения отечественной науке. В нашей статье даётся краткая биография учёного и рассматриваются некоторые полученные им результаты, относящиеся к теории вероятностей. Акцент делается на последующем развитии идей выдающегося математика. Изложение ориентировано на широкий круг читателей, однако приведены и сведения, представляющие интерес для специалистов.

§ 1. Биография

1.1. Детство. Обучение в гимназии

Выдающийся русский математик Андрей Андреевич Марков родился 2 (14) июня 1856 года в Рязани в семье чиновника. В детстве Андрей тяжело болел костным туберкулёзом, ходил на костылях, поскольку одна нога не разгибалась в колене. Семья переехала в Петербург, и там после удачной операции нога у мальчика стала разгибаться. Далее он передвигался без костылей, хотя и немного прихрамывал всю жизнь. В 1866 году А. Маркова определили в Пятую петербургскую гимназию. От гимназии у Андрея Маркова остались тяжёлые воспоминания. Его отец, А. Г. Марков, писал: «Опять меня вызывали к директору. Ничем

Автор статьи — д. ф.-м. н., профессор, лауреат премии имени М. В. Ломоносова за научные работы (МГУ, 2010), лауреат премии имени А. Н. Колмогорова РАН (2021), лауреат Общенациональной премии «Профессор года (2022)» в номинации «Физико-математические науки».



А. А. Марков, 1886 год

Андрей не хочет заниматься, кроме математики». Однако это не совсем точное наблюдение. А. Марков проявлял острый интерес к явлениям общественной жизни. Когда Андрей был в выпускном классе, директор вызвал его отца и заявил ему, что не потерпит у себя в гимназии «атеистов и нигилистов». Андрею Григорьевичу удалось убедить директора принять сына вновь в выпускной класс. В аттестате А. Маркова было указано, что «любопытность весьма в удовлетворительной степени развита к физико-математическим наукам». Педагогический совет выставил А. Маркову по математике 5, и эта же оценка была получена им на выпускных испытаниях. По латинскому, греческому и немецкому языкам стояли тройки. Сохранились записные книжки юного А. Маркова, в которых он давал решения сложных математических задач. Ему показалось, что он изобрёл новый метод решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Об этом он написал вице-президенту С.-Петербургской академии наук В. Я. Буняковскому, который в письме (от 13 ноября 1873 года) гимназисту А. Маркову указал, что предлагаемый метод «уступает со стороны простоты общезвестному», а также отметил ряд пробелов в тексте автора.

1.2. ОБУЧЕНИЕ И РАБОТА В УНИВЕРСИТЕТЕ

В 1874 году Андрей Марков, получив аттестат, поступил на физико-математический факультет С.-Петербургского университета. Поражает сильный состав педагогов факультета того периода. Достаточно

сказать, что теорию чисел и теорию вероятностей читал П. Л. Чебышёв, органическую химию — А. М. Бутлеров, неорганическую химию — Д. И. Менделеев. В отличие от гимназии, А. Марков был одним из лучших студентов. За весь период обучения в С.-Петербургском университете он имел лишь две четвёрки, а остальные — пятёрки (одну четвёрку ему поставил на экзамене Д. И. Менделеев, а другую он получил по богословию). В 1877 году студентам математикам была предложена конкурсная тема по дифференциальным уравнениям для самостоятельного исследования. Студент А. Марков был награждён за выполненное исследование золотой медалью. В 1878 году А. Марков окончил университет со степенью кандидата по разряду математических наук (так тогда назывался диплом о высшем образовании) и был оставлен при университете «для приготовления к профессорскому званию». Так началась работа А. Маркова в С.-Петербургском университете, продолжавшаяся всю его жизнь с небольшими перерывами.

Вспоминая годы обучения в университете, А. Марков писал, что среди его профессоров «следует упомянуть П. Л. Чебышёва, Е. И. Золотарёва и в особенности А. Н. Коркина». В 1880 году А. Марков защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» и был удостоен степени магистра математики (аналог нашей кандидатской диссертации), об этой работе можно прочитать на с. 146–193 книги [1]. После этого он подаёт прошение ректору Императорского Санкт-Петербургского университета профессору А. Н. Бекетову об утверждении его в должности приват-доцента (в современном понимании ассистента). Интересно, что для вступления в должность полагалось удачно прочитать две лекции на заданные факультетом темы. А. А. Маркову это удалось. Далее Андрей Андреевич подготовил докторскую диссертацию, и после успешной защиты был утверждён в степени доктора математики (аналог нынешней докторской диссертации) в 1885 году. В 1882 году П. Л. Чебышёв прекратил читать лекции в университете, и А. А. Марков начал читать лекции по теории вероятностей. До этого он преподавал дифференциальное исчисление и высшую алгебру, интегральное исчисление, аналитическую геометрию, теорию чисел. В 1886 году А. А. Марков был утверждён экстраординарным профессором по кафедре чистой математики (соответствует современной должности доцента). В 1893 году он назначен ординарным профессором (соответствует нынешней должности профессора) и читал лекции вплоть до 1921 года, когда серьёзно заболел.

Преподавание А. А. Маркова не отличалось внешними эффектами. По воспоминаниям профессора физики Б. П. Вейнберга, «некоторые

из нас увлекались способом изложения А. А. Маркова, каждым словом как бы заколачивавшего гвоздь за гвоздём по одной прямой линии, с которой не давал сходить истине». Это же можно сказать и об учебных пособиях А. А. Маркова, в частности, о знаменитой книге «Исчисление вероятностей» [2]. Обычно на экзаменах А. А. Марков ставил много пятёрок и четвёрок. Однако экзамен мог продолжаться несколько дней.

Уже в молодости А. А. Марков не только был крупным учёным, но и проявил твёрдость, отстаивая свои убеждения. Очень актуально звучит высказывание А. А. Маркова: «Я не отрицаю пользы составления учебных планов и программ, но не для контроля над отдельными преподавателями, а для установления надлежащей полноты и последовательности преподавания, причём программы могут быть только самого общего характера, не стесняющие свободы преподавания». В декабре 1905 года на заседании Совета он высказал мнение, что кафедра богословия должна быть отделена от всех факультетов и преподавание богословия не должно быть обязательным. Требование знать латинский язык А. А. Марков считал вредным. Он неоднократно писал заявления в различные инстанции вплоть до министра просвещения, отстаивая свои взгляды по различным вопросам общественной жизни, выступал в защиту студентов.

1.3. Деятельность в Академии наук

В 1896 году Общее собрание Академии наук избрало А. А. Маркова ординарным академиком (аналог современного звания академика). В этом качестве Андрей Андреевич активно участвовал в научно-организационной работе, входил в различные комиссии. Например, был членом комиссии по реформе календаря в России. В 1905 году эта комиссия приняла решение о целесообразности перехода от юлианского календаря к григорианскому. Однако данное решение было реализовано только в 1918 году. Выдающийся математик В. А. Стеклов (имя которого теперь носит Математический институт РАН) подчёркивал, что Андрей Андреевич был «неизменно-пречестным человеком», хотя часто и вступал в споры, не обращая внимания на принятую дипломатическую форму дискуссий. При этом А. А. Марков излагал свои взгляды, невзирая на то, какое положение занимал человек, с которым шла полемика. А. А. Марков подверг резкой критике научные труды С. В. Ковалевской, К. Пирсона, П. А. Некрасова, Б. Б. Голицына и др. (в некоторых случаях он признавал, что судил слишком строго). Принято считать, что Андрей Андреевич был абстрактным теоретиком, не интересовавшимся практическими задачами. Однако это не так. Например, он при-

нял участие в работе по совершенствованию расчётов эмеритальных касс, созданных в России в середине XIX века и осуществлявших обязательное страхование государственных служащих (название происходит от латинского слова «emeritus», что означает «заслуженный»). С 1909 года до конца жизни А. А. Марков был членом комиссии по изучению научного наследия Л. Эйлера и изданию его сочинений. А. А. Марков был одним из инициаторов документа «Записка о нуждах просвещения в России», опубликованного в газетах в январе 1905 года за подписью 342 научных работников, в том числе 16 академиков. В этом документе говорилось о тяжёлом положении школы начальной, средней и высшей. Авторы указывали, что политика правительства в области народного просвещения задерживает духовный рост народа, что необходимо коренное преобразование общественного строя. Там же отмечалось тяжёлое положение преподавателей высшей школы, указывалось на их падающий научный и нравственный авторитет. После свержения самодержавия А. А. Марков продолжает активную работу в Академии. В ноябре 1918 года он избирается представителем Академии в Совет по делам статистики Центрального статистического управления.

1.4. ОТНОШЕНИЕ К САМОДЕРЖАВИЮ И РЕЛИГИИ

А. А. Марков не только без колебаний откликался на события университетской и академической жизни, но и принимал близко к сердцу события государственного масштаба. Например, когда в петербургской газете «Новое время» в 1904 году по поводу неудач в русско-японской войне было напечатано, что «все мы виноваты, и теперь лишь пожинаем плоды посеянного нами», А. А. Марков на следующий день направил письмо издателю газеты А. В. Суворину, в котором написал: «В № 10334 (от 6 дек.) Вашей газеты неудачная война с Японией поставлена в вину всем. Такое обвинение всем представляет, с одной стороны, клевету, а с другой — попытку скрыть настоящих виновных». А. А. Марков отказался войти в комиссию по подготовке празднования в 1913 году 300-летия Дома Романовых. Параллельно этому он развернул кампанию по празднованию 200-летия закона больших чисел Бернулли. 1 декабря 1913 года на торжественном заседании Академии наук он выступил с докладом «Очерк развития закона больших чисел как совокупности математических теорем». По воспоминаниям В. А. Стеклова, мест в зале не хватило на всех желающих слушать этот доклад. Андрей Андреевич был возмущён отменой (по указанию Николая II) избрания писателя М. Горького (А. М. Пешкова) почётным академиком и выступал за пересмотр этого решения. В 1912 году

А. А. Марков обратился в Священный синод с просьбой отлучить его от Церкви. В своём прошении он написал: «Надеюсь, что достаточным основанием для отлучения может служить ссылка на мою книгу „Исчисление вероятностей“, где ясно выражено моё отрицательное отношение к сказаниям, лежащим в основании еврейской и христианской религии». В итоге было зафиксировано его отпадение от Церкви.

1.5. Семья

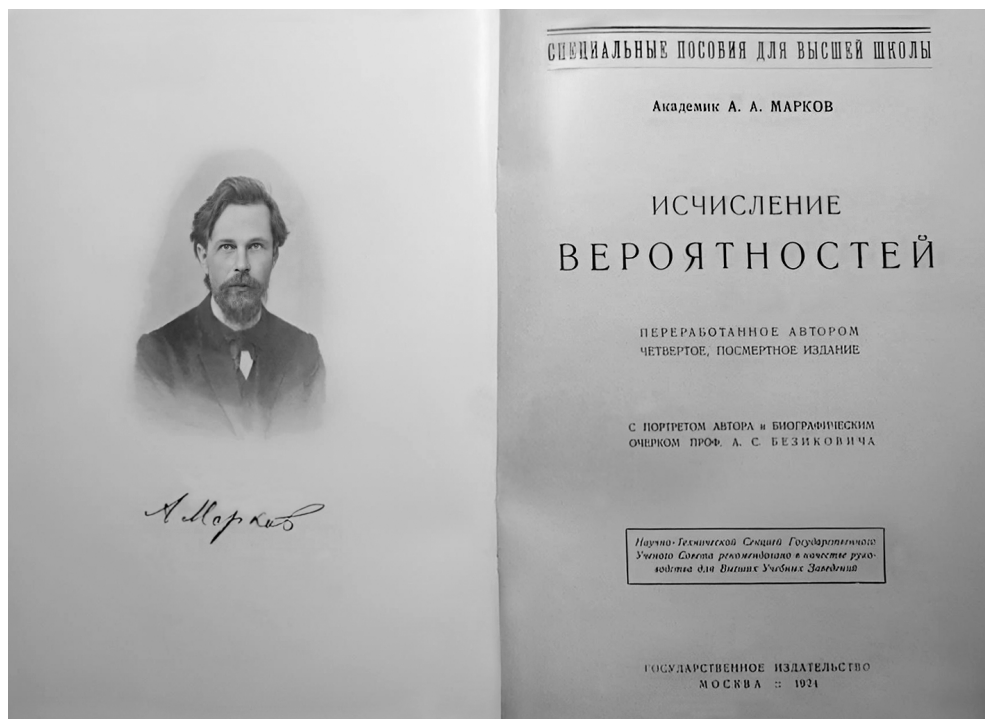
В 1883 году А. А. Марков женился на Марии Ивановне Вальватъевой. Они были знакомы с детства, поскольку одно время отец Андрея был управляющим в имении помещиков Вальватъевых. Сильные взаимные чувства у молодых людей возникли, когда студент Андрей Марков стал заниматься математикой с Марией, которой в гимназии не давались точные науки. Её мать, Екатерина Александровна, желала для дочери мужа с более определённым положением, чем студент. Свадьба состоялась лишь тогда, когда Андрей Марков был уже приват-доцентом, готовился защищать докторскую диссертацию и становиться профессором. В конце 90-х годов А. А. Марков с женой переехали в жилой дом Академии наук, поскольку Андрей Андреевич уже был избран академиком. Этот дом № 2 на 7-й линии Васильевского острова украшен множеством мемориальных досок в память о выдающихся учёных, живших в нём.

Своих детей у Марковых не было 20 лет. Поэтому они взяли на воспитание трёх осиротевших детей своих дальних родственников. Только в 1903 году у Марковых родился сын Андрей. Мальчик рос болезненным, родители его обожали и проявляли трогательную заботу. Сохранились письма А. А. Маркова, в которых непримиримый публицист предстаёт любящим отцом, заботящимся не только о здоровье сына, но и о его воспитании.

А. А. Марков был разносторонне одарённым человеком. Он проявил себя знатоком культуры древнего Ирана (Персии), был замечательным шахматистом, с большим успехом участвовал в шахматных турнирах по переписке, дружил с основателем отечественной шахматной школы М. И. Чигориным. Сын А. А. Маркова стал известным советским математиком, был избран членом-корреспондентом АН СССР.

1.6. Последние годы жизни

Октябрьскую революцию А. А. Марков (в отличие, например, от К. А. Тимирязева) не понял. А. А. Марков в письмах жалуется на неустроенность быта, хотя он и был включён в список лиц, которым необходим усиленный паёк питания. 5 марта 1921 года А. А. Марков сооб-



Посмертное издание классического труда А. А. Маркова «Исчисление вероятностей»

шил Общему собранию Академии наук, что из-за отсутствия обуви лишён возможности посещать заседания Академии. Комиссия под председательством А. М. Горького выделила обувь выдающемуся учёному. Однако 25 мая 1921 года А. А. Марков заявил следующее: «Наконец, я получил обувь; но она не только дурно сшита, но и совершенно не подходит мне по своим размерам. Полученную мною обувь я предлагаю поместить в Этнографическом музее, как образец материальной культуры текущего момента, ради чего я готов её пожертвовать».

20 июля 1922 года А. А. Марков скончался от заражения крови при хирургической операции. Он был похоронен на Митрофаниевском кладбище Петрограда. В 1954 году прах А. А. Маркова перенесён на Литераторские мостки Волкова кладбища Ленинграда.

Андрей Андреевич Марков прожил очень яркую жизнь. Для нас он является не только выдающимся учёным, обогатившим мировую науку классическими результатами, но и примером гражданского мужества при отстаивании своих взглядов. Много интересного материала о жизни А. А. Маркова содержит книга [3].

§ 2. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ А. А. МАРКОВА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ИХ РАЗВИТИЕ

С именем Маркова связаны крупные достижения в теории чисел, приближении функций, исчислении конечных разностей, проблеме моментов. Однако центральное место в его научном творчестве занимают работы по теории вероятностей и математической статистике. Комментарии к ряду трудов А. А. Маркова можно прочитать, например, в приложениях к [3, 4] и в [5]. Объём данной статьи позволяет рассмотреть лишь часть деятельности Андрея Андреевича в области теории вероятностей, отметив последующее развитие некоторых идей выдающегося учёного. Желательно знакомство читателя с базовыми понятиями случайной величины и независимости таких величин. Ряд используемых далее терминов поясняется, чтобы сделать изложение доступным широкой аудитории.

2.1. Закон больших чисел

Очень давно было замечено, что при большом числе опытов, производимых в одинаковых условиях так, что результаты этих опытов не влияют друг на друга, частота наступления изучаемого явления (события) приобретает устойчивое поведение и как бы совершает небольшие колебания возле некоторого числа. Например, К. Пирсон (1857–1936) подбросил обычную монету 24 000 раз, герб выпал 12 012 раз. Таким образом, частота выпадения герба в этой серии опытов составила $12\,012/24\,000$, что очень близко к $1/2$. Однако не следует думать, что при увеличении числа бросаний монеты частота будет сходиться к пределу $1/2$ в обычном понимании предела числовой последовательности. Оказалось, что можно построить математическую модель, описывающую подобные эксперименты, и в рамках этой модели дать строгое объяснение упомянутой устойчивости частот. Для удобства читателей напомним некоторые базовые понятия.

Случайные эксперименты описываются с помощью пространства элементарных исходов Ω , состоящего из точек ω . Каждая точка ω отвечает одному из возможных исходов. Можно сказать, что в случайном эксперименте результат неизвестен до его проведения (в отличие, например, от эксперимента по нагреванию воды до 100°C при нормальном давлении, когда она превращается в пар). Например, при высоком подбрасывании монеты не удаётся предсказать, какой стороной она выпадет на поверхность. При n бросаниях монеты исход ω удобно описывать вектором в $\mathbb{R}^n$ с компонентами, равными нулю или

единице (единица соответствует выпадению «герба», а нуль — «решки»). Если представить, что монета подбрасывается неограниченное количество раз, то элементарный исход — это бесконечная последовательность, имеющая на каждом месте нуль или единицу. Заметим, что бесконечные последовательности из нулей и единиц дают пример несчётного пространства Ω .

После построения Ω выделяется класс $\mathcal{F}$ его подмножеств, называемых событиями. Если Ω дискретно, т. е. состоит из конечного или счётного числа элементарных исходов, то в качестве $\mathcal{F}$ рассматриваются все подмножества из Ω . В других случаях, как правило, выделяется непустой класс подмножеств, обладающих следующими свойствами. Если $A \in \mathcal{F}$, то дополнение $\bar{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$. Если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Тогда автоматически и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (сказанное относится и к объединению конечного числа множеств из $\mathcal{F}$, а также и к их пересечению). Указанные два свойства задают систему подмножеств Ω , называемую *сигма-алгеброй* (σ -алгеброй). Очевидно, $\Omega \in \mathcal{F}$ и пустое множество $\emptyset \in \mathcal{F}$. Сигма-алгебры подмножеств можно рассматривать не только в Ω , но в других множествах S , например, для $S = \mathbb{R}$. Разумеется, совокупность всех подмножеств произвольного (непустого) множества является σ -алгеброй.

Затем на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ вводится мера. Неотрицательная счётно-аддитивная функция $\mathbb{Q}$, заданная на $\mathcal{F}$, называется *мерой*. Счётная аддитивность означает, что для последовательности $A_1, A_2, \dots$ множеств из $\mathcal{F}$, которые попарно не пересекаются (т. е. $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$), справедливо равенство:

$$\mathbb{Q}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A_n). \quad (1)$$

Понятие меры является естественным обобщением понятий длины, площади и объёма, используемых в геометрии. Обращаясь к (1), уместно вспомнить, что ещё Аристотеля в философском плане интересовало соотношение между целым и частями. Если $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, то мера называется вероятностной (или просто *вероятностью*). Вероятностную меру обычно обозначают $\mathbb{P}$. В дискретном пространстве мера задаётся последовательностью (или набором) $(p_i)_{i \in I}$, где $I = \mathbb{N}$ (или $I = \{1, \dots, r\}$, r — число элементов конечного Ω), $p_i \geq 0$ для $i \in I$ и $\sum_{i \in I} p_i = 1$. А именно, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) := p_i$, $i \in I$, тогда для любого $A \subset \Omega$ имеем $\mathbb{P}(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$. Показывается, что так введённая функция $\mathbb{P}$ является мерой на σ -алгебре всех подмножеств дискретного пространства Ω . Когда Ω конечно и имеет мощность r , выбор $p_i = 1/r$, где $i = 1, \dots, r$, приводит к «клас-

сическому определению вероятности» (все элементарные исходы равновероятны). Тройка объектов $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *вероятностным пространством*.

Основной интерес представляют функции, заданные на пространстве Ω . Например, важно знать не только то, что исход ω привёл к выигрышу в лотерее, но желательно представлять размер выигрыша, т. е. величину $X(\omega)$. Для построения общей теории рассматриваются функции, обладающие «хорошими свойствами.» Случайная величина X определяется как «измеримое отображение» Ω в $\mathbb{R}$, т. е. $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ для $x \in \mathbb{R}$. Существуют эквивалентные определения, например, $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ для каждого «борелевского» подмножества прямой $\mathbb{B}$ (борелевские множества составляют минимальную σ -алгебру, содержащую все интервалы вида (a, b) , где $-\infty < a \leq b < \infty$). Важно, что случайная величина индуцирует *распределение вероятностей* на σ -алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевских подмножеств прямой по формуле

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Обычно пишут $\mathbb{P}(X \in B)$. Если Ω дискретно, то случайной величиной является любая функция $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. В таком случае распределение вероятностей $\mathbb{P}_X$ на подмножествах множества $\{x_i, i \in I\}$, состоящего из различных значений функции X , задаётся вектором $(p_i)_{i \in I}$, где $p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$, $i \in I$. Случайные величины называются *одинаково распределёнными*, если их распределения совпадают на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для дискретных случайных величин X, Y это означает, что они принимают значения в одном и том же множестве $\{u_i, i \in I\}$, и при этом $\mathbb{P}(X = u_i) = \mathbb{P}(Y = u_i)$ для всех $i \in I$, где I конечно или счётно.

Говорят, что последовательность $X_1, X_2, \dots$ состоит из *независимых* случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых борелевских множеств $B_1, B_2, \dots$ верно равенство

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in B_j\}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\{X_j \in B_j\}). \quad (2)$$

Определение, эквивалентное (2), получается, если в качестве B_j рассматривать произвольные полупрямые вида $B_j = (\infty, x_j]$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Понятие независимости отражает обычное предположение, что ни одна из рассматриваемых величин «не влияет на поведение других». Понятие независимости систем случайных величин сводится к независимости порождённых ими σ -алгебр. Независимые системы событий рассматриваются, например, в [6, § 8, гл. 1].

Важную роль играют числовые характеристики случайных величин. Если X принимает значение x_j с вероятностью p_j , где $j = 1, \dots, r$, то математическое ожидание X определяется формулой

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^r x_j p_j.$$

Представим, что в точке x_j сосредоточена масса p_j , $j = 1, \dots, r$, тогда $\mathbb{E}X$ — это координата центра тяжести данной системы. Поэтому $\mathbb{E}X$ также называют *средним значением*. Для величины X с бесконечным числом значений $\mathbb{E}X$ может принимать конечные или бесконечные значения, а может и не существовать. Когда число различных значений величины X счётно (составляет множество $\{x_1, x_2, \dots\}$), $\mathbb{E}X$ равно сумме ряда $\sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j$, если этот ряд сходится абсолютно. Аналогично

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j) p_j$$

при условии абсолютной сходимости ряда для измеримой функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (в пространстве $\mathbb{R}$ берётся σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Если величины X_k имеют распределение Бернулли с параметром p , т. е. $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ и $\mathbb{P}(X_k = 0) = 1 - p$, где $k \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$, то $\mathbb{E}X_k = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$. Для случайных величин, множество значений которых необязательно дискретно, математическое ожидание вводится как интеграл Лебега функции X по мере $\mathbb{P}$. Эта конструкция приводится практически в любом университетском учебнике по теории вероятностей.

Многие годы, начиная с Я. Бернулли (1665–1705), изучался «слабый» вариант закона больших чисел для последовательности независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots$, имеющих конечное математическое ожидание. Речь шла об условиях, обеспечивающих для любого $\varepsilon > 0$ справедливость соотношения

$$\Delta_n(\varepsilon) := \mathbb{P}\left(\omega: \left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Соотношение (3) показывает, что при больших n (и при выполнении некоторых условий) средние арифметические случайных величин $X_1, \dots, X_n$ приобретают как бы неслучайное поведение, близкое к поведению числовой последовательности $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k$. Если в каждом опыте только фиксируется, произошло или не произошло некоторое событие, часто именуемое «успехом», то для описания полученных

результатов используются величины $X_1, X_2, \dots$, принимающие значения 1 или 0. Обычно значение 1 величины X_k показывает, что в k -м опыте наступил «успех». Если величины $X_1, X_2, \dots$ имеют распределение Бернулли, то выполнение (3) в такой схеме означало бы должную близость к p частоты появления единицы в n опытах (частота «успеха» в n опытах будет $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, при этом $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k = p$). Последовательность случайных величин $Y_1, Y_2, \dots$ называется сходящейся по вероятности к случайной величине Y , если $\mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$. Соотношение (3) означает, что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k$$

сходится к нулю по вероятности, когда $n \rightarrow \infty$. Подчеркнём, что (3) не обязано выполняться для каждой последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$.

Интересно, что при определённых условиях можно даже выяснить, сколь большие n следует брать для того, чтобы при заданных положительных ε и δ выполнялось неравенство $\Delta_n(\varepsilon) < \delta$. Это легко объяснить с помощью *неравенства Чебышёва*, которое называют также неравенством Бьенэме — Чебышёва. А именно, для любой случайной величины X , имеющей конечную дисперсию $\text{var } X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$, и каждого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{var } X}{\varepsilon^2}. \quad (4)$$

Отметим, что (4) — следствие установленного позднее *неравенства Маркова*, которое утверждает, что для любой неубывающей неотрицательной функции f , заданной на $[0, \infty)$, произвольной случайной величины X и каждого $\varepsilon > 0$

$$f(\varepsilon)\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}f(|X|). \quad (5)$$

Это неравенство нетривиально, когда $\mathbb{E}f(|X|) < \infty$ и $f(\varepsilon) > 0$, и тогда можно написать, что $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}f(|X|)/f(\varepsilon)$. Очевидно, если в (5) вместо X подставить $X - \mathbb{E}X$ и выбрать $f(x) = x^2$ для $x \geq 0$, то получится (4).

Если $X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, то из (4) вытекает (3), когда $X_1, X_2, \dots$ независимы и $\text{var } X_k \leq C$ при всех $k \in \mathbb{N}$, где C — положительная константа. Действительно, $\Delta_n(\varepsilon) \leq C/(n\varepsilon^2)$, так как дисперсия суммы независимых величин равна сумме их дисперсий и $\text{var}(aX) = a^2 \text{var } X$ для $a \in \mathbb{R}$. Если $|X_k(\omega)| \leq b$ для всех $\omega \in \Omega$ и некоторой константы $b > 0$,

то $\text{var } X_k \leq b^2$, где $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, если модули независимых величин ограничены некоторой константой, то закон больших чисел (3) справедлив. Если независимые X_k имеют распределение Бернулли с $p = 1/2$, то $\text{var } X_k = 1/4$ и $\Delta_n(0,01) \leq 0,01$ согласно (4) при $n \geq 250\,000$. Оказывается, эту оценку выбора n можно заметно улучшить. Например, в силу неравенства Хёффдинга (установленного в 1963 году) $\Delta_n(\varepsilon) \leq 2e^{-2\varepsilon^2 n}$, откуда $\Delta_n(0,01) \leq 0,01$ при $n \geq 26\,500$.

Глубокий анализ соотношения (3) показывает, что величины под знаком модуля в (3), при определённых условиях, сходятся к нулю на множестве точек ω , составляющих событие вероятности единица. Тогда говорят, что выполняется «усиленный закон больших чисел». Сходимость случайных величин для «почти всех» $\omega \in \Omega$ называется *сходимостью почти наверное*, из неё вытекает сходимость по вероятности (обратное утверждение, вообще говоря, неверно). А. А. Марков не обращался к этой теме, его интересовал закон больших чисел в слабой форме (внесённый им вклад рассматривается в разделе 2.2), хотя первый результат в этом направлении получил Э. Борель (1871–1956) в 1909 году. Установленный А. Н. Колмогоровым (1903–1987) классический усиленный закон больших чисел утверждает, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow a \in \mathbb{R}$$

с вероятностью единица при $n \rightarrow \infty$ для независимых одинаково распределённых величин $X_1, X_2, \dots$ тогда и только тогда, когда существует $\mathbb{E}X_1$, и при этом $a = \mathbb{E}X_1$. Напомним, что случайные величины X и Y имеют одинаковое распределение, если для любого «хорошего» (т. е. борелевского) подмножества B прямой $\mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in B) = \mathbb{P}(\omega : Y(\omega) \in B)$. Эквивалентным образом можно сказать, что $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$, т. е. совпадают функции распределения этих величин. А. Я. Хинчин (1894–1959) для последовательности независимых одинаково распределённых величин $X_1, X_2, \dots$ получил критерий выполнения для каждого $\varepsilon > 0$ соотношения $\mathbb{P}(|S_n/n - c_n| > \varepsilon) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, где $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Удивительно, что наличие математического ожидания у слагаемых не является необходимым условием справедливости этого соотношения для некоторой последовательности $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, а необходимо и достаточно, чтобы $n\mathbb{P}(|X_1| \geq n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. При этом можно описать способ выбора c_n , $n \in \mathbb{N}$.

Исследование поведения средних арифметических последовательности случайных величин дало импульс созданию современной эргодической теории.

2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

С начала XX века стали интенсивно разрабатываться модели, описываемые зависимыми величинами, т. е. не являющимися независимыми. Интерес Андрея Андреевича к последовательностям зависимых величин был связан с тем, что профессор П. А. Некрасов (1853–1924), ректор Московского университета с 1893 по 1898, президент Московского математического общества с 1903 по 1905, утверждал, что для справедливости закона больших чисел необходимо условие их независимости. На этой основе П. А. Некрасов пытался обосновать некоторые религиозно-философские взгляды о свободе воли, а А. А. Марков был решительным противником таких взглядов. А. А. Марков понял, что если конечны дисперсии величин $X_1, X_2, \dots$, то в силу (4) слабый закон больших чисел верен без предположения независимости членов рассматриваемой последовательности, когда $\text{var}(\sum_{k=1}^n X_k)/n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Огромная заслуга А. А. Маркова заключается в том, что он ввёл и начал изучать в 1906 году (см. [7]) последовательности случайных величин $X_0, X_1, \dots$, принимающих значения в некотором конечном (или счётном) множестве I , механизм зависимости которых допускает очень наглядное описание. Если величины $X_0, X_1, \dots$ рассматривать как случайный процесс с «дискретным временем» $n = 0, 1, 2, \dots$, можно сказать, что поведение X_n , где $n \in \mathbb{N}$, определяется не «всей предысторией» $X_0, \dots, X_{n-1}$, а лишь величиной X_{n-1} . Однако ошибочно думать, что это выливается в рекуррентную формулу вида $X_n = f(X_{n-1})$, где f — некоторая неслучайная функция, $n \in \mathbb{N}$ (подробности ниже в этом разделе). В качестве аналогии можно напомнить, что в рамках механики Ньютона движение материальной точки (на которую не действуют силы трения) в каждый момент времени t определяется её мгновенными координатами $\vec{x}(t)$ и скоростью $\vec{v}(t)$, а не этими характеристиками во все предшествующие моменты времени. В современных обозначениях упомянутая зависимость последовательности случайных величин означает, что для каждого натурального n и любых $i, j, i_0, \dots, i_{n-1} \in I$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (6)$$

при $\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \neq 0$ (по определению условная вероятность события A при условии события B задаётся формулой $\mathbb{P}(A|B) := \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$, когда $\mathbb{P}(B) \neq 0$). Формула (6) показывает, что значения, принимаемые случайными величинами X_k при $k = 0, \dots, n-1$, могут быть исключены из рассмотрения. А. А. Марков назвал этот вид

зависимости цепным. Термин «цепь Маркова» для такой последовательности $X_0, X_1, \dots$ стал классическим, его ввёл в 1926 году С. Н. Бернштейн (1880–1968). Цепь называется однородной, если правая часть формулы (6) не меняется для всех n при фиксированных i, j . Для однородной цепи Маркова матрица $P = (p_{i,j})_{i,j \in I}$, составленная из вероятностей перехода $p_{i,j} := \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$ за единицу времени из состояния i в состояние j , является «стохастической», т. е.

$$p_{i,j} \geq 0 \text{ при всех } i, j \in I, \quad \sum_{j \in I} p_{i,j} = 1 \text{ для каждого } i \in I. \quad (7)$$

Теперь в курсах теории случайных процессов доказывается следующее утверждение (см., например, [6, гл. VI, § 7, 8], где рассматриваются и неоднородные цепи). На некотором $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ можно построить случайные величины $X_0, X_1, \dots$, образующие однородную цепь Маркова такую, что данная стохастическая матрица P будет матрицей переходных вероятностей, а любой набор неотрицательных чисел $p_i(0)$, для которого $\sum_{i \in I} p_i(0) = 1$, определяет начальное распределение, т. е. $\mathbb{P}(X_0 = i) = p_i(0)$, $i \in I$. Важно подчеркнуть, что до появления фундаментальной монографии А. Н. Колмогорова [8], первое издание которой опубликовано в 1933 году, у исследователей не было возможности утверждать, что на некотором вероятностном пространстве существует семейство случайных величин с заданной структурой зависимости, в частности, с зависимостью марковского типа. Парадоксальность ситуации заключалась в том, что математиками до появления этой книги изучались свойства объектов, существование которых не было доказано. Точнее говоря, исследователи не задумывались над тем, удастся ли определить на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ семейство изучаемых случайных величин так, чтобы оно обладало некоторыми предполагаемыми свойствами (например, чтобы величины оказывались независимыми и при этом имели требуемые распределения вероятностей). Заметим, что теорема Ломницкого — Улама (см., например, теорему 2 гл. I в [6]), опубликованная в 1934 году, дала возможность вводить любые семейства независимых случайных величин (даже со значениями в произвольных измеримых пространствах), имеющих заданные распределения вероятностей.

По-видимому, название «цепь» связано с тем, что при сборке реальной металлической цепи осуществляется присоединение каждого последующего звена к предыдущему. А. А. Марков рассматривал и «сложные цепи», для которых поведение X_n определялось величинами $X_{n-m}, \dots, X_{n-1}$, где натуральное число $m > 1$.

А. А. Марков описал последовательность зависимых величин, образующих цепь с двумя состояниями, для которой выполняется слабый закон больших чисел.

Поразительно, что идея цепной зависимости возникла у А. А. Маркова при анализе чередования гласных и согласных звуков в романе А. С. Пушкина «Евгений Онегин». Андрей Андреевич вручную проанализировал первые 20 000 букв этого знаменитого романа (исключив из рассмотрения пропуски между словами, знаки препинания и т. п.) и подсчитал частоту гласных в данной выборке, частоты появления гласной после согласной, а также согласной после гласной. Он интерпретировал эти результаты как наблюдения значений набора случайных величин с цепной зависимостью. Андрей Андреевич также заметил, что обработка первых 100 000 знаков повести С. Т. Аксакова «Детские годы Багрова внука» даёт иные частоты упомянутых выше комбинаций гласных и согласных, чем в романе А. С. Пушкина. Известный революционер и исследователь Н. А. Морозов (1854–1946) увидел в этом замечательную возможность математическими методами идентифицировать авторство определённого текста и в 1915 году опубликовал работу «Лингвистические спектры». В 1916 году была напечатана статья А. А. Маркова [9], в которой он показал неубедительность выводов Н. А. Морозова (хотя и признал полезность математического подхода к таким задачам с привлечением более сложных моделей и увеличением объёмов выборок). Исследование литературных текстов математическими методами рассматривается в книге [10, § 5].

В начале прошлого века возник иной пример, оказавшийся цепью Маркова. Р. Росс (1857–1932) в 1902 году был удостоен Нобелевской премии за изучение распространения малярии москитами. Позднее он пытался построить математические модели перемещения москитов, чтобы предсказать плотность их популяции в районах заболевания малярией. В 1904 году Р. Росс написал письмо К. Пирсону — одному из создателей современной математической статистики, с просьбой помочь в этом деле. К. Пирсон отказался, сославшись на перегруженность работой, однако в 1905 написал статью в журнал «Nature», в которой ввёл стохастическую модель, связанную со случайными перемещениями в пространстве, под названием *случайное блуждание* (random walk). Точнее говоря, К. Пирсон описал модель и предложил читателям решить определённую задачу в рамках этой модели, но не упомянул письмо Р. Росса. В частности, модель случайного блуждания по целым точкам прямой такова: в момент времени n частица занимает положение $X_n = X_{n-1} + U_n$, $n \in \mathbb{N}$, где величины $X_0, U_1, U_2, \dots$

независимы, X_0 (начальное положение) — случайная величина со значениями в множестве $\mathbb{Z}$ всех целых чисел прямой, а $\mathbb{P}(U_n = 1) = p$ и $\mathbb{P}(U_n = -1) = 1 - p$ для некоторого $p \in (0, 1)$. Другими словами, частица в момент $n \in \mathbb{N}$ смещается из положения X_{n-1} на $\mathbb{Z}$ с вероятностью p на единицу вправо или с вероятностью $1 - p$ на единицу влево, а в начальный момент частица находилась в случайной точке X_0 . Такое случайное блуждание является цепью Маркова.

Последователи А. А. Маркова установили, что однородные цепи $X_0, X_1, \dots$, в которых все величины X_j принимают значения в конечном или счётном множестве I , допускают полное описание. А именно, $X_n = f(X_{n-1}, U_n)$, где f — неслучайная функция двух переменных, семейство $X_0, U_1, U_2, \dots$ состоит из независимых случайных величин, величины $U_1, U_2, \dots$ одинаково распределены, $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, соответствующая функция f принимает значения в множестве I , а при подстановке в f аргументов X_{n-1} и U_n должна получаться случайная величина. Мы не касаемся более общих формулировок, см., например, раздел 6.1 книги [11]. Таким образом, цепная зависимость (6) означает не только функциональную зависимость X_n от X_{n-1} , но и внесение на каждом шаге n некоторого случайного «обновления» U_n . В частности, упомянутое выше случайное блуждание получается при выборе $f(x, y) = x + y$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Интересный пример марковской цепи в 1907 году рассмотрели Пауль Эренфест и Татьяна Эренфест для объяснения второго закона термодинамики. Они предложили простую модель диффузии N частиц в параллелепипеде, разделённом проницаемой мембраной на две равные части A и B . Если обозначить $X(t)$ число частиц в контейнере A в момент $t = 0, 1, 2, \dots$, то в данной модели $p_{i,i-1} = iq/N$ для $i = 1, \dots, N$ (с вероятностью i/N в контейнере A выбирается одна из имеющихся i частиц, а затем с вероятностью q она перемещается в контейнер B), $p_{i,i+1} = (N-i)q/N$ для $i = 0, \dots, N-1$, $p_{i,i} = 1 - q$ при $i = 0, \dots, N$ и $p_{i,j} = 0$ для остальных $i, j \in \{0, \dots, N\}$, где $q \in (0, 1]$. Если в момент $t = 0$ в контейнере A было N частиц, то что можно сказать о числе частиц в этом контейнере, когда $t \rightarrow \infty$? Оказывается, в пределе для каждого $q \in (0, 1]$ вероятность иметь n частиц в контейнере A будет $2^{-N} C_N^n$, где

$$C_N^n := \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad n = 0, \dots, N$$

(напомним, что $n! := 1 \cdot \dots \cdot n$ для $n \in \mathbb{N}$ и при этом $0! := 1$). Различные обобщения и приложения данной модели рассматриваются в статье [12].

В XX веке была развита общая теория случайных процессов и изучен класс марковских процессов $\{X_t, t \geq 0\}$ с непрерывным временем t , охватывающий цепи Маркова. Значения случайных величин X_t при каждом t уже не обязательно лежат в дискретном множестве. В 1900 году в диссертации Л. Башелье (1870–1946), в связи с изучением колебаний на бирже курсов ценных бумаг, был введён случайный процесс, который теперь называется винеровским процессом (или броуновским движением). В физике к процессу такого рода привело исследование диффузии, проведённое в 1905 году А. Эйнштейном (1879–1955) и М. Смолуховским (1872–1917). Позднее математически корректную модель этого процесса предложил Н. Винер (1894–1964), в дальнейшем изучение важный вклад внёс П. Леви (1886–1971). Броуновское движение и так называемый пуассоновский процесс являются важными примерами марковских процессов с непрерывным временем, им посвящены отдельные монографии. С помощью таких процессов и некоторых других удалось построить теорию (стохастического) интегрирования и теорию стохастических дифференциальных уравнений. Мы не даём определения общих «забывающих предысторию» марковских процессов с недискретным пространством состояний и непрерывным временем, чтобы не усложнять изложение привлечением аппарата условных математических ожиданий. В этой связи упомянем труды Е. Б. Дынкина (1924–2014). Построение любых марковских процессов по «переходной функции» и начальному распределению ещё не исследовано в полной общности.

2.3. Некоторые приложения цепей Маркова

Французский естествоиспытатель Ж.-Л. Леклерк, получивший титул графа де Бюффона (1707–1788), автор «Естественной истории» в 36 томах, положил начало методу статистического моделирования. В 1777 году он рассмотрел задачу о бросании иглы, имеющей длину l , на плоскость, расчерченную параллельными прямыми так, что расстояние между любыми соседними из них равно a , где $a > l$. Спрашивается, какова вероятность, что игла пересечёт одну из проведённых прямых. Вначале вводится модель, задающая механизм случайного бросания иглы. Мы не будем обсуждать эту классическую задачу. Приведём лишь ответ. Искомая вероятность $p(a, l) = 2l/(a\pi)$, где знаменитая константа $\pi = 3,1415\dots$. Пусть в n независимых одинаковых опытах игла пересекла выделенные прямые m раз. Согласно закону больших чисел (даже усиленному), при больших n частота m/n будет близка к вероятности $p(a, l)$. Поэтому соотношение $m/n \approx 2l/(a\pi)$

при заданных a, l и всех достаточно больших n позволяет написать $\pi \approx 2ln/(am)$. Таким образом, с помощью случайных экспериментов оказалось возможным находить приближения для некоторых детерминированных величин.

В настоящее время во многих теоретических и прикладных задачах возникает необходимость приближённых вычислений сложных интегралов или сумм с очень большим числом слагаемых. Часто аналитические методы не помогают. Рассмотрим нахождение математического ожидания $\mathbb{E}\varphi(Z)$, где Z — случайная величина со значениями в множестве $V = \{x_1, \dots, x_r\}$, $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$. Классический метод Монте-Карло означает построение последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин $Z_1, Z_2, \dots$, имеющих то же распределение, что Z (рулетка в известном казино Монте-Карло может рассматриваться как простой датчик случайных чисел, что и объясняет происхождение названия данного метода). Пусть $p_j := \mathbb{P}(Z = x_j)$, $j = 1, \dots, r$. Тогда, согласно усиленному закону больших чисел Колмогорова, с вероятностью единица

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(Z_k) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(Z) = \sum_{j=1}^r \varphi(x_j) p_j, \quad n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Поэтому, если z_k — значение случайной величины Z_k в k -м опыте, то используют приближённое равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) \approx \mathbb{E}\varphi(Z),$$

когда n достаточно велико.

Реализовать подход, основанный на (8), не получается, если p_j известны лишь с точностью до постоянного множителя (так как требуется знать все p_j , где $j = 1, \dots, r$, чтобы построить величины $Z_1, \dots, Z_n$). Так обычно бывает в сложных физических задачах. Разумеется, если $p_j = c\tilde{p}_j$, где $\tilde{p}_j$ известны для всех $j \in \{1, \dots, r\}$, а константа c неизвестна, то

$$c = \frac{1}{\sum_{j=1}^r \tilde{p}_j}.$$

Однако $\tilde{p}_j$ могут иметь весьма сложный вид, а r быть огромным числом. Поэтому такой способ нахождения c не работает. Выход даёт следующая замечательная идея: вместо независимых величин $Z_1, Z_2, \dots$ построить «хорошую» однородную марковскую цепь $X_0, X_1, \dots$ со значениями в V такую, что соотношение (8) будет верно, если в него

вместо Z_j подставить X_j , $j \in \mathbb{N}$. Далее отождествляем v_j с j и пишем $I = \{1, \dots, r\}$ вместо V . Важно, что упомянутую цепь удаётся построить, когда величины p_j известны лишь с точностью до умножения на некоторую константу.

Рассмотрим цепь Маркова, для которой строка $\tau = (p_1, \dots, p_r)$ задаёт инвариантное распределение вероятностей на I , т. е. сумма неотрицательных $p_1, \dots, p_r$ равна 1 и верно равенство $\tau P = \tau$, где P — некоторая матрица переходных вероятностей. Иначе говоря,

$$(\tau P)_j = \sum_{i \in I} p_i p_{i,j} = p_j, \quad j \in I.$$

При этом начальное распределение марковской цепи можно взять произвольным (например, в начальный момент времени $X_0 = i_0$ с вероятностью единица, где $i_0 \in I$). Матрица $P = (p_{i,j})$ выбирается удовлетворяющей условию

$$p_i p_{i,j} = p_j p_{j,i}, \quad i, j \in I. \quad (9)$$

При выполнении равенства (9) набор p_j , $j \in I$, задаёт инвариантное распределение вероятностей, поскольку

$$(\tau P)_j = \sum_{i \in I} p_i p_{i,j} = \sum_{i \in I} p_j p_{j,i} = p_j \sum_{i \in I} p_{j,i} = p_j$$

в силу (7).

Матрицу P , удовлетворяющую соотношению (9), можно выбирать многими способами. Широкую известность получил алгоритм Метрополиса, предложенный в 1953 году коллективом авторов, когда вначале берётся матрица $Q = (q_{i,j})$ переходных вероятностей, отвечающая неразложимой и апериодической цепи с пространством состояний $I = \{1, \dots, r\}$. Неразложимость цепи означает, что для каждой пары состояний i, j найдутся целые неотрицательные числа m и n (вообще говоря, зависящие от i, j) такие, что $q_{i,j}(m) > 0$ и $q_{j,i}(n) > 0$, где $q_{i,j}(k) = (Q^k)_{i,j}$ представляет собой вероятность перехода из состояния i в состояние j за k шагов. Апериодичность состояния i означает, что наибольший общий делитель всех натуральных k , для которых $q_{i,i}(k) > 0$, равен единице. Апериодичность цепи означает апериодичность всех её состояний.

Эти понятия не были до конца разработаны А. А. Марковым (неприводимость он трактовал как невозможность определёнными преобразованиями привести матрицу переходных вероятностей Q к специальному блочному виду). Можно сказать, что для цепи с конечным пространством состояний I неприводимость и апериодичность эквива-

лентны тому, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ матрица Q^m (т. е. m -я степень матрицы Q) содержит только строго положительные элементы. Достаточно (при $m = 1$) взять стохастическую матрицу Q , все элементы которой строго больше нуля. Затем для $i \neq j$ ($i, j \in I$) полагают

$$p_{i,j} = q_{i,j} \alpha_{i,j}, \quad \text{где } \alpha_{i,j} = \min \left\{ 1, \frac{p_j q_{j,i}}{p_i q_{i,j}} \right\}, \quad (10)$$

$p_{i,i} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{i,j}$ (считается, что $p_i > 0$ для $i \in I$). Легко проверить, что тогда справедливо (9), отдельно рассмотрев случаи

$$\frac{p_j q_{j,i}}{p_i q_{i,j}} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{p_j q_{j,i}}{p_i q_{i,j}} < 1.$$

Подчеркнём, что этот алгоритм применим и тогда, когда p_i известны лишь с точностью до постоянного множителя, например, $p_i = e^{-U(i)}/K$, где функция $U : I \rightarrow \mathbb{R}$, а $K = \sum_{i \in I} e^{-U(i)}$ не поддаётся подсчёту ввиду очень большого числа элементов множества I . В этом случае p_j/p_i для $i, j \in I$ не зависит от величины K . Поэтому матрица P находится согласно (10), когда константа K неизвестна.

Почему было важно ввести однородную марковскую цепь с инвариантным распределением, задаваемым набором вероятностей τ ? Положим $p_{i,j}(n) := \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$, $i, j \in I = \{1, \dots, r\}$, $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $p_{i,j}(n)$ являются элементами матрицы P^n . При широких условиях $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n) = p_j^*$ для любых $i, j \in I$, причём предел не зависит от выбора i (необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $m \in \mathbb{N}$ все элементы матрицы P^m были строго положительны). Марковская цепь за большое время n как бы «забывает», из какого состояния i она стартовала. Сходимость $p_{i,j}(n)$ к p_j^* в нашем случае будет экспоненциально быстрой с ростом n , т. е. $|p_{i,j}(n) - p_j^*| \leq A\gamma^n$ для $i, j \in I$, где $A > 0$ и $0 < \gamma < 1$. Предельные значения $p_1^*, \dots, p_r^*$ задают распределение вероятностей, именуемое *стационарным*, и $\mathbb{P}(X_n = j) \rightarrow p_j^*$ (экспоненциально быстро) при $n \rightarrow \infty$ для всех $j \in I$ при любом начальном распределении цепи. Теперь следует заметить, что для построенной цепи инвариантное распределение будет стационарным и $p_j^* = p_j$, $j \in I$. Таким образом, при больших k распределение X_k будет близко к распределению, задаваемому набором τ , т. е. к распределению Z_k . Это поясняет (нетрудно дать детальное доказательство), почему при любом начальном распределении в формулу (8) можно подставлять $X_1, X_2, \dots$ вместо $Z_1, Z_2, \dots$ и тем самым использовать приближённое равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) \approx \mathbb{E} \varphi(Z),$$

когда n достаточно велико, а x_k является значением случайной величины X_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (мы оперируем значениями $x_1, x_2, \dots$, полученными как $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ для некоторого $\omega \in \Omega$ при наблюдении марковской цепи $X_1, X_2, \dots$). Также достаточно сослаться на следующий вариант усиленного закона больших чисел для однородной марковской цепи $X_0, X_1, \dots$, где X_n принимает значения в счётном (или конечном) множестве I при $n = 0, 1, \dots$. Если цепь неприводима и имеет стационарное распределение, задаваемое последовательностью (или набором) $\tau = (\tau_i)_{i \in I}$, а функция $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\sum_{i \in I} |\varphi(i)| \tau_i < \infty$, то при любом начальном распределении

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(X_k) \rightarrow \sum_{i \in I} \varphi(i) \tau_i$$

почти наверное при $n \rightarrow \infty$ (см. [13, с. 313]).

Заметим, что мы лишь затронули обширную область исследований, в которой имеется целый ряд известных алгоритмов выбора матрицы P , см., например, [14]. Данная область оказалась тесно связанной с математической (байесовской) статистикой. Об этом можно прочитать в [15].

Важные для приложений модели описываются с помощью марковских цепей с непрерывным временем (и конечным или счётным пространством состояний). Так, в § 19 главы VI из [6] даётся вывод классических формул Эрланга, установленных при анализе функционирования телефонных станций. Цепи Маркова используются и в биологии, например, известна модель Джукса — Кантора стохастической эволюции молекулы ДНК, в которой состояниями являются нуклеотиды A, C, T, G . Применения марковских цепей в стохастических моделях биологии — отдельная обширная область исследований.

Идея А. А. Маркова исследовать семейства цепным образом зависимых случайных величин оказалась очень плодотворной и получила дальнейшее развитие в теории случайных полей (случайным полем называется семейство случайных элементов $\{X_t, t \in T\}$, заданных на некотором вероятностном пространстве, где T — множество индексов). Если T — конечный граф и при каждом $t \in T$ величина X_t принимает значения в конечном множестве I , то понятие марковости может быть введено, в определённом смысле, аналогично формуле (6), а именно, требуется, чтобы для каждого $t \in T$ и любых $i_s \in I$, $s \in T$, выполнялось равенство

$$\mathbb{P}(X(t) = i_t \mid X(s) = i_s, s \in T \setminus \{t\}) = \mathbb{P}(X(t) \mid X(s), s \in N(t)),$$

если $\mathbb{P}(X(s) = i_s, s \in T \setminus \{t\}) \neq 0$, а $N(t)$ — множество соседей вершины t (т. е. тех точек s из T , которые соединены ребром с t). Имеются и другие обобщения понятия марковости.

В статистической физике широко используется модель Изинга, возникающая при изучении ферромагнетиков и связанная с гиббсовскими случайными полями. Если гиббсовское случайное поле задано на конечном множестве T и при каждом t величины X_t принимают значения в конечном множестве I , то

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{t \in T} \{X_t = x_t\}\right) = C \exp(-E(x_T)),$$

где «конфигурация» $x_T = (x_t)_{t \in T}$, $x_t \in I$ для $t \in T$, нормировочная константа $C > 0$, а действительная функция E имеет смысл энергии. Согласно теореме Аверинцева — Клиффорда — Хаммерсли марковское случайное поле, определённое на конечном графе T и имеющее строго положительное распределение вероятностей на пространстве конфигураций, это такое и только такое поле, которое является гиббсовским с потенциалом взаимодействия «ближайших соседей» (другими словами, энергия E выражается через потенциал специального вида). Введение в теорию случайных полей, включая доказательство упомянутой выше теоремы, содержится в [16].

Во второй половине XX века возник класс полумарковских процессов. Кроме того, важную роль для разнообразных приложений (в том числе для построения алгоритмов распознавания речи) играют скрытые марковские процессы, введённые в 1989 году Л. Р. Рабинером (род. в 1943), см., например, [17]. В XXI веке развивается теория так называемых «нелинейных марковских процессов». В дискретном случае основная идея заключается в том, что вероятность перехода из состояния i , в котором процесс находится в момент s , в состояние j в момент $s + 1$ зависит не только от i , но и от распределения процесса в момент s . Этой тематике посвящена монография [18]. Оказалось, что процессы такого рода полезны для описания ряда сложных физических явлений. Они применяются, например, в теории плазмы. Понятие марковской цепи получило нетривиальное отражение в современной квантовой теории информации.

2.4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ

А. А. Марков внёс также существенный вклад в доказательство центральной предельной теоремы (так по предложению Д. Пойа (1887–1985) с 1920 года стали называть группу результатов о сходимости

функций распределения нормированных сумм случайных величин к функции распределения гауссовского закона). Говорят, что последовательность случайных величин $Y_1, Y_2, \dots$ сходится по распределению к случайной величине Y , если функции распределения Y_n сходятся к функции распределения Y во всех точках непрерывности предельной функции при $n \rightarrow \infty$. Тогда пишут $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y, n \rightarrow \infty$. Напомним, что функция распределения случайной величины W задаётся формулой $F_W(x) := \mathbb{P}(W \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Величина W имеет гауссовское распределение с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$, если

$$F_W(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}\right) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Используется также термин нормальное распределение, пишут $W \sim N(a, \sigma^2)$. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $\mathbb{E}X_k^2 < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$S_n := X_1 + \dots + X_n, \quad T_n := \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\text{var } S_n}},$$

где $\text{var } S_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Классическая центральная предельная теорема утверждает, что при определённых условиях $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, т. е.

$$F_{T_n}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = F_Z(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где случайная величина $Z \sim N(0, 1)$. Поскольку функция распределения величины Z непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, указанная сходимость будет даже равномерной на всей действительной оси. Отметим, что А. А. Марков разработал метод подсчёта интегралов, фигурирующих в (11), с точностью до 16 знаков после запятой.

П. Л. Чебышёв (1821–1894) считал, что для доказательства центральной предельной теоремы достаточно убедиться, что для каждого натурального m имеет место соотношение $\mathbb{E}(T_n^m) \rightarrow \mathbb{E}(Z^m)$ при $n \rightarrow \infty$. Однако этот метод моментов, введённый П. Л. Чебышёвым, не был обоснован достаточно строго. А. А. Марков сумел закрыть пробелы в доказательстве своего учителя. А. М. Ляпунов (1857–1918) развил метод характеристических функций (аппарат преобразования Фурье) и получил простые достаточные условия выполнения центральной предельной теоремы без предположения конечности моментов любого порядка у независимых слагаемых. Им было доказано, что если

$X_1, X_2, \dots$ являются независимыми величинами такими, что $\mathbb{E}|X_k|^s < \infty$ при некотором $s \in (2, 3]$ и всех $k \in \mathbb{N}$, то (11) выполнено, когда

$$L_n(s) := \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^s}{(\sum_{k=1}^n \text{var } X_k)^{s/2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Для случайной величины X с конечным числом различных значений, если $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$, где $k = 1, \dots, r$, то $\mathbb{E}|X|^s = \sum_{j=1}^r |x_j|^s p_j < \infty$ при каждом $s > 0$.

У А. А. Маркова несколько лет работы ушло на то, чтобы предложить модификацию метода моментов, не предполагающую наличия всех конечных моментов у рассматриваемых величин (Андрей Андреевич писал о «методе математических ожиданий»). Для этого он ввёл новый приём «урезания» исходных величин, который изложил в своей книге [2]. Он писал: «С одной стороны, я нашёл, как надо дополнить метод математических ожиданий, чтобы охватить все случаи А. М. Ляпунова; а, с другой стороны, ряд моих работ показал, что тот же метод даёт довольно лёгкое средство для распространения предельной теоремы на связанные величины.» В серии своих работ А. А. Марков, используя аппарат производящих функций, доказал (при определённых условиях) центральную предельную теорему для введённых им цепей. Отметим, что он рассмотрел и неоднородные цепи, принимающие значения 0 или 1.

Более общее достаточное условие, чем (12), для справедливости центральной предельной теоремы было найдено Я. Линдбергом (1876–1932). Он рассмотрел последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots$, имеющих нулевое среднее и конечные вторые моменты (не предполагая, что $\mathbb{E}|X_k|^s < \infty$ для некоторого $s > 2$ и $k \in \mathbb{N}$). Теорема Линдберга утверждает, что нормированные суммы T_n сходятся по распределению к $Z \sim N(0, 1)$, если

$$\frac{1}{\text{var } S_n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 \mathbb{I}\{|X_k| \geq \varepsilon \sqrt{\text{var } S_n}\}) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Здесь $\text{var } S_n \neq 0$ при всех достаточно больших n , а индикаторная функция $\mathbb{I}\{A\}$ равна 1, когда $\omega \in A$, и равна нулю в противном случае. В. Феллер (1906–1970) доказал, что для рассматриваемой последовательности $X_1, X_2, \dots$ условие Линдберга является необходимым, если слагаемые «асимптотически малы» в том смысле, что

$$\frac{1}{\text{var } S_n} \cdot \max_{k=1, \dots, n} \text{var } X_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Необходимые и достаточные условия справедливости центральной предельной теоремы для серий независимых случайных величин $X_{n,1}, \dots, X_{n,m_n}$, где n и m_n — натуральные числа, были получены (без дополнительных условий типа (13)) лишь во второй половине XX века в работах В. М. Золотарева (1931–2019) и В. И. Ротаря (род. в 1942). А именно, если для указанных величин

$$\mathbb{E}X_{n,k} = 0, \quad k = 1, \dots, m_n, \quad \sum_{k=1}^{m_n} \text{var } X_{n,k} = 1, \quad (14)$$

то $S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, где $S_n := \sum_{j=1}^{m_n} X_{n,j}$ (тогда $\mathbb{E}S_n = 0$ и $\text{var } S_n = 1$) и $Z \sim N(0, 1)$, в том и только том случае, когда при каждом $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{m_n} \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{n,k}(x) - \Phi_{n,k}(x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Здесь $F_{n,k}$ и $\Phi_{n,k}$ обозначают соответственно функции распределения величин $X_{n,k}$ и $Z_{n,k}$, причём $Z_{n,k} \sim N(0, \text{var } X_{n,k})$, $k = 1, \dots, m_n$, а интеграл берётся по мере Лебега dx .

Отметим, что изучение серий случайных величин носит более общий характер, чем исследование последовательностей. Нормированные частные суммы $(S_n - \mathbb{E}S_n)/\sqrt{\text{var } S_n}$ для последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots$ легко представить в виде $\sum_{j=1}^n X_{n,j}$, где

$$X_{n,j} := \frac{X_j - \mathbb{E}X_j}{\sqrt{\text{var } S_n}}, \quad j = 1, \dots, n, \quad m_n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема Линдеберга легко переформулируется для схемы серий независимых случайных величин $X_{n,1}, \dots, X_{n,m_n}$ таких, что выполнено (14). Соотношение

$$\sum_{k=1}^{m_n} X_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1)$$

верно, если

$$\mathcal{L}_n(\varepsilon) := \sum_{k=1}^{m_n} \mathbb{E}(X_{n,k}^2 \mathbb{I}\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad (16)$$

для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$. Заметим, что из условия Линдеберга (16) вытекает, что $\max_{k=1, \dots, m_n} \text{var } X_{n,k} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, когда все $X_{n,k}$ центрированы. Наглядно смысл условия (15) заключается в следующем. В отличие от (16), оно означает (при выполнении условия (14)), что если слагаемые не являются «асимптотически малыми», то их распре-

делениям надлежит быть, в должном смысле, близкими к определённым гауссовским законам.

Центральную предельную теорему можно рассматривать как некоторое уточнение закона больших чисел, приведённого в разделе 2.1. Пусть даны независимые одинаково распределённые случайные величины $X_1, X_2, \dots$, для которых $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Тогда по усиленному закону больших чисел Колмогорова

$$\delta_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) - \mathbb{E}X_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для $\omega \in \Omega_*$, где $\mathbb{P}(\Omega_*) = 1$. Если предположить, что $\text{var } X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, то для независимых одинаково распределённых случайных величин с конечной и ненулевой дисперсией получаем по центральной предельной теореме Леви (вытекающей из теоремы Линдеберга), что величины $\delta_n \sqrt{n}/\sigma$ сходятся по распределению к $Z \sim N(0, 1)$, откуда при любых $-\infty < a < b < \infty$ имеем

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}a \leq \delta_n \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}b\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ можно найти $b = b(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-x^2/2} dx = 1 - \varepsilon.$$

Затем по заданному числу δ выбираем $N_0 = N_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ так, что $\sigma b/\sqrt{N_0} < \delta$. Тогда $|\delta_n| \leq \delta$ с вероятностью, близкой к $1 - \varepsilon$, при $n \geq N_0$.

С 40-х годов XX века появился целый ряд работ, посвящённых оценке скорости сходимости в соотношении (11). Поэтому ныне имеется возможность оценивать точность аппроксимации с помощью гауссовского закона в соотношении (17). В частности, доказано, что для величин, фигурирующих в (11), таких, что $\mathbb{E}|X_k|^s < \infty$ для некоторого $s \in (2, 3]$ и $k \in \mathbb{N}$, при любом $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|\mathbb{P}(T_n \leq x) - \mathbb{P}(Z \leq x)| \leq c_s L_n(s), \quad (18)$$

где L_n введено в (12), c_s — положительное число. И. Г. Шевцова в [19] привела результаты, согласно которым $c_3 \leq 0,4693$ для независимых одинаково распределённых величин, имеющих $\mathbb{E}|X_1|^3 < \infty$. Кроме того, известно, что константа c_3 не может быть меньше, чем 0,4090. В настоящее время не найдено наименьшее возможное c_s в неравенстве (18). Если независимые $X_1, X_2, \dots$ имеют распределение Бернулли с вероятностью успеха $1/2$, то теперь мы можем утверждать, что

$\Delta_n(0,01) < 0,01$ при $n \geq 16\,900$ (Δ_n введено в (3)), поскольку для таких величин величина погрешности приближения (17) не превосходит $1/\sqrt{2\pi n}$, причём эта оценка оптимальна, как доказано в [20].

Отметим, что для независимых одинаково распределённых величин $X_1, X_2, \dots$ должным образом нормированные частные суммы могут сходиться по распределению к гауссовскому пределу без предположения о конечности дисперсии слагаемых. В этом отношении интересно сопоставить теорему, установленную П. Леви, В. Феллером и А. Я. Хинчиным (см. теорему 4.17 в [21]) с результатом А. Я. Хинчина, упомянутым в разделе 2.1. Эти авторы доказали, что необходимым и достаточным условием сходимости по распределению величин вида $a_n \sum_{k=1}^n (X_k - b_n)$, где a_n и b_n — некоторые числа, к гауссовской величине $Z \sim N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$ будет условие: $L(x) := \mathbb{E}(X_1^2 \mathbb{I}\{|X| \leq x\})$ является функцией, медленно меняющейся на бесконечности в смысле Караматы, т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} L(cx)/L(x) = 1$ для каждого $c > 0$. Когда данное условие выполнено, можно выбрать $b_n = \mathbb{E}X_1$. Если упомянутая сходимость распределений имеет место при $a_n = 1/\sqrt{n}$ и $b_n = 0$, то $\mathbb{E}X_1 = 0$ и $\text{var } X_1 = 1$.

Возвращаясь к деятельности А. А. Маркова, следует подчеркнуть, что им установлен вариант центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин, образующих цепь. Р. Л. Добрушиным [22] была доказана центральная предельная теорема для неоднородных марковских цепей, которая далее неоднократно обобщалась. В [23, теорема 1.1] дано упрощённое доказательство этой теоремы, опирающееся на мартингальную технику (мартингалам, образующим важный класс случайных процессов, посвящена, например, глава IV книги [6]). Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ величины $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$, принимающие значения в борелевском пространстве $(S, \mathcal{B}(S))$, образуют цепь Маркова (для простоты можем считать, что S — счётное или конечное множество I , а $\mathcal{B}(I)$ — совокупность всех подмножеств I). Положим $S_n := \sum_{i=1}^n f_{n,i}(X_{n,i})$, где (измеримые) функции $f_{n,i}: S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\max_{i=1, \dots, n} \sup_{x \in S} |f_{n,i}(x)| \leq C_n$ для некоторых положительных чисел C_n , $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^2 \alpha_n^{-3} \left(\sum_{i=1}^n \text{var } f_{n,i}(X_{n,i}) \right)^{-1} = 0, \quad (19)$$

где α_n — некоторый «коэффициент эргодичности» (см. определение на с. 3 в [23]). Тогда

$$(\text{var } S_n)^{-1/2} (S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z, \quad n \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где $Z \sim N(0, 1)$. Если условие (19) не имеет места, то (20) может не выполняться. Иного типа достаточные условия справедливости центральной предельной теоремы для однородных марковских цепей найдены в [24] и [25].

Начиная со второй половины XX века, центральная предельная теорема была доказана для различных семейств случайных величин (не только процессов, но и полей) при разнообразных условиях зависимости. Упомянем, например, исследование t -зависимых величин (понятие, введённое С. Н. Бернштейном), мартингалов, процессов и полей с перемешиванием, систем величин, обладающих свойством ассоциированности и родственным ему, см., например, [26]. Кроме того, была построена теория функциональных предельных теорем. Это — отдельная важная тема.

В XX веке уже после кончины А. А. Маркова исследователям удалось создать глубокую теорию, которая позволяет описывать классы предельных распределений (более общих, чем гауссовские), к которым могут сходиться должным образом нормированные суммы независимых случайных величин в схеме серий. Выдающуюся роль сыграла монография [27]. Далее выяснилось, что возникающие безгранично делимые и устойчивые распределения играют важную роль во многих стохастических моделях, например, в физике и в финансовой стохастической математике. В настоящее время в области предельных теорем теории вероятностей интенсивно развивается метод, предложенный Ч. Стейном в 1972 году. С помощью различных вариантов этого мощного метода в ряде случаев удалось получить неулучшаемые оценки аппроксимации изучаемых распределений (например, распределений должным образом нормированных сумм случайных величин) определённым предельным законом, см., например, [28]. Здесь же надо указать, что интересной темой является использование различных вероятностных метрик для анализа близости распределений.

2.5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы не затронули ряд важных направлений теории марковских процессов, которые связаны с использованием сложного аналитического аппарата и требуют систематического изучения, однако считаем полезным дать некоторые ссылки. С общей теорией марковских цепей (в том числе с непрерывным временем) и её приложениями в теории массового обслуживания (теории очередей) имеет смысл ознакомиться, обратившись к [29]. Различные предельные теоремы для марков-

ских цепей излагаются в [30, 31] и [32]. Разнообразные применения марковских цепей, в том числе в генетике и стохастической финансовой математике, даются в [33]. О приложениях в эпидемиологии см., например, [34]. Марковские ветвящиеся процессы со значениями в пространстве мер изучаются в [35]. Скрытым марковским и полумарковским моделям посвящены книги [17] и [36]. О марковских моделях и задачах распознавания образов можно прочитать в [37]. Методы оптимизации и управляемые марковские цепи рассматриваются в [38]. Некоторые аспекты теории марковских процессов и квантовой механики составляют содержание монографии [39].

Подводя итог, можно сказать, что глубокие идеи А. А. Маркова инициировали развитие целого ряда областей современной теории вероятностей. Сам автор стал классиком науки, его результаты и введённые им понятия вошли практически во все университетские учебники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
- [2] *Марков А. А.* Исчисление вероятностей / 3-е изд. СПб.: С.-Петербургский университет, 1913.
- [3] *Гродзенский С. Я.* Андрей Андреевич Марков / Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Наука, 1987.
- [4] *Марков А. А.* Избранные труды. Теория чисел // Теория вероятностей / Под ред. Ю. В. Линника. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951.
- [5] *Basharin G. P., Langville A. N., Naumov V. A.* The life and work of A. A. Markov // *Linear Algebra Appl.* 2004. V. 386 P. 3–26.
- [6] *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
- [7] *Марков А. А.* Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга // Известия Физико-математического общества при Казанском университете. 1906. Сер. 15. Т. 94. С. 135–156.
- [8] *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей / 4-е изд. М.: УРСС, 2013.
- [9] *Марков А. А.* Об одном применении статистического метода // Известия Императорской Академии наук. 1916. Сер. VI. Т. 4. С. 239–242.
- [10] *Успенский В. А.* Труды по нематематике / 2-е изд. Кн. 4. Филология с приложением «Семиотических посланий А. Н. Колмогорова». М.: Объединённое гуманитарное издательство, Фонд «Математические этюды», 2012.

- [11] *Brémaud P.* Probability Theory and Stochastic Processes. Cham: Springer, 2020.
- [12] *Dharmaraja S., Di Crescenzo A., Giorno V., Nobile A. G.* A continuous-time Ehrenfest model with catastrophes and its jump-diffusion approximation // *J. Stat. Phys.* 2015. V. 161. P. 326–345.
- [13] *Durrett R.* Probability. Theory and Examples / Fourth Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [14] *Robert C. P., Changye W.* Markov chain Monte Carlo methods, a survey with some frequent misunderstandings. <https://arxiv.org/abs/2001.06249>.
- [15] *Reich B. J., Ghosh S. K.* Bayesian Statistical Methods. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- [16] *Bulinski A., Spodarev E.* Introduction to random fields // *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields. Asymptotic Methods*. E. Spodarev (Ed.). Berlin: Springer, 2013, P. 277–335.
- [17] *Hoek J. van der., Elliott R. J.* Introduction to Hidden Semi-Markov Models. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [18] *Kolokoltsov V. N.* Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [19] *Шевцова И. Г.* Об абсолютных константах в неравенстве Берри — Эссеена и его структурных и неравномерных уточнениях // *Информатика и её применения*. 2013. Т. 7, вып. 1. С. 124–125.
- [20] *Hipp C., Mattner L.* On the normal approximation to symmetric binomial distributions // *Теория вероятностей и её применения*. 2007. Т. 52. С. 610–617.
- [21] *Kallenberg O.* Foundations of Modern Probability. NY: Springer, 2002.
- [22] *Добрушин Р. Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова I, II. *Теория вероятностей и её применения*. 1956. Т. 1, вып. 1. С. 72–89. (Вып. 4. С. 365–425.)
- [23] *Sethuraman S., Varadhan S. R. S.* A martingale proof of Dobrushin's theorem for non-homogeneous Markov chains // *Electron. J. Probab.* 2005. V. 10, paper no. 36. P. 1221–1235.
- [24] *Jones G. L.* On the Markov chain central limit theorem // *Probab. Surv.* 2004. V. 1. P. 299–320.
- [25] *Peligrad M.* On the CLT for additive functionals of Markov chains // *Electron. Commun. Probab.* 2020. V. 25, paper no. 40. P. 1–10.
- [26] *Булinskiй А. В., Шашкин А. П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.
- [27] *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.

- [28] Arras B., Houdré C. On Stein's Method for Infinitely Divisible Laws with Finite First Moment. Cham: Springer, 2019.
- [29] Brémaud P. Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues / Second Ed. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020.
- [30] Levin D. A., Peres Y. (with contributions of E. L. Wilmer). Markov Chains and Mixing Times / Second Ed. Providence: AMS, 2017.
- [31] Douc R., Moulines E., Priouret P., Soulier P. Markov Chains. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2018.
- [32] Vassiliou P.-C. G. Non-homogeneous Markov Chains and Systems. Theory and Applications. Boca Raton: CRC Press, 2023.
- [33] Pardoux E. Markov Processes and Applications: Algorithms, Networks, Genome and Finance. Chichester: J. Wiley and Sons Ltd., 2008.
- [34] Xu Z., Zhang H., Huang Z. A Continuous Markov-Chain Model for the Simulation of COVID-19 Epidemic Dynamics // Biology. 2022. V. 11(2), paper no. 190. P. 1–22.
- [35] Li Z. Measure-Valued Branching Markov Processes. Berlin: Springer, 2011.
- [36] Zucchini W., MacDonald I. L., Langrock R. Hidden Markov Models for Time Series. An Introduction Using R / Second Ed. Boca Raton: CRC Press, 2016.
- [37] Fink G. A. Markov Models for Pattern Recognition. From Theory to Applications / Second Ed. London: Springer, 2014.
- [38] Bonnans J. F. Convex and Stochastic Optimization. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019.
- [39] Nagasawa M. Markov Processes and Quantum Theory. Cham: Birkhäuser, 2021.

Григорий Маргулис: я старался работать в разных областях математики над трудными задачами



О своём пути в математику, о наиболее значимых результатах рассказывает Григорий Маргулис (1946), доктор физико-математических наук, научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН, профессор Йельского университета (США), лауреат Филдсовской премии (1978), премии Вольфа (2005) и премии Абеля (2020). Беседовала Наталия Демина.

Интервьюер благодарит Антона Зорича, Александра Шеня, Норвежскую академию наук и литературы и Международную федерацию научных журналистов (WFSJ) за финансовую и организационную помощь в поездке в Осло, а Григория Сойфера за неоценимую помощь в редактировании текста интервью.

Спасибо, что согласились на интервью. Я хотела бы прежде всего спросить Вас про Вашу учёбу в Московском государственном университете. Вашим научным руководителем был Яков Синай. Не расскажете о том, как Вам с ним работалось, каков стиль его научного руководства?

Когда я поступил в Московский университет в 1962 году, то, начиная с первого курса, на мехмате было огромное количество семинаров по самым разным областям математики. Я ходил на многие из них, в общем не особо понимая, на какие нужно ходить и на какие нет. И так продолжалось первые два года. Как вы знаете, мы тогда учились пять лет. Начиная с третьего года, были курсовые работы и потом на пятом курсе дипломная работа.

Я ходил на семинар Евгения Дынкина, на котором обсуждалась тематика границ Мартина и вокруг этого. И Евгений Борисович как-то спросил, какие положительные гармонические функции существуют на нильпотентных группах, и высказал предположение, что при некоторых условиях они должны быть постоянны на смежных классах по коммутанту. И я в какой-то момент это доказал, и это было моей первой научной работой. Она была представлена в ДАН СССР академиком А. Н. Колмогоровым, написана мной в 19 лет (в 1965 г.), а опубликована в 1966 г.¹⁾

Должен сказать, что на самом деле это не было таким уж беспрецедентным случаем, чтобы студент написал какую-то вполне серьёзную научную работу. Д. Каждан (1946 г.) тоже начал публиковаться очень рано. Одна из наиболее знаменитых его работ — про введённое им свойство (T) — развилась в целую область математики. Он её написал в 20 лет. В августе 1966 года в Москве проходил Международный математический конгресс, и Каждан рассказал о своей работе Арману Борелю, очень известному швейцарскому математику. Этот результат был большой неожиданностью, никто его не предсказывал.

На третьем курсе моим научным руководителем чуть не стал Владимир Арнольд, но он как раз уехал во Францию на год, и мы с Яковом Синаем друг друга нашли, и я стал его учеником. Я начал ходить на его семинары.

Обычно руководитель подбирает задачу, и студент работает над ней. Но в моём случае я бы не сказал, что это было так. Благодаря тому, что я ходил на его семинар и разговаривал с ним, появилась работа, которая стала основой для моей кандидатской диссертации «О некоторых вопросах теории У-систем». Они были введены Д. В. Аносовым и ныне называются системы Аносова, а У — это по формулировке Аносова особые условия. Одним из основных результатов кандидат-

¹⁾ *Маргулис Г. А. Положительные гармонические функции на нильпотентных группах // ДАН СССР. 1966. Т. 166, № 5. С. 1054–1057.*

ской диссертации стала асимптотика числа замкнутых геодезических на компактных многообразиях отрицательной кривизны.

Кроме того, была топологическая работа о фундаментальной группе компактных трёхмерных многообразий, на которых существует У-поток (поток Аносова).

Потом в 1967 году под Душанбе, столицей Таджикистана, в одном из домов отдыха проходила математическая школа (в основном по аналитической теории чисел). В ней участвовали многие математики. Мы с Д. Кажданом там обсуждали дискретные подгруппы групп Ли. Там мы начали доказывать и месяца через два завершили доказательство гипотезы Сельберга о существовании унипотентных элементов в неравномерных решётках полупростых групп Ли. В этой же работе мы дали оценку снизу объёма факторпространства G/Γ полупростой группы Ли G по дискретной подгруппе Γ . Этот результат стал широко известен. В частности, Арман Борель сделал о нём доклад на семинаре Бурбаки. Статья²⁾ была написана в 1967 году, а затем опубликована в «Математическом сборнике» (1968).. И стала сенсацией. Написана она была плохо, и у коллег были трудности с её пониманием. Но в принципе, когда люди заинтересованы понять, они могут «прорваться».

Как Вы находили и находите задачи, которые вам интересны?

Они как-то приходят... Я старался работать в разных областях математики над трудными задачами. Одной из таких задач была проблема арифметичности решёток в полупростых группах Ли. Здесь есть два случая: равномерные решётки и неравномерные решётки. Наша работа с Д. Кажданом стала отправной точкой в моём доказательстве арифметичности неравномерных решёток полупростых групп Ли. В этом доказательстве были некие утверждения, которые сами по себе, возможно, оказали большее влияние на развитие математики, чем полученный окончательный результат. Отмечу, что если в случае неравномерных решёток я более-менее следовал предложенной А. Сельбергом и И. И. Пятецким-Шапиро³⁾ программе доказательства их арифметичности, то в случае равномерных решёток, когда дискретная подгруппа кокомпактна, никакого известного подхода не было.

²⁾ Каждан Д. А., Маргулис Г. А. Доказательство гипотезы Сельберга // Матем. сб. 1968. Т. 75(117), № 1. С. 163–168; Kazhdan D. A., Margulis G. A. A proof of Selberg's conjecture // Math. USSR-Sb. 1968. Vol. 4, № 1. P. 147–152.

³⁾ Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро (30 марта 1929 года, Москва — 21 февраля 2009 года, Тель-Авив) — советский, израильский и американский математик.

Так что пришлось использовать трансцендентные методы, что для многих математиков было совершенно неожиданно.

Как раз этот результат стал одним из тех, за которые Вам присудили премию Филдса, да?

Да, это так, при этом наибольшее впечатление произвело моё доказательство арифметичности равномерных решёток. Причина в том, что результат формулировался в алгебраических, арифметических, геометрических терминах, а моё доказательство существенно использует методы эргодической теории. Поясню подробнее: доказательство легко сводится к так называемой теореме супержёсткости. И опять же, с одной стороны, не было понятно, что он к этому сводится, а с другой, когда я это сделал, то это уже кажется весьма простым. Я доказал теорему супержёсткости, комбинируя методы теории алгебраических групп с методами эргодической теории. В то время, с точки зрения алгебраистов, эргодическая теория была совершенно чужда теории дискретных подгрупп групп Ли. В мой адрес звучали всякого рода похвалы — превосходно! Фантастика! При этом, работая над теоремой супержёсткости, я на идейном уровне находился под сильным влиянием работ американского математика Дж. Мостова (George Mostow) о строгой жёсткости (Mostow rigidity theorem или strong rigidity theorem). Отмечу, что термин «супержёсткость» ввёл Дж. Мостов после моей работы.

Давайте вернёмся к Вашей работе... К тем результатам, которые были отмечены Филдсовской премией 1978 года.

Как я уже сказал ранее, я получил Филдсовскую медаль в основном за то, что доказал теорему об арифметичности в случае равномерных решёток. Но при этом были отмечены и другие результаты. Один из них — теорема о нормальных подгруппах решёток полупростых групп Ли (normal subgroup theorem). Доказательство этой теоремы, с моей точки зрения, более впечатляюще, чем доказательство теоремы о супержёсткости. Но для людей вне этой области, видимо, оно таким не показалось.

Поясните, пожалуйста, Вам удалось всё-таки получить медаль Филдса или нет?

На конгресс меня не пустили. Причём не пустили из-за позиции Национального комитета советских математиков. Я сейчас в связи с премией Абеля, для которой надо было написать автобиографию, об этом более-менее подробно рассказал. Вы, по-видимому, знакомы с тем, как происходила выдача разрешений на поездку за границу в те времена.

Грубо говоря, это была многоступенчатая система отбора. Власть поддерживающие и руководство АН СССР не возражали против моего участия в конгрессе. Но за формирование делегации в Хельсинки отвечал Национальный комитет советских математиков. Его председателем был академик И. М. Виноградов, а главой делегации был академик Л. С. Понтрягин. Они были крайне недовольны тем, что я, не очень известный кандидат наук, получил Филдсовскую премию. И они решили не включать меня в состав делегации на конгресс. Отмечу, что руководство АН СССР было недовольно тем, что я не был включён в состав делегации, поскольку это повлекло за собой международный скандал.

Были ли в этом запрете участвовать в Математическом конгрессе элемент антисемитизма или нет?

Ну да, был. Хотя, они, может, считали, что нет и что просто я не вписываюсь в их сообщество. И скорее элемент антисемитизма проявлялся при защите моей докторской диссертации (её темой были «Дискретные подгруппы полупростых алгебраических групп»). Я написал об этом в автобиографии на английском языке. Она выйдет в книге про премии Абеля за последние пять лет. Видимо, выйдет года через три.

А оригинал Вы написали на русском или английском?

На английском.

Вашу автобиографию можно перевести на русский?

Я пока не хочу.

Когда же Вам вручили Филдсовскую медаль?

Как я уже рассказал, на вручение Филдсовской медали на конгресс в Хельсинки в 1978 году меня не пустили, но на следующий год я смог на 3 месяца выехать в ФРГ, в университет Бонна, по приглашению Фридриха Хирцебруха (Friedrich Hirzebruch). Это был такой settlement, попытка сгладить скандал. Национальный комитет советских математиков уже не возражал против этой поездки. И как раз там, на небольшой церемонии, мне вручили Филдсовскую медаль. Специально для этого в Бонн приезжал Жак Титс (Jacques Tits). (Он стал лауреатом премии Абеля 2008 года).

Титс отмечал: «Маргулис полностью или почти полностью решил несколько важных задач о теории дискретных подгрупп групп Ли, задач, корни которых уходят глубоко в прошлое и актуальность которых выходит далеко за рамки самой этой теории. Не будет преувеличением сказать, что он несколько раз изумлял экспертов, решая задачи, которые в то время казались совершенно недоступными. Ему

удалось это сделать благодаря владению разнообразными методами, которые он использовал с необычайным мастерством и изобретательностью»⁴⁾.

А потом я долго был невыездным. У меня есть копия письма от 1981 года, когда я хотел, по приглашению коллег, поехать во Францию, а мне не дали визы ввиду резко отрицательного мнения Национального комитета советских математиков.

Вы не были диссидентом?

Нет, не был. На самом деле, Национальный комитет — это была группа математиков, которые считали, что они должны всё контролировать, что они лучше знают, что происходит в математике СССР, и они должны решать, кого предлагать для Филдсовской медали и прочее.

Слава Богу, что Вас не заставили отказаться от премии...

Там была такая же процедура, как с премией Абеля, нужно было согласие, чтобы принять премию.

Вас пытались заставить не принять Филдсовскую медаль?

Нет, не пытались.

Можно ли сказать, что часть Ваших работ является теоретической основой интернет-коммуникаций?

После защиты кандидатской диссертации я работал в Институте проблем передачи информации АН СССР, где ко мне относились очень хорошо. Там было две лаборатории, одну из них возглавлял Р. Л. Добрушин, где я работал, а другую — М. С. Пинскер, он больше занимался теорией информации. И эти две лаборатории отвечали моим интересам в математике. Была некая тематика ИППИ, в которую я был вовлечён — в частности, графы-расширители. Отмечу, что среди теоретиков информатики я наиболее известен именно благодаря работе по графам-расширителям.

Это работа из области теоретической информатики. Есть информатика для приложений, а есть теоретическая информатика, и лауреаты

⁴⁾ «Margulis has completely, or almost completely, solved a number of important problems in the theory of discrete subgroups of Lie groups, problems whose roots lie deep in the past and whose relevance goes far beyond that theory itself. It is not exaggerated to say that, on several occasions, he has bewildered the experts by solving questions which appeared to be completely out of reach at the time. He managed that through his mastery of a great variety of techniques used with extraordinary resources of skill and ingenuity».

премии Абеля Ави Вигдерсон (Avi Wigderson) и Ласло Ловас (Lovász László) тоже работают в этой области.

Определение графов-расширителей дал как раз Марк Пинскер. Это регулярный граф, у которого маленькое подмножество начинает быстро распространяться. Существование таких графов-расширителей было доказано М. С. Пинскером с использованием вероятностных соображений. Однако он не смог дать явную конструкцию таких семейств. Я же в 1973 году, используя свойство (Т) Каждана, показал, как явно построить такие семейства.

А долго у Вас шла работа над идеей расширителей?

Недолго. Свою наиболее известную и цитируемую статью по графам-расширителям я опубликовал в 1973 году как раз под влиянием Пинскера. В ней было сделано первое явное построение бесконечного семейства графов-расширителей. Я об этом рассказал в Абелевском интервью, обычно два человека его берут во время Абелевской недели⁵⁾.

Вам присудили премию Абеля 2020 года «за новаторское использование методов теории вероятностей и динамики в теории групп, комбинаторике и теории чисел». Что Вы делали, когда Вам позвонили по поводу вручения премии? В какой момент Вас застал звонок из Осло?

На самом деле там была довольно забавная история. Вообще математикам обычно звонят в день объявления. И обычно звонят где-то за несколько часов до оглашения имён. Но, видимо, из-за пандемии ковида мне позвонили на два дня раньше. Моя жена подняла трубку, и, услышав слово «премия», решила, что это мошенники, и повесила трубку. Во второй раз ей показалось, что речь идёт о Нобелевской премии по математике. Она ответила, что по математике Нобелевской премии не бывает. Но в третий раз наконец всё урегулировалось.

Мне сказали, что первоначальный пул для отбора Абелевским комитетом — где-то 100 ведущих математиков мира, из которых начинают отбирать... А то, что Вам дали премию совместно с Гилелем Фюрстенбергом (Hillel Furstenberg) — это естественно?

Это вполне естественно.

⁵⁾ Bjørn Ian Dundas, Christian F. Skau. Interview with Abel Laureate 2020 Gregory Margulis // EMS Newsl. 2020. № 118. P. 51–56. DOI 10.4171/NEWS/118/11; <https://ems.press/journals/mag/articles/17378>.



Абелевские лауреаты у памятника Абелю: Г. Фюрстенберг (2020), Л. Ловас (2021), Д. Салливан (2022), Э. Семереды (2012), Г. А. Маргулис (2020)

Ваши работы дополняют друг друга?

В некотором смысле это одна область математики. Я знал о его работах, а он о моих. Опять же в автобиографии я более подробно пишу об этой истории. Я находился под влиянием его работ, как, возможно, и он моих.

Вы вместе когда-нибудь работали?

Нет, я же был в Москве, а он работал в Израиле и в США.

То есть Вы не были соавторами?

Нет, не были.

Вам приходилось проходить цензуру, так называемый первый отдел?

Нет, был акт экспертизы. Но, скажем, где-нибудь в США коллеги, которые работают не университетах, а в компаниях, тоже проходят аналогичную процедуру экспертизы. Ведь это, может быть, на самом деле интеллектуальная собственность компании.

Ваш ученик, говоря о Вас добрые слова, сказал, что Вы чувствуете природу задачи. Что Вы интуитивно её понимаете...

Да, чтобы доказать что-то сложное, надо сначала делать это на интуитивном уровне.

А скажите, пожалуйста, Вы по духу скорее создатель теорий (theory builder) или решатель задач (problem solver)?

Скорее problem solver. Я постоянно думаю над задачами. Есть такое понятие, как математический вкус, мне кажется, что он у меня есть. Есть нерешённые проблемы, которые кажутся бесконечно сложными, но я пытаюсь какие-то из них решить. При этом даже среди наиболее выдающихся математиков есть те, у кого нет особого математического вкуса, но они получают великие результаты. Они настолько сильны, что им вкус особо не нужен (*смеётся*). Я не такой. По-видимому, я технически сильный математик, но далеко не на их уровне...

Есть классификация, введённая Фрименом Дайсоном, что есть математики-птицы, а есть математики-лягушки...

По-английски это можно было сказать так: insight or vision. Vision — видеть широко, а insight — в глубь вещей. В переводе с поэтического языка.

И Вы...?

Я — insight. А есть люди, опять же великие математики, которые не insight, а vision.

А что Вас больше всего увлекает в математике? Почему Вам нравится заниматься математикой?

Потому что нравится. В ней есть красота.

Ваша голова 24 часа в сутки думает о математике?

Сейчас нет. До какого-то возраста я был на ней сосредоточен. Когда я учился в школе, а математика мне была интереснее всего другого, то спрашивал папу, почему я должен учить и другие предметы. В итоге он мне объяснил, что надо же знать, где искать информацию о других сферах жизни. Есть максима, принадлежащая Эйнштейну: «образование — это то, что остаётся, когда всё выученное в школе забыто» (education is that which remains when one has forgotten everything he learned in school).

А что Вам больше всего не нравится в математике?

Не знаю. Могут не нравиться всякие бюрократические и административные вещи, но это же не математика.

Есть ли задачи, которые Вы не смогли решить?

Есть, конечно.



Г. А. Маргулис с женой Раей

Вы участвовали в олимпиадах?

Да. Я участвовал в Московской математической олимпиаде, в республиканской математической олимпиаде, где получил первую премию, благодаря чему меня включили в команду СССР на IMO (Международная математическая олимпиада) в Чехословакии в 1962 году, где я получил серебряную медаль. Среди участников IMO довольно много людей из СССР и соцстран, которые стали известными математиками. Так, лауреат премии Абеля 2021 года Ласло Ловас из Венгрии, о котором я упоминал выше, в течение трёх лет выигрывал на IMO золотую медаль. Но в целом, когда я смотрю список победителей международных олимпиад, то далеко не все те, кто получал там первые премии, стали известными математиками.

На Ваш взгляд, олимпиады по математике — это всё-таки скорее спорт или наука?

Это способ определять наиболее способных. Но не единственный. Скажем, Яков Синай говорил, что принимал участие в олимпиадах, но довольно безуспешно. А Александр Кириллов и Владимир Арнольд были победителями олимпиад. Есть разные пути в математику.

Вы давно поняли, что одарены математически?

Я заинтересовался математикой лет с семи. У меня папа тоже был математиком, кандидатом педагогических наук, и его руководителем

был Александр Хинчин, один из основных специалистов в СССР по теории вероятностей. На Западе его имя звучит наряду с именем Колмогорова, но Колмогоров был более знаменит, чем Хинчин. Папа интересовался проблемами педагогики и образования. Он как-то понял, что у меня есть талант, и он меня всячески поддерживал и поощрял. С ранних лет я умел перемножать в уме двузначные числа. Ещё я играл в шахматы, что нравилось маме...

Игра в шахматы мешала или помогала Вашему занятию математикой?

Когда я учился в школе, не очень мешала, но как только я поступил в университет, то пытался продолжать играть, но забросил. В истории шахмат были профессиональные математики. Скажем, второй чемпион мира Эммануил Ласкер. В Советском Союзе шахматы были значимой профессией, наряду с балетом они были гордостью государства. Это была целая индустрия. В школах были шахматные кружки, а в каждом районе был Дом пионеров с шахматным кружком, был и городской Дом пионеров с кружком.

Вы жили в Москве?

Да, в Москве, в Ленинградском районе. И сначала я ходил в Ленинградский дом пионеров, а потом на Стадион юных пионеров.

Стадион, увы, сломали, построили Третье транспортное кольцо. Осталась одна стенка, которую Вы узнаете...

Я думаю, что уже и не узнаю. Когда я поступил в университет, я понял, что не смогу продолжать заниматься шахматами.

А что бы Вы сказали молодым людям, которые думают о карьере математика?

Что надо любить математику, что многое делается вовсе не благодаря озарению, а за каждым результатом — тяжёлый труд. Если тебя озаряет, то как раз потому, что ты много над этим думаешь. И что бывают неудачи...

У Вас хватает времени на что-то другое: на чтение, походы в театр или кино?

Я бы сказал, что сейчас меня это больше интересует, чем раньше.

Спасибо за интересный разговор.

Как писать работы¹⁾

С. Б. Стечкин



1. ВЫБОРКА (что включать в работу)

Работа — не помойное ведро!

Прежде чем садиться писать статью, необходимо чётко представить себе, что вы собираетесь в неё включить. Для этого надо, для начала, ясно понимать, какую задачу вы рассматриваете. Нужна чёткая постановка этой задачи. Только после того как задача *полностью* решена, можно писать статью. Чем больше работа вычищена от мусора (даже относящегося к делу), тем лучше. Работа — не помойное

¹⁾ Эти заметки написаны на основе лекции, прочитанной С. Б. Стечкиным по просьбе участников его семинара в МГУ в апреле 1993 года. Подготовили текст к печати по своим записям этой лекции ученики С. Б. Стечкина А. Р. Алимов и М. И. Карлов; им же принадлежат сноски.

Фундаментальная и прикладная математика, 1997, том 3, № 4, с. 1261–1265. Публикуется с согласия редакции журнала.

ведро, куда можно кидать всё, что вам заблагорассудится. Включайте в работу только самое необходимое.

Не будьте жадными.

Вы не должны быть маньяком, страдающим манией, будто бы всё малоотносящееся к делу, что вы не включили в работу, у вас сейчас же украдут. Не бойтесь. Не страшно. Не удаляйтесь от основной темы вашей работы, не старайтесь заодно всунуть в неё все решённые вами побочные вопросы и подзадачи. Не будьте жадными. Оставьте что-нибудь вашим будущим (или настоящим) детишкам²⁾ на молочишко.

Лучшее — враг хорошего.

Улучшение, либо обобщение результатов — процесс бесконечный. Надо уметь где-то остановиться. Примите твёрдое мужское решение — что включать в статью, и потом не меняйте его. Хуже всего доделывать работу на ходу, поскольку это всегда ведёт к матерным обозначениям и вранью.

2. ЗАГЛАВИЕ

Заглавие — предмет, а не метод.

Заглавие должно быть максимально информативным. Помните, что большинство читателей посмотрит только на заглавие вашей работы. Например, это может быть формулировка основной теоремы. Первое, о чём говорят в заглавии — это предмет, а не метод. Людям интересно знать *что* вы решаете, а уж во вторую очередь — *как* вы это делаете. Поэтому, например, плохим названием статьи было бы: «Вероятностные методы в теории чисел» — ничего не говорится о предмете. Постарайтесь дать *классическое* заглавие. Не надо писать: «О чебышёвских множествах» и т. п., поскольку «О» — это уничижительный признак, показывающий — вы мало что сделали. Особо уничижительный признак — «К вопросу о...».

3. ВВЕДЕНИЕ

Всё, что нужно, и только то, что нужно.

Те, кто будут читать вашу работу — люди занятые, им некогда. Они прочтут только введение. Поэтому во введении извольте дать точную формулировку основного результата (кроме случая, когда основного результата нет). Надо, без использования лишних обозначений, сформулировать задачу, результаты работы и, возможно, пройти по методам.

²⁾ С. Б. Стечкин своих учеников называл детьми, учеников своих учеников — внуками и т. д.

Неуважение к предкам — признак безнравственности.

Плохо, если сразу после разъяснения терминологии пишут: «Я доказал такую-то теорему». Надо сказать, какая задача рассматривается. Помните, что математика делится на три части:

- 1) то, что было до меня;
- 2) то, что сделал я;
- 3) то, что будет после меня.

Вы обязаны знать историю задачи — кто и что в ней сделал до вас. Прежде чем формулировать свои теоремы, опишите результаты предшественников и укажите, чьими методами вы пользовались. Неуважение к предкам есть первый признак безнравственности.

4. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Правду, только правду и всю правду.

Над формулировками теорем надо работать отдельно. Главное, что вам необходимо помнить: надо писать правду, только правду и всю правду и не стыдиться показывать свою глупость.

Как правило, после решения задачи не сразу удаётся найти правильную формулировку того, что же на самом деле вами доказано. Не обижайте сами себя — формулируйте теорему в наиболее общей форме, иначе это сделает кто-нибудь за вас. Вместе с тем постарайтесь сделать формулировку покороче, «причешите её», все обозначения и определения дайте *перед* ней. В формулировках и доказательствах теорем не должно быть даже временных медведей³⁾.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пишите задом наперёд.

Доказательство теоремы и процесс его изложения есть обратные процессы. Это значит, что весь ход ваших рассуждений, имевший место при доказательстве, лучше начинать объяснять с конца и потом записывать задом наперёд. Это главное. Всю цепь доказательства разбейте на куски. В каждом таком куске: если вы начали какое-то рассуждение — его надо обязательно закончить.

Начало нового абзаца внутри доказательства должно всегда означать новую мысль. Но не злоупотребляйте этим правилом — нехо-

³⁾ Медведями С. Б. Стечкин называл появляющиеся в тексте символы, которые не были ранее определены. Он говорил так: «Вот вы пишете, например, „ d “ и не объясняете, что это — число, вектор, оператор или ещё что-нибудь. Если вам это безразлично, то давайте считать „ d “ медведем».

рошо, если почти каждое предложение начинается с нового абзаца. С другой стороны, текст доказательства не должен быть одним сплошным абзацем — такой текст трудно читать.

Выносить какие-то части доказательства в виде отдельных лемм разумно в двух случаях:

- 1) если это технические вещи — их можно вынести, чтобы не прерывать стройность доказательства;
- 2) если они могут представлять самостоятельный интерес.

Однако всё доказательство не следует расписывать по леммам. Нехорошо писать, например, так: «теорема является простым следствием лемм 1–10». Надо, чтобы и в доказательстве самой теоремы что-то оставалось.

Старайтесь не доказывать от противного.

Как известно, молодой начинающий математик всякую теорему доказывает от противного, либо от очень противного. Если вы можете провести прямое доказательство, то лучше не доказывайте от противного. Доказывать теоремы от противного, в то время когда этого можно избежать, считается дурным тоном.

О технике.

От порядка формул зависит длина доказательства. Пример: надо доказать, что $A \leq D$. Первый путь: $A \leq B$, $B \leq C$. Выводим: $A \leq C$. Далее, $C \leq D$. Отсюда и из предыдущего получаем $A \leq D$. Путь покороче: $A \leq B$, $B \leq C$, $C \leq D$, значит, $A \leq B \leq C \leq D$.

Слово «очевидно» — рассадник клопов⁴⁾.

Надо понимать, что подмена рассуждений (даже несложных) конструкцией типа «очевидно, что» неприятна любому читающему вашу работу, поскольку ему хочется понять ход ваших мыслей, а вместо этого вы говорите ему: «Ты дурак. Это же очевидно!» Всё это раздражает читателя, поэтому вместо «очевидно» лучше писать «понятно», «ясно» и т. п. Однако самая главная неприятность, связанная со словами типа «очевидно» — это клопы в ваших рассуждениях: совсем необязательно, что «очевидный» вам ход рассуждений будет очевиден для вас через месяц. Бывает, что он даже и неверен. Поэтому сначала *тщательно*, для себя, проверьте этот ход, а в доказательство его иногда можно и не включать. Часто человек пишет «очевидно», когда он затрудняется что-то объяснить. Избегайте слов типа «очевидно»!

⁴⁾ Сергей Борисович говорил о клопах, имея в виду неаккуратности в доказательстве.

6. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Плохо, когда $r > R$.

Перед тем как писать работу, тщательно продумайте систему обозначений. При решении задачи вы могли пользоваться какими-то своими обозначениями. Теперь, при написании, вы должны использовать совсем другие обозначения — такие, которые всем понятны и которые максимально облегчат чтение текста. Каждая буква в обозначениях должна быть информативной. Читатель, ещё до того как вы её определили, должен примерно представлять себе, что она может означать: число, множество и т. п. Используйте стандартные, общепринятые обозначения. Например, люди привыкли к тому, что ε — число маленькое и что для любого ε найдётся δ , а не наоборот. Кроме того, им будет неприятно, если окажется, что у вас r маленькое больше R большого: $r > R$.

7. ССЫЛКИ

Сделайте работу независимой.

Если вы ссылаетесь не на какой-нибудь классический (в данной области) результат, то вы должны его полностью сформулировать. Самое безобразное здесь — это ссылка в пустоту (или на труднодоступный источник) без формулировки того, на что вы там ссылаетесь. Не бойтесь дать общеизвестное определение, особенно если оно занимает меньше места, чем ссылка на него. Старайтесь, по возможности, сделать работу независимой, чтобы её можно было читать, почти не заглядывая в другие источники.

8. КОНЕЦ РАБОТЫ

Конец должен быть мажорным.

Нина Карловна Бари говорила, что конец всякой работы должен быть мажорным⁵⁾. То есть, например, таким: «теперь нам видна асимптотика», а не типа: «ничего ещё толком не видно в этой задаче».

9. ПРОЦЕСС РАБОТЫ НАД ЗАДАЧЕЙ⁶⁾

Сначала — раздеть, затем — смотреть.

Исследование задачи надо начинать с понимания того, что же на самом деле вы решаете, с отброса каких-то условий и связок — с «раз-

⁵⁾ По словам С. Б. Стечкина, Н. К. Бари была одной из тех, кто его самого учил писать работы.

⁶⁾ Отступление, сделанное С. Б. Стечкиным во время чтения лекции по просьбе слушателей.

девания» задачи. Это непросто, но очень важно. Посмотрев на «разделу» задачу, вы обычно сразу понимаете, как с ней дальше работать.

Думал-думал день-деньской — нет идейки никакой — это нормальный процесс работы над задачей. После того, как вы начали решать задачу, через некоторый промежуток времени (момент пресыщения⁷⁾) она становится вам отвратительна. Тогда вы должны прекратить думать над ней, *записать* все полученные к этому времени результаты (даже самые незначительные) и на время бросить эту задачу и начать думать над другой. Через некоторое время опять возвращайтесь к решению первой задачи. И не забудьте проверить, осталось ли вам очевидным то, о чём вы писали «очевидно, что».

Наконец, *знание литературы — половина решения задачи.*

10. РАЗНОЕ

Математическая работа — не художественное произведение. Она должна быть написана стандартным, общепринятым, *суконным* языком. Писать надо так, как положено писать сегодня, надо следить за модой.

Просмотрите ещё раз работу и вычеркните все слова-паразиты, особенно в доказательствах.

Помните, что написание статьи — серьёзное, ответственное, противное дело, и времени оно отберёт у вас намного больше, чем само решение задачи.

Надеюсь, теперь вы поняли, как надо писать работы!⁸⁾

⁷⁾ Сергей Борисович говорил, что у всех людей момент пресыщения задачей свой, сейчас он составляет у него один месяц.

⁸⁾ С. Б. Стечкин нередко заканчивал свои лекции вопросами типа: «Теперь понятно?» И после стандартного ответа — «да, понятно» — рассказывал про следующий диалог отца с сыном: «Понял, Ванюшка?» — «Понял, батюшка.» — «А что, Ванюшка?» — «А ничего, батюшка!».

Наш семинар: математические сюжеты

Ещё немного о математике раскрасок

А. М. Райгородский

§ 1. БЫЛА НЕДАВНО ТАКАЯ ЗАДАЧКА...

В 2022 году я в очередной раз руководил командой, которая составляла вариант Московской математической олимпиады для 10-го класса. И придумал задачку, которая попала на шестую позицию. Сейчас я её здесь сформулирую и сразу же решу. Но это будет только началом большой истории, которая выведет нас буквально на передний край современной комбинаторики и теории графов. Формулировку и решение привожу дословно по тексту из брошюры [1].

Формулировка. Андрей Михайлович выписал на доску все возможные последовательности длины 2022, состоящие из 1011 нулей и 1011 единиц. Назовём две последовательности *совместимыми*, если они совпадают ровно в 4 позициях. Докажите, что Андрей Михайлович может разбить все последовательности на 20 групп так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу.

Решение. Понятно, что совместимые последовательности совпадают в двух позициях по единицам, а в двух — по нулям. Рассмотрим первые пять позиций. Существует $C_5^3 = 10$ способов поставить три единицы на эти пять позиций. Для каждого из этих десяти способов А. М. выделяет группу написанных на доске последовательностей, первые три единицы которых стоят на соответствующих трёх позициях. Таким образом, А. М. разбивает на десять групп все написанные на доске

последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три единицы. Кроме того, любые две последовательности из одной группы совпадают по единицам хотя бы в трёх позициях, следовательно, не являются совместимыми. Аналогично А. М. разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три нуля. А поскольку у каждой последовательности на первых пяти позициях встречаются или три нуля, или три единицы, А. М. разбил все последовательности на 20 групп.

Из решения видно, что число 2022 в формулировке выбрано исключительно из соображений «стиля». Подойдёт любое чётное число n , а в последовательностях тогда будет по $n/2$ единиц и нулей. Ответ 20 при сохранении метода решения не изменится. Несложно придумать и ещё одно обобщение. А именно, пусть n — чётное число, снова выписаны все последовательности из $n/2$ единиц и $n/2$ нулей, но теперь две последовательности *совместимы*, если они совпадают ровно в $2s$ позициях, где s — любое целое неотрицательное число, меньшее чем $n/2$. Данное нами решение воспроизводится практически дословно, и число групп получается равным $2C_{2s+1}^{s+1} = 2C_{2s+1}^s$. Любопытно, что, поставь мы задачу сразу в таком виде, вряд ли бы она заняла шестую позицию в варианте: биномиальный коэффициент даёт намёк на то, как нужно действовать.

Скоро мы узнаем, что всё, о чём мы до сих пор говорили, лишь верхушка айсберга. Для этого мы в следующем разделе переведём задачу на язык теории графов.

§ 2. НА ЯЗЫКЕ ГРАФОВ

Прежде всего договоримся, что всюду далее мы будем встречаться только с обыкновенными (простыми) графами, т. е. графами, у которых нет кратных рёбер, нет ориентации и нет петель. Желая подчеркнуть, что данный граф G имеет множество вершин V и множество рёбер E , мы будем писать, как это принято, что $G = (V, E)$.

Теперь напомним одну очень важную характеристику графа — его *хроматическое число*. Для данного графа $G = (V, E)$ хроматическое число — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины из множества V , чтобы концы каждого ребра из множества E имели разные цвета. Обозначается хроматическое число $\chi(G)$. Например, если C_n — это простой цикл на n вершинах (рис. 1), то $\chi(C_n) = 2$ при чётных n и $\chi(C_n) = 3$ при нечётных n . А если

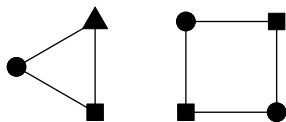


Рис. 1

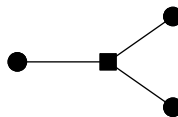


Рис. 2

T_n — дерево с $n \geq 2$ вершинами, то $\chi(T_n) = 2$ (рис. 2). Если же, скажем, K_n — это полный граф на n вершинах, т. е. граф, в котором проведены все возможные $C_n^2 = n(n-1)/2$ ребер, то $\chi(K_n) = n$.

В целом хроматические числа графов устроены крайне непросто. Легко лишь проверить, что граф с хотя бы одним ребром тогда и только тогда имеет хроматическое число 2 (красится в 2 цвета или, как ещё говорят, *двудолен*), когда в нём нет простых циклов C_n с нечётным n . Доказательство утверждения в одну сторону («необходимость») очевидно (см. предыдущий абзац), а доказательство в другую сторону («достаточность») посложнее, но читатель, который ранее не знал этого факта, может найти его в литературе или даже самостоятельно доказать. Уже проверка существования раскраски графа в 3 цвета — алгоритмически трудная проблема.

Мы не будем много времени тратить здесь на обсуждение различных вопросов, которые возникают в связи с понятием хроматического числа, хотя они безумно интересны. Наша цель — олимпиадная задача и её обобщение из первого раздела. При чём же здесь хроматические числа?

Пусть n — чётное число, а s — неотрицательное целое число, строго меньшее чем $n/2$. Обозначим через $J(n, s)$ граф, вершинами которого служат все возможные последовательности из $n/2$ единиц и $n/2$ нулей, а рёбрами соединены все пары вершин, отвечающих совместимым последовательностям, т. е. последовательностям, совпадающим ровно в $2s$ позициях. Что значит покрасить вершины этого графа согласно условиям из определения хроматического числа? «Концы каждого ребра должны иметь разные цвета.» Это то же самое, что разбить множество вершин (последовательностей) на группы (цвета) так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу. Таким образом, результат первого раздела — это утверждение о том, что независимо от величины n справедливо неравенство $\chi(J(n, s)) \leq 2C_{2s+1}^s$. Здесь именно неравенство, так как мы лишь предложили способ покраски, но отнюдь не доказали, что он оптимален, т. е. даёт *минимальное* количество цветов, как это требуется в определении хроматического числа.

Раз мы не знаем, оптимальна ли «олимпиадная» оценка, значит, нужно подумать о нижних оценках величины $\chi(J(n, s))$. Об этом мы

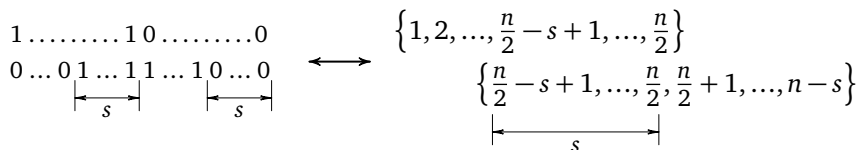


Рис. 3

поговорим в третьем разделе, а пока дадим ещё один равносильный вариант определения графа $J(n, s)$, с которым нам будет удобно работать. В этом варианте вершинами графа служат все возможные $n/2$ -элементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$, а рёбрами две вершины соединяются тогда и только тогда, когда соответствующие подмножества имеют ровно s общих элементов. На рис. 3 показано, почему исходное определение эквивалентно приведённому только что.

§ 3. Нижние оценки хроматического числа

3.1. Две общие оценки

Есть множество разных способов получения нижних оценок для хроматического числа графа. Но наиболее естественными и применимыми являются два из них. О них мы поговорим в этом параграфе.

Во-первых, в графах бывают *клики*. Клика — это просто любой полный подграф. Например, любое ребро в графе — это клика на двух вершинах (2-клика), и даже одна вершина считается 1-кликой, ведь петель у нас не бывает. Обозначим через $\omega(G)$ максимальное число вершин в кликах графа G . Например, $\omega(C_3) = 3$, так как цикл на трёх вершинах — это треугольник, т. е. 3-клика, но и сам граф является своим подграфом по определению. В то же время $\omega(C_n) = 2$ при всех $n \geq 4$. Величина $\omega(G)$ называется *кликовым числом* графа. Очевидно, что на покраску вершин любой клики нужно столько цветов, сколько в этой клике вершин, а стало быть, $\chi(G) \geq \omega(G)$. Это первая из обещанных оценок.

Во-вторых, в графах бывают «антиклики». Мы взяли это слово в кавычки, поскольку формально в математике такого термина нет. Но он очень удобен для понимания сути. Речь идёт о множествах вершин, никакие две из которых не соединены ребром. Официально такие множества называются *независимыми*, и именно этот термин мы будем употреблять в дальнейшем. Множество вершин клики в графе G — это независимое множество вершин в графе $\bar{G}$, который получается из графа G удалением всех рёбер этого графа и проведением всех

рёбер, которых в этом графе не было. Максимальное число вершин в независимых множествах вершин графа G называется *числом независимости* и обозначается $\alpha(G)$. Понятно, что $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$. Обозначения напоминают нам о противоположности числа независимости кликовому числу, ведь α и ω — это первая и последняя буквы греческого алфавита.

Прежде чем обсуждать оценку хроматического числа, которая получается с помощью числа независимости, заметим для примера, что $\alpha(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$. А $\alpha(K_n) = 1$: мы считаем каждую вершину одновременно и кликой, и независимым множеством.

Теперь поговорим об оценке. Независимое множество... В нём никакие две вершины не соединены ребром. Так ведь это же типичное множество вершин одного цвета в определении хроматического числа! Представим себе, что вершины графа $G = (V, E)$ покрашены в χ цветов, т. е. $V = V_1 \cup \dots \cup V_\chi$, все множества V_i независимые и попарно не пересекающиеся. Тогда

$$|V| = |V_1| + \dots + |V_\chi| \leq \chi \cdot \alpha(G),$$

откуда следует, что $\chi \geq |V|/\alpha(G)$. Поскольку это верно для любого допустимого числа цветов, это же верно и для хроматического числа, а поскольку хроматическое число — это число целое, то в итоге справедливо неравенство

$$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Это и есть вторая оценка.

Есть огромная и очень интересная литература, которая фактически исследует соотношение между этими двумя оценками. Это связано, например, с так называемой теорией Рамсея. Здесь мы не станем обсуждать какие-либо детали, отсылая заинтересованного читателя к двум брошюрам [2, 3]. Возможно, до чтения этих брошюр читателю будет также интересно самому придумать пример такого графа $G_1 = (V_1, E_1)$, что

$$\omega(G_1) > \left\lceil \frac{|V_1|}{\alpha(G_1)} \right\rceil,$$

и, наоборот, пример такого графа $G_2 = (V_2, E_2)$, что

$$\omega(G_2) < \left\lceil \frac{|V_2|}{\alpha(G_2)} \right\rceil.$$

Это должно подзадорить читателя.

В следующих параграфах мы обсудим обе оценки применительно к нашему графу $J(n, s)$.

3.2. Кликовое число

Давайте считать, что s фиксировано, а n принимает разные значения. Это согласуется с исходной олимпиадной задачей. Там величина s равнялась двум, а n было весьма велико. Пусть, для примера, s и будет двойкой. Пусть, тоже для примера, $n = 8$, т. е. n совсем маленькое. Тогда легко построить треугольник, т. е. 3-клику в графе $J(n, s)$, беря в качестве вершин четырёхэлементные подмножества в $\mathcal{R}_8$ вида $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{1, 2, 7, 8\}$. Пусть теперь $n = 10$. Такой, как в первом примере, треугольник уже не получится. В нём числа 1 и 2 общие для всех вершин, но на оставшихся восьми числах уже нельзя построить три попарно непересекающихся подмножества мощности три. Однако можно действовать экономнее. Треугольник $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 6, 7, 8\}$, $\{3, 4, 6, 7, 9\}$ отлично уместается в $\mathcal{R}_{10}$. Аналогичная конструкция есть и при $n = 12$. Но там она уже впритык задействует все 12 чисел из $\mathcal{R}_{12}$. Понятно, что при $n = 14$ треугольников вовсе нет, и то же самое верно при всех $n > 14$. Это катастрофа! Получается, что первая оценка хроматического числа при всех сравнительно больших n порождает «мышь», т. е. тривиальное неравенство $\chi(J(n, 2)) \geq 2$.

Это был пример с $s = 2$. Но понятно, что при любом фиксированном s найдётся n , начиная с которого в $J(n, s)$ нет треугольников. Достаточно просто посмотреть на конструкцию с рис. 4. Из неё видно, что в множестве размера s должны уместиться $\frac{n}{2} - 2s$ элементов третьей вершины, если мы хотим, чтобы вместе с первыми двумя она образовывала треугольник. И это возможно лишь при $\frac{n}{2} - 2s \leq s$, т. е. $n \leq 6s$. Таким образом, оценка кликовым числом совсем не работает.

Читатель в этом месте может выразить изумление: «Как же так? Получается, в графах $J(n, s)$ в большинстве случаев даже треугольников нет! Откуда же могут возникнуть трудности с покраской? Неужели граф без треугольников может иметь большое хроматическое число?» Ещё как может! Бывают даже графы, в которых длина самого короткого простого цикла больше (например) 1000 и у которых, тем не менее,

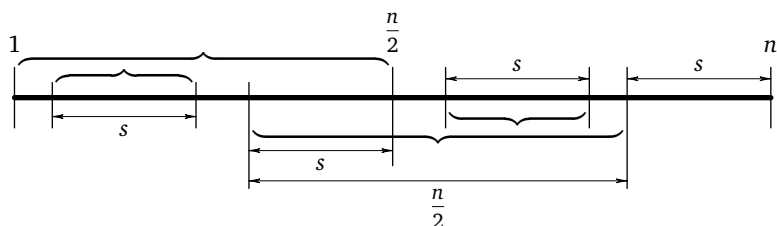


Рис. 4

хроматические числа больше, чем 10^{1000} . И числа 1000, 10^{1000} можно заменить на что угодно большее. Всё равно бывают такие графы. Прочитать об этом можно, например, в статье [4], а мы попробуем в следующем разделе обратиться ко второй оценке хроматического числа.

3.3. Число независимости

С числом независимости всё намного-намного хитрее. Какой наиболее простой способ построить независимое множество вершин в графе $J(n, s)$? Кажется, что проще всего зафиксировать какие-нибудь $s + 1$ элементов множества $\mathcal{R}_n$ и рассмотреть все вершины, которые отвечают подмножествам мощности $n/2$, целиком содержащим фиксированные $s + 1$ элементов. Тогда рёбер, конечно, не будет, ведь попарные пересечения имеют размеры не меньше $s + 1$, т. е. уж точно нет ни одного пересечения по ровно s элементам. К сожалению, во многих случаях бывают ещё большие независимые множества. Приведём лишь один пример. Пусть $n = 8$, $s = 1$. Тогда только что описанная конструкция состоит из $C_6^2 = 15$ вершин. Это вершины, отвечающие, скажем, всем 4-элементным подмножествам множества $\mathcal{R}_8$, в каждое из которых входят элементы 1 и 2. Рассмотрим иную конструкцию. Возьмём все 4-элементные подмножества $\mathcal{R}_8$, которые содержат не менее трёх элементов из множества $\mathcal{R}_4$. Любые два таких подмножества уже внутри $\mathcal{R}_4$ имеют не менее двух общих элементов, т. е. соответствующие вершины образуют независимое множество. Но мощность этого множества равна $C_4^3 \cdot C_4^1 + C_4^2 \cdot C_4^0 = 17$. В статье [5] мы подробно писали о том, как в целом всё устроено в аналогичных задачах о пересечениях множеств. Здесь мы не будем воспроизводить эти подробности. Покажем лишь, что всё опять плохо с оценками хроматических чисел.

Пусть, для примера, $s = 6$, а $n = 2000$. Заметим, что оценка из олимпиадной задачи имеет величину $2C_{13}^6 = 1716$. Построим независимое множество вершин в графе $J(2000, 6)$, используя идею из предыдущего абзаца. А именно, рассмотрим все подмножества мощности 1000 (вершины) в множестве $\mathcal{R}_{2000}$, которые пересекают множество $\mathcal{R}_{999}$

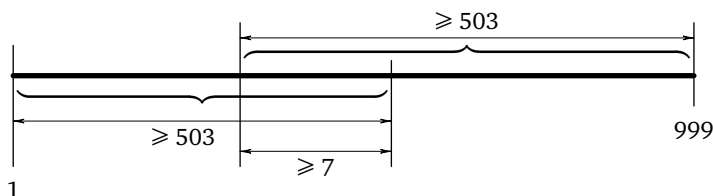


Рис. 5

по не менее, чем 503, элементам. Сложно, да? Ну нет, всё просто. Глядя на рис. 5, сразу ясно, что уже внутри $\mathcal{R}_{999}$ любые два рассмотренных множества пересекаются по хотя бы семи элементам, т. е. соответствующие вершины не образуют рёбер. Сколько же вершин в этом независимом множестве? Понятно, что их

$$C_{999}^{503} \cdot C_{1001}^{497} + C_{999}^{504} \cdot C_{1001}^{496} + \dots + C_{999}^{999} \cdot C_{1001}^1.$$

Значит, $\alpha(J(2000, 6))$ точно не меньше этой величины, а оценка

$$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \right\rceil$$

не может быть лучше, чем оценка величиной

$$\left\lceil \frac{C_{2000}^{1000}}{C_{999}^{503} \cdot C_{1001}^{497} + C_{999}^{504} \cdot C_{1001}^{496} + \dots + C_{999}^{999} \cdot C_{1001}^1} \right\rceil.$$

Простая программка позволяет посчитать страшноватую дробь, и оказывается, что гора снова родила мышь: верхняя целая часть страшноватой дроби равна трём. При этом мы только можем утверждать, что ничего лучшего получить нельзя. Вполне возможно, что реальное значение $\alpha(J(2000, 6))$ ещё больше, и тогда тройка превратится в двойку...

Мы не хотим перегружать заметку сложными выкладками. Если хорошо владеть инструментами математического анализа, то можно показать, что для любого s существует n , начиная с которого $\lceil |V|/\alpha(G) \rceil$ не превосходит трёх (см. [6]). Это означает, что в большинстве случаев вторая оценка хроматического числа так же или почти так же беспомощна, как и первая.

Что же делать? Может, олимпиадная оценка слишком завышена? Конечно, есть смешной случай $s = 0$. В нём олимпиадная оценка имеет величину 2, т. е. совпадает с нижней оценкой через кликовое число. Но граф $J(n, 0)$ устроен тривиально. У каждой его вершины есть ровно одна «соседка», т. е. этот граф представляет собой *паросочетание* — набор попарно не смежных рёбер. Разумеется, такой граф двудобен.

И тем не менее, кое-что «смешной случай» подсказывает. Обсудим это в следующем параграфе.

3.4. КНЕЗЕРОВСКИЕ ГРАФЫ

Про эти графы мы и раньше писали много. Есть брошюра [7], есть и популярные статьи [8, 9]. Кнезеровским графом называется обобщение графа $J(n, 0)$, т. е. как раз «смешного случая» из предыдущего

параграфа. Его вершины — это r -элементные подмножества множества $\mathcal{R}_n$, где $r \leq n/2$, а рёбра — пары вершин, отвечающих непересекающимся подмножествам. Обозначается кнезеровский граф $KG_{n,r}$. В частности, $KG_{n,1} = K_n$, а $KG_{n,n/2} = J(n, 0)$. Очень легко показать, что $\chi(KG_{n,r}) \leq n - 2r + 2$ (можете попробовать доказать сами или посмотреть в статье [8]). И была гипотеза, сформулированная Кнезером в 1955 году, о том, что $\chi(KG_{n,r}) = n - 2r + 2$. Как и в нашем случае, ни одна из стандартных нижних оценок и близко не давала гипотетическую величину. А в 1977 году Ловас доказал гипотезу с помощью... топологического метода! Рассказ об этом можно найти в брошюре [7] и статье [8], и здесь мы лишь воспользуемся этим удивительным результатом.

Рассмотрим в графе $J(n, s)$ подграф G , который образован вершинами, содержащими числа $1, 2, \dots, s$. Разумеется, $\chi(J(n, s)) \geq \chi(G)$. Теперь рассмотрим граф H , у которого вершины отвечают подмножествам мощности $\frac{n}{2} - s$ множества $\{s + 1, \dots, n\}$, а рёбрами соединяются две вершины тогда и только тогда, когда соответствующие множества не пересекаются. Очевидно, вершины A и B графа G соединены ребром в том и только том случае, когда вершины $A \setminus \{1, \dots, s\}$ и $B \setminus \{1, \dots, s\}$ графа H соединены ребром. Таким образом, G и H изоморфны, т. е., в частности, у них одинаковые хроматические числа. В то же время $H = KG_{n-s, \frac{n}{2}-s}$. Значит,

$$\begin{aligned} \chi(J(n, s)) &\geq \chi(G) = \chi(H) = \\ &= \chi(KG_{n-s, \frac{n}{2}-s}) = (n-s) - 2\left(\frac{n}{2} - s\right) + 2 = s + 2. \end{aligned}$$

Ура! Нам удалось оторваться от тривиальности! Если комбинаторные неравенства давали совсем нелепые оценки двойкой или (и то не факт) тройкой, то отныне при всех s и n имеем оценку величиной $s + 2$. Конечно, пришлось использовать бронебойную топологию, и всё равно зазор между оценками кошмарен. Но это уже серьёзное продвижение.

Кстати, насчёт зазора. Как растёт «олимпиадная» величина $2C_{2s+1}^s$? Давайте её тоже оценим. Хорошо известно тождество

$$C_{2s+1}^0 + C_{2s+1}^1 + \dots + C_{2s+1}^s + C_{2s+1}^{s+1} + \dots + C_{2s+1}^{2s+1} = 2^{2s+1}.$$

Более того, слагаемые сперва растут, а потом убывают. Наша величина — одна из двух наибольших в сумме. Значит,

$$C_{2s+1}^s \geq \frac{2^{2s+1}}{2s+2}.$$

Можно посчитать и точнее с помощью формулы Стирлинга. В любом случае получится, что известная нам сейчас верхняя оценка растёт примерно как экспонента, в то время как нижняя оценка линейна.

Оказывается, чудовищный зазор можно очень мощно сократить, улучшив... верхнюю оценку. В следующем разделе мы свяжем нашу задачу с ещё одним очень красивым разделом комбинаторики раскрасок. Это позволит нам показать, что олимпиадная оценка невероятно завышена и вместо неё справедлива оценка порядка s^2 , которая уже совсем не так ужасно смотрится при сравнении с нижней оценкой $s + 2$.

§ 4. Задача об уклонении и значительное уточнение олимпиадной оценки

4.1. Гиперграфы и их раскраски

Классическое понятие графа допускает очень естественное обобщение. По сути, что такое граф? Это множество объектов, на которых введены парные отношения (скажем, множество людей и отношение знакомства или множество последовательностей и отношение совместности). Но ведь на множестве можно и более сложные соотношения рассматривать. Например, есть 30 школьников, из которых пятеро очень любят комбинаторику, ещё пятеро очень любят геометрию, ещё четверо — теорию графов, шестеро — теорию чисел, и т. д. Множества любителей могут и пересекаться. Получается объект, который называется *гиперграфом*. У него, как и у графа, есть вершины (в данном примере это 30 школьников) и есть рёбра (в данном примере это подмножества множества вершин, имеющие мощности 5, 5, 4, 6 и т. д.). В общем случае пишут прямо так же, как и в теории графов: $H = (V, E)$. Только теперь E — это совокупность некоторых подмножеств множества V , и эти подмножества не обязательно двухэлементные и даже не обязательно одинаковой мощности. Для дальнейшего удобства мы будем считать, что одноэлементными или пустыми рёбра всё-таки не бывают. При этом, как и раньше, мы считаем, что в гиперграфе нет кратных рёбер, у рёбер нет ориентации (т. е. они являются сочетаниями) и нет совпадающих вершин (это сочетания без повторений). Отметим, что отсутствие кратных рёбер — это удобное нам сейчас соглашение, хотя в примере со школьниками вполне могли быть и совпадающие множества.

Конечно, графы имеют неоспоримое преимущество перед гиперграфами: их гораздо удобнее рисовать. Типичный «портрет» гиперграфа

изображён на рис. 6. Рёбра напоминают эдакие сардельки, и я постоянно упоминаю в лекциях этот аппетитный факт. Смотреть приятно, но понимать, что там за варево, труднее.

Гиперграфы тоже можно красить. Давайте, как и прежде, красить вершины, причём только в два цвета. Условно назовём эти цвета красным и синим. Какая раскраска «лучше»? Ну, например, та, в которой в каждом ребре примерно поровну красных и синих вершин. Разумеется, далеко не всегда такого удаётся добиться. Очень красивая и нетривиальная теорема звучит следующим образом.

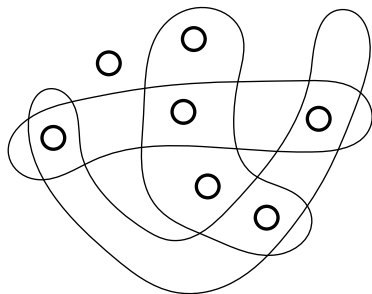


Рис. 6

ТЕОРЕМА 1. Для любого натурального k существуют $m \in [k, 8k]$ и гиперграф $H = (V, E)$ со следующими свойствами: (i) $|V| = |E| = m$; (ii) при любой раскраске множества V в красный и синий цвета найдётся ребро $e \in E$, в котором разность числа красных и синих вершин по модулю не меньше, чем $\sqrt{m}/2$.

Теорема говорит о том, что для произвольного гиперграфа не только не получится добиться того, чтобы в каждом ребре было поровну (или почти поровну) вершин красного и синего цветов, но и не получится сделать так, чтобы в каждом ребре числа вершин разного цвета отличались меньше, чем на величину порядка корня от количества вершин и рёбер. Иными словами, бывают гиперграфы, на которых *уклонение* любой раскраски от разбиения каждого ребра на две почти равные части весьма велико. Доказательство теоремы 1 и множество других интересных сведений про задачу об *уклонении* можно найти в моих брошюрах [10, 11], в книге [12], а также в статье [13]. В частности, там доказано, что в некотором смысле теорема 1 неумлучшаема. Ещё была очень близкая по теме заметка [14], но там до задач об *уклонении* дело не дошло.

Прежде чем двигаться дальше, дадим небольшие пояснения для тех, кто станет искать доказательство теоремы 1 в только что приведённых источниках. Дело в том, что гиперграф из теоремы 1 удобно строить с помощью так называемых матриц Адамара. Это матрицы размера $m \times m$, состоящие из -1 и 1 , причём каждые две строки ортогональны. Легко видеть, что при $m > 2$ необходимое условие существования матрицы Адамара состоит в том, что m делится на 4 (в книге [10] даны подробные комментарии). Знаменитая гипотеза

Адамара утверждает, что это условие является также достаточным. К сожалению, проблема до сих пор не решена. Найдено множество значений m , для которых матрицу удаётся сконструировать (см., например, [15]), но для очень многих m существование матрицы — всё ещё открытый вопрос. В частности, известна конструкция Пэли, в которой для простых чисел p вида $4k + 3$ порядок матрицы равен $p + 1$, а для простых чисел p вида $4k + 1$ порядок равен $2(p + 1)$. Фигурирующий в теореме 1 отрезок $[k, 8k]$ — это просто очень грубая оценка, гарантирующая существование матрицы Адамара порядка $m \in [k, 8k]$. Мы сперва выбираем $p \in [k, 2k]$ согласно постулату Бертрана, а затем получаем m , равное $p + 1$ или $2(p + 1)$, которое в любом случае с запасом попадает на отрезок до $8k$. Разумеется, можно оценить гораздо точнее, но это в итоге повлияет лишь на константу в оценке, а мы не хотим здесь искать оптимальные константы, нагромождая страшные формулы и рискуя лишить читателя *катарсиса*¹⁾.

Вероятно, читатель остаётся в недоумении: как по матрице строить гиперграф? Что ж, это как раз совсем легко. Вершины гиперграфа — это номера столбцов матрицы, а каждое ребро — это набор номеров, на которых в данной строчке стоят единицы. Так и получается, что $|V| = |E| = m$.

4.2. КАТАРСИС

Олимпиадная оценка допускает следующее феерическое усиление.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $32(s + 1)^2 \leq n$. Тогда $\chi(J(n, s)) \leq 64(s + 1)^2$.

Это действительно очень мощный ход. Вместо экспоненциальной оценки получаем квадратичную! Конечно, зазор между $s + 2$ (нижняя оценка) и $64(s + 1)^2$ выглядит намного приличнее, чем зазор между $s + 2$ и $2C_{2s+1}^s$. Однако зазор по-прежнему есть, и, как я обещал в начале статьи, мы выходим здесь на передний край науки: устранение этого зазора — открытая проблема! Сомножитель 64 не оптимален. Его

¹⁾ Катарсис — это слово, которое я часто употребляю в лекциях, имея в виду восторг, который после долгого и, казалось бы, трудного доказательства должен испытать слушатель, неожиданно осознавший в конце, что же случилось. Ударение правильно ставить на любую из букв «а», хотя считается, что на первую — лучше. Лично я почему-то люблю говорить «катарсис». Определение из википедии: «катарсис (др.-греч. — возвышение, очищение, оздоровление) — процесс высвобождения эмоций, разрешения внутренних конфликтов и нравственного возвышения, возникающий в ходе самовыражения (в том числе через искусство) или сопереживания при восприятии произведений искусства.» А математика — это искусство!

можно уменьшить. Но это и всё, что мы сейчас умеем. Придумали эту оценку Черкашин, Киселёв и Балог примерно в 2018 году. По факту, их рассуждение — это обобщение идеи из решения олимпиадной задачи. Ну, скоро всё увидим.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, заметим ещё, что в ней есть ограничение на s , которое отсутствует в случае олимпиадной оценки. На самом деле, при больших значениях s есть ещё нетривиальные подходы (совсем другие!), которые также позволяют значительно уточнить олимпиадное неравенство. В пятом разделе мы поговорим об одном из них — пожалуй, самом красивом и показательном.

Доказательство теоремы 2. Теорема 1 верна для любого k . Рассмотрим $k = 4(s + 1)^2$, возьмём соответствующее $m \in [4(s + 1)^2, 32(s + 1)^2]$ и соответствующий гиперграф $H = (V, E)$. Поскольку $32(s + 1)^2 \leq n$, получаем, что $m \leq n$. У нас есть множество $\mathcal{R}_n$, из которого формируются вершины графа $J(n, s)$. Давайте отождествим вершины гиперграфа H с первыми m числами из множества $\mathcal{R}_n$ (фактически просто занумеруем вершины гиперграфа). Тогда $V = \mathcal{R}_m$ и каждое ребро $e \in E$ — подмножество в $\mathcal{R}_m \subset \mathcal{R}_n$. При этом каждая вершина A графа $J(n, s)$ — это тоже подмножество в $\mathcal{R}_n$ мощности $n/2$. Таким образом, мы вполне можем пересекать между собою рёбра гиперграфа и вершины графа. Забавно? Ну, вот так.

Зафиксируем произвольное ребро $e \in E$. Если вершина A графа $J(n, s)$ такова, что

$$|A \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2},$$

то красим вершину A в цвет, который обозначим $\chi_1(e)$. Пусть $\bar{A} = \mathcal{R}_n \setminus A$. Если вершина A графа $J(n, s)$ такова, что

$$|\bar{A} \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2},$$

то красим вершину A в цвет, который обозначим $\chi_2(e)$. Конечно, никакая вершина не может оказаться покрашенной сразу в оба цвета $\chi_1(e)$, $\chi_2(e)$, ведь иначе получилось бы, что ребро e пересекает и вершину A , и её дополнение $\bar{A}$ по строго более чем половине своих элементов, что, очевидно, невозможно. Однако остаётся ещё три вопроса, ответы на которые завершат доказательство теоремы. Приведём ниже эти вопросы.

1. Всё-таки одна и та же вершина может оказаться покрашенной сразу в несколько цветов. Только эти цвета будут соответствовать разным рёбрам гиперграфа, т. е. вполне может случиться так, что

вершина A покрашена в цвета $\chi_1(e_1)$ и $\chi_2(e_2)$ или в цвета $\chi_1(e_1)$ и $\chi_1(e_2)$. Что делать?

2. Вполне могло бы случиться так, что какая-то вершина A вовсе не покрашена. Это произойдёт, если для каждого $e \in E$ одновременно выполнены неравенства

$$|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2} \quad \text{и} \quad |\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}.$$

Но так ли это?

3. Если всё-таки две разные вершины покрашены в один и тот же цвет, то почему между ними нет ребра?

Давайте снимем вопросы. Сперва ответим на вопрос 1, потом — на вопрос 3, а в самом конце — на вопрос 2.

Ответ на вопрос 1. Тут всё совсем просто. Если какая-то вершина покрашена в несколько цветов, то выберем любой один из них. Как говорится, «рандомно».

Ответ на вопрос 3. Понятно, что если какие-то две вершины A, B покрашены в один и тот же цвет $\chi_1(e)$, то уже внутри ребра e они пересекаются по, как минимум, $s + 1$ элементам (рис. 7), а значит, ребра в $J(n, s)$ между A и B нет. Таким образом, покраска в цвет $\chi_1(e)$ корректна. Если же A и B покрашены в цвет $\chi_2(e)$, то аналогично получаем, что $|\bar{A} \cap \bar{B}| \geq s + 1$. Но

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = n - |A \cup B| = n - |A| - |B| + |A \cap B| = n - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + |A \cap B| = |A \cap B|,$$

так что $|A \cap B| \geq s + 1$, и снова покраска корректна.

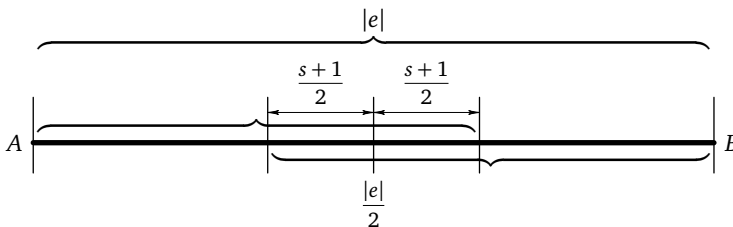


Рис. 7

Ответ на вопрос 2. Давайте убедимся, что все вершины графа $J(n, s)$ покрашены. Пусть A — произвольная вершина. Нам нужно найти такое ребро $e \in E$, что

$$\text{либо } |A \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2}, \quad \text{либо } |\bar{A} \cap e| \geq \frac{|e| + s + 1}{2}.$$

Для этого мы покрасим... гиперграф! А именно, покрасим вершины гиперграфа H , т. е. элементы множества $\mathcal{R}_m$ в два цвета: элементы, попадающие в множество A , покрасим в синий цвет, а элементы, попадающие в $\bar{A}$, сделаем красными. Мы знаем (по теореме 1), что при любой раскраске вершин гиперграфа H найдётся ребро $e \in E$ с большим уклонением, т. е.

$$||e \cap A| - |e \cap \bar{A}|| \geq \frac{\sqrt{m}}{2},$$

где $|e \cap A|$ — число синих вершин в ребре e , а $|e \cap \bar{A}|$ — число красных вершин в том же ребре. Поскольку $m \geq k = 4(s+1)^2$, имеем $\sqrt{m}/2 \geq s+1$.

Докажем, что найденное ребро и есть то, что мы ищем. Предположим противное:

$$|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}, \quad |\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}.$$

Если мы придём к противоречию, то A будет покрашена, а стало быть, и все вершины графа $J(n, s)$ будут покрашены по аналогии. Итак, во-первых, $|A \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}$. Значит, $|\bar{A} \cap e| > \frac{|e| - s - 1}{2}$, откуда

$$|A \cap e| - |\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2} - \frac{|e| - s - 1}{2} = s + 1.$$

Во-вторых, $|\bar{A} \cap e| < \frac{|e| + s + 1}{2}$. Значит, $|A \cap e| > \frac{|e| - s - 1}{2}$, откуда

$$|A \cap e| - |\bar{A} \cap e| > \frac{|e| - s - 1}{2} - \frac{|e| + s + 1}{2} = -s - 1.$$

В итоге получаем, что

$$||A \cap e| - |\bar{A} \cap e|| < s + 1,$$

и это противоречит неравенству

$$||e \cap A| - |e \cap \bar{A}|| \geq \frac{\sqrt{m}}{2} \geq s + 1.$$

Итак, мы покрасили все вершины графа $J(n, s)$. Сколько цветов мы использовали? Точно не больше, чем $2|E| = 2m < 16k = 64(s+1)^2$. Это катарсис. $\square$

Как мы говорили выше, теорема 1 неулучшаема, разве что константу в ней можно улучшить. Поэтому трудно ожидать, что аналогичными методами удастся серьёзно продвинуться в вопросе получения верхних оценок хроматического числа.

§ 5. ЕЩЁ ОБ ОЦЕНКЕ С УЧАСТИЕМ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ

Мы знаем, что для любого графа справедливо неравенство

$$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \right\rceil.$$

Очень красивая и несложная вероятностная техника позволяет показать, что для графа $J(n, s) = (V, E)$ верна и очень близкая верхняя оценка, а именно,

$$\chi(J(n, s)) \leq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha} \cdot (\ln |V| + 1) \right\rceil, \quad \alpha = \alpha(J(n, s)).$$

Что ж, давайте докажем эту оценку. Заметим, что $|V| = C_n^{n/2}$, и положим

$$m = \left\lceil \frac{C_n^{n/2}}{\alpha} \cdot (\ln C_n^{n/2} + 1) \right\rceil.$$

Рассмотрим произвольное независимое множество W вершин графа $J(n, s)$, имеющее мощность α . Пусть σ — случайная перестановка на множестве $\mathcal{R}_n$, подмножествами которого служат все вершины графа $J(n, s)$. Под действием перестановки σ каждая вершина из множества W перейдёт в какую-то новую, вообще говоря, вершину графа $J(n, s)$. Совокупность этих вершин обозначим $\sigma(W)$. Очевидно, $\sigma(W)$ — это тоже независимое множество вершин мощности α . Пусть $A \in V$, т. е. $A \in \mathcal{R}_n$ и $|A| = n/2$. Какова вероятность того, что $A \in \sigma(W)$? Ясно, что каждая отдельная вершина $B \in W$ переходит в A под действием $((n/2)!)^2$ различных перестановок (мы можем как угодно переставлять между собой элементы множества A и можем как угодно переставлять между собой элементы множества $\bar{A}$). Значит, есть ровно $\alpha \cdot ((n/2)!)^2$ различных перестановок, под действием которых множество $\sigma(W)$ «ловит» вершину A , и, стало быть, искомая вероятность равна

$$\frac{\alpha \cdot ((n/2)!)^2}{n!} = \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}.$$

А вероятность, того, что, наоборот, $A \notin \sigma(W)$, равна $1 - \alpha/C_n^{n/2}$. Сделаем m независимых друг от друга (в вероятностном смысле слова) случайных перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. Вероятность того, что A не попадёт ни в одно из множеств $\sigma_i(W)$, равна

$$\left(1 - \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}\right)^m.$$

Наконец, вероятность того, что найдётся вершина $A \in V$, которая не попадёт ни в одно из множеств $\sigma_i(W)$, не превосходит величины

$$C_n^{n/2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}\right)^m.$$

Воспользуемся простым фактом из математического анализа:

$$1 - x = e^{\ln(1-x)} \leq e^{-x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_n^{n/2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{C_n^{n/2}}\right)^m &\leq C_n^{n/2} \cdot e^{-m\alpha/C_n^{n/2}} \leq \\ &\leq C_n^{n/2} \cdot \exp\left(-\frac{C_n^{n/2}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{C_n^{n/2}} \cdot (\ln C_n^{n/2} + 1)\right) = C_n^{n/2} \cdot e^{-(\ln C_n^{n/2} + 1)} < 1. \end{aligned}$$

Получается, что с положительной вероятностью m случайных перестановок независимого множества W «ловят» все вершины графа, а следовательно, все вершины корректно покрашены в некоторые m цветов. Всё!

Попробуем понять, что же даёт нам доказанное неравенство. Мы помним, что если s достаточно маленькое по сравнению с n , то, по-видимому, дробь $|V|/\alpha$ — это нечто, не превосходящее трёх. В то же время очевидно, что $C_n^{n/2} < 2^n$, откуда $\ln C_n^{n/2} + 1 < n$. Таким образом, при малых s получаем оценку хроматического числа величиной порядка n . В условиях теоремы 2, доказательство которой привело нас к катарсису, это почти всегда хуже, чем результат теоремы 2, ведь при s , сильно меньших корня из n , величина порядка s^2 сильно меньше, чем величина порядка n . С другой стороны, новый результат тоже служит во многих случаях усилением олимпиадного. В самом деле, мы помним, что $2C_{2s+1}^s > 2^{2s+1}/(2s+2)$. Пусть, например, $s > \log_2 n$. Тогда ввиду монотонности роста дроби $2^{2s+1}/(2s+2)$ имеем

$$\frac{2^{2s+1}}{2s+2} > \frac{2n^2}{2\log_2 n + 2} = \frac{n^2}{\log_2 n + 1},$$

и это куда как больше, нежели $3n$ или типа того. Конечно, мы нигде не доказывали, что s порядка логарифма n является «достаточно маленьким» по сравнению с n в том смысле, в каком это нужно было в начале текущего абзаца, но тут уж читателю предлагается просто поверить.

Если s больше, чем граница из теоремы 2, т. е. s растёт по порядку быстрее корня из n , то теорема 2 перестаёт работать, а величина $|V|/\alpha$

становится заметно большей. Мы не будем здесь приводить какие-либо подробности, отсылая заинтересованного читателя к оригинальной статье [16]. Скажем лишь, что оценка из нынешнего раздела в этом режиме очень существенно улучшает олимпиадную.

Завершая заметку, скажем, что изучение графов $J(n, s)$ и их различных обобщений глубоко мотивировано вопросами теории кодирования, теории Рамсея, комбинаторной геометрии и др. Например, хроматические числа этих графов связаны со знаменитой задачей о хроматическом числе пространства (см. [17, 18]), с не менее знаменитой проблемой Борсука (см. [10, 19]) и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] LXXXV Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. М.: МЦНМО, 2022.
- [2] Райгородский А. М. Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.
- [3] Райгородский А. М. Модели случайных графов. М.: МЦНМО, 2016.
- [4] Райгородский А. М. Графы с большим хроматическим числом и большим обхватом // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 228–237.
- [5] Райгородский А. М. Задачи о пересечениях множеств // Квант. 2016. № 5–6. С. 2–5.
- [6] Бобу А. В., Куприянов А. Э. О хроматических числах дистанционных графов, близких к кнезеровским // Проблемы передачи информации. 2016. Т. 52, № 4. С. 64–83.
- [7] Райгородский А. М. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2011.
- [8] Райгородский А. М. Гипотеза Кнезера и топологические методы в комбинаторике // Квант. 2011. № 1. С. 7–16.
- [9] Райгородский А. М. Об одной «олимпиадной» задаче про графы // Квант. 2017. № 2. С. 2–8.
- [10] Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.
- [11] Райгородский А. М. Задачи о раскрасках. М.: МЦНМО, 2020.
- [12] Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
- [13] Райгородский А. М. Математика раскрасок // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 99–127.

- [14] Райгородский А. М. Одна задача о раскраске // Квант. 2019. № 8. С. 15–22.
- [15] Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
- [16] Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S. Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs // European J. Combin. 2019. Vol. 79. P. 228–236.
- [17] Райгородский А. М. Хроматические числа. М.: МЦНМО, 2015.
- [18] Райгородский А., Воронов В., Савватеев А. Прорыв в задаче о раскраске плоскости // Квант. 2018. № 11. С. 2–9.
- [19] Райгородский А. М. Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2015.

Инварианты изображений графов на плоскости

А. Б. Скопенков

Мы приводим упрощённое изложение некоторых классических и современных результатов об изображениях графов на плоскости. Материал подобран так, чтобы продемонстрировать яркие недавние многомерные результаты, находящиеся на стыке геометрии, комбинаторики и топологии. В частности, мы определяем *инвариант самопересечения* изображения графа на плоскости и строим алгоритм распознавания планарности. Формулировки и доказательства доступны неспециалистам. Поэтому большую часть данного обзора можно изучить до учебников по алгебраической топологии и использовать в качестве введения в алгебраическую топологию, мотивированного алгоритмическими, комбинаторными и топологическими задачами.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	75
§ 1. Алгоритмические результаты о планарности графов	80
1.1. Линейная вложимость графов	81
1.2. Кусочно-линейная вложимость графов	82
1.3. Число пересечения для ломаных на плоскости	84
1.4. Инвариант самопересечения изображения графа	87
1.5. Полиномиальный алгоритм распознавания планарности	89
1.6. Алгоритм распознавания изотопности вложений	95
1.7. Приложение: некоторые детали к § 1	98
§ 2. Неотъемлемые пересечения для плоскости	101
2.1. Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях	101
2.2. Топологическая теорема о двукратных пересечениях	103
2.3. Топологическая теорема о многократных пересечениях	105
2.4. Приложение: некоторые детали к § 2	107
§ 3. Дополнение: многомерные обобщения	108
3.1. Линейные теоремы о неотъемлемых пересечениях	108
3.2. Топологические теоремы о двукратных пересечениях	110
3.3. Топологические гипотезы о многократных пересечениях	111
3.4. План доказательства теорем 3.3.2.b и 3.3.5.b	114

3.5. Определения и примеры гиперграфов и комплексов	115
3.6. Симплициальная вложимость гиперграфов и комплексов . .	117
3.7. Кусочно-линейная вложимость гиперграфов и комплексов . .	118
3.8. Алгоритмические результаты о PL-вложимости	120
Список литературы	122

ВВЕДЕНИЕ

ЧЕМ ЭТОТ ОБЗОР МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСЕН

Мы приводим упрощённое изложение некоторых классических и современных результатов об изображении графов на плоскости (§ 1, § 2). Материал подобран так, чтобы продемонстрировать некоторые яркие недавние многомерные результаты, находящиеся на стыке геометрии, комбинаторики и топологии (§ 3).

Мы демонстрируем связь между непланарностью графа K_5 (полного графа на пяти вершинах) результатами о пересечениях ломаных на плоскости в терминах их *внутренностей по модулю 2* (более конкретно, топологическими теоремами Радона и Тверберга для плоскости 2.2.2 и 2.3.2). Недавние контрпримеры к топологической гипотезе Тверберга 3.3.1 (о кратных пересечениях отображений симплекса в $\mathbb{R}^d$) используют многомерное r -кратное обобщение этой связи (это связь между r -кратной гипотезой ван Кампена — Флореса 3.3.4 и гипотезой 3.3.1).

Напомним, что инварианты узлов изначально были определены с помощью *представлений фундаментальной группы* в начале двадцатого века. Другие инварианты были определены ещё менее элементарным образом в конце двадцатого века. Элементарное изложение инвариантов узлов с помощью плоских диаграмм (начатое Дж. Конвеем во второй половине двадцатого века) привело к всплеску интереса к теории узлов и сделало её частью комбинаторики, а не только топологии.

Аналогично мы приводим элементарные формулировки и доказательства, не упоминающие конфигурационных пространств и когомологических препятствий. Однако основное содержание этого текста — *введение в алгебраическую топологию, мотивированное алгоритмическими, комбинаторными и геометрическими задачами*. Мы полагаем, что изложение простых приложений топологических методов на элементарном языке сделает эти методы более доступными (несмотря на то, что в [MTW10, § 1] это названо «детопологизацией»). Подобное введение в предмет может быть изучено перед учебниками по алгеб-

раической топологии. Существуют и учебники, написанные в духе данной статьи: см., например, [Sk20, Sk].

Более конкретно, крайне полезно открыть или переосмыслить рассуждения из теории гомотопий в терминах инвариантов, определённых через пересечения или прообразы¹⁾. В данном обзоре мы излагаем в терминах кратных пересечений те рассуждения, которые часто излагаются с использованием менее элементарного языка теории гомотопий.

Никаких предварительных знаний алгебраической топологии от читателя не требуется. Важные идеи вводятся на простых частных случаях, свободных от технических деталей, а затем обобщаются. Рассмотрение первого нетривиального частного случая широко применялось классиками, например, В. И. Арнольдом. Таким образом, данный обзор доступен для старшеклассников, студентов и математиков, не специализирующихся в данной области.

СОДЕРЖАНИЕ ОБЗОРА

Оба раздела § 1 и § 2 подводят читателя к переднему краю науки.

В § 1 мы приводим полиномиальный алгоритм распознавания планарности графа (§ 1.5) вместе со всеми необходимыми определениями, а также некоторыми мотивировками и предварительными сведениями (§§ 1.1–1.4). Этот алгоритм, наряду с соответствующим ему критерием планарности (утверждение 1.5.8) и простым доказательством непланарности графа K_5 (§ 1.4), представляет интерес, поскольку допускает обобщение на высшие размерности и кратные пересечения (теоремы 3.1.2, 3.2.2, 3.8.1, 3.8.3, см. также гипотезы 3.1.4 и 3.3.4).

В § 2 мы излагаем в упрощённом виде результаты о кратных пересечениях ломаных на плоскости в терминах их *внутренностей по модулю 2* (топологические теоремы Радона и Тверберга 2.2.2 и 2.3.2). Есть надежда, что обобщение идей из § 1.4, § 2.2, [ST17, леммы 6 и 7] может дать «количественные» версии теорем Тверберга 2.3.2, 3.1.3, см. [Sk18, § 2.3.3].

В § 3 показано, как элементарные факты из § 1 и § 2 иллюстрируют некоторые яркие недавние результаты в старших размерностях. Подробное описание этих недавних результатов выходит за рамки данного обзора. В § 3.1–3.3 мы формулируем классические и современные результаты и гипотезы о полных гиперграфах (поскольку результа-

¹⁾ Примерами таких определений могут служить определение степени отображения [Ma03, § 2.4], [Sk20, § 8] и определение инварианта Хопфа через зацепление (т. е. через пересечение) [Sk20, § 8].

ты касаются только *полных* гиперграфов, мы приводим упрощённые формулировки, не использующие общего понятия гиперграфа). Эти результаты обобщают непланарность графа K_5 (утверждение 1.1.1.a и теорема 1.4.1) и результаты о пересечениях внутренностей ломаных по модулю 2 (линейные и топологические теоремы Радона и Тверберга на плоскости 2.1.1, 2.1.4, 2.2.2, 2.3.2). В § 3.7 мы формулируем современные алгоритмические результаты о реализуемости произвольных гиперграфов. Эти результаты обобщают утверждение 1.2.2.b.

Главным понятием данного обзора, связывающим § 1 и § 2, являются *инварианты самопересечения* (например, числа ван Кампена и Радона, определённые в § 1.4, § 2.2 и принимающие значения в вычетах по модулю 2). Когомологические препятствия, являющиеся обобщениями этих инвариантов, определяются и используются для получения элементарных формулировок и доказательств упомянутых выше результатов из § 1. Приложения и дальнейшие обобщения см. в [Sk16, § 4], [Sk16', ST17]. Об инвариантах плоских кривых и каустиках см. [Ar95] и ссылки в этой книге.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.0.1 (обобщения в пяти различных направлениях). Главные результаты данного обзора могут быть получены из самых простых из них (линейных теорем ван Кампена — Флореса и Радона для плоскости 1.1.1.a и 2.1.1) путём обобщения в пяти различных направлениях. Таким образом, эти результаты могут быть естественным образом помечены векторами длины 5.

Во-первых, результат может гарантировать пересечение симплексов различных размерностей или же одной размерности. (Такова связь § 1 с § 2.) Впрочем, это связь между парами сходных результатов, а не между частным случаем и обобщением.

Во-вторых, «качественный» результат о существовании пересечения обобщается до «количественного» результата о нечётности числа пересечений в общем положении. (Такова связь утверждения 1.1.1.a с утверждением 1.1.1.b и т. д.)

В-третьих, линейный результат обобщается до топологического результата, т. е. — в случае данной статьи — кусочно-линейного результата. (Такова связь утверждения 1.1.1.a,b с теоремой 1.4.1 и леммой 1.4.3 и т. д.)

В-четвёртых, результат о двукратных пересечениях обобщается на многократные пересечения. (Такова связь утверждения 1.1.1.a и теоремы 1.4.1 с теоремами 2.1.4 и 2.3.2 и т. д. Заметим, что версия с r -кратными пересечениями может оказаться неверной, если r не является степенью простого.)

В-пятых, результат для плоскости обобщается на высшие размерности. (Такова связь § 1 и § 2 с § 3.)

См. также [KRR+].

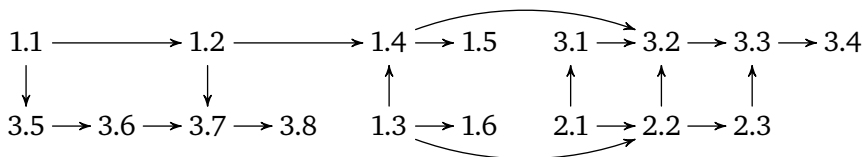
СТРУКТУРА ОБЗОРА

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: в размерности 2, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством*²⁾. В таких случаях для доказательства утверждения может потребоваться дальнейший материал. Это всегда явно оговаривается.

Основные результаты называются «теоремами», важные вспомогательные результаты называются «леммами», менее важные результаты, на которые нет ссылок из других разделов, называются «утверждениями». Ещё менее важный или широко известный материал приведён в приложениях. Вы можете рассматривать утверждения как задачи для самостоятельного решения. Освоение материала путём решения задач характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьёзного изучения математики.

Мы рекомендуем изучать разделы в любом порядке, согласованном с диаграммой ниже.



ИСТОРИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ

Все результаты данного обзора известны.

Исторический обзор, больше мотивировок и доказательств, обсуждение родственных задач и обобщений см. в обзорах [BBZ, Zi11, Sk16,

²⁾ Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только после продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

BZ16, Sh18] (к § 2 и § 3.1–§ 3.3) и [Sk06, Sk14], [MTW, § 1], [Sk, § 5 «Реализуемость гиперграфов и комплексов»] (к § 1 и § 3.7). Обсуждение этих родственных задач и обобщений выходит за рамки данного обзора.

Мы не приводим ссылок на первоисточники по тривиальным или стандартным результатам (таким как утверждения 1.1.1 и 2.3.1), а также по классическим результатам, ссылки на которые есть в упомянутых выше обзорах (например, по теоремам Фари и Радона 1.2.1, 2.1.1, 3.1.1). Мы даём ссылки на современные первоисточники, начиная с [HT74, BV79]. Также мы ссылаемся на простые доказательства (не являющиеся первоисточниками), которые могут быть полезны читателю (например, в связи с данным обзором).

Изложение полиномиального алгоритма распознавания планарности (§ 1.5) новое. Мы приводим элементарную формулировку соответствующего критерия планарности (утверждение 1.5.8). Мы не требуем от читателя знания теории кохомологий, но показываем, как некоторые понятия этой теории естественным образом появляются при изучении планарности графов. Ср. с [Fo04], [MTW, приложение D], [Sc13, § 1.4.2].

Элементарная формулировка топологической теоремы Радона (§ 2.2) в духе [Sc04, SZ05], по-видимому, общеизвестна. Элементарная формулировка топологической теоремы Тверберга для плоскости 2.3.2 дана Т. Шенборном и Г. Циглером [Sc04, SZ05].

Статья написана по материалам спецкурсов и докладов на мехмате МГУ, на ФИБТ МФТИ, в НМУ, на матфаке ВШЭ, в летней школе «Современная математика» (до 2015 г.), на Летней конференции Турнира городов и Московской выездной олимпиадной школе. Статья основана на обзоре [Sk18], при переводе которого сделаны сокращения, многочисленные мелкие улучшения в § 1 и в § 2, а также существенные улучшения в § 3.

СОГЛАШЕНИЯ

Под k точками на плоскости (в пространстве) подразумевается k -элементное подмножество плоскости, т. е., считается, что эти k точек различны. Мы часто обозначаем точки просто числами, а не буквами с числовыми индексами.

Для конечного множества S мы обозначаем через $|S|$ количество элементов в множестве S , а через $|S|_2$ чётность количества элементов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю С. Аввакумова, Э. Алкина, П. Благоевича, И. Богданова, У. Вагнера, Р. Живалевича, Т. Зайцева, А. Еннэ, Р. Фулека, Р. Карасева,

Ю. Макарычева, И. Матушека, А. Мирошникова, Е. Морозова, А. Рябичева, М. Скопенкова, Г. Соколова, М. Танцера, Г. Челнокова и М. Шефера за полезные обсуждения. Благодарю Е. Морозова за перевод части текста на русский язык. Благодарю И. Матушека, М. Танцера, У. Вагнера и М. Скопенкова за разрешение использовать рисунки и таблицу из их статей. Компьютерные версии многих рисунков подготовлены издательством МЦНМО.

§ 1. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПЛАНАРНОСТИ ГРАФОВ

Напомним строгие определения некоторых понятий теории графов.

(Конечным неориентированным) **графом** (V, E) называется конечное множество V вместе с набором $E \subset \binom{V}{2}$ его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар несовпадающих элементов). (Общепринятый термин для этого понятия — *граф без петель и кратных рёбер* или *простой граф*.)

Элементы данного конечного множества называются **вершинами**. Мы считаем, что $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$, если не оговорено другое.

Пары вершин из E называются **рёбрами**. Ребро, соединяющее вершины i и j , обозначается через ij (но не через (i, j)), чтобы избежать путаницы с упорядоченной парой вершин).

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n . Через $K_{m,n}$ обозначается *полный двудольный граф* с долями из m и из n вершин: в нём соединены рёбрами все пары вершин из разных долей и только они (рис. 1.0.1).

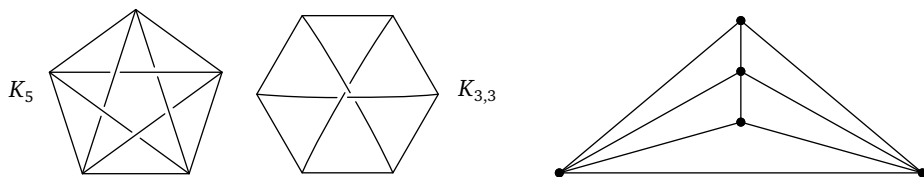


Рис. 1.0.1. Слева: непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$.

Справа: изображение графа K_5 без одного из рёбер на плоскости

Говоря нестрого, граф реализуем на плоскости, если его можно «без самопересечений» нарисовать на плоскости. В п. 1.1 и 1.2 мы представляем две формализации этого понятия: линейную вложимость и планарность (т. е. кусочно-линейную вложимость). (Они оказываются эк-

вивалентными по теореме Фари 1.2.1; их многомерные версии не эквивалентны, см. [Sk, замечание 5.5.1.a].) Важны обе формализации. Они вводятся независимо друг от друга, поэтому п. 1.1 формально не используется далее (кроме простого утверждения 1.1.1.b, облегчающего доказательство леммы 1.4.3, и замечания 1.1.4). Однако перед более сложным изучением планарности может быть полезно изучить линейную вложимость.

1.1. ЛИНЕЙНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ ГРАФОВ

УТВЕРЖДЕНИЕ³⁾ 1.1.1. (a) Из любых 5 точек плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки первой пары, пересекает отрезок, соединяющий точки второй пары.

(b) Если среди 5 точек плоскости никакие три не лежат на прямой, то количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные точки, нечётно.

(c) Для любых 6 точек плоскости, разбитых на две тройки, существуют два пересекающихся отрезка, не имеющих общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

Утверждения 1.1.1.a,b легко доказываются с помощью рассмотрения выпуклой оболочки точек (см. определение в § 2.1). В п. (c) аналогичный перебор слишком велик, поэтому лучше использовать методы из доказательств лемм 1.4.3 и 1.5.6.

ТЕОРЕМА 1.1.2 (общего положения; см. доказательство в § 1.7). Для любого n существуют такие n точек в трёхмерном пространстве, что отрезки, их соединяющие, не имеют общих внутренних точек.

Граф (V, E) называется **линейно вложимым в плоскость**, если существует $|V|$ точек на плоскости, соответствующих вершинам, таких, что никакой отрезок, соединяющий пару (точек) из E , не пересекает внутренность никакого другого такого отрезка⁴⁾.

Следующие результаты являются классическими.

- Граф K_4 и даже граф K_5 без ребра линейно вложимы в плоскость (рис. 1.0.1 справа).

³⁾ Это «линейные» версии непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$. Но доказываются они проще, ибо не требуют леммы о чётности 1.3.2.b.

⁴⁾ Мы не требуем, чтобы никакая изолированная вершина не лежала ни на одном из отрезков, потому что этого всегда можно добиться.

- Ни граф K_5 , ни граф $K_{3,3}$ не вложим линейно в плоскость (утверждение 1.1.1.а,с).
- Любой граф линейно вложим в трёхмерное пространство (теорема общего положения 1.1.2; линейная вложимость в трёхмерное пространство определяется аналогично случаю плоскости).

Критерий линейной вложимости графа в плоскость следует из теоремы Фари 1.2.1 и любого критерия планарности (например, теоремы Куратовского 1.2.3.е).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.3 [Та, гл. 1 и 6]. *Существует алгоритм распознавания линейной вложимости графов в плоскость, линейный по количеству вершин n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.4. (а) Строгое определение алгоритма непростое, поэтому мы не приводим его. Этот текст можно изучать, основываясь на интуитивном представлении об алгоритме. Более аккуратно, сформулированное утверждение означает, что существует алгоритм вычисления функции из множества всех графов в множество $\{0, 1\}$, которая сопоставляет графу 0, если он линейно вложим в плоскость, и 1 иначе. Аналогично формализуются другие утверждения об алгоритмах в этом тексте.

(б) Линейность алгоритма означает существование такого числа C , что для любого графа число шагов в алгоритме не превосходит Cn . Поскольку для плоского графа с n вершинами и e рёбрами выполнено $e \leq 3n - 6$ и поскольку существуют графы, линейно вложимые в плоскость, для которых $e = 3n - 6$, «сложность» по количеству рёбер «такая же», как по количеству вершин.

(с) Существование алгоритма из утверждения 1.1.3 следует из того, что для любого n существует алгоритм построения всех n -элементных множеств на плоскости с точностью до *изотопности*. Два подмножества $L, M \subset \mathbb{R}^2$ называются *изотопными*, если существует биекция $f: L \rightarrow M$ такая, что точки $A, B, C, D \in L$ образуют выпуклый четырёхугольник тогда и только тогда, когда точки $f(A), f(B), f(C), f(D) \in M$ образуют выпуклый четырёхугольник.

Существование линейного алгоритма следует из теоремы Фари 1.2.1 и утверждения 1.2.2.

1.2. Кусочно-линейная вложимость графов

Граф (V, E) называется **планарным** (или кусочно-линейно вложимым в плоскость), если на плоскости существует

- набор $|V|$ точек, соответствующих вершинам графа, и

- набор несамопересекающихся ломаных, каждая из которых соединяет принадлежащую E пару точек, причём никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной⁵⁾.

Например, графы K_5 и $K_{3,3}$ (рис. 1.0.1) не планарны по теореме 1.4.1 и замечанию 1.4.4.b. Заметим, что обычно приводимый вывод непланарности графа K_5 из формулы Эйлера близок к порочному кругу, см. [Sk20, Замечание в решении задачи 1.3.2.a].

Следующий результат показывает, что любой планарный граф можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что каждое ребро будет отрезком.

ТЕОРЕМА 1.2.1 (Фари). *Если граф планарен, то он линейно вложим в плоскость.*

Историческая справка (включая перечисление математиков, которым приписывается данный результат) и доказательства содержатся в [Та, гл. 6].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2.2. *Существует алгоритм распознавания планарности графов, линейный по количеству вершин n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.3. (а) Алгоритмы распознавания планарности графов получаются

- из утверждения 1.1.3 и теоремы Фари 1.2.1, или
- из приведённой в (е) теоремы Куратовского (см. детали в [Та, гл. 1 и 6]), или
- при помощи утолщений [Sk20, § 1].

Однако эти алгоритмы медленно работают, т. е. являются «экспоненциальными» (при больших n имеют более, чем 2^n шагов для графов с n вершинами) или «галактическими» (см. [Bi21, замечание 1.2b]).

(б) Алгоритм из утверждения 1.2.2 основан на том, что

- граф планарен тогда и только тогда, когда каждый его блок (компонента трёхсвязности) планарен;
- трёхсвязный граф допускает не более одного вложения в плоскость.

См. детали в [НТ74] и (более простое изложение) в [ВМ04].

⁵⁾ Тогда любые две ломаные либо не пересекаются, либо пересекаются только по их общей концевой вершине. Мы не требуем, чтобы никакая изолированная вершина не лежала ни на одном из отрезков, потому что этого всегда можно добиться. См. эквивалентное определение планарности в начале п. 1.5.1.

(с) В § 1.5 приводится алгоритм распознавания планарности графов, который (в отличие от алгоритмов из (а, б)) обобщается

- на высшие размерности (ср. с теоремой 3.8.1);
- на целочисленные и по модулю 2 вложения графов в поверхности (см. [Sc13, FK19, Bi21]; исторические комментарии см. в [Sc13, замечание после теоремы 1.18] и [Sk18, замечание 1.6.6]);
- на многократные пересечения (см. [MW15, AMS+, MW16, Sk17] и обзор [Sk16]).

Этот алгоритм полиномиален по количеству вершин n . (Полиномиальность означает существование таких чисел C и k , что для любого графа число шагов в алгоритме не превосходит Cn^k .) Построение алгоритма использует эквивалентность планарности и разрешимости некоторой системы линейных уравнений над $\mathbb{Z}_2$ (предложение 1.5.8 ниже). А для распознавания разрешимости системы N линейных уравнений с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ с не более чем N неизвестными существует полиномиальный по N алгоритм (который строится с помощью исключения неизвестных, см. детали в [CLR, Vi02]).

(d) Определение гомеоморфности графов приведено, например, в [GDI, § 2.4], [Sk20, п. 5.3 бумажной версии или замечание 5.2.1.a электронной]. Граф планарен тогда и только тогда, когда некоторый граф, гомеоморфный ему, линейно вложим в плоскость⁶⁾.

(е) (ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО) *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 1.0.1).*

Историческая справка (включая перечисление математиков, которым приписывается данный результат) и доказательства содержатся в [Th81]. Сравнительно простое доказательство этой теоремы, предложенное Ю. Макарычевым, приведено, например, в [Ma97], [GDI, § 2.9].

1.3. Число пересечения для ломаных на плоскости

Интересные приложения этого пункта приведены далее; приложения к *теореме Жордана* и алгоритмическим вопросам приведены в [Sk20, § 1.4] (теорема Жордана там и сформулирована). Изучение этого пункта можно начать с доказательства утверждений 1.3.4, которые ярко иллюстрируют нетривиальность материала.

⁶⁾ Действительно, если граф планарен, то каждое ребро — это ломаная. Отметив вершины каждой ломаной как вершины нового графа, а звенья каждой ломаной как ребра нового графа, получим требуемое. Доказательство в другую сторону аналогично.

Будем говорить, что несколько точек плоскости **находятся в общем положении**, если никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3.1. *Если вершины двух плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в конечном числе точек.*

ЛЕММА 1.3.2 (о чётности). (а) *Если 6 вершин двух треугольников на плоскости находятся в общем положении, то контуры этих треугольников пересекаются в чётном числе точек.*

(б) *Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в чётном числе точек⁷⁾.*

Доказательство п. (а). Треугольник разбивает плоскость. (Этот факт, в отличие от кусочно-линейной теоремы Жордана, доказывается без использования леммы о чётности.) Ломаная, составленная из сторон одного треугольника заходит *внутри* другого треугольника столько же раз, сколько выходит *наружу*. (Поэтому если одна из ломаных является треугольником, то п. (б) может быть доказан так же, как п. (а).) $\square$

Доказательство п. (б). Докажем лемму при помощи индукции по сумме количеств звеньев ломаных. База — п. (а). В доказательстве шага обозначим через $B_1 \dots B_k$ замкнутую ломаную с последовательными вершинами $B_1, \dots, B_k$. Можно считать, что одна из ломаных не является треугольником. Обозначим её через $A_1 \dots A_n$, а вторую ломаную

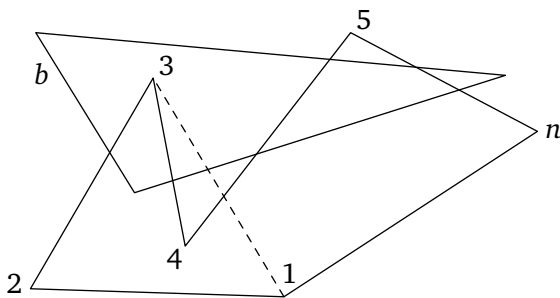


Рис. 1.3.1. Доказательство леммы о чётности 1.3.2.б

⁷⁾ Это нетривиально, поскольку ломаные могут иметь самопересечения и поскольку теорема Жордана нетривиальна. Выводить лемму о чётности из теоремы Жордана или формулы Эйлера неразумно, ибо их доказательства используют лемму о чётности или близкое утверждение.

Будьте осторожны: утверждение [Pr04, задача 1.2] неверно для «восьмёрки» и треугольника, проходящего через точку самопересечения «восьмёрки».

через b . Тогда (рис. 1.3.1)

$$|A_1 A_2 A_3 \dots A_n \cap b| \equiv \frac{|A_1 A_2 A_3 \cap b| + |A_1 A_3 A_4 \dots A_n \cap b|}{2} \equiv 0.$$

Здесь второе сравнение следует из (базы и) предположения индукции. $\square$

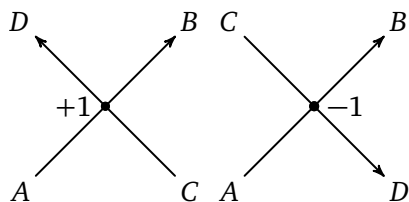


Рис. 1.3.2. Знак точки пересечения

Пусть A, B, C, D — точки на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. **Знаком** точки пересечения ориентированных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на плоскости назовём $+1$, если обход ABC происходит по часовой стрелке, и -1 в противном случае (рис. 1.3.2 и 1.3.3).

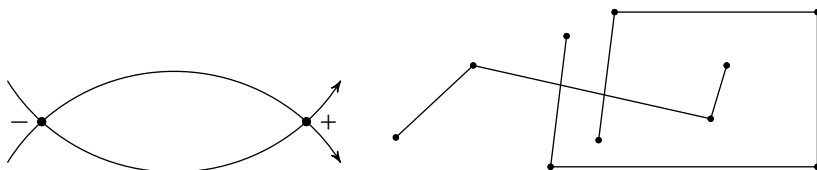


Рис. 1.3.3. Две ломаные на плоскости, пересекающиеся в чётном числе точек, сумма знаков которых равна нулю (слева) и не равна нулю (справа)

Лемма 1.3.3 (о тривиальности). Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения ломаных равна нулю.

Эта лемма доказывается аналогично лемме о чётности 1.3.2.

Оставшаяся часть этого пункта не используется далее.

1.3.4. (а) На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 жёлтых. Тогда количество всех точек пересечения красных отрезков (т. е. отрезков, соединяющих красные точки) с жёлтыми отрезками чётно.

(б) На плоскости имеется 14 точек общего положения: 7 красных и 7 жёлтых. По красным отрезкам течёт ток. Сумма токов, входящих в любую красную точку, равна сумме токов, из неё выходящих. По жёлтым отрезкам течёт ток с выполнением того же правила Кирхгофа.

Ориентируем каждый красный или жёлтый отрезок направлением тока, текущего по нему. В каждой точке пересечения ориентированных красного и жёлтого отрезков поставим произведение токов, текущих по этим отрезкам, на знак точки пересечения. Тогда сумма всех поставленных чисел (т. е. *поток красного тока через жёлтый*) равна нулю.

Пункт (а) можно доказать напрямую или вывести из замечания 1.3.5.а (которое выводится из леммы о чётности 1.3.2.а). Пункт (б) выводится аналогично п. (а) из того, что для $3 + 3$ точек поток красного тока через жёлтый равен нулю. (Этот частный случай леммы о тривиальности 1.3.3 справедлив, поскольку сила тока на каждом треугольнике постоянна, а знаки точек пересечения чередуются, поэтому сумма равна нулю.)

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.5 (обобщение на циклы). (а) Верно следующее обобщение леммы о чётности 1.3.2 и предложения 1.3.4.а. Назовём *1-циклом* (по модулю 2) конечный набор отрезков на плоскости, такой, что каждая точка плоскости является концом чётного числа отрезков набора. Тогда любые два 1-цикла, все концы отрезков которых находятся в общем положении, пересекаются в чётном числе точек. Доказательство аналогично вышеприведённому доказательству леммы о чётности 1.3.2; используется индукция по минимальному количеству отрезков в 1-цикле.

(б) Назовём *2-циклом* (по модулю 2) конечный набор треугольников на плоскости, такой, что любой отрезок на плоскости является стороной чётного числа треугольников набора. Тогда если некоторая точка плоскости находится в общем положении с вершинами некоторого 2-цикла, то она принадлежит чётному числу треугольников, образующих 2-цикл.

1.4. ИНВАРИАНТ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГРАФА

Будем рассматривать такие изображения графа на плоскости, при которых рёбра изображаются ломаными и допускаются самопересечения. Формализуем это пояснение для графа K_n (формализация для произвольных графов приведена в начале п. 1.5.1).

Кусочно-линейным (PL-)отображением $f: K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K_n в плоскость назовём набор $\binom{n}{2}$ (незамкнутых) ломаных, попарно соединяющих некоторые n точек на плоскости. **Образом** $f(\sigma)$ **ребра** σ назовём ломаную, соответствующую ребру σ . **Образом набора рёбер** назовём объединение образов всех рёбер этого набора.

ТЕОРЕМА 1.4.1 (ср. с утверждением 1.1.1.a). *Для любого PL-отображения графа K_5 в плоскость найдутся два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

Эта теорема выводится из её «количественной версии»: при «почти любом» изображении графа K_5 на плоскости количество точек пересечения несмежных рёбер нечётно. Подумайте, как формализовать «почти любом», и сравните с нижеприведённой формализацией (лемма 1.4.3). Формально, теорема 1.4.1 выводится из леммы 1.4.3 с помощью одной из версий результата [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации], ср. с замечанием 3.2.3.b.

Пусть $f: K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторое PL-отображение. Оно называется PL-отображением **общего положения**, если все вершины ломаных находятся в общем положении. Тогда по утверждению 1.3.1 образы любых двух несмежных рёбер пересекаются в конечном числе точек. Назовём **числом ван Кампена** (или инвариантом самопересечения) $v(f)$ чётность числа точек пересечения образов несмежных рёбер.

ПРИМЕР 1.4.2. Выпуклый пятиугольник и его диагонали образуют такое PL-отображение общего положения $f: K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$. Выпуклый четырёхугольник и его диагонали образуют такое отображение $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 1$. Треугольник и точка внутри него образуют такое отображение $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, что $v(f) = 0$. Ср. с теоремой 2.1.1 и утверждением 2.1.2.

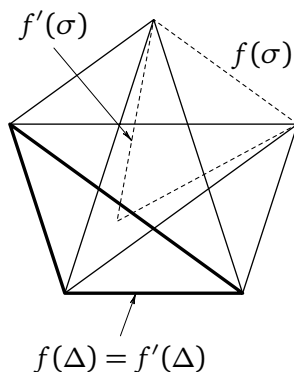
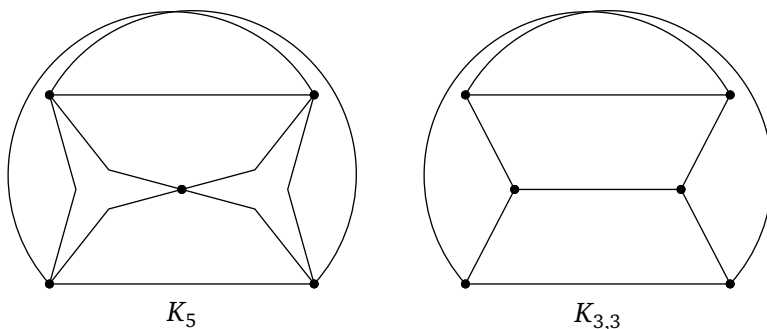
ЛЕММА 1.4.3 (ср. с утверждением 1.1.1.b). *Для любого PL-отображения общего положения графа K_5 в плоскость число ван Кампена нечётно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду утверждения 1.1.1.b достаточно доказать, что $v(f) = v(f')$ для любых двух PL-отображений общего положения $f, f': K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, отличающихся только на внутренности одного ребра σ , причём $f\sigma$ — отрезок (рис. 1.4.1). Рёбра графа K_5 , несмежные с σ , образуют цикл (именно это свойство графа K_5 необходимо для доказательства). Обозначим этот цикл через Δ . Тогда

$$v(f) - v(f') = \sum_{\tau: \sigma \cap \tau = \emptyset} (|f\sigma \cap f\tau|_2 - |f'\sigma \cap f'\tau|_2) = |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap f\Delta|_2 = 0.$$

Здесь последнее равенство справедливо по лемме о чётности 1.3.2.b. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.4. (a) Пусть $N \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f: N \rightarrow Y$ называется **непрерывным**, если для любых $x \in N$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $y \in N$, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$,

Рис. 1.4.1. Независимость $v(f)$ от f Рис. 1.4.2. «Почти-вложение» $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Как правило, мы пропускаем слово «непрерывный» для отображений.

Верен аналог теоремы 1.4.1, полученный заменой «PL» на «непрерывного».

(b) Верны аналоги теоремы 1.4.1 и леммы 1.4.3, полученные заменой графа K_5 на граф $K_{3,3}$, ср. с замечанием 1.7.3.

(c) Непланарность графа $K_{3,3}$ вытекает также из теоремы 1.4.1 и рис. 1.4.2 [Sk03].

1.5. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ПЛАНАРНОСТИ

1.5.1. РАССТАНОВКА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Полиномиальный алгоритм распознавания планарности получается из критерия ван Кампена — Ханани — Татта планарности графов (утверждение 1.5.8). Его формулировка формально независима от предыдущего материала. Однако мы показываем, как придумать

этот критерий. Мы рассмотрим естественный объект (расстановку пересечений) для любого «хорошего» (*PL-общего положения*) отображения графа в плоскость (п. 1.5.1). Далее мы исследуем, как этот объект зависит от отображения (утверждение 1.5.4). Так мы получим из этого объекта препятствие к планарности, уже не зависящее от отображения. Линейно-алгебраическая (=когомологическая) интерпретация этого препятствия и даёт нужный критерий планарности.

Линейным отображением $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа $K = (V, E)$ в плоскость назовём отображение $f: V \rightarrow \mathbb{R}^2$. Образом $f(AB)$ ребра AB графа назовём отрезок $f(A)f(B)$. Назовём **PL-отображением** $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость набор (незамкнутых) ломаных, концы которых соответствуют вершинам графа и при этом сами ломаные — рёбрам графа. (PL-отображение графа K в плоскость — «то же самое», что линейное отображение в плоскость некоторого графа, гомеоморфного графу K .) Образ ребра и набора рёбер определяется аналогично случаю $K = K_n$ (п. 1.4). На этом языке граф планарен, если существует его PL-отображение в плоскость, для которого образы вершин попарно различны, образы рёбер (=ломаные) несамопересекающиеся и никакой образ ребра не пересекает внутренности никакого другого образа ребра.

Линейное отображение графа в плоскость называется *линейным отображением общего положения*, если образы вершин находятся в общем положении; PL-отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K называется PL-отображением **общего положения**, если существует граф H , гомеоморфный графу K , и линейное отображение общего положения графа H в плоскость, «соответствующее» отображению f .

Граф называется $\mathbb{Z}_2$ -**планарным**, если существует такое его PL-отображение общего положения в плоскость, при котором образы любых двух несмежных рёбер пересекаются в чётном числе точек.

Например, из леммы 1.4.3 следует, что граф K_5 не является $\mathbb{Z}_2$ -планарным. Аналогично граф $K_{3,3}$ не является $\mathbb{Z}_2$ -планарным (см. замечание 1.4.4.b). Поэтому и никакой граф K , гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, не является $\mathbb{Z}_2$ -планарным (ибо любое PL отображение $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ соответствует некоторому PL-отображению $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ или $K_{3,3} \rightarrow \mathbb{R}^2$). Из этого факта и теоремы Куратовского 1.2.3.e вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.5.1 (Ханани — Татта; ср. с [Sk18, теоремы 2.4.2a и 3.3.4]).
*Граф планарен тогда и только тогда, когда он $\mathbb{Z}_2$ -планарен*⁸⁾.

⁸⁾ Прямой вывод планарности из $\mathbb{Z}_2$ -планарности см. в [Sc13]. Прямой вывод $\mathbb{Z}_2$ -планарности из отсутствия подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$, см. в [Sa91].

Итак, осталось построить алгоритм распознавания $\mathbb{Z}_2$ -планарности.

Пример 1.5.2. Пусть дан граф и произвольное упорядочение его вершин. Расставим его вершины на окружности в заданном порядке. Каждому ребру поставим в соответствие хорду. Получим линейное отображение общего положения графа в плоскость. Для любых несмежных рёбер σ, τ графа количество точек пересечения их образов имеет ту же чётность, что и количество концов ребра σ , лежащих между концами ребра τ .

Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — некоторое PL-отображение общего положения графа K . Возьмём любые два несмежных ребра σ, τ . По утверждению 1.3.1 пересечение $f\sigma \cap f\tau$ состоит из конечного числа точек. Поставим в соответствие паре $\{\sigma, \tau\}$ вычет $|f\sigma \cap f\tau|_2$. Обозначим через K^* множество неупорядоченных пар несмежных рёбер графа K . Назовём полученное отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ **расстановкой (или коциклом) пересечений** (по модулю 2). Мы называем его расстановкой, чтобы не путать с отображением f . Отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ будем отождествлять с подмножеством в K^* (состоящим из пар, переходящих в единицу)⁹⁾.

Замечание 1.5.3. (а) Если граф $\mathbb{Z}_2$ -планарен, то расстановка пересечений нулевая для некоторого PL-отображения общего положения этого графа в плоскость.

(б) (Ср. с примером 1.5.2) Возьмём линейное отображение $f: K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $f(1)f(2) \dots f(n)$ — выпуклый n -угольник. Для $n=4$ и $n=5$ расстановки пересечений соответствуют подмножествам $\{\{13, 24\}\}$ и $\{\{13, 24\}, \{24, 35\}, \{35, 41\}, \{41, 52\}, \{52, 13\}\}$. Получаются следующие частичные матрицы (рёбра упорядочены лексикографически).

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 1 & - \\ - & - & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - \\ - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - & 0 \\ - & - & - & - & 0 & - & 1 & - & 1 & - \\ - & - & - & - & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\ - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 \\ - & 1 & - & 0 & - & - & - & - & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - & - & - & - & 0 & - & - \\ 0 & - & - & 0 & - & - & 0 & - & - & - \\ 0 & - & 1 & - & - & 1 & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - & - \end{pmatrix}.$$

⁹⁾ Отображение $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ можно также понимать как «частичную матрицу», т. е. симметричную расстановку нулей и единиц в тех клетках таблицы размера $e \times e$, которые отвечают парам несмежных рёбер, где e — количество рёбер графа K .

1.5.2. РАССТАНОВКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ДЛЯ РАЗНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Расстановки $K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ можно складывать поточечно (покомпонентно): складываются по модулю 2 образы каждой пары. Это соответствует сложению по модулю 2 (т. е. симметрической разности) подмножеств множества K^* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5.4. (а) *Расстановка пересечений не меняется при преобразованиях Райдемайстера на рис. 1.5.1.I–IV. (Отображение графа изменяется в круге, как на рисунках, а вне этого круга остаётся без изменений. В п. (а) никакие образы рёбер, кроме изображённых, этот круг не пересекают.)*

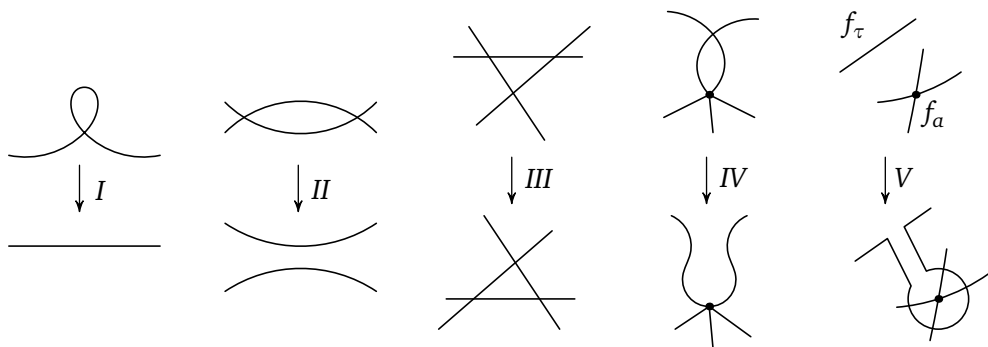


Рис. 1.5.1. Преобразования Райдемайстера для графов в плоскости

(b) Пусть K — граф и вершина A не является концом ребра σ . **Элементарной кограницей** пары (A, σ) называется подмножество $\delta_K(A, \sigma) = \delta(A, \sigma) \subset K^*$, состоящее из всех пар $\{\sigma, \tau\}$ с $\tau \ni A$. Тогда при преобразовании Райдемайстера на рис. 1.5.1. V к расстановке пересечений добавляется $\delta(A, \sigma)$. (В п. (b) образы рёбер, кроме изображённых, могут пересекать круг, в котором делается преобразование. Зато «параллельные» отрезочки проходят «очень близко» друг к другу.)

ПРИМЕР 1.5.5. (а) Имеем

$$\delta_{K_4}(1, 24) = \delta_{K_4}(2, 13) = \delta_{K_4}(3, 24) = \delta_{K_4}(4, 13) = \{\{13, 24\}\}.$$

Итак, расстановка пересечений из замечания 1.5.3.b для $n = 4$ является элементарной кограницей.

(b) Имеем $\delta_{K_5}(3, 12) = \{\{12, 34\}, \{12, 35\}\}$. Поэтому расстановка пересечений из замечания 1.5.3.b для $n = 5$ не является суммой нескольких элементарных кограниц. Действительно, прибавление элементарной кограницы не меняет чётность количества единиц, коих пять.

Назовём расстановки $\nu_1, \nu_2: K^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ (или $\nu_1, \nu_2 \subset K^*$) **когомологичными**, если

$$\nu_1 - \nu_2 = \delta(A_1, \sigma_1) + \dots + \delta(A_k, \sigma_k)$$

для некоторых вершин $A_1, \dots, A_k$ и рёбер $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ (не обязательно различных).

Утверждение 1.5.4.b и следующая лемма 1.5.6 показывают, что когомологичность — это то отношение эквивалентности на расстановках, которое порождают изменения отображения графа в плоскость.

ЛЕММА 1.5.6. *Расстановки пересечений разных PL-отображений общего положения одного графа в плоскость когомологичны¹⁰⁾.*

Доказательство леммы 1.5.6, приведённое ниже, является нетривиальным обобщением доказательства леммы 1.4.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5.7. *Граф $\mathbb{Z}_2$ -планарен тогда и только тогда, когда расстановка пересечений некоторого (или, эквивалентно, любого) его PL-отображения общего положения в плоскость когомологична нулевой расстановке.*

Это следует из леммы 1.5.6 и утверждения 1.5.4.b.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5.8. *Пусть дан граф и произвольная нумерация его вершин. Этот граф планарен тогда и только тогда, когда следующая система линейных уравнений над $\mathbb{Z}_2$ разрешима.*

Каждой паре (A, e) , состоящей из вершины и ребра таких, что $A \notin e$, сопоставим переменную $x_{A,e}$. Для каждой неупорядоченной пары несмежных рёбер σ, τ обозначим через $b_{\sigma,\tau} \in \mathbb{Z}_2$ чётность количества концов ребра σ , номера которых лежат между номерами концов ребра τ . Для любых таких пар (A, e) и $\{\sigma, \tau\}$ положим

$$a_{A,e,\sigma,\tau} = \begin{cases} 1, & \text{если } (A \in \sigma \text{ и } e = \tau) \text{ или } (A \in \tau \text{ и } e = \sigma), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для каждой такой пары $\{\sigma, \tau\}$ выпишем уравнение

$$\sum_{A \notin e} a_{A,e,\sigma,\tau} x_{A,e} = b_{\sigma,\tau}.$$

Это следует из теоремы 1.5.1 Ханани — Татта, примера 1.5.2 и утверждения 1.5.7.

¹⁰⁾ Эта лемма вытекает из следующего факта: любые два отображения общего положения одного графа в плоскость можно перевести друг в друга преобразованиями Райдемайстера на рис. 1.5.1. Впрочем, доказать лемму проще, чем этот факт.

1.5.3. Доказательство леммы 1.5.6

Пусть даны граф K и PL-отображения $f, f' : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения.

Доказательство для частного случая, когда отображения f и f' отличаются только на внутренности одного ребра σ , причём $f\sigma$ — отрезок. Возьмём точку O на плоскости, находящуюся в общем положении относительно множества всех вершин всех ломаных $f\alpha$ и $f'\alpha$ (для всех рёбер α). Для ломаной X в общем положении с циклом $f\sigma \cup f'\sigma$ обозначим

$$X^* := |(f\sigma \cup f'\sigma) \cap X|_2.$$

Докажем, что разность расстановок пересечений $\nu(f)$ для f и $\nu(f')$ для f' равна

$$\nu(f) - \nu(f') = \sum_{B \notin \sigma} Of(B)^* \delta(B, \sigma) = \delta(B_1, \sigma) + \dots + \delta(B_k, \sigma),$$

где $B_1, \dots, B_k$ — все те вершины $B \notin \sigma$, для которых отрезок $Of(B)$ пересекает цикл $f\sigma \cup f'\sigma$ в нечётном числе точек. (Сравните с утверждениями 2.2.1.ab. Набор вершин $B_1, \dots, B_k$ зависит от выбора точки O , но формула справедлива при любом выборе.)

Для любых рёбер α и β , каждое из которых отлично от σ , значения расстановок пересечений $\nu(f)$ и $\nu(f')$ на паре $\{\alpha, \beta\}$ равны.

Для любого ребра PQ , несмежного с σ , значение на паре $\{\sigma, PQ\}$ разности $\nu(f) - \nu(f')$ равно

$$\begin{aligned} (\nu(f) - \nu(f'))_{\{\sigma, PQ\}} &= \\ &= f(PQ)^* \stackrel{(2)}{=} Of(P)^* + Of(Q)^* = \left(\sum_{B \notin \sigma} Of(B)^* \delta(B, \sigma) \right)_{\{\sigma, PQ\}}. \end{aligned}$$

Здесь равенство (2) справедливо, ибо по лемме о чётности 1.3.2.b

$$0 = (Of(P) \cup Of(Q) \cup f(PQ))^* = Of(P)^* + Of(Q)^* + f(PQ)^*.$$

Сведение общего случая к частному (предложено Р. Карасевым). Достаточно доказать лемму для отображения f , отличающегося от f' только на множестве рёбер, выходящих из одной вершины A . Соединим $f(A)$ с $f'(A)$ ломаной общего положения.

Для рёбер σ , не выходящих из A , «подтащим образы $f\sigma = f'\sigma$ к $f'(A)$ вдоль ломаной» так, что

- эта ломаная не пересекает модифицированных образов ребра σ и
- точки пересечения образов таких рёбер σ остаются прежними.

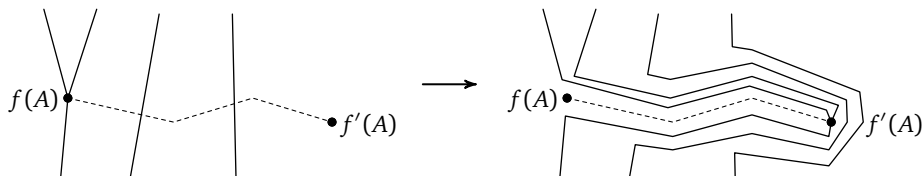


Рис. 1.5.2. Модификация отображения общего положения

Обозначим через

- $\bar{f}$ и $\bar{f}'$ отображения, полученные из f и f' таким «подтаскиванием»;
- f'' отображение, полученное из $\bar{f}$ «подтаскиванием окрестности вершины $f(A) = \bar{f}(A)$ к $f'(A) = \bar{f}'(A)$ вдоль ломаной».

См. рис. 1.5.2. Тогда $\nu(f) = \nu(\bar{f}) = \nu(f'') \stackrel{(1)}{\sim} \nu(\bar{f}') = \nu(f')$. Здесь ко-гомологичность (1) справедлива по рассмотренному частному случаю.

1.6. АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ИЗОТОПНОСТИ ВЛОЖЕНИЙ

В этом пункте мы сокращаем слова «PL-вложение» до «вложение». (Результаты и построения этого пункта справедливы и для топологических вложений, определение которых известно некоторым читателям.)

PL-вложением графа в плоскость называется набор вершин и ломаных из определения планарности, для которого никакая изолированная вершина не лежит ни на одной из ломаных. Точки называются образами вершин, а ломаные — образами ребер. Образом набора рёбер называется объединение образов рёбер набора.

Два вложения $f, g: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ (одного и того же) графа в плоскость называются *изотопными*, если одно можно непрерывно продеформировать в другое так, чтобы в процессе деформации отображение оставалось вложением. Вот строгая формулировка этого условия: существует семейство вложений $f_t: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, для которого $f_0 = f$ и $f_1 = g$.

Например, пары вложений на каждом из рис. 1.6.1.a,b,c не изотопны.

Определение изотопности в трёхмерном и многомерном пространствах см., например, в [Sk20u, § 1], [Is].

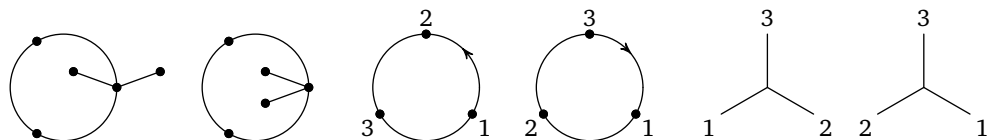


Рис. 1.6.1. Различные вложения в плоскость
(a) некоторого графа, (b) окружности и (c) триода

ТЕОРЕМА 1.6.1. *Два вложения связного графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их сужения на любой триод и на любой несамопересекающийся цикл изотопны (т. е. не таковы, как на рис. 1.6.1.b,c).*

Эту теорему можно сначала доказать для деревьев, а потом свести общий случай к случаю деревьев путём выделения максимального дерева. Детали технически непросты (как это часто бывает для базовых результатов топологии плоскости)¹¹⁾.

Аналог теоремы 1.6.1 без утверждения в скобках справедлив для вложений в сферу, тор и другие сферы с ручками. Доказательство аналогично.

Мы приведём более сложный критерий изотопности. Он интересен тем, что даёт полиномиальный алгоритм распознавания изотопности, а также обобщается на высшие размерности [Sk06, § 4].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6.2. *Вложения графа в плоскость изотопны тогда и только тогда, когда их расстановки вращений когомологичны.*

Чтобы определить расстановку вращений и когомологичность расстановок, зададим ориентацию на плоскости и направления на рёбрах графа K . Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вложение. Возьмём ребро bc и вершину $a \notin \{b, c\}$.

Пусть сначала образы вершин графа лежат на одной прямой. Тогда определим полуцелое число $\omega(f)_{a \times bc}$ как количество оборотов вектора с началом в вершине $f(a)$ и концом, пробегающим ребро $f(bc)$ в заданном направлении. Это число не будет целым тогда и только тогда, когда $f(a)$ лежит на отрезке $f(b)f(c)$.

Пусть теперь f — произвольное вложение. Возьмём любую ориентированную прямую l на плоскости, не параллельную ни одной прямой, соединяющей образы вершин графа. Рассмотрим вектор с началом в вершине $f(a)$ и концом, пробегающим ребро $f(bc)$ в заданном направлении. Обозначим через $\omega(f, l)_{a \times bc}$ полуразность количеств положительных и отрицательных проходов этого направления. Определим

$$\omega(f, l)_{bc \times a} := \omega(f, l)_{a \times bc}.$$

¹¹⁾ Теорема 1.6.1 сформулирована в книге [Wu65] со ссылкой на статью Маклейна — Эддисона, которую не удалось найти в указанном там сборнике. Специалисты по топологической теории графов подтверждают, что эта теорема известна (и верна). В книге [Wu65] теорема 1.6.1 сформулирована для вложений даже локально связного континуума (в частности, полиэдра).

1.6.3. Для любых несмежных рёбер ab и cd имеем

$$\omega(f, l)_{a \times cd} + \omega(f, l)_{ab \times d} + \omega(f, l)_{b \times dc} + \omega(f, l)_{ba \times c} = 0.$$

Говоря неформально, обозначим через $\tilde{K}^{(1)}$ множество упорядоченных пар (x, y) точек графа K , одна из которых является вершиной, а другая лежит на стороне, не смежной с этой вершиной. Множество $\tilde{K}^{(1)}$ является объединением конечного числа отрезков, т. е. графом. Вот строгое определение. Вершины графа $\tilde{K}^{(1)}$ — упорядоченные пары $a \times b = (a, b)$, где a и b — различные вершины графа K . Вершина $a \times b$ соединена ребром с вершиной $a \times c$, если b и c соединены ребром в графе K . Аналогично $b \times a$ и $c \times a$ соединены ребром, если b и c соединены ребром. Других рёбер в графе $\tilde{K}^{(1)}$ нет.

1.6.4 (Загадка). Какие графы $\tilde{K}^{(1)}$ получатся, если

- (a) $K = K_{2,1}$ — путь с тремя вершинами;
- (b) $K = K_3$ — цикл с тремя вершинами;
- (c) $K = K_{3,1}$ — триод;
- (d) $K = K_4$?

См. подробнее [ADN+, § 2].

1.6.5 (a–d). Расставьте числа $\omega(f, l)_e$ на рёбрах e графа $\tilde{K}^{(1)}$ (для какой-нибудь прямой l на ваш выбор) для каждого из четырёх вложений f на рис. 1.6.1.b,c.

(e–h) То же для прямой $l' \perp l$.

(i) Если вершины $a \times b$ и $b \times a$ соединены путём в графе $\tilde{K}^{(1)}$, то сумма полуцелых чисел $\omega(f, l)_e$ на рёбрах e этого пути не является целой.

Возьмём на ребре $(a \times b, a \times c) = a \times bc$ направление, соответствующее направлению на ребре bc . Построенную расстановку чисел $\omega(f, l)_{a \times bc}$ и $\omega(f, l)_{bc \times a}$ на ориентированных рёбрах графа $\tilde{K}^{(1)}$ назовём **расстановкой вращений** и обозначим через $\omega(f, l)$.

Определим *элементарную кограницу* $\delta(a \times b)$ вершины $a \times b$ как расстановку чисел $+1/2$ на рёбрах графа $\tilde{K}^{(1)}$, входящих в $a \times b$, чисел $-1/2$ на рёбрах, выходящих из $a \times b$, и 0 на остальных рёбрах. Определим *элементарную симметричную кограницу* вершины $a \times b$ как $\delta_s(a \times b) := \delta(a \times b) + \delta(b \times a)$. Расстановки ω_1 и ω_2 полуцелых чисел на ориентированных рёбрах графа $\tilde{K}^{(1)}$ называются **когомологичными**, если $\omega_1 - \omega_2$ является суммой элементарных симметричных кограниц с целыми коэффициентами.

1.6.6. (a) Расстановки вращений, построенные вами для двух вложений на рис. 1.6.1.b, не когомологичны.

(b) То же для рис. 1.6.1.с.

(c) Для вложения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ и прямых l, l' расстановки вращений $\omega(f, l), \omega(f, l')$ когомологичны.

(d) Для изотопных вложений $f, f': K \rightarrow \mathbb{R}^2$ и прямой l расстановки вращений $\omega(f, l), \omega(f', l)$ когомологичны.

Осмысленность критерия в утверждении 1.6.2 (т. е. независимость когомологичности расстановок вращений от выбора прямой l) вытекает из утверждения 1.6.6.с. Достаточность в утверждении 1.6.2 вытекает из теоремы 1.6.1 и утверждений 1.6.6.a,b. Необходимость вытекает из утверждения 1.6.6.d.

Ответы к 1.6.4.b,c. Оказывается, что $\tilde{K}_3^{(1)}$ — цикл с шестью вершинами и $\tilde{K}_{3,1}^{(1)}$ — цикл с двенадцатью вершинами.

1.7. ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ К § 1

1.1.2. Доказательство. Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. В этом абзаце мы докажем, что для каждого n существует n точек общего положения в пространстве. Используем индукцию по n . База $n = 1$ очевидна. Для доказательства шага индукции предположим, что есть $n \geq 1$ точек общего положения в пространстве. Тогда существует конечное число плоскостей, проходящих через тройки из этих n точек. Значит, в пространстве существует точка, не принадлежащая никакой из этих плоскостей. Добавим эту точку к нашему n -точечному множеству. Так как «новая» точка не лежит в одной плоскости ни с какой тройкой из n «старых» точек, в рассматриваемом множестве из $n + 1$ точки все точки находятся в общем положении. Шаг индукции обоснован.

Выберем n точек общего положения в пространстве. Если какие-то два отрезка, соединяющие эти точки, не имеют общих концов, но пересекаются, то четыре конца этих отрезков лежат в одной плоскости. Если какие-то два отрезка, соединяющие эти точки, имеют общий конец и другую общую точку, то три конца этих двух отрезков лежат на одной прямой. Противоречие. $\square$

Идея алгебраического доказательства.

Возьмём точки $A(t) = (t, t^2, t^3)$ для $t = 1, \dots, n$.

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО АНАЛОГА). Нарисуем данный граф (возможно, с самопересечениями) на плоскости так, чтобы рёбра не самопересекались. Если образовались точки пересечения

(кроме вершин) более чем двух рёбер, то подвинем некоторые рёбра так, чтобы остались только двукратные точки пересечения. «Поднимем» одно из каждых двух пересекающихся рёбер в пространство так, чтобы каждое пересечение пропало. $\square$

Следующие утверждения 1.7.1 и 1.7.2 иллюстрируют некоторые идеи теоремы 3.8.3 об NP-трудности. Ср. с [Sk, предложения 4.1.6 и 4.8.2].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.1. Пусть среди 5 точек 1, 2, 3, 4, 5 на плоскости никакие 3 не лежат на прямой. Если отрезки

(a) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \neq (1, 2)$, имеют непересекающиеся внутренности, то точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345, ср. с рис. 1.0.1 справа;

(b) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, имеют непересекающиеся внутренности, то

- либо точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,
- либо точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245.

(c) jk , $1 \leq j < k \leq 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$, имеют непересекающиеся внутренности, то

- либо точки 1 и 2 находятся по разные стороны от треугольника 345,
- либо точки 1 и 3 находятся по разные стороны от треугольника 245,
- либо точки 1 и 4 находятся по разные стороны от треугольника 235.

(d) Вы уже догадались, как формулируется это утверждение и вообще как при изучении вложенности возникают булевы функции.

Доказательство. (a) Пять точек можно привести в общее положение, не изменяя ни одного из рассматриваемых свойств. По условию количество точек пересечения отрезка 12 с контуром треугольника 345 равно количеству точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные пять точек. Оно нечётно по утверждению 1.1.1.b.

(b, c, d) Эти утверждения аналогичным образом следуют из утверждения 1.1.1.b. $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7.2. Удалим из K_5 ребро, соединяющее вершины 1 и 2. При любом PL-вложении полученного графа в плоскость любая ломаная, соединяющая образы вершин 1 и 2, пересекает образ цикла 345 (т. е. образы вершин 1 и 2 находятся по разные стороны от образа цикла 345).

Это доказывается аналогично утверждению 1.7.1. Вместо утверждения 1.1.1.b нужно использовать лемму 1.4.3. Аналогично формулируются и доказываются PL-аналоги утверждений 1.7.1.b,c,d.

Набросок другого доказательства леммы о чётности 1.3.2. Это доказательство обобщается на высшие размерности [Sk, § 4], [Sk14, § 3].

(а) Пересечение части плоскости, ограниченной первым треугольником, и контура второго является объединением конечного числа невырожденных ломаных. Точки пересечения контуров суть концы этих ломаных. Их число чётно.

(б) Это доказательство использует идею *сингулярного конуса*, которая является короткой формализацией идеи *непрерывного передвижения ломаной на бесконечность* [BE82, § 5].

Пусть сначала одна из ломаных b является треугольником. Обозначим другую ломаную через a . Возьмём такую точку A , что $\partial(AMN)$ и b находятся в общем положении для каждого ребра MN ломаной a . Контур треугольника T будем обозначать через ∂T . Тогда (рис. 1.7.1)

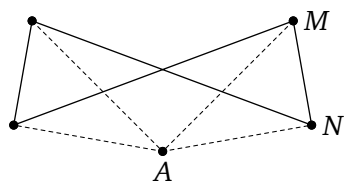


Рис. 1.7.1. Идея сингулярного конуса

$$|a \cap b| = \sum_{MN} |MN \cap b| \equiv_2 \sum_{MN} |\partial(AMN) \cap b| \equiv_2 0.$$

Здесь суммирование идёт по всем рёбрам MN ломаной a ; второе равенство следует из частного случая двух треугольников.

Общий случай сводится к частному аналогично доказательству из п. 1.3. Утверждение 1.3.5 доказывается аналогично с заменой ломаных на 1-циклы. $\square$

Замечание 1.7.3. Число ван Кампена PL-отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K определяется аналогично случаю $K = K_n$ (п. 1.4).

(а) Ясно, что если граф K планарен, то $v(f) = 0$ для некоторого PL-отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(б) Два отрезка на плоскости, имеющие общую внутреннюю точку, дают планарный граф K и его PL-отображение общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого $v(f) \neq 0$.

(с) Если K — несвязное объединение двух треугольников, то лемма о чётности 1.3.2.b означает, что $v(f) = 0$ для любого отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(d) Для любого PL-отображения общего положения $f: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K число ван Кампена равно сумме значений коцикла пересечений на всевозможных неупорядоченных парах несмежных рёбер.

§ 2. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

2.1. ЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕОТЪЕМЛЕМЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

ТЕОРЕМА 2.1.1 (теорема Радона для плоскости). *Для любых 4 точек на плоскости либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками, либо их можно разбить на две пары так, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.* (Ср. с утверждением 1.1.1.а.)

Следующие простые примеры показывают, что данный результат является «наилучшим».

- На плоскости возьмём треугольник и точку внутри него. Для любого разбиения этих четырёх точек на две пары отрезков, соединяющий точки в первой паре, не пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.
- На плоскости возьмём вершины квадрата. Ни одна из этих четырёх точек не лежит внутри треугольника, образованного оставшимися точками.

Выпуклой оболочкой $\langle X \rangle$ конечного набора X точек плоскости называется наименьший (по включению, или по площади) выпуклый многоугольник, их содержащий. Ср. с определением в п. 3.1.

Теорема Радона для плоскости переформулируется так: *любые 4 точки на плоскости можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.* У этой теоремы есть следующая более сильная «количественная» версия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.2 (ср. с утверждением 1.1.1.b; см. доказательство в п. 2.4). *Если никакие три из четырёх точек на плоскости не лежат на прямой, то существует ровно одно их разбиение на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Рассмотрим теперь разбиения подмножеств плоскости более чем на два непересекающихся множества.

ПРИМЕР 2.1.3. На плоскости возьмём по $r - 1$ точке в каждой вершине треугольника (или близкий набор различных точек). При любом разбиении этих $3r - 3$ точек на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки. (Докажите, начав с $r = 3$.)

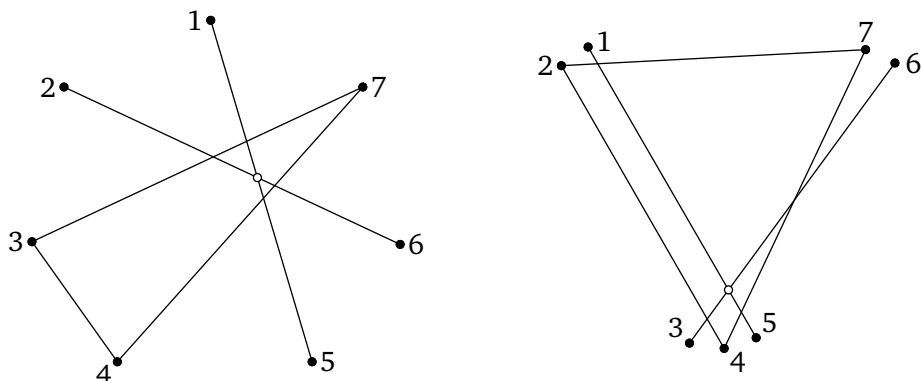


Рис. 2.1.1. К теореме 2.1.4: общая точка выпуклых оболочек

ТЕОРЕМА 2.1.4 (теорема Тверберга для плоскости). *Для любого r любые $3r - 2$ точки плоскости можно разбить на r множеств, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Следующие простые примеры показывают, что данный результат является «наилучшим» для $r = 3$.

- На плоскости возьмём вершины выпуклого семиугольника. Тогда ни одна из вершин не лежит ни в одном из треугольников, образованных оставшимися точками.
- На плоскости отметим вершины правильного треугольника и его центр. Отметим также середины отрезков, соединяющих вершины с центром. Возьмём любые два отрезка, соединяющие две непесекающиеся пары отмеченных точек. Тогда либо эти отрезки не пересекаются, либо их точка пересечения не лежит в треугольнике, образованном тремя оставшимися отмеченными точками.

Мотивированное изложение широко известного алгебраического доказательства теоремы 2.1.4 см. в [RRS].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.5. Было бы интересно найти геометрическое доказательство теоремы 2.1.4, хотя бы для $r = 3$. Доказательство её аналога для $r = 3$ и вершин выпуклого восьмиугольника иллюстрируется рис. 2.1.2. Из этого аналога несложно вывести её аналог для $r = 3$ и 11 точек.

ПРИМЕР 2.1.6 (ср. с утверждениями 1.1.1.b и 2.1.2). Для множества вершин правильного семиугольника количество разбиений из теоремы 2.1.4 равно 7. Каждое такое разбиение получается поворотом из разбиения на рис. 2.1.1 слева.

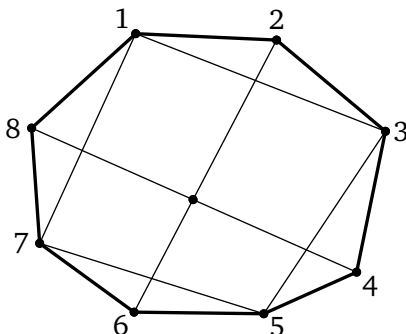


Рис. 2.1.2. Выпуклый восьмиугольник

Для множества точек, изображённого на рис. 2.1.1 справа, количество разбиений из теоремы 2.1.4 равно 4.

(Это следует из того, что в любом таком разбиении одна из выпуклых оболочек должна быть треугольником, одна из вершин которого 4, другая 1 или 2, а третья 6 или 7.)

Таким образом, следующая сумма имеет разную чётность для двух рассмотренных выше 7-элементных множеств M_1 и M_2

$$v(M_i) := \sum_{\{R_1, R_2, R_3\}: M_i = R_1 \sqcup R_2 \sqcup R_3} |\langle R_1 \rangle \cap \langle R_2 \rangle \cap \langle R_3 \rangle|.$$

Однако этот пример подсказывает, что количество разбиений из теоремы 2.1.4 есть число вида $3k + 1$. Это верно, только если в приведённой сумме удачно расставить знаки $\pm$ перед слагаемыми.

2.2. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О ДВУКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

2.2.1. Возьмём замкнутую плоскую ломаную L , вершины которой находятся в общем положении.

(а) Дополнение до L допускает шахматную раскраску (такую, что соседние области покрашены в разные цвета, см. рис. 2.2.1 и доказательство в п. 2.4).

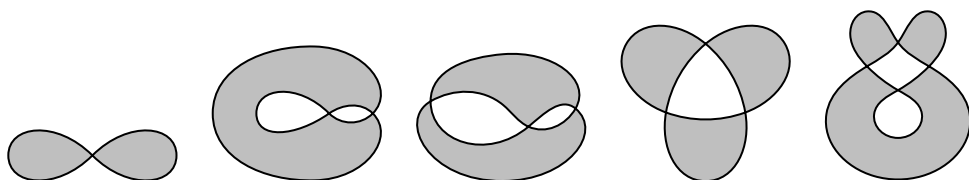


Рис. 2.2.1. Внутренности по модулю 2 ломаных

(b) Концы ломаной P , вершины которой находятся в общем положении с вершинами ломаной L , имеют одинаковый цвет тогда и только тогда, когда $|P \cap L|$ чётно.

Внутренностью по модулю 2 плоской ломаной, вершины которой находятся в общем положении, называется объединение чёрных областей шахматной раскраски (при условии, что «бесконечная» область белая).

Кусочно-линейные (PL-)отображения и PL-отображения общего положения $K_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ определены в § 1.4.

ТЕОРЕМА 2.2.2 (топологическая теорема Радона для плоскости [BV79], ср. с теоремами 1.4.1, 2.1.1). (a) Для любого PL-отображения общего положения $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

- либо образы некоторых несмежных рёбер пересекаются,
- либо образ некоторой вершины лежит во внутренней по модулю 2 образа цикла из трёх рёбер, не содержащих эту вершину.

(b) Для любого непрерывного (или PL-)отображения тетраэдра в плоскость

- либо образы некоторых противоположных рёбер пересекаются,
- либо образ некоторой вершины лежит в образе противоположной грани.

Пункт (a) выводится из своей «количественной» версии (лемма 2.2.3) с помощью одной из версий [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации], ср. с замечанием 3.2.3.b.

Пункт (b) для PL-отображений общего положения следует из п. (a), поскольку образ $f(\Delta)$ грани Δ содержит внутренность по модулю 2 образа границы $\partial\Delta$ этой грани. (Это следует из того, что для отображения $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ общего положения общая точка внутренней по модулю 2 ломаной $f(\partial\Delta)$ имеет нечётное число прообразов.) Пункт (b) выводится из п. (b) для PL-отображений общего положения с помощью одной из версий [Sk20, лемма 1.4.6b об аппроксимации], ср. с замечанием 3.2.3.b.

Заметим также, что п. (b) эквивалентен п. (a), см. [Sc04, SZ05].

Верен аналог теоремы 2.2.2, полученный заменой «PL» на «непрерывного».

Для любого PL-отображения общего положения $f: K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ назовём **числом Радона** $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$ сумму четностей

- числа точек пересечения образов несмежных рёбер и

- числа тех вершин графа K_4 , образы которых лежат во внутренности по модулю 2 образа цикла из трёх рёбер, не содержащих эту вершину.

ЛЕММА 2.2.3 (ср. с леммой 1.4.3 и утверждением 2.1.2). Для любого PL-отображения общего положения графа K_4 в плоскость число Радона нечётно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду утверждения 2.1.2 достаточно доказать, что $\rho(f) = \rho(f')$ для любых двух PL-отображений общего положения $f, f': K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, отличающихся только на внутренности одного ребра σ , причём $f|_\sigma$ линейно. Обозначим через τ ребро графа K_4 , несмежное с σ , а через S — внутренность по модулю 2 ломаной $\partial S := f\sigma \cup f'\sigma$. Тогда

$$\rho(f) - \rho(f') = |\partial S \cap f\tau|_2 + |S \cap f(\partial\tau)|_2 = 0.$$

Здесь второе равенство следует из утверждения 2.2.1.b. $\square$

2.3. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

Топологическая теорема Тверберга для плоскости обобщает как теорему Тверберга для плоскости 2.1.4, так и топологическую теорему Радона для плоскости 2.2.2. Для формулировки нам понадобится следующее определение. **Числом оборотов** замкнутой ориентированной плоской ломаной $A_1 \dots A_n$ вокруг не лежащей на ней точки O называется следующая сумма ориентированных углов, делённая на 2π :

$$A_1 \dots A_n \cdot O := \frac{\angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{n-1} O A_n + \angle A_n O A_1}{2\pi}.$$

2.3.1. (a) Число оборотов (произвольно ориентированного) многоугольника вокруг точки вне него равно 0, а вокруг точки внутри него равно ± 1 .

(b) Для любой замкнутой ориентированной ломаной её внутренность по модулю 2 состоит из всех тех точек, вокруг которых число оборотов нечётно.

(c) (Ср. с утверждением 2.2.1.b.) Возьмём замкнутую и незамкнутую ориентированные ломаные L и P на плоскости, вершины которых находятся в общем положении. Пусть P_0 и P_1 — начальная и конечная точки ломаной P соответственно. Тогда¹²⁾ $L \cdot P = L \cdot \partial P := L \cdot P_1 - L \cdot P_0$.

¹²⁾ Целочисленное число пересечений $L \cdot P$ определено в [Sk18, § 1.5.4]. Эта версия теоремы Стокса показывает, что дополнение до L имеет нумерацию Мёбиуса — Александера, т. е. «шахматную раскраску числами» (цвета

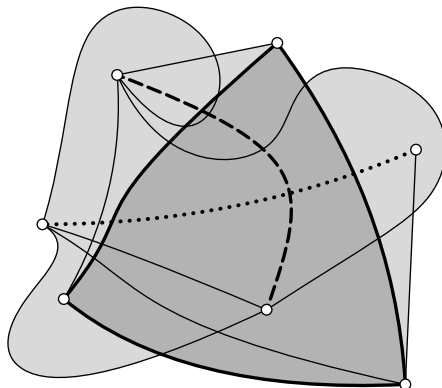


Рис. 2.3.1. Топологическая теорема Тверберга для плоскости для $r = 3$. Чёрный треугольник обходит вокруг точки пересечения пунктирного и штрихового отрезков

(d) Для каждой ломаной (с произвольной ориентацией) на рис. 2.2.1 и точки на ваш выбор (в любой из ограниченных областей) найдите число оборотов ломаной вокруг точки.

ТЕОРЕМА 2.3.2 (топологическая теорема Тверберга для плоскости [BSS, Oz, Vo96]; ср. с теоремами 2.1.4, 2.2.2 и гипотезой 3.3.1). *Если r — степень простого, то для любого PL-отображения $f: K_{3r-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (рис. 2.3.1)*

- либо образы $r - 1$ треугольников обходят вокруг образа одной вершины,
- либо образы $r - 2$ треугольников обходят вокруг некоторой точки пересечения образов двух рёбер,

Точнее, можно так занумеровать вершины числами $1, \dots, 3r - 2$, что

- либо число оборотов образа каждого из циклов $3t - 1, 3t, 3t + 1$ ($t = 1, 2, 3, \dots, r - 1$) вокруг образа точки 1 не равно нулю,
- либо число оборотов образа каждого из циклов $3t - 1, 3t, 3t + 1$ ($t = 2, 3, \dots, r - 1$) вокруг некоторой точки пересечения образов рёбер 12 и 34 не равно нулю.

(Условие «число оборотов не равно нулю» не зависит от ориентации цикла $f(ijk)$.)

Теорема 2.3.2 эквивалентна ([Sc04, Теорема 3.3.1], [SZ05, Теорема 5.8]) её стандартной формулировке — теореме 3.3.2.a для $d = 2$.

соседних областей отличаются на ± 1 в зависимости от ориентации; концы ломаной P имеют одинаковый цвет тогда и только тогда, когда $L \cdot P = 0$). См. подробности в [Wn].

О её доказательстве и удивительном появлении теоретико-числового условия на размерность в этом топологическом результате см. замечание 3.3.7. Нерешённая задача: *верен ли аналог теоремы 2.3.2, если r — не степень простого?*

2.4. ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ К § 2

2.1.2. Так как точки — общего положения, их выпуклая оболочка — или треугольник, или четырёхугольник. Если выпуклая оболочка данных 4 точек — четырёхугольник, то нужная («радоновская») точка — точка пересечения диагоналей. Если же выпуклая оболочка — треугольник, то нужная точка — та точка множества, которая не является вершиной его выпуклой оболочки.

Доказательство теоремы 2.1.4 для $r = 3$ и вершин выпуклого 7-угольника¹³⁾. Обозначим вершины семиугольника в порядке обхода через 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (рис. 2.4.1).

Если $X := 37 \cap 26 \in \Delta 145$, то разбиение 37, 26, 145 — искомое («тверберговское»).

Если $X \notin \Delta 145$, то не умаляя общности можно считать, что X лежит внутри четырёхугольника 1567. Поскольку X не лежит внутри пятиугольника 12345, получаем, что $Y := 15 \cap 37$ не лежит внутри четырёхугольника 1267. Так как $15 \cap \Delta 234 = \emptyset$, получаем, что $Y \notin \Delta 234$. Так как $37 \cap \Delta 456 = \emptyset$, мы получаем $Y \notin \Delta 456$. Поэтому $Y \in \Delta 246$. Значит, разбиение 15, 37, 246 — искомое. $\square$

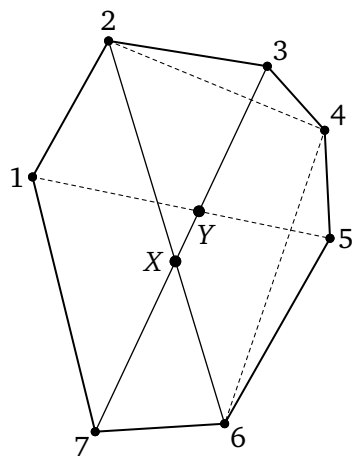


Рис. 2.4.1. Выпуклый семиугольник

2.2.1. (а) Доказательство. Возьмём точку $A \notin L$ и покрасим точку A в цвет 0. Далее, каждую точку $P \notin L$ покрасим в цвет 0 или 1, совпадающий по чётности с числом точек пересечения с L пути *общего положения* (дайте определение самостоятельно), соединяющего P и A . Такая раскраска корректно определена.

При переходе в соседнюю область число точек пересечения из п. (а) увеличивается на 1, поэтому соседние области покрашены в разные цвета. $\square$

¹³⁾ Предварительная версия написана А. Львовым и Т. Ковалевым в процессе их участия в Летней конференции Турнира городов 2017 г. Аналогичное решение придумано В. Кулишовым. Ср. с замечанием 2.1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.1. Пусть K — граф. Пусть $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторое PL-отображение общего положения, т. е. отображение, переводящее вершины графа K в различные точки прямой, отличные от «точек возврата» рёбер.

(а) *Топологическая теорема Радона для прямой.* Для любого непрерывного отображения треугольника в прямую образ некоторой вершины лежит на образе противоположного ребра.

Образ одной из вершин треугольника лежит нестрого между образами двух других. Так как отображение непрерывно, образ этой вершины и лежит на образе противоположного ребра.

(б) Граф G называется k -реализуемым на прямой, если его вершины можно расположить на плоскости так, чтобы любая прямая, перпендикулярная некоторой фиксированной прямой, пересекала объединение отрезков, соответствующих рёбрам графа, не более чем в k точках. Другими словами, существует отображение графа G в прямую без $(k + 1)$ -кратных точек (т. е. такое, что любая точка прямой имеет не более k прообразов).

Ясно, что связный граф 1-реализуем на прямой тогда и только тогда, когда он является путём. О критерии 2-реализуемости деревьев см. [Kho] и ссылки в этой статье. Было бы интересно найти критерий и эффективный алгоритм распознавания k -реализуемости.

§ 3. ДОПОЛНЕНИЕ: МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

3.1. ЛИНЕЙНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕОТЪЕМЛЕМЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

В этом параграфе слова «для любых целых $d, r, N, k > 0$ » в начале формулировок пропускаются.

Подмножество в $\mathbb{R}^d$ называется *выпуклым*, если для любых двух его точек соединяющий их отрезок содержится в этом подмножестве. **Выпуклой оболочкой** $\langle X \rangle$ подмножества $X \subset \mathbb{R}^d$ называется наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X . **Выпуклой оболочкой** конечного набора точек $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ является множество

$$\{\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1\}.$$

Вершины d -мерного симплекса образуют множество из $d + 1$ точки в $\mathbb{R}^d$, при любом разбиении которого на два множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

ТЕОРЕМА 3.1.1 (Радон, ср. с теоремой 2.1.1). *Любые $d + 2$ точки в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

См. геометрические индуктивные доказательства в [Pe72, Ko18, RRS] и стандартное алгебраическое доказательство, например, в [BZ16, RRS].

Разбиение из теоремы Радона единственно, ср. с утверждением 2.1.2.

Вершины $2k$ -мерного симплекса и его центр образуют $2k + 2$ точки в $\mathbb{R}^{2k}$, при любом разбиении которых на два $(k + 1)$ -элементных множества выпуклые оболочки множеств не пересекаются.

ТЕОРЕМА 3.1.2 (линейная теорема ван Кампена — Флореса, ср. с утверждением 1.1.1a). *Из любых $2k + 3$ точек в $\mathbb{R}^{2k}$ можно выбрать два непересекающихся $(k + 1)$ -элементных множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Версия теоремы ван Кампена — Флореса в нечётных размерностях (теорема Конвея — Гордона — Закса — Сегала — Спеша — Ловаса — Шрийвера — Таниямы) приведена, например, в [Sk14, Теорема 1.6] или в [Sk16, § 4], см. (VKF_d) для d нечётного. Геометрическое индуктивное доказательство теоремы 3.1.2 (включая версию в нечётных размерностях) аналогично доказательству для маломерных случаев, изложенному в обзоре [Sk14]. Алгебраическое доказательство см. в [BM15].

Теорема 3.1.2 имеет «количественную версию», аналогичную утверждению 1.1.1.b.

Либо возьмём вершины d -мерного симплекса, каждую с кратностью $r - 1$, либо для каждой из вершин возьмём $r - 1$ близких точек, лежащих в общем положении, либо возьмём любые $(d + 1)(r - 1)$ точек общего положения в $\mathbb{R}^d$. Получим $(d + 1)(r - 1)$ точек в $\mathbb{R}^d$, при любом разбиении которых на r множеств выпуклые оболочки этих множеств не имеют общей точки.

ТЕОРЕМА 3.1.3 (Тверберг, ср. с теоремой 2.1.4). *Любое множество $(d + 1)(r - 1) + 1$ точек в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на r множеств, все r выпуклых оболочек которых имеют общую точку.*

Мотивированное изложение известного доказательства см. в [RRS].

Рассмотрим в $\mathbb{R}^{kr}$ вершины kr -мерного симплекса и его центр. Либо возьмём эти $kr + 2$ точки, каждую с кратностью $r - 1$, либо для каждой из этих точек возьмём $r - 1$ близких точек, лежащих в общем положении. Получим $(r - 1)(kr + 2)$ точек в $\mathbb{R}^{kr}$ такие, что для любых r попарно непересекающихся наборов из $k(r - 1) + 1$ точек все r выпуклых оболочек этих наборов не имеют общей точки.

ГИПОТЕЗА 3.1.4 (линейная r -кратная гипотеза ван Кампена — Флореса). *Из любых $(r - 1)(kr + 2) + 1$ точек в $\mathbb{R}^{kr}$ можно выбрать r попар-*

но непересекающихся подмножеств по $(k(r-1)+1)$ точек в каждом, все r выпуклых оболочек которых имеют общую точку.

Это верно для r простого [Sa91g] и даже для r степени простого [Vo96v], но является открытой проблемой для других r [Fr17, начало § 2].

3.2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ О ДВУКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

Обозначим через Δ_N симплекс размерности N .

ТЕОРЕМА 3.2.1 (топологическая теорема Радона, [BV79], ср. с теоремой 2.2.2). *Для любого отображения $\Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ образы некоторых несмежных граней пересекаются.*

Это доказывается с использованием числа Радона или знаменитой теоремы Борсука — Улама [Ma03], [Sk20, § 8] (аналогично случаю $d = 2$ в п. 2.2 и [Sk, § 7.1]). Теорема 3.2.1 интересна как «симплициальный» аналог теоремы Борсука — Улама.

ТЕОРЕМА 3.2.2 (ван Кампен — Флорес, ср. с теоремой 1.4.1 и утверждением 3.7.1.а). *Для любого отображения $\Delta_{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ образы некоторых несмежных k -мерных граней пересекаются.*

Это следует из [Sk, лемма 5.7.3], а также доказывается с использованием либо индукции по k (аналогично случаю $k = 2$ в [Sk14]), либо теоремы Борсука — Улама (см. [Ma03, §5]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.3. (а) Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 обобщают теоремы 3.1.1 и 3.1.2, соответственно. Аналогичные замечания для нижеследующих теорем и гипотез справедливы и пропускаются.

(б) Отображение $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ называется **линейным**, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

для любых $\lambda \in [0, 1]$, $x, y \in \Delta$. Отображение $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ называется **кусочно-линейным (PL)**, если оно линейно на каждой грани некоторой триангуляции симплекса Δ_N .

Свойство «образы несмежных граней не пересекаются» устойчиво, т. е. сохраняется при достаточно малом шевелении отображения. Поэтому если в теореме 3.2.1 заменить (пропущенное) «непрерывное» на «PL» или на «PL общего положения», то получатся равносильные утверждения. Аналогичные замечания для нижеследующих теорем и гипотез этого пункта справедливы и пропускаются.

(с) Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 имеют «количественные версии», аналогичные леммам 1.4.3 и 2.2.3, см., например, [Sk16, § 4]. Прямые до-

казательства некоторых связей между этими результатами см. в п. (d) и [Sk16, § 4].

(d) Приведем вывод теоремы 1.4.1 (т. е. теоремы 3.2.2 для $k = 1$) из топологической теоремы Радона 3.2.1 для $d = 3$. Аналогично теорема 3.2.2 выводится из теоремы 3.2.1 для $d = 2k + 1$.

Пусть, напротив, $f: K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение, для которого образы несмежных рёбер не имеют общей точки. Продолжим f произвольно на Δ_4 (см. [Sk20, § 3.4]; объединение рёбер симплекса Δ_4 есть граф K_5). Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от точки $x \in \Delta_4$ до объединения рёбер симплекса. Докажем, что $f \times \rho: \Delta_4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ является контрпримером к теореме 3.2.1 для $d = 3$.

Пусть, напротив, некоторые две точки $x_1, x_2 \in \Delta_4$ лежат в несмежных гранях и отобразились при $f \times \rho$ в одну точку в $\mathbb{R}^3$. Размерность одной из этих граней (не умаляя общности, первой) не больше $\frac{5}{2} - 1$, поэтому она не превосходит 1. Значит, $\rho(x_1) = 0$. Тогда $\rho(x_2) = \rho(x_1) = 0$. Поэтому условие $f(x_1) = f(x_2)$ противоречит тому, что f -образы несмежных рёбер не имеют общей точки.

3.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ О МНОГОКРАТНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

Напомним, что **комплексом** называется набор некоторых граней симплекса. Объединение этих граней будем также называть комплексом (точнее, оно называется *телом* комплекса). См. подробнее § 3.6.

Отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^d$ комплекса K называется **почти r -вложением**, если образы любых r попарно несмежных граней $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ не имеют общей точки:

$$f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) = \emptyset.$$

Теоремы 3.2.1 и 3.2.2 утверждают, что не существует почти 2-вложений $\Delta_{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ и объединения k -мерных граней симплекса Δ_{2k+2} в $\mathbb{R}^{2k}$.

Гипотеза 3.3.1 (топологическая гипотеза Тверберга). *Не существует почти r -вложения $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$.*

Иными словами, для любого отображения $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$ образы некоторых r попарно несмежных граней имеют общую точку.

Эта гипотеза обобщает вышеприведённые теорему Тверберга 3.1.3 и топологическую теорему Радона 3.2.1. Гипотеза выдвинута Э. Баймочем, И. Баранем [BB79] и Х. Твербергом [GS79, задача 84]. Она считалась центральной нерешённой проблемой топологической комбинаторики. По моему мнению, одна из причин для этого следующая.

Её исследование — один из первых примеров в топологической комбинаторике, для которого действия группы $\mathbb{Z}_2$ недостаточны и нужно рассматривать более сложные группы.

Эта гипотеза верна, если r — степень простого, и неверна иначе.

ТЕОРЕМА 3.3.2. (a) [BSS, Oz, Vo96] Если r — степень простого, то не существует почти r -вложения $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

(b) (см. [Oz, Gr10, BFZ14, Fr15, MW15] и сноску 14) Если r — не степень простого и $d \geq 2r + 1$, то существует почти r -вложение $\Delta_{(d+1)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Часть (a) для простого r доказана в [BSS], см. обзор [Sk16, § 2.2]. Более простое доказательство приведено в [Sk18, § 2.3.4], [Sk, § 7.4]. Часть (a) для r степени простого доказана в [Oz, Vo96], см. обзор [Sk16, § 2.3].

Для первых контрпримеров к топологической гипотезе Тверберга 3.3.1 (теорема 3.3.2.b для $d = 3r + 1$) важны работы [Oz, Gr10, Fr15, BFZ14, MW15] М. Озайдына, М. Громова, Ф. Фрика, П. Благоевича, Г. Циглера, И. Мабийяра и У. Вагнера¹⁴). Контрпример с наименьшей (из известных) размерностью d — почти 6-вложение $\Delta_{70} \rightarrow \mathbb{R}^{13}$. Для $d \leq 2r$ и r не степени простого (например, для $d = 2$ и $r = 6$) топологическая гипотеза Тверберга 3.3.1 всё ещё открыта.

ТЕОРЕМА 3.3.3. (a) [FS20] Если r — степень простого, то не существует почти r -вложения $\Delta_{(d+1)r-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$.

(b) [AKS] Если r — не степень простого и $N := (d+1)r - r \left\lceil \frac{d+2}{r+1} \right\rceil - 2$, то существует почти r -вложение $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Более простой подход, приводящий к более слабым результатам, см. в замечании 3.4.1.c.

ГИПОТЕЗА 3.3.4 (r -кратная гипотеза ван Кампена — Флореса). Не существует почти r -вложения объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в $\mathbb{R}^{kr}$.

Иными словами, для любого отображения $f: \Delta_{(kr+2)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{kr}$ существуют r попарно несмежных $k(r-1)$ -мерных граней, образы которых имеют общую точку.

Эта гипотеза верна, если r — степень простого, и неверна иначе.

¹⁴) Здесь не обсуждается соотношение вкладов разных авторов, см. [Sk16, замечание 1.9 и § 5]. Приведённое там обсуждение интересно неспециалисту, поскольку затрагивает важные общие принципы научных обсуждений. При этом в § 3.4 и [Sk16, § 1.2, § 3.1] приводятся точные ссылки на каждый шаг доказательства, чтобы читатель мог составить собственное мнение.

ТЕОРЕМА 3.3.5. (а) Если r — степень простого, то не существует почти r -вложения объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в $\mathbb{R}^{kr}$.

(б) Если r — не степень простого и $k \geq 2$, то существует почти r -вложение объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в $\mathbb{R}^{kr}$.

Часть (а) доказана в [Sa91g, Vo96v] аналогично теореме 3.3.2.а. Этот результат также следует из теоремы 3.3.2.а и нижеприведённой леммы о принуждении 3.4.2. План доказательства части (б) приведён в § 3.4 и [Sk16, § 3.1]. Для $k = 1$ и r не степени простого r -кратная гипотеза ван Кампена — Флореса всё ещё открыта.

ТЕОРЕМА 3.3.6 [AKS]. Если r не степень простого, то объединение k -мерных граней любого симплекса допускает почти r -вложение в $\mathbb{R}^{k+\lceil(k+3)/r\rceil}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.7. Доказательства результатов этого пункта основаны на красивом и плодотворном взаимодействии комбинаторики, алгебры и топологии. На это указывает, в частности, удивительное появление теоретико-числовых условий на размерность в топологических результатах. См., например, теоремы 3.3.2.а, б и теоремы о реализуемости многообразий [Sk20, § 12.1]. Такие условия показывают, что за красивой топологической формулировкой скрывается нетривиальная алгебра.

Более конкретно, доказательства положительных результатов используют эквивариантную алгебраическую топологию конфигурационных пространств, см. обзоры [Sk18, § 2.3.4] и [Sk16, § 2]. Условие на r из теоремы 3.3.2.а необходимо для свойств (свободности или хотя бы эффективности) действия группы $\mathbb{Z}_r$ на конфигурационных пространствах.

Доказательства контрпримеров используют, кроме этого, элементарную комбинаторику и геометрическую топологию (устранение многократных пересечений при помощи аналога трюка Уитни). Условие на r из теоремы 3.3.2.б появляется на более простом шаге доказательства — теореме Озайдына [Sk16, теорема 3.3]. Она утверждает, что алгебраическое препятствие $\nu(\Sigma_r)$ к почти r -вложимости (являющееся аналогом чисел ван Кампена и Радона) является нулевым элементом некоторой абелевой группы (когомологий конфигурационного пространства). Обозначим через a_p частное от деления числа $a \in \mathbb{Z}$ на степень числа p , входящую в каноническое разложение числа a . Тогда доказываются соотношения $r!_p \nu(\Sigma_r) = 0$ для любого простого p

и любого $r \neq p^\alpha$. Например, для $r = 2$ имеем $2\nu(\Sigma_2) = 0$ [Sk18, утверждение 1.5.13], а для $r = 3$ имеем $3\nu(\Sigma_3) = 0$. Только если r не является степенью простого, из этих соотношений вытекает, что $\nu(\Sigma_r) = 0$.

3.4. План доказательства теорем 3.3.2.b и 3.3.5.b

Вот план доказательства теорем 3.3.2.b и 3.3.5.b:

- теорема 3.3.2.b для $d = 2r + 1$ (контрпример к топологической гипотезе Тверберга) следует из теоремы 3.3.5.b (контрпримера к r -кратной гипотезе ван Кампена — Флореса) и леммы о принуждении 3.4.2 (которая утверждает, что топологическая гипотеза Тверберга влечёт r -кратную гипотезу ван Кампена — Флореса);
- лемма о принуждении 3.4.2 доказана Громовым и позже переоткрыта Благоевичем — Фриком — Циглером [Sk16, замечание 1.9.a];
- теорема 3.3.5.b следует из теорем [Sk16, теоремы 3.1 и 3.2], принадлежащих Мабийяру — Вагнеру и Озайдыну;
- теорема 3.3.2.b для $d > 2r + 1$ вытекает из случая $d = 2r + 1$ и замечания 3.4.1.b (этот шаг не нужен для первых контрпримеров).

Замечание 3.4.1 (использование джойна). (а) Для двух отображений $f: \Delta_a \rightarrow B^p$ и $g: \Delta_b \rightarrow B^q$ определим их *джойн*

$$f * g: \Delta_{a+b+1} = \Delta_a * \Delta_b \rightarrow B^p * B^q = B^{p+q+1}$$

формулой

$$(f * g)(\lambda x \oplus \mu y) := \lambda f(x) \oplus \mu g(y).$$

Джойн почти r -вложений является почти r -вложением.

(б) Если существует почти r -вложение $\Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, то существует почти r -вложение $\Delta_{N+r-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ [Lo, предложение 2.5].

Действительно, пусть $f: \Delta_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ — почти r -вложение. Отображение g из Δ_{r-2} в точку B^0 является почти r -вложением. По п. (а), джойн

$$f * g: \Delta_{N+r-1} = \Delta_N * \Delta_{r-2} \rightarrow B^d * B^0 = B^{d+1}$$

является почти r -вложением.

(с) Если для некоторых целых $r, a, d > 0$ существует почти r -вложение $\Delta_a \rightarrow \mathbb{R}^d$, то для любого целого $k > 0$ существует почти r -вложение $\Delta_{k(a+1)-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k(d+1)-1}$ [BFZ, лемма 5.2].

Действительно, по п. (а) k -кратный джойн почти r -вложения $\Delta_a \rightarrow B^d$ является почти r -вложением $\Delta_{k(a+1)-1} \rightarrow B^{k(d+1)-1}$.

Лемма 3.4.2 (о принуждении; Громов — Благоевич — Фрик — Циглер; [Gr10, 2.9.c], [BFZ14, леммы 4.1.iii и 4.2], [Fr15, доказательство

теоремы 4]¹⁵⁾). Если существует почти r -вложение объединения $k(r-1)$ -мерных граней симплекса $\Delta_{(kr+2)(r-1)}$ в $\mathbb{R}^{kr}$, то существует почти r -вложение $\Delta_{(kr+2)(r-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{kr+1}$.

Доказательство. Чтобы сделать это рассуждение более доступным, рассмотрим частный случай $r = 6$ и $k = 3$: если существует почти 6-вложение $\Delta_{100}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$ объединения 15-мерных граней 100-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{18}$, то существует почти 6-вложение самого 100-мерного симплекса в $\mathbb{R}^{19}$. Общий случай аналогичен.

Возьмём почти 6-вложение $\Delta_{100}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$. Произвольно продолжим его до отображения $f: \Delta_{100} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$. Обозначим через $\rho(x)$ расстояние от точки симплекса Δ_{100} до его 15-мерного остова Δ_{100}^{15} . Достаточно доказать, что $f \times \rho: \Delta_{100} \rightarrow \mathbb{R}^{19}$ является почти 6-вложением.

Пусть, напротив, некоторые 6 точек $x_1, \dots, x_6 \in \Delta_{100}$ лежат в попарно несмежных гранях и переходят в одну и ту же точку при $f \times \rho$. Размерность одной из этих граней (не умаляя общности, первой) не превосходит $\frac{101}{6} - 1$, поэтому она не превосходит 15. Значит, $\rho(x_1) = 0$. Тогда $\rho(x_2) = \dots = \rho(x_6) = \rho(x_1) = 0$, т. е. $x_1, \dots, x_6 \in \Delta_{100}^{15}$. Поэтому условие $f(x_1) = \dots = f(x_6)$ противоречит тому, что $f|_{\Delta_{100}^{15}}$ — почти 6-вложение. $\square$

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ ГИПЕРГРАФОВ И КОМПЛЕКСОВ

Определим **k -гиперграф** (более точно, k -мерный или $(k+1)$ -однородный гиперграф) (V, F) как конечное множество V вместе с некоторым набором $F \subset \binom{V}{k+1}$, состоящим из $(k+1)$ -элементных подмножеств этого множества. В топологии больше принято (потому что иногда так удобнее) работать не с гиперграфами, а с **комплексами** (мы не будем использовать более громоздкий термин «абстрактный конечный симплициальный комплекс»). Результаты ниже сформулированы для комплексов, хотя некоторые из них справедливы и для гиперграфов.

Комплекс $K = (V, F)$ — это конечное множество $V = V(K)$ вместе с набором $F = F(K) \subset 2^V$ подмножеств множества V таким, что если подмножество σ содержится в этом наборе, то и каждое подмножество множества σ содержится в этом наборе. (Следовательно, $F \not\subset \emptyset$.) На эквивалентном геометрическом языке комплекс является набором

¹⁵⁾ Эта лемма обобщает замечание 3.2.3.d, в которое лемма превращается при $r = 2$.

замкнутых граней некоторого симплекса. Назовём **k -комплексом** комплекс, содержащий только не более чем $(k+1)$ -элементные множества, т. е. не более чем k -мерные симплексы.

Элементы множеств V и F называются **вершинами** и **гранями** соответственно. **Ребром** называется двухэлементная (т. е. одномерная) грань.

Полный k -комплекс на n вершинах (или k -мерный остов $(n-1)$ -мерного симплекса)

$$\Delta_{n-1}^k := ([n], \left(\leq_{k+1}^n \right))$$

— это n -элементное множество $[n]$ вместе с набором $\left(\leq_{k+1}^n \right)$ всех его не более чем $(k+1)$ -элементных подмножеств (рис. 3.5.1 справа). Для $k=2$ это полный граф K_n . Для $k=0$ мы обозначаем этот комплекс через $[n]$, для $n=k+1$ — через D^k (это k -мерный симплекс или k -мерный диск), и для $n=k+2$ — через S^k (это k -мерная сфера).

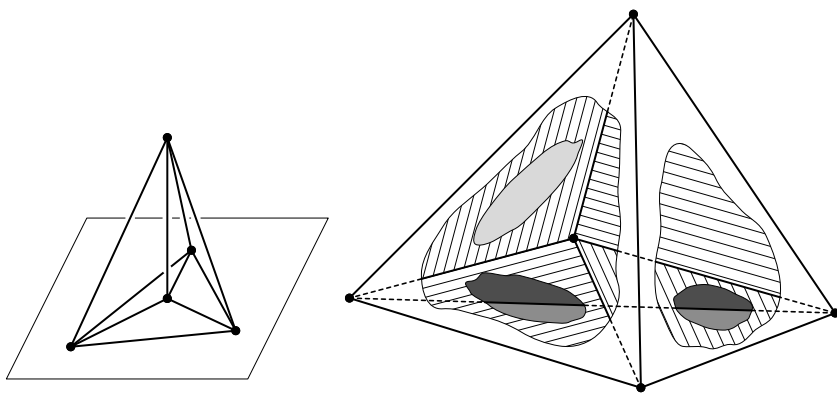


Рис. 3.5.1. Слева: реализация в $\mathbb{R}^3$ конуса над K_4 . Справа: реализация в $\mathbb{R}^3$ объединения двумерных граней четырёхмерного симплекса

Конусом $\text{con } K$ над графом $K = (V, E)$ называется 2-комплекс с множеством вершин $V \cup \{c\}$, $c \notin V$, и гранями $\{c, i, j\}$, где $\{i, j\} \in E$ (рис. 3.5.1 слева). Название «конус» принято потому, что конус над циклом «выглядит» как боковая поверхность «обычного» конуса. Конус над комплексом определяется аналогично.

Кнопкой называется 2-комплекс с вершинами $c, 0, 1, 2, 3$, грани которого — $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, все их двухэлементные подмножества и $\{c, 0\}$; см. рис. 3.5.2, K_V . См. другие примеры на рис. 3.5.2. Примеры комплексов фактически приведены в [Sk20, п. 5.2].

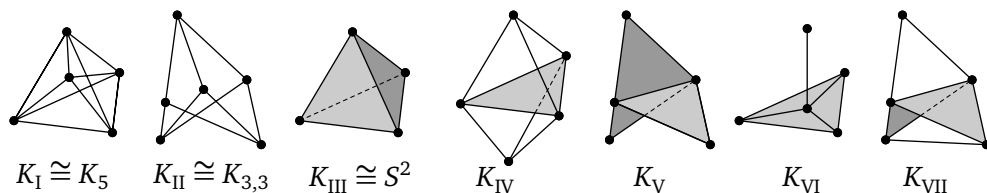


Рис. 3.5.2. Двумерные комплексы, не реализуемые в плоскости

3.6. Симплициальная вложимость ГИПЕРГРАФОВ И КОМПЛЕКСОВ

Определение реализуемости гиперграфов и комплексов в $\mathbb{R}^d$ похоже на определение реализуемости графов на плоскости. Например, в случае 2-комплекса каждому трёхэлементному подмножеству соответствует «изображение» треугольника в $\mathbb{R}^d$. Существуют разные формализации идеи реализуемости.

Комплекс (V, F) **симплициально** (или линейно) **вложим** в $\mathbb{R}^d$, если существует биекция $V \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^d$ со следующими свойствами:

- для любого подмножества $\sigma \subset V'$, соответствующего грани, его выпуклая оболочка $\langle \sigma \rangle$ является симплексом размерности $|\sigma| - 1$;
- для выпуклых оболочек любых подмножеств $\sigma, \tau \subset V'$, соответствующих граням, выполнено равенство $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle = \langle \sigma \cap \tau \rangle$.

ПРИМЕР¹⁶⁾ 3.6.1. (а) Каждый из 2-комплексов, изображённых на рис. 3.5.2, симплициально вложим в $\mathbb{R}^3$ (что показывает сам рисунок), но не в $\mathbb{R}^2$.

(б) Полный 2-комплекс с 4 вершинами симплициально вложим в $\mathbb{R}^3$, но не в $\mathbb{R}^2$.

(с) Полный 2-комплекс с 5 вершинами симплициально вложим в $\mathbb{R}^3$ (рис. 3.5.1 справа).

(д) Комплекс, полученный из полного 2-комплекса с 6 вершинами удалением двух граней, не имеющих общих вершин, симплициально вложим в $\mathbb{R}^3$ [Sk, пример 5.2.1с'].

(е) Объединение полного 2-комплекса с 5 вершинами и конуса над множеством его вершин не является симплициально вложимым в $\mathbb{R}^3$ [Sk, пример 5.2.1с''].

(ф) Конус над любым планарным графом симплициально вложим в $\mathbb{R}^3$ (рис. 3.5.1 слева).

¹⁶⁾ Утверждения, приведенные в этом примере без ссылок, доказываются несложно.

(g) Полный 2-комплекс с 6 вершинами симплициально вложим в $\mathbb{R}^4$ (аналогично рис. 3.5.1 справа), но не в $\mathbb{R}^3$ (поскольку он содержит $\text{con } K_5$).

(h) Полный 2-комплекс с 7 вершинами симплициально вложим в $\mathbb{R}^5$ (по теореме 3.6.2 ниже), но не в $\mathbb{R}^4$ (по линейной теореме ван Кампена — Флореса 3.1.2).

(i) Комплекс, полученный из полного 2-комплекса с 7 вершинами удалением грани, симплициально вложим в $\mathbb{R}^4$ [Sk, пример 5.2.1f].

(j) Конус над любым непланарным графом симплициально вложим в $\mathbb{R}^4$ (аналогично рис. 3.5.1 слева), но не в $\mathbb{R}^3$.

(k) Склейка двух конусов над любым комплексом K по их общему основанию (т. е. *надстройкой* $\Sigma K = K * [2]$) симплициально вложима в $\mathbb{R}^{d+1}$ тогда и только тогда, когда K симплициально вложим в $\mathbb{R}^d$ [AKM, утверждение 13].

(l)* Верно ли, что если конус над комплексом K , не гомеоморфным S^d , симплициально вложим в $\mathbb{R}^{d+1}$, то K симплициально вложим в $\mathbb{R}^d$? (Ответ мне неизвестен. Два комплекса называются *гомеоморфными*, если один можно получить из другого операциями подразделения ребра на рис. 3.7.1 слева и обратными к ним.)

ТЕОРЕМА 3.6.2 (общего положения). *Любой k -комплекс симплициально вложим в $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Ещё на заре топологии математики поняли, что в теореме общего положения 3.6.2 число $2k + 1$ нельзя уменьшить. См. линейную теорему ван Кампена — Флореса 3.1.2; ср. с теоремой ван Кампена — Флореса 3.2.2 и утверждением 3.7.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6.3 (ср. с утверждением 1.1.3). *Для любых фиксированных d, k существует алгоритм распознавания симплициальной вложимости k -комплексов в $\mathbb{R}^d$.*

О сложности симплициальной вложимости см. [AKM] и [Sk, конец п. 5.4].

3.7. Кусочно-линейная вложимость ГИПЕРГРАФОВ И КОМПЛЕКСОВ

Операция *подразделения ребра* изображена на рис. 3.7.1 слева (упражнение: выразите операцию *подразделения грани* на рис. 3.7.1 справа через операцию подразделения ребра и обратную к ней). **Подразделением** комплекса K называется любой комплекс, полученный из K путём нескольких операций подразделения ребра.

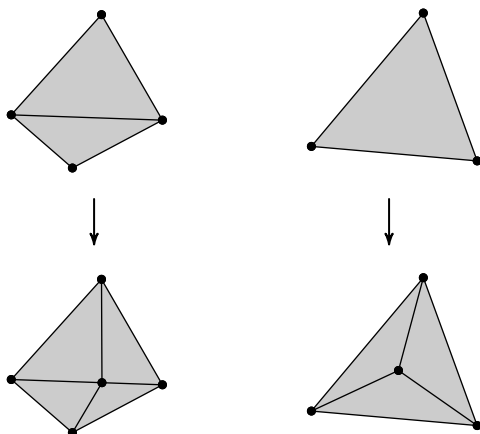


Рис. 3.7.1. Подразделения ребра и грани гиперграфа

Комплекс **PL** (кусочно-линейно) **вложим**¹⁷⁾ в $\mathbb{R}^d$, если некоторое его подразделение симплициально вложимо в $\mathbb{R}^d$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7.1. Для любого k никакой из следующих k -комплексов *PL*- (и, как следствие, симплициально) не вложим в $\mathbb{R}^{2k}$:

- (а) Полный k -комплекс с $2k + 3$ вершинами;
- (б) k -комплекс с $3(k + 1)$ вершинами, разбитыми на $k + 1$ троек, в котором на любую $k + 1$ вершину из разных троек натянута грань (это граф $K_{3,3}$ при $k = 1$ и $(k + 1)$ -кратный джойн $[3]^{*(k+1)}$ троеточия $[3]$ при произвольном k);
- (с) k -я декартова степень произвольного непланарного графа (см. определение в [Sk, § 5.14]).

Это утверждение — один из ранних результатов комбинаторной топологии (сейчас она называется алгебраической топологией) и топологической комбинаторики (которая также является областью активных исследований).

Пункты (а) и (б) выведены Эгбертом ван Кампеном в 1933 г. [vK32] из [Sk, лемма 5.7.3] (и её аналога для $[3]^{*(k+1)}$) при помощи аппроксимации. (Фактически выведена теорема ван Кампена 3.2.2, поскольку

¹⁷⁾ Родственное, но отличное от данного понятие топологической вложимости не используется в данном тексте. Вложимость (симплициальную, PL- или топологическую) комплекса в $\mathbb{R}^d$ можно также определить через существование инъективного (симплициального, PL- или непрерывного) отображения тела комплекса в $\mathbb{R}^d$. Доказательства утверждения 3.7.1 дают его аналоги для несуществования почти 2-вложения (определённого в начале п. 3.3) и, как следствие, для несуществования топологического вложения.

ку любое отображение в $\mathbb{R}^{2k}$ из k -мерного остова симплекса произвольной размерности продолжается на весь симплекс, см., например, [Sk20, § 3.4].) Эти пункты также выведены Алехандро Флоресом в 1934 г. [Fl34] из теоремы Борсука-Улама, см. [Sk06, § 5], [Sk, § 5.5 «Кусочно-линейная вложимость комплексов»]. Пункт (с) сформулирован в качестве гипотезы Карлом Менгером в 1929 г., однако доказан только Брайаном Уммелем в 1978 г. для $k = 2$ [Um78] и Михаилом Скопенковым в 2003 г. для произвольного k [Sk03], см. изложение идеи в обзоре [Sk14].

3.8. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О PL-ВЛОЖИМОСТИ

ТЕОРЕМА 3.8.1 (ср. с утверждением 1.2.2). *Для любых фиксированных d, k таких, что $k = 2 \neq d - 2$ или $d \geq (3k + 3)/2$, существует алгоритм распознавания PL-вложимости k -комплексов в $\mathbb{R}^d$.*

В [MTW, приложение А] объясняется, что теорема 3.8.1 для $k = d = 2$ (даже с линейным алгоритмом) следует из критерия типа Куратовского планарности 2-комплексов. Этот критерий доказан Р. Халином и Х. А. Юнгом в 1964 г., см. [MTW, приложение А]. Теорема 3.8.1 для $k = d - 1 = 2$ доказана в [MST+]. В [CKV, текст после теоремы 1.4], [ST17, § 1] объясняется, что теорема 3.8.1 для $d \geq (3k + 3)/2$ (даже с полиномиальным алгоритмом) следует из [CKV, теорема 1.1] и критерия вложимости комплексов в терминах конфигурационных пространств. Этот критерий доказан Андре Хефлигером и Клодом Вебером, см. [CKV, ST17] или обзор [Sk06, теорема 5.5].

Предположения теоремы 3.8.1 выполнены при $d = 2k \geq 6$. Идея доказательства для $d = 2k \geq 6$ обобщает случай $d = 2k = 2$ (§ 1.5), см. [Sk, § 5.8, 5.9 «Распознавание ($\mathbb{Z}_2$ -)вложимости k -комплексов в $\mathbb{R}^{2k}$ »].

ТЕОРЕМА 3.8.2. *Для любых фиксированных d, k таких, что $5 \leq d \in \{k, k + 1\}$, не существует алгоритма распознавания PL-вложимости k -комплексов в $\mathbb{R}^d$.*

В [MTW, теорема 1.1] это выводится из теоремы Сергея Петровича Новикова о нераспознаваемости сферы. Аналог теоремы 3.8.2 для $8 \leq d \leq (3k + 1)/2$ анонсирован в статье [FWZ], содержащей ошибку [Sk20e, § 3] (см. также [KS20]).

Алгоритмическая задача принадлежит классу NP, если её ответ можно проверить за полиномиальное (относительно параметров задачи) число шагов. Задача называется NP-трудной, если любая задача класса NP сводится к ней за полиномиальное число шагов. Приведём

детальное определение на эквивалентном языке. Назовём 3-КНФ-формулой формулу, являющуюся конъюнкцией дизъюнкций, в которой каждая дизъюнкция содержит три переменных или их отрицания (например, $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_4)$). Алгоритмическая задача распознавания свойства $\alpha(K)$ «объекта» K называется *NP-трудной*, если существует полиномиальный по количеству конъюнкций в 3-КНФ-формуле Φ алгоритм, строящий по Φ объект $K(\Phi)$, такой, что $\alpha(K(\Phi))$ выполнено тогда и только тогда, когда формула Φ не задаёт тождественный нуль (ср. с [ST17, Theorem 2]).

ТЕОРЕМА 3.8.3. *Для любых фиксированных d, k таких, что $3 \leq d \leq 3k/2 + 1$, алгоритмическая задача распознавания PL-вложимости k -комплексов в $\mathbb{R}^d$ является NP-трудной.*

Это доказано для $d \geq 4$ и $d = 3$ Иржи Матушеком, Мартином Танцером и Ульрихом Вагнером в 2008 г. [MTW] и Арно де Месмэ, Йоавом Риком, Эриком Сегдвиком и Мартином Танцером в 2017 г. [MRS+] соответственно. См. более простое изложение для случая $d \geq 4$ в [ST17] (где также доказано обобщение). Доказательство для случая $d \geq 4$ использует построение [SS92, FKT, SSS] контрпримеров к аналогу упомянутому выше критерию вложимости комплексов в терминах конфигурационных пространств (при отсутствии размерностного ограничения, имеющегося в критерии). Объяснение идей этого доказательства на маломерных примерах содержится в утверждениях 1.7.1, 1.7.2 и в [Sk, § 5.10, § 5.11 «NP-трудность проблемы вложимости комплексов»].

Следующая таблица подытоживает упомянутые выше результаты по алгоритмической задаче распознавания PL-вложимости k -комплексов в $\mathbb{R}^d$ (+ = комплекс всегда вложим, P = задача алгоритмически разрешима за полиномиальное время, D = задача алгоритмически разрешима, NPh = задача NP-трудная, UD = задача алгоритмически неразрешима).

$k \setminus d$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	P	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	P	D, NPh	NPh	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3		D, NPh	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+	+	+
4			NPh	UD	NPh	NPh	P	+	+	+	+	+	+
5				UD	UD	NPh	NPh	P	P	+	+	+	+
6					UD	UD	NPh	NPh	NPh	P	P	+	+
7						UD	UD	NPh	NPh	NPh	P	P	P

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В этом списке звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

- [AKM] *Abrahamsen M., Kleist L., Miltzow T.* Geometric Embeddability of Complexes is $\exists\mathbb{R}$ -complete. arXiv:2108.02585.
- [AKS] *Avvakumov S., Karasev R., Skopenkov A.* Stronger counterexamples to the topological Tverberg conjecture // *Combinatorica*, to appear. arXiv:1908.08731.
- [Al22] *Alkin E.* Hardness of almost embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$, II. arXiv:2206.13486.
- [AMS+] *Avvakumov S., Mabillard I., Skopenkov A., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2 // *Israel J. Math.* 2021. Vol. 245. P. 501–534. arxiv:1511.03501.
- [ADN+] * *Циклы в графах и в гиперграфах* // Летняя конференция Турнира Городов, 2023. Представляют Э. Алкин, А. Воропаев, С. Дженжер, О. Никитенко и А. Скопенков, https://www.mccme.ru/circles/oim/cycles-in-graphs_rus.pdf [с августа 2023 г.].
- [Ar95] * *Arnold V. I.* Topological invariants of plane curves and caustics. Providence, RI: AMS, 1995. (University Lecture Series; Vol. 5).
- [BB79] *Bajmóczy E. G., Bárány I.* On a common generalization of Borsuk's and Radon's theorem // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1979. Vol. 34, № 3. P. 347–350.
- [BBZ] * *Bárány I., Blagojević P. V. M., Ziegler G. M.* Tverberg's Theorem at 50: Extensions and Counterexamples // *Notices of the AMS.* 2016. Vol. 63, № 7. P. 732–739.
- [BE82] * *Boltyansky V. G., Efremovich V. A.* Intuitive Combinatorial Topology. Springer, 2001.
- [BFZ14] *Blagojević P. V. M., Frick F., Ziegler G. M.* Tverberg plus constraints // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2014. Vol. 46, № 5. P. 953–967. arXiv:1401.0690.
- [BFZ] *Blagojević P. V. M., Frick F., Ziegler G. M.* Barycenters of Polytope Skeleta and Counterexamples to the Topological Tverberg Conjecture, via Constraints // *J. Eur. Math. Soc.* 2019. Vol. 21, № 7. P. 2107–2116. arXiv:1510.07984.
- [Bi21] *Bikeev A. I.* Criteria for integer and modulo 2 embeddability of graphs to surfaces. arXiv:2012.12070v2.
- [BM04] *Boyer J. M., Myrvold W. J.* On the cutting edge: simplified $O(n)$ planarity by edge addition, *Journal of Graph Algorithms and Applications.* 2004. Vol. 8, № 3. P. 241–273.

- [BM15] Bogdanov I., Matushkin A. Algebraic proofs of linear versions of the Conway — Gordon — Sachs theorem and the van Kampen — Flores theorem. arXiv:1508.03185.
- [BMZ09] Blagojević P. V. M., Matschke B., Ziegler G. M. Optimal bounds for a colorful Tverberg — Vrećica type problem // *Advances in Math.* 2011. Vol. 226, № 4. P. 5198–5215. arXiv:0911.2692.
- [BS17] * Bárány I., Soberón P. Tverberg's theorem is 50 years old: a survey // *Bull. AMS (N. S.)* 2018. Vol. 55, № 4. P. 459–492. arXiv:1712.06119.
- [BSS] Bárány I., Shlosman S. B., Szűcs A. On a topological generalization of a theorem of Tverberg // *J. London Math. Soc. (2)*. 1981. Vol. 23, № 1. P. 158–164.
- [BZ16] * Blagojević P. V. M., Ziegler G. M. Beyond the Borsuk — Ulam theorem: The topological Tverberg story // *A Journey Through Discrete Mathematics*. Eds. M. Loeb, J. Nešetřil, R. Thomas. Cham: Springer, 2017, P. 273–341. arXiv:1605.07321v3.
- [CKV] Čadež M., Krčál M., Vokřínek L. Algorithmic solvability of the lifting-extension problem // *Discrete. Comput. Geom.* 2017. Vol. 57, № 4. P. 915–965. arXiv:1307.6444.
- [CLR] * Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999.
- [FKT] Freedman M. H., Krushkal V. S., Teichner P. Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in $\mathbb{R}^4$ // *Math. Res. Lett.* 1994. Vol. 1, № 2. P. 167–176.
- [FK19] Fulek R., Kynčl J. $\mathbb{Z}_2$ -genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices // 35th International Symposium on Computational Geometry. Wadern: Schloss Dagstuhl. Leibniz — Zent. Inform., 2019. (LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.; Vol. 129). Article N 39. P. 1–16. <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SocG-2019-39.pdf>. arXiv:1903.08637.
- [Fl34] Flores A. Über n -dimensionale Komplexe die im E^{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // *Ergeb. Math. Koll.* 1934. Vol. 6. S. 4–7.
- [Fo04] * Fokink R. A forgotten mathematician // *Eur. Math. Soc. Newsletter*. 2004. Vol. 52. P. 9–14.
- [Fr15] Frick F. Counterexamples to the topological Tverberg conjecture // *Oberwolfach reports*. 2015. Vol. 12, № 1. P. 318–321. arXiv:1502.00947.
- [Fr17] Frick F. On affine Tverberg-type results without continuous generalization. arXiv:1702.05466.
- [FS20] Frick F., Soberón P. The topological Tverberg problem beyond prime powers. arXiv:2005.05251.
- [FWZ] Filakovský M., Wagner U., Zhechev S. Embeddability of simplicial complexes is undecidable // *Proceedings of the 2020 ACM-SIAM*

- Symposium on Discrete Algorithms. <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9781611975994.47>.
- [GDI] * Глибичук А. А., Дайняк А. Б., Ильинский Д. Г., Кунавский А. Б., Райгородский А. М., Скопенков А. Б., Чернов А. А. Элементы дискретной математики в задачах. М.: МЦНМО, 2016. <http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf>
- [Gr10] Gromov M. Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry // Geometric and Functional Analysis. 2010. Vol. 20, № 2. P. 416–526.
- [GS79] Gruber P. M., Schneider R. Problems in geometric convexity // Contributions to geometry (Proc. Geom. Sympos., Siegen, 1978). Basel — Boston, Mass.: Birkhäuser, 1979. P. 255–278.
- [Ha] * Harary F. Graph theory. (Русс. пер.: Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.)
- [HT74] Hopcroft J., Tarjan R. E. Efficient planarity testing // J. Assoc. Comput. Mach. 1974. Vol. 21, № 4. P. 549–568.
- [Is] * <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [JVZ] Jojić D., Vrećica S. T., Živaljević R. T. Topology and combinatorics of “unavoidable complexes”. arXiv:1603.08472v1.
- [Kho] Khoroshavkina N. A simple characterization of graphs of cutwidth 2. arXiv:1811.06716.
- [Ko18] * Колпаков Е. С. Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО, 2018. С. 130–133. arXiv:1903.11055.
- [KRR+] * Kogan E., Retinskiy V., Riabov E., Skopenkov A. Towards higher-dimensional combinatorial geometry. <https://www.mccme.ru/circles/oim/multicomb.pdf>.
- [KS20] Karasev R., Skopenkov A. Some “converses” to intrinsic linking theorems // Discr. Comp. Geom., to appear. arXiv:2008.02523.
- [Lo] Longueville M. de. Notes on the topological Tverberg theorem // Discrete Math. 2002. Vol. 247, № 1–3. P. 271–297. (The paper first appeared in Discrete Math., 2001, vol. 241, pp. 207–233, but the original version suffered from serious publisher’s typesetting errors.)
- [Ma97] Makarychev Yu. A short proof of Kuratowski’s graph planarity criterion // J. Graph Theory. 1997. Vol. 25, № 2. P. 129–131.
- [Ma03] * Matoušek J. Using the Borsuk — Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Berlin: Springer Verlag, 2003. (Universitext).
- [MRS+] Mesmay A. de, Rieck Y., Sedgwick E., Tancer M. Embeddability in $\mathbb{R}^3$ is NP-hard. arXiv:1708.07734.

- [MST+] *Matoušek J., Sedgwick E., Tancer M., Wagner U.* Embeddability in the 3-sphere is decidable // J. ACM. 2018. Vol. 65, № 1. P. 1–49. arXiv:1402.0815.
- [MT01] * *Mohar B., Thomassen C.* Graphs on Surfaces. Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 2001. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences).
- [MTW10] *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* A geometric proof of the colored Tverberg theorem // Discr. Comp. Geom. 2012. Vol. 47, № 2. P. 245–265. arXiv:1008.5275.
- [MTW] *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* Hardness of embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$ // J. Eur. Math. Soc. 2011. Vol. 13, № 2. P. 259–295. arXiv:0807.0336.
- [MW15] *Mabillard I., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, I. A. Whitney Trick for Tverberg-Type Problems. arXiv:1508.02349.
- [MW16] *Mabillard I., Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, II. The Deleted Product Criterion in the r -Metastable Range. arXiv:1601.00876v2.
- [Oz] *Özaydin M.* Equivariant maps for the symmetric group, unpublished. <http://minds.wisconsin.edu/handle/1793/63829>.
- [Pe72] * *Peterson B. B.* The Geometry of Radon's Theorem // Amer. Math. Monthly. 1972. Vol. 79. P. 949–963.
- [Pr04] * *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. <http://www.mccme.ru/prasolov>.
- [RRS] * *Ретинский В. И., Рябичев А. Д., Скопенков А. Б.* Мотивированное изложение доказательства теоремы Тверберга // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 166–169. arXiv:2008.08361.
- [Sa91] *Sarkaria K. S.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion // Israel J. Math. 1991. Vol. 73, № 1. P. 79–89. <http://kssarkaria.org/docs/One-dimensional.pdf>.
- [Sa91g] *Sarkaria K. S.* A generalized van Kampen — Flores theorem // Proc. AMS. 1991. Vol. 111, № 2. P. 559–565.
- [Sc04] *Schöneborn T.* On the Topological Tverberg Theorem. arXiv:math/0405393.
- [Sc13] * *Schaefer M.* Hanani — Tutte and related results // Geometry — intuitive, discrete, and convex. Budapest: János Bolyai Math. Soc., 2013. (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 24). P. 259–299. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/htsurvey.pdf>.
- [Sh18] * *Shlosman S.* Topological Tverberg Theorem: the proofs and the counterexamples // Russian Math. Surveys. 2018. Vol. 73, № 2. P. 175–182. arXiv:1804.03120.

- [Si16] *Simon S.* Average-value Tverberg partitions via finite Fourier analysis // *Israel J. Math.* 2016. Vol. 216, № 1. P. 891–904. arXiv:1501.04612.
- [Sk03] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // *Fund. Math.* 2003. Vol. 179, № 3. P. 191–198. arXiv:0808.1199.
- [Sk05] * *Скопенков А. Б.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // *Математическое просвещение Сер. 3. Вып. 9.* М.: МЦНМО, 2005. С. 116–128. arXiv:0802.3820.
- [Sk06] * *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // *Surveys in contemporary mathematics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 347). P. 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *Скопенков А. Б.* Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность // *Математическое просвещение, в печати.* arXiv:1402.0658.
- [Sk16] * *Skopenkov A.* User's guide to the topological Tverberg Conjecture. arXiv:1605.05141v4. (Ранее опубликован сокращённый вариант: *Russian Math. Surveys.* 2018. Vol. 73, № 2. P. 323–353.)
- [Sk16'] * *Skopenkov A.* Stability of intersections of graphs in the plane and the van Kampen obstruction // *Topology Appl.* 2018. Vol. 240. P. 259–269. arXiv:1609.03727.
- [Sk17] *Skopenkov A.* Eliminating higher-multiplicity intersections in the metastable dimension range. arXiv:1704.00143.
- [Sk18] * *Skopenkov A.* Invariants of graph drawings in the plane // *Arnold Math. J.* 2020. Vol. 6, № 1. P. 21–55. Full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *Skopenkov A.* Algebraic Topology From Geometric Viewpoint (in Russian) / 2nd ed. Moscow: MCCME, 2020. Part of the book: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>. Part of the English translation: <https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf>.
- [Sk20e] * *Skopenkov A.* Extendability of simplicial maps is undecidable // *Discr. Comp. Geom.* 2022. Vol. 69, № 1. P. 1–10. arXiv:2008.00492.
- [Sk] * *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.
- [Sk20u] * *Скопенков А. Б.* Основы теории узлов и зацеплений для пользователя // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27.* М.: МЦНМО, 2021. С. 128–165. (English version published in: *Topology, Geometry, and Dynamics.* Providence, RI: AMS, 2021. (Contemporary Mathematics; Vol. 772). P. 281–309. arXiv:2001.01472.)
- [SS92] *Segal J., Spież S.* Quasi embeddings and embeddings of polyhedra in $\mathbb{R}^m$ // *Topology Appl.* 1992. Vol. 45, № 3. P. 275–282.

- [SSS] *Segal J., Skopenkov A., Spieź S.* Embeddings of polyhedra in $\mathbb{R}^m$ and the deleted product obstruction // *Topology Appl.* 1998. Vol. 85, № 1–3. P. 335–344.
- [ST07] * *Скопенков А. Б., Телишев А. С.* И вновь о критерии Куратовского планарности графов // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11.* М.: МЦНМО, 2007. С. 159–160.
- [ST17] *Skopenkov A., Tancer M.* Hardness of almost embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$ // *Discr. Comp. Geom.* 2019. Vol. 61, № 2. P. 452–463. arXiv:1703.06305.
- [SZ05] *Schöneborn T., Ziegler G.* The Topological Tverberg Theorem and Winding Numbers // *J. Comb. Theory. Ser. A.* 2005. Vol. 112, № 1. P. 82–104. arXiv:math/0409081.
- [Ta] * *Handbook of Graph Drawing and Visualization* / Ed. by R. Tamassia. CRC Press, 2016.
- [Th81] * *Thomassen C.* Kuratowski's theorem // *J. Graph. Theory.* 1981. Vol. 5, № 3. P. 225–241.
- [Um78] *Ummel B.* The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space // *Trans. AMS.* 1978. Vol. 242. P. 319–328.
- [Vi02] * *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.
- [vK32] *Kampen E. R. van.* Komplexe in euklidischen Räumen // *Abh. Math. Sem. Hamburg.* 1933. Vol. 9. S. 72–78; Berichtigung dazu. S. 152–153. (English translation by Tu Tâm Nguyễn-Phan: https://sites.google.com/site/tutamnguyenphan/van_Kampen.pdf.)
- [Vo96] *Воловиков А. Ю.* К топологическому обобщению теоремы Тверберга // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59, вып. 3. С. 454–465.
- [Vo96v] *Воловиков А. Ю.* К теореме ван Кампена — Флореса // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59, вып. 5. С. 663–670.
- [Wn] * https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number.
- [Wu65] * *Wu W. T.* A Theory of Embedding, Immersion and Isotopy of Polytopes in an Euclidean Space. Peking: Science Press, 1965.
- [Zi11] * *Ziegler G. M.* 3N Colored Points in a Plane // *Notices of the AMS.* 2011. Vol. 58, № 4. P. 550–557.

Вокруг правильного многоугольника

С. Б. Гашков

В статье предлагаются несколько задач и теорем (в основном малоизвестных), связанных с правильными многоугольниками (и комплексными числами). Экстремальные свойства многоугольников рассматриваться не будут, как и теория их построения циркулем и линейкой, так как они требуют специальных публикаций, которые к тому же не раз появлялись в «Математическом просвещении».

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Широко известно, что для правильного треугольника сумма расстояний от произвольной точки до его вершин достигает минимума только в его центре и это утверждение можно сформулировать в виде неравенства: если ABC — правильный треугольник с единичной стороной и O — произвольная точка, то

$$AO + BO + CO \geq \sqrt{3}$$

и это неравенство обращается в равенство только для центра треугольника.

Из неравенства $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ легко следует, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки до вершин правильного треугольника достигает минимума только в его центре.

Естественно возникает такая задача: найти минимум

$$|AO||BO| + |CO||BO| + |CO||AO|$$

для данного правильного треугольника ABC . Но решить её ни алгебраически, ни геометрически оказалось не просто, хотя обе предыдущие задачи имеют красивые геометрические и алгебраические решения даже в более общей постановке. Возможно, причина в том, что в этой задаче не одна, а четыре экстремальные точки.

Первую из указанных выше задач (о минимуме суммы расстояний от точки до вершин правильного треугольника) можно сформулиро-

вать и для произвольного треугольника или даже для произвольной системы точек пространства. Функция, равная расстоянию от произвольной точки X до данной точки A_i является выпуклой, сумма таких функций также выпукла, поэтому точка минимума единственна¹⁾, и можно доказать, что сумма единичных векторов, направленных из неё в точки A_i , будет равна нулю, если точка с этим свойством существует (см. [5]). Например, в случае выпуклого четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ это точка пересечения диагоналей (тогда утверждение легко доказывается и без использования сформулированного выше свойства), в случае треугольника с углами, меньшими 120 градусов, такой точкой является точка, из которой стороны треугольника видны под равными углами (она называется точкой Торричелли)²⁾, а в случае произвольного тетраэдра такой точкой также является точка, из которой все его стороны видны под равными углами, если такая точка есть (тогда указанные углы будут равны $\arccos(-1/3)$).

Вторую из приведённых выше задач также можно сформулировать для произвольного треугольника или даже для произвольной системы точек пространства. Функция, равная квадрату расстояния от произвольной точки X до данной точки A_i является выпуклой, сумма таких функций также выпукла, точка минимума единственна, и можно доказать, что она совпадает с центром тяжести данной системы точек (это теорема Лейбница), см. например, [4].

В случае, когда система точек образует правильный многоугольник, обе задачи имеют общую экстремальную точку — центр этого многоугольника, вторая задача легко следует из первой с помощью известного неравенства

$$n(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq (x_1 + \dots + x_n)^2,$$

а первая задача имеет несколько элементарных решений (см., например, [6]).

Задачу о сумме попарных произведений расстояний до вершин правильного треугольника можно обобщить на случай правильного n -угольника разными способами.

Обозначим

$$\sigma_k = \sigma_k(a_1, \dots, a_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$$

¹⁾ Механическое приспособление для нахождения этой точки описано в книге [12].

²⁾ Problems.ru, задача 57541, а также [8, 9].

— элементарный симметрический многочлен от переменных $a_1, \dots, a_n$, и положим

$$p_k(a_1, \dots, a_n) = \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}},$$

где $\binom{n}{k}$ — биномиальный коэффициент. Очевидно, что $p_k(a, \dots, a) = a^k$, $k = 1, \dots, n$. Далее понадобится неравенство Ньютона — Маклорена (см. [1]), уточняющее (или, как говорят, интерполирующее) неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: для любых положительных $a_1, \dots, a_n$

$$p_1(a_1, \dots, a_n) \geq p_2(a_1, \dots, a_n)^{1/2} \geq \dots \geq p_n(a_1, \dots, a_n)^{1/n}.$$

Задача 1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — вершины правильного n -угольника, вписанного в окружность радиусом R , и P — произвольная точка. Пусть

$$P_k = p_k(|PA_1|, \dots, |PA_n|), \quad k = 1, \dots, n.$$

Докажите, что

$$P_1 \geq P_2^{1/2} \geq \dots \geq P_{n-1}^{1/(n-1)} \geq R.$$

Последнее неравенство обращается в равенство только когда P совпадает с одной из вершин A_i этого n -угольника или с его центром. Остальные неравенства обращаются в равенство только когда P совпадает с его центром.

В частности, сумма расстояний от произвольной точки до вершин правильного n -угольника принимает минимальное значение только в его центре, сумма попарных произведений этих расстояний тоже принимает минимальное значение только в его центре и т. д., но сумма произведений всех расстояний, кроме одного, принимает минимальное значение и в его центре, и в его вершинах. Указанную в задаче 1 цепочку неравенств можно продолжить, заменив R на $P_n^{1/n}$, однако минимальное значение произведения P_n всех расстояний очевидно равно нулю.

Для решения задачи понадобится полезная и в других обстоятельствах

Задача 2. Докажите, что для многочлена $p(z)$ степени не выше $n - 1$ справедлива следующая интерполяционная формула:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\varepsilon^k) \frac{\varepsilon^k}{n} \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j), \quad \text{где } \varepsilon = e^{2\pi i/n}.$$

Задача 3. В дополнение к задаче 1 докажите, что при выполнении условия $|PO| = r \neq R$, где O — центр описанной вокруг правильного n -угольника $A_1 \dots A_n$ окружности, справедливо неравенство

$$R^n + r^n \geq P_n \geq |R^n - r^n|.$$

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

2. Решение. Согласно интерполяционной формуле Лагранжа

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\varepsilon^k) \frac{\prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j)}{\prod_{j, j \neq k} (\varepsilon^k - \varepsilon^j)},$$

далее, дифференцируя

$$z^n - 1 = \prod_{j=1}^n (z - \varepsilon^j),$$

имеем

$$nz^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j),$$

откуда

$$n\varepsilon^{-m} = n\varepsilon^{m(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j, j \neq k} (\varepsilon^m - \varepsilon^j) = \prod_{j, j \neq m} (\varepsilon^m - \varepsilon^j),$$

значит,

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n-1} p(\varepsilon^k) \frac{\varepsilon^k}{n} \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j).$$

1. Решение. В силу неравенства Ньютона — Маклорена достаточно доказать, что $P_{n-1} \geq R^{n-1}$. Без ограничения общности считаем, что $R = 1$ и точкам A_k соответствуют числа ε^k , $k = 1, \dots, n$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, $\varepsilon^n = 1$. Пусть точка P соответствует числу z . Тогда

$$nP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \prod_{j \neq k} (z - \varepsilon^j) \right|.$$

Но согласно задаче 2 в случае многочлена $p(z) = 1$ имеем

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j).$$

Остаётся применить к обеим частям тождества неравенство треугольника $|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|$ и получить неравенство

$$nP_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j) \right| \geq n.$$

Равенство в нём достигается только тогда, когда либо $z = \varepsilon^k$ при некотором k (тогда все слагаемые нулевые, кроме одного), либо при всех $k = 1, \dots, n-1$

$$\frac{(z-1)\varepsilon^k}{z-\varepsilon^k} = \frac{\varepsilon^k \prod_{j, j \neq k} (z - \varepsilon^j)}{\varepsilon^n \prod_{j=1}^{n-1} (z - \varepsilon^j)} \in \mathbb{R}$$

(только тогда все слагаемые суммы пропорциональны друг другу с положительными коэффициентами).

В первом случае из равенства $nP_{n-1} = n$ в силу симметрии следует, что для любой вершины рассматриваемого правильного n -угольника произведение расстояний от неё до остальных вершин равно n , откуда получаем ещё одно доказательство п. в) следующей далее задачи 6.

Так как

$$\frac{(z-1)\varepsilon^k}{z-\varepsilon^k} = w, \quad w \in \mathbb{R},$$

получаем, что

$$z = \frac{(w-1)\varepsilon^k}{w-\varepsilon^k}.$$

Это дробно-линейное преобразование переводит действительную прямую в окружность, проходящую через точки $0, 1, \varepsilon_k, k = 1, \dots, n-1$, значит, точка $z \neq 1$ должна принадлежать пересечению всех таких окружностей (а они различны, так как имеют две общие точки и не совпадают с описанной окружностью n -угольника), т. е. совпадать с 0 .

3. *Указание.* Применить задачу 4 из следующего раздела.

РАВЕНСТВА МУАВРА, КУУТСА И ГОУБСОНА

Здесь сформулированы в виде задач несколько классических, но не слишком известных теорем (см., например, [13], а также [11] и [7]).

Задача 4 (теорема Куутса — Муавра). *В окружность радиусом a с центром O вписан правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$. Пусть $|PO| = c$, $\angle POA_1 = \theta$, тогда очевидно $\angle POA_{k+1} = \theta + 2k\pi/n$, $k = 1, \dots, n-1$. Докажите, что*

$$|PA_1|^2 \dots |PA_n|^2 = a^{2n} - 2(ac)^n \cos n\theta + c^{2n},$$

и в частности, если $c = a$, то

$$|PA_1| \dots |PA_n| = 2a^n \sin \frac{\theta}{2}$$

(теорема Муавра). Если P лежит на радиусе OA_k , то

$$|PA_1| \dots |PA_n| = |a^n - c^n|,$$

а если P лежит на биссектрисе угла A_kOA_{k+1} , то

$$|PA_1| \dots |PA_n| = a^n + c^n.$$

Задача 5 (Гобсон). В окружность радиусом a с центром O вписан правильный n -угольник $A_1 \dots A_n$. Точка P лежит на той же окружности. Докажите, что:

а) если P лежит на дуге A_1A_n , то

$$|PA_1||PA_2| + |PA_2||PA_3| + \dots + |PA_{n-1}||PA_n| - |PA_n||PA_1| = 2na^2 \cos \frac{\pi}{n},$$

б) если P лежит на дуге A_1A_n , то при нечётном n

$$|PA_1| - |PA_2| + |PA_3| - \dots + |PA_n| = 0,$$

в) всегда

$$|PA_1|^2 + \dots + |PA_n|^2 = 2na^2.$$

Задача 6. Правильный n -угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что:

а) сумма квадратов всех его сторон и диагоналей равна n^2 ,

б) сумма всех его сторон и диагоналей равна $n \operatorname{ctg} \pi/2n$,

в) произведение всех его сторон и диагоналей равно $n^{n/2}$.

г) Обозначим вершины n -угольника через $A_1, \dots, A_n$ и продолжим нумерацию по кругу далее, так что $A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2$ и т. д. Тогда $|OA_1| + |OA_4| + |OA_9| + \dots + |OA_{n^2}| = \sqrt{n}$ для нечётного n , где O — центр окружности.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

4. **Указание.** Для вычисления $|PA_k|$ применить теорему косинусов и получить, что

$$|PA_k|^2 = a^2 - 2ac \cos \left(\theta + \frac{2(k-1)\pi}{n} \right) + c^2,$$

а потом применить тождества задачи 10. После подстановки $a = c$ применить формулу двойного угла. В случае точки на радиусе можно считать, что $k = 1$, тогда $\theta = 0$. В случае точки на биссектрисе можно считать, что $\theta = \pi/n$.

5. Указание. Пункт а). Воспользоваться тем, что площадь n -угольника $A_1 \dots A_n$ равна сумме площадей треугольников $A_k P A_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$, уменьшенной на площадь треугольника $A_1 P A_n$. Для вычисления их площадей применить формулу $(ab \sin \alpha)/2$, где в качестве α брать углы при вершине P . Согласно теореме о вписанном угле эти углы равны π/n , а один угол равен их сумме $(n-1)\pi/n$.

Пункт б). Обозначим угол, под которым видна хорда $A_1 P$ из центра окружности, через φ . Тогда её длина равна $2a \sin(\varphi/2)$. Аналогично длины хорд $A_k P$ равны $2a \sin(\varphi/2 + (k-1)\pi/n)$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\sin \frac{\varphi}{2} - \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{n} \right) + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{2\pi}{n} \right) - \dots + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = 0.$$

Но это вытекает из тождества задачи 9.

Пункт в). Применить для каждого треугольника $A_k P A_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-1$, теорему косинусов, выражая b^2 в виде

$$|A_k P|^2 + |A_{k+1} P|^2 - 2|A_k P||A_{k+1} P| \cos \frac{\pi}{n},$$

где $b = 2a \sin(\pi/n)$ — сторона n -угольника, и аналогичную формулу написать и для треугольника $A_1 P A_n$. Сложить полученные равенства и воспользоваться тождеством п. а).

6. Указание к п. а)–б). Применить задачи 4,

5. Указание к п. в). Для получения ответа можно вычислить произведение всех сторон и диагоналей, выходящих из одной вершины, и возвести результат в степень $n/2$ (так как в полном произведении каждая сторона или диагональ появляется дважды). Стороны и диагонали имеют длины $2 \sin(k\pi/n)$, $k = 1, \dots, n-1$. Далее примените формулу Валлиса из задачи 11 следующего раздела.

Можно также решить задачу, используя определитель Вандермонда для чисел

$$z_k = e^{i2\pi k/n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Эта матрица с элементами

$$a_{k,j} = z_k^j = e^{i2\pi kj/n}, \quad k, j = 0, \dots, n-1,$$

является матрицей дискретного преобразования Фурье (ДПФ) n -го порядка. Умножая её на комплексно сопряжённую к ней матрицу

$$a_{k,j}^* = \bar{z}_k^j = z_k^{-j} = e^{-i2\pi kj/n}, \quad k, j = 0, \dots, n-1$$

(если $|z| = 1$, то $\bar{z} = 1/z$), получаем диагональную матрицу с числами n на диагонали (так как в силу формулы геометрической прогрессии

$\sum_{l=0}^{n-1} e^{i2\pi(k-j)l/n} = 0$ при $k \neq j$), значит, квадрат модуля определителя матрицы ДПФ n -го порядка равен $n^{n/2}$ (определители комплексно сопряжённых матриц комплексно сопряжены друг с другом, определитель произведения матриц равен произведению определителей). С другой стороны, согласно формуле для определителя Вандермонда квадрат его модуля равен

$$\prod_{0 \leq k < j < n} |z_k - z_j|^2 = \prod_{0 \leq k < j < n} |e^{i2\pi k/n} - e^{i2\pi j/n}|^2$$

— квадрату произведения длин сторон и диагоналей правильного n -угольника, вписанного в единичную окружность. Отсюда можно также вывести решение задачи 11.

Указание к п. г). См. задачу 47.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА МУАВРА И ВАЛЛИСА

Вывод тождеств будет основан на широко известных фактах, которые сформулируем в виде задач.

ЗАДАЧА 7. Решите в комплексных числах уравнение $z^n = a$.

ЗАДАЧА 8. Проверьте тождества:

$$|1 - e^{i2x}| = 2 \sin|x|, \quad |e^{ix} - e^{iy}| = 2 \sin \left| \frac{y-x}{2} \right|.$$

ЗАДАЧА 9. Докажите тождества:

- а) $e^{2i\pi/n} + e^{4i\pi/n} + \dots + e^{2(n-1)i\pi/n} = -1$;
- б) $e^{i\pi/2n} - e^{2i\pi/2n} + \dots + e^{(2n-1)i\pi/2n} = 0$;
- в) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{x + 2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$;
- г) $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{x + 2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$;
- д) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{2n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{x + (2n-1)\pi}{2n}\right) = 0$;
- е) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - \cos\left(x + \frac{2\pi}{2n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{x + (2n-1)\pi}{2n}\right) = 0$.

ЗАДАЧА 10 (де Муавр). Докажите тождества:

- а) $x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1 = (x^n - \cos \theta - i \sin \theta)(x^n - \cos \theta + i \sin \theta)$;
- б) $x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1 =$

$$= \prod_{s=1}^n \left(x - \cos \frac{\theta + 2s\pi}{n} - i \sin \frac{\theta + 2s\pi}{n} \right) \left(x - \cos \frac{\theta + 2s\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2s\pi}{n} \right);$$

$$в) \quad x^{2n} - 2x^n \cos \theta + 1 = \prod_{s=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{\theta + 2s\pi}{n} + 1 \right);$$

$$з) \quad x^{2n} - 2x^n y^n \cos \theta + y^{2n} = \prod_{s=1}^n \left(x^2 - 2xy \cos \frac{\theta + 2s\pi}{n} + y^2 \right);$$

$$д) \quad x^n + x^{-n} - 2 \cos \theta = \prod_{s=1}^n \left(x + x^{-1} - 2 \cos \frac{\theta + 2s\pi}{n} \right);$$

$$е) \quad \cos n\varphi - \cos n\theta = 2^{n-1} \prod_{s=1}^n \left(\cos \varphi - \cos \left(\theta + \frac{2s\pi}{n} \right) \right).$$

ЗАДАЧА 11. Докажите тождества Валлиса

$$\prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{n} = n 2^{-n+1}, \quad \prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n} 2^{-n+1},$$

$$\prod_{l=1}^{n-1} \cos \frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n} 2^{-n+1}, \quad \prod_{l=1}^n \sin \frac{(2l-1)\pi}{4n} = 2^{-n+1/2}.$$

Следующая формула используется при выводе формулы Стирлинга для факториала и обычно доказывается с помощью интегрального исчисления.

ЗАДАЧА 12. Докажите неравенство и формулу Валлиса для числа π («бесконечное произведение Валлиса»):

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n}{2n+1} < \prod_{l=1}^n \frac{4l^2}{4l^2-1} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^n \frac{4l^2}{(2l-1)(2l+1)} = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{4l^2}{4l^2-1}.$$

Эта формула является частным случаем эйлера представления синуса в виде бесконечного произведения:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

При $x = 1/2$ получается формула Валлиса.

Для приближённого вычисления π она мало подходит из-за медленной сходимости. Зато результат всегда получается в виде обыкновенной дроби. Размеры числителя и знаменателя у неё очень быстро растут, что тоже затрудняет вычисления. Можно после добавления каждого множителя выполнять сокращение полученной дроби. Но всё

равно размеры несократимой дроби растут очень быстро. Например, при $n = 50$ получается дробь

$$P := \frac{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224}{1004090061179346759123504450893009487814484408025470281875}.$$

Погрешность приближения равна 0,007913181.

Часто встречаются в разных задачниках следующие неравенства.

Задача 13. Докажите, что

$$\frac{1}{2\sqrt{m}} < \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} < \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad \sqrt{m} < \prod_{k=1}^m \frac{2k}{2k-1} < 2\sqrt{m}.$$

Из неравенства Валлиса следует более точные границы.

Задача 14. Докажите неравенство

$$\sqrt{n\pi} < \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} < \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

Из задачи 12 также можно вывести следующую оценку для центрального биномиального коэффициента.

Задача 15. Докажите при чётном n неравенства

$$\frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{(n+1)\pi}} < \binom{n}{n/2} < \frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{n\pi}}.$$

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

10. *Указание.* Пункт б) следует из п. а) и задачи 7, п. в) следует из п. б) с помощью попарного перемножения скобок, п. г) следует из п. в) с помощью подстановки x/y вместо x , п. д) следует из п. г) с помощью подстановки $1/x$ вместо y , п. е) следует из п. д) с помощью подстановки $e^{i\varphi}$ вместо x и $n\theta$ вместо θ .

11. *Решение.* Третье равенство вытекает из второго в силу следствия формул приведения:

$$\sin \frac{k\pi}{2n} = \cos \frac{(n-k)\pi}{2n}.$$

Перемножив второе и третье равенство и воспользовавшись формулой двойного угла $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, получаем, что первое равенство равносильно второму (или третьему). Четвёртое равенство вытекает из второго, если заметить, что

$$\prod_{l=1}^n \sin \frac{(2l-1)\pi}{4n} = \frac{\prod_{l=1}^{2n-1} \sin \frac{l\pi}{4n}}{\prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{2l\pi}{4n}} = \frac{P_{2n}}{P_n} = \frac{\sqrt{2}}{2^n},$$

где

$$P_n = \prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n} 2^{-n+1}.$$

Докажем первое равенство:

$$\prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{n} = n 2^{-n+1}.$$

Заметим, что многочлен

$$p_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

имеет комплексные корни $x_k = \varepsilon^k$, $k = 1, \dots, n-1$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, так как двучлен $x^n - 1$ имеет те же корни, а также корень $x_0 = \varepsilon^0 = 1$. Из теоремы Безу следует тогда тождество

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k),$$

откуда в силу тождества $|1 - e^{2ix}| = 2 \sin|x|$ задачи 8 имеем равенство

$$\begin{aligned} n = p_n(1) &= |p_n(1)| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - e^{2k\pi i/n}| = \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

12. *Решение.* Из неравенства $\sin k\alpha \leq k \sin \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, следует при $k > 1$, что $\frac{\sin \alpha}{\sin k\alpha} > \frac{1}{k}$, откуда имеем

$$1 - \left(\frac{\sin \alpha}{\sin k\alpha} \right)^2 < \frac{k^2 - 1}{k^2}.$$

Применяя тождество

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x - y) \sin(x + y)$$

(получающееся, например, умножением формул синусов суммы и разности) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin k\alpha} \cdot \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha} &= \frac{\sin^2 k\alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2 k\alpha} = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 k\alpha} < 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2}, \\ \frac{\sin k\alpha}{\sin(k-1)\alpha} \cdot \frac{\sin k\alpha}{\sin(k+1)\alpha} &> \frac{k^2}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Перемножая полученные неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin 2k\alpha} \cdot \frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha} &< \prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2} = Q_n, \\ \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin 2k\alpha}{\sin 2(k+1)\alpha} \cdot \frac{\sin(2k+2)\alpha}{\sin 2(k+1)\alpha} &> \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(2k+1)^2}{2k(2k+2)} = \\ &= \frac{4n}{2n+1} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2-1}{4k^2} = \frac{4nQ_n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha = \pi/(4n)$ и используя тождества задачи 11, левые части этих неравенств можно записать в виде

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin 2k\alpha} \cdot \frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha} &= \frac{\sin(2n+1)\alpha \left(\prod_{k=1}^n \sin(2k-1)\alpha \right)^2}{\sin \alpha \prod_{k=1}^n \sin^2 2k\alpha} = \\ &= \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{(2^{-n+1/2})^2}{P_n^2} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} \cdot \frac{2^{-2n+1}}{(\sqrt{n} 2^{-n+1})^2} = \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}, \end{aligned}$$

где

$$P_n = \prod_{l=1}^n \sin \frac{l\pi}{2n} = \prod_{l=1}^{n-1} \sin \frac{l\pi}{2n} = \sqrt{n} 2^{-n+1},$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha} \cdot \frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin(2k+2)\alpha} &= \\ &= \frac{\sin 2\alpha \sin 2n\alpha}{\sin \alpha \sin(2n+1)\alpha} \prod_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)\alpha}{\sin 2k\alpha} \cdot \frac{\sin(2k+1)\alpha}{\sin 2k\alpha} = \\ &= \frac{2 \cos \alpha \sin 2n\alpha}{\sin(2n+1)\alpha} \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\frac{2n+1}{4n^2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} = \left(\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} \right) \frac{2n+1}{4n} > Q_n > \frac{1}{2n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}.$$

Так как $\operatorname{tg} x > x > \sin x$ при $\pi/2 > x > 0$, получаем, что $\frac{1}{x} \cos x < \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x}$, значит,

$$\frac{2}{\pi} \frac{2n+1}{2n} > Q_n > \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{4n}.$$

Так как $\cos x > 1 - x^2/2$, получаем, что

$$\frac{2}{\pi} \frac{2n+1}{2n} > Q_n > \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{32n^2} \right).$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 2/\pi$. Так как Q_n монотонно убывает и стремится к $\pi/2$, строгая нижняя оценка для Q_n очевидно равна $\pi/2$. Отсюда имеем

$$\frac{\pi}{2} \frac{2n}{2n+1} < \prod_{l=1}^n \frac{4l^2}{4l^2-1} < \frac{\pi}{2}.$$

13. Указание. Очевидно, что

$$\frac{2k}{2k+1} < \frac{2k+1}{2k+2},$$

откуда для $a = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} a^2 &= a \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} < a \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \frac{k}{k+1} = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}, \end{aligned}$$

значит, $a < 1/\sqrt{m}$. Для доказательства нижней оценки перепишем верхнюю как

$$\prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k+1}{2k} > \sqrt{m},$$

откуда имеем

$$\prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k-1}{2k} > \frac{\sqrt{m}}{2m-1} > \frac{1}{2\sqrt{m}},$$

значит, в силу $\frac{2k}{2k+1} > \frac{2k-1}{2k}$ получаем

$$\prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k}{2k+1} > \prod_{k=1}^{m-1} \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Последнее неравенство задачи очевидно следует из первого.

14. Положим

$$P_n = \frac{2}{1} \frac{4}{3} \cdots \frac{2n}{2n-1}.$$

Тогда

$$R_n = \prod_{l=1}^n \frac{4l^2}{4l^2-1} = \prod_{l=1}^n \frac{2l}{2l-1} \prod_{l=1}^n \frac{2l}{2l+1} = \frac{P_n^2}{2n+1},$$

и из неравенства задачи 12 следует, что

$$\sqrt{n\pi} < P_n < \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

15. Указание. При $n = 2m$ имеем

$$\binom{n}{n/2} = \frac{(2m)!}{m!m!} = \frac{2^m(2m-1)!!}{m!} = \frac{2^{2m}(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{2^{2m}}{\prod_{l=1}^m \frac{2l}{2l-1}}.$$

НЕРАВЕНСТВА ШУРА

Начинаем с простых задач.

ЗАДАЧА 16. Докажите для сторон треугольника и радиуса описанного круга неравенство $abc \leq 3\sqrt{3}R^3$. Когда имеет место равенство?

ЗАДАЧА 17. Корни кубического трёхчлена $z^3 + pz + q$ по модулю не больше единицы. Когда достигает максимума его дискриминант?

Следующая задача была предложена на олимпиаду А. В. Спиваком (см. [6]).

ЗАДАЧА 18 (Москва, 1990). Четырёхугольник лежит в круге радиусом R . Когда достигает максимума произведение всех его сторон и диагоналей?

ЗАДАЧА 19. Выпуклый n -угольник лежит в круге единичного радиуса.

- Когда достигает максимума произведение длин его сторон?
- Когда достигает максимума произведение всех длин его сторон и диагоналей?

Квадратная $n \times n$ -матрица W_n с элементами $a_{k,l} = x_k^l$, $k, l = 0, \dots, n-1$, называется матрицей Вандермонда.

ЗАДАЧА 20. Докажите, что определитель матрицы Вандермонда равен $\prod_{k < l} (x_k - x_l)$.

Матрицы из следующей задачи являются частными случаями матриц Вандермонда.

ЗАДАЧА 21. Пусть $\varepsilon_n = e^{2\pi i/n}$. Обозначим через F_n квадратную матрицу порядка n с элементами $a_{k,l} = \varepsilon_n^{kl}$, а через $\bar{F}_n$ — матрицу с сопряжёнными элементами $\bar{a}_{k,l} = \varepsilon_n^{-kl}$. Докажите, что произведения матриц $F_n \bar{F}_n = \bar{F}_n F_n = nE_n$, где E_n — единичная матрица.

ЗАДАЧА 22. Докажите, что определители матриц задачи 21 по модулю равны $n^{n/2}$.

Задача 23. Докажите, что $\prod_{k < l} |\varepsilon_n^k - \varepsilon_n^l| = n^{n/2}$.

Следующую теорему Шур (см., например, [10]) сформулировал для дискриминантов многочленов степени n .

Задача 24 (Шур). Докажите, что максимум величины

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2$$

достигается при комплексных $|z_i| \leq 1$ лишь тогда, когда z_i — корни многочлена $z^n + c$, $|c| = 1$, т. е. когда они образуют правильный n -угольник, вписанный в единичную окружность.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

16. *Указание.* Раздвигая вершины треугольника, можно, не уменьшая произведение его сторон, сделать его вписанным. Далее воспользуйтесь формулой $abc = 4RS$ для площади треугольника и тем, что среди всех треугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

17. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что дискриминант кубического многочлена равен $((z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3))^2$, где z_i — его корни. Далее примените задачу 16. Максимум достигается при $z_i = a\varepsilon^{i-1}$, где $\varepsilon = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, $|a| = 1$. Так как $\varepsilon^3 = 1$, соответствующий многочлен есть $z^3 + q$, где $|q| = 1$.

18. *Указание.* Произведение диагоналей не больше $(2R)^2$, и равенство достигается только для вписанного в круг прямоугольника. Остаётся доказать, что произведение сторон лежащего в круге четырёхугольника максимально только у вписанного квадрата. Раздвигая вершины четырёхугольника, можно, увеличивая произведение его сторон, сделать четырёхугольник вписанным. Пользуясь неравенством $abcd \leq ((a + b + c + d)/4)^4$ между средним арифметическим и средним геометрическим, сводим задачу к максимизации периметра вписанного четырёхугольника. В этой задаче максимум достигается для квадрата.

19. *Указание.* Пункт а). Раздвигая вершины n -угольника, можно, не уменьшая произведение его сторон, сделать его вписанным. Допустим, он не правильный. Тогда найдутся такие две соседние стороны $A_i A_{i+1}$, $A_{i+1} A_{i+2}$, что $\angle A_i O A_{i+1} = \alpha < 2\pi/n$, $\angle A_{i+1} O A_{i+2} > 2\pi/n$, где O — центр данного круга. Передвинем A_{i+1} так, что $\angle A_i O A_{i+1} = 2\pi/n$. Тогда $A_{i+1} O A_{i+2} > \alpha$ (иначе сумма этих углов была бы не больше $\alpha + 2\pi/n$, а это не так), поэтому площадь треугольника $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ увеличится, а значит, и увеличится произведение сторон $A_i A_{i+1}$, $A_{i+1} A_{i+2}$ (угол

$\angle A_i A_{i+1} A_{i+2}$ опирается на ту же хорду $A_i A_{i+2}$, поэтому он не изменился, а площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними), поэтому и произведение всех сторон n -угольника увеличится. Повторяя это рассуждение несколько раз, получим правильный n -угольник. Аналогичным образом можно доказать, что максимальную сумму сторон имеет правильный n -угольник. Для невыпуклых n -угольников оба утверждения неверны.

Пункт б). Раздвигая вершины n -угольника, можно, увеличивая произведение всех его сторон и диагоналей, сделать его вписанным. Для этого надо сдвигать вершины по одной в сторону окружности по прямой, перпендикулярной стороне, смежной со сдвигаемой вершиной. При этом все смежные с этой вершиной диагонали и стороны увеличиваются, значит, увеличивается их произведение, а несмежные с ней диагонали и стороны не изменяются. Произведение сторон и диагоналей можно представить в виде произведения сомножителей P_k , $k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$, где P_1 — произведение сторон, P_2 — произведение диагоналей $A_i A_{i+2 \pmod n}$ и т. д., P_m — произведение диагоналей $A_i A_{i+m \pmod n}$, $m = \lfloor n/2 \rfloor$. В п. а) доказано, что P_1 достигает максимума только в случае правильного n -угольника. Если n чётно, то последовательность диагоналей из произведения P_2 разбивается на два цикла, каждый из которых можно рассматривать как произведение сторон вписанного $n/2$ -угольника. Поэтому согласно п. а) это произведение максимально только в случае правильного n -угольника. Если же n нечётно, то оно тоже максимально лишь в случае правильного n -угольника, что можно доказать, повторив рассуждения п. а) (то, что приходится иметь дело в этом случае с самопересекающимся n -угольником, принципиально рассуждение не меняет). Аналогично оцениваем сверху P_k , $k = 3, \dots, m$ (при этом произведение P_k может разбиваться на несколько произведений, каждое из которых может быть произведением сторон обычного или самопересекающегося вписанного n/t -угольника, где t — некоторый делитель числа n).

20. Указание. Определитель является многочленом от $x_0, \dots, x_{n-1}$ степени $n(n-1)/2$, который при перестановке любых двух строк меняет знак. Значит, он делится на $x_k - x_l$ при всех $k < l$.

21. Указание. Умножим k -ю строку ε_n^{kj} , $j = 0, \dots, n-1$, матрицы F_n на l -й столбец ε_n^{-lj} , $j = 0, \dots, n-1$, матрицы $\bar{F}_n$. Получаем при $l \neq k$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^{kj} \varepsilon_n^{-lj} = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^{(k-l)j} = \frac{\varepsilon_n^{(k-l)n} - 1}{\varepsilon_n^{k-l} - 1} = 0,$$

а при $l = k$, очевидно,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_n^{kj} \varepsilon_n^{-kj} = n.$$

22. *Указание.* Примените задачу 21 и теорему об умножении определителей.

23. *Указание.* Примените задачи 22 и 20.

24. *Указание.* Произведение $\prod_{0 \leq k < j < n} |z_k - z_j|$ равно произведению сторон и диагоналей лежащего в единичном круге n -угольника с вершинами z_i . Если он выпуклый (в частности, вписанный), то можно применить задачу 19. Утверждение также следует из задачи 23.

В общем случае ещё одно решение можно получить, если воспользоваться тем, что для матрицы Вандермонда $a_{i,j} = z_i^j$, $i, j = 0, \dots, n-1$, квадрат модуля её определителя равен

$$\prod_{0 \leq k < j < n} |z_k - z_j|^2,$$

а согласно неравенству Адамара квадрат модуля этого определителя не больше, чем

$$\prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|^{2j} \leq \prod_{j=0}^{n-1} n = n^n,$$

причём равенство возможно лишь когда $|z_j| = 1$, $j = 0, \dots, n-1$,

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k z_j^{-l} = 0, \quad k \neq l, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad l = 0, \dots, n-1,$$

т. е. когда

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Рассмотрим многочлен

$$p(z) = (z - z_0) \dots (z - z_{n-1}).$$

Согласно теореме Виета его коэффициенты пропорциональны симметрическим многочленам

$$\sigma_k = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k < n} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Но многочлены σ_k , $k = 1, \dots, n-1$ выражаются через многочлены

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j^k = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

поэтому $\sigma_k = 0$, $k = 1, \dots, n-1$, значит,

$$p(z) = z^n + (-1)^n z_0 \dots z_{n-1} = z^n + p_n, \quad |p_n| = |z_0| \dots |z_{n-1}| = 1,$$

т. е. $p(z) = z^n + c$, $|c| = 1$, и все корни образуют правильный n -угольник, вписанный в единичную окружность.

ИНТЕГРАЛЫ ЙЕНСЕНА

Следующая задача имеется, например, в задачнике Б. П. Демидовича. Там она решается с помощью дифференцирования интеграла по параметру.

ЗАДАЧА 25. Докажите, что при $|a| > 1$

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos x + 1) dx = 2\pi \ln|a|,$$

а при $0 < |a| < 1$

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos x + 1) dx = 0.$$

Для произвольного многочлена $f(x)$ степени m со старшим коэффициентом a и корнями $z_1, \dots, z_m$, выписанными столько раз, какова кратность, обозначим через $M(f)$ произведение

$$|a| \prod_{i=1}^m \max\{1, |z_i|\}.$$

Йенсен известен не только своим неравенством для выпуклых функций.

ЗАДАЧА 26 (Йенсен). Пусть $1, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n^{n-1}$ — корни n -й степени из единицы, $f(x)$ — произвольный многочлен степени m со старшим коэффициентом a , и $z_1, \dots, z_m$ — его корни. Тогда при некотором α , $|\alpha| = 1$, и некоторой последовательности натуральных чисел n_k

$$M(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{l=1}^{n_k} |f(\alpha \varepsilon_{n_k}^l)|^{1/n_k}.$$

ЗАДАЧА 27. Докажите, что в условиях задачи 26

$$M(f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} |f(\alpha \varepsilon_{n_k}^l)|^2 \right)^{1/2},$$

$$M(f) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} |f(\alpha \varepsilon_{n_k}^l)|.$$

В частности,

$$M(f) \leq \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

ЗАДАЧА 28 (Йенсен). Если многочлен $f(z)$ не имеет корней на окружности $|z| = 1$, а внутри окружности имеет корни $z_1, \dots, z_k$, то

$$а) \ln M(f) = \int_0^1 \ln |f(e^{2\pi x i})| dx;$$

$$б) \min_{0 \leq x \leq 1} |f(e^{2\pi x i})| \leq M(f) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f(e^{2\pi x i})|;$$

$$в) \ln |f(0)| - \ln |z_1 \dots z_k| = \int_0^1 \ln |f(e^{2\pi x i})| dx;$$

$$г) |f(0)| \leq e^{\int_0^1 \ln |f(e^{2\pi x i})| dx} \leq \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Если $f(z)$ не имеет корней в круге $\{z: |z| \leq 1\}$, то

$$д) \ln |f(0)| = \int_0^1 \ln (|f(e^{2\pi x i})|) dx;$$

$$е) \min_{|z|=1} |f(z)| \leq |f(0)| \leq \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

ж) Если $f(z)$ не имеет корней в круге $\{z: |z - a| \leq r\}$, то

$$\min_{|z-a|=r} |f(z)| \leq |f(a)| \leq \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Из п. ж) легко следует теорема о существовании комплексных корней у любого неконстантного многочлена. Действительно, $|f(z)| \rightarrow \infty$ при $|z| \rightarrow \infty$, поэтому в силу непрерывности $|f(z)|$ в некоторой точке z_0 достигается минимум $|f(z)|$. Если $|f(z_0)| > 0$, то у многочлена нет корней, тогда на любой окружности $|z - z_0| = r$ в силу неравенства п. ж) $|f(z)| = |f(z_0)|$, т. е. $|f(z)|$ постоянна на всей плоскости, что противоречит стремлению $|f(z)|$ к бесконечности.

ЗАДАЧА 29 (студенческая олимпиада мехмата МГУ). Пусть многочлен $p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$ имеет корни внутри единичного круга, т. е. $|z_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$. Вычислим

$$m(p) = \min_{|z|=1} |p(z)|.$$

Найти максимальное значение $m(p)$.

ЗАДАЧА 30. Пусть

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad |a| = 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(\alpha \varepsilon_N^k)|^2 = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \quad \text{при } N > n.$$

Следующие два неравенства нетривиальны даже в случае $n = 2$.

ЗАДАЧА 31 (Э. Ландау). Для многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

выполнено неравенство

$$M(f) \leq \left(\sum_{l=0}^n |a_l|^2 \right)^{1/2}.$$

ЗАДАЧА 32 (Кармайкл). Корни многочлена

$$f = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

не превосходят по модулю

$$\left(1 + \sum_{l=0}^{n-1} |a_l|^2 \right)^{1/2}.$$

ЗАДАЧА 33. Докажите, не пользуясь теоремой Коши, что для любой окружности C и любого многочлена $f(z)$

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

ЗАДАЧА 34. Докажите, что для любой дуги окружности C с концами в точках a и b и любого многочлена $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0$

$$\int_C f(z) dz = F(a) - F(b),$$

где $F(z) = \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \dots + a_0 z$ — первообразная для $f(z)$.

Из задачи 34 следует, что такое же утверждение верно для любой кривой, состоящей из дуг окружностей. Переходя к пределу, можно получить это утверждение для любой жордановой кривой.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

25. *Решение.* Воспользуемся тождеством из задачи 10 (п. в) при $\theta = 0$)

$$a^{2n} - 2a^n + 1 = \prod_{s=1}^n \left(a^2 - 2a \cos \frac{2s\pi}{n} + 1 \right).$$

Логарифмируя почленно, имеем

$$\ln(a^{2n} - 2a^n + 1) = \sum_{s=1}^n \ln \left(a^2 - 2a \cos \frac{2s\pi}{n} + 1 \right).$$

Для интеграла

$$\int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2a \cos x + 1) dx$$

рассмотрим интегральную сумму

$$\sum_{s=1}^n \frac{2\pi}{n} \ln \left(a^2 - 2a \cos \frac{2s\pi}{n} + 1 \right).$$

Она равна

$$\frac{2\pi}{n} \ln(a^{2n} - 2a^n + 1) = \frac{4\pi}{n} \ln|a^n - 1|.$$

При $|a| > 1$ её предел равен $4\pi \ln|a|$, а при $|a| < 1$ он равен нулю. Из тождества $\cos(x + \pi) = -\cos x$ следует, что

$$\int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2a \cos x + 1) dx = 2 \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a \cos x + 1) dx.$$

26. *Решение.* Число α выберем так, чтобы оно не было корнем $f(x)$. Разложим $f(x)$ на линейные множители. Достаточно доказать равенство для произвольного множителя $(x - w)$ и применить теорему о произведении пределов. В случае $f(x) = x - w$ в силу теоремы Безу имеем

$$\prod_{l=1}^n f(\alpha \varepsilon_n^l) = \prod_{l=1}^n (\alpha \varepsilon_n^l - w) = \alpha^n \prod_{l=1}^n (\varepsilon_n^l - w/\alpha) = (-\alpha)^n \left(\left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right),$$

откуда

$$\prod_{l=1}^n |f(\alpha \varepsilon_n^l)|^{1/n} = \left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right|^{1/n}.$$

Если $|w| > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right|^{1/n} = |w|,$$

так как

$$|w|n - 1 \leq \left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right| \leq |w|n + 1.$$

При $|w| < 1$

$$\left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right| \rightarrow 1,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right|^{1/n} = 1.$$

Если $|w| = 1$, то $|(w/\alpha)^n - 1| \leq 2$, поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^n - 1 \right|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} = 1.$$

Можно считать, что α выбрано так, что $w/\alpha = e^{\beta_w 2\pi i}$, где β_w иррационально для всех корней w с единичным модулем. Выберем последовательность n_k так, чтобы для всех корней w с единичным модулем

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg \left(\frac{w}{\alpha} \right)^{n_k} = \{n_k \beta_w 2\pi\} \leq \pi,$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x . Это можно сделать с помощью теоремы Кронекера. Тогда $|(w/\alpha)^{n_k} - 1| \geq \sqrt{2}$, поэтому

$$\limsup_{n_k \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{w}{\alpha} \right)^{n_k} - 1 \right|^{1/n_k} = 1.$$

27. *Указание.* Применить задачу 26 и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Первое неравенство следует из второго и далее понадобится.

28. *Указание.* Пункт а). Почленно прологарифмируйте равенство задачи 26, положите $\alpha = 1$ (в этой задаче не требовалось, чтобы многочлен не имел корней, по модулю равных единице, поэтому α выбиралось специальным образом, но в задаче 28 по условию многочлен не имеет таких корней, поэтому можно применить решение задачи 26, просто

взяв $\alpha = 1$). Теперь воспользуйтесь тем, что предел в правой части получившегося равенства является пределом интегральной суммы для

$$\int_0^1 \ln|f(e^{2\pi xi})| dx.$$

Пункт б) следует из п. а) и оценок интеграла через максимум и минимум модуля подынтегральной функции. Но можно также воспользоваться задачами 26 и 27.

Пункт в) выводится из определения $M(f)$ и п. а), так как

$$|f(0)| = |a| \prod_{k=1}^m |z_k|.$$

Пункт г) следует из п. в) и неравенства $|z_1 \dots z_k| \leq 1$.

Пункт д) следует из п. г).

Пункт е) следует из п. д).

Пункт ж) следует из п. е) с помощью линейной замены переменных.

29. Указание. Примените задачу 28. Максимум достигается для z^n .

30. Решение. Так как

$$|f(\alpha \varepsilon_N^k)|^2 = f(\alpha \varepsilon_N^k) \overline{f(\alpha \varepsilon_N^k)} = \sum_{j,l=0}^n \alpha^j a_j \overline{\alpha^l a_l} \varepsilon_N^{(j-l)k},$$

после перестановки порядка суммирования имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |f(\alpha \varepsilon_N^k)|^2 = \sum_{j,l=0}^n \alpha^j a_j \overline{\alpha^l a_l} \sum_{k=1}^N \varepsilon_N^{(j-l)k} = \sum_{l=0}^n \alpha^l a_l \overline{\alpha^l a_l} = \sum_{l=0}^n |a_l|^2.$$

31. Указание. Применить задачи 27, 30.

32. Указание. Применить задачу 31.

33. Указание. Можно считать, что $C = \{z: |z| = R\}$ и $\deg p < n$. Пусть $\varepsilon_n^k, k = 0, \dots, n-1$, — корни n -й степени из 1. Тогда достаточно проверить, что интегральная сумма для функции $z^k, k < n$, равна

$$\sum_{l=0}^{n-1} (\varepsilon_n^l)^k (\varepsilon_n^{l+1} - \varepsilon_n^l) = \sum_{l=0}^{n-1} (\varepsilon_n^l)^{k+1} (\varepsilon_n - 1) = 0.$$

34. Указание. Пусть дуга C есть

$$\{z: z - z_0 = Re^{2\pi xi}, x \in [a, b] \subset [0, 1]\}.$$

Сдвигом $z \rightarrow z - z_0$ сводим задачу к случаю $z_0 = 0$. Далее в силу линейности интеграла (и интегральных сумм) достаточно рассмотреть случай $p(z) = z^k$. Заменой переменных $w = ze^{-2\pi ai}/R$ сводим задачу к случаю $a = 0$, концы дуги тогда 1 и $Z = e^{2\pi bi}$. Рассмотрим интегральную сумму при $n > b(k+1)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi j b i/n})^k (e^{2\pi(j+1)b i/n} - e^{2\pi j b i/n}) = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (e^{2\pi j b(k+1)i/n}) (e^{2\pi b i/n} - 1) = \frac{e^{2\pi b(k+1)n i/n} - 1}{e^{2\pi b(k+1)i/n} - 1} (e^{2\pi b i/n} - 1) = \\ &= (e^{2\pi b(k+1)i} - 1) \frac{e^{2\pi b i/n} - 1}{e^{2\pi b(k+1)i/n} - 1} = (Z^{k+1} - 1) \frac{Z^{1/n} - 1}{Z^{(k+1)/n} - 1}. \end{aligned}$$

Так как $Z^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, а при $X \rightarrow 1$

$$\frac{X-1}{X^{k+1}-1} = \frac{1}{1+X+\dots+X^k} \rightarrow \frac{1}{k+1},$$

то при $n \rightarrow \infty$ рассматриваемая интегральная сумма для функции Z^k по дуге с концами 1 и Z стремится к $(Z^{k+1} - 1)/(k+1)$. Значит, интеграл равен этому числу.

Заметим, что вычисление предела интегральных сумм для функции z^k по прямолинейному отрезку существенно сложнее.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ ПУАНСО

Пусть окружность разделена n точками на n равных дуг. Занумеруем эти точки числами от 0 до $n-1$ по часовой стрелке. Замкнутую самопересекающуюся ломаную, соединяющую все эти точки в произвольном порядке, назовём *звёздчатым n -угольником*. Сторонами этого n -угольника являются звенья этой ломаной. Звёздчатый n -угольник назовём *правильным*, если его стороны равны. Правильный звёздчатый пятиугольник иногда называют *пентаграммой*.

Пусть $k_1, k_2, \dots$ — последовательность натуральных чисел, меньших чем n . Рассмотрим ломаную, первое звено которой идёт из вершины нулевой вершины в k_1 -ю, второе звено идёт из k_1 -й вершины в вершину с номером $k_1 + k_2$ (по модулю n), третье звено идёт из вершины $k_1 + k_2$ в вершину $k_1 + k_2 + k_3$ и т. д. Очевидно, m -звенная ломаная будет замкнутой если и только если $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ делится на n . Для того, чтобы она не проходила многократно по одной и той же вершине, очевидно необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

остатки от деления на n всех чисел последовательности $k_1 + k_2 + \dots + k_i$, $i = 1, \dots, t$, должны быть различны. В этом случае ломаная образует t -угольник, который можно обозначить символом $\{k_1, \dots, k_m\}$. Его вершинами по определению являются только те из данных n точек окружности, которые являются концами звеньев рассматриваемой t -звенной ломаной. Очевидно, при $k_1 + \dots + k_m > n$ он будет звёздчатым.

Первая задача геометрическая.

Задача 35. а) Докажите, что если $k_i + k_{i+1} < n$, $i = 1, \dots, t-1$, то сумма углов при вершинах звёздчатого t -угольника составляет

$$180 \left(t - \frac{2(k_1 + \dots + k_m)}{n} \right) \text{ градусов.}$$

б) Докажите, что сумма углов при вершинах правильного звёздчатого n -угольника составляет 180 градусов.

в) Докажите, что все углы правильного звёздчатого n -угольника равны.

Пусть теперь все k_i равны k .

Задача 36. а) Докажите, что если k взаимно просто с n , то указанная n -звенная ломаная проходит через все n точек и образует при $k > 1$ правильный звёздчатый n -угольник, а при $k = 1$ — обычный правильный n -угольник.

б) Сколько существует различных правильных звёздчатых n -угольников?

в) Докажите, что если k не взаимно просто с n , то построенная указанным способом ломаная замкнётся через n/d звеньев, пройдя через n/d точек, и образует правильный звёздчатый n/d -угольник. Число d равно наибольшему общему делителю n и k .

Отметим, что указанное построение можно использовать в качестве определения наибольшего общего делителя и можно положить в основу алгоритма для его вычисления (впрочем, менее удобного, чем обычный алгоритм Евклида).

Следующая задача даёт геометрическое определение понятия простого числа.

Задача 37. Число n простое, если и только если для любого $k < n$ указанное в задаче 36 построение определяет правильный (возможно, звёздчатый) n -угольник.

Задача 38. Пусть $k < n$ и k взаимно просто с n . Рассмотрим построенный в п. а) задачи 36 правильный (возможно, звёздчатый)

n -угольник и перенумеруем исходные точки окружности в порядке их появления на образующей n -угольник ломаной. Пусть $l < n$ и l взаимно просто с n . Повторим для числа l процедуру построения ломаной, используя новую нумерацию вершин. Докажите, что

а) построенная ломаная определяет правильный (возможно, звёздчатый) n -угольник и совпадает с ломаной, которую можно построить по числу kl при первоначальной нумерации вершин,

б) число kl взаимно просто с n .

ЗАДАЧА 39. Докажите, что при любом k :

а) число различных раскрасок вершин правильного n -угольника в k цветов равно k^n (использовать все k цветов в раскраске не обязательно, иначе получится существенно более трудная задача),

б) если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом n -угольника, считать равными, то при простом n число раскрасок равно $\frac{k^n - k}{n} + k$.

ЗАДАЧА 40 (Петерсен). Выведите из п. б) задачи 39 малую теорему Ферма: при простом p и любом k число $k^p - k$ делится на p .

ЗАДАЧА 41 (Макмагон). Докажите, что в случае произвольного составного n ответ в п. б) задачи 39 равен

$$\frac{1}{n} \sum_{m|n} \varphi(m) k^{n/m},$$

где φ — функция Эйлера.

ЗАДАЧА 42. а) Докажите, что число различных звёздчатых n -угольников, построенных на данных n вершинах окружности, равно

$$\frac{(n-1)!}{2} - 1.$$

б) Если звёздчатые n -угольники, получающиеся друг из друга поворотом вокруг центра окружности, считать равными, то при простом n их число равно

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)! + 1}{n} + n - 4 \right).$$

в) Выведите из п. б) теорему Лейбница — Вильсона: при простом p число $(p-1)! + 1$ делится на p .

Следующая задача (см. [3]) предлагалась на Всероссийской математической олимпиаде 1970.

ЗАДАЧА 43 (Н. Б. Васильев). Вершины правильного n -угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что

точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

41. *Решение.* Функция Мёбиуса μ определяется следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат простого числа,} \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ есть произведение } k \text{ различных простых чисел.} \end{cases}$$

Справедливо равенство

$$\delta(n) = \sum_{m|n} \mu(m),$$

где $\delta(n) = 0$ при $n > 1$ и $\delta(1) = 1$.

Действительно, если n имеет различные простые делители p_i , $i = 1, \dots, k$, то, оставляя в сумме только ненулевые слагаемые и применяя в конце формулу бинома, имеем

$$\sum_{m|n} \mu(m) = \sum_{\alpha_i=0,1} \mu(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m = (1-1)^k = 0.$$

Определим преобразование Мёбиуса. Пусть последовательность $\{f_n\}$ элементов поля F выражается через последовательность $\{g_n\}$ формулами

$$f_n = \sum_{m|n} g_m.$$

Тогда последовательность $\{g_n\}$ может быть выражена через последовательность $\{f_n\}$ формулами

$$g_n = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) f_m.$$

Действительно, индукцией по n можно убедиться в однозначности восстановления последовательности $\{g_n\}$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\sum_{m|n} g_m = \sum_{m|n} \sum_{k|m} \mu\left(\frac{m}{k}\right) f_k = f_n.$$

Обозначая m/k через d и меняя порядок суммирования в двойной сумме, согласно предыдущей лемме действительно имеем

$$\sum_{k|n} f_k \sum_{d|n/k} \mu(d) = \sum_{k|n} f_k \delta\left(\frac{n}{k}\right) = f_n.$$

Для функции Эйлера справедливы тождества Гаусса:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n, \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)d = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}.$$

Первое доказывается путём двойного подсчёта числа правильных дробей со знаменателем n . Второе тождество выводится из первого с помощью преобразования Мёбиуса.

Число цепочек из n бусинок, раскрашенных в q цветов, равно q^n , число одноцветных цепочек равно q . Если ожерелье разрезать в любом промежутке между соседними бусинками, получится одна из d цепочек, где d — делитель числа n и раскраска d подряд идущих бусинок в ожерелье периодически повторяется, т. е. раскраска ожерелья является d -периодической с минимальным периодом d . Обозначим число ожерелий из n бусинок с минимальным периодом раскраски d через $O(d, n)$. Очевидно, что $O(1, n) = q$, а число цепочек, получающихся при всевозможных разрезаниях d -периодических ожерелий, равно $dO(d, n)$. Легко проверить, что $O(d, n) = O(d, d)$. Двойной подсчёт даёт равенство

$$q^n = \sum_{d|n} dO(d, n) = \sum_{d|n} dO(d, d).$$

Из него с помощью преобразования Мёбиуса получаем, что

$$nO(n, n) = \sum_{d|n} \mu(d)q^{n/d}.$$

Общее число всех ожерелий равно

$$O(n) = \sum_{d|n} O(d, d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{d'|d} \mu(d')q^{d/d'}.$$

Заменим индекс d в первой сумме на n/d . Получим, что

$$O(n) = \sum_{d|n} \frac{d}{n} \sum_{d'|n/d} \mu(d')q^{n/(dd')} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \sum_{d'|n/d} d\mu(d')q^{n/(dd')}.$$

Заменим повторную сумму двойной суммой

$$O(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \sum_{d'|n/d} d\mu(d')q^{n/(dd')} = \frac{1}{n} \sum_{d, d', dd'|n} d\mu(d')q^{n/(dd')},$$

а потом новой повторной суммой (сначала по $m = dd'|n$, а потом по $d'|m$):

$$O(n) = \frac{1}{n} \sum_{d, d', dd'|n} d\mu(d')q^{n/(dd')} = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \sum_{d'|m} \frac{m}{d'} \mu(d')q^{n/m} = \frac{1}{n} \sum_{m|n} q^{n/m} \sum_{d'|m} \frac{m}{d'} \mu(d').$$

Согласно тождеству Гаусса внутреннюю сумму можно заменить на $\varphi(m)$. Окончательно имеем

$$O(n) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \varphi(m) q^{n/m}.$$

43. *Решение.* Перенумерованные наборы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_l$ из какого-либо числа l различных векторов одинаковой длины с началом в некоторой фиксированной точке O условимся называть правильными l -системами, если каждый следующий вектор получается из предыдущего поворотом вокруг O против часовой стрелки на один и тот же угол $\alpha < 2\pi$ (а первый вектор системы совпадает с поворотом её последнего вектора). В частности, правильную n -систему образуют векторы, проведённые из центра O какого-либо правильного n -угольника во все его вершины, если их занумеровать, последовательно обходя вершины этого многоугольника. Докажем, что сумма всех векторов правильной l -системы всегда будет равна 0. Действительно, если предположить, что такая сумма не равна 0, то, совершив поворот каждого вектора системы на угол α , мы вновь получим тот же, что и ранее, набор векторов, т. е. их сумма не должна измениться. С другой стороны, эта сумма должна также совершить поворот на угол $\alpha < 2\pi$.

Рассмотрим теперь следующее преобразование R_p правильной l -системы векторов: выберем некоторое натуральное число p и повернём вектор с номером $i, i = 2, 3, \dots, l$, против часовой стрелки на угол $p \cdot i \cdot \alpha$. Заметим, что если $p \cdot \alpha \neq 2\pi \cdot q, q \in \mathbb{N}$, то получившаяся в результате поворота система останется правильной системой, поскольку углы между любыми двумя векторами исходной системы в результате поворота увеличиваются в p раз. Если же $p \cdot \alpha = 2\pi \cdot q, q \in \mathbb{N}$, то после поворота все получившиеся векторы совпадут с первым вектором системы.

Рассуждая теперь от противного, рассмотрим некоторый правильный n -угольник, вершины которого удалось раскрасить в несколько цветов так, что вершины каждого цвета также образуют правильный многоугольник и среди образовавшихся одноцветных правильных многоугольников нет двух равных. Тем самым множество вершин исходного n -угольника разбито на одноцветные подмножества из $m_1, m_2, \dots, m_k$ элементов, причём $m_1 < m_2 < \dots < m_k$. Обозначим центр рассматриваемого многоугольника буквой O и проведём в каждую из его вершин вектор с началом в O , получится правильная n -система векторов с углом $\alpha = 2\pi/n$ и с нулевой суммой. Наборы векторов с концами в вершинах одного цвета будем называть одноцветными наборами, одноцветные наборы также образуют правильные $m_1, m_2, \dots, m_k$ — системы с углами поворота $2\pi/m_1, 2\pi/m_2, \dots, 2\pi/m_k$.

Применим ко всей системе R_{m_1} преобразование. Поскольку $m_1 \cdot 2\pi/n < 2\pi$, в результате этого преобразования снова получится правильная система с нулевой суммой. С другой стороны, результат такого преобразования получается объединением результатов его применения к каждому из наборов одноцветных векторов. Так как $m_1 \cdot 2\pi/m_j < 2\pi$, $j = 2, 3, \dots, k$, все одноцветные наборы, кроме первого, преобразуются в правильные системы с нулевой суммой. Но $m_1 \cdot 2\pi/m_1 = 2\pi$, поэтому результат преобразования первого набора будет иметь ненулевую сумму, и тогда результат R_{m_1} преобразования всей исходной правильной n -системы тоже должен иметь ненулевую сумму. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

СУММЫ ГАУССА

В этом разделе используется при простых n обозначение $\left(\frac{k}{n}\right)$ для символа Лежандра. Он определяется следующим образом: если k кратно n , то $\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, в противном случае $\left(\frac{k}{n}\right) = 1$, если k квадратичный вычет, т. е. равно квадрату некоторого целого числа по модулю n , и $\left(\frac{k}{n}\right) = -1$, если k квадратичный невычет (т. е. не является квадратичным вычетом). В решении следующих задач будет использоваться следующее так называемое мультипликативное свойство этого символа: для любых целых k, m

$$\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{km}{n}\right).$$

Это свойство не очевидно только в случае

$$\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) = -1.$$

За доказательством читатель может обратиться к любому учебнику по элементарной теории чисел (см., например, [2]).

ЗАДАЧА 44 (Гаусс). Докажите, что при простом n и $l = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2kl\pi}{n} &= \left(\frac{l}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2k\pi}{n}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{2kl\pi}{n} &= \left(\frac{l}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 45 (Гаусс). При простом $n = 4m + 1$ и $l = 1, \dots, n - 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2kl\pi}{n} = \pm \sqrt{n} \left(\frac{l}{n}\right), \quad \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{2kl\pi}{n} = 0.$$

При простом $n = 4m + 3$ и $l = 1, \dots, n - 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{2kl\pi}{n} = \pm \sqrt{n} \left(\frac{l}{n}\right), \quad \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2kl\pi}{n} = 0.$$

На самом деле Гаусс доказал, что в этих формулах везде знак плюс, но доказательство сложно, и нас устроит более слабое утверждение.

ЗАДАЧА 46 (Гаусс). При простом $n = 4m + 1$ и $l = 1, \dots, n - 1$

$$\sum_{k=1}^{2m} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2kl\pi}{n} = \pm \sqrt{\frac{n}{4}}.$$

При простом $n = 4m + 3$ и $l = 1, \dots, n - 1$

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{2kl\pi}{n} = \pm \sqrt{\frac{n}{4}}$$

ЗАДАЧА 47 (Гаусс). При нечётном n

$$\left| \sum_{k=1}^n e^{(2k^2\pi i/n)} \right| = \sqrt{n}.$$

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

44. Указание. Пусть $1 \leq l' < n$ таково, что $ll' = 1 \pmod n$. Тогда если $k' = kl \pmod n$ и $1 \leq k' < n$, то $k = k'l' \pmod n$ и согласно мультипликативному свойству символа Лежандра

$$\left(\frac{l}{n}\right) \left(\frac{l'}{n}\right) = \left(\frac{ll'}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Значит,

$$\left(\frac{l}{n}\right) = \left(\frac{l'}{n}\right), \quad \left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k'l'}{n}\right) = \left(\frac{k'}{n}\right) \left(\frac{l}{n}\right)$$

и, переставляя слагаемые в сумме, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2kl\pi}{n} = \sum_{k'=1}^{n-1} \left(\frac{l}{n}\right) \left(\frac{k'}{n}\right) \cos \frac{2k'\pi}{n} = \left(\frac{l}{n}\right) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2k\pi}{n}.$$

Остальные тождества доказываются аналогично.

45. Решение. Удобно использовать комплексное обозначение

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

тождества доказывать одновременно (хотя равенство нулю в них легко проверить непосредственно). Тогда доказываемые тождества можно записать в компактном виде:

$$g_l = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} = \pm \sqrt{n} \quad \text{при } n = 4m + 1$$

и

$$g_l = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} = \pm \sqrt{ni} \quad \text{при } n = 4m + 3,$$

или, в общем случае,

$$g_l^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} \right)^2 = n(-1)^{(n-1)/2}.$$

Из задачи 44 следует, что

$$g_l^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} \right)^2 = g_1^2 = g^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2k\pi i/n} \right)^2.$$

Вычислим двумя способами сумму

$$\sum_{l=1}^n g_l g_{n-l}.$$

С одной стороны, согласно задаче 44 и упоминавшемуся в начале раздела мультипликативному свойству символа Лежандра

$$\begin{aligned} g_l g_{n-l} &= \left(\frac{l}{n}\right) \left(\frac{n-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{l}{n}\right) \left(\frac{-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{l}{n}\right) \left(\frac{l}{n}\right) \left(\frac{-1}{n}\right) g^2 = \\ &= \left(\frac{l^2}{n}\right) \left(\frac{-1}{n}\right) g^2 = \left(\frac{-l}{n}\right) g^2 = \left(\frac{n-1}{n}\right) g^2, \quad g_0 = g_n = 0, \end{aligned}$$

поэтому сумма равна $(n-1) \left(\frac{-1}{n}\right) g^2$. С другой стороны, непосредственно после раскрытия скобок имеем

$$g_l g_{n-l} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2kl\pi i/n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{m}{n}\right) e^{2m(n-l)\pi i/n} = \sum_{k,m=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{m}{n}\right) e^{2(k-m)l\pi i/n},$$

откуда

$$\begin{aligned} (n-1) \left(\frac{n-1}{n}\right) g^2 &= \sum_{l=1}^n g_l g_{n-l} = \sum_{k,m=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{m}{n}\right) \sum_{l=1}^n e^{2(k-m)l\pi i/n} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 n = \sum_{k=1}^{n-1} n = n(n-1). \end{aligned}$$

46. Указание. При $n = 4m + 1$ имеем

$$\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{2kl\pi}{n} = \left(\frac{n-k}{n}\right) \cos \frac{2(n-k)l\pi}{n},$$

при $n = 4m + 3$ имеем

$$\left(\frac{k}{n}\right) \sin \frac{2kl\pi}{n} = \left(\frac{n-k}{n}\right) \sin \frac{2(n-k)l\pi}{n}.$$

47. Решение. Для простого $n > 2$ можно из утверждения задачи 45 получить тождество

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2k\pi i/n} \right| = \sqrt{n},$$

в котором $\left(\frac{k}{n}\right) = \pm 1$ в зависимости от того, является число k квадратом по модулю n или нет. Положим

$$C = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) e^{2k\pi i/n}.$$

Обозначим сумму всех слагаемых $e^{2k\pi i/n}$, у которых $1 \leq k \leq n-1$ является квадратом по модулю n , через A , а сумму всех остальных слагаемых (т. е. тех, у которых $1 \leq k \leq n-1$ не является квадратом по модулю n) через B . Тогда $C = A - B$, а так как

$$1 + A + B = \sum_{k=0}^{n-1} e^{2k\pi i/n} = \frac{e^{2n\pi i/n} - 1}{e^{2\pi i/n} - 1} = 0,$$

то $C = 1 + 2A$. Очевидно, k^2 и $(n-k)^2$ равны по модулю n . Значит,

$$e^{2k^2\pi i/n} = e^{2(n-k)^2\pi i/n},$$

каждый квадратичный вычет по модулю n представим в виде k^2 по модулю n при $1 \leq k \leq (n-1)/2$ единственным образом (вычетов ровно $(n-1)/2$), поэтому

$$\sum_{k=1}^n e^{2k^2\pi i/n} = 1 + 2A = C, \quad \left| \sum_{k=1}^n e^{2k^2\pi i/n} \right| = |C| = \sqrt{n}.$$

Но для произвольного нечётного n предыдущие рассуждения не проходят, хотя вместо символа Лежандра можно использовать символ Якоби, так как он имеет те же свойства.

Поэтому выберем другой способ. Пусть

$$A = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{k^2}, \quad \text{где } \varepsilon = e^{2\pi i/n}, \quad \varepsilon^n = 1.$$

Тогда

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{-k^2}, \quad |A|^2 = A\bar{A} = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{k^2} \sum_{k=1}^n \varepsilon^{-k^2}.$$

Раскрывая скобки в произведении, имеем

$$|A|^2 = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{k^2-k^2} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^n \varepsilon^{k^2-l^2}.$$

Первое слагаемое равно n . Достаточно показать, что второе слагаемое равно нулю. Представим его в виде двойной суммы

$$\sum_{a=1}^{n-1} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k-l \equiv a \pmod n}}^n \varepsilon^{(k^2-l^2) \pmod n}$$

и проверим, что при любом $a \neq 0$, $|a| < n$, в силу нечётности n очевидно $\varepsilon^{2a} = e^{4a\pi/n} \neq 1$, и поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k-l \equiv a \pmod n}}^n \varepsilon^{(k^2-l^2) \pmod n} &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k-l \equiv a \pmod n}}^n \varepsilon^{(k-l)(k+l) \pmod n} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k-l \equiv a \pmod n}}^n \varepsilon^{a(k+l) \pmod n} = \\ &= \sum_{l=1}^n \varepsilon^{a(a+2l) \pmod n} = \varepsilon^{a^2+2a \pmod n} \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon^{2la} = \varepsilon^{a^2+2a} \frac{\varepsilon^{2na} - 1}{\varepsilon^{2a} - 1} = 0. \end{aligned}$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ И БЫСТРОЕ УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Группу корней n -й степени из единицы $\{\varepsilon^k : 0 \leq k < n\}$, $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$, можно применить для быстрого умножения комплексных (и действительных многочленов) степени, меньшей $n/2$. Любопытно, что это можно сделать без упоминания о быстром дискретном преобразовании Фурье (ДПФ).

Под сложностью вычисления понимается число арифметических операций над комплексными числами в нём. Для вычисления многочлена r , являющегося произведением многочленов p и q степени, меньшей $n/2$, можно, согласно теореме Безу, выполнить схемой Горнера деление с остатком этих многочленов на линейные попарно взаимно простые двучлены $x - \varepsilon^k$, получающиеся при разложении многочлена $x^n - 1$ на множители над полем $\mathbb{C}$, т. е. вычислить значения $p(\varepsilon^k)$ и $q(\varepsilon^k)$, $k = 0, \dots, n-1$; потом, попарно перемножив их,

получить значения $r(\varepsilon^k) = p(\varepsilon^k)q(\varepsilon^k)$ и, решая задачу интерполяции (см. задачу 2), восстановить многочлен r . Удобно при этом предполагать n равным степени двойки (добавляя, если надо, нулевые младшие коэффициенты к многочленам p и q).

Задача 48. Докажите, что сложность вычисления значений $p(\varepsilon^k)$, $k = 0, \dots, n-1$, многочлена $p(z)$ при $\deg p(z) < n$ равна $O(n \log_2 n)$.

Для восстановления (интерполяции) многочлена r по его известным значениям $r(\varepsilon^k)$, $k = 0, \dots, n-1$, естественно применить формулу Лагранжа из задачи 2

$$r = f(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r(\varepsilon^k)/f'(\varepsilon^k)}{x - \varepsilon^k} = f(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r(\varepsilon^k)\varepsilon^k}{n(x - \varepsilon^k)}, \quad \text{где } f(x) = x^n - 1.$$

При сложении дробей нужно выполнять фактически только вычисление числителей, так как знаменатели от функции $f(x)$ не зависят. Удобно выбрать порядок суммирования простейших дробей так, чтобы все получающиеся в промежуточных результатах дроби имели двучленные знаменатели. Для этого его можно выбрать согласованным с перечисленными в указании к задаче 48 разложениями двучленов в произведение двучленов. Умножение многочлена степени, меньшей m , на двучлен степени m «школьным» методом имеет сложность m , поэтому сложение двух таких дробей имеет сложность $4m$, а весь алгоритм интерполяции — сложность $O(n \log_2 n)$. В итоге получается известная оценка сложности умножения комплексных многочленов $M(n) = O(n \log_2 n)$.

Задача 49. Докажите, что интерполяцию можно выполнить со сложностью $O(n \log_2 n)$.

Где было спрятано дискретное преобразование Фурье — показывает следующая

Задача 50. Проверьте, что для вычисления значений $p(\varepsilon^k)$, $k = 0, \dots, n-1$, многочлена $p(z)$ при $\deg p(z) < n$ можно умножить вектор-столбец его коэффициентов $(p_0, \dots, p_{n-1})^T$ на матрицу $F_n = |\varepsilon^{kl}|_{k,l=0,\dots,n-1}$ из задачи 21.

Вычисление вектора $(p(1), p(\varepsilon), \dots, p(\varepsilon^{n-1}))$ по вектору $(p_0, \dots, p_{n-1})$ выполняется линейным преобразованием $\mathfrak{F}_n$ с матрицей F_n , которое и есть дискретное преобразование Фурье порядка n (а впервые оно появилось у Гаусса в его теоретико-числовых работах). В задаче 48 указан при $n = 2^k$ один из так называемых быстрых алгоритмов преобразования Фурье. Их известно много, в том числе и для произвольного n .

ЗАДАЧА 51. Проверьте, что обратное преобразование Фурье n -го порядка задаётся матрицей

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n} \bar{F}_n,$$

где $\bar{F}_n$ — матрица с элементами $\bar{a}_{k,l} = \varepsilon_n^{-kl}$ из задачи 21

Матрица $\bar{F}_n$ отличается от F_n только тем, что в её определении первообразный корень n -й степени из единицы $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ заменён на другой первообразный корень $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{n-1}$. Поэтому любой быстрый алгоритм вычисления ДПФ $\mathfrak{F}_n$ можно преобразовать в быстрый алгоритм для обратного ДПФ $\mathfrak{F}_n^{-1}$ той же сложности $O(n \log_2 n)$: смена корня приводит только к перестановке компонент результата, а деление на n делается n раз. Так как вычисление коэффициентов многочлена $r(x)$, $\deg r < n$, по его значениям $r(\varepsilon^k)$, $k = 0, \dots, n-1$, является обратным ДПФ, его можно выполнить со сложностью $O(n \log_2 n)$, не пользуясь алгоритмом интерполяции из задачи 49. С другой стороны, этот алгоритм можно преобразовать в алгоритм ДПФ.

УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

48. *Указание.* Применяя для вычисления значений $p(\varepsilon^k)$ и $k = 0, \dots, n-1$, приём «деления пополам», находим вначале

$$p \pmod{x^{n/2} - 1}, \quad p \pmod{x^{n/2} + 1},$$

потом вычисляем остатки по модулям $x^{n/4} + 1$, $x^{n/4} - 1$, $x^{n/4} + i$, $x^{n/4} - i$, и так далее, пока не найдём остатки по модулям $x^2 - \varepsilon^{2k}$, $k = 0, \dots, n/2 - 1$ и, наконец, по модулям $x - \varepsilon^k$, $k = 0, \dots, n-1$. Так как деление многочлена степени, меньшей m , на двучлен степени $m/2$ осуществляется «школьным» алгоритмом со сложностью m , сложность всего алгоритма вычисления значений $p(\varepsilon^k)$, $k = 0, \dots, n-1$, оценивается как $2n \log_2 n$.

49. *Указание.* Вычисление числителя суммы правильных дробей с согласованными двучленными знаменателями выполняется по формуле

$$\frac{f_1}{x^m + a} + \frac{f_1}{x^m - a} = \frac{f_1(x^m - a) + f_2(x^m + a)}{x^{2m} - a^2}$$

со сложностью $2m + m + m = 4m$ и в результате получается опять правильная дробь с двучленным знаменателем.

Если выполнить вначале сложение всех $n/2$ дробей, у которых произведение знаменателей равно $x^{n/2} - 1$, а потом сложение всех остальных $n/2$ дробей, у которых произведение знаменателей равно $x^{n/2} + 1$, то на последнем шаге для получения окончательного резуль-

тата, т. е. суммы всех n дробей в формуле Лагранжа, нужно будет сложить две правильные дроби

$$\frac{f_1}{x^m + 1} + \frac{f_1}{x^m - 1} = \frac{f_1(x^m - 1) + f_2(x^m + 1)}{x^{2m} - 1}, \quad m = \frac{n}{2}.$$

Последняя операция выполняется со сложностью $2m = n$. Для вычисления дроби $\frac{f_1}{x^m + 1}$ записываем её знаменатель, как и в указании к задаче 48, в виде $(x^{m/2} + i)(x^{m/2} - i)$, а суммируемые $n/2 = m$ простейших дробей разбиваются на две группы по $m/2$ дробей так, чтобы сумма первой группы имела знаменатель $x^{m/2} + i$, а сумма второй — знаменатель $x^{m/2} - i$. Если предположить, что обе группы уже просуммированы, то для получения окончательного результата, дроби $\frac{f_1}{x^m + 1}$, достаточно будет сложить обе полученные правильные дроби $\frac{g_1}{x^{m/2} + i}$, $\frac{g_2}{x^{m/2} - i}$ аналогично указанному выше со сложностью $2m$.

Дробь $\frac{f_2}{x^m - 1}$ вычисляется аналогично со сложностью не выше $2m$ в предположении, что уже были вычислены правильные дроби $\frac{g_3}{x^{m/2} + 1}$, $\frac{g_4}{x^{m/2} - 1}$. Поэтому для получения окончательного результата достаточно вычислить дроби $\frac{g_1}{x^{m/2} + i}$, $\frac{g_2}{x^{m/2} - i}$, $\frac{g_3}{x^{m/2} + 1}$, $\frac{g_4}{x^{m/2} - 1}$, суммируя простейшие дроби, разбитые на группы по $n/4$ дроби в каждой, а потом выполнить сложение полученных дробей как указано выше, со сложностью не более $4n$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что все n простейших дробей вида $\frac{a_k}{x - \epsilon^k}$, $k < n$, можно сложить со сложностью не более $2n \log_2 n$.

50. Указание. Очевидно,

$$p(\epsilon^k) = p_0 + p_1 \epsilon^k + p_2 \epsilon^{2k} + \dots + p_{n-1} \epsilon^{(n-1)k}.$$

51. Указание. Применить задачу 21.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.
- [2] Бибииков П. В., Козеренко К. В., Малахов А. И. Теория чисел во второй школе. М.: МЦНМО, 2021.
- [3] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
- [4] Гашков С. Б. Центры тяжести и геометрия. М.: МЦНМО, 2015.

- [5] Избранные задачи по математике из журнала «American mathematical monthly». М.: УРСС, 2009.
- [6] Московские математические олимпиады 1981–1992 г. М.: МЦНМО, 2017.
- [7] Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2017.
- [8] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2022.
- [9] Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. М.: МЦНМО, 2020.
- [10] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [11] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика. Алгебра. М.: Физматлит, 2016.
- [12] Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.: Наука, 1981.
- [13] Hobson E. W. A Treatise on Plane Trigonometry. NY: Dover Publications, 1957.

О неевклидовой теореме Фейербаха

Г. Галяпин, Т. Карягин, Г. Шарафетдинова

ВВЕДЕНИЕ ОТ П. В. БИБИКОВА

Неевклидова геометрия была и остаётся для меня особой областью математики. Именно с неё начался мой путь в мире математики, и именно по неевклидовой геометрии мной были опубликованы первые статьи, а также были высказаны некоторые гипотезы, связанные с обобщением классических конструкций из геометрии Евклида на неевклидову геометрию. Самыми значимыми были гипотезы об аналогах прямой Эйлера и теореме Фейербаха для треугольников из геометрии Лобачевского. Звучали эти гипотезы настолько необычно, что мне было страшно даже подумать о том, чтобы пытаться их доказывать. Так, аналог теоремы Фейербаха в неевклидовой геометрии звучал следующим образом.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Фейербаха в геометрии Лобачевского). Пусть AW_a , BW_b и CW_c — отрезки, делящие площадь неевклидова треугольника ABC пополам. Тогда описанная окружность треугольника $W_aW_bW_c$ касается вписанной окружности треугольника ABC .

К счастью, нашлись более смелые люди. Спустя всего год с момента публикации этих гипотез А. Акопян нашёл доказательство гипотезы об аналоге теоремы Фейербаха, попутно предложив ещё один аналог неевклидовой прямой Эйлера (см. [1]).

Недавно, пересматривая материалы для подготовки сборной России к Международной математической олимпиаде, в видео [2] я обратил внимание на задачу 5 из этих материалов. Условие этой задачи звучит так (обозначения ниже отличаются от исходных).

Задача (Задача 5). Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность Ω , вторично пересекающая продолжения сторон AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Окружность ω касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно, а также касается внешним

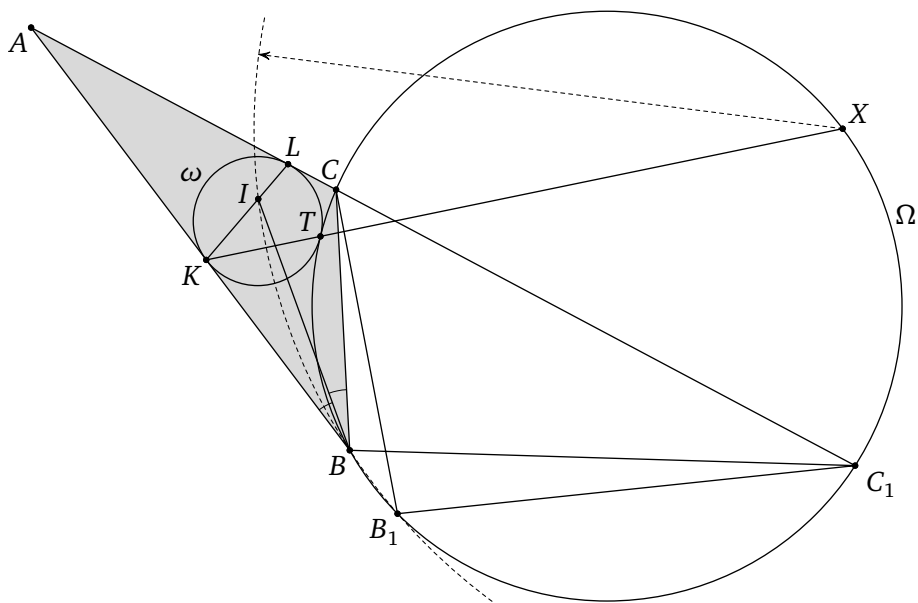


Рис. 1

образом окружности Ω в точке T . Биссектриса угла ABC пересекает отрезок KL в точке I . Прямая LT вторично пересекает окружность Ω в точке X . Докажите, что X — центр описанной окружности треугольника BB_1I (рис. 1).

Невероятно, как далеко вперед шагнула математика, если подобные задачи предлагаются сейчас для подготовки школьников (правда, речь идёт о сильнейших школьниках страны, но всё же)! Но ещё более невероятно то, что эта задача при небольшой модификации превращается в ту самую неевклидову теорему Фейербаха, формулировка которой приведена выше!

В результате неевклидова теорема Фейербаха (в терминах евклидовой геометрии, разумеется) была предложена на июньских тренировочных сборах членам сборной команды России на Международную математическую олимпиаду 2022 г. И доказательство было найдено! Автором доказательства является Галия Шарафетдинова, впоследствии показавшая абсолютный результат на Международной математической олимпиаде (что нашим школьникам долгое время не удавалось...), и первая часть данной статьи посвящена этому доказательству.

П. А. Кожевников также рассказал мне, что И. И. Богданов нашёл другое доказательство неевклидовой теоремы Фейербаха, сведя её к так называемой лемме о сегменте. Это замечание показалось мне

любопытным, и я предложил попытаться доказать теорему Фейербаха с помощью этого соображения двум своим ученикам, Георгию Галяпину и Тимофею Карягину. И они смогли найти это доказательство, попутно предложив новое доказательство самой леммы о сегменте, использующее модное в последнее время проективное движение точек. (Поскольку эта техника требует для своего применения существенно-го количества вспомогательной теории, в тексте статьи приводится доказательство в рамках классических методов, но и оно ранее мне не встречалось.)

В данной статье представлены оба этих пути от формулировки неевклидовой теоремы Фейербаха до полного её доказательства. Сначала будут приведены необходимые факты из геометрии Лобачевского, из которых станет понятно, каким образом можно *догадаться* до формулировки неевклидовой теоремы Фейербаха, если заранее её не знать (интересно отметить, что А. Акопян в своём доказательстве шёл совершенно иным путём). Далее будут изложены оба пути к доказательству: один — Галии Шарафетдиновой, другой — Георгия Галяпина и Тимофея Карягина. Первый путь включает в себя переформулировку неевклидовой теоремы Фейербаха в терминах евклидовой геометрии, лемму Саваямы и её применение для доказательства теорем Фейербаха сначала в евклидовой геометрии, а затем и в неевклидовой. Второй путь основан на лемме о сегменте и также содержит доказательства обеих теорем Фейербаха, опирающихся на эту лемму (эти два доказательства оказываются очень похожими друг на друга и лишний раз подчёркивают связь теорем Фейербаха в двух геометриях).

§ 1. ОБЩИЕ ФАКТЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Мы начнём с того, что напомним об основных конструкциях из геометрии Лобачевского. Будем использовать *модель Пуанкаре в круге*. Иначе говоря, различные объекты неевклидовой геометрии (точки, прямые, окружности...) мы проинтерпретируем с помощью этой модели в терминах евклидовой геометрии, что даст нам возможность использовать для доказательства неевклидовых теорем факты из геометрии Евклида (подробные сведения о моделях геометрии Лобачевского см. в [3]).

Итак, *плоскостью Лобачевского* будем называть внутренность некоторого круга. Границу этого круга будем называть *абсолютом*. *Точками* в геометрии Лобачевского будут обычные точки, лежащие внутри круга, а *прямыми* — диаметры круга и дуги окружностей, ортогональные абсолюту (рис. 2 а). В дальнейшем нам потребуется следующий

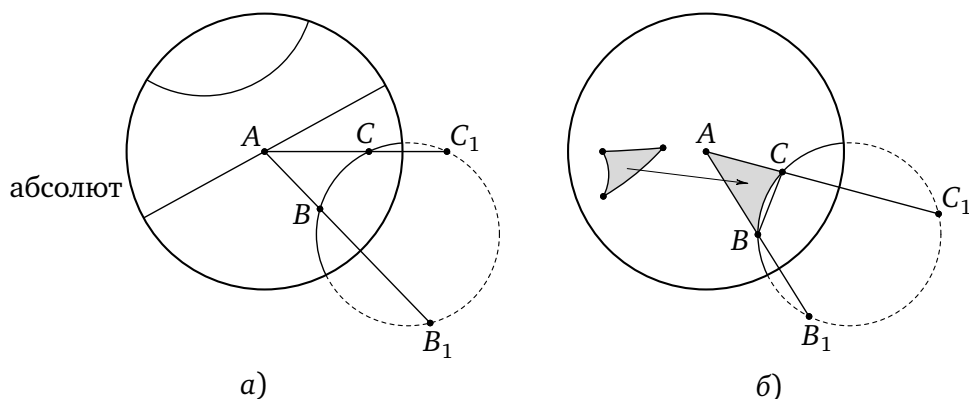


Рис. 2

факт про ортогональные окружности. Если взять окружность, дуга которой является неевклидовой прямой, проходящей через точки B и C , то эта окружность также проходит через точки B_1 и C_1 , симметричные точкам B и C относительно абсолюта (т. е. точки B_1 и C_1 являются образами точек B и C при инверсии относительно абсолюта; подробнее о свойствах инверсии см. [4]).

Давайте попробуем нарисовать неевклидов треугольник ABC в модели Пуанкаре наиболее простым образом. Понятно, что для нас диаметры окружности проще, чем дуги, ортогональные абсолюту, поэтому хотелось бы сделать как можно больше сторон треугольника состоящими из отрезков, лежащих на диаметрах. Для этого поместим одну из вершин треугольника (мы обозначаем её через A) в центр круга. Тогда мы увидим следующую картинку (рис. 2 б).

Видно, что так расположенный неевклидов треугольник очень похож на стартовую конфигурацию из задачи 5. И мы уже начинаем понимать связь этой задачи с неевклидовой геометрией. Теперь нужно разобраться с тем, что собой представляют окружности в модели Пуанкаре. Так, окружность ω из задачи 5 естественно считать вписанной окружностью неевклидова треугольника ABC в модели Пуанкаре.

Оказывается, в модели Пуанкаре неевклидова окружность (т. е. множество всех точек, равноудалённых от данной) по форме совпадает с обычной евклидовой окружностью. Проще всего это можно понять так. Рассмотрим неевклидову окружность с центром в центре абсолюта. В таком случае очевидно, что эта окружность является обычной евклидовой окружностью. А перенос этой окружности в другое место на плоскости Лобачевского можно осуществить с помощью осевой симметрии, которая с евклидовой точки зрения является инверсией

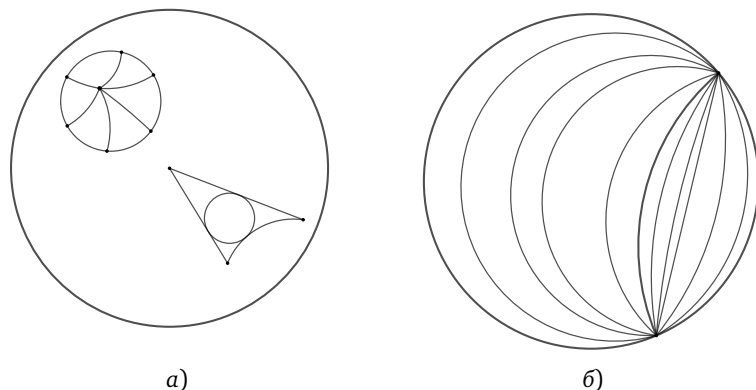


Рис. 3

относительно окружности, ортогональной абсолюту. Поскольку инверсия переводит окружности в окружности, неевклидова окружность всегда совпадает по форме с евклидовой (рис. 3 а).

Возникает естественный вопрос: чем, с точки зрения геометрии Лобачевского, являются евклидовы окружности, пересекающие абсолют (рис. 3 б)? Соответствующие кривые в неевклидовой геометрии называются *эквидистантами*, и их геометрический смысл таков: каждая точка эквидистанты удалена от некоторой неевклидовой прямой на одно и то же расстояние. Иначе говоря, эквидистанта — это аналог прямой, параллельной данной, в геометрии Лобачевского. Отметим, что хорды абсолюта также являются эквидистантами.

Сделаем ещё одно замечание касательно неевклидова треугольника с вершиной в центре абсолюта. Если мы соединим точки B и C обычным евклидовым отрезком, то мы увидим, что неевклидов треугольник ABC лежит внутри евклидова треугольника с теми же вершинами (рис. 2 б). Отсюда сразу следует, что сумма углов неевклидова треугольника ABC меньше π . Этот, казалось бы, незначительный факт влечёт серьёзные отличия между мирами Евклида и Лобачевского. Одно из таких отличий проявляется при определении *площади неевклидовых треугольников*.

Площадь треугольника с углами α , β и γ в геометрии Лобачевского равна $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Здесь необходимо сделать несколько пояснений.

Во-первых, величина $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, также называемая *дефектом треугольника*, действительно удовлетворяет привычным нам аксиомам площади: она положительна, одинакова для равных треугольников, и, если треугольник разбить на два, сумма дефектов частей равна дефекту исходного треугольника. Можно показать, что существует

ровно одна функция на множестве неевклидовых треугольников, удовлетворяющая этим аксиомам площади, так что площадь неевклидова треугольника действительно равна дефекту.

Во-вторых, видно, что у двух треугольников с попарно равными углами будут одинаковые площади. Это противоречит привычному нам из евклидовой геометрии первому признаку подобия треугольников: треугольники с равными углами лишь подобны, а потому их площади могут отличаться как угодно. Однако в геометрии Лобачевского имеет место *четвёртый признак равенства треугольников*: треугольники равны по трём углам. Таким образом, углы и длины отрезков в геометрии Лобачевского становятся равноправными величинами, и происходит это в каком-то смысле благодаря доказанному нами выше утверждению о сумме углов неевклидова треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Есть ещё несколько объяснений такой странной двойственности между мерами углов и длинами отрезков. Во-первых, в геометрии Лобачевского существует так называемая *функция параллельности*, которая связывает градусную меру угла и длину отрезка. В отличие от геометрии Евклида, для этого не требуется треугольник и какой-либо аналог теоремы косинусов, а требуется лишь пара параллельных прямых и перпендикуляр, опущенный на одну из прямых из точки на другой прямой. Во-вторых, если вспомнить *сферическую геометрию*, в ней длины сторон треугольника и градусные меры его углов измерялись в радианах, а наличие конструкций типа *полярного трёхгранного угла* позволяет «менять местами» углы и стороны сферических треугольников. Геометрия Лобачевского тоже в некотором смысле является сферической, только соответствует сфере радиусом $\sqrt{-1}$. Тем не менее, аналог полярного соответствия есть и в ней. Этот аналог также подчёркивает равноправие мер углов и длин отрезков.

Теперь мы готовы к тому, чтобы определить второй ключевой объект в формулировке неевклидовой теоремы Фейербаха: отрезок, проходящий через вершины треугольника и делящий его площадь пополам. Такой отрезок является аналогом медианы треугольника в неевклидовой геометрии, поскольку в геометрии Евклида именно медиана делит площадь треугольника пополам. Однако в геометрии Лобачевского это не так, и отрезок, делящий площадь пополам (мы будем называть его *биссектором*), отличается от медианы.

Чтобы увидеть этот отрезок, вновь рассмотрим неевклидов треугольник ABC с вершиной A в центре абсолюта и отметим точку B_1 , симметричную B относительно абсолюта.

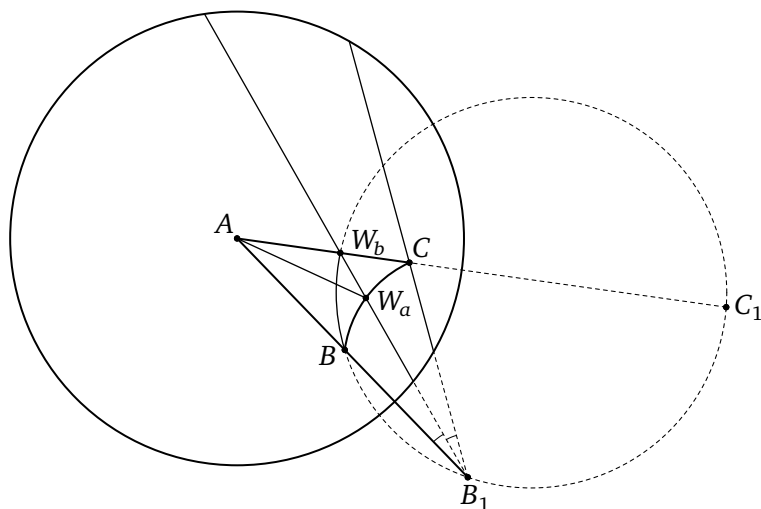


Рис. 4

Проведём биссектрису угла AB_1C и обозначим через W_a и W_b точки её пересечения с неевклидовыми прямыми BC и AC . Утверждается, что неевклидовы отрезки AW_a и BW_b являются биссекторами для треугольника ABC , т. е. делят площадь этого треугольника пополам (рис. 4). Чтобы доказать это, нам потребуется следующая замечательная теорема, которая называется теоремой Лекселя.

ТЕОРЕМА 2 (Лексель). Пусть точки A_1 и B_1 инверсны точкам A и B относительно абсолюта. Пусть ω — некоторая евклидова окружность, проходящая через точки A_1 и B_1 . Тогда для любой точки X , лежащей на окружности ω , площадь неевклидова треугольника XAB будет постоянной, т. е. не будет зависеть от точки X (рис. 5 а).

Иначе говоря, множество точек, лежащих в одной полуплоскости относительно неевклидовой прямой AB и образующих с отрезком AB треугольники фиксированной площади, есть эквидистанта.

У этой теоремы также есть важное уточнение, соответствующее ситуации, когда точка A_1 является бесконечно удалённой (т. е. когда точка A совпадает с центром абсолюта).

ТЕОРЕМА 3. Пусть ABC — неевклидов треугольник, вершина A которого совпадает с центром абсолюта, и пусть точка B_1 симметрична точке B относительно абсолюта. Тогда площадь неевклидова треугольника ABC равна $2\angle AB_1C$ (рис. 5 б).

Доказательства этих теорем можно найти в [5]. Также в статье [5] приведено красивое геометрическое доказательство того, что три бис-

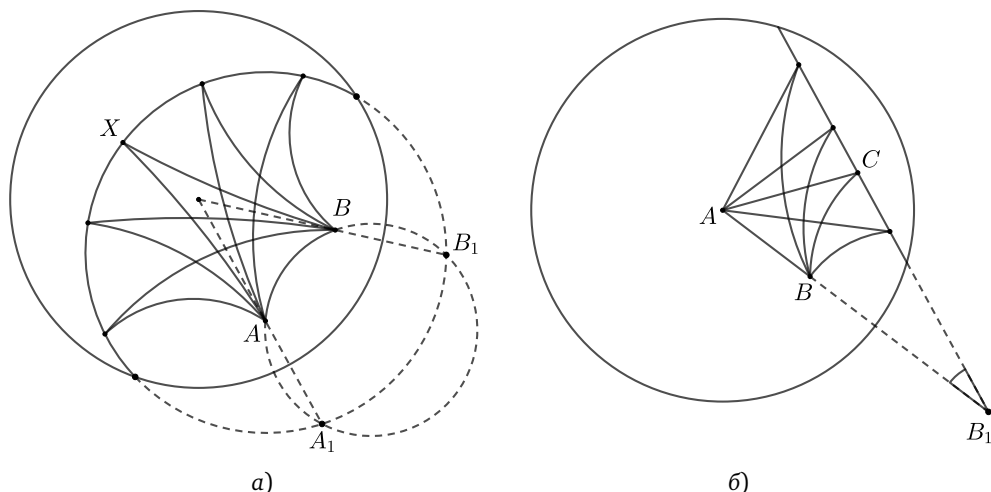


Рис. 5

сектора треугольника пересекаются в одной точке (аналитическое доказательство приведено в [6]). Отметим также, что такое яркое применение классических фактов евклидовой геометрии для доказательства утверждений из геометрии Лобачевского не является «одно-сторонним»: иногда, наоборот, геометрия Лобачевского помогает доказывать некоторые евклидовы утверждения, трактуя их в терминах подходящей модели неевклидовой геометрии. Примеры таких ситуаций можно найти в [7, 8].

Именно теорема Лекселя объясняет, почему биссекторы в геометрии Лобачевского правильно рассматривать как аналоги медиан в геометрии Евклида. С одной стороны, у этих объектов есть общее свойство — они делят площадь треугольника пополам. С другой стороны, в геометрии Лобачевского биссекторы имеют понятное геометрическое описание, которое можно использовать при решении задач. В качестве примера напомним всё ещё открытую гипотезу об аналоге прямой Эйлера в геометрии Лобачевского.

Гипотеза. В неевклидовом треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой.

Настало время переформулировать неевклидову теорему Фейербаха с помощью теорем 2 и 3 на евклидов язык. Для этого рассмотрим неевклидов треугольник ABC , вершина A которого лежит в центре абсолюта. Отметим точки B_1 и C_1 , симметричные точкам B и C отно-

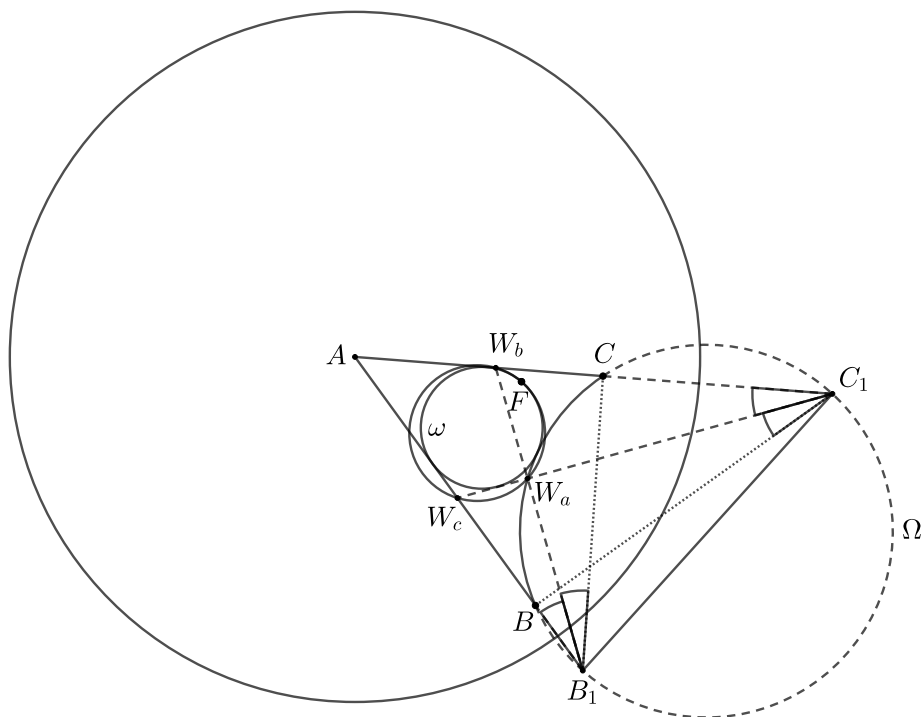


Рис. 6

сительно абсолюта, и проведём биссектрисы углов AB_1C и AC_1B . Эти биссектрисы (являющиеся с точки зрения геометрии Лобачевского эквидистантами) пересекают дугу BC в её середине W_a , а стороны AC и AB — в точках W_b и W_c . Из теоремы 3 следует, что точки W_a , W_b и W_c являются основаниями биссекторов треугольника ABC . Окружность, проходящую через эти точки, будем называть *окружностью Эйлера* неевклидова треугольника ABC (рис. 6).

Итак, все составляющие неевклидовой теоремы Фейербаха определены. Остаётся сформулировать эту теорему на евклидовом языке. Делается это следующим образом.

Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность Ω , вторично пересекающая стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Окружность ω касается сторон AB и AC в точках L и K соответственно, а также касается внешним образом окружности Ω . Биссектрисы углов AB_1C и AC_1B пересекаются в точке W_a и пересекают стороны AC и AB в точках W_b и W_c . Докажите, что окружность, проходящая через точки W_a , W_b и W_c , касается окружности ω (рис. 6).

Именно это утверждение мы и будем доказывать. Но для этого нам потребуется мощный инструмент, часто используемый в сложных конструкциях для доказательства касания окружностей. Речь идёт о лемме Саваямы.

§ 2. ЛЕММА САВАЯМЫ И ЕВКЛИДОВА ТЕОРЕМА ФЕЙЕРБАХА

Лемма Саваямы считается «тяжёлой артиллерией» в олимпиадной геометрии. Именно она будет нашим основным орудием в доказательстве неевклидовой теоремы Фейербаха. Начнём с того, что сформулируем и докажем эту лемму (которую, учитывая уровень сложности, мы всё же назовём теоремой).

ТЕОРЕМА 4 (лемма Саваямы). Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω . На прямой BC отмечена произвольная точка P . Окружность ω касается отрезка AP в точке L , прямой BC в точке K и окружности Ω внутренним образом. Тогда прямая KL проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC (рис. 7а).

Доказательство. Основная идея доказательства леммы Саваямы — применение известной теоремы о трезубце. Проведём биссектрису угла BAC , и пусть она пересекает окружность Ω в точке W . Пусть I — точка пересечения прямой KL и этой биссектрисы. Наша цель — доказать, что I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Из теоремы о трезубце следует, что для этого достаточно доказать равенство отрезков WI и WC . Именно этим мы и займёмся.

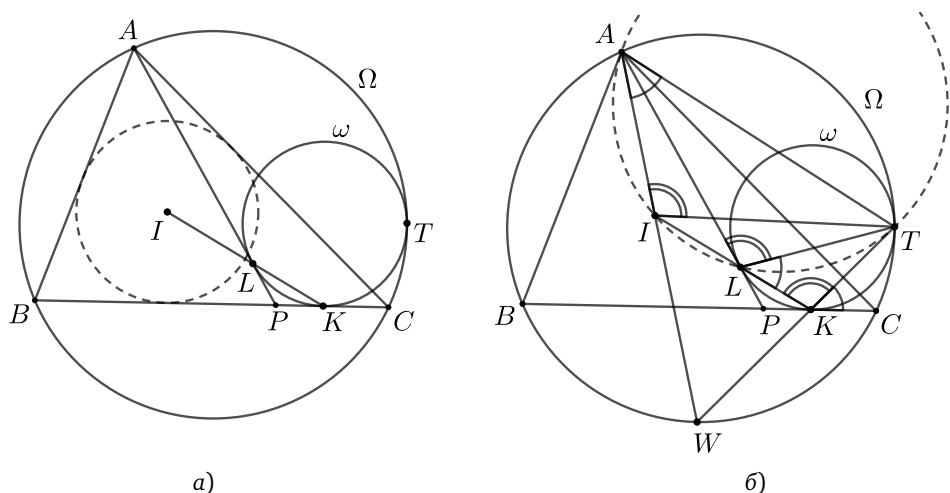


Рис. 7

Заметим, что если T — точка касания окружностей Ω и ω , то точки T , K и W лежат на одной прямой согласно лемме Архимеда. Заметим также, что угол WAT равен половине дуги WT , а угол TKC равен полусумме дуг WC и WB . Но $\widehat{WB} = \widehat{WC}$, так как точка W — середина дуги BC . Значит, оба угла WAT и TKC равны половине дуги WT . Кроме того, по теореме об угле между касательной и хордой $\angle TKC = \angle TLK$. Таким образом, $\angle WAT = \angle TLK$ и четырёхугольник $AILT$ является вписанным (рис. 7 б).

Отсюда, в свою очередь, следует равенство углов AIT и ALT . А раз так, то равны и смежные с ними углы WIT и TLP . Ещё раз применяя теорему об угле между касательной и хордой, получаем равенство углов TLP и WKL . Таким образом, $\angle WIT = \angle WKL$.

Из равенства углов WIT и WKL следует, что треугольники WKI и WIT подобны по двум углам. Отсюда мы получаем соотношение между длинами сторон этих треугольников: $WI : WK = WT : WI$. Оно переписывается в виде $WI^2 = WK \cdot WT$. Осталось заметить, что треугольники WKC и WCT также подобны по двум углам (докажите это самостоятельно), откуда получается аналогичное соотношение $WC^2 = WK \cdot WT$.

Итак, мы получили цепочку равенств $WI^2 = WK \cdot WT = WC^2$, откуда и следует искомое равенство $WI = WC$. Применяя теорему о трезубце, получаем, что точка I действительно является центром вписанной окружности треугольника ABC , что и требовалось доказать. $\square$

Отметим, что лемма Саваямы допускает различные обобщения. Например, точка P может выбираться не только на стороне BC , но и на её продолжении; окружность ω может касаться не только отрезка AP , но и прямой AP ; касание с окружностью Ω может быть не только внутренним, но и внешним. В зависимости от конфигурации прямая KL может проходить или через центр вписанной окружности треугольника, или через центр внеписанной окружности треугольника, причём вершины треугольника — это точки B , C и одна из точек пересечения окружности Ω с прямой AP . Рисунок 8 демонстрирует различие таких конфигураций.

Несложно понять, что верна и обратная лемма Саваямы.

ТЕОРЕМА 5 (обратная лемма Саваямы). Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω . На прямой BC отмечена произвольная точка P . Окружность ω касается отрезка AP в точке L и прямой BC в точке K , причём прямая KL проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC . Тогда окружности ω и Ω касаются внутренним образом.

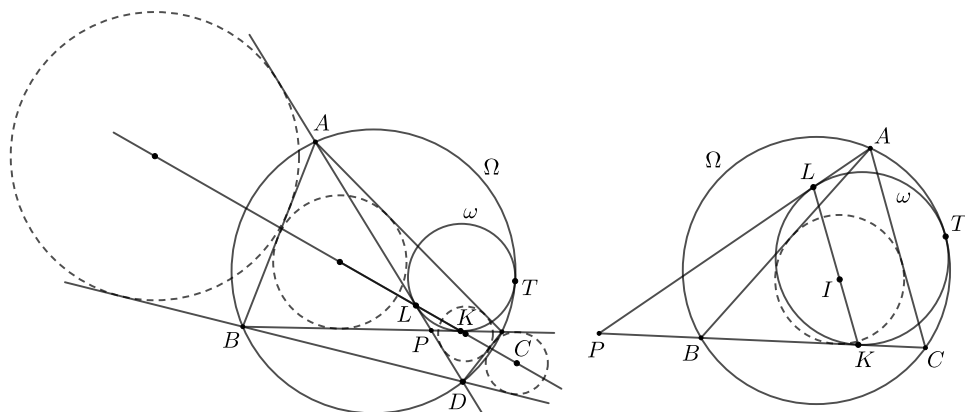


Рис. 8

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и окружности ω и Ω не касаются. Тогда рассмотрим окружность ω' , которая касается отрезка BP в точке L' , прямой BC в точке K' и окружности Ω внутренним образом (несложно понять, что такая окружность существует, — например, гомотетично раздувая или сжимая окружность ω с центром в точке P). Тогда прямая $K'L'$ проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC по лемме Саваямы. Однако прямые KL и $K'L'$ параллельны, поскольку обе они перпендикулярны биссектрисе угла APC . С другой стороны, обе прямые KL и $K'L'$ проходят через точку I . Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Именно обратная лемма Саваямы позволяет доказать евклидову теорему Фейербаха, и она же поможет доказать её неевклидов аналог. Напомним сейчас доказательство евклидовой версии, после чего обратимся к теореме Фейербаха на плоскости Лобачевского.

ТЕОРЕМА 6 (евклидова теорема Фейербаха). *Окружность девяти точек треугольника ABC касается его вписанной и всех трёх внеписанных окружностей.*

Доказательство. Середины сторон BC , AC , AB треугольника ABC обозначим через M_a , M_b , M_c , а основания высот, опущенных на эти стороны, — через H_a , H_b , H_c соответственно (рис. 9).

Пусть I_a — центр вписанной окружности треугольника $H_aH_cM_a$. Заметим, что треугольник H_cM_aC — равнобедренный, поэтому биссектриса угла H_cM_aC совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку CH_c , т. е. со средней линией M_aM_b . Из леммы о трезубце следует, что $M_bJ_a = M_bI_a = M_bH_c = M_bH_a$. Следовательно, точка I_a является

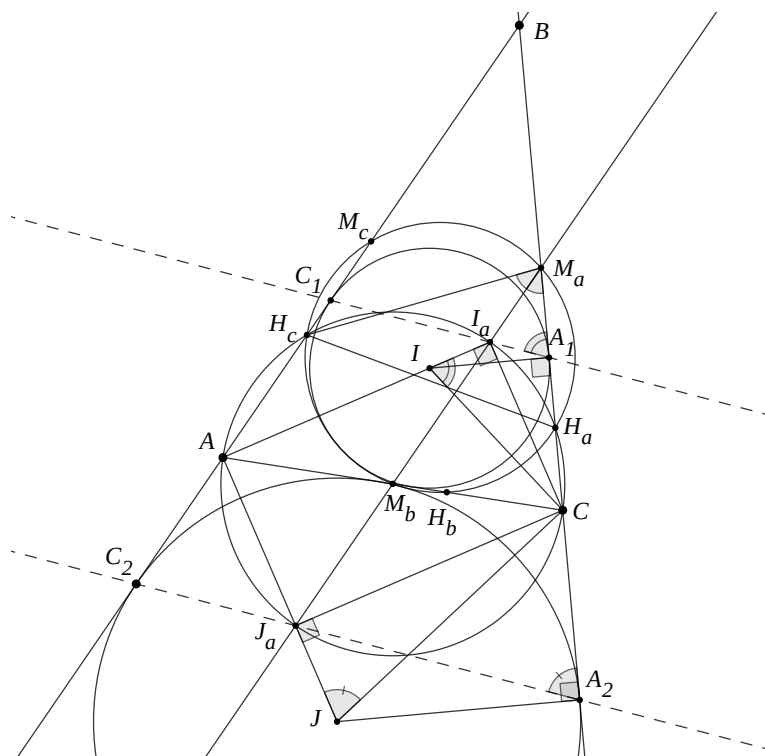


Рис. 9

серединой дуги H_cH_a окружности (ACH_cH_a) , т. е. прямая AI_a является внутренней биссектрисой угла BAC . Обозначим центр вписанной окружности треугольника ABC через I , а точки её касания со сторонами AB и BC — через C_1 и A_1 соответственно.

По задаче 255 (см. [9]) точка I_a лежит на прямой A_1C_1 , а точка J_a лежит на A_2C_2 . По лемме Саваямы точка I_a лежит на прямой, соединяющей точки касания с прямыми AB и BC окружности, касающейся окружности девяти точек треугольника ABC . Поскольку направление таких прямых фиксировано и совпадает с перпендикулярным к биссектрисе угла ABC , это и есть прямая A_1C_1 . Следовательно, вписанная окружность треугольника ABC касается его окружности девяти точек, что и требовалось доказать. $\square$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕЕВКЛИДОВОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕЙЕРБАХА

Теперь мы готовы к доказательству неевклидовой теоремы Фейербаха. Но прежде чем приступить к нему, решим задачу 5 (см. с. 166) из материалов для подготовки кандидатов в сборную России.

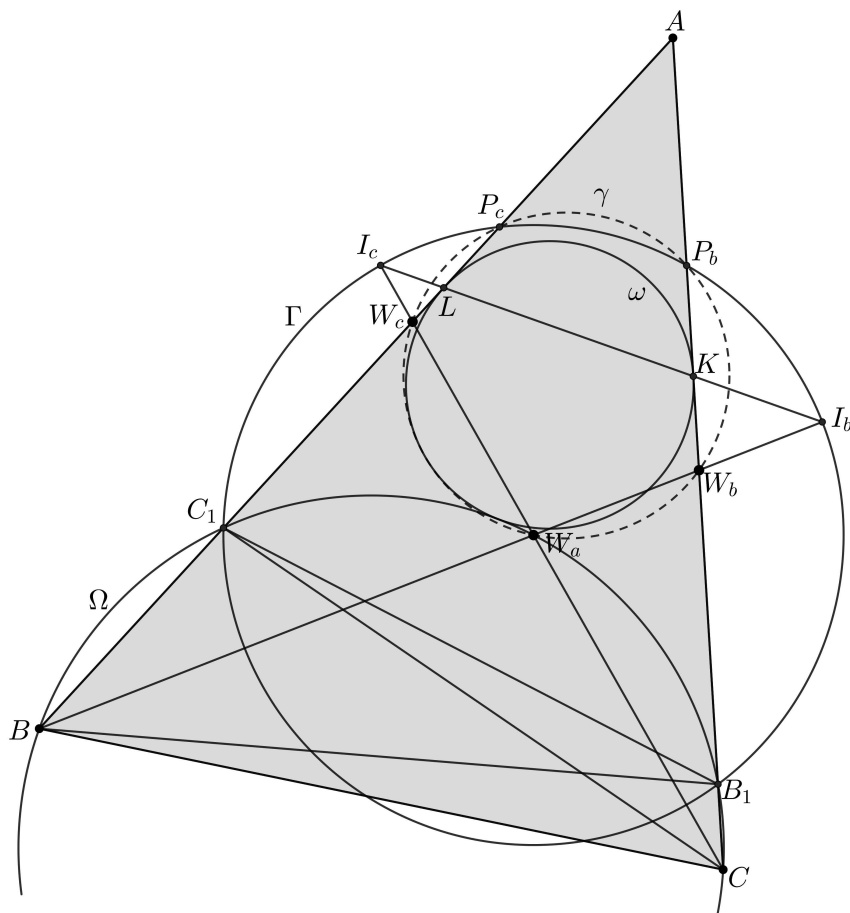


Рис. 11

Построим точку P_c , симметричную точке B_1 относительно прямой BW_a , и точку P_b , симметричную точке C_1 относительно прямой CW_a . Точки P_c и P_b будут лежать на прямых AB и AC соответственно, а также на окружности Γ . Тогда

$$\begin{aligned} \angle(P_c W_b, W_a W_b) &= \angle(W_a W_b, W_b B_1) = \angle(BW_a, AB) + \angle(AB, AC) = \\ &= \angle(CW_a, C_1 C) + \angle(AB, AC) = \angle(AC, CW_a) + \angle(AB, AC) = \\ &= \angle(AB, CW_a) = \angle(P_c W_c, W_c W_a) \end{aligned}$$

(здесь через $\angle(\ell_1, \ell_2)$ мы обозначаем направленный угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Следовательно, точка P_c лежит на описанной окружности γ треугольника $W_b W_a W_c$. Аналогично точка P_b также на ней лежит.

Далее, докажем, что точки I_b и I_c являются центрами вневписанных (или вписанных) окружностей треугольников $W_b P_b P_c$ и $W_c P_b P_c$ со-

ответственно. Действительно, точка W_a — середина дуги DE окружности γ и $W_a I_b = W_a I_c = W_a D = W_a E$. Из леммы, обратной лемме Саваямы, для прямых DW_c , EW_b и окружности γ , следует, что окружность, касающаяся прямых DW_c и EW_b в точках L и K соответственно, касается γ . А единственная окружность, удовлетворяющая таким условиям, — это окружность ω . Поэтому окружность ω касается окружности γ , что и требовалось доказать. $\square$

§ 4. ЛЕММА О СЕГМЕНТЕ И ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Теперь мы готовы вступить на второй путь к доказательству неевклидовой теоремы Фейербаха, основанный на ещё одном важном факте, связанном с касающимися окружностями. Этот факт называется *леммой о сегменте* и был сформулирован В. Ю. Протасовым (см. [10]). Приведённое ниже доказательство, по всей видимости, является новым.

ТЕОРЕМА (лемма о сегменте). Пусть две прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке P . Окружность γ с центром J касается прямых ℓ_1 и ℓ_2 . На прямых ℓ_1 и ℓ_2 выбраны точки A и B соответственно, такие, что прямая AB касается окружности γ . Пусть окружность Γ такова, что A и B принадлежат Γ и дуга AB имеет заданную градусную меру. Тогда окружность Γ касается двух окружностей, касающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 и не зависящих от выбора точек A и B .

Доказательство. Пусть окружность Γ вторично пересекает прямую ℓ_2 в точке C . Рассмотрим прямую ℓ , которая параллельна прямой AC и касается окружности γ . Отметим точку H пересечения прямых ℓ и ℓ_2 . Пусть также точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , а точка K — точка пересечения прямых CI и PJ . Поскольку отражения точки A относительно сторон треугольника IJK лежат на прямой ℓ_2 , эта прямая является прямой Штейнера точки A относительно треугольника IJK . Значит, ортоцентр треугольника IJK лежит на прямой ℓ_2 . С другой стороны, так как прямые AC и ℓ параллельны, прямая HJ перпендикулярна прямой CI (как биссектрисы внутренних односторонних углов). Но тогда точка H является ортоцентром треугольника IJK и прямая HI перпендикулярна прямой PJ .

Рассмотрим окружность ω , вписанную в угол APB и касающуюся прямой PB в точке H . Тогда прямая HI проходит через точку касания окружности ω и прямой PA . Значит, по обратной лемме Саваямы окружность ω касается окружности Γ . Осталось заметить, что сама окружность ω не зависит от выбора окружности Γ , а зависит

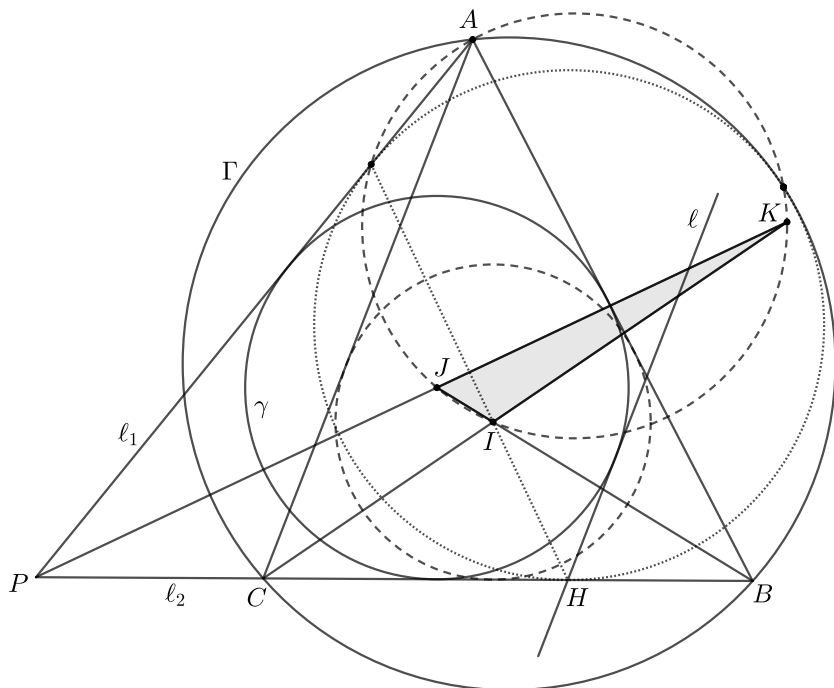


Рис. 12

только от направления прямой AC , поскольку именно направление этой прямой определяет точку H . В зависимости от выбора прямой ℓ (а таких прямых существует две), мы получаем две окружности ω_1 и ω_2 , удовлетворяющие условиям теоремы. $\square$

Замечание 2. Из леммы Саваямы также следует, что окружность (IJK) проходит через точку касания окружностей Γ и ω (рис. 12).

Посмотрим, как лемма о сегменте позволяет доказать евклидову теорему Фейербаха.

Доказательство евклидовой теоремы Фейербаха. Применим лемму о сегменте к треугольнику $M_c M_b H_b$ и окружности ω' , гомотетичной вписанной окружности ω треугольника ABC с центром в A и коэффициентом $1/2$ (рис. 13). Пусть K_b — точка касания окружности ω со стороной AC . Нам достаточно доказать, что касательная из K_b к окружности ω' параллельна прямой $M_c H_b$. А это следует из подобия равнобедренных треугольников $AM_c H_b$ и ALK_b , где L — точка пересечения стороны AB с касательной, проведённой из точки K_b к окружности ω' . $\square$

Замечание 3. Как отмечалось ранее, окружность (IJK) проходит через точку касания F вписанной окружности и окружности Эйлера

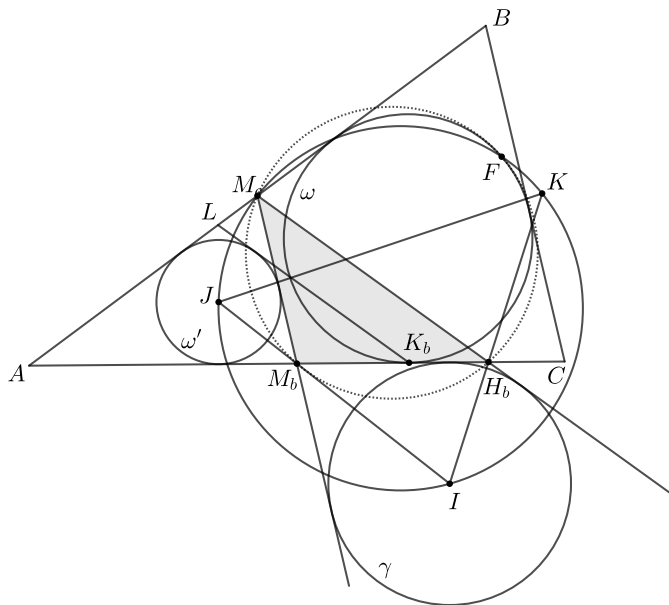


Рис. 13

треугольника ABC . Также несложно показать, что точка K является точкой Шарыгина треугольника ABC , т. е. она лежит на биссектрисе угла BAC и средней линии M_aM_c . Таким образом, мы сразу получаем, что точки K , F , K_c и M_c лежат на одной окружности.

Наконец, мы готовы ко второму доказательству неевклидовой теоремы Фейербаха.

Доказательство. Зафиксируем градусные меры углов ABB_1 и C_1CA , равные 2φ , а также положим $\angle BAC = \alpha$. Пусть ℓ — биссектриса угла BAC . Тогда $\angle ABW_b = \angle W_cCA = \varphi$, поэтому четырёхугольник BW_bW_cC является вписанным. Значит, прямые B_1C_1 и W_bW_c параллельны. Зафиксируем τ — вписанную окружность треугольника AW_bW_c — и будем вращать отрезок W_bW_c вокруг окружности τ . Поскольку

$$\frac{AW_b}{W_bB_1} = \frac{AB}{BB_1} = \frac{\sin(2\varphi + \alpha)}{\sin \alpha} = \text{const},$$

прямая B_1C_1 тоже вращается вокруг некоторой фиксированной окружности, вписанной в угол BAC .

Заметим, что угол $W_cW_aW_b$ постоянен, поэтому по лемме о сегменте окружности $\gamma = (W_cW_aW_b)$ касается некоторой фиксированной окружности ω' , вписанной в угол BAC , а окружность $\Omega = (B_1BCC_1)$ касается фиксированной окружности ω , вписанной в угол BAC .

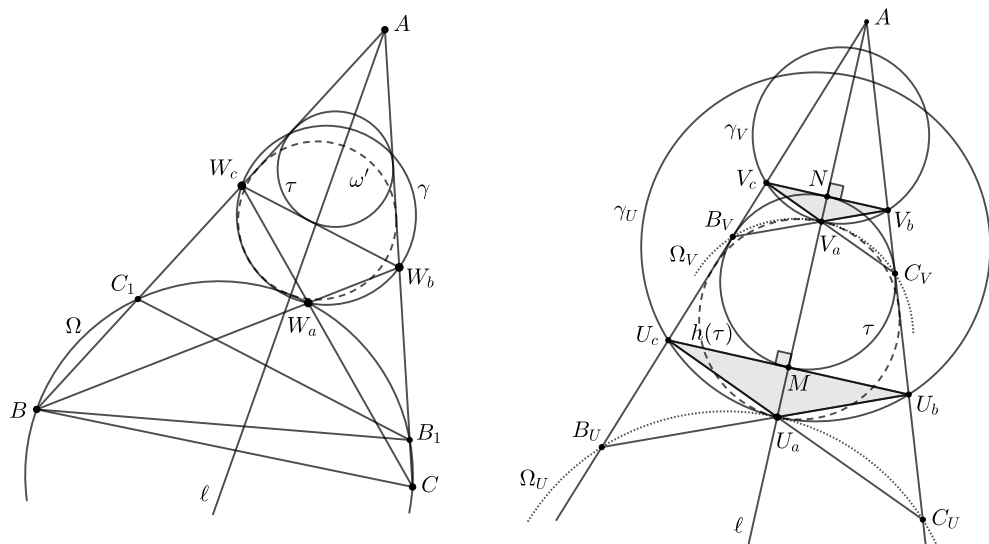


Рис. 14

Рассмотрим два положения отрезка W_cW_b , при которых он перпендикулярен ℓ . Эти два положения определяют исходную конфигурацию задачи, содержащую точки B и C , окружности Ω и γ . Назовём точки W_a, W_b, W_c в первом положении U_a, U_b, U_c , а во втором V_a, V_b, V_c соответственно. Будем приписывать объектам конфигурации, соответствующей стартовым точкам U_a, U_b и U_c , индекс U , а объектам конфигурации, соответствующей стартовым точкам V_a, V_b и V_c , — индекс V (рис. 14).

Очевидно, что точки V_a и U_a лежат на прямой ℓ . Пусть M и N — середины отрезков U_bU_c и V_bV_c соответственно. Тогда MN — диаметр окружности τ . Рассмотрим гомотеию h с центром в A , переводящую N в V_a . Тогда $h(M) = U_a$, поэтому $h(\tau)$ — это окружность с диаметром U_aV_a , совпадающая с ω , поскольку она касается окружностей Ω_U и Ω_V . Также $h(\tau)$ касается γ_U и γ_V , поэтому $h(\tau) = \omega'$. Итак, $\omega = h(\tau) = \omega'$, что и требовалось. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Акопян А. В. О некоторых классических конструкциях в геометрии Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 13. М.: МЦНМО, 2009. С. 155–170.
- [2] Кожевников П. А. Элементарная геометрия: касание окружностей // Подготовка к международным олимпиадам по математике, http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=19193.

- [3] Прасолов В. В. Геометрия Лобачевского. М.: МЦНМО, 2004.
- [4] Жижилкин И. Д. Инверсия. М.: МЦНМО, 2009.
- [5] Шварцман О. В. Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 127–130.
- [6] Бибиков П. В., Ткаченко И. В. О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 113–126.
- [7] Заславский А. А. О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и «лемме Нилова» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 163–166.
- [8] Бибиков П. В., Фролов И. И. Неевклидовы решения евклидовых задач // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 49–66.
- [9] Геометрия. 9–11 классы: От учебной задачи — к творческой. М.: Дрофа, 1996.
- [10] Протасов В. Вокруг теоремы Фейербаха // Квант. 1992. № 9. С. 51–58.

Георгий Галяпин, лицей «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова
galyapin.gv@students.sch2.ru

Тимофей Карягин, лицей «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова
karyagin.tm@students.sch2.ru

Галия Шарафетдинова, факультет математики и компьютерных наук СПбГУ
sharafetdinova_galiya@mail.ru

Популяризация и преподавание математики

О Законе Всемирного Тяготения и его объяснениях

Г. Б. Шабат

Памяти В. В. Бронфмана

§ 0. ВВЕДЕНИЕ: РАЗГОВОРЫ С БРОНФМАНОМ

Мне посчастливилось несколько лет работать с Владимиром Владимировичем в учебном центре при Институте теоретической и экспериментальной физики. Мы часто учили (соответственно математике и физике) одних и тех же школьников и не жалели времени на индивидуальное обсуждение этих школьников — их интереса к нашим предметам, понимания отдельных разделов, зависимости от похвал и порицаний и т. п. Случались и нестандартные проблемы — например, одного мальчика, весьма способного к обоим предметам, родственники убедили, что в наше время наука никому не нужна, и мы тщательно перебирали возможные возражения; кажется, друг друга мы вполне уговорили (что нужна — по крайней мере не меньше, чем в любые другие времена); мальчик же наши соображения с интересом выслушивал, однако родственники неизменно оказывались авторитетнее.

Но ещё больше времени мы отводили обсуждению наших наук и проблем их преподавания. Нужны ли отметки? Совершенна ли классно-урочная система или от неё надо (полностью или частично) отходить? В чём различие в разумных подходах к преподаванию наших предметов, скажем, будущим балеринам, инженерам и работникам

физико-математических наук? Насколько школьный язык может отличаться от профессионального? Что может дать компьютеризация? Следует ли пытаться давать определения пространства и времени, и существуют ли такие определения? Можно ли и нужно ли честно объяснять, что такое симметрия? И т. д., и т. п. Труднее всего было закончить разговор и разойтись по домам.

Владимир Владимирович был уникальным собеседником. Обычно имея собственное мнение по обсуждаемым вопросам (иногда — близкое к общепринятому, иногда — весьма оригинальное), он всегда очень доброжелательно выслушивал собеседника. В случае согласия кратко и точно резюмировал итог. В случае несогласия (в том числе с соображениями, кажущимися ему дикими) — прежде, чем возразить, старался как можно точнее понять собеседника, определить, знает ли собеседник что-то такое, чего не знают он и другие физики, или, наоборот, собеседник *не* знает чего-то общеизвестного. В первом случае задавал вопросы и с интересом слушал ответы. Во втором — до того, как начать возражать, объяснял общеизвестное.

Наши с Владимиром Владимировичем беседы чаще выглядели как споры; но сейчас я понимаю, что согласий было гораздо больше, чем расхождений. Я кратко перечислю и то и другое. Надеюсь, что не припишу Владимиру Владимировичу точек зрения, с которыми он не согласился бы. Начнём с расхождений.

Строгость

Бронфман. Сначала надо объяснять понятия по существу: вектор — это направленный отрезок, производная — это мгновенная скорость и т. д. А потом приходите вы, математики, со своими аксиомами и определениями предела и уточняйте, как хотите. То же касается доказательств: сначала их надо проводить на физическом уровне строгости, а потом вы доказывайте по-вашему.

Я. Физический уровень строгости — миф. Строгость, как и свежесть рыбы у булгаковского буфетчика, бывает только полная. Если же полной строгости нет, то её нет вовсе, и физикам не следует её имитировать. В школе эта имитация приводит к заучиванию текстов вместо понимания логической структуры предмета.

Давление и т. п.

Бронфман. Давление — одно из важнейших понятий, освоение которого необходимо для развития физического мышления. То же

касается понятий *работы*, *заряда* и других, входящих в традиционную школьную программу.

Я. «Определение» вроде *давление* — это сила, действующая на единицу площади поверхности... не может быть *понято* критически мыслящим человеком, а может быть только *заучено*. По-видимому, без основных понятий векторного анализа точного определения давления дать и нельзя; тогда в программу надо явно вводить частные производные и градиент и соответствующим образом изменить порядок освоения разделов школьной физики. Если же давление — это то, что показывают соответствующие приборы (такое «определение» вполне пригодно, например, для врачей), то об этом надо говорить честно. Не лучше обстоят дела и с другими физическими абстракциями.

Силовые линии

Бронфман. Силовые линии электромагнитного поля — основное средство его понимания. Картина силовых линий абсолютно ясна и сопоставима с экспериментом. Обойтись без них невозможно.

Я. Если силовые линии — милый сердцам физиков *художественный образ*, то не мне, постороннему, с этим образом бороться. Но в какой-то момент преподаватели физики должны понять сами и объяснить ученикам, что никакого *точного* смысла в этом образе нет и быть не может. Конечно, у любого векторного поля есть интегральные кривые и через каждую неособую точку поля проходит только одна, но представление о том, что из множества интегральных кривых можно выбрать конечное подмножество так, чтобы *густота* силовых линий из этого подмножества была пропорциональна (хотя бы приблизительно) *интенсивности* поля, совершенно иллюзорно¹⁾.

Вот и все наши с Владимиром Владимировичем разногласия, которые мне удалось припомнить. Думаю, что, если бы судьба отвела нам ещё какое-то время для общения, то и по этим вопросам наши позиции сблизились бы.

¹⁾ Вопрос о силовых линиях для меня особо важен по личным причинам. Когда в 60-х годах я учился в старших классах одной из лучших в Москве физико-математической 2-й школы, мои отношения с физикой были прерваны тем, что я был не в силах представить себе *4 π п силовых линий, проходящих через поверхность сферы*. Моя нежно любимая учительница физики Валерия Александровна Тихомирова во мне разуверилась навсегда, а сама эта история оказалась для меня *профориентирующей*: до того колебавшийся в выборе будущей профессии между физикой и математикой, я был обречён выбрать последнюю.

Перейдём к тому, в чём мы были с ним согласны.

Несовременность школьных программ

В школьных курсах физики и математики изучается в основном то, что было известно уже в XVIII веке. Это недопустимо, по крайней мере в отношении молодых людей, которые при выборе будущей профессии рассматривают возможность заниматься наукой. В профильных классах следует давать некоторое представление о квантовой механике, теории относительности, топологии, теории групп и др.

Согласуемость математических и физических программ

Она возможна, хотя иногда требует существенных изменений в программах. Над этим следует работать; логика наук глубже указаний министерств и важнее случайно сложившихся традиций.

Компьютеризация

Это замечательное достижение нашей цивилизации имеет колоссальные перспективы в преподавании, которые, однако, педагогическим сообществом будут восприниматься медленно. Не следует ожидать слишком радикальных перемен; применение компьютеров целесообразно лишь тогда, когда с их помощью достигаются результаты, иначе недостижимые или требующие значительно больших усилий. Компьютеры не отменяют традиционных педагогических технологий.

Гуманитарная составляющая физики и математики

История наук, их место в развитии нашей культуры; личности, именами которых названы законы и теоремы; связи с философией и с искусством — всё это важно и может быть рассказано понятно и интересно для всех. Для будущих же не-математиков и не-физиков гуманитарные аспекты естественных и точных наук иногда важнее и интереснее, чем расчёты конденсаторов и тождественные алгебраические преобразования.

Движения и траектории

Описать лыжню иногда проще, чем описать движения проложившего её лыжника. Подробнее об этом пойдёт речь в основной части статьи.

Занимались ли мы маниловщиной? Суждено ли нашим мечтаниям о разумном и интересном преподавании где-нибудь когда-нибудь сбыться?

Наш учебный центр просуществовал недолго²⁾; сейчас кругом свирепствует всеразрушающий ЕГЭ³⁾.

Но надежды остаются; у меня есть возможности пытаться воплощать то, что мы обсуждали, по крайней мере в личной преподавательской деятельности. В любом случае разговоры с Владимиром Владимировичем остаются в моей памяти несравненным образцом взаимопонимания и добросовестности в проникновении в тайны нашего ремесла.

§ 1. Закон Всемирного Тяготения с одной неизвестной функцией

В этом разделе мы кратко воспроизведём *физические* соображения, приводящие к системе дифференциальных уравнений, описывающих движение материальной точки в центральном поле. Эта система содержит одну неизвестную функцию, вид которой не может быть установлен в предлагаемой общности; функция, соответствующая реальному тяготению, будет введена в следующем разделе. Затем эта система будет (в не всегда стандартных обозначениях) проанализирована математически.

Материал этого раздела покрывается почти любым учебником физики или теоретической механики; понимание математика лучше всего отражено в знаменитом учебнике [3].

1.0. «Вывод» уравнений

Упомянутые физические соображения могут быть сформулированы на сравнительно общепонятном языке.

- И мы, и видимые нами небесные светила расположены в трёхмерном евклидовом пространстве, однородном и изотропном⁴⁾.

²⁾ Одна из причин его закрытия — наше полное поражение в борьбе с охранниками, не желающими пускать школьников на территорию Института.

³⁾ В престижном гуманитарном университете, в котором я работаю, студенты (в том числе медалисты и имеющие максимальные баллы по ЕГЭ) не понимают, что такое *доказательство* и чем отличается текст, скачанный из Интернета, от текста *понятого*; случается, что в целой аудитории первокурсников ни один не знает, что такое синус, и все забыли, как решать квадратные уравнения. По поводу теории относительности все твёрдо знают лишь то, что Эйнштейн играл на скрипке.

⁴⁾ То есть физические законы одинаковы всюду и во всех направлениях; в соответствии со сказанным во введении следует работать над модернизацией школьных программ, в результате которой эти постулаты можно будет формулировать на взрослом языке *групп преобразований*.

- Время вещественно и одномерно; когда в нашей идеализации небесных тел мы начинаем считать их («материальными») *точками*, их траектории, т. е. местоположения в пространстве, описываются *гладкими* вектор-функциями времени. Физические законы вечны и неизменны во времени.
- На небесах — та же физика, что и на Земле; точнее, действует *второй закон Ньютона*, согласно которому положение точки и её скорость однозначно определяют её будущее (а заодно и прошлое...).

Сказанного достаточно, чтобы перейти к математическому описанию движений небесных тел. Мы, однако, введём ещё одно важное упрощение — сведём проблему к так называемой *задаче двух тел*.

Ограничившись целью изучить движения планет в Солнечной системе, мы пренебрежём их попарными взаимодействиями по сравнению с их взаимодействием с Солнцем. Многотысячелетний опыт наблюдений человечества за планетами показывает оправданность этой идеализации.

Теперь с точки зрения каждой планеты в пустом пространстве существуют только Солнце и она, сжатая до точки. Солнце — тоже точка, которую мы, уже не опасаясь костров инквизиции, смело поместим в *центр*, т. е. в *начало координат* нашего пространства, которое отныне считается *векторным*. Теперь возьмём в произвольный момент (например, в полночь на 1 января 2001 года) положение планеты и предположим, что её скорость направлена не *на* Солнце и не *от* Солнца. Далее построим *единственную* плоскость, проходящую через Солнце, положение планеты в полночь 1 января и её вектор скорости в полночь 1 января; можно *доказать*, что планета навеки останется в этой плоскости. Таким образом, пространственная задача сводится к плоской. Введение на этой плоскости стандартных координат x, y позволяет перевести вышесказанное на язык дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x \mathcal{B}(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \ddot{y} = -y \mathcal{B}(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

Здесь $\mathcal{B}: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ — пока неизвестная гладкая функция положительного аргумента.

1.1. Симметрии

Система (1.1)–(1.2) фундаментальна и с физической, и с математической точек зрения; весьма плодотворно *сочетание* этих точек зрения. Так, сформулированные выше (на привычном в физике натур-

философском языке) принципы однородности, изотропности и неизменности транслируются в свойства *симметрии* системы (1.1)–(1.2). Точнее, на множестве решений этой системы действуют следующие группы:

сдвиги по времени $(x(t), y(t)) \mapsto (x(t - t_0), y(t - t_0))$;

повороты $(x, y) \mapsto (\cos \alpha \cdot x - \sin \alpha \cdot y, \sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y)$;

масштабирование $(x(t), y(t)) \mapsto \left(Rx\left(\frac{t}{R^{3/2}}\right), Ry\left(\frac{t}{R^{3/2}}\right) \right)$.

Именно в силу этих симметрий система (1.1)–(1.2) может быть «решена»⁵⁾.

1.2. КРУГОВЫЕ РЕШЕНИЯ

Для любой функции $\mathcal{B}$, любого положительного числа r_0 и любого «момента» t_0 система (1.1)–(1.2) имеет решения

$$x(t) = r_0 \cos\left(\sqrt{\frac{\mathcal{B}(r_0)}{r_0}}(t - t_0)\right), \quad y(t) = r_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{B}(r_0)}{r_0}}(t - t_0)\right).$$

Если бы первоначальное предположение Кеплера⁶⁾ было верно, для понимания динамики Солнечной системы достаточно было бы знания тригонометрии! Однако, как мы увидим ниже, Всемирное тяготение требует гораздо более изощрённой математики, в том числе (в настоящее время) не школьной.

1.3. СЕКТОРИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ

Согласно вышеупомянутой теореме Нётер, симметрии дифференциальных уравнений влекут наличие так называемых *интегралов движения*, т. е. функций местоположения и скорости, сохраняющихся вдоль орбит. Первым примером такого интеграла является *секториальная скорость*

$$\Sigma := x\dot{y} - \dot{x}y,$$

очевидно сохраняющаяся в силу уравнений (1.1)–(1.2). Возможность обсудить со школьниками её красивый и глубокий геометрический смысл⁷⁾ — один из критериев согласованности математических и физических программ, о которой мы говорили во введении.

⁵⁾ Это — частный случай *теоремы Нётер*, см. [3].

⁶⁾ Все планеты движутся по окружностям с центром в Солнце.

⁷⁾ Это — второй закон Кеплера, за равные промежутки времени планета замечает равные площади.

1.4. ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ

Введём обычным образом полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (1.4.1)$$

и вычислим

$$\Sigma = r^2 \dot{\varphi}. \quad (1.4.2)$$

Уравнения (1.1)–(1.2) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi = -\mathcal{B}(r)r \cos \varphi, \\ \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + r\ddot{\varphi} \cos \varphi = -\mathcal{B}(r)r \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

$$\quad (1.4.4)$$

1.5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Вычисляя $\cos \varphi \cdot (1.4.3) + \sin \varphi \cdot (1.4.4)$, получаем

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\mathcal{B}(r)r. \quad (1.5.1)$$

С помощью (1.4.2) исключаем φ :

$$\ddot{r} - \frac{\Sigma^2}{r^3} = -\mathcal{B}(r)r. \quad (1.5.2)$$

1.6. ВВЕДЕНИЕ «ПОТЕНЦИАЛА»

Взяв произвольное число $r_0 > 0$, введём определённую с точностью до аддитивной константы функцию

$$\mathcal{A}(r) := \int_{r_0}^r \rho \mathcal{B}(\rho) d\rho. \quad (1.6.1)$$

Уравнение (1.5.2) примет вид

$$\ddot{r} - \frac{\Sigma^2}{r^3} = -\mathcal{A}'(r). \quad (1.6.2)$$

1.7. ВВЕДЕНИЕ «ЭНЕРГИИ»

Последнее уравнение допускает интеграл

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\Sigma^2}{2r^2} =: -\mathcal{A}(r) + E \quad (1.7.1)$$

(для проверки продифференцируем эту формулу по времени и разделим результат на $\dot{r}$) или

$$\dot{r}^2 = 2E - 2\mathcal{A}(r) - \frac{\Sigma^2}{r^2}. \quad (1.7.2)$$

Наша энергия E имеет точный математический смысл, но, очевидно, такое её введение не удовлетворит физиков. Любой физик готов произнести вдохновенную речь об энергии; хотелось бы, чтобы когда-нибудь эти речи стали понятны не-физикам.

1.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВРЕМЕНИ

Последнее уравнение (по крайней мере формально⁸⁾) можно переписать в виде

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{2E - 2\mathcal{A}(r) - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} \quad (1.8.1)$$

и констатировать, что в некотором смысле задача исследования движения в центральном поле решена — если добавить к соотношению (1.8.1) соотношение (1.4.2), переписанное в виде

$$d\varphi = \frac{\Sigma \cdot dt}{r^2}. \quad (1.8.2)$$

Действительно, дифференциальное уравнение считается решённым, когда оно сведено к интегрированию.

В данном случае, если переписать (1.8.1) в виде

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{2E - 2\mathcal{A}(\rho) - \frac{\Sigma^2}{\rho^2}}}, \quad (1.8.3)$$

то интеграл в правой части (1.8.3) получается весьма интересным. Если $\mathcal{A}$ — рациональная функция (а в случае реального тяготения это именно так), то он называется *гиперэллиптическим*. Частные случаи этих интегралов (*эллиптические*) были известны ещё Ньютону, который установил, что они *не берутся* (как говорят специалисты, *не берутся в квадратурах*). Гиперэллиптическим интегралам и их обобщениям были посвящены работы сильнейших математиков XIX века — Абеля, Якоби, Римана и других.

1.9. ИССЛЕДОВАНИЕ «ОТВЕТА»

Хотя мы ещё ничего не знаем о функции $\mathcal{A}$ и потому не можем даже подступиться к количественным рассмотрениям, мы уже можем

⁸⁾ Физики не любят обсуждать ни определение дифференциала d , ни определение вариации δ . Большинство из них не обладает той кротостью, которая была присуща Владимиру Владимировичу, и при попытках собеседника понять, имеют ли они в виду что-нибудь определённое, когда говорят о *бесконечно малом*, приходят в ярость — скрываемую или открытую; собеседник, скорее всего, будет обвинён в неспособности к физическому мышлению и формализме, а то и в *бурбакизме*. Между тем дифференциалы будут играть важную роль в дальнейшем изложении, и я не вижу беды в том, чтобы интересующиеся физикой люди знали, что дифференциалы — это *сечения кокасательного расслоения*. В каком возрасте этому учить — отдельный вопрос.

сделать некоторые выводы, качественно анализируя полученный «ответ»; следует исключить из рассмотрения круговые решения, поскольку для них из уравнения (1.8.1) следует *остановка времени*.

Во-первых, под корнем в правой части уравнения должна стоять *положительная* величина; не вдаваясь в логику этого вопроса, отметим, что *при достаточно больших E* это имеет место. И, хотя наша «энергия» E и введена формально, мы вправе выразиться так: *при достаточно высоких энергиях* наше решение имеет смысл, хотя бы локально. Словосочетание «высокие энергии» вызывает физические ассоциации: коллайдеры, ЦЕРН, чёрные дыры...

Во-вторых, посмотрев на уравнение (1.4.2), мы поймём, что *знак* секториальной скорости Σ имеет ясный физический смысл. Вслед за круговыми следует исключить из рассмотрения *катастрофические* решения, в которых $\Sigma = 0$, т. е. планета *падает прямо на Солнце*. Если же $\Sigma \neq 0$, то уравнение (1.4.2) гарантирует *знакопостоянство* $\frac{d\varphi}{dt}$, т. е. планета движется вокруг Солнца либо всё время против часовой стрелки, либо всё время по часовой стрелке. Поэтому динамика планеты однозначно восстанавливается по динамике её расстояния до Солнца.

В-третьих, хотя мы собирались найти r как функцию от t , а получили с помощью уравнения (1.8.3) t как функцию от r (после выбора знака и интегрирования), несложные качественные рассмотрения позволяют преодолеть это затруднение. Действительно, любая траектория разбивается на участки приближения к Солнцу и отдаления от Солнца⁹⁾, и на каждом таком участке знак в (1.8.3) подбирается однозначно. Тогда на каждом таком участке t как функция от r монотонна и, следовательно, обратима.

Таким образом, с определёнными оговорками и энергетическими ограничениями, мы показали, что описанная процедура при *любой* функции $\mathcal{B}$ задаёт решения системы (1.1)–(1.2).

1.10. Дополнительные свойства неизвестной функции $\mathcal{B}$

Следующие вопросы естественны и физически, и математически.

- Когда все (или хотя бы некоторые некруговые) траектории решений системы (1.1)–(1.2) ограничены?
- Когда все (или хотя бы некоторые некруговые) траектории решений системы (1.1)–(1.2) замкнуты?

⁹⁾ Для полной безупречности этого утверждения следует предположить, что $\mathcal{B}$ не только гладка, но и вещественно-аналитична....

- Когда интеграл в правой части (1.8.3) всё-таки берётся (в элементарных функциях)?¹⁰⁾ Один из этих вопросов был действительно поставлен — но лишь в XIX веке. Ответу посвящён следующий раздел.

§ 2. ТЕОРЕМА БЕРТРАНА

В предыдущем разделе мы вышли на глубокую и нетривиальную связь между физикой и математикой. Стремление понять Закон Всемирного Тяготения выводит на класс интегралов, интересовавших математиков и по другим причинам. Главная задача теперь — понять, какой из этих интегралов связан с настоящим тяготением, т. е. чему равны неизвестные функции $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Физики пришли к ответу на этот вопрос путём тысячелетних наблюдений над планетами, завершившихся триумфальными результатами Тихо Браге — Кеплера — Ньютона (увлекательный и современный рассказ об этом можно найти, например, в книге [2]). Математики могли бы прийти к тому же ответу, приложив гораздо меньше усилий, если бы поставили перед собой, например, приведённые в предыдущем разделе (связанные между собой) естественные вопросы.

К постулатам, введённым в п. 1.0, можно было бы добавить, например, такой:

- Все (некатастрофические) траектории планет — замкнутые.

Постулат сильный, но естественный. В конце концов, жизнь на Земле развилась в условиях, когда миллионы лет зима и лето сравнительно регулярно сменяли друг друга, а среднегодовая температура если и менялась, то крайне медленно. И вряд ли жизнь сложилась бы на планетах, которые, скажем, по спиралям приближались бы к Солнцу и на которых поэтому год от года становилось бы всё жарче и жарче.

Французскому академику Ж. Бертрону принадлежит результат [1], который в наших обозначениях выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{B}$ — такая функция, что все решения системы уравнений (1.1)–(1.2) периодичны. Тогда либо $\mathcal{B}$ постоянна, либо $\mathcal{B}(r) = \frac{k}{r^3}$, где k — положительная константа.

¹⁰⁾ Этот вопрос выделяется среди предыдущих: понятие элементарной функции является всё-таки продуктом договорённости сообщества, а не свойством наблюдаемых в Природе траекторий. Тем не менее случай истинного тяготения обладает уникальным свойством: этот интеграл берётся, и поставленный вопрос — один из способов составить небольшой список кандидатов на роль истинной $\mathcal{B}$. Сомневаюсь, что эта задача полностью решена.

В статье [1] приведено короткое и красивое доказательство этой замечательной теоремы. В виде цепочки задач оно воспроизведено в книге [3].

Случай постоянной $\mathcal{B}$ соответствует свободному изотропному осциллятору, а случай

$$\mathcal{B} = \frac{k}{r^3}$$

— Закону Всемирного Тяготения. Ньютон проанализировал оба случая и установил, что все орбиты в обоих — эллиптические; в случае осцилляции сила направлена в центр эллипса, а в случае тяготения — в один из фокусов.

Если добавить к приведённым выше постулатам ещё один:

- Сила притяжения убывает с расстоянием,

то полученный список постулатов полностью определяет Закон Всемирного Тяготения.

Я думаю, что теорема Бертрана заслуживает гораздо более широкой известности, чем она имеет сегодня. Она даёт логически безупречный ответ на мучающих многих физиков вопрос: *почему в Природе действует именно закон обратных квадратов¹¹⁾, а не какойнибудь другой?* Один из возможных подходов к составлению школьных программ по физике и математике (для профильных классов...) таков: старшеклассник, собирающийся серьёзно заниматься современной Наукой, должен быть способен понять основные результаты, относящиеся к Закону Всемирного Тяготения. Напомним, что последний из упомянутых результатов, теорема Бертрана, был получен более века назад.

§ 3. НЬЮТОНОВСКОЕ ТЯГОТЕНИЕ

Теперь, зная, какова функция $\mathcal{B}$ «на самом деле», мы проанализируем динамику планет более детально.

3.0. Функции

Теперь нам известны

$$\mathcal{B}(r) = \frac{\gamma}{r^3} \tag{3.0.0}$$

и

$$\mathcal{A}(r) =_{(1.6.1)} -\frac{\gamma}{r}. \tag{3.0.1}$$

Постоянную γ мы вскоре уточним.

¹¹⁾ Так называют иногда ньютоновский Закон Всемирного Тяготения.

3.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения (1.1)–(1.2) превращаются в

$$\ddot{x} = -\gamma \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad (3.1.1)$$

$$\ddot{y} = -\gamma \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (3.1.2)$$

3.2. СЛУЧАЙ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Известно, что для планет Солнечной системы

$$\gamma = Gm_{\odot} \approx 1,327 \cdot 10^{20} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}.$$

К сожалению, объём настоящей статьи не позволяет обсудить интереснейшую историю получения этой величины и связанные с ней вычислительные проблемы.

3.3. КРУГОВЫЕ РЕШЕНИЯ

Они имеют вид

$$x(t) = r_0 \cos \frac{\sqrt{\gamma}(t-t_0)}{r_0^{3/2}}, \quad y(t) = r_0 \sin \frac{\sqrt{\gamma}(t-t_0)}{r_0^{3/2}}. \quad (3.3.0)$$

Эти решения можно также записать в виде

$$x(t) = r_0 \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T}, \quad y(t) = r_0 \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T}. \quad (3.3.1)$$

Равносильность этих записей выражается соотношением

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{r_0^{3/2}} = \frac{2\pi}{T},$$

или

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}, \quad (3.3.2)$$

которое представляет собой не что иное, как *третий закон Кеплера!*

3.4. «ФИЗИЧЕСКОЕ» ВРЕМЯ

Уравнение дифференциала времени из подраздела 1.8 принимает вид

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}. \quad (3.4.0)$$

Введём переменную ρ соотношением

$$\frac{1}{\rho^2} = 2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}. \quad (3.4.1)$$

В координатах $\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{r}\right)$ это соотношение задаёт конику. Мы можем (с точностью до константы) выразить время как *интеграл от рациональной формы на римановой поверхности*: соотношения (3.4.0) и (3.4.1) переписываются в виде

$$t = \int \rho \, dr, \quad (3.4.2)$$

где ρ и r связаны уравнением

$$\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2 = 2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}. \quad (3.4.3)$$

Наша коника допускает *рациональную параметризацию* (вспомним тангенс половинного аргумента или формулу для пифагоровых троек):

$$\frac{1}{\rho \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \quad (3.4.4)$$

$$\frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \frac{2T}{1 + T^2}. \quad (3.4.5)$$

Поэтому, интегрируя соотношение, являющееся дифференциалом соотношения (3.4.2),

$$dt = \rho \, dr,$$

мы можем выразить ВРЕМЯ t как элементарную функцию от вспомогательного параметра T .

Однако разрешить это соотношение в элементарных функциях не удаётся¹²⁾. С алгебраической точки зрения физическое время — ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ХИМЕРА!

3.5. «УГЛОВОЕ» ВРЕМЯ

Начиная с этого момента, будем называть φ *угловым временем*. К счастью, оно ведёт себя гораздо лучше физического. Переписывая (1.4.2) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Sigma}{r^2}, \quad (3.5.0)$$

¹²⁾ Можно придать этому утверждению абсолютно точный смысл.

преобразуем (3.4.0) к виду

$$\frac{r^2 d\varphi}{\Sigma} = \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}, \quad (3.5.1)$$

или

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\Sigma dr}{r^2 \sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} = - \frac{\Sigma d\frac{1}{r}}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} = - \frac{\Sigma d\frac{1}{r}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2} - \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2}} = \\ &= - \frac{d\left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2} - \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2}} = d \arccos \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}}, \end{aligned}$$

или

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\frac{\gamma}{\Sigma} + \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\Sigma}{r},$$

откуда

$$r = \frac{\Sigma}{\frac{\gamma}{\Sigma} + \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{\frac{\Sigma^2}{\gamma}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Вводя

$$r_0 := \frac{\Sigma^2}{\gamma} \quad (3.5.2)$$

и

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}}, \quad (3.5.3)$$

переписываем полученное выше соотношение в виде

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (3.5.4)$$

В духе упоминавшегося во введении соотношения между лыжником и лыжнёй ещё задолго до полного понимания динамики планет мы получили (в предположении знания уравнения эллипса в полярных координатах) *первый закон Кеплера*.

3.6. СВЯЗЬ ВРЕМЁН

Она имеет вид

$$dt = \frac{r_0^2}{\Sigma} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0))^2}.$$

Пока мы знаем лишь то, что угловое время параметризует орбиты хорошо, а физическое — плохо.

3.7. ИСКЛЮЧЕНИЕ СЕКТОРИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Соотношение (3.5.2) связывает три физические константы. Из них две (секториальная скорость Σ и среднее расстояние до Солнца r_0) допускают интуитивную интерпретацию¹³⁾, а третья, γ — не допускает. Было бы соблазнительно с помощью (3.5.3) исключить γ из рассмотрения, оставив только расстояние и секториальную скорость.

Однако γ — константа, единая для всей Солнечной системы, а r_0 и Σ присущи лишь данной планете, так что γ фундаментальнее, и мы её оставим. Исключить придётся секториальную скорость Σ .

Итак, переписываем (3.5.2) как

$$\Sigma = \sqrt{\gamma r_0}, \quad (3.7.0)$$

а (3.5.3) как

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2Er_0}{\gamma}}. \quad (3.7.1)$$

Связь времён принимает вид

$$dt = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0))^2}. \quad (3.7.2)$$

¹³⁾ Для интерпретации r_0 как среднего расстояния полезно рассмотреть «круговой» случай $\varepsilon = 0$, а затем учесть, что реальное $\varepsilon \ll 1$ — маленькое положительное число и, согласно формуле (3.5.4), реальное расстояние до Солнца r то немного больше, то немного меньше r_0 .

3.8. ОТВЕТ

Полученные формулы позволяют вычислить $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ -динамику в терминах интегралов и *углового времени*:

$$\begin{aligned} x &= \frac{r_0 \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, & \dot{x} &= \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}} (-\sin \varphi - \varepsilon \sin \varphi_0), \\ y &= \frac{r_0 \sin \varphi}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, & \dot{y} &= \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}} (\cos \varphi + \varepsilon \cos \varphi_0). \end{aligned}$$

Можно ли считать эти формулы полным и окончательным ответом? Если относиться к φ как к полноценному времени¹⁴⁾ — безусловно, да. Однако если хотеть получить ответ в терминах *настоящего* времени, то лучшее, чего мы достигли, — это констатация того, что аналогичной формулы не существует.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Мы укажем общую природу всех физических величин, связанных с тяготением. Все они оказываются *интегралами рациональных дифференциалов* на римановой поверхности, зависящей лишь от эксцентриситета орбиты.

Таким образом, сами физические величины оказываются *минимально трансцендентными* — как логарифм или синус; все они получаются с помощью единственной трансцендентной операции (интегрирования), применённой к алгебраическим объектам (рациональным дифференциалам на алгебраических кривых).

4.0. ПРОЙДЕННЫЙ ПУТЬ И МАЛАЯ РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ

Как обычно, *дифференциалом пути* называется

$$\begin{aligned} ds &:= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}} \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2} dt = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}} \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2} \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma} \frac{d\varphi}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)]^2}} = \\ &= r_0 \frac{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2}}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} d\varphi. \end{aligned}$$

¹⁴⁾ Вопрос о правомерности такого отношения будет рассмотрен в предпоследнем разделе.

Введя обозначение

$$\xi := -\cos(\varphi - \varphi_0),$$

перепишем последнее равенство как

$$\frac{ds}{r_0} = \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon\xi)^2} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Вводя *малую риманову поверхность* орбиты как алгебраическую кривую, заданную в координатах ξ, ζ уравнением

$$\zeta^2 = (1 - \xi^2)(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\xi),$$

получим

$$ds = r_0 \cdot \frac{1 - 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon\xi)^2} \cdot \frac{d\xi}{\zeta},$$

или

$$s - s_0 = r_0 \int_{s_0}^s \frac{1 - 2\varepsilon\xi + \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon\xi)^2} \cdot \frac{d\xi}{\zeta}.$$

Это — самый почтенный из неберущихся интегралов, *эллиптический* (3-го рода), названный так, поскольку выражает *длину дуги эллипса* (как и в нашем случае). Этим интегралом занимались Ньютон и Эйлер.

4.1. УГЛОВОЕ ВРЕМЯ И БОЛЬШАЯ РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ

Имеем

$$d\varphi = -d \arccos \xi = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Этот дифференциал иррационален на малой римановой поверхности, поэтому введём ещё

$$\eta := \sin(\varphi - \varphi_0)$$

и *большую риманову поверхность*, определяемую в трёхмерном (ξ, η, ζ) -пространстве соотношениями

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = 1, \\ \zeta^2 = (1 - \xi^2)(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\xi). \end{cases}$$

На этой римановой поверхности дифференциал углового времени принимает вид

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\eta}.$$

4.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ДРУГИХ ВЕЛИЧИН

На большой римановой поверхности рациональны дифференциалы всех физически значимых величин: дифференциал углового времени принимает вид

$$dt = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{d\varphi}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)]^2} = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \cdot \frac{d\xi}{\eta(1 - \varepsilon\xi)^2},$$

а дифференциал расстояния до Солнца —

$$dr =_{(3.5.4)} d \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} = r_0 d \frac{1}{1 - \varepsilon\xi} = \varepsilon r_0 \frac{d\xi}{(1 - \varepsilon\xi)^2}.$$

С помощью этих соотношений легко выразить также и дифференциалы исходных координат $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ в расширенном фазовом пространстве.

§ 5. О ВРЕМЕНАХ

В последних двух разделах придётся окончательно перейти на язык современной «взрослой» математики.

Фазовым пространством можно называть любое множество $\mathbb{X}$ с любыми дополнительными структурами, которое кто-либо способен интерпретировать как *пространство состояний* какой-либо физической системы.

Мы до сих пор работали с фазовым пространством

$$\mathbb{X} := \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y) \neq (0, 0)\};$$

вероятно, имеет смысл выбросить из этого пространства *катастрофический конус*

$$\mathbb{X}_{\text{cat}} := \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{X} \mid x\dot{y} = \dot{x}y\}$$

и работать в фазовом пространстве $\mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_{\text{cat}}$.

Временем следовало бы разрешить называть любую группу (или полугруппу...) $\mathbb{T}$ вместе с *действием*

$$\mathbb{T} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X},$$

орбиты которого можно рассматривать как *эволюции* состояний.

Классическим временем является $\mathbb{T} = \mathbb{R}$; в последние десятилетия, впрочем, всё более популярной становится *дискретная динамика* с $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ (в полугрупповой версии $\mathbb{T} = \mathbb{N}$).

В наших рассматриваниях классическое время фигурировало в соображениях о существовании и единственности решений системы

уравнений (1.1)–(1.2); эти рассмотрения даже в ньютоновском случае сопровождались законными сетованиями на трансцендентность и неявность этого действия.

Когда же в соответствии с теоремой Бертрана мы ограничились *периодическими* решениями, естественно было бы перейти к *периодическому времени*

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}};$$

если продолжать понимать это время классически, то все соображения о трансцендентности и неявности сохраняют силу.

Если же перейти к *угловому времени*

$$\mathbb{T} = \{\varphi\} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}},$$

то формулы раздела 3.8 задают действие этого времени явно и с помощью только элементарных функций.

Угловое время действует на каждой орбите по отдельности; рассмотренные в предыдущем разделе римановы поверхности позволяют предположить наличие *эллиптического времени*, действующего во всей Солнечной системе.

Этот вопрос требует дальнейших размышлений, желательно — с участием физиков. Бронфману я об этой конструкции рассказать не успел, но уверен, что ему было бы интересно; остаётся надежда на его учеников и последователей.

§ 6. Какими числами описывать наш мир?

К вещественному времени есть ещё одна претензия, которой не было во времена Ньютона. Понятие вещественного числа ещё не было формализовано, но господствовало убеждение в том, что эти числа идеально подходят для описания нашего мира.

Прошли века, появилась квантовая механика. Теперь нам объясняют (см., например, [4], что времена, меньшие 10^{-24} секунды (время прохождения света через ядро атома), не имеют физического смысла. На расстояниях же, меньших планковской длины 10^{-35} метра, пространство вообще теряет свою евклидовость. Таким образом, вещественные числа (с их безграничной делимостью и самоподобием), начиная с XX века для описания нашего мира не идеальны.

Предлагают ли наши рассмотрения какие-либо альтернативы? Да, и даже две. Можно рассмотреть *счётное время*

$$\mathbb{T} = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

и конечные времена: для $N \in \mathbb{N}$

$$T = \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$$

(для Земли, например, в первом приближении подходит $N = 365$).

Динамика опять определяется формулами из раздела 3.8. Пространство тоже можно сделать *счётным*, разрешив координатам и скоростям принимать только алгебраические значения. Более того, эти значения можно существенно ограничить: они могут лежать в *вещественных циклотомических* полях (т. е. полях, порождённых числами вида $\cos \frac{2\pi}{n}$ при целых n) и даже — в случае конечных времён — в конечнопорождённых полях чисел такого вида.

Предложение сменить основное поле с $\mathbb{R}$ — разумеется, дикое с точки зрения школьной физики. Но, как мы показали (опуская незначительные детали), соответствующие математические модели совместимы со всеми наблюдениями, проведёнными человечеством в связи со Всемирным Тяготением, Думаю, что Владимир Владимирович от этого предложения не отмахнулся бы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Bertrand J.* Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe // C. R. Acad. Sci. 1873. V. 77. P. 849–853.
- [2] *Аносов Д. В.* От Ньютона к Кеплеру. М.: МЦНМО, 2006.
- [3] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2017.
- [4] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 1, гл. 5. М.: Мир, 1977.

Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая вещественная функция вещественного переменного. Положим $\Delta(f) = f''/f'$. Оператор Шварца $S(f)$ определяется равенством

$$S(f) = \Delta(f)' - (\Delta(f))^2/2 = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

Докажите, что если $g = \frac{af+b}{cf+d} \neq \text{const}$, то $S(f) = S(g)$. Если же $g = af + b$, $a \neq 0$, то $\Delta(f) = \Delta(g)$. (Фольклор)

2. Стороны и диагонали правильного 43-угольника P раскрашены в два цвета — красный и синий — так, чтобы в каждой вершине

сходилось 20 красных и 22 синих отрезка. При этом образовалось 2022 синих одноцветных треугольников. Найдите число красных одноцветных треугольников.

(ИМС-2022, предложил М. Даас, Лейденский университет)

3. Докажите, что при всех $0 < x \leq \pi/2$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}. \quad (\text{Фольклор})$$

4. Два правильных k -угольника $A_1 \dots A_k$ и $B_1 \dots B_k$ вписаны в одну и ту же окружность. При каком максимальном n для любого многочлена $P(x, y)$ степени n выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^k P(A_i) = \sum_{i=1}^k P(B_i)? \quad (\text{Л. Радзивиловский})$$

5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырёхугольник $ABCE$, который делится диагональю BE на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины рёбер BC и CE равны. Сумма длин рёбер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объём пирамиды равен $1/6$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объём среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$ ¹⁾.

(Письменный вступительный экзамен ВМК 1978)

6. Существует ли такое дифференциальное уравнение, что множество его решений всюду плотно в пространстве гладких функций в топологии C^∞ ? (Ю. И. Манин)

7. а) Даны три софокусных эллипсоида (с совпадающими осями и равными разностями квадратов соответствующих осей). Найдите геометрическое место вершин прямоугольных параллелепипедов, у которых одна пара противоположных граней касается одного эллипсоида, вторая — второго, а третья — третьего.

б) Дан эллипсоид с центром O и полуосями a, b, c . Три попарно перпендикулярных луча с началом O пересекают эллипсоид в точках U, V, W . Найдите расстояние от O до плоскости UVW .

(А. Заславский, Ф. Нилов)

¹⁾ Родственная задача предлагалась в 1959 г. на вступительном экзамене в МФТИ. О том, как её решали три академика, можно прочесть в заметке А. В. Жукова «Как академики задачу решали» (см. «Математика для школьников», 2006, № 3, с. 16–17, а также Горобец Б. С. «Круг Ландау: физика войны и мира», М.: Либроком, 2009, с. 238–239).

8. Две обратимые матрицы A и B существенно различны, если для любого вектора $\vec{v}$ его образы $A(\vec{v})$ и $B(\vec{v})$ образуют тупой угол. Какое максимально возможное количество попарно существенно различных матриц может быть в пространстве размерности n при а) $n = 3$, б) $n = 4$, в) (задача на исследование) в общем случае?

(Л. Радзивиловский)

9. Робот Чертёжник является *конечным автоматом*, т. е. имеет только конечное число внутренних состояний. Он может передвигаться по клетчатому листу бумаги, закрашивая клетки. Для Чертёжника допустимы всего три действия:

- 1) *закрасить* — закрасить клетку,
- 2) *налево* — повернуться на 90 градусов налево вокруг начала стрелки,
- 3) *прыгнуть* — перепрыгнуть в центр соседней клетки по направлению стрелки.

Кроме того, Чертёжник умеет проверять условие *впереди край*.

а) Напишите программу для Чертёжника, по которой он на любом листе бумаги (в том числе и тогда, когда размер листа не помещается в его памяти) закрасит все клетки квадрата, кроме клеток, содержащих его центр (в зависимости от чётности длины стороны листа это одна клетка или четыре клетки).

б) Можно ли написать программу, чтобы Чертёжник закрасил только центр листа? (А. Я. Канель-Белов, М. В. Сапир)

10. Пусть в $\mathbb{R}^4$ дано произвольное объединение прямых (одномерных аффинных подпространств) U . Определите, какому букету топологических пространств гомотопически эквивалентно дополнение $\mathbb{R}^4 \setminus U$. (*Букет топологических пространств* — это такое объединение двух или более топологических пространств, что все они вместе пересекаются в единственной точке. *Гомотопически эквивалентные пространства* — это такие два пространства X и Y , что существуют непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, композиции которых $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным. Два отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ называются *гомотопными*, если существует такое отображение $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, что $F(x, 0) = f$ и $F(x, 1) = g$.)

(А. Мингажев)

11. Имеется k отрезков на плоскости. Оцените сверху число треугольников, все стороны которых принадлежат этому множеству отрезков. Получите оценку сверху вида $O(k^{3/2})$. (Фольклор)

12. Группа G не абелева, а все её собственные подгруппы абелевы. Докажите, что G разрешима, причём не более 2 различных простых чисел делят её порядок $|G|$.

(Производной группой группы G или её коммутантом называется подгруппа $G' = [G, G]$ группы G , порождённая элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$. Группа G разрешима, если $G^{(k)} = e$ при некотором k . Например, группа евклидовых преобразований плоскости разрешима, а группа евклидовых преобразований пространства — нет.)

(Фольклор)

13. Докажите, что площадь S выпуклого множества Ω с диаметром d удовлетворяет неравенству $S \leq \pi d^2/4$.

(Диаметром множества Ω называется число $d = \sup(|AB| : A, B \in \Omega)$.)

(К. Э. Каибханов)

14. а) Можно ли так отметить n точек в единичном квадрате, чтобы в любом содержащемся в нём прямоугольнике площади $2/((\sqrt{5} + 1)n)$ была отмеченная точка?

б) Постройте ограниченную бесконечную последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что неравенство $|x_i - x_j| |i - j| \geq 1$ выполнено для каждой пары различных чисел i и j .

(А. В. Анджанс)

15. Граница односвязной области Ω состоит из отрезков и дуг окружностей, C — единичный круг, $f: \Omega \rightarrow C$ — аналитическая биекция. Докажите, что f выражается через элементарные функции и интегралы от них тогда и только тогда, когда группа, порождённая инверсиями относительно граничных дуг и симметриями относительно граничных отрезков, разрешима.

(А. Я. Канель-Белов)

Дополнение и комментарии к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы').

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 6, с. 148–149) опубликована

Задача 3.8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (Д. Любшин)

С такой конструкцией связан следующий сюжет.

Задача 3.8'. Дан пятиугольник $ABCDEF$ площади S . Докажите неравенство

$$S \leq S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle EFA} + S_{\triangle FAB}.$$

В продолжение темы:

Задача 3.8''. В выпуклом пятиугольнике P провели все диагонали, в результате чего он оказался разбитым на десять треугольников и один пятиугольник P' . Из суммы площадей треугольников, прилежающих к сторонам P , вычли площадь P' ; получилось число N . Совершив те же операции с пятиугольником P' , получили число N' . Докажите, что $N > N'$. (А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 6 (с. 135, см. решение: выпуск 7, с. 195–196) опубликована

Задача 5.2. Али-Баба делит с разбойником 10 куч золотого песку. Али-Баба может в любой момент взять три кучи и уйти, либо он может выбрать 4 любые кучи и разделить каждую из куч на правую и левую часть. Далее разбойник правые части нетождественно переставляет, и затем части объединяются — каждая левая с новой правой.

Сможет ли Али-Баба унести с собой свыше 49 кг золотого песку, если всего было 50 кг? (А. Я. Белов)

Естественно возникает следующий вопрос.

Задача 5.2' (на исследование). *Оцените число операций в задаче 5.2, в частности когда число куч равно k , общее количество песка равно единице и при этом Али-Баба может взять любые $k - 1$ куч и уйти, а разбойнику следует оставить не больше ε песка.*

(А. Я. Канель-Белов)

Этот сюжет имеет приложение к теории колец с тождествами (PI-теории).

Задача 5.2''. Пусть в ассоциативной алгебре выполняется полиномиальное тождество степени n :

$$x_1 \dots x_n = \sum_{\sigma \in S_n \setminus \text{Id}} \alpha_\sigma x_\sigma(1) \dots x_\sigma(n).$$

Тогда в ней выполняется некоторое нетривиальное тождество алгебраичности порядка n

$$\sum_{I=(i_1, \dots, i_n)} c_0 x^{k_1} c_1 x^{k_2} \dots c_n = 0. \quad (\text{А. Я. Канель-Белов})$$

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229–230) опубликована

Задача 7.4. Доказать неравенство $x^y + y^x > 1$ ($x, y > 0$).

(Фольклор)

Вот связанный сюжет.

Задача 7.4'. Докажите неравенство $2^x + 2^{1/x} > 1$. (Фольклор)

В выпуске 8 (с. 247, см. исправления и решение: наст. выпуск, с. 222–225) опубликована

Задача 8.7. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдётся такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифферен-

цируемой функции f условия

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx < 1;$$

$$p > 1, k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor \quad \text{или} \quad p = 1, k = 0, \dots, n+1,$$

влекут условие $|f(0)| < C$. (А. Я. Канель)

Естественно возникает

ЗАДАЧА 8.7'. Верно ли, что для $p, n \in \mathbb{N}$ из неравенств

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^{1/p} dx < 1;$$

$k = 0, \dots, n + p + 1$ при $p > 1$ и $k = 0, \dots, n + 1$ при $p = 1$ следует ограниченность $|f(0)|$? (А. С. Мингажеев)

В выпуске 9 (с. 223, см. решение: выпуск 14, с. 277) опубликована

Задача 9.5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? (Фольклор)

Вот задача на связанный сюжет.

Задача 9.5''. Существует ли функция, дифференцируемая во всех рациональных точках и недифференцируемая во всех иррациональных? (Фольклор)

В выпуске 10 (с. 278, см. решение: выпуск 13, с. 185–186) опубликована

Задача 10.1. В вершинах куба написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяют одновременно). После 10 таких операций в вершинах оказались исходные числа. Найдите все такие числа. (А. К. Ковальджи)

Вот контрапункт к этой задаче.

Задача 10.1'. (а) В каждой вершине треугольника записано некоторое число, меньшее чем 10^6 , причём сумма всех этих чисел равна нулю. Каждое число заменяется средним арифметическим чисел, стоящих в остальных вершинах, и эта операция повторяется 30 раз. Докажите, что после этого каждое число станет по модулю меньше чем 10^{-3} .

(б) По кругу расставлены n вещественных чисел, не все они равны. За секунду каждое число заменяется на среднее арифметическое со своим соседом по часовой стрелке. Докажите, что расположение чисел стремится к постоянному,

(в) причём это происходит с экспоненциальной скоростью, т. е. существует $0 < \alpha < 1$ такое, что на k -й секунде разности чисел имеют порядок $O(\alpha^k)$.

(г) Найдите это α .

(Л. Радзивилловский)

А вот общая формулировка.

Задача 10.1''. В вершинах графа Γ написаны числа. Вместо каждого числа записывают среднее арифметическое чисел, стоящих в трёх соседних вершинах (числа заменяются одновременно). Операцию повторяют до бесконечности. При этом оказалось, что последовательности чисел, записанные в вершинах, не сходятся. Докажите, что граф Γ является двудольным, т. е. все его вершины можно раскрасить в два цвета так, что соседние вершины будут разноцветными.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 26 (с. 269, см. решение: выпуск 27, с. 253–254) опубликована

Задача 11.7'. Докажите, что

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}. \quad (\text{Фольклор})$$

В выпуске 29 (с. 263) опубликована

Задача 11.7''. Докажите, что

$$p \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p - kq)^{k-1} (r + kq)^{n-k} = (p + r)^n. \quad (\text{Фольклор})$$

В продолжение темы:

Задача 11.7'''. Среди $m + n$ пассажиров автобуса m человек имеют монету в 5 копеек, n человек — 10 копеек, у кассира есть k монет достоинством 10 копеек. Какова вероятность того, что все пассажиры смогут заплатить за проезд и очередь не будет приостанавливаться?

(Фольклор)

В выпуске 14 (с. 272) опубликована

Задача 14.2. Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg} \sin(x)}{\arcsin \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg} \arcsin(x)} \quad (\text{В. И. Арнольд})$$

В продолжение темы:

ЗАДАЧА 14.2'. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Что больше: $\operatorname{tg}(\sin(x))$ или $\sin(\operatorname{tg}(x))$?
(Л. Радзивилловский)

В выпуске 17 (с. 197) опубликована

Задача 17.7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами взяли по точке A_i . Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите все 5 возможностей.
(А. Я. Канель-Белов)

С ней связана (выпуск 29, с. 265)

Задача 17.7' (на исследование). На каждом ребре правильного многогранника M с единичными рёбрами в n -мерном пространстве взяли по точке A_i . Найдите объём геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотрите случаи кубов, октаэдров, тетраэдров, а также три исключительных многогранника в четырёхмерье (три правильных многогранника, не аналогичных трёхмерным). Рассмотрите случай k -мерных граней.
(А. Я. Канель)

В продолжение темы:

Задача 17.7''. (а) Даны два правильных тетраэдра с рёбрами длины $\sqrt{2}$, переходящих один в другой при центральной симметрии. Пусть Φ — множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры Φ .

(б) В правильный додекаэдр можно вписать куб 5 разными способами. В каждом таком кубе взяли по точке. Пусть Φ — множество центров масс пятёрок точек, концы которых принадлежат попарно разным кубам. Найдите объём фигуры Φ .

(в) В правильный додекаэдр можно вписать правильный тетраэдр 10 разными способами. В каждом таком кубе взяли по точке. Пусть Φ — множество центров масс десяток точек, концы которых принадлежат попарно разным тетраэдрам. Найдите объём фигуры Φ .

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 19 (с. 257) опубликована

Задача 19.3. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2 + y^2 = (x + 1)^3;$$

$$\text{б) } x^2 + xy + 2y^2 = (y + 1)^3$$

в целых числах.

(Н. Н. Осипов)

Развитием сюжета служит

Задача 19.3''. Решите уравнение $x^2 + xy + 41y^2 = (yz + 1)^3$ в натуральных числах.
(Н. Н. Осипов)

В выпуске 20 (уточнение в выпуске 28, с. 236, см. решение: выпуск 30, с. 192–208) опубликована

Задача 20.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *линейной рекуррентой порядка k* , если для некоторых $b_1, \dots, b_k$ при всех $n \geq k$ выполняется равенство

$$b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_k a_{n-k} = 0.$$

Пусть $b_0 = 1$, $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех i . Докажите, что тогда либо последовательность $\{a_n\}$ содержит член, имеющий 2016 различных простых делителей, либо множество натуральных чисел разбивается на непересекающиеся арифметические прогрессии, на каждой из которых наша рекуррента является геометрической прогрессией.

(А. Я. Канель-Белов)

С ней связана

Задача 20.4''. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $a_1 < \dots < a_s$ — целые числа.

(а) Докажите, что $P(a)$ делится на $P(a_1), \dots, P(a_s)$ при некотором a .

(б) Можно ли утверждать, что $P(a)$ делится на $P(a_1) \dots P(a_s)$ при некотором a ?
(Л. Радзивиловский)

В выпуске 22 (с. 232, см. решение: выпуск 23, с. 236–238) опубликована

Задача 22.4. Дана кососимметрическая матрица A . Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны.
(И. В. Митрофанов)

Следующая задача относилась к определителям таких матриц (выпуск 28, с. 244–245).

Задача 22.4'. В матрице на пересечении i -й строки и j -го столбца при $i > j$ стоит переменная x_{ij} , при $i < j$ стоит $-x_{ij}$, а при $i = j$ стоит 0. Докажите, что её определитель есть квадрат многочлена от переменных x_{ij} .
(Теорема Пфаффа)

В продолжение темы:

Задача 22.4''. Докажите, что собственные числа кососимметрической матрицы чисто мнимые.
(Фольклор)

В этой связи в выпуске 28 на с. 258–259 приведена подборка задач на разностное дифференцирование. Вот и ещё задачи на эту тему.

1. Найдите все такие функции f , что для любой тройки попарно различных вещественных чисел x, y, z выполняется неравенство

$$\frac{f(x)}{(x-y)(x-z)} + \frac{f(y)}{(y-x)(y-z)} + \frac{f(z)}{(z-y)(z-x)} \geq 0.$$

2. Рассмотрим множество всех троек (x, y, z) неотрицательных целых чисел, не превосходящих n , но исключим тройку $(0, 0, 0)$. Каким минимальным числом плоскостей, не проходящих через начало координат, можно покрыть это множество?

В выпуске 28 (с. 234) опубликована

Задача 28.5. (а) Дана полоса $2 \times n$, заполненная знаками «+» и «-». За одну операцию разрешается поменять знаки в одном столбце, строке или диагонали. Каково минимальное число операций, гарантированно достаточное для того, чтобы сделать все знаки плюсами?

(б) Тот же вопрос для полосы $3 \times n$. (А. Я. Канель-Белов)

В продолжение темы:

Задача 28.5'. (а) Во всех клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «-». Разрешается поменять знаки в любом подквадрате 2×2 на противоположные. Какое максимальное число таблиц можно получить?

(б) Сколько операций для этого требуется? (Л. Радзивилловский)

ЗАМЕЧАНИЕ. На 33-м турнире Городов (2012 г., весна, сложный вариант, 8–9 кл.) была предложена задача.

Задача. В клетках таблицы $n \times n$ стоят знаки «+» и «-». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более n ходов.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 30 (с. 230) опубликована

Задача 30.6. Дана выпуклая (т. е. такая, что множество точек над графиком выпукло) функция $f(x)$, определённая на всей вещественной прямой. Обозначим через U множество всех точек плоскости между графиками функций $f(x)$ и $f(x) + 1$ (включая точки, лежащие на графиках). Докажите, что внутри U можно расположить отрезок любой конечной длины. (Е. Рябов)

В продолжение темы:

Задача 30.6'. (а) По угловой речке — области между координатными осями, горизонтальным и вертикальным лучами с началом в точке $(1, 1)$ — плывёт ветка. Каково максимально возможное расстояние между её концами, при котором она может проплыть всю область?

(б) Открытый вопрос. Какова максимальная площадь фигуры, которая может в этой области развернуться на 180° ?

(А. Я. Канель-Белов)

Решения задач из прошлых выпусков

СЕРИЯ 1, вып. 13, задача 163. УСЛОВИЕ. Решить в целых числах уравнение $x^8 - y^5z = x^5$, где y и z — простые числа. (Г. А. Делибаш)

ОТВЕТ. $x = 2, y = 2, z = 7$.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем уравнение: $x^5(x^3 - 1) = y^5z$. Пусть $x = 2k$ с целым k . Если $|k| > 1$, то $x^5 = 2^5k^5$, что не может быть равно y^5z , тем более после умножения на $x^3 - 1$. Если $x = -2$, то легко видеть, что решений также нет. Значит, $x = 2$, тогда правая часть равна 2^57 , откуда $y = 2, z = 7$.

Пусть теперь x нечётно. Если $x = p$, где p нечётное простое, то $p^3 - 1 = 2m$, где $m \neq 1$, и $p^5(p^3 - 1)$ не имеет вида y^5z с простыми y, z . Если же $x = pk$, где p нечётное простое, а $|k| \geq 2$, то $x^5 = p^5k^5$ заведомо не имеет нужного вида. (Ю. Раскин)

СЕРИЯ 1, вып. 13, задача для школьников 6. УСЛОВИЕ. Если между цифрами 1 и 6 числа 16 вставить число 15, затем в полученное таким образом число 1156 вставить между цифрами 1 и 5 опять число 15 и так поступить произвольное число раз и далее, вставляя каждый раз число 15 между 1 и 5, то полученное число будет квадратом целого числа. Доказать это. (Предложил С. И. Городов)

РЕШЕНИЕ. Пусть число 15 вставили n раз. Тогда получилось число $\underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \underbrace{5 \dots 5}_n 6$. Его можно записать как

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \cdot \underbrace{10 \dots 0}_n 5 + 1 = \underbrace{3 \dots 3}_{n+1} \cdot \underbrace{3 \dots 3}_n 5 + 1 = (\underbrace{3 \dots 3}_n 4)^2 - 1 + 1 = (\underbrace{3 \dots 3}_n 4)^2.$$

(Ю. Раскин)

СЕРИЯ 1, вып. 13, задача для школьников 7. УСЛОВИЕ. Доказать формулу

$$n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \dots + \frac{(n+k)!}{k!} = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!}. \quad (\text{Б. А. Оксенов})$$

РЕШЕНИЕ. Проведём индукцию по k . Случай $k = 0$ очевиден. Пусть для k формула верна. Докажем её для $k + 1$:

$$\begin{aligned} n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \dots + \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} &= \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)} + \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(n+k+1)!(k+1)}{(k+1)!(n+1)} + \frac{(n+k+1)!(n+1)}{(k+1)!(n+1)} = \frac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

(Ю. Раскин)

8.7. УСЛОВИЕ. Докажите, что для любых целых неотрицательных n, p найдётся такая константа $C > 0$, что для любой бесконечно дифференцируемой функции f условия

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx < 1;$$

$$p > 1, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor \quad \text{или} \quad p = 1, \quad k = 0, \dots, n+1,$$

влекут условие $|f(0)| < C$.

(А. Я. Канель)

ЗАМЕЧАНИЕ. В тексте, опубликованном в выпуске 8, имелись опечатки: указано $1/p$ вместо p в подынтегральном выражении и $\left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor$ вместо $\left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor$. Для этих условий найден контрпример в виде бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций

$$f_\varepsilon(x) = \ln \left| \ln \left(\frac{x}{m} + \varepsilon \right) \right|, \quad m \geq e,$$

для которых при $n \equiv -1 \pmod{p}$, $p > 1$, значения всех интегралов

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor,$$

меньше единицы, но $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(0) = \infty$.

РЕШЕНИЕ. Ключевую роль в доказательстве играет следующая

ЛЕММА. В условиях задачи

$$|f^{(k)}(t)| < \frac{n+2p}{p} t^{-(n+p)/p}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{p} \right\rfloor, \quad 0 < t \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Вспомним неравенство Гёльдера для интегралов:

$$\int_a^b |g(x)h(x)| dx \leq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |h(x)|^{q'} dx \right)^{1/q'}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 1 < q.$$

При

$$g(x) = 1, \quad h(x) = x^{n/p} |f^{(k)}(x)|, \quad q = \frac{p}{p-1}$$

получаем

$$\left| \int_0^t x^{n/p} f^{(k)}(x) dx \right| \leq \int_0^t x^{n/p} |f^{(k)}(x)| dx \leq t^{(p-1)/p} \left(\int_0^t x^n |f^{(k)}(x)|^p dx \right)^{1/p} < 1.$$

Интегрирование по частям даёт

$$\begin{aligned} 1 &> \left| \int_0^t x^{n/p} f^{(k)}(x) dx \right| = \\ &= \left| \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} f^{(k)}(t) - \frac{p}{n+p} \int_0^t x^{(n+p)/p} f^{(k+1)}(x) dx \right| \geq \\ &\geq \left| \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} f^{(k)}(t) \right| - \left| \frac{p}{n+p} \int_0^t x^{(n+p)/p} f^{(k+1)}(x) dx \right| > \\ &> \frac{p}{n+p} t^{(n+p)/p} |f^{(k)}(t)| - \frac{p}{n+p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Решение задачи при $p = 1$ непосредственно следует из леммы. Действительно, многократно интегрируя по частям при $k = n+1$, получаем:

$$\begin{aligned} 1 &> \left| \int_0^1 x^n f^{(n+1)}(x) dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (A_n^{n-k} f^{(n-k)}(1)) + (-1)^n n! \int_0^1 f'(x) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} A_n^{n-k} f^{(n-k)}(1) + (-1)^n n! (f(1) - f(0)) \right|, \end{aligned}$$

где

$$A_n^{n-k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Поскольку при $k = 0, \dots, n$ согласно лемме $|f^{(k)}(1)| < n+2$, получаем, что $|f(0)|$ ограничена.

Перейдём к случаю $p > 1$. Интегральное неравенство Гёльдера меняет знак при $0 < q < 1$:

$$\int_a^b |g(x)h(x)| dx \geq \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_a^b |h(x)|^{q'} dx \right)^{1/q'},$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 0 < q < 1.$$

Пусть $n = mp + r$, где $0 \leq r < p$. Если $r < p - 1$, то, применяя неравенство Гёльдера для

$$g(x) = x^r, \quad h(x) = x^{mp} |f^{(k)}(x)|^p, \quad q = \frac{1}{1-p}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

получаем, что для интегралов

$$\int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx, \quad n = mp + r, \quad 0 \leq r < p - 1$$

выполняются неравенства

$$1 > \int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx = \int_0^1 x^r (x^m |f^{(k)}(x)|)^p dx \geq$$

$$\geq \left(\int_0^1 x^{r/(1-p)} dx \right)^{1-p} \left(\int_0^1 x^m |f^{(k)}(x)| dx \right)^p.$$

(При $0 \leq r < p - 1$ интеграл $\int_0^1 x^{r/(1-p)} dx$ конечен, так что конечны и интегралы $\int_0^1 x^m |f^{(k)}(x)| dx$ для $k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor = m+1$.) Действуя как в случае $p = 1$ с заменой n на m (и используя лишь $\left\lfloor \frac{n+p}{p} \right\rfloor$ производных), получаем нужный результат.

При $r = p - 1$ неравенство Гёльдера применить нельзя, так как появляется расходящийся интеграл. Однако заметим, что

$$\int_0^1 x^{n+1} |f^{(k)}(x)|^p dx \leq \int_0^1 x^n |f^{(k)}(x)|^p dx < 1.$$

Поэтому можно рассуждать как выше, заменив n на $n+1$ и используя $\left\lfloor \frac{n+p+1}{p} \right\rfloor$ производных.

Комментарии. 1. Можно показать, что указанное в условии количество k интегральных неравенств не только достаточно, но и необходимо для гарантии ограниченности $|f(0)|$.

2. Задача возникла при рассмотрении доказательства леммы Соболева в книге Р. Нарасимхана «Анализ на действительных и комплексных многообразиях». А. Я. Канель-Белов заметил, что доказательство леммы Соболева удивительным образом сводится к одномерью! Так и появилась эта задача.

(А. С. Мингажеев)

13.9. Условие. В компании n человек. У каждого своя новость. Они перезваниваются, причём в каждом разговоре собеседники сообщают друг другу все известные им новости.

(б) За один день каждый человек участвует не более чем в одном разговоре. Какое минимальное количество дней необходимо, чтобы все узнали все новости?¹⁾

(А. В. Анджанс)

Ответ. Пусть k — такое натуральное число, что $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Если n чётно, то понадобится k дней, а если n нечётно, понадобится $k+1$ день.

Решение. Покажем сначала, что потребуется хотя бы k дней. Возьмём одного из жителей, пусть это Вася. До первого обмена новостями Васину новость знал только сам Вася, и каждый день число людей, знающих Васину новость, увеличивается не более чем в два раза. Значит, после $k-1$ дней число людей, знающих Васину новость, не больше, чем $2^{k-1} < n$.

Покажем теперь, что k вопросов хватит, если $n \leq 2^k$ и n чётно. Нарисуем правильный n -угольник, пронумеруем его вершины $A_1 \dots A_n$ по часовой стрелке и сопоставим каждому жителю по вершине.

Пусть σ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — симметрия относительно срединного перпендикуляра к отрезку $A_{2^{i-1}}A_{2^{i-1}+1}$. Пусть в день с номером i происходит обмен информацией между парами вершин, переходящих друг в друга при симметрии σ_i . Назовём допустимыми те движения многоугольника, которые получаются из композиции k симметрий

$$\sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$$

вычёркиванием нескольких членов (возможно, всех или ни одного). Способов вычеркнуть члены всего 2^k .

Рассмотрим какую-то вершину A . Несложно видеть, что после первого дня соответствующая новость известна вершинам (то есть лю-

¹⁾ Решение п. (а) см. Шаповалов А. В. Задача о сплетниках // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 249–253.

дям) A и $\sigma_1 A$, после второго дня — вершинам A , $\sigma_1 A$, $\sigma_2 A$ и $\sigma_2 \sigma_1 A$. Рассуждая таким образом, приходим к тому, что после k -го дня эта новость известна тем вершинам, которые являются образами вершин A при всевозможных допустимых движениях.

Покрасим стороны нашего n -угольника в два цвета чередующимся образом. Рассмотрим симметрии n -угольника, сохраняющие раскраску сторон. Такими симметриями можно перевести любую вершину в любую. Утверждение задачи для чётного n вытекает теперь из следующего факта.

ЛЕММА. Множество допустимых движений совпадает с множеством всех симметрий многоугольника, сохраняющих раскраску сторон.

Доказательство. Очевидно, что все допустимые движения сохраняют двухцветную раскраску сторон. Количество движений, сохраняющих раскраску, равно n . Поэтому достаточно показать, что количество допустимых движений не меньше, чем n .

Рассмотрим, в какие вершины переходит вершина A_1 . Индукцией по i нетрудно показать, что при $i < k$

$$\{s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1 A_1, \text{ где } s_j \text{ — это } \sigma_j \text{ или тождественное преобразование при } j = 1, \dots, i\} = \{A_1, \dots, A_{2^i}\}.$$

Стало быть, A_1 можно перевести допустимыми движениями в любую другую вершину, а их количество равно n . $\square$

Пусть теперь число людей нечётно. Так как они не могут разбиться на пары, в каждый из дней найдётся человек, который ни с кем в этот день не общался. Назовём Васей того, кто не участвовал в разговорах в первый день. Перед *вторым* днём Васину новость знал ровно один человек, и с каждым днём число знающих её увеличивается не более, чем в два раза. Тогда после k -го дня её будут знать не больше, чем $2^{k-1} < n$ человек.

Покажем, как справиться за $(k+1)$ дней. Разделим всех жителей на две группы: в первой 2^{k-1} человек, во второй группе остальные $n - 2^{k-1} < 2^{k-1}$ человек. В первый день устроим $(n - 2^{k-1})$ разговоров — пусть каждый из второй группы говорит с кем-то из первой группы, а остальные не участвуют. Теперь применим алгоритм для 2^{k-1} людей к первой группе, для этого потребуется ещё $k-1$ день. После этого каждый человек из первой группы знает вообще все новости. В последний день проведём те же разговоры, что и в первый день, теперь новости узнают все люди из второй группы.

(И. В. Митрофанов)

20.10. Условие. Дан многочлен $P(x)$ степени n с целыми коэффициентами, e — основание натуральных логарифмов. Докажите, что

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x)| > e^{-n}.$$

(Международная студенческая олимпиада, 2015.
Предложил Гёза Кош, Венгрия)

Решение. Мы будем использовать два нетривиальных, но достаточно известных факта.

Факт 1. Число e не является алгебраическим.

Факт 2. Обозначим $f(N) = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$. Тогда

$$\frac{\ln f(N)}{N} \rightarrow 1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Это утверждение является одной из переформулировок *теоремы о распределении простых чисел*.

Перейдём к решению задачи. Обозначим $M = \max_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

Для натурального k рассмотрим интеграл

$$J_k = \int_0^1 (P(x))^{2k} dx.$$

Очевидно, $0 < J_k < M^{2k}$ и $J_k \in \mathbb{Q}$.

Пусть

$$(P(x))^{2k} = \sum_{i=0}^{2kn} a_{k,i} x^i.$$

Тогда

$$J_k = \sum_{i=0}^{2kn} \frac{a_{k,i}}{i+1}.$$

Рациональное число J_k больше нуля, а его знаменатель является делителем наибольшего общего кратного чисел $1, 2, \dots, 2kn+1$.

В наших обозначениях $f(N) = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$, тогда

$$M > (f(2nk+1))^{-2k}.$$

Из Факта 2 следует, что для всех $\varepsilon > 0$ и для достаточно большого k выполнено неравенство

$$f(2kn+1) < e^{(1+\varepsilon)(2kn+1)},$$

а следовательно,

$$M > (e^{(1+\varepsilon)(2kn+1)})^{-2k} = \frac{1}{e^{1+\varepsilon} \left(n + \frac{1}{2k}\right)}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и потом устремляя ε к нулю, получаем $M \geq 1/e^n$.

Число M является алгебраическим как значение P в алгебраической точке (корень производной $P'(x)$ или конец отрезка). Так как e трансцендентное, случай равенства невозможен.

КОММЕНТАРИЙ. Константу $1/e \approx 0,3679$ можно улучшить, оптимальная константа находится между 0,4213 и 0,4232 (см. <https://arxiv.org/abs/1307.5361>).

(Гёза Кош)

24.7. Условие. Докажите, что при бесконечно многих n набор чисел $1, \dots, 3n$ можно разбить на n групп по три числа так, чтобы одно из чисел каждой группы было равно сумме двух других. (Фольклор)

РЕШЕНИЕ. Индукцией по k покажем, что для чисел вида $n = 4^k - 1$ такое разбиение существует. База индукции $k = 1$ тривиальна: $3 = 1 + 2$.

Индукционный переход. Возьмём существующее по предположению индукции разбиение чисел $1, \dots, 4^k - 1$ на тройки и домножим все эти числа на 2. Получится разбиение всех чётных чисел от 2 до $2 \cdot 4^k - 2$ на тройки, где в каждой тройке одно из чисел — сумма двух других. Оставшиеся числа от 1 до $4^{k+1} - 1$ разобьём на тройки следующим образом:

$$\begin{aligned} (2 \cdot 4^k - 1) + 2 \cdot 4^k &= 4^{k+1} - 1, \\ (2 \cdot 4^k - 3) + (2 \cdot 4^k + 1) &= 4^{k+1} - 2, \\ &\dots\dots\dots \\ (2 \cdot 4^k - (2i + 1)) + (2 \cdot 4^k + i) &= 4^{k+1} - i - 1, \\ &\dots\dots\dots \\ 1 + (3 \cdot 4^k - 1) &= 3 \cdot 4^k. \end{aligned}$$

Легко видеть, что каждое из этих чисел действительно входит ровно в одну тройку. (И. В. Митрофанов)

25.9. Условие. Одновременно бросается несколько игральные кубиков. Кубики могут быть несимметричны, и они не обязательно одинаковы. Докажите, что случайная величина «остаток от общей суммы очков по модулю 11» не распределена равномерно на числах от 0 до 11. (И. В. Митрофанов)

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим какой-нибудь из кубиков. Обозначим $a_1, \dots, a_6$ вероятности, с которыми он при броске выдаёт числа от 1 до 6 соответственно. Многочлен $a_1x + \dots + a_6x^6$ назовём *производящим многочленом* этого кубика. Пусть всего кубиков n , и их производящие многочлены $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$.

Если бросаются эти кубики одновременно, то вероятность того, что сумма выпавших очков равна b , равна коэффициенту при x^b у произведения многочленов $P(x) = p_1(x)p_2(x) \dots p_n(x)$. Пусть

$$P(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_{6n}x^{6n}.$$

У многочлена $P(x)$ мономы разбиваются на 11 групп: в первой группе члены с x в степени с показателем, делящимся на 11, во второй группе — мономы вида $A_{11k+1}x^{11k+1}$, и так далее.

Если бы все остатки суммы очков по модулю 11 имели одинаковую вероятность, то в каждой из 11 групп сумма коэффициентов мономов была бы равна $1/11$. Тогда комплексный корень 11-й степени из единицы

$$t = \cos \frac{2\pi}{11} + i \sin \frac{2\pi}{11}$$

являлся бы корнем многочлена P . А значит, t обнуляет какой-то из многочленов p_i . Покажем, что так не бывает. Рассмотрим

$$p_i(t) = a_1t + \dots + a_6t^6 = t(a_1 + \dots + a_6t^5).$$

Если $p_i(t) = 0$, то мнимая часть хотя бы одного из чисел $a_1, a_2t, \dots, a_6t^5$ отрицательна. Но все коэффициенты a_i (вероятности выпадения соответствующей грани) — положительные числа, поэтому аргументы чисел $a_0, a_1t, \dots, a_6t^5$ пробегают значения от 0 до $10\pi/11$. Ни одно из этих чисел не может иметь отрицательную мнимую часть, а значит, и остатки от деления на 11 не распределены равномерно.

КОММЕНТАРИЙ. Эта задача обобщает задачу 11 из конкурса решения задач Санкт-Петербургского математического общества 2012–2013 года (см. <http://www.mathsoc.spb.ru/konkurs/contest12.pdf>).

(И. В. Митрофанов)

Об электронных публикациях по геометрии

На странице <https://geometry.ru/articles.php> можно найти статьи по вопросам геометрии и её преподавания, ранее опубликованные в различных изданиях. По ссылке «Нам пишут» можно перейти на страницу <https://geometry.ru/articles.php#texts> с новыми материалами по геометрии для широкого круга читателей. Публикуем аннотации этих материалов.

Е. И. Галахова. *Девочка на шаре*

Пусть на описанной окружности треугольника ABC взята точка X . Окружность ω , проходящая через точки B и X , пересекает стороны BC и AB (или их продолжения) в точках D и E соответственно. Тогда, в зависимости от условий, накладываемых на точку X или окружность ω , можно определить конструкции, значительно упрощающие поиск решения соответствующих задач.

К. Бельский. *Изогональное сопряжение и частный случай точек Микеля*

В треугольнике ABC пусть (P, Q) — пара изогонального сопряжения. Пусть X — точка на прямой PQ , точка X' изогонально сопряжена точке X в треугольнике ABC , а E, F — пересечение окружностей (ABC) и $(X'PQ)$. Рассмотрены свойства точек E, F для любой точки X , а также частные случаи расположения точки X и пар точек (P, Q) .

К. Бельский. *Обобщение леммы Веррьера*

Дан треугольник ABC с центром вписанной окружности I . Окружность ω_a касается сторон AB, AC и окружности (ABC) в точках F, E, T соответственно. M_a — середина дуги BAC окружности (ABC) . Тогда I , середина отрезка EF и точки T, I, M_a лежат на одной прямой.

К. Бельский. *Теорема Дезарга об инволюции для вписанных и невписанных окружностей треугольника*

В статье обсуждаются некоторые приложения теоремы Дезарга об инволюции. Предполагается знакомство с основами проективной геометрии.

ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В ПРОШЛЫХ ВЫПУСКАХ

ВЫПУСК	СТРАНИЦА,	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО	СЛЕДУЕТ ЧИТАТЬ
12	236	1 снизу	(А. Я. Канель)	(Теорема Сколема — Малера — Леха. Предложил А. Я. Канель)
26	269	3 сверху	$\binom{n}{n^2}$	$\binom{n}{n}^2$
28	104	2 сверху	−1 1	−1/2 1/2
28	108	7 снизу	$G < $	$G < H$
28	126	7 сверху	4,	8,
30	37	3 сверху	Trawczk	Traczyk
30	72	7-8 сверху	геометрических	негеометрических
30	189	8 сверху	ненулевые	нулевые
30	236	7 сверху	$AA', BB' \text{ и } CC'$	$A_1A', B_1B' \text{ и } C_1C'$

ПОПРАВКА

В бумажной версии выпуска 30 при подготовке к публикации допущена опечатка на с. 11 в сноске 23 и в строке над сносками. Фамилия профессора мехмата МГУ должна читаться Гальперн.

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Сборник не публикует существенно новые научные результаты, требующие оценки специалистов. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

2. Материалы принимаются по электронной почте на адрес matpros@yandex.ru в виде двух файлов (pdf и tex) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в Word. При наличии графики в текстовом файле необходимо прислать все исходные файлы.

3. Материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

4. Просим авторов кратко пояснить в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

5. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. <http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html>

6. В конце статьи указывается (если у авторов нет возражений):

- фамилия, имя, а также отчество (если есть) полностью,
- место работы/обучения,
- электронный адрес.

7. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение.

8. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый. Просим обращаться по адресу matpros@yandex.ru

Научно-популярное издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 31

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».

г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.

Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.

E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 04.07.2023 г. Формат $70 \times 100^{1/16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 15,5. Тираж 600 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ

от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком (6+)

Книги издательства МЦНМО можно приобрести

в магазине «Математическая книга»,

Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745-80-31.

E-mail: biblio@mcsme.ru, <http://biblio.mcsme.ru>
