



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 32

Москва  
Издательство МЦНМО

УДК 51.009  
ББК 22.1  
М34

Издано при поддержке  
Фонда развития теоретической  
физики и математики «БАЗИС»

## Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.	Ильяшенко Ю. С.	Сосинский А. Б.
Вялый М. Н.	Канель-Белов А. Я.	Тихомиров В. М.
Гайфуллин А. А.	Митрофанов И. В.	Устинов А. В.
Гальперин Г. А.	Полянский А. А.	Френкин Б. Р.
Гусейн-Заде С. М.	Прасолов В. В.	Ященко И. В.
Дориченко С. А.	Райгородский А. М.	
Заславский А. А.	Семёнов А. Л.	

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР А. М. Райгородский  
ОТВ. СЕКРЕТАРЬ Б. Р. Френкин

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО  
(с пометкой «Математическое просвещение»)

EMAIL: matpros@yandex.ru

WEB PAGE: [www.mccme.ru/free-books/matpros.html](http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html)

**Математическое просвещение.** Третья серия, вып. 32. —  
М34 М.: МЦНМО, 2024. — 200 с.  
ISBN 978-5-4439-1828-0

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009  
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1828-0

© МЦНМО, 2024



*Поздравляем  
Юлия Сергеевича Ильяшенко  
с 80-летием!*



# Содержание

## **Математический мир**

- «Думать о математике — удовольствие. Где угодно. Когда угодно». Интервью с Деннисом Салливаном . . . . . 7*
- В. А. Тиморин  
*Комментарий к теореме Салливана о множестве Фату . . . . . 21*
- Г. Б. Шабат  
*Юрий Иванович Манин — математик, мыслитель, Учитель. I . . . 23*

## **Геометрия: классика и современность**

- А. А. Заславский, П. А. Кожевников  
*Кубические кривые и элементарная геометрия . . . . . 53*
- М. А. Горелов  
*Алгебра на службе геометрии . . . . . 79*
- Е. В. Бакаев, П. А. Кожевников  
*Линейные семейства треугольников и ортологичность . . . . . 91*

## **Наш семинар: математические сюжеты**

- А. Б. Скопенков  
*Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность . . . . 125*
- В. М. Журавлёв, К. В. Журавлёва  
*Телефонные сети и графы с цветными рёбрами . . . . . 160*

## **Задачник (составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)**

- Условия задач . . . . . 179*
- Дополнение и комментарии к задачнику . . . . . 183*
- Решения задач из прошлых выпусков . . . . . 191*



---

---

# Математический мир

---

---

«Думать о математике — удовольствие.  
Где угодно. Когда угодно»

Интервью с Деннисом Салливаном

*24 мая 2022 года Осло состоялась очередная, уже двадцатая по счёту, церемония вручения премии Абеля. Абелевская неделя в столице Норвегии прошла с участием не только лауреата 2022 года, но и четырёх лауреатов 2020 и 2021 годов Ласло Ловаса, Ави Вигдерзона, Григория Маргулиса и Гилеля Фюрстенберга, которые из-за ковидных ограничений не приезжали в столицу Норвегии раньше. Церемонии их награждения проходили онлайн. Научный журналист Наталия Демина побывала на Абелевской неделе и поговорила с американским математиком Деннисом Салливаном, который удостоился премии в 2022 году за «важный вклад в алгебраическую и геометрическую топологию, теорию динамических систем».*

**Дорогой Деннис, поздравляю вас с высокой наградой, и спасибо за согласие дать интервью. Вы поступили в бакалавриат университета на химическую инженерию. Почему выбор пал на химию, а не математику или физику?**

Прежде всего, я толком не знал, как научные дисциплины организованы логически, и свой выбор сделал в старших классах школы. Я думал так: я живу в штате Техас (США). Здесь богатая нефтехимическая промышленность. И если я получу диплом по химической инженерии, то легко найду работу. А если понравится заниматься наукой, то смогу продвинуться дальше. И мне это казалось хорошим



У памятника Абелю

планом. К тому же мне нравилась наука как таковая, в старших классах школы я увлекался химией. Но затем, так как на первом курсе было несколько математических дисциплин, я заинтересовался математикой. И на втором курсе перешёл на другой факультет.

**Ваши исследования в математике могут внести вклад и в химическую науку?**

О, да. Я думаю, что задача, над которой я сейчас работаю, тесно соотносится с термодинамикой, являющейся частью физической химии. Математика — язык науки, дающий возможность применить полученные результаты в других областях. Если вы хотите более точной, значимой, недвусмысленной дискуссии, то лучше вести её в терминах математики.

**Не прокомментируете ли слова математика Ганса Мюнте-Кааса (Hans Munthe-Kaas), главы Абелевского комитета с 2018 по 2022 годы, посвящённые вам, что вы не видите границ между разными областями в математике, которые другим коллегам кажутся очевидными. Так ли это?**

Когда ты работаешь над диссертацией, то ищешь что-то новое. Искать новое — сложно, но эти новые идеи для вас родные (fit you). Иногда легче самому проводить исследования, чем изучать чью-то старую теорию, потому что она чужая вам по духу. А потом может оказаться крайне интересной.



Абелевские лауреаты (слева направо): Г. Фюрстенберг (2020), Л. Ловас (2021), Д. Салливан (2022), Э. Семереди (2012), Г. Маргулис (2020)

Обычно вокруг каждой области науки возникают научные сообщества, создаются большие научные семьи в виде научных племён. Такой интеллектуальный трайбализм, внутренняя замкнутость. Но разные области могут использовать одинаковые идеи. У меня были два друга-математика, они дружили, но никогда не обсуждали между собой свои исследования. Им казалось, что их области исследования совершенно различны, что они говорят на разных языках. Но оказалось, что основные идеи в их областях были в каком-то смысле эквивалентны!

Это свойственно людям науки. Они формируют [научные] племена. Вы ездите на конференции, вы встречаете старых друзей. Им интересно то, что вы делаете. А вам — что делают они. И вам этого достаточно. У вас жена/муж, дети, ученики, плюс большая научная семья. Вам надо преподавать и заниматься исследованиями. И так естественно оставаться внутри своего круга... Но я всегда был аутсайдером, понимаете?

**Вы выступаете своего рода переводчиком, создаёте словарь между разными языками математики?**

Да. Мне нравится делать идеи простыми. А когда они становятся простыми, то часто применяются и в других областях. Точек различия не так уж много. Я думаю, что понимаю, почему люди объединяются в [научные] племена, но... Когда я был ребёнком [в 1956 г.], мне было 10 лет, и большинство американцев поддержало республиканца

Дуайта Эйзенхауэра на выборах президента США. Он был очень популярным. А я услышал по ТВ выступление его оппонента, кандидата от демократов Эдлая Стивенсона (Adlai Stevenson II). И мне показалось, что он интеллигентнее, чем его оппонент. Я тогда не знал всех слов, которые он использовал, но я восхищался его манерой говорить и тем, что он говорил. И тогда я решил, что не буду подстраиваться под мнение большинства, а буду поддерживать то, что мне самому кажется правильным, даже если этот выбор выведет меня из зоны комфорта. Мне не нужен комфорт, который не согласуется с моими внутренними убеждениями.

**А вы по-прежнему интересуетесь политикой?**

Интересуюсь, но стараюсь о ней не думать.

**Чтобы не тратить время?**

Да, и я стараюсь размышлять о том, что знаю и во что могу привести что-то новое, а это математика.

**Какие ваши математические идеи вам кажутся наиболее важными?**

Если бы я выступал перед аспирантами, то я сказал бы им не о какой-то особой идее, а скорее о методе, который состоит в попытке понять суть вещей и сделать идею простой. И я бы сказал, что иногда полученный результат пересекает границы разных областей математики. И я бы ещё сказал им, что если ты знаешь что-то об одной области и о другой, то ты можешь попытаться доказать что-то интересное [на стыке областей]. Но для этого у тебя должны быть познания в разных областях математики.

Есть знаменитая, может быть, даже самая известная теорема XX века, теорема Атьи — Зингера об индексе<sup>1)</sup> (1963 г.). Майкл Атья (Michael Atiyah) и Изадор Зингер (Isadore Singer) получили Абелевскую премию 2004 года, став вторыми лауреатами этой награды<sup>2)</sup>. И эта теорема оказывается синтезом идеи из анализа и идеи из топологии. И я помню день, когда на лекции обсуждалась эта теорема, включая аналитическую часть. Я понял лишь топологическую часть, для меня как аспиранта она была очевидной. Потом я спросил парня, сидевшего возле меня, понял ли он аналитическую часть. Он удивился: «Разве она была трудной? Всё же ясно». И это так здорово! Он понял одну

---

<sup>1)</sup> Утверждение о равенстве аналитического и топологического индексов эллиптического оператора на замкнутом многообразии. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Атья в 1966 стал лауреатом премии Филдса. — *Прим. ред.*



С женой Мойрой

часть, я — другую. Две части доказывают теорему. И это самая известная теорема двух десятилетий. И мне импонирует идея поиска простого решения сложной задачи, некоего подземного хода между домами.

**Вы идёте в глубину математики?**

Да, создавая такие взаимосвязи.

**Вас называют виртуозом в математике. Есть ли музыка, которая вам кажется топологической?**

Я не воспринимаю себя как виртуоза в математике. Я скорее как Зигмунд Фрейд (*смеётся*). Ведь он был мотивирован поиском простых базовых вещей.

**А вы играете на чём-то?**

Я бы хотел, но нет.

**А какую музыку любите слушать?**

Я перестал слушать музыку, так как не очень умею обращаться с этими онлайн-устройствами. Но иногда моя жена Мойра включает что-то, и я слушаю. Мне нравятся, скажем, песни в исполнении Фрэнка Синатры. Под них я могу заниматься спортом. Раньше я любил слушать пластинки и диски с классической музыкой, но их время ушло.

**Почему вы не опубликовали ваши заметки с новой парадигмой в топологии, как только их написали в 1970 году в Масачусетском технологическом институте? Почему они ждали**

публикации почти 40 лет? Эти заметки выпускались даже сам-издатом. Он был широко распространён в СССР (Солженицын и др.). Наверняка вы слышали об этих практиках?

Да.

Я процитирую статью коллеги из газеты *El Pais*, посвящённую вам: «Он никогда не публиковал свои заметки, но его коллеги начали их ксерокопировать, и те начали своё путешествие по миру, во всё более трудно читаемых копиях, и даже в таком качестве сохраняли характер сакрального текста». Почему же не получилось опубликовать заметки о топологии сразу после их написания?

Это были своего рода заметки на полях. Они включали дополнительный материал, который я изучал, плюс новый материал. Там было всестороннее обсуждение разных вопросов. А потом я переключился на новые темы и не хотел шлифовать свои заметки до публикательного вида. Это одна из причин, почему большая часть моей работы реально неизвестна. Я имею в виду, что хотя о какой-то части теперь знают благодаря этой премии, но большая часть не закончена, не дошлифована. Если я понял, как задача решается, то мне этого достаточно, я не очень люблю доводить свои идеи до блеска. В этом смысле если я что-то публикую, то не в журнале, а в сборниках докладов на конференциях, потому что там не просят поправить то или это и охотно публикуют в том виде, в каком им отправишь. В моих статьях нет ошибок, но в таких сборниках стиль публикации более свободный. Так что я пошёл по этому ленивому пути. Короткий ответ на ваш вопрос таков: моя лень.

**Скажите, почему для вас было важно доказать гипотезу Пьера Фату об отсутствии блуждающих компонент и с чем был связан первоначальный интерес к этой задаче?**

Я что-то знал об этой области и о другой, но ничего не знал о гипотезе Фату и случайно обнаружил аналогию между разными областями. И оказалось, что если ты применяешь метод из одной области математики к другой, то видишь, что структура, лежащая в основании обеих, одна и та же. Так и в этой задаче. Одна область была связана с клейновыми группами, динамикой и комплексным анализом. А другая — с итерациями рациональных функций, и она тоже связана с динамикой и комплексным анализом. Оказалось, что методы решения задач в одной области имело смысл применить к другой, чтобы получить новый результат — доказать гипотезу Фату.

Оказалось, что если ты используешь свои знания в одной области, применяешь их к другой и проводишь проверку, то этот метод работает. И временная последовательность была такой: я услышал о гипотезе Фату в течение рабочей недели, а на выходных её уже доказал. Но это не потому, что я так быстро решаю задачи. Я как раз решаю их не быстро. Просто была задача, готовая к решению моим методом. Я использовал технику, широко применяемую в одной области математики, для другой. И это было самым важным в продвижении к решению этой задачи.

Это ещё одна иллюстрация к тому, как важно знать что-то из разных областей математики. А потом ты ищешь подземный ход между разными областями.

**Как вы находите интересную для себя задачу? Или она вас находит? Почему ваш выбор падает на эту задачу, а не другую?**

Я не выбираю задач. Я хочу понять основания того, что происходит в разных областях математики, и перевести понятное на простой язык. А на этом пути нередко появляется возможность использовать своё понимание одной области математики для решения задач в другой.

**Можете ли вы рассказать хотя бы об одном из соображений, которые привели к доказательству гипотезы Фату?**

В исследованиях ты постоянно ставишь один и тот же вопрос: есть математический объект, который ты изучаешь, какова же структура этого объекта? В случае гипотезы Фату объектом была рациональная функция на сфере Римана. И мы применяем эту функцию много раз.

Что мы видим? Прежде всего, что это отображение пространства на себя. Оно определяет динамическую систему. Точки начинают гулять по сфере, и ты смотришь на эту динамику как на часть структуры. Во-вторых, эта динамическая система сохраняет комплексную структуру. И возникает вопрос: существует ли блуждающая область? Ответ на него: нет<sup>3)</sup>.

Но затем, если ты выдвигаешь гипотезу, как сделал Пьер Фату в 1906 году<sup>4)</sup>, то что дальше? Ещё в XIX веке Бернхард Риман внёс существенный вклад в решение этой задачи. Он придумал способы изменения голоморфной структуры на поверхностях, которые теперь

---

<sup>3)</sup> Как раз эту теорему в 1985 году доказал Д. Салливан. — *Прим. ред.*

<sup>4)</sup> Фату предположил, что блуждающих областей для итерированных рациональных функций не существует. Ныне это утверждение называют теоремой Салливана. — *Прим. ред.*

называются римановыми поверхностями. Примечательно, что есть только конечное число сторон (направлений), в которых можно менять комплексную структуру. (В 1980 году я использовал эти стороны, отмеченные Риманом в 1850 г., уже в современной форме для изменения структуры, лежащей в основе решения проблемы Фату (1906). Если бы ответом было «нет», то существовало бы бесконечно много сторон, а это привело бы к противоречию с конечностью числа сторон, отмеченной Риманом).

В 1960-е годы важный вклад внесли Альфорс и Берс (L. V. Ahlfors and Lipman Bers), которые, в свою очередь, опирались на идеи Чарльза Моррея (Charles Morrey Jr.), работавшего в этой области с 1930-х. Появилась теория клейновых групп. Появилась теория деформаций: ты можешь взять клейновую группу, деформировать её в другую клейновую группу, не эквивалентную исходной, так что ты можешь изменять комплексную структуру, лежащую в её основе. Таким образом, мы имеем теорию деформации комплексных пространств, берущую в данном случае своё начало с Римана. А в динамике это ещё более сложно. Я коротко пересказываю то, что было сделано в 1960-е.

А решение пришло мне в голову, когда я услышал о гипотезе Фату на обычной лекции, где перечислялись некоторые проблемы теории итерированных рациональных функций.

И мне в голову пришла идея. Пусть у нас есть динамическая система и инвариантная конформная структура. Есть теория деформаций динамических систем с инвариантной конформной структурой. А не применить ли мне её здесь и сейчас?

И вот блуждающая область. Тут нужно применить небольшой хитрый трюк. О нём я не буду рассказывать, а моё решение, если не уходить в нюансы, таково.

Блуждающей области соответствует бесконечномерное пространство деформаций. Однако рациональную функцию можно представить как дробь, в числителе и знаменателе которой полиномы с конечным числом коэффициентов. Так что у нас может быть лишь конечномерное пространство рациональных функций и не может быть бесконечномерного пространства деформаций. Таким образом, мы пришли к противоречию, из чего следует, что блуждающей области не существует.

Таково краткое изложение моего доказательства. И тут большую роль сыграла удивительная теория деформаций, которую я позаимствовал из той области математики, которая ведёт своё начало от Анри Пуанкаре.

Стоит отметить, что Пьер Фату и другие не знали о теории деформаций. К ней математики пришли только в 1930-е. Здесь мы пришли к истории математики, которую изучает моя жена. Но мне тоже интересно разбираться в истории математических идей. Когда я изучаю какую-то проблему, то мне интересно узнать, кто думал над этой задачей, кем и когда было найдено то или иное решение, а что оставалось непонятым и нерешённым. Мне интересно увидеть историческую ретроспективу развития той или иной идеи. Поэтому я тоже в какой-то мере являюсь историком математики и её понимания.

Если же вернуться к вашему вопросу, то дело обстояло так: Пьером Фату гипотеза была выдвинута в начале 1900-х. А я о ней не знал. В 1960-е была изобретена техника, которая позволила доказать какие-то классные вещи. И вот в 1979 или 1980 году я на лекции узнаю о гипотезе Фату. И понимаю, что у меня есть все компоненты для её доказательства, нужно лишь немного над ним поработать. Так что ответ на ваш вопрос таков: суть задачи совпадала с уже мной решённой.

### **Каковы приложения этого доказательства в реальной жизни?**

В нашей повседневной жизни? Ок. Одно из приложений, на которое я потратил почти десять лет, называется универсальность в каскадах удвоения периода (*universality in period doubling cascades*), что чем-то похоже на фазовый переход в физике, но формулируется как математическая задача. Если вы возьмёте жидкость и охладите её до замерзания, то получите кристалл. В физике много примеров подобных фазовых переходов в жёсткую структуру. И это интересно изучать и с математической точки зрения.

С 1970-х и далее были получены различные результаты по жёсткости в динамике в некоторых особых обстоятельствах. Физики вычислили, что в определённой динамической системе тоже есть феномен жёсткости. Они могут посчитать некоторое число и всё время получают одно и то же  $0,53804514358054991 \dots$  И у этого числа есть геометрический смысл — фрактальная размерность. Это чисто математическое утверждение, но оно соответствует универсальности фазового перехода в физике.

Итак, 1982 год. Я услышал о данной проблеме и решил, что могу бросить то, чем я занимался, чтобы перейти к данной задаче. Она подпадает под все мои идеи в динамике, но является более специальной. Но и общей также, из-за проблемы универсальности. И я мог не беспокоиться, что появится контрпример, потому что расчёты на компьютере всё время показывали одно и то же число  $0,538045 \dots$

Если вы представите себе формулу определённого типа, зависящую от бесконечного числа параметров, вы можете подкрутить один параметр, а можете другой, и затем вычисляете это число. И так с разным набором параметров. Но всё время получите  $0,538045\dots$  Я впервые встретился с ситуацией, когда я знал, что что-то верно, до того, как я это доказал. До этого только то становилось верным, что я мог доказать. Так что я бросил все дела и занялся этой задачей.

Это точное утверждение, которое на самом деле не является теоремой, так как это лишь эксперимент — искомое число получается в ходе вычислений. Но вы можете сформулировать этот результат как математическую теорему. И физик, вычисляющий это число с интуитивным знанием о фазовом переходе (возвращаясь к вашему вопросу о реальной жизни), затем получает жёсткость, универсальную структуру. И наше утверждение становится истинной теоремой без доказательства.

Я знал, что в теории динамических систем пока нет методов доказать эту теорему. Точнее были какие-то методы, но с определёнными пробелами. Так что я решил, что могу над этим поработать, но для доказательства теоремы мне нужно будет найти некоторые новые методы в математике.

И оказалось, что последним шагом в доказательстве является то, что надо вернуться к ранее полученным мной же результатам и к идеям, использованным при решении той же задачи Фату, даже если она поставлена для одной действительной переменной, но ты комплексифицируешь эту переменную, комплексифицируешь эту ситуацию<sup>5)</sup>.

Сейчас известно, как доказать универсальность в тех случаях, когда этот метод работает, когда мы можем применить идеи, использованные для решения задачи Фату. И это — их приложение к реальной жизни. Но что до сих пор не известно, уже в течение 40 лет — как доказать универсальность для других случаев.

**Изменил ли предложенный вами способ решения задачи Фату ландшафт данной области голоморфной динамики, на ваш взгляд?**

О да. Это инструментальный метод... С его помощью уже и мои коллеги смогли стартовать. Определённые динамические характеристики не разрешены, потому что у вас не может быть бесконечномерного пространства деформаций. А всё пространство объектов конеч-

---

<sup>5)</sup> Подробнее см. статью Д. Салливана <http://www.math.stonybrook.edu/~dennis/publications/PDF/DS-pub-0092.pdf>. — Прим. ред.

номерно. Так что у вас появляется мощная методика, которая была доступна с 1930-х и потеряна во время войны. Так или иначе, о ней вновь вспомнили в 1950-е и 1960-е. Это главное, и это даёт мощный метод. И пошло продолжение. Но я ушёл из этой области, когда я узнал о проблеме универсальности (о которой рассказал ранее). Доказательство у меня заняло восемь лет. И я уже устал от этой темы и решил заняться чем-то другим.

**Думаете ли вы над разными задачами одновременно или сначала над одной, потом другой?**

Это скорее черта российской математической школы, даже люди уровня Владимира Арнольда и большинство тех, с кем я знаком, часто думают о задачах и вызовах. У меня другой подход. Если даже есть нерешённая задача или открытый вопрос, то я склонен изменить постановку задачи на такую, которую я могу понять. Мне реально нравится приходить к пониманию изучаемой проблемы. И я обдумываю те или иные вопросы, хочу понять что-то в рамках поставленной темы или относящейся к ней. Так что это несколько другой подход.

**Есть ли у вас любимое число?**

Ммм... 37 — интересное.

**Почему?**

В XIX веке теорему Ферма была доказана для всех простых чисел, строго меньших числа 37. В общем же случае теорема была доказана Эндрю Уайлсом совсем недавно<sup>6)</sup>, хотя Пьер Ферма сформулировал её много лет назад<sup>7)</sup>. Число 37 — первое иррегулярное простое число, т. е. такое, для которого аналог основной теоремы арифметики (фундаментального факта о единственности разложения натуральных чисел в произведение простых), несостоятелен настолько сильно, что препятствует прямому доказательству проблемы Ферма<sup>8)</sup>.

В ходе поиска доказательства была открыта новая область математики — теория алгебраических чисел, где обычные числа (целые) обобщены до алгебраических целых, т. е. тех чисел, которые являются корнями уравнений  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ , где  $a_1, \dots, a_n$  — обычные целые числа.

---

<sup>6)</sup> В 1994 году. — *Прим. ред.*

<sup>7)</sup> В 1637 году. — *Прим. ред.*

<sup>8)</sup> Единственность разложения неверна и для некоторых простых, меньших чем 37, но для них есть способ обойти это обстоятельство; иррегулярность связана с некоторым свойством делимости чисел Бернулли. — *Прим. ред.*



Новой теории чисел предстояло стать глубокой и полноценной областью математики, прежде чем математики смогли вернуться к гипотезе Ферма и доказать её.

**Что бы вы сказали молодым ребятам, думающим о математической карьере?**

Заняться изучением математики — очень полезно, и не важно, что вы потом собираетесь делать. Полезно получить хотя бы некоторое представление о математике как науке. Понять её методы. Понять, что поняли другие. Люди ведь обычно не осознают, что многие утверждения, которые мы слышим ежедневно, не являются точными. И высказываемые мнения часто глупы, так как строятся на нечётких утверждениях. Обычно это случается, если утверждения слишком сложны и их трудно проанализировать.

Но человечество создало область науки, где большинство утверждений чётко определено и где нет субъективных мнений. В ней утверждение либо доказуемо, либо к нему есть контрпример (и тогда оно ложно), либо о нём пока неизвестно, верно оно или нет. Вы можете сказать, что ваше утверждение верно, но, пока вы его не доказали, ваше мнение на этот счёт не будет иметь никакого значения. И эта область называется математикой.

Кто-то может сказать: да, но математику же нельзя применить ко многим областям жизни! И всё же благодаря математике вы можете научиться критическому мышлению. Вы можете начать анали-

зировать: что вам известно? Какие у вас есть факты? И построить как можно более точное утверждение, основываясь на известных вам фактах. И если вы освоите математический метод, то этот навык может оказаться востребованным везде. Критическое мышление очень полезно! Если вы хотите найти хорошо оплачиваемую работу, то на какое-то время займитесь математикой, она поможет вам добиться успеха. А если вы решите пойти в науку, то знание математики будет ещё более полезным.

Замечу, что занятие математикой — крайне увлекательное дело, которое в то же время требует серьёзной работы.

**В 1980-е годы вам приходилось много летать на «Конкорде» из Парижа в Нью-Йорк и обратно с одной работы на другую. Помогали ли перемещения в реальной жизни путешествиям в топологическом пространстве?**

Мне приходилось много летать, и не раз во время полёта я общался с Бенуа Мандельбротом (Benoit Mandelbrot), и мы говорили о фрактальных множествах, в том числе о множестве Мандельброта, одном из самых известных фракталов. Удивительное совпадение, зная, какую задачу мне потом пришлось решать.

А ответ на ваш вопрос таков: математик в любое время и в любом месте одиночка и если его интересует какая-то задача, то он будет над ней думать, где угодно и когда угодно. Всё, что ему нужно, это маленький клочок бумаги и карандаш.

**И вам не нужен тихий офис? Длительные прогулки?**

Обычно во время прогулки я раздумываю над общими вопросами, а для детального анализа нужен лишь любой клочок бумаги. Пусть даже билет на поезд, что угодно, на чём можно написать.

А если у математика есть какие-то проблемы в жизни, то он не должен о них думать, когда решает задачу. Математика — это и прекрасный товарищ, и вдохновение, и друг, и оппонент. Математика — это всё. Думать о математике — удовольствие. Где угодно. Когда угодно.

**Извините за вопрос не о математике. Бойтесь ли вы смерти?**

Вы знаете — да. Мне не нравится сама её идея (I'm afraid of it, you know. Yeah. I don't like the idea).

\* \* \*

Видеозапись Абелевской лекции Денниса Салливана, с которой он выступил в Университете Осло (Норвегия) 25 мая 2022:

<https://www.youtube.com/watch?v=RRMBRiyNcjI>

## БЛАГОДАРНОСТИ

Интервьюер выражает признательность Виктору Клепцыну, Андрею Коняеву и изданию  $N + 1$  за помощь с подготовкой вопросов, Виктору Васильеву, Владлену Тиморину и Михаилу Цфасману — за ценные советы по редактированию перевода. Автор благодарит Антона Зорича, Александра Шеня, Норвежскую академию наук и литературы и Международную федерацию научных журналистов (WFSJ) за финансовую и организационную помощь в поездке в Осло.

Беседу вела Наталия Демина

---

Московский центр непрерывного математического образования выражает благодарность Н. Деминой за интервью, предоставленные для 31-го и 32-го выпусков «Математического просвещения».

## Комментарий к теореме Салливана о множестве Фату

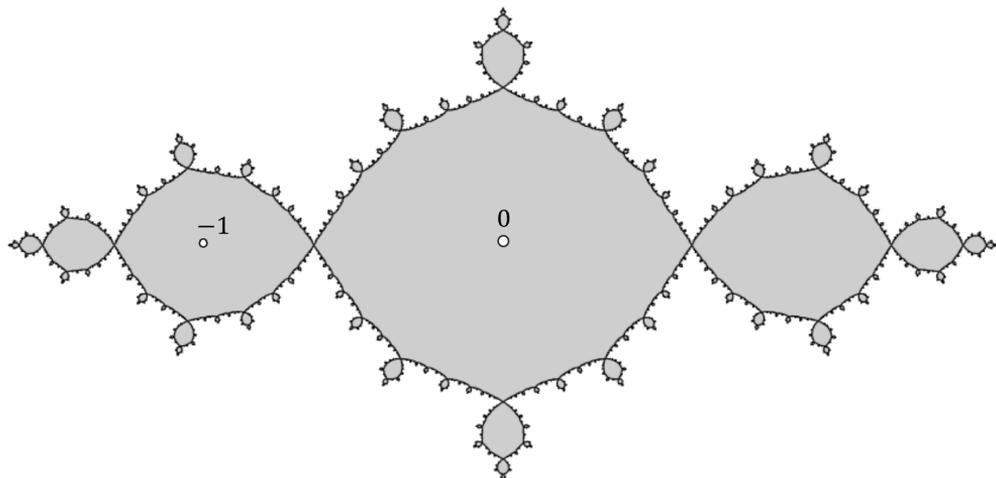
В. А. Тиморин

Работа Салливана про отсутствие блуждающих областей описывает динамическое поведение привычных функций: рациональных функций одной комплексной переменной. С точки зрения алгебры, свойства этих объектов давно известны и интереса не представляют. Другое дело — с точки зрения теории динамических систем. Простейшие нелинейные функции, такие как  $f(z) = z^2 + c$  (где  $c$  — постоянная величина), способны демонстрировать сложнейшие детали самоорганизации, если рассматривать *итерации* этих отображений, т. е. применять одну и ту же функцию много раз. Начиная с комплексного числа  $z_0$ , про которое геометрически следует думать как про точку плоскости, образуем её *орбиту*, т. е. последовательность

$$z_0 \mapsto z_1 = f(z_0) \mapsto z_2 = f(z_1) \mapsto z_3 = f(z_2) \mapsto \dots$$

Что делает эта орбита? Приближается к устойчивому состоянию или периодическому циклу? Убегает на бесконечность? (Впрочем, такое поведение тоже стоит рассматривать как стремление к неподвижному положению). Распределена хаотически? Это основные вопросы, которые рассматривает теория динамических систем вообще и комплексная динамика в частности.

Множество всех точек, орбиты которых неустойчивы (и, как правило, демонстрируют хаотическое поведение), называется *множеством Жюлиа* в честь французского математика Гастона Жюлиа. Все остальные точки образуют так называемое *множество Фату*, названное так по фамилии другого французского математика Пьера Фату. В работах Фату и Жюлиа были заложены основы комплексной динамики; в том, что их именами названы два дополнительных множества, есть как закономерность (обе фамилии по делу), так и случайность (распределение фамилий ничего не значит).



На рисунке показано множество Жюли отображения  $f(z) = z^2 - 1$ , это всё чёрные точки. Серые и белые точки образуют множество Фату, их орбиты либо асимптотически выходят на периодический цикл  $0 \leftrightarrow -1$  (серые точки), либо убегают на бесконечность (белые точки). В данном примере, как и в большинстве случаев, множество Жюли самоподобно, имеет интересную структуру во всех масштабах. Такие множества иногда называют *фракталами*. Что касается компонент множества Фату (на рисунке это серые области и внешняя белая область), то каждая из них рано или поздно отображается в одну из трёх периодических областей, содержащих точки  $0, -1, \infty$ .

Так же ведут себя компоненты Фату любой рациональной функции. Каждая компонента рано или поздно отображается в периодическую компоненту. Это теорема Салливана, которая подвела последнюю черту под описанием динамики рациональных функций на их множествах Фату (что происходит в периодических компонентах — было известно ранее, имеется небольшое число явно описанных сценариев). Но вся тема этим отнюдь не исчерпывается — до полного понимания динамики на множествах Жюли нам ещё очень далеко.

# Юрий Иванович Манин — математик, мыслитель, Учитель. I

Г. Б. Шабат



## § 0. ВВЕДЕНИЕ

7 января 2023 года ушёл из жизни Юрий Иванович Манин.

Закончилась жизнь великого математика, опубликовавшего 19-летним студентом в 1956 году свою первую работу [Манин1956] «О сравнениях третьей степени по простому модулю» и через 67 лет после этого сдавшего в «Известия РАН» статью [Manin2023] «Rational points of algebraic varieties: a homotopical approach», которая выйдет в 2023 году, после смерти её автора. За этот более чем полувековой период Юрий Иванович (далее обычно Ю. И.) опубликовал сотни замечательных, безоговорочно принятых сообществом (ср. хотя бы *связность Гаусса — Манина*) математических работ, и не только арифметико-геометрических (как первая и последняя), но на разнообразнейшие темы: дифференциальные уравнения, кодирование и многие другие. Неотделимы

---

Вторая часть статьи публикуется в следующем выпуске.

от этих работ публикации по физике, иногда написанные Ю. И. в соавторстве с физиками, а иногда самостоятельно; оценка важности этих работ для понимания фундаментальных законов природы, видимо, принадлежит будущему.

Закончилась жизнь выдающегося мыслителя, с ранних лет интересовавшегося, видимо, ВСЕЙ культурой (со свойственной ему самоиронией Ю. И. называл этот интерес любовью с детства к чтению *обильному и беспорядочному*). Начиная с опубликованной в 1977 году в журнале «Природа» рецензии [Манин1977] «Человек и знак» на книгу Вяч. Вс. Иванова, заканчивающейся словами о *глубинном единстве гуманитарной и естественнонаучной культуры человечества*, Ю. И. публикует статьи о семиотике, лингвистике, психологии и т. п. Впрочем, в последние десятилетия некоторые статьи Ю. И. (в частности, написанные в соавторстве с Матильдой Марколли — математиком, физиком, лингвистом и писателем) представляют собой гармоничное соединение гуманитарных, естественнонаучных и математических результатов и идей.

Автор этих строк — безусловно ученик Ю. И., но не во вполне тривиальном смысле слова: мы оба — ученики великого математика Игоря Ростиславовича Шафаревича. Однако, когда в 1975 году Шафаревич за «антиобщественную деятельность» (защиту прав человека) был отстранён от научного руководства, я по совету Шафаревича попросил Ю. И. стать моим научным руководителем и в течение минутного телефонного разговора получил согласие. Руководство Ю. И. моей кандидатской диссертацией было формальным (только раз я рассказал ему её содержание), однако со студенческих лет я посещал замечательные спецкурсы и спецсеминары Ю. И., внимательно и восхищённо читал его статьи и книги. Всю свою взрослую жизнь я находился под его огромным профессиональным и человеческим влиянием — и в этом смысле, конечно, его ученик.

Запомнился разговор с Ю. И. в 1970-х, в набитом московском автобусе, в котором мы оба ехали на его семинар в МГУ. Прижатые друг к другу пассажирами, мы «обсуждали» (Ю. И. обладал удивительным умением разговаривать «на равных» со студентами и аспирантами) *недоказуемые истины*. Наши представления не вполне совпадали, моя точка зрения была чуть более оптимистична<sup>1)</sup>, но менее точна.

---

<sup>1)</sup> Мой оптимизм был основан на не очень широко известной статье [F1962], о которой я узнал из курса логики [Манин1974], прочитанного для инженеров (!). В этой статье показано, что, хотя для любой конечной арифметической теории существуют недоказуемые истины, некоторыми трансфинитными процедурами их всё же можно обосновать.

Лишь узнав, что Ю. И. с нами больше нет, я осознал, что в течение нескольких десятилетий мысленно возвращался к этому разговору и всё надеялся свои эволюционирующие соображения обсудить с Ю. И. Откладывал, пока додумаю и запишу... Теперь не обсужу. И, уверен, мой пример незавершённого разговора — один из многих сотен.

Общение Ю. И. с учениками не сводилось к обсуждению математики. В его статье «Математика как профессия и призвание» (см. [Манин2008]) есть поразительные по искренности слова: *...после сорока лет преподавания почему-то оказывается, что ученики — это самая важная часть твоей жизни. Они становятся мудрее тебя (а ты, кажется, только стареешь), они женятся, разводятся и женятся снова, они присылают фотографии своих детей и домов...*

Эти слова, кажется, перекликаются с последними строками стихотворения, написанного Ю. И. в 2001 (!) году:

*...У Рима, и мира, и рока  
Я выучил смерти урок.  
А жизнь убегает с урока,  
Туда, где в ветвях ветерок.*

Не забывая о возрасте своего учителя, я абсолютно не был готов к горестному известию, восхищался его неправдоподобной продуктивностью последних лет. Особым счастьем для меня было то, что в последние годы Ю. И. (совместно с Матильдой Марколли) обратился к основному предмету моих занятий — теории детских рисунков (см. [ММ2020]). Я написал ему письмо с некоторым математическим соображением и 22 февраля 2022 года получил ответ со словами:

*Я давно не думал на эту тему, так что ничего содержательного ПОКА сказать не могу.*

Остаётся продолжать мысленные разговоры с Учителем.

## § 1. Краткий хронологический обзор работ Манина

Список Math-Net.Ru содержит 339 публикаций Ю. И. — как уже было сказано, с 1956 по 2023 годы, с юности до последнего вздоха.

Немногие математики XX и XXI веков могут сравниться с Маниным по широте охвата математических и других тем. Но в отличие, скажем, от Давида Гильберта, профессиональная жизнь которого была разбита на периоды (см. [С2019]) от *теории инвариантов* (1885–1893) до *оснований математики* (1922–1939), Ю. И., как правило, не покидал заинтересовавших его областей математики и других наук. Поэтому



обзоры «Десятая проблема Гильберта [Манин1973]» и «Проблема континуума» [Манин1973], а также написанная для широкой публики статья «Теорема Гёделя» [Манин1975a]. Следует отметить, что в текстах Ю. И. по математической логике его интересуют не только стандартные понятия и результаты<sup>3)</sup> (которые он мастерски излагает в стиле, более приближённом к «обычной» математике, чем в учебниках, написанных логиками, — это даже отражено в названии), но и нетривиальные, часто обнаруженные самим Ю. И., связи с арифметикой и широким спектром гуманитарных проблем.

Тематика работ Ю. И. по «основной» специальности в рассматриваемый период тоже существенно расширилась, и теперь в неё вошла группа (Кремоны) бирациональных преобразований плоскости, дзета-функции модулярных кривых,  $p$ -адические автоморфные формы и  $p$ -адические группы Шоттки. Эти работы в настоящей статье мы комментировать не будем.

**1976. Работа по дифференциальным уравнениям.** После того, как в XIX-м веке было осознано, что возникшие из естественных наук дифференциальные уравнения, как правило, «решить» нельзя, и начали развиваться методы их *качественного* исследования, в 1960-е годы возродилась идея точных и явных решений, в частности, так называемых *вполне интегрируемых* (как классических конечномерных, так и бесконечномерных) систем. Активная работа в этом направлении велась и в России, в том числе В. Е. Захаровым<sup>4)</sup> и моим братом, А. Б. Шабатом (см., например, [ЗШ1973]). От брата я не без удивления узнал, что Ю. И. интересуется этими вопросами: при поверхностном взгляде они кажутся такими далёкими от алгебраической геометрии и теории чисел. Однако Ю. И. одним из первых увидел в полной мере эти связи и опубликовал важную совместную работу [ГМШ1976], а в дальнейшем и другие, о которых мы ещё поговорим.

**1977–1979. Гуманитарные проблемы.** Уже упоминалась рецензия [Манин1977], с которой начались публикации Ю. И. по различ-

---

как он, обидевшись на учебник анализа за непонятное  $\varepsilon$ - $\delta$  определение непрерывности, закопал его в саду, но, когда пошёл дождь, устыдился и побежал выкапывать. Там же Ю. И. рассказывает о своих, наоборот, прекрасных отношениях с теорией множеств.

<sup>3)</sup> Упомянутый выше учебник [Манин1974] для инженеров, будучи существенно расширен и переведён Н. Коблицем [Manin1977a], превратился в широко известный шедевр мировой логической литературы.

<sup>4)</sup> Как мы знаем из [Манин2008], они дружили с Ю. И. — среди прочего общались как молодые математики, пишущие стихи.

ным гуманитарным вопросам. Они собраны в [Манин2008], и о некоторых из них мы поговорим.

**1980. Физика.** Эта наука привлекала Ю. И. всю его жизнь. Как он рассказывал, сразу после защиты кандидатской диссертации в 1961 году он пытался поступить на первый курс физфака МГУ, но не был допущен к экзаменам по каким-то формальным причинам; в утешение он купил огромный справочник по элементарным частицам и изумлялся необъятности накопленного в нём экспериментального материала. Первая из многих публикаций о физике — совместная [НМ1980]. Работы Ю. И. по физике будут кратко прокомментированы.

**1981. Информатика<sup>5)</sup>.** Ю. И. выделялся из математиков своего поколения огромным интересом к компьютерам настоящего и будущего. Первая публикация — [Manin1981] «Expanding constructive universes». Мы обсудим некоторые мысли Ю. И. о конструктивной математике.

**1982–1983. Суперматематика.** В 1970–80-е годы в разных сообществах, в том числе московских, наблюдалось увлечение математикой, в которой коммутативность заменялась на *суперкоммутативность* — правила перестановочности чётных и нечётных элементов, позаимствованные из внешней алгебры; эти идеи были тесно связаны с физикой и получили звучное название *суперматематика*. Ю. И. внёс заметный вклад в развитие этих идей, написав статью [Манин1982] «Замечания об алгебраических супермногообразиях». С более широких общематематических позиций эти идеи изложены в статье [Манин1984] «Новые размерности в геометрии»; к сожалению, объём настоящей работы не позволяет их обсудить.

**1984–1990. Кодирование.** Это — первая область, в которой алгебраическая геометрия над полями допускает практические приложения. Первая работа Ю. И. в этой области — совместная [ВМ1984]. Мы это направление обсуждать не будем (см. [Tsf2023]).

**1991–1994. Некоммутативная алгебраическая геометрия.** Начиная с работы [Manin1991], Ю. И. регулярно возвращался к этой теме. Его знаменитое введение в (тогдашнюю) современную алгебраическую геометрию [Манин1970]<sup>6)</sup>, сразу ставшее библиографической редкостью, было переиздано [Манин2012] и дополнено разделом именно о *некоммутативной* алгебраической геометрии. Речь

---

<sup>5)</sup> Более адекватным было бы английское наименование этой дисциплины Computer Science.

<sup>6)</sup> Оно было дополнено книгой [Манин1971].

идёт не просто от отказе от коммутативности основного кольца, а<sup>7)</sup> о выходе за пределы коммутативной математики, соответствующем физическому понятию *квантования* — например, замене равенства  $ab - ba = 0$  на  $ab - ba = \hbar c$ , где  $\hbar$  — *постоянная Планка*. Подобно тому как в физике при  $\hbar \rightarrow 0$  квантовая механика должна превращаться в классическую, в некоммутативной алгебраической геометрии обнуление  $\hbar = 0$  должно возвращать в обычную, коммутативную алгебраическую геометрию. Квантование и в физике, и в математике — творческий процесс, и мы немного поговорим о наиболее смелых идеях Ю. И. в этом направлении.

**1991–1994. Квантовые группы.** Это понятие доставляет пример удачного квантования; оно было придумано В. Г. Дринфельдом, одним из наиболее известных учеников Ю. И. Первая публикация Ю. И. на эту тему — [Manin1991a]. Мы далее обсуждать эту тему не будем.

**1995–1999. Математика над  $\mathbb{F}_1$ .** Этот своеобразный раздел математики начал развиваться с 1950-х годов, когда возникла идея интерпретировать группы перестановок  $S_n$  как матричные группы  $GL_n(\mathbb{F}_1)$  над (несуществующим) «полем» из одного элемента. Первая публикация Ю. И. на эту тему — [Manin1995]. В ней обсуждается несколько гипотетический *абсолютный мотив Тейта*  $\mathbb{T}$ , скромно входящий в разложение чуть-чуть модифицированной дзета-функции Римана в произведение по нулям и полюсам<sup>8)</sup>

$$Z(\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}, s) := (2\pi)^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{\prod_{\rho} \frac{s-\rho}{2\pi}}{\frac{s}{2\pi} \cdot \frac{s-1}{2\pi}}.$$

В эту формулу мотив Тейта невинно входит в виде  $Z(\mathbb{T}, s) := \frac{s-1}{2\pi}$ ; его интерпретация как представителя «поля»  $\mathbb{F}_1$  связана с разложением дзета-функции Римана в *эйлерово произведение*, см. ниже.

**2000–2008. Квантовые вычисления.** Первая публикация Ю. И. на эту тему — [Manin2000]. Помимо обычного для этой области сочетания

<sup>7)</sup> Ю. И. часто пользовался выражением *небанальное обобщение*.

<sup>8)</sup> Дзета-функция Римана, определяемая формулой  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  при  $\text{Re}(s) > 1$  и мероморфно продолжаемая на всю комплексную плоскость, имеет единственный полюс в  $s = 1$  и нули. Эти нули подразделяются на *тривиальные*  $s = -2, -4, -6, \dots$  и *нетривиальные*, обычно обозначаемые  $\rho \in \mathbb{C}$ . Знаменитая *гипотеза Римана* (на 2023 одна из шести оставшихся *проблем миллениума*) состоит в том, что все нетривиальные нули лежат на прямой  $\text{Re}(\rho) = 1/2$ .

теории алгоритмов и квантовой механики, Ю. И. высказывает гипотетические соображения о работе мозга; результаты о росте рекурсивных функций в терминах колмогоровской сложности также, видимо, оригинальны. К сожалению, нам не удастся обсудить ни эту, ни последующие статьи Ю. И., посвящённые его общим взглядам на вычисления.

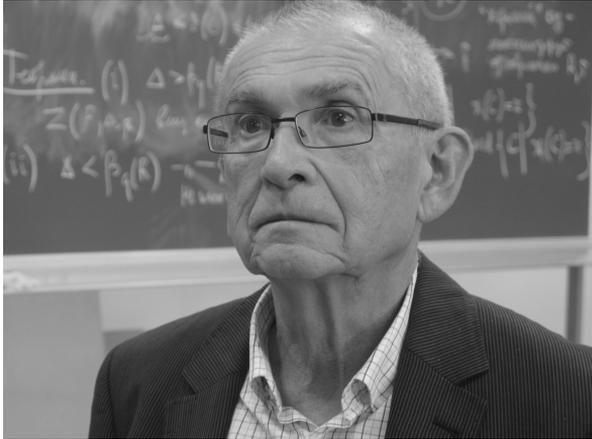
**2009–2013. Обработка сигналов.** В этой области Ю. И. опубликовал, видимо, единственную работу [LM2009]. Она поразительна с точки зрения диапазона намеченных Ю. И. приложений современной математики к чистым и прикладным областям различных наук. Ю. И. внёс в работу новейшие разделы математики, вроде квантования абелевых многообразий и квантовых тета-функций, его соавтор — видимо, более традиционные разделы. Эта работа далее комментировать не будет.

**2014. Применения колмогоровской сложности.** Колмогоровская сложность была определена в работе [K1965] для определения *случайности* на алгоритмической основе. Ю. И. интерпретировал это понятие чрезвычайно широко; так, работу [Манин2014] он посвятил памяти И. М. Гельфанда, распространившего в работе (с соавторами) 1966 года физический *принцип наименьшего действия* на функционирование нервной системы. Непосредственной же целью этой работы было предъявление математической модели, объясняющей один хорошо известный эмпирический закон, связанный с убыванием частот (например, букв в естественном языке).

Ниже мы обсудим некоторые соображения Ю. И. (как опубликованные, так и высказанные в частных разговорах) о колмогоровской сложности в математике и вне её.

**2015–2019. Нейронные коды.** Работа [Manin2015] очевидно относится к междисциплинарным исследованиям будущего: трудно представить себе человека, помимо Ю. И. (и, возможно, нескольких его поздних соавторов), свободно оперирующих понятиями нейробиологии, сложности алгоритмов, гомотопической топологии, алгебро-геометрическими кодами и идеями унивалентных оснований математики. Мы этот круг идей обсуждать не будем.

**2020–2023. Абсолютная группа Галуа и физика.** В работе Манина и Марколли [MM2020] абсолютная группа Галуа  $\text{Aut } \overline{\mathbb{Q}}$  была рассмотрена с различных точек зрения. Ниже мы бегло коснёмся интерпретации этой группы с точки зрения квантовой статистической механики и более подробно поговорим о её действии на *детских*



рисунках — некотором классе графов, вложенных в компактные ориентированные поверхности.

## § 2. О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАБОТАХ МАНИНА

### 2.0. ПОПЫТКА ОБЩЕГО ОБЗОРА

Математическое наследие Ю. И. необозримо. Уже были упомянуты впечатляющие количественные показатели — 339 публикаций за 67 лет. Вряд ли возможно каким-то разумным образом упорядочить эти публикации — как уже говорилось, для Ю. И. характерен не стиль профессиональной жизни Гильберта или А. Вейля, методически переходящих от одной тематики к другой<sup>9)</sup>, а, скорее, Лейбница или Гельфанда, развивавших многие идеи параллельно. Хронологическое упорядочивание работ Ю. И. может создать впечатление хаотичности их тематик, и это впечатление отчасти оправданно.

Во-первых, как видно из предыдущего раздела, для Ю. И., начиная с 1970-х годов, характерно регулярное переключение с одной тематики на другую. Так, Ю. И., основываясь на собственном опыте, советовал автору настоящей работы, если задача не решается, *на какое-то время отложить работу над ней и заняться чем-нибудь другим*. (Но размышлений ни над одной проблемой Ю. И. не оставлял навсегда, и его

<sup>9)</sup> Цитата из работы Г. Вейля [В1989]: *Гильберт сам помог автору настоящего обзора увидеть, что его работы довольно строго делятся на различные периоды, в каждый из которых он был всецело поглощён проблемами из одной конкретной области. Если он занимался интегральными уравнениями, то они означали для него всё; бросив какой-либо предмет, он отделялся от него полностью и переходил к другому.*

наследие содержит огромный материал для математиков будущего — от конкретных вопросов, на которые он не успел ответить, до идей построения теорий).

Во-вторых, многие идеи Ю. И. воплощались в текстах, написанных в соавторстве, и появление этих текстов зависело от различных обстоятельств жизни соавторов. Приведу характерный — не очень широко известный, но близкий мне — пример. Дима Каневский, мой друг, одноклассник и однокурсник, был студентом и аспирантом Ю. И. и защитил кандидатскую диссертацию по кубическим поверхностям в конце 1970-х годов. Затем он покинул Россию и (будучи глухонемым почти от рождения) стал одним из наиболее известных мировых специалистов по конструированию устройств распознавания речи. Могло показаться, что он расстался с чистой математикой, став выдающимся специалистом по математике прикладной; однако примерно через два десятилетия после защиты диссертации он устроил себе «отпуск» от основных занятий и провёл некоторое время в институте Макса Планка, общаясь со своим учителем. В результате появилась работа [KM2001] «Composition of points and the Mordell — Weil problem for cubic surfaces».

В-третьих и, по существу, «в-главных», большинство работ Ю. И., начиная с [Манин1958] об алгебраических кривых над полями с дифференцированием, основаны на нетривиальных, иногда доступных только ему, аналогиях и связях. Импульсы к углублению понимания этих аналогий и связей (иногда — получаемые извне, при знакомстве с идеями и работами коллег, иногда — по более таинственным внутренним причинам) вряд ли могут быть систематизированы.

\* \* \*

То, что и первая, и последняя работы Ю. И. относятся к арифметической геометрии, конечно, имеет важный символический смысл, но не должно вводить в заблуждение. Только тщательный анализ планов, которыми Ю. И. щедро делился с окружающими, и начатых текстов, покажет, что ещё Ю. И. сделал бы<sup>10)</sup>, если бы его дни были продлены. Нет сомнения, что в этих ненаписанных работах царило бы такое же (кажущееся хаосом) разнообразие идей, как и в завершённых при жизни работах.

---

<sup>10)</sup> Меня особо занимает выделенное заглавными буквами ПОКА из цитированного выше последнего письма Ю. И. мне. Это — фрагмент словосочетания *пока не думал* о связях теории детских рисунков Гротендика с другими разделами математики и физики, уже существующими или которым только предстоит быть созданными.

Приводимый ниже обзор некоторых из опубликованных результатов Ю. И. ни в коей мере не претендует и не может претендовать на полноту. Вопреки высказанным соображениям о неструктурируемости материала, мы всё же очень условно разделим рассматриваемые работы на три класса (разумеется, с не очень чёткими границами).

- Получение новых результатов в готовых теориях.
- Участие в развитии создающихся теорий.
- Предугадывание теорий будущего.

Будут (по необходимости кратко) обсуждены работы всех трёх классов.

### 2.1. РАБОТЫ В ГОТОВЫХ ТЕОРИЯХ

Мы поговорим о сравнительно ранних работах Ю. И., в которых он выступал как *московский* математик — прежде всего, как представитель школы И. Р. Шафаревича (см. ссылку выше) и, несколько неожиданно, — заинтересовавшись дифференциальными уравнениями. Впрочем, алгебро-геометрические работы Ю. И., о которых пойдёт речь, способствовали несомненному признанию его как математика мирового уровня.

#### 2.1.0. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ТЕОРЕМЫ КОНЕЧНОСТИ

В школе И. Р. Шафаревича большое внимание уделялось восходящей к XIX веку аналогии между полями алгебраических чисел и полями рациональных функций над фиксированной кривой, см., например, [КШ2017]. Одно из главных достижений арифметической геометрии второй половины XX века — доказательство в [F1983] сформулированной в [M1922] гипотезы Морделла о том, что на кривой рода, большего 1, над полем рациональных чисел имеется лишь конечное число рациональных точек. Важную роль в доказательстве гипотезы сыграл И. Р. Шафаревич и его ученики, см. [КШ2017]. Доказательству сформулированной числовой гипотезы Морделла предшествовало полученное в [Манин1958] и [Манин1963] доказательство её функционального аналога, относящегося к алгебраической геометрии над алгебраически замкнутым полем: не изотривиальное<sup>11)</sup> семейство кривых рода, большего 1, имеет лишь конечное множество сечений.

В работе [Манин1958] появилась связность Гаусса — Манина, имеющая огромное самостоятельное значение. Ограничимся кратким обсуждением этого объекта над полем комплексных чисел.

<sup>11)</sup> То есть не становящееся тривиальным ни при какой замене базы, или, что то же самое, с не изоморфными слоями.

Пусть  $\pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{V}$  — гладкое семейство кривых рода  $g \geq 2$ , над  $\mathbb{C}$ ; это означает, что  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{X}$  — гладкие алгебраические многообразия над  $\mathbb{C}$ ,  $\pi$  — морфизм таких многообразий, и для любой точки  $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$  слой  $\mathbf{X}_{\mathbf{b}} := \pi^{-1}(\mathbf{b})$  — гладкая полная кривая рода  $g$  над  $\mathbb{C}$ . В этих предположениях семейство  $\pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{V}$  — локально тривиальное расслоение в категории гладких многообразий (но в неизотривиальном случае — не в категории комплексных). Поэтому (ко)гомологии достаточно близких слоёв не просто изоморфны (это следует из попарной гомеоморфности слоёв), а канонически изоморфны: выделенные изоморфизмы  $H^1(\mathbf{X}_{\mathbf{b}}, \mathbb{C}) \cong H^1(\mathbf{X}_{\mathbf{b}'}, \mathbb{C})$  определены для достаточно близких  $\mathbf{b}, \mathbf{b}'$  локальной тривиализацией. Это означает, что на векторном расслоении над  $\mathbf{V}$ , слоем которого над точкой  $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$  является  $2g$ -мерное пространство  $H^1(\mathbf{X}_{\mathbf{b}}, \mathbb{C})$ , определена связность, горизонтальные сечения относительно которой и реализуют упомянутые канонические изоморфизмы. Эта связность и названа *связностью Гаусса — Манина*<sup>12)</sup>. в работе [K1968].

В случае кривых когомологии могут быть определены в чисто алгебраических терминах, как когомологии де Рама с привлечением дифференциалов *второго рода* (т. е. мероморфных дифференциалов без полюсов 1-го порядка); поэтому и связность Гаусса — Манина определяется в алгебраических терминах, как *уравнение Пикара — Фукса* на базе  $\mathbf{V}$ . Уточним сформулированные утверждения в простейшем случае  $g = 1$ , близко следуя тексту самого Ю. И. из статьи [Манин1963].

Пусть семейство  $\mathbf{X}$  задано уравнением  $y^2z = x(x-z)(x-tz)$  в произведении  $\mathbf{V} \times \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , где  $t \in \mathbf{V} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , а  $(x : y : z)$  — однородные координаты в проективной плоскости  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ . Поверхность  $\mathbf{X}$  превращается в семейство кривых введением морфизма  $\pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{V}: (t, x : y : z) \mapsto t$ ; выбросив в каждом слое «бесконечную» точку  $(0 : 1 : 0)$ , запишем наше семейство в более привычном *лежандровом* виде

$$y^2 = x(x-1)(x-t).$$

Введём дифференциал  $\omega := \frac{dx}{y}$ , голоморфный на каждой кривой  $\mathbf{X}_t$ . Если  $\gamma(t) \in Z_1(\mathbf{X}_t)$  — непрерывное семейство циклов при параметре  $t \in U \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , меняющемся в *односвязной* области  $U$ , то функция

$$\eta(t) := \int_{\gamma(t)} \omega$$

голоморфна на  $U$ . Такие функции склеиваются в *многозначную* аналитическую функцию на  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ , но эта многозначность снимается

<sup>12)</sup> Со ссылкой на работу [G1962], в которой этот термин применяется неявно.

применением дифференциального оператора Гаусса

$$4t(t-1)\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 4(1-2t)\frac{d}{dt} - 1.$$

Последнее утверждение является следствием чисто алгебраического соотношения

$$\left(4t(t-1)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + 4(1-2t)\frac{\partial}{\partial t} - 1\right) \cdot \frac{dx}{y} = -d\frac{y}{(x-t)^2}$$

Вообще, исходный вклад Ю. И. в развитие этих классических понятий и результатов в работах [Манин1958] и [Манин1963] — их алгебраизация и творческое обобщение. Для самого Ю. И. этот вклад служил первым шагом к доказательству аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями<sup>13)</sup> в статье [Манин1963]; её влияние на доказательство исходной, «числовой» гипотезы Морделла (как уже было сказано, полученное в [F1983] при широком использовании работ математиков школы И. Р. Шафаревича) несомненно. Но и независимо от этого основного применения работа [Манин1963] стала широко известна и вызвала поток исследований на стыке алгебраической геометрии и теории алгебраических дифференциальных уравнений.

### 2.1.1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: ПРОБЛЕМА ЛЮРОТА

Не очень широко известный математик Якоб Люрот доказал в работе [L1876] не очень трудную теорему об алгебраических кривых.

*Рациональная кривая может накрыть лишь рациональную кривую. Иначе говоря, если  $\mathbb{k}$  — произвольное поле, а поле  $\mathcal{K}$  — промежуточное между  $\mathbb{k}$  и  $\mathbb{k}(t)$ , т. е.  $\mathbb{k} \subset \mathcal{K} \subset \mathbb{k}(t)$ , причём  $\mathcal{K} \neq \mathbb{k}$ , то  $\mathcal{K} \simeq \mathbb{k}(t)$ .*

Доказательство легко выводится из формулы Римана — Гурвица.

Неприводимое алгебраическое многообразие любой размерности  $X$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  называется унирациональным, если при некотором  $n \geq \dim X$  существует доминантное (т. е. имеющее всюду плотный образ) рациональное отображение

$$f : \mathbf{P}_n(\mathbb{k}) \dashrightarrow X.$$

Очевидно, любое рациональное многообразие унирационально. *Проблемой Люрота* в данной размерности называется вопрос о том, верно

<sup>13)</sup> В работе [C1990] была замечена и исправлена неточность доказательства в статье [Манин1963] — в формулировке из [L1990] недоставало некоторого функционального аналога теоремы Зигеля о целых точках.

ли в этой размерности обратное утверждение — *каждое унирациональное многообразие рационально*. Как указано выше, в размерности 1 проблема Люрота решается положительно, и это — лёгкий результат.

В размерности 2 проблема Люрота также решается положительно, но это связано уже с достаточно серьёзной алгебраической геометрией. Далее мы в основном следуем работе [B2016].

В конце XIX века геометры работали в основном над полем  $\mathbb{C}$ . Итак, пусть  $S$  — проективная поверхность, снабжённая рациональным отображением  $f: \mathbb{P}_2(\mathbb{C}) \dashrightarrow S$ . Поскольку  $f$  не определено лишь на конечном множестве, дифференциалы  $\omega$  различных типов на  $S$  определяют дифференциалы  $f^*\omega$  тех же типов на  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$  и, согласно критерию Кастельнуово (см., например, [ИШ1989]), поверхность  $S$  оказывается рациональной.

Размерность 3 оказалась значительно сложнее. Здесь (а, следовательно, и в высших размерностях) ответ на проблему Люрота оказывается отрицательным, но на её окончательное решение потребовалось примерно полвека. Поразительно, что наряду с контрпримером, построенным Ю. И. совмestно с В. А. Исковских в работе [ИМ971], ещё двумя парами математиков мирового уровня в работах [AM1972] и [CG1972] практически одновременно были построены ещё два контрпримера. Все три контрпримера — разные, и нерациональность соответствующих трёхмерных многообразий была установлена разными методами.

Работа над построением контрпримеров восходит к статье [E1912], в которой рассматривалось (общее) пересечение квадрики и кубики в  $\mathbb{P}_5(\mathbb{k})$ . Унирациональность этого многообразия была установлена правильно, но при попытке доказательства его нерациональности использовалась ссылка на работу [F1908]. Однако, несмотря на (сохраняющуюся по сегодняшний день) важность идей и результатов Фано, эта работа была признана ошибочной, и проблема оставалась открытой.

Полностью обоснованные контрпримеры появились лишь в упомянутых работах 1970-х годов. В работе [CG1972] устанавливается нерациональность кубических гиперповерхностей в  $\mathbb{P}_4(\mathbb{k})$ ; при этом используется интереснейший инвариант — *промежуточный якобиан*, являющийся 3-мерным аналогом классического якобиана. В работе [AM1972] рассматриваются двулистные накрытия  $\mathbb{P}_3(\mathbb{k})$ , разветвлённые вдоль особых гиперповерхностей степени 4; кручение в 3-мерных когомологиях отличает их от рациональных многообразий. Наконец, в статье [ИМ971] изучаются гладкие гиперповерхности степени 4 и устанавливается, что группы их бирациональных автоморфизмов

конечны, в отличие от огромных групп бирациональных автоморфизмов рациональных многообразий. Унирациональность некоторых кватернионов была известна, см. [S1960]. Вопрос о том, все ли 3-мерные кватернионы унирациональны, был поставлен в статье [ИМ971], но ответ, по-видимому, неизвестен по сей день.

Работа Ю. И. [ИМ971] была последней по «чистой» алгебраической геометрии, но к *арифметике* многообразий, близких к рациональным, он возвращался не раз, см., например, [Manin1993].

### 2.1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

На первом этапе работы в области дифференциальных уравнений Ю. И. занимался *алгебраизацией классических конструкций*. О принёсшей ему мировую известность работе по алгебраической геометрии *над полями с дифференцированием* мы уже говорили; к ней примыкает работа [Manin1965] «Moduli fuchsiani»<sup>14)</sup>, в которой теория линейных дифференциальных уравнений (перекрывающая известные к тому времени теории Пикара — Вессию и Колчина) строится чисто алгебраически и нацелена на алгебро-геометрические применения в духе [Манин1963].

В дальнейшем связанные с дифференциальными уравнениями работы писались Ю. И., как правило, в соавторстве. Исключение составляют

- большой обзор [Манин1978], показывающий широту, глубину и своеобразие понимания предмета Юрием Ивановичем;
- статья [Манин1978а], в которой известные к тому времени связи между нелинейными дифференциальными уравнениями распространяются на особые кривые, причём отмечается, что вырождения решений лучше анализируются на алгебро-геометрическом языке, чем на языке тета-функций (это нетривиально, поскольку классически изучение дифференциального уравнения считалось исчерпанным, когда оно решено в известных спецфункциях);
- стоящая несколько особняком работа [Manin1998], в которой, среди прочего, переоткрыта компактная запись (громоздкого в своей исходной форме) уравнения Пенлеве-6 в терминах эллиптических функций, найденная Р. Фуксом в 1907 году.

В нескольких работах по дифференциальным уравнениям Юрия Ивановича с соавторами, видимо, существенную роль играет вклад

---

<sup>14)</sup> Единственная (не считая кратких заметок для итальянской энциклопедии) работа Ю. И., написанная по-итальянски.

Ю. И. как алгебраиста, В работе [ГМШ1976] формализовано вариационное исчисление, в работе [ЛМ1980] вводится *формальный спектральный параметр* для приведения известного уравнения длинных волн к формально лаксову виду  $L_t = [L, P]$ , и т. д.

Возможно, ещё более существен вклад Ю. И. в теорию дифференциальных уравнений не только как алгебраиста, но как Геометра<sup>15)</sup> — не просто специалиста по алгебраической геометрии, овладевшего дифференциальной геометрией, а математика с исключительно широким взглядом на множества с «геометрическими» структурами: топологическими, инфинитезимальными и другими. Уже упоминалась (как *физическая*) работа [НМ1980], в которой геометрическая конструкция *твисторов Пенроуза* применялась к фундаментальным уравнениям математической физики. В знаменитых работах [ADHM1978] и [DM1978] алгебраическая геометрия применялась к конструкции *инстантонов*. Общие принципы, которым Ю. И. следовал в своих работах в этой области, сформулированы им в текстах, которые мы обсудим ниже в разделе, посвящённом отношениям Ю. И. с физикой.

Наконец, Ю. И. участвовал в написании двух работ, связанных с дифференциальными уравнениями и далеко выходящих за пределы этой классической науки. В работе Р. В. Cohen, Ю. И. и D. Zagier<sup>16)</sup> [CMZ1997] построены несколько экзотические обобщения классической теории автоморфных форм — точнее, связанных с ними дифференциальных операторов; теория распространяется на *псевдодифференциальные операторы*, ведущие себя «обобщённо-автоморфно» под действием модулярной группы, и, кроме того, строится *суперизация* получающейся теории. В оставшемся неопубликованном препринте [BM2013] вводятся и изучаются уравнения типа Пенлеве-6 с  $p$ -адическим «временем».

Ю. И. не оставил после себя школу специалистов по дифференциальным уравнениям, и многие его работы в этой области остались незавершёнными. Автор настоящих строк убеждён, что внимательное прочтение цитированных и других работ Ю. И. о дифференциальных уравнениях вместе с продумыванием его общих идей в этой области окажется полезным.

<sup>15)</sup> Именно с заглавной буквы; так в XIX веке называли выдающихся математиков.

<sup>16)</sup> Посвящённой, видимо по предложению Ю. И., памяти Иры Дорфман. Ирина Яковлевна Дорфман (1948–1994) — талантливый математик, специалист по функциональному анализу и дифференциальным уравнениям, умерла от тяжёлой болезни в возрасте 46 лет.

## 2.2. РАЗВИТИЕ СОЗДАЮЩИХСЯ ТЕОРИЙ

Ю. И. был весьма общительным человеком. Он не только щедро делился своими идеями на любой стадии законченности, но и был исключительно восприимчив к чужим, доступным в докладах, частных беседах, письмах, статьях. Особый интерес у него вызывали новые — ещё не очень распространившиеся, но глубокие — теории, он охотно и легко подключался к их развитию и распространению. Приведём примеры.

### 2.2.0. Мотивы Гротендика

В статье [Manin2014] Ю. И. пишет о своей командировке во Францию в 1967 году. Там Гротендик в частном порядке рассказывал ему о своём новом проекте — гипотетической *теории мотивов*, которая была призвана обобщить уже многие развитые к тому времени *теории кохомологий* алгебраических многообразий. Контуры будущей теории уже угадывались, она должна была функториально сопоставлять *мотив* (?) объекту алгебро-геометрической категории. В этой категории объекты — схемы Гротендика или их обобщения, а вместо традиционных морфизмов  $X \rightarrow Y$  рассматриваются *соответствия*, т. е. *циклы* в  $X \times Y$ . За прошедшие десятилетия были построены довольно многочисленные фрагменты общей теории мотивов; однако соединение их в полную теорию, предугаданную Гротендиком, тормозится тем, что *стандартные гипотезы* о циклах, сформулированные в [G1969], несмотря на существенный прогресс, остаются в целом открытыми (см., например, частичный обзор в [M2020]).

Статья [Manin2014] замечательна и с чисто литературной, и с математической точек зрения; взгляды Гротендика на математику, которые Ю. И. продумывал и усваивал, описаны иногда неформально, но в основном понятно и точно. Формально вклад Ю. И. в развитие теории мотивов заключается в том, что некоторые следствия из неё он в работе [Манин1968] доказал непосредственно. По существу же огромный вклад Ю. И. в российскую математику, контакты которой с мировой были тогда ограничены, заключался в том, что он привёз в Россию идеи актуальной современной теории, воспринятые из первоисточника, и показал коллегам и ученикам, что в этой теории можно работать.

### 2.2.1. НЕКОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Как уже было сказано, работа Ю. И. в этой области началась с работы [Manin1991]. Затем были другие работы, из которых сейчас упомянем одну, [Manin2002]. В ней решается на первый взгляд неразрешен-

мая задача: распространить классическую теорию<sup>17)</sup>, связывающую мнимые квадратичные поля с эллиптическими кривыми (в которой, например, полю гауссовых чисел  $\mathbb{Q}([i])$  соотносится кривая  $\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}[i]}$ ) на случай вещественных квадратичных полей — например,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , — которым сопоставляется что-то загадочное.

Оказывается, эллиптическая кривая может быть заменена на *двумерный квантовый тор*, соответствующий вещественной квадратичной иррациональности. Ю. И., опираясь на некоторые просчитанные примеры, аналогии и ссылки на довольно многочисленные современные работы, предлагает строить квантовые понятия, соответствующие вещественному квадратичному полю  $\mathbb{K}$ , на основе алгебр функций на множестве  $\frac{\mathbf{P}_1(\mathbb{K})}{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z})}$ . Мы вернёмся к этой конструкции, когда будем обсуждать её физические аспекты, введённые в работе [ММ2002].

В статье [Manin2002] также обсуждаются *эллиптические кривые как некоммутативные пространства*. Для этого используется очевидный изоморфизм

$$\frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}} \simeq \frac{\mathbb{C}^\times}{q^{\mathbb{Z}}},$$

где  $\mathrm{Im}(\tau) > 0$  и  $q = e^{2\pi i\tau}$ . В такой интерпретации обычная эллиптическая кривая является *q-деформацией* невозможного случая  $q = 1$ , а квантованная функциональная алгебра имеет вид  $\mathbb{C}[z, z^{-1}][v, v^{-1}]$  с соотношением  $vz = qzv$ .

### 2.2.2. МАТЕМАТИКА НАД $\mathbb{F}_1$

Этот раздел математики часто считается несерьёзным; в ходу обозначение  $F_{un}$ , которое по-английски может читаться как *Fun*, а по-французски как  $\mathbb{F}_1$ . Есть много способов обосновать занятия этой странной наукой; один из наиболее понятных заключается в том, чтобы конечные поля  $\mathbb{F}_q$  объявить *q-деформациями* несуществующего<sup>18)</sup> поля  $\mathbb{F}_1$ . Несмотря на несуществование поля  $\mathbb{F}_1$ , вводится аналог категории

<sup>17)</sup> *Jugendtraum* Кронекера, его *мечту юности*. Иронический подзаголовок обсуждаемой статьи — *ein Alterstraum* [мечта старости]; Ф. Хирцебрух предложил перевести его как *кризис среднего возраста*.

<sup>18)</sup> В предыдущем подразделе эллиптическая кривая *обесмысливалась* (что, с точки зрения специалистов, аналогично переходу от квантовой механики к классической, в других обозначениях  $\hbar \rightarrow 0$ ) при  $q \rightarrow 1$ , где  $q \in \mathbb{C}$ ,  $|q| < 1$ . В этом же подразделе  $q$  — степень простого числа, и обсуждается обесмысливание при  $q := 1$ .

конечномерных пространств над  $\mathbb{F}_q$ , и это — категория конечных множеств. Аналогия не бессмысленна: оказывается, например, что количества точек в грассманианах над конечным полем задаются  $q$ -аналогом биномиальных коэффициентов:

$$\# \text{Gr}_{n,k}(\mathbb{F}_q) = \binom{n}{k}_q$$

— правая часть выражается, как для обычных биномиальных коэффициентов, через  $q$ -факториалы, где  $[m]_q! := [1]_q [2]_q \dots [m]_q$ , а  $[r]_q := 1 + q + q^2 + \dots + q^{r-1}$ .

Упомянутая выше работа [Manin1995] начинается с обсуждения проблемы *абсолютных мотивов*, которую мы слегка затронули выше. С общематематической точки зрения работа посвящена *проблеме сходимости чисел и функций*, которая тоже уже упоминалась. Многочисленные аналогии восходят к XIX веку, но в точные формулировки они не превращаются. Очевидный пробел — разрыв между пониманием алгебраической геометрии над конечными полями и над кольцами целых алгебраических чисел; очевидный признак этого — разрыв в понимании соответствующих дзета-функций. Ю. И. предлагает  $\mathbb{F}_1$ -интерпретации аналитических функций, фигурирующих в теории дзета-функции Римана — например,

$$\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{-1} := \sqrt{2} \left( \pi^{-s/2} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right)^{-1} =: \zeta(\mathbf{P}_{\infty}^*(\mathbb{F}_1)).$$

Ю. И. выражает надежду на то, что эта формула (которая, согласно гипотезам Бейлинсона<sup>19)</sup>, даёт арифметическую информацию о значениях дзета-функций Дедекинда в целых точках) с помощью подходящего расширения мотивов Тейта получит  $\mathbb{F}_1$ -аналог, с помощью которого высчитываются ранги *стабильных гомотопических групп*.

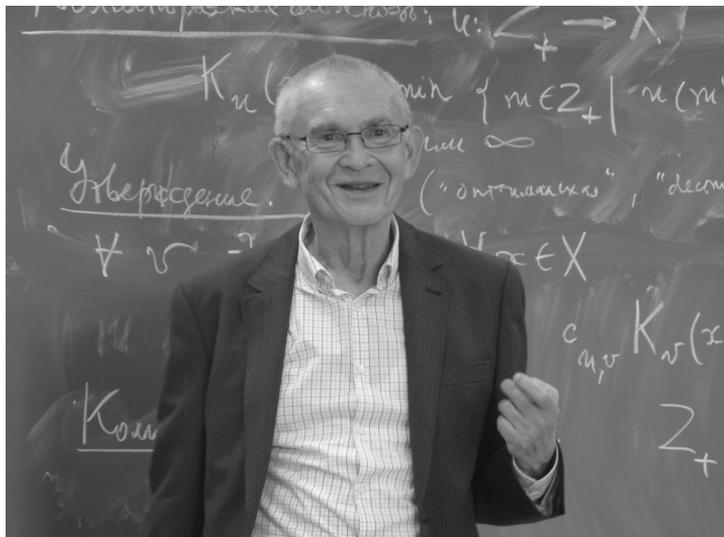
Объём настоящей статьи не позволяет даже на таком поверхностном уровне прокомментировать другие определения, результаты и проблемы этой замечательно содержательной работы.

Работа [Manin2009] основана на идеях, довольно сложных технически. Ограничимся перечислением областей математики, в которых Ю. И. видит связи с «аналитической геометрией» над  $\mathbb{F}_1$ .

- Корни из единицы и диффеоморфизмы Морса — Смейла.
- Корни из единицы и инварианты Виттена — Решетихина — Тураева<sup>20)</sup>.

<sup>19)</sup> Александр Бейлинсон — один из знаменитых учеников Ю. И.

<sup>20)</sup> Трёхмерных гомологических сфер.



- Корни из единицы и системы Боста — Конна<sup>21)</sup>.
- Векторы Витта.

\* \* \*

Приведённые формулировки удручающе поверхностны и разрозненны. Возможно, это не случайно — математика, бывшая когда-то цельным организмом, начиная с XIX века распадается на удаляющиеся друг от друга дисциплины. Однако многие математики стремятся к восстановлению её единства, и Ю. И. сыграл в реализации этого стремления огромную роль. Лишь будущее покажет, насколько основательны надежды на сближение далёких разделов (например, функционального анализа и арифметики) на основе такого странного объекта, как  $\mathbb{F}_1$ . Более систематические изложения теории можно найти в [ССМ2008], [D2008], [H2017].

### 2.3. Предугадывание теорий будущего

Очень важными были работы Ю. И., которые никак не укладывались в существующие теории — ни классические, ни современные. Они относились к математике будущего, часто нося междисциплинарный характер. В последние десятилетия Ю. И. написал их довольно много, а в некоторых случаях успел поделиться своими идеями только в устной форме. Рассмотрим несколько примеров.

<sup>21)</sup> Касаются алгебр Гекке и допускают термодинамическую интерпретацию.

### 2.3.0. КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА

В 1970-е годы Ю. И. вёл семинар по *рекурсивной геометрии*. Не знаю, остались ли от этого семинара какие-нибудь материальные следы; участников было много, как на всех семинарах Ю. И., но каких-либо публикаций мне не известно. Приведу, однако, несколько запомнившихся тем исследований, которые и сейчас представляются мне перспективными.

- Построить пучок рекурсивных и частично-рекурсивных функций на разрешимых и перечислимых подмножествах в  $\mathbb{N}^n$ . Рассматривать его как обобщение традиционных пучков в диофантовой геометрии; осознав невозможность построения аналога топологии Зариского, придумать ей замену.
- Построить теорию *роста* общерекурсивных, примитивно-рекурсивных функций; за образец взять комплексно-аналитическую теорию — *порядок* и *тип* целой функции.
- Изучить, основываясь на работе [K1962], группы рекурсивных автоморфизмов рекурсивных подмножеств в  $\mathbb{N}^n$ . Построить теорию представлений этой группы.
- Изложить на рекурсивно-геометрическом языке решение Матиясевичем 10-й проблемы Гильберта над  $\mathbb{Z}$ . Постараться распространить его на  $\mathbb{Q}$ .

#### 2.3.1. Применения колмогоровской сложности

Выше упоминалась работа [Манин2014], в которой были заложены основы естественнонаучных применений колмогоровской сложности; очевидны перспективы этого подхода к геномике. Упомянем два направления её применения в математике, которые были намечены Ю. И. устно.

• *Глубина математического результата*. Предложенный качественный признак глубины — короткая формулировка и длинное доказательство; Ю. И. приводил пример теоремы Бёрнсайда о чётности порядка некоммутативной простой конечной группы. Эта идея наталкивается на два возражения: во-первых, длина доказательства зависит от языка, а во-вторых, возможна ситуация, в которой короткое доказательство существует, но (в данный момент?) неизвестно. Оба возражения преодолеваются общими свойствами колмогоровской сложности. Она определена лишь с точностью до аддитивной константы  $i$ , будучи рассмотрена на бесконечном множестве с такой точностью, от языка уже не зависит. Кроме того, колмогоровская сложность — уже привя-

занная к языку — определена точно, как настоящая функция, но алгоритмически не вычислима именно по указанной причине: современные математики не могут быть уверены, что краткое доказательство теоремы Бёрнсайда никогда не будет найдено. Но объективно определённая предложенная мера глубины предложена!

• *Сложность и высота.* Возможно, Ю. И. первый обратил внимание на сходство этих понятий (многие специалисты XX века по арифметической геометрии вводили понятие высоты и владели им, но лишь небольшая их часть, подобно Ю. И., настолько интересовалась понятиями из далёких разделов математики, что владела понятием сложности)<sup>22)</sup>. Между тем, три сходства бросаются в глаза:

- (1) и сложность, и высота обычно определены с точностью до аддитивной постоянной, т. е. имеют содержательный смысл не столько для индивидуального объекта, сколько для класса объектов;
- (2) и сложность, и высота объекта связаны с количеством информации, необходимой для определения объекта;
- (3) в большинстве «хороших» теорий количество (с точностью до изоморфизма) объектов ограниченной сложности и высоты конечно<sup>23)</sup>.

Эти понятия, однако, не могут совпадать, поскольку высота алгоритмически вычислима, а сложность — нет.

Мне посчастливилось обсуждать с Ю. И. два аспекта соотношения сложности и высоты.

Первый безусловно относится к математике будущего и вряд ли может быть естественно определён на языке понятий современной математики:

*Насколько (статистически) типично отклонение сложности от высоты? Иначе говоря — как часто объект (натуральное число или что-то более хитрое арифметико-геометрическое) допускает скрытое от поверхностного взгляда краткое определение?*

Второй аспект связан с конкретными объектами, которые мы обсудим в следующем подразделе.

*Пусть имеются две эквивалентные категории, объекты которых описываются конечными количествами информации. Есть ли осно-*

<sup>22)</sup> Говоря неформально, сложность — это длина кратчайшего описания объекта на данном формальном языке, а высота характеризует сложность его построения. Точное определение можно найти, например, в статье [Манин1975a].

<sup>23)</sup> Количество объектов сложности, не превышающей  $h$ , как функция от  $h$ , иногда определённая с точностью до аддитивной константы, — важная характеристика теории.

вания надеяться, что высоты будут эффективно оцениваться друг через друга?<sup>24)</sup>

Ю. И. несколько неожиданно для меня высказал сомнение, а через некоторое время я эти сомнения подтвердил (см. [Sh2016]).

### 2.3.2. Визуализация абсолютной группы Галуа

Выше уже упоминалась работа [Manin2014], в которой Ю. И. рассказывал об общении с Гротендиком в 1967 году, об идеях и стиле мышления Гротендика, которые захватили его и повлияли на его дальнейшую работу. Через несколько лет после этого Гротендик (по нематематическим причинам) почти полностью разорвал связи с математическим сообществом, но продолжал активную работу — в одиночестве и совместно со студентами университета его юности Монпелье, багаж знаний которых был несравненно беднее, чем у его учеников и соавторов, с которыми он работал в предыдущий период. Гротендику пришлось выбрать непривычную для него тематику, в которой можно было бы работать, опираясь только на интуицию, и он предложил своим студентам заняться такими вложениями  $X_1 \hookrightarrow X_2$  графов в компактные ориентированные поверхности, что дополнения  $X_2 \setminus X_1$  гомеоморфны несвязным объединениям дисков. Эти объекты рассматривались и раньше, о чём Гротендик не знал; но он дал им красивое название *dessins d'enfants* (детские рисунки), которое через некоторое время прижилось в математической литературе.

Уйти от своей основной тематики Гротендику не удалось: Пьер Делинь, отношения с которым всё-таки сохранялись, рассказал ему о работе (ученика И. Р. Шафаревича) Геннадия Белого [B1979], в которой было показано, что на комплексной кривой  $X_{\mathbb{C}}$  существует рациональная функция<sup>25)</sup>  $\beta$  всего с тремя критическими значениями, когда кривая  $X_{\mathbb{C}}$  является комплексификацией кривой  $X_{\mathbb{Q}}$ , определённой над полем алгебраических чисел  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Связь этой удивительной теоремы с теорией детских рисунков не очевидна, но Гротендик сразу понял, что если критические значения функции  $\beta$  суть  $\{0, 1, \infty\}$ , то, взяв за  $X_2$  топологическую модель кривой  $X_{\mathbb{C}}$ , а за граф  $X_1$  — прообраз  $\beta^{-1} \circ [0, 1]$  отрезка, соединяющего два критических значения, мы получим детский рисунок!<sup>26)</sup>

<sup>24)</sup> Ответ тривиальным образом утвердителен, если сложность осуществления эквивалентности равномерно ограничена. Однако бывают случаи, когда она растёт вместе с высотой.

<sup>25)</sup> Обозначение в честь Белого, введённое в работе [ShV1990].

<sup>26)</sup> Буквально это верно при дополнительном предположении чистоты функции  $\beta$ , заключающейся в двукратности всех значений  $\beta = 1$ . Это ограни-

Это соответствие устанавливает эквивалентность подходящим образом определённых категорий детских рисунков и *пар Белого*  $(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, \beta)$ ; одно из ярких применений этой эквивалентности — *визуализация* абсолютной группы Галуа  $\text{Aut } \overline{\mathbb{Q}}$ , которая оказывается действующей на множестве (классов изоморфизма) детских рисунков, причём на сферических деревьях или на торических рисунках уже точно.

Гротендик подытожил свои идеи в этой области в неформальной, но ставшей широко известной рукописи [G1984], опубликованной лишь 13 лет спустя. Это рукопись достигла Москвы, и Ю. И. относился к ней весьма благосклонно; в частности, его совет мне, выбирающему тему дальнейших занятий после защиты кандидатской диссертации (написанной совсем на другую тему), заняться уточнением и развитием идей из [G1984], оказался решающим для моей дальнейшей профессиональной жизни. Статья [ShV1990], в которой часть неформальных соображений Гротендика излагалась в традиционной математической форме, была настоятельно рекомендована Ю. И. в сборник, посвящённый 60-летию Гротендика.

Однако сам Ю. И. обратился к этой тематике много позже, в одной из своих последних работ [MM2020]. В этой работе детские рисунки связывают квантовую статистическую механику с поразительным количеством разделов математики: алгебры Гекке, функциональный анализ, теория полей классов, алгебры Хопфа, комбинаторика, алгебры Рота — Бакстера... Что касается самих детских рисунков и действия абсолютной группы Галуа  $\text{Aut } \overline{\mathbb{Q}}$  на них, найдены совершенно новые подходы: все (включая несвязные) детские рисунки порождают некоторую алгебру Хопфа, и это позволяет вместе с каждым рисунком рассмотреть результаты стягивания и удаления всех его рёбер.

В работе утверждается, что этот подход даст новые инварианты Галуа, и это — несомненно элементы науки будущего: в теории детских рисунков (отчасти в соответствии с мечтами Гротендика) применяется продвинутая физическая интуиция, связанная с таким количеством математических понятий, что вряд ли многие современные математики ими владеют. Остаётся надеяться, что эти идеи Ю. И. будут развиты его коллегами и учениками.

---

чение, однако, не принципиально, поскольку от любой функции Белого  $\beta$  можно перейти к чистой  $4\beta(1 - \beta)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Манин1956] Манин Ю. И. О сравнениях третьей степени по простому модулю // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1956. Т. 20, вып. 5. С. 673–678.
- [Манин1958] Манин Ю. И. Алгебраические кривые над полями с дифференцированием // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1958. Т. 22, вып. 6. С. 737–756.
- [Манин1963] Манин Ю. И. Доказательство аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152. С. 1061–1063.
- [Manin1965] Manin Yu. I. Moduli fuchsiani // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3). 1965. Vol. 19. P. 113–126.
- [Манин1968] Манин Ю. И. Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Матем. сб. 1968. Т. 119, № 4. С. 475–507.
- [Манин1970] Манин Ю. И. Лекции по алгебраической геометрии. I: Аффинные схемы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
- [Манин1971] Манин Ю. И. Лекции по алгебраической геометрии. Часть II: К-функтор в алгебраической геометрии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.
- [Манин1971a] Манин Ю. И. Добавление переводчика к книге: Д. Мамфорд. Абелевы многообразия. М.: Мир. 1971. С. 286–292.
- [ИМ971] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трёхмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86(128), № 1(9). С. 140–166.
- [Манин1973] Манин Ю. И. Десятая проблема Гильберта // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 1. М.: ВИНТИ, 1973. С. 5–37.
- [Манин1974] Манин Ю. И. Лекции о математической логике. М.: Московский институт инженеров электронного машиностроения, 1974.
- [Манин1975] Манин Ю. И. Проблема континуума // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 5, М.: ВИНТИ, 1975. С. 5–72.
- [Манин1975a] Манин Ю. И. Теорема Гёделя // Природа, 1975. № 12. С. 80–87.
- [ГМШ1976] Манин Ю. И. Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 30–34.
- [Манин1977] Манин Ю. И. Человек и знак // Природа. 1977. № 5. С. 150–152.
- [Manin1977a] Manin Yu. I. A course in mathematical logic for mathematicians / Second edition. New York: Springer, 2010. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 53).
- [ADHM1978] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfel'd V. G., Manin Yu. I. Construction of instantons // Phys. Lett. A. 1978. Vol. 65, № 3. P. 185–187.
- [DM1978] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfel'd V. G., Manin Yu. I. A description of instantons // Comm. Math. Phys. 1978. Vol. 63, № 2. P. 177–192.

- [Манин1978] *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 5–152.
- [Манин1978а] *Манин Ю. И.* Матричные солитоны и расслоения над кривыми с особенностями // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 4. С. 53–63.
- [НМ1980] *Henkin G. M., Manin Yu. I.* Twistor description of classical Yang — Mills — Dirac fields // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 95, № 3–4. P. 40–408.
- [ЛМ1980] *Лебедев Д. Р., Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн Бенни II. Представление Лакса и законы сохранения // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Т. 12. Л.: Наука, 1980. (Зап. научн. сем. ЛОМИ; Т. 96). С. 169–178.
- [Manin1981] *Manin Yu. I.* Expanding constructive universes // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). С. 255–260.
- [Манин1982] *Манин Ю. И.* Замечания об алгебраических супермногообразиях // Алгебра. Сб. работ, посвящённых 90-летию О. Ю. Шмидта. М.: МГУ, 1982. С. 95–101.
- [ВМ1984] *Влэдуц С. Г., Манин Ю. И.* Линейные коды и модулярные кривые // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж. Т. 25, М.: ВИНТИ, 1984. С. 209–257.
- [Манин1984] *Манин Ю. И.* Новые размерности в геометрии // УМН. 1984. Т. 39, вып. 6(240). С. 47–73.
- [Manin1986] *Manin Yu. I.* Theta-function representation of the partition function of a Polyakov string // Pis'ma Zh. Eksp. Teor Fiz. 1986. Vol. 43, № 4. P. 161–163.
- [ВМ1986] *Beilinson A. A., Manin Yu. I.* The Mumford Form and the Polyakov Measure in String Theory // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 107, № 3. P. 359–376.
- [КМ1986] *Kapranov M. M., Manin Yu. I.* The twistor transformation and algebraic-geometric constructions of solutions of the equations of field theory // Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, № 5. P. 33–61.
- [Manin1987] *Manin Yu. I.* Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory. Poiana Brasov, 1987. Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293–303.
- [Manin1991] *Manin Yu. I.* Topics in noncommutative geometry // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). P. 255–260.
- [Manin1991a] *Manin Yu. I.* Quantum groups // Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk. 1991. Vol. 100, № 5. P. 55–68.

- [Manin1993] *Manin Yu. I.* Notes on the arithmetic of Fano threefolds // *Compositio Math.* 1993. Vol. 85, № 1. P. 37–55.
- [KM1994] *Kontsevich M., Manin Yu.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of  $\mathbf{P}^2$  // *Comm. Math. Phys.* 1994. Vol. 164, № 3. P. 525–562.
- [Manin1995] *Manin Yu. I.* Gromov — Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // *Columbia University Number Theory Seminar* (New York, 1992). 1995. Astérisque. № 228. P. 121–163.
- [CMZ1997] *Cohen P. B., Manin Yu., Zagier D.* Automorphic pseudodifferential operators // *Algebraic aspects of integrable systems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* Vol. 26. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1997. P. 17–47.
- [KM1997] *Кобзарев В. Ю., Манин Ю. И.* Элементарные частицы. М.: Фазис, 1997.
- [Manin1998] *Manin Yu. I.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of  $\mathbf{P}^2$  // *Geometry of differential equations.* Providence, RI: AMS, 1998. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; Vol. 186). P. 131–151.
- [Manin2000] *Manin Yu. I.* Classical computing, quantum computing, and Shor’s factoring algorithm // *Séminaire Bourbaki.* Vol. 1998/99. Astérisque. 2000. № 266. Exp. No. 862. P. 375–404.
- [KM2001] *Kanevsky D., Manin Yu.* Composition of points and the Mordell — Weil problem for cubic surfaces // *Rational points on algebraic varieties.* Basel: Birkhäuser, 2001. (Progr. Math.; Vol. 199). P. 199–219.
- [Manin2002] *Manin Yu. I.* Real multiplication and noncommutative geometry // *Selecta Math. (N. S.).* 2002. Vol. 8, № 3. P. 475–521.
- [MM2002] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Continued fractions, modular symbols, and noncommutative geometry. arXiv:math/0202109v1 [math.AG], 12 Feb 2002.
- [Манин2003] *Манин Ю. И.* Некоммутативная геометрия и квантовые тета-функции // *Глобус. Записки математического семинара МНУ.* 2004. Т. 1. С. 91–108.
- [Манин2008] *Манин Ю. И.* Математика как Метафора. М.: МЦНМО, 2008.
- [Manin2009] *Manin Yu. I.* Cyclotomy and analytic geometry over  $\mathbf{F}_1$ . arXiv:0809.1564v2 [math.AG].
- [Manin2009a] *Manin Yu. I.* Renormalization and computation I: motivation and background. arXiv:0904.4921v2 [math.QA].
- [MM2011] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Error-correcting codes and phase transitions // *Math. Comput. Sci.* 2011. Vol. 5, № 2. P. 133–170.
- [LM2009] *Luef F., Manin Yu. I.* Quantum theta functions and Gabor frames for modulation spaces // *Lett. Math. Phys.* 2009. Vol. 88, № 1–3. P. 131–161.

- [Манин2012] *Манин Ю. И.* Введение в теорию схем и квантовые группы. М.: МЦНМО, 2012.
- [BM2013] *Buium A., Manin Yu. I.* Arithmetic differential equations of Painlevé VI type. arXiv:1307.3841v2 [math.NT], 18 Dec 2013.
- [Манин2014] *Манин Ю. И.* Закон Ципфа и вероятностные распределения Леви // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48, вып. 2. С. 51–66.
- [Manin2014] *Manin Yu. I.* Forgotten motives: the varieties of scientific experience // ICCM Not. 2014. Vol. 2, № 1. P. 6–10.
- [MM2014] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Big Bang, Blowup, and Modular Curves // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2014. Vol. 10. Paper 073. P. 20.
- [Manin2015] *Manin Yu. I.* Neural codes and homotopy types: mathematical models of place field recognition // Mosc. Math. J. 2015. Vol. 15, № 4. P. 741–748.
- [MM2020] *Manin Yu. I., Marcolli M.* Quantum Statistical Mechanics of the Absolute Galois Group // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2020. Vol. 16. Paper 038. P. 52. arXiv:1907.13545.
- [Manin2023] *Manin Yu. I.* Rational points of algebraic varieties: a homotopical approach // Известия РАН. Сер. Матем. 2023. Т. 87, № 3 (в печати).
- [AM1972] *Artin M., Mumford D.* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. (3). 1972. Vol. 25. P. 75–95.
- [B2016] *Beauville A.* The Lüroth problem // Rationality problems in algebraic geometry. Cham: Springer, 2016, (Lecture Notes in Math.; Vol. 2172). P. 1–27.
- [CG1972] *Clemens H., Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. of Math. (2). 1972. Vol. 95. P. 281–356.
- [C1990] *Coleman R.* Manin’s proof of the Mordell conjecture over function fields // Enseignement Mathématique. 1990. Vol. 36. P. 393–427.
- [COGP1991] *Candelas P., de la Ossa X., Green P., Parkes L* A pair of Calabi — Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Nuclear Phys. B. 1991. Vol. 359, № 1. P. 21–74.
- [CCM2008] *Connes A., Consani C., Marcolli M.* Fun with  $F_1$ . arXiv:0806.2401v1 [math.AG].
- [DKE1999] *Deligne P., Kazhdan D., Etingof P. et al.* Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians (2 Volume Set). AMS, 1999.
- [D2008] *Durov N.* New Approach to Arakelov Geometry. arXiv:0704.2030v1 [math.AG].
- [E1912] *Enriques F.* Sopra una involuzione non razionale dello spazio // Rend. Acc. Lincei (5a). 1912. Vol. 21. P. 81–83.

- [F1983] *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.
- [F1908] *Fano G.* Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti R. Acc. Sci. Torino. 1908. Vol. 43. P. 973–984.
- [F1962] *Feferman S.* Transfinite recursive progressions of axiomatic theories // J. Symbolic Logic. 1962. Vol. 27, № 3. P. 259–316.
- [G1962] *Grothendieck A.* On the DeRham Cohomology of Algebraic Varieties // Publ. Math. IHES. 1966. Vol. 29.
- [G1969] *Grothendieck A.* Standard Conjectures on Algebraic Cycles // Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968). London: Oxford University Press, 1969. (Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.; Vol. 4). P. 193–199.
- [G1984] *Grothendieck A.* Esquisse d'un programme // Geometric Galois actions, 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242). P. 5–48. With an English translation on pp. 243–283.
- [GP2013] *Gurzadyan V. G., Penrose R.* On CCC-predicted concentric low-variance circles in the CMB sky // Eur. Phys. J. 2013. Vol. 128. Article 22.
- [H2017] *Haran S.* Geometry over  $\mathbb{F}_1$ . arXiv:1709.05831v1 [math.AG], 18 Sep 2017.
- [HK2022] *D'Hoker E., Kaidi J.* Lectures on modular forms and strings. arXiv:2208.07242v2 [hep-th], 18 Nov 2022.
- [K1968] *Katz N. M.* On the differential equations satisfied by period matrices // Publications mathématiques de l'IHÉS. 1968. Vol. 35. P. 71–106.
- [K1962] *Kent C. F.* Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 104. P. 347–362.
- [L1990] *Lang S.* Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics // Notices Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 42, № 3. P. 339–350.
- [L1876] *Lüroth J.* Beweis eines Satzes über rationale Curven // Math. Ann. 1876. Bd. 9. S. 163–165.
- [M2023] *Marcolli M.* Pierced by a sun ray. Preprint 2023.
- [M2020] *Milne J. S.* Grothendieck's standard conjecture of Lefschetz type over finite fields. arXiv:2011.06563v1 [math.AG].
- [M1922] *Mordell L. J.* On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1922. Vol. 21. P. 179–192.
- [S1960] *Segre B.* Variazione continua ad omotopia in geometria algebrica // Ann. Mat. Pura ed Appl. (4). 1960. Vol. 50. P. 149–186.
- [Sh2016] *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 446. С. 182–220.

- [Sh2016a] *Shabat G.* On the elliptic time in the adelic gravity // *Facta universitatis. Ser. Physics, Chemistry and Technology.* 2016. Vol. 14, № 3. Special issue. P. 307–319.
- [ShV1990] *Shabat G. B., Voevodsky V. A.* Drawing Curves Over Number Fields // *Cartier P., Illusie L., Katz N. M., Laumon G., Manin Y. I., Ribet K. A.* (eds.) *The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics.* Vol 88. Boston, MA: Birkhäuser, 1990.
- [Tsf2023] *Tsfasman M.* To appear in the Notices of AMS.
- [Б1979] *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // *Известия АН СССР. Сер. Матем.* 1979. Т. 43, вып. 2. С. 267–276.
- [В1989] *Вейль Г.* Давид Гильберт и его математическое творчество. М.: Наука, 1989.
- [ВШ1989] *Воеводский В. А., Шабат Г. Б.* Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над числовыми полями // *ДАН СССР.* 1989. Т. 39, № 1. С. 38–41.
- [Д1984] *Дридзе Т. М.* Текстовая деятельность в структуре социальной коммуникации. М.: Наука, 1984.
- [ЗШ1973] *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // *ЖЭТФ.* 1973. Т. 64, № 5. С. 1627–1639.
- [ИШ1989] *Исковских В. А., Шафаревич И. Р.* Алгебраические поверхности // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фунд. направ.* Т. 35. М.: ВИНТИ, 1989. С. 131–263.
- [КШ2017] *Куликов Вик. С., Шабат Г. Б.* Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель // *Математическое просвещение.* Сер. 3. Вып. 22. М.: МЦНМО, 2017. С. 35–61.
- [К1965] *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // *Проблемы передачи информации.* 1965. Т. 1, № 1. С. 3–11.
- [ПГ1969] *Проблемы Гильберта.* М.: Наука, 1969.
- [С1989] *Старостин С. А.* Сравнительно-историческое языкознание и лексико-статистика // *Лингвистическая реконструкция и древнейшая история Востока.* М.: Наука, 1989. С. 3–39.
- [С2019] *Стюарт И.* Давид Гильберт. М.: Альпина нон-фикшн, 2019.

---

---

# Геометрия: классика и современность

---

---

## Кубические кривые и элементарная геометрия

А. А. Заславский, П. А. Кожевников

Иди, Малыш, поиграй в кубики.  
Не хочешь? Тогда реши  
кубическое уравнение.

*Л. Кэрролл. Разные разности*

Кубические кривые, или кубики, могут естественным образом появиться при рассмотрении вопросов из элементарной геометрии. Скажем, на объединение окружности и прямой или объединение трёх прямых можно смотреть как на вырожденные кубики. Кубики могут появиться при нахождении некоторых геометрических мест точек. Так, например, для фиксированного треугольника  $ABC$  множеством точек  $P$ , для которых треугольник  $ABC$  и педальный треугольник точки  $P$  перспективны, будет являться кубика Дарбу. Это лишь один экспонат из большой коллекции кубик, связанных с треугольником, — см., например, [1]. Для фиксированной четвёрки точек  $A, B, C, D$  множеством точек  $P$ , из которых отрезки  $AB$  и  $CD$  видны под равными направленными углами (т. е.  $\angle(PA, PB) = \angle(PD, PC)$ ), является так называемая кубика фокусов (isoptic cubic или Apollonius cubic) — см., например, [4] и [3].

Основная цель статьи — показать ряд примеров, когда привлечение кубик оказывается полезным при решении задач элементарной

геометрии. Главным образом будет использоваться сложение точек на кубике.

Трактовка некоторых геометрических фактов в терминах кубик оказывается естественной и красивой. Однако сделаем некоторое предостережение: хорошо работая «в общем случае», подход с кубиками может формально «давать сбой» в некоторых частных случаях (кратные точки пересечения и т. д.), и при завершении строгого доказательства для всех случаев могут потребоваться дополнительные соображения.

## § 1. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КУБИКАХ

Сделаем небольшой обзор понятий и утверждений, ограничиваясь теми, которыми будем пользоваться. (Для знакомства с кубиками можно также рекомендовать статью [5], а для более подробного знакомства с теорией алгебраических кривых подойдёт, например, книга [6]).

### АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Уравнение  $F = 0$ , где  $F = F(x, y)$  — многочлен степени  $d$ , задаёт на (комплексной) плоскости *алгебраическую кривую* порядка  $d$ . Так, алгебраические кривые степени 1 — это прямые. Алгебраические кривые порядка 2 называются *квадриками* или *кониками* (иногда под коникой понимают лишь невырожденную квадрику). Алгебраические кривые порядка 3 называются *кубическими кривыми*, или *кубиками*<sup>1)</sup>.

Также алгебраические кривые рассматриваются как множества точек на (комплексной) проективной плоскости; при этом уравнение  $F(x, y) = 0$  степени  $d$  в однородных координатах  $(x : y : z)$  переписывается в виде  $P(x, y, z) = 0$ , где  $P(x, y, z) = z^d F(x/z, y/z)$  — *однородный* многочлен степени  $d$ , так что  $F(x, y) = P(x, y, 1)$  — скажем, для  $P(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$  (окружность) имеем

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + axz + byz + cz^2.$$

Если многочлен  $P$  приводим, т. е. раскладывается в произведение многочленов  $Q$  и  $R$  меньшей степени, то алгебраическая кривая  $P = 0$

<sup>1)</sup> Везде ниже мы рассматриваем многочлены с вещественными коэффициентами, хотя подставлять в них можно и комплексные числа. Строго говоря, одной и той же кривой могут соответствовать разные многочлены. Например, уравнения  $x = 0$  и  $x^2 = 0$  определяют одну и ту же прямую. Чтобы избежать возникающих от этого затруднений, будем называть порядком кривой наименьшую из степеней задающих её многочленов.

называется *вырожденной* или *приводимой*; соответственно она является объединением кривых  $Q = 0$  и  $R = 0$ . Так, вырожденная кубика задаётся уравнением  $QL = 0$ , где  $Q$  и  $L$  — многочлены степени 2 и 1 соответственно; тем самым, вырожденная кубика является объединением прямой  $L = 0$  и квадрики  $Q = 0$  (которая, в свою очередь, может быть вырожденной, т. е. объединением двух прямых). В противном случае кривая называется *невырожденной* или *неприводимой*.

### ПЕРЕСЕЧЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Если кубика  $P = 0$  содержит прямую  $L = 0$ , то  $P$  делится на  $L$ . В противном случае кубика пересекает прямую не более, чем в трёх точках (можно сказать даже, что ровно трижды, с учётом кратности). Это частный случай следующей важной теоремы.

**ТЕОРЕМА БЕЗУ.** *Две алгебраические кривые порядка  $m$  и  $n$ , задаваемые взаимно простыми многочленами, пересекаются ровно в  $mn$  точках (комплексной проективной плоскости) с учётом кратности.*

Формальное определение кратности непросто. Отметим только, что случай касания кривых в их общей точке соответствует тому, что эта точка — точка пересечения кратности не меньше 2.

Из теоремы Безу следует, что любая коника пересекает невырожденную кубика в шести точках (с учётом кратности), а две различные невырожденные кубики имеют ровно девять общих точек (с учётом кратности).

Справедлива

**ТЕОРЕМА.** *Через 9 точек (проективной) плоскости можно провести хотя бы одну кубика.*

Эту теорему несложно доказать, рассмотрев соответствующую систему линейных уравнений. Отметим, что если данные 9 точек «достаточно общего» положения (скажем, если никакие 3 из данных точек не лежат на одной прямой и никакие 6 не лежат на одной конике), то кубика, проходящая через них, заведомо невырожденная.

Сформулируем ещё одну важную теорему.

**ТЕОРЕМА ШАЛЯ О 9 ТОЧКАХ НА КУБИКЕ.** *Пусть даны две кубики, пересекающиеся в девяти точках. Тогда любая кубика, проходящая через восемь из этих девяти точек, проходит и через девятую точку.*

В отличие от «обычной» девятки точек «общего положения», девятка точек из теоремы Шаля — *особенная*: через неё проходит не единственная кубика. Кубики, проходящие через такую особенную девятку, обра-

зуют пучок. Несложно понять, что в таком пучке найдутся невырожденные кубики. Отметим ещё, что в особенной девятке точек из теоремы Шаля никакие 4 точки не лежат на одной прямой и никакие 7 из этих 9 точек не лежат на одной конике (иначе вся прямая или коника принадлежала бы каждой кубике, содержащей эту девятку точек).

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ

Кубика может содержать так называемые *особые* точки (например, точка  $(0, 0)$  является точкой самопересечения кривой  $y^2 = x^3 + x^2$  и точкой возврата кривой  $y^2 = x^3$ ; формально, особые точки — это точки, в которых обнуляются частные производные задающего многочлена). Особыми могут быть и бесконечно удалённые точки, как, например, у кривой  $y = x^3$ . Кубику называют *неособой*, если она не содержит особых точек.

У кубики (заданной многочленом с вещественными коэффициентами) есть хотя бы одна асимптота (т. е. вещественная точка пересечения кубики с бесконечно удалённой прямой).

На невырожденной кубике есть *точки перегиба* — точки, в которых касательная к кубике имеет пересечение с кубикой кратности 3. Известно, что этих точек всегда 9, однако вещественными из них могут быть не более трёх. При этом девять точек перегиба разбиваются четырьмя способами на тройки коллинеарных, т. е. через каждую точку проходят четыре прямые, а на каждой из этих 12 прямых лежат три точки.

### СЛОЖЕНИЕ ТОЧЕК

Для неособых точек невырожденной кубики  $\mathcal{C}$  определена операция сложения точек. Эта операция зависит от фиксации точки<sup>2)</sup>  $O$  и состоит в следующем: пусть  $X$  — третья точка пересечения прямой  $AB$  с  $\mathcal{C}$ , тогда  $A + B$  — это третья точка пересечения прямой  $OX$  с  $\mathcal{C}$ . Сложение удовлетворяет условиям<sup>3)</sup> (i)–(iv):

- i) коммутативность:  $A + B = B + A$ ;
- ii) ассоциативность:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;
- iii) нейтральный элемент:  $O + A = A$ ;

<sup>2)</sup> В случае особой коники точка  $O$  должна быть неособой. С примером сложения точек на особой кубике можно ознакомиться в [5].

<sup>3)</sup> Это аксиомы абелевой группы. Ассоциативность сложения по сути является частным случаем теоремы Шаля, см. пример 3 ниже; остальные свойства установить достаточно несложно.

iv) противоположный элемент: для точки  $A$  найдётся точка  $-A$  такая, что  $(-A) + A = O$ .

Как следствие, имеется закон сокращения:  $A + C = B + C \Rightarrow A = B$ . Также однозначно определена разность  $A - B$  как единственное решение уравнения  $X + B = A$ . Полагают

$$nA = \underbrace{A + A + \dots + A}_n \quad \text{и} \quad -nA = \underbrace{-A - A + \dots - A}_n$$

(для натурального  $n$ ), а также  $0 \cdot A = O$ . Тогда для любых целых  $m$  и  $k$  выполнено  $(m + k)A = mA + kA$  и  $m(A + B) = mA + mB$ . Отметим, что из равенства  $nA = O$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) не следует  $A = O$ . Элемент  $A$  (т. е. точка  $A \in \mathcal{C}$ ) такой, что  $A \neq O$ ,  $2A \neq O$ , ...,  $(n - 1)A \neq O$ , но  $nA = O$ , называется элементом *порядка*  $n$ . Ниже нам встретятся элементы (точки) порядка 2. Для элемента  $C$  порядка 2 выполнено равенство  $C = -C$  (это эквивалентно равенству  $2C = O$ ). Известно, что в случае неособой кубики  $\mathcal{C}$  существуют ровно три элемента порядка 2, причём сумма любых двух из них равна третьему (т. е. если  $C_1, C_2, C_3$  — элементы порядка 2, то  $C_1 + C_2 = C_3$ ,  $C_2 + C_3 = C_1$ ,  $C_3 + C_1 = C_2$ ).

Удобно выбирать в качестве  $O$  точку перегиба кубики; далее предполагаем, что сделан именно такой выбор. Для этого случая известны следующие факты.

- 1)  $A + B + C = O$  тогда и только тогда, когда  $A, B, C$  лежат на одной прямой.
- 2)  $A + B + C + D + E + F = O$  тогда и только тогда, когда  $A, B, C, D, E, F$  лежат на одной конике.
- 3) Если алгебраическая кривая порядка  $d$  пересекает  $\mathcal{C}$  в  $3d$  (неособых) точках, то сумма этих точек равна  $O$ .

Для случая  $d = 3$  последний факт согласуется с теоремой Шаля о 9 точках на кубике: особенные девятки точек, получающиеся в пересечении двух кубик, — это девятки точек с суммой  $O$ .

## § 2. ПРИМЕРЫ ИЗ ГЕОМЕТРИИ КУБИК

В примерах ниже рассматриваются неособые точки на невырожденной кубике  $\mathcal{C}$ .

1. (а) Пучок прямых, пересекающихся на кубике.

Пусть выбираются пары точек  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Тогда условие  $X + Y = \text{const}$  эквивалентно тому, что прямые  $XY$  проходят через фиксированную точку на кубике  $\mathcal{C}$ .

Например, пусть  $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ . Каждой точке  $X \in \mathcal{C}$  ставим в соответствие точку  $Y$  — шестую (с учётом кратности) точку пересечения коники, проходящей через  $A, B, C, D, X$ , с  $\mathcal{C}$ . Тогда прямые  $XY$  проходят через фиксированную точку.

Доказательство. Действительно,  $X + Y + A + B + C + D = O$ , откуда  $X + Y = \text{const}$ .  $\square$

(б) Пучки обобщённых «антипараллелей».

Фиксируем  $P, C, D \in \mathcal{C}$ . Через  $P$  проводим всевозможные секущие и получаем пары точек пересечения  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Проводим через  $C, D, X, Y$  коники, пересекающие  $\mathcal{C}$  ещё в паре точек  $Z, T$ . Тогда прямые  $ZT$  проходят через фиксированную точку  $Q \in \mathcal{C}$ . (Фактически  $P$  и  $Q$  в этой конструкции равноправны.)

Доказательство. Действительно,

$$P + X + Y = O \quad \text{и} \quad C + D + X + Y + Z + T = O,$$

отсюда видим, что  $Z + T = \text{const}$ .  $\square$

2. (а) Проектирование с кубики на себя.

Фиксируем точку  $P \in \mathcal{C}$ . Для  $X \in \mathcal{C}$  пусть  $Y$  — третья точка пересечения прямой  $PX$  с кубикой  $\mathcal{C}$ . Инволюцию  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , сопоставляющую точке  $X$  точку  $Y$ , обозначим  $s_P$ . В терминах сложения точек:  $Y = s_P(X) = -P - X$ . Видим, что последовательное применение нечётно-го количества проектирований с кубики на себя (т. е. преобразований вида  $s_P$ ) есть преобразование того же вида. Применение же чётного количества проектирований с кубики на себя является преобразованием сдвига  $X \mapsto X + \text{const}$ .

Посмотрим, при каких условиях на различные точки  $P, P' \in \mathcal{C}$  преобразования перестановочны, т. е.  $s_P s_{P'} = s_{P'} s_P$ . Имеем

$$(s_P s_{P'})(X) = s_P(-P' - X) = -P + P' + X.$$

Аналогично  $(s_{P'} s_P)(X) = -P' + P + X$ . Видим, что  $s_P s_{P'} = s_{P'} s_P$  тогда и только тогда, когда  $P - P' = P' - P$ , или, эквивалентно,  $2(P - P') = O$ , т. е.  $P - P' = C$  — точка порядка 2. (Отметим геометрическую переформулировку условия  $2(P - P') = O$ , или  $2P = 2P'$ : касательные к кубике, проведённые в точках  $P$  и  $P'$ , пересекаются на кубике.)

Наоборот, если  $P, P' \in \mathcal{C}$  таковы, что  $P' - P = C$  — точка порядка 2, то  $s_P s_{P'} = s_{P'} s_P$ .

В таком случае для любой точки  $X \in \mathcal{C}$  имеем «процесс замыкания»

$$X \xrightarrow{s_P} Y \xrightarrow{s_{P'}} X' \xrightarrow{s_P} Y' \xrightarrow{s_{P'}} X.$$

## (б) Вписанный в кубик четырёхсторонник.

Рассмотрим теперь такую несложную, но важную конструкцию: пусть точки  $X, Y, X', Y', P = XY \cap X'Y'$  и  $P' = XY' \cap X'Y$  лежат на кубике  $\mathcal{C}$ . Тогда  $Y = -P - X$ ,  $X' = -P' - Y = (P - P') + X$ . Аналогично  $X' = (P' - P) + X$ , значит,  $P - P' = C$  — элемент порядка 2 (согласно предыдущему примеру (а)). При этом видим, что в парах  $(X, X')$ ,  $(Y, Y')$ , как и в паре  $(P, P')$ , точки получаются друг из друга прибавлением  $C$ .

## (в) Пересечения чевиан на кубике.

Следующая конструкция будет также важна для дальнейшего.

Пусть в треугольнике  $A_1A_2A_3$  на прямых  $A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2$  взяты точки  $X_1, X_2, X_3$  соответственно так, что чевианы  $A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3$  пересекаются в точке  $A_0$ , причём все точки  $X_1, X_2, X_3, A_0, A_1, A_2, A_3$  лежат на кубике  $\mathcal{C}$  (иначе говоря,  $A_0, A_1, A_2, A_3$  — четвёрка точек на  $\mathcal{C}$  такая, что три точки пересечения  $A_0A_1 \cap A_2A_3, A_0A_2 \cap A_1A_3, A_0A_3 \cap A_1A_2$  тоже лежат на кубике).

Из (б) получаем, что  $A_1 - A_0 = A_2 - A_3 = X_2 - X_3 = C_1$ , где  $C_1$  — некоторый элемент порядка 2. Аналогично  $A_2 - A_0 = A_3 - A_1 = X_3 - X_1 = C_2$  и  $A_3 - A_0 = A_1 - A_2 = X_1 - X_2 = C_3$ , где  $C_2$  и  $C_3$  — оставшиеся два элемента порядка 2.

Видим, что четвёрка<sup>4)</sup>  $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  совпадает с  $\{A_i, A_i + C_1, A_i + C_2, A_i + C_3\}$  для каждого  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . В согласии со сказанным выше видим, что  $C_1 + C_2 = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_3) = A_0 - A_3 = C_3$  (сумма двух элементов порядка 2 равна третьему).

Заметим, что  $2A_0 = 2A_1 = 2A_2 = 2A_3$ , и положим  $X_0 = -2A_i$ . (Равенства  $2A_i = -X_0$  геометрически будет означать, что касательные к  $\mathcal{C}$ , проведённые в точках  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , пересекают кубик в одной и той же точке  $X_0$ .) Далее,  $X_0 + C_1 = -2A_0 + C_1 = -A_0 - A_1 = X_1$ , и аналогично  $X_0 + C_2 = X_2$  и  $X_0 + C_3 = X_3$ , так что  $X_0$  дополняет тройку  $\{X_1, X_2, X_3\}$  до четвёрки  $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ , равной  $\{X_i, X_i + C_1, X_i + C_2, X_i + C_3\}$  для каждого  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Наоборот, всю эту конструкцию можно начать с точки  $X_0 \in \mathcal{C}$ : рассмотрим точки  $X_i = X_0 + C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а также точки  $A_j$  такие, что  $2A_0 = -X_0$  и  $A_i = A_0 + C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (вспомним, что геометрически точки  $A_i$  — точки касания касательных, проведённых к  $\mathcal{C}$  из точки  $X_0$ ). Легко проверить, что тогда  $X_1 + A_0 + A_1 = X_1 + A_2 + A_3 = O$ , значит,  $X_1 = A_0A_1 \cap A_2A_3$ . Аналогично  $X_2 = A_0A_2 \cap A_3A_1$  и  $X_3 = A_0A_3 \cap A_1A_2$ .

<sup>4)</sup> В терминах теории групп такая четвёрка — это смежный класс по подгруппе  $\{O, C_1, C_2, C_3\}$ .

Если в конструкции зафиксированы  $P = X_1$  и  $P' = X_2 = X_1 + C_3$ , то обязательно  $\{X_0, X_3\} = \{P + C_1, P + C_2\}$  (здесь  $C_1$  и  $C_2$  равноправны), и для каждой из двух возможностей  $X_0 = P + C_1$ ,  $X_0 = P + C_2$  конструкция восстанавливается однозначно.

### 3. Девять точек на двух тройках прямых, или «обобщённая теорема Паскаля — Паппа».

**ТЕОРЕМА.** Пусть восемь из девяти точек  $1, 2, 3, 4, 5, 6, A = 12 \cap 45, B = 23 \cap 56, C = 34 \cap 61$  лежат на кубике  $\mathcal{C}$ . Тогда и девятая точка — тоже.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вместо 1 будем писать  $X_1$  и т. д. Пусть кубика  $\mathcal{C}$  проходит через точки  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, A, B$ . Пусть прямые  $X_3X_4$  и  $X_6X_1$  пересекают  $\mathcal{C}$  в третий раз в точках  $C'$  и  $C''$ . Покажем, что  $C' = C''$ , отсюда будет следовать нужное утверждение. Имеем

$$X_1 + X_2 + A = O, \quad X_5 + X_6 + B = O, \quad X_3 + X_4 + C' = O.$$

Сложив, получим:

$$C' = -(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + A + B).$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому же выражению для  $C''$ . Отсюда  $C' = C'' = C$  (при этом данные 9 точек образуют особенную девятку).  $\square$

Несложно понять равноправие троек  $(1, 3, 5)$ ,  $(2, 4, 6)$  и  $(A, B, C)$  и переформулировать теорему так.

Пусть две тройки прямых пересекаются в девяти точках. Тогда если кубика  $\mathcal{C}$  проходит через восемь из них, то проходит и через девятую.

В такой переформулировке видно, что это частный случай теоремы Шаля для двух вырожденных кубик (являющихся объединением троек прямых).

Ещё одна переформулировка: для любых точек  $A, B, C$  на кубике композиция  $s_C s_B s_A s_C s_B s_A$  равна тождественному преобразованию.

Обычная теорема Паскаля получается, когда  $\mathcal{C}$  является объединением квадрики, на которой лежат точки  $1, 2, 3, 4, 5, 6$ , и прямой, на которой лежат  $A, B, C$ . Теорема Паппа — частный случай, когда квадрика — это пара прямых, одна из которых содержит точки  $1, 3, 5$ , а другая —  $2, 4, 6$ .

### 4. Теорема о трёх кониках, или «обобщённые радикальные оси».

Если три коники проходят через две данные точки, то три прямые, соединяющие пары остальных общих точек каждых двух коник, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть  $C$  и  $D$  — общие точки трёх коник, а  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  — оставшиеся две точки пересечения коник с номерами  $i$  и  $j$ . Через эти 8 точек проведём кубику. Так как  $C, D, A_{12}, B_{12}, A_{13}, B_{13}$  лежат на одной конике, их сумма равна  $O$ . Тогда сумма всех восьми рассматриваемых точек равна  $A_{23} + B_{23}$ . Аналогично она равна  $A_{12} + B_{12} = A_{13} + B_{13}$ . Из равенств  $A_{12} + B_{12} = A_{13} + B_{13} = A_{23} + B_{23}$  следует, что прямые  $A_{12}B_{12}, A_{13}B_{13}$  и  $A_{23}B_{23}$  пересекают кубику в третий раз в одной и той же точке. (Причём эта точка дополняет данные 8 точек до особенной девятки.)  $\square$

### 5. (а) Центральные кубики.

Пусть зафиксированы треугольник  $XYZ$  и точка  $T$ . Рассматриваем пары изогонально сопряжённых<sup>5)</sup> точек  $D, D'$ .

Множество точек  $D$ , для которых прямая  $DD'$  проходит через точку  $T$ , является кубикой. Точку  $T$  называют центр (pivot), а кубику — центральной изогональной (pivotal isogonal)<sup>6)</sup>. В том, что это кубика, несложно убедиться, записав в трилинейных (или других однородных) координатах условие коллинеарности точек  $D(x : y : z), D'(yz : zx : xy)$  и фиксированной точки  $T$ .

Изогональная центральная кубика  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(XYZ, T)$  проходит через  $X, Y, Z$ , центры  $I_0, I_1, I_2, I_3$  вписанной и невписанных окружностей (т. е. неподвижные точки изогонального сопряжения), точку  $T$  и её изогонально сопряжённую точку  $T'$ . При этом (поскольку  $I_i = I'_i$ ), касательные к кубике, проведённые в точках  $I_i$ , пересекают кубику в точке  $T$ . Таким образом, ситуация полностью согласуется с конструкцией из примера 2 (в): точки  $T, X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3$  соответствуют точкам  $X_0, X_1, X_2, X_3, A_0, A_1, A_2, A_3$  из примера 2 (в).

### (б) Пучки центральных кубик.

На произвольной прямой  $l$ , не проходящей через  $X, Y, Z$ , есть пара изогонально сопряжённых точек  $D, D'$  (это точки пересечения прямой  $l$  с её образом при изогональном сопряжении). Тогда все центральные изогональные кубики  $\mathcal{C}(XYZ, T)$ , где  $T \in l$ , проходят через

<sup>5)</sup> Вместо изогонального сопряжения здесь можно взять и другое сопряжение (проективно эквивалентное изогональному) относительно треугольника, например изотомическое сопряжение. Такое сопряжение однозначно задаётся (при фиксированном треугольнике  $XYZ$ ) любой из его четырёх неподвижных точек  $S$ , иногда такое сопряжение называют  $S$ -сопряжением.

<sup>6)</sup> Для произвольного  $S$ -сопряжения относительно треугольника  $XYZ$  можно говорить о центральной  $S$ -кубике  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_S(XYZ, T)$ .

девять точек  $X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3, D, D'$ , так что эти кубики образуют пучок (и значит, эта девятка точек — особенная). Например, если  $\ell$  — прямая Эйлера треугольника  $XYZ$  (в таком случае  $D$  и  $D'$  — ортоцентр и центр описанной окружности), то пучок  $\mathcal{C}(XYZ, T)$ , где  $T \in \ell$ , называют эйлеровым (Euler pencil).

### § 3. Циркулярные кубики

Рассмотрим точки  $J_1(1 : i : 0)$  и  $J_2(1 : (-i) : 0)$  комплексной проективной плоскости. Эти точки называются *круговыми*.

Легко видеть, что любая окружность проходит через них. Наоборот, коника, проходящая через  $J_1$  и  $J_2$ , является окружностью.

Кубика, проходящая через круговые точки, называется *циркулярной*. Скажем, объединение окружности и прямой — вырожденная циркулярная кубика.

Получается, что циркулярная кубика (задаваемая многочленом с вещественными коэффициентами) пересекает бесконечно удалённую прямую в точках  $J_1, J_2$  и ещё одной точке, которая соответствует асимптоте. Эту точку далее будем обозначать  $J$ , так что  $J + J_1 + J_2 = O$ .

Пусть четыре точки  $A, B, C, D$  лежат на невырожденной циркулярной кубике и отличны от  $J_1$  и  $J_2$ . Из теоремы о 6 точках на конике следует, что они лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда  $A + B + C + D + J_1 + J_2 = O$  или, эквивалентно,  $A + B + C + D = J$ .

#### Примеры из геометрии циркулярных кубик

Везде в примерах ниже, если не оговорено противное,  $\mathcal{C}$  будет обозначать циркулярную невырожденную кубику.

6. *Точка Микеля четырёхсторонника, вписанного в кубику.*

Пусть точки  $A, B, A', B' \in \mathcal{C}$  и при этом  $P = AB \cap A'B'$  и  $AB' \cap A'B$  также лежат на  $\mathcal{C}$ .

Тогда, согласно примеру 2 (б), для некоторого элемента второго порядка  $C$  выполнено  $A' = A + C$ ,  $B' = B + C$ ,  $P' = P + C$ . Окружность  $(ABP')$  пересекает  $\mathcal{C}$  в точке  $M$  такой, что  $A + B + P' + M = J$ . Последнее, в силу  $P' = P + C$  и коллинеарности точек  $A, B, P$ , запишется как  $A + B + P + C + M = J$ , т. е.  $C + M = J$  или  $M = J + C$ . Аналогично  $M = J + C$  лежит на окружностях  $(AB'P)$ ,  $(A'BP)$  и  $(A'B'P')$ , т. е.  $M = J + C$  является точкой Микеля нашего четырёхсторонника.

Обратим внимание на то, что  $M$  зависит только от  $J$  и элемента второго порядка  $C$ .

## 7. (а) Пучки прямых и окружностей.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Через фиксированные точки  $A, B \in \mathcal{C}$  проводим всевозможные окружности, пересекающие  $\mathcal{C}$  в точках  $X$  и  $Y$  (помимо точек  $A, B, J_1, J_2$ ). Тогда всевозможные прямые  $XY$  проходят через одну точку (лежащую на  $\mathcal{C}$ ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,  $A + B + X + Y = J$ , тем самым  $X + Y = \text{const}$ .  $\square$

Конечно, это утверждение можно переформулировать разными способами, например, так: если зафиксированы точки  $A, P \in \mathcal{C}$  и через  $P$  проводят прямые, пересекающие  $\mathcal{C}$  в точках  $X, Y$ , то окружности  $(AXY)$  проходят через одну точку, лежащую на  $\mathcal{C}$  (помимо  $A, J_1, J_2$ ).

Следующая задача элементарной геометрии представляет собой тот же факт для вырожденной кубики. Пусть через данную точку  $P$  проводятся прямые, пересекающие данную окружность  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ . Тогда всевозможные окружности  $(AXY)$ , где  $A$  — фиксированная точка, проходят через одну точку (лежащую на прямой  $AP$ ). (Конечно, эту задачу несложно решить геометрически, используя степень точки.)

## (б) Пучки «антипараллелей» для циркулярной кубики.

Пусть  $P$  и  $Q$  — точки на циркулярной кубике  $\mathcal{C}$ . Через  $P$  проводим всевозможные секущие и получаем пары точек пересечения  $X, Y$ . Через  $Q$  проводим всевозможные секущие и получаем пары точек пересечения  $Z, T$ .

Тогда если точки  $X, Y, Z, T$  лежат на одной окружности для одного положения секущих, то это будет выполнено и для любого положения секущих. Причём это происходит тогда и только тогда, когда  $PQ$  параллельна асимптоте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из  $P + X + Y = O$  и  $Q + Z + T = O$  следует  $X + Y + Z + T = J$  тогда и только тогда, когда  $P + Q + J = O$ .  $\square$

## (в) Антипараллели относительно коники.

Пусть окружность пересекает конику в точках  $A, B, C, D$ . Пусть прямая, параллельная  $AB$ , пересекает конику в точках  $X$  и  $Y$ , а прямая, параллельная  $CD$ , пересекает конику в точках  $Z$  и  $T$ . Тогда точки  $X, Y, Z, T$  лежат на одной окружности.

Можно рассмотреть (циркулярную) кубику — объединение коники и бесконечно удалённой прямой. Тогда эту конструкцию можно трактовать как частный случай пункта 7 (б) (с бесконечно удалёнными точками  $P$  и  $Q$ ).

Можно показать, что направления *антипараллелелей*  $AB$  и  $CD$  симметричны относительно оси симметрии коники.

### 8. Центры инверсий на циркулярной кубике.

В сюжете 7 (б) остановимся на частном случае  $P = Q$ . Проведём через  $P$  две (различные) секущие, пересекающие кубик в точках  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ ,  $T$ . Видим (из общего случая или из равенства  $X + Y + Z + T = J$ ), что  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда  $2P + J = O$  (геометрически: касательная, проведённая в  $P$ , параллельна асимптоте). Наоборот, если  $P$  — одна из четырёх точек с условием  $2P + J = O$ , то для любой пары секущих точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  лежат на одной окружности.

Последнее условие, в силу независимости произведения  $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY}$  от выбора секущей, можно переформулировать так: центральное проектирование  $s_P$  является ограничением на  $\mathcal{C}$  инверсии с центром  $P$ . При этом неподвижные точки  $s_P$  (т. е. точки касания касательных к  $\mathcal{C}$ , проведённых из  $P$ ) лежат на окружности этой инверсии.

Рассмотрим на кубике все четыре точки — решения уравнения  $2P + J = O$  (в которых касательная параллельна асимптоте). Назовём эти точки  $I_0, I_1, I_2, I_3$ . Согласно 2 (в), разность между любыми двумя из этих точек — элемент порядка 2, т. е.

$$\{I_0, I_1, I_2, I_3\} = \{I_i, I_i + C_1, I_i + C_2, I_i + C_3\}.$$

Рассмотрим для одной из точек  $I_i$ , скажем, для  $I_0$ , точки касания  $K_0, K_1, K_2, K_3$  касательных, проведённых к  $\mathcal{C}$  из  $I_0$  (т. е.  $K_i$  — решения уравнения  $2K + I_0 = O$ ). Как показано выше, точки  $K_i$  лежат на окружности  $\omega_0$ , так что инверсия  $i_0$  относительно этой окружности переводит  $\mathcal{C}$  в себя. Из 2 (в) получаем (полагая в обозначениях п. 2 (в)  $X_0 = I_0$ ), что точки пересечения  $K_0K_1 \cap K_2K_3$ ,  $K_0K_2 \cap K_1K_3$ ,  $K_0K_3 \cap K_2K_1$  — это  $I_1, I_2, I_3$ . По известной теореме Брокера для вписанного четырёхугольника четвёрка  $I_0, I_1, I_2, I_3$  является ортоцентрической.

Как мы видели в примере 2 (в), вершины

$$X = I_0I_1 \cap I_2I_3, \quad Y = I_0I_2 \cap I_1I_3, \quad Z = I_0I_3 \cap I_2I_1$$

ортотреугольника автоматически лежат на данной кубике (это точки  $J + C_1, J + C_2, J + C_3$ ). Для радиуса  $R_0$  инверсии  $i_0$  получаем

$$R_0^2 = \overrightarrow{I_0I_1} \cdot \overrightarrow{I_0X} = \overrightarrow{I_0I_2} \cdot \overrightarrow{I_0Y} = \overrightarrow{I_0I_3} \cdot \overrightarrow{I_0Z}.$$

В частности, если  $I_0$  — внутри треугольника  $I_1I_2I_3$ , то  $\omega_0$  — окружность мнимого радиуса.

Приведём ещё одно, «координатное» объяснение того факта, что  $I_0, I_1, I_2, I_3$  — ортоцентрическая четвёрка.

Направим ось ординат системы координат параллельно асимптоте данной кубики и выберем начало координат так, чтобы данная циркулярная кубика задавалась уравнением

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)x + ax^2 + bx + cy + d = 0.$$

Касательные из бесконечно удалённой точки  $J$  будут параллельны оси  $Oy$ , поэтому координаты точек касания  $I_0, I_1, I_2, I_3$  удовлетворяют уравнению  $F'_y = 2xy + c = 0$ , т. е. точки  $I_0, I_1, I_2, I_3$  лежат на прямоугольной гиперболе. Исключив из двух уравнений  $y$ , получим уравнение четвёртой степени относительно  $x$ , произведение корней которого равно  $-c^2/4$ . Несложная выкладка показывает, что это условие эквивалентно перпендикулярности хорд гиперболы  $I_0I_1 \perp I_2I_3$  (или  $I_0I_2 \perp I_1I_3$ ). Утверждение доказано.

Заметим ещё, что если некоторая инверсия на плоскости переводит  $\mathcal{C}$  в себя, то центр инверсии должен принадлежать  $\mathcal{C}$  (как образ бесконечно удалённой точки  $J$ ). Видим, что существует в точности 4 инверсии (с центрами в указанных выше точках  $I_i$ ), переводящие  $\mathcal{C}$  в себя. Композицией пары таких инверсий является инверсия+ (осевая) симметрия, которая будет фигурировать и в примере 13 (б).

Отметим также, что образ циркулярной кубики при инверсии с центром на ней тоже будет циркулярной кубикой. (Понять это можно, переместив центр инверсии в начало координат и задав кубику уравнением  $(x^2 + y^2)L_1 + Q + L_2 = 0$ , где  $L_1, L_2$  — однородные линейные многочлены, а  $Q$  — однородный квадратичный многочлен.)

### 9. Изоциркулярное сопряжение.

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Пусть точки  $A, B, C, D \in \mathcal{C}$  таковы, что точка  $P = AB \cap CD$  тоже лежит на  $\mathcal{C}$ . Тогда для  $X \in \mathcal{C}$  окружности  $(ABX)$  и  $(CDX)$  вторично пересекаются в точке  $Y \in \mathcal{C}$ . При этом радикальные оси  $XY$  пересекаются в одной точке  $Q$  (лежащей на  $\mathcal{C}$ ) такой, что прямая  $QP$  параллельна асимптоте.

**Доказательство.** Имеем  $A+B+P=C+D+P=O$ . Окружность  $(ABX)$  пересекает  $\mathcal{C}$  ещё раз в точке  $Y$  такой, что  $A+B+X+Y=J$ . Поскольку  $A+B=C+D$ , в этой же точке пересекает  $\mathcal{C}$  и окружность  $(CDX)$ .

Далее, равенство  $X+Y+(A+B-J)=O$  означает, что прямая  $XY$  пересекает кубику в фиксированной точке  $Q=A+B-J=-P-J$ . Полученное равенство  $Q+P+J=O$  показывает, что прямая  $QP$  параллельна асимптоте.  $\square$

Конечно, доказанное утверждение согласуется с примером 7 (б).

Для фиксированных точек  $A, B, C, D$  точке  $X$  можно поставить в соответствие точку  $Y$  вторичного пересечения окружностей  $(ABX)$  и  $(CDX)$ . В [3] такое соответствие обозначалось  $f_{AB,CD}$  и называлось *изоциркулярным сопряжением*. Так, утверждение выше означает, что сужение  $f_{AB,CD}$  на  $\mathcal{C}$  совпадает с проектированием  $s_Q$ .

#### 10. Пересечение окружностей Микеля.

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Пусть точки  $A', B', C'$  лежат на прямых  $BC, CA, AB$  соответственно. Пусть  $\mathcal{C}$  — любая циркулярная кубика, проходящая через точки  $A, B, C, A', B', C'$ . Тогда  $\mathcal{C}$  содержит точку  $T$  пересечения окружностей  $(AB'C')$ ,  $(BC'A')$ ,  $(CA'B')$ .

(Иначе говоря,  $T$  дополняет  $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$  до особенной девятки точек.)

Отметим, что в случае бесконечно удалённой точки  $C$  получается конструкция «с антипараллелями»:  $AB' \parallel BA'$ , а  $T$  лежит на прямой  $A'B'$  и окружностях  $(AB'C')$ ,  $(BC'A')$ .

Случай коллинеарных точек  $A', B', C'$  согласуется с примером 6.

**Доказательство.** Мы находимся в условиях предыдущего примера 9:  $AB' \cap BA' = C \in \mathcal{C}$ , поэтому окружности  $(AB'C')$  и  $(BC'A')$  пересекают кубику в одной и той же точке. Через эту же точку пройдёт и пара окружностей  $(AB'C')$  и  $(CA'B')$ .  $\square$

**Доказательство-2 (ТЕОРЕМА ШАЛЯ).** Пусть окружности  $(AB'C')$ ,  $(A'B'C)$  и  $(A'BC')$  вторично пересекаются в точке  $T$ . Рассмотрим кубику  $g_1$ , являющуюся объединением окружности и прямой  $(AB'C') \cup BC$ , аналогично положим  $g_2 = (A'BC') \cup CA$ . Каждая из трёх кубик  $g_1, g_2, \mathcal{C}$  проходит через 8 точек  $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$ , а кроме того,  $g_1$  и  $g_2$  проходят через  $T$ . Отсюда следует, что и  $\mathcal{C}$  проходит через  $T$ .  $\square$

#### 11. Теорема Клиффорда: конструкция из 8 окружностей.

Пусть, как и в примере 6, точки  $A, B, A', B', P = AB \cap A'B', P' = AB' \cap A'B$  лежат на кубике  $\mathcal{C}$ , так что  $A' = A + C, B' = B + C, P' = P + C$  для элемента  $C$  порядка 2.

Тогда согласно примеру 9 для любой точки  $X \in \mathcal{C}$  точка  $Y$  вторичного пересечения окружностей  $(ABX)$  и  $(A'B'X)$  лежит на кубике  $\mathcal{C}$  и такова, что  $X + Y + Q = O$ , где  $Q = -P - J$ . Аналогично точка  $Y'$  вторичного пересечения окружностей  $(AB'X)$  и  $(A'BX)$  лежит на кубике  $\mathcal{C}$  и такова, что  $X + Y' + Q' = O$ , где  $Q' = -P' - J$ . Видим, что  $Q' = -P - C - J = Q + C$  (а следовательно, в силу  $Y + Q = Y' + Q'$  выполнено  $Y' = Y + C$ ). Согласно примеру 2 (а) прямые  $QY'$  и  $Q'Y$  пересекутся

на  $\mathcal{C}$  в точке  $X' = -Q - Y + C = X + C$ , в которой в силу примера 9 также пересекаются пары окружностей  $(ABY')$ ,  $(A'B'Y')$  и  $(AB'Y)$ ,  $(A'BY)$ .

По сути в полученной конструкции четырёхсторонники с вершинами  $A, B, A', B', P, P'$  и  $X, Y, X', Y', Q, Q'$  равноправны.

Из рассуждений выше легко получить доказательство теоремы, которую иногда называют *теоремой Клиффорда*.

**ТЕОРЕМА КЛИФФОРДА.** *В четырёхугольнике  $ABCD$  точки  $E$  и  $F$  таковы, что окружности  $(ABE)$ ,  $(CDE)$ ,  $(BCF)$ ,  $(ADF)$  пересекаются в одной точке. Тогда окружности  $(ADE)$ ,  $(BCE)$ ,  $(ABF)$ ,  $(CDF)$  также пересекаются в одной точке.*

**Доказательство.** Рассмотрим (циркулярную) кубику, проходящую через 9 точек:  $A, B, A' = C, B' = D, J_1, J_2$ , точки  $P = AB \cap CD$ ,  $P' = BC \cap AD$  и точку  $X$  пересечения четырёх данных окружностей. Тогда, согласно проведённым выше рассмотрением, все окружности  $(ADE)$ ,  $(BCE)$ ,  $(ABF)$ ,  $(CDF)$  проходят через одну точку  $X'$  (такую, что  $X' = X + C_1$ , где  $C_1 = A - A' = B - B' = P - P'$  — элемент порядка 2).  $\square$

Конечно, есть и короткое геометрическое доказательство: используя инверсию, можно свести теорему Клиффорда к теореме о точке Микеля для четвёрки прямых.

Как отмечено в [3], теорему Клиффорда можно переформулировать как перестановочность изоциклических инволюций  $f_{AB,CD}$  и  $f_{BC,DA}$ .

## 12. Радикальные оси.

Теорема о трёх кониках из примера 4 в случае, когда общие точки коник — круговые точки  $J_1$  и  $J_2$ , превращается в теорему о радикальных осях трёх окружностей.

## 13. (а) Циркулярные центральные изогональные кубики.

Докажем следующую лемму.

**ЛЕММА.** *Круговые точки  $J_1$  и  $J_2$  изогонально сопряжены относительно любого треугольника  $XYZ$ .*

**Доказательство.** Круговые точки  $J_1$  и  $J_2$  — две точки пересечения окружности  $(XYZ)$  с бесконечно удалённой прямой. Но при изогональном сопряжении окружность  $(XYZ)$  и бесконечно удалённая прямая переходят друг в друга. А поскольку  $J_1$  не совпадает со своей изогонально сопряжённой точкой  $J'_1$ , единственная возможность:  $J'_1 = J_2$  и  $J'_2 = J_1$ . Это и требовалось установить.  $\square$

Из леммы и определения кубики  $\mathcal{C}(XYZ, T)$  (см. пример 4 (а)) следует, что  $J_1$  и  $J_2$  лежат на кубике  $\mathcal{C}(XYZ, T)$  тогда и только тогда, когда

$J_1, J_2, T$  лежат на одной прямой, т. е. когда  $T$  — бесконечно удалённая точка. Таким образом, верно следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Кубика  $\mathcal{C}(XYZ, T)$  циркулярна тогда и только тогда, когда  $T$  — бесконечно удалённая точка.

В терминологии примера 4 (б), в множестве кубик  $\mathcal{C}(XYZ, T)$  циркулярные кубики образуют пучок, определяемый условием  $T \in l$ , где  $l$  — бесконечно удалённая прямая, или, эквивалентно, пучок, задаваемый особенной девяткой точек  $X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3, J_1, J_2$ .

Оказывается, утверждение, приведённое выше, можно обратить следующим образом.

*Любая неособая циркулярная кубика может быть получена как  $\mathcal{C}(XYZ, J)$  (центральная изогональная кубика некоторого треугольника и бесконечно удалённой точки  $J$ ).*

**Доказательство.** Для данной кубики воспользуется конструкцией из примера 8:  $XYZ$  — ортотреугольник для ортоцентрической четвёрки  $I_0, I_1, I_2, I_3$ . Тогда  $I_0, I_1, I_2, I_3$  — центры вписанной и невписанных окружностей треугольника  $XYZ$ .

Остаётся заметить, что кубика  $\mathcal{C}(XYZ, J)$ , как и данная кубика, проходит через десять точек  $X, Y, Z, I_0, I_1, I_2, I_3, J, J_1, J_2$ . Значит, эти кубики совпадают.  $\square$

#### (б) Квартеты.

Пусть  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(XYZ, J)$ , где  $J$  — бесконечно удалённая точка. Изогональное сопряжение  $P \mapsto P'$  относительно  $XYZ$  задаётся через сложение точек:  $P + P' + J = O$ . Кроме того, как мы знаем,  $X = J + C_1$ ,  $Y = J + C_2$ ,  $Z = J + C_3$ , где  $C_i$  — точки порядка 2.

По произвольной точке  $D \in \mathcal{C}$  определим *квартет*<sup>7)</sup>  $A, B, C, D$  точек на кубике как  $A = D + C_1$ ,  $B = D + C_2$ ,  $C = D + C_3$ , так что любая пара точек квартета отличается на элемент порядка 2.

Аналогично рассмотрим квартет  $A', B', C', D'$  для изогонально сопряжённой точки  $D'$ . Точки в парах  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$  на самом деле будут изогонально сопряжены: скажем,

$$A + A' + J = D + C_1 + D' + C_1 + J = D + D' + J = O.$$

Заметим следующие тройки коллинеарных точек:  $(X, D, A')$ ,  $(X, D', A)$ ,  $(X, B, C')$ ,  $(X, B', C)$  и аналогичные тройки с участием  $Y$  и  $Z$ . Действи-

<sup>7)</sup> Отметим, что аналогичным образом квартеты можно определять и для произвольных кубик  $\mathcal{C}(XYZ, T)$  из примера 4.

тельно, скажем,

$$X + B + C' = J + C_1 + B + B' + C_1 = J + B + B' = O.$$

Далее, четыре точки  $Y, Z, D', A$  лежат на одной окружности (то же верно для аналогичных четвёрок). Действительно,

$$Y + Z = J + C_2 + J + C_3 = J + J + C_1 = J + X,$$

поэтому  $Y + Z + D' + A = J + X + D' + A$ , что равно  $J$ .

Геометрически получается следующая картина: есть 4 пары точек  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$ , изогонально сопряжённых относительно  $XYZ$ , причём  $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ . При этом пары  $(A, D'), (D, A')$  и т. д. оказываются на одних и тех же изогоналях. Из наличия прямой  $XAD'$  и окружности  $(YZAD')$  легко вывести подобие (с сохранением ориентации)  $XYD \sim XZA$ , поэтому точки в паре  $A, D$  (и аналогично  $B, C$ ) переходят друг в друга инверсией + симметрией  $\iota_X$  с центром  $X$ , меняющей местами  $Y$  и  $Z$ . Получается, что инволюция  $D \mapsto D + C_1$  является сужением на кубик инверсии + симметрии  $\iota_X$  (аналогичное верно для инволюций  $D \mapsto D + C_2$  и  $D \mapsto D + C_3$ ).

Свойствам рассматриваемых квартетов был посвящён проект ЛКГТ в 2010 г. [2].

В дополнение отметим ещё конкурентности тройки прямых  $DA, D'A', BC$  и аналогичных троек. Эти конкурентности не объясняются с помощью кубик (точки пересечения не лежат на  $\mathcal{C}$ ), но здесь работает следующее геометрическое соображение: пары точек  $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$  — пары фокусов гомотетичных коник, вписанных в треугольник  $XYZ$ . Поэтому тройки прямых  $DA, D'A', BC$  и т. д. пересекаются в центрах гомотетии (отличных от  $X, Y, Z$ ) пар указанных коник.

#### 14. (а) Кубика фокусов.

Геометрическим местом фокусов коник, касающихся четырёх прямых  $AB, BA', A'B', B'A$  (иначе говоря, коник, «вписанных» в  $ABA'B'$ ), является кубика  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(ABA'B')$ , которую называют кубикой фокусов четырёхугольника  $ABA'B'$  (или кубикой фокусов, порождённой парами  $A, A'$  и  $B, B'$ ). Многие свойства кубик фокусов собраны в [3], [4]. Условие  $F \in \mathcal{C}$  эквивалентно:

(i) равенству углов  $\angle(FA, FB) = \angle(FB', FA')$ ;

(ii) существованию точки  $F'$ , изогонально сопряжённой  $F$  относительно  $ABA'B'$ , т. е. относительно каждого из углов четырёхугольника  $ABA'B'$  (в таком случае  $F$  и  $F'$  — фокусы одной и той же вписанной коники);

(iii) принадлежности одной окружности проекций  $F$  на прямые, содержащие стороны  $ABA'B'$  (тогда на этой окружности лежат и проекции  $F'$  на те же прямые).

Известно, что  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(ABA'B')$  проходит через точки  $A, A', B, B'$ , а также точки  $P = AB \cap A'B'$  и  $P' = AB' \cap A'B$  (последнее вытекает, например, из *теоремы об изогоналях*, согласно которой условия  $\angle(FA, FB) = \angle(FB', FA')$  и  $\angle(FA, FP) = \angle(FP', FA')$  эквивалентны). Согласно примеру 2 (б) есть элемент  $C$  порядка 2 такой, что  $C = A - A' = B - B' = P - P'$ .

Известно, что середины отрезков, соединяющих пары фокусов  $F$  и  $F'$ , лежат на прямой Ньютона — Гаусса (проходящей через середины отрезков  $AA', BB'$  и  $PP'$ ). Асимптота кубики  $\mathcal{C}$  параллельна прямой Ньютона — Гаусса.

Далее,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(AA'BB')$  — циркулярная кубика. Действительно, по лемме из примера 13 (а) круговые точки  $J_1$  и  $J_2$  изогонально сопряжены относительно треугольника, определяемого любой тройкой сторон четырёхсторонника  $AA'BB'$ . Значит, согласно примеру 6 кубика  $\mathcal{C}$  проходит через точку Микеля  $M$ , причём  $M = J + C$ .

Можно показать, что любая пара фокусов  $F$  и  $F'$  связана равенством  $F' = F + C$ . (Это согласуется с примером 11, поскольку геометрически переход от  $F$  к  $F'$  может быть выполнен как композиция изоциркулярных преобразований:  $F' = f_{AB, A'B'}(f_{AB', A'B}(F))$ .) В частности,  $J_2 = J_1 + C$ , откуда

$$2J_1 = 2J_2 = J_1 + J_2 + C = -J + C = -M.$$

Геометрическая трактовка последнего равенства: касательные к  $\mathcal{C}$ , проведённые в  $J_1$  и  $J_2$ , пересекаются в точке  $M$ . Можно показать, что и наоборот, если для некоторой циркулярной кубики касательные, проведённые к ней в круговых точках, пересекаются на ней, то эта кубика является кубикой фокусов (см., например, [3].)

(б) «Транзит» пар фокусов.

Оказывается, кубика  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(AA'BB')$  может быть задана любой парой фокусов  $F, F'$  и  $G, G'$ :  $\mathcal{C}(AA'BB') = \mathcal{C}(FF'GG')$ , причём переход к парному фокусу на кубике  $\mathcal{C}(FF'GG')$  по-прежнему задаётся как  $X \mapsto X + C$ , где  $C$  — тот же элемент порядка 2. У этой «транзитивности»  $\mathcal{C}(AA'BB') = \mathcal{C}(FF'GG')$  имеется много следствий и содержательных частных случаев.

Например, если  $F, F'$  и  $G, G'$  — две пары фокусов коник, вписанных в  $ABA'B'$ , то, согласно примеру 6, четырёхсторонники  $ABA'B'$  и  $FGF'G'$  имеют одну и ту же точку Микеля.

Отметим, что эту конструкцию можно получить, стартовав с треугольника  $ABP'$ , для которого  $F, F'$  и  $G, G'$  — две пары фокусов вписанных в  $ABP'$  коник (т. е. изогонально сопряжённых точек). Тогда четвёртая общая касательная к этим коникам (помимо прямых  $AB, BP', P'A$ ) пересекает прямые  $AB, BP', P'A$  в точках  $P, A', B'$ , так что кубика фокусов  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(FF'GG')$  порождается любыми двумя парами из набора  $(F, F'), (G, G'), (FG \cap F'G', F'G \cap FG'), (A, A'), (B, B'), (P, P')$ .

Другой пример. Пусть  $ABA'B'$  — четырёхугольник, «описанный» вокруг окружности с центром  $I$ , так что прямые  $AB, BA', A'B', B'A$  равноудалены от  $I$ . Иначе говоря,  $I$  совпадает со своей изогонально сопряжённой точкой. Тогда то же должно выполняться и для четырёхугольников вида  $FF'GG'$ , где  $F, F'$  и  $G, G'$  — пары фокусов вписанных в  $ABA'B'$  коник. В частности, получается простое объяснение следующего известного утверждения.

**ТЕОРЕМА ГРЕЙВСА — ШАЛЯ.** Пусть  $A, B, A', B', P = AB \cap A'B', P' = A'B \cap AB'$  — вершины четырёхсторонника, «описанного» вокруг коники с фокусами  $F$  и  $F'$ . Тогда эквивалентны условия:

- (i) четырёхсторонник  $ABA'B'$  — «описанный» (вокруг окружности);
- (ii)  $A$  и  $A'$  лежат на одной конике с фокусами  $F$  и  $F'$ ;
- (iii)  $B$  и  $B'$  лежат на одной конике с фокусами  $F$  и  $F'$ ;
- (iv)  $P$  и  $P'$  лежат на одной конике с фокусами  $F$  и  $F'$ .

**Доказательство.** Заметим, что принадлежность пары  $A, A'$  (или  $B, B'$ , или  $P, P'$ ) конике с фокусами  $F, F'$  эквивалентна «описанности»  $AFA'F'$  (и то и другое условие переписывается в виде  $AF + AF' = A'F + A'F'$  или  $AF - AF' = \pm(A'F - A'F')$ ). Остаётся воспользоваться «транзитом»: если, скажем, четырёхсторонник  $ABA'B'$  — «описанный» вокруг окружности с центром  $I$ , т. е.  $I = I'$  для  $ABA'B'$ , то  $I = I'$  и для  $AFA'F'$  (или  $BFB'F'$ , или  $PP'F'F'$ ).  $\square$

(v) Кубики фокусов как центральные изогональные.

Покажем, что центральная изогональная кубика  $\mathcal{C}(XYZ, J)$  является кубикой фокусов тогда и только тогда, когда её бесконечно удалённая точка  $J$  лежит на одной из высот треугольника  $XYZ$ , т. е. асимптота (или параллельная ей прямая Ньютона — Гаусса) перпендикулярна одной из сторон треугольника  $XYZ$  (см. также [3]).

**Доказательство.** Пусть кубика  $\mathcal{C}(XYZ, J)$  является кубикой фокусов. Как мы видели, переход от фокуса к парному фокусу задаётся прибавлением фиксированного элемента порядка 2:  $F' = F + C$  (в частности, для круговых точек имеем  $J_2 = J_1 + C$ ).

Согласно примерам 2 (в) и 13 (а) тройка точек  $\{X, Y, Z\}$  получается из  $J$  прибавлением трёх элементов порядка 2:  $X = J + C_1$ ,  $Y = J + C_2$ ,  $Z = J + C_3$ . Для определённости пусть  $C = C_1$ . Пусть  $I_0, I_1, I_2, I_3$  — центры вписанной и невписанных окружностей треугольника  $XYZ$ . Как мы знаем,  $I_1 = I_0 + C$ ,  $I_3 = I_2 + C$ . Значит, наша кубика фокусов порождается парами  $(I_0, I_1)$  и  $(I_2, I_3)$ . Тогда прямая Гаусса проходит через середины отрезков  $I_0I_1$  и  $I_2I_3$  и, как несложно заметить, перпендикулярна  $YZ$  (является серединным перпендикуляром к  $YZ$ ).

Наоборот, пусть дана кубика  $\mathcal{C}(XYZ, J)$ , где  $J$  — бесконечно удалённая точка направления, перпендикулярного  $YZ$ . Тогда кубика фокусов, порождённая парами  $(I_0, I_1)$  и  $(I_2, I_3)$ , имеет 10 общих точек с  $\mathcal{C}(XYZ, J)$ :  $I_0, I_1, I_2, I_3, Y (= I_0I_2 \cap I_1I_3), Z (= I_0I_3 \cap I_1I_2), X$  (точка Микеля),  $J, J_1, J_2$ . Следовательно, эта кубика фокусов совпадает с  $\mathcal{C}(XYZ, J)$ .  $\square$

(г) *Специальные четырёхугольники, порождающие кубики фокусов.*

Порождающие кубики фокусов  $\mathcal{C}$  пары фокусов можно выбирать так, чтобы образованный ими четырёхугольник обладал какими-то хорошими свойствами. В предыдущем пункте (в) мы по сути задали кубики фокусов четырёхугольником с противоположными прямыми углами (это  $I_0YI_1Z$  в обозначениях пункта (в)).

Ниже увидим, что задающий кубики фокусов четырёхугольник можно выбрать вписанным с перпендикулярными диагоналями. Положим  $E = AA' \cap BB'$ . Легко видеть (из условия (i) или (iii) принадлежности точки кубике фокусов), что  $E \in \mathcal{C}(AA'BB')$  тогда и только тогда, когда  $AA' \perp BB'$ . Несложный счёт углов показывает, что в случае вписанного  $ABA'B'$  с перпендикулярными диагоналями  $AA'$  и  $BB'$  точка  $E$  изогонально сопряжена центру  $E'$  окружности  $(ABAB')$ .

Посмотрим на конструкцию из примера 8, и пусть в обозначениях этого примера переход к парному фокусу  $F \rightarrow F'$  задаётся прибавлением элемента  $C_1$ :  $F' = F + C_1$ . Тогда вписанный в окружность с центром  $I_0$  четырёхугольник  $K_0K_2K_1K_3$  — искомым. Действительно,  $K_0, K_1 = K_0 + C_1$  и  $K_2, K_3 = K_2 + C_1$  — две пары фокусов,  $K_0K_1 \cap K_2K_3 = I_1$ ,  $K_0K_2 \cap K_1K_3 = I_2$ ,  $K_0K_3 \cap K_2K_1 = I_3$ , и поскольку

$$K_0K_1 \cap K_2K_3 = I_1 \in \mathcal{C}(K_0K_2K_1K_3),$$

имеем  $K_0K_1 \perp K_2K_3$ .

Наоборот, пусть  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(ABA'B')$  для вписанного четырёхугольника  $ABA'B'$ , в котором  $E = AA' \cap BB' \in \mathcal{C}$ . Как мы видели в примере 8, из вписанности  $ABA'B'$  следует, что  $P = AB \cap A'B'$  — это одна из точек  $I_i$  (для которых касательная к  $\mathcal{C}$  параллельна асимптоте), скажем,  $P = I_2$ ,

тогда  $P' = I_2 + C_1 = I_3$ . Согласно примеру 2 (в), тогда  $E \in \{P + C_2, P + C_3\} = \{I_3, I_0\}$ , а  $E'$  — вторая точка из этой пары. При этом по фиксированным  $P, P', E$  четырёхугольник  $ABA'B'$  определяется единственным образом (с точностью до переобозначения вершин).

Получается, что есть в точности четыре порождающих кубикку вписанных четырёхугольника  $ABA'B'$  с перпендикулярными диагоналями — по одному четырёхугольнику для каждой из четырёх возможностей  $E' = I_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Однако (в согласии с обсуждением в примере 8) один из этих четырёхугольников будет мнимым (случай окружности мнимого радиуса), а ещё два — самопересекающимися (когда точка пересечения «диагоналей»  $E = AA' \cap BB'$  лежит вне окружности ( $ABA'B'$ )).

#### § 4. КУБИКИ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Большинство задач, которые здесь обсуждаются, имеют чисто геометрическое решение, и в некоторых случаях мы даём на этот счёт комментарий. Однако иногда рассуждения в терминах кубик кажутся наиболее естественными. Это можно отнести, например, к задачам 17, 19, 20, элементарные решения которых весьма сложны. В большинстве случаев трактовка с помощью кубик обнаруживалась гораздо позже появления формулировки задачи.

15. На прямых  $AB, BC, CA$  выбраны точки  $C', A', B'$ . Окружности  $(AB'C')$ ,  $(A'BC')$ ,  $(A'B'C)$  пересекаются в точке  $T$ . Тогда  $AA', BB', CC'$  конкурентны  $\Leftrightarrow$  окружности  $(AA'T), (BB'T), (CC'T)$  соосны (т. е. имеют, помимо  $T$ , ещё одну общую точку либо касаются в точке  $T$ ).

(П. Пучков, Е. Сапожников,  
XVII Южный математический турнир)

РЕШЕНИЕ. Проведём (циркулярную) невырожденную кубикку  $\mathcal{C}$  через 9 точек:  $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$  и точку  $X = AA' \cap BB'$ . Как мы видели выше (см. пример 10), кубика, проходящая через  $A, B, C, A', B', C', J_1, J_2$ , обязательно проходит через  $T$ . Тогда  $A + A' = B + B' = -X$ , поэтому окружности  $(AA'T)$  и  $(BB'T)$  ещё раз пересекают  $\mathcal{C}$  в одной точке  $Y$  такой, что  $A + A' + Y + T = J$ .

Условие конкурентности  $AA', BB', CC'$  записывается как

$$X + C + C' = O \quad \text{или} \quad A + A' = C + C'.$$

Условие соосности окружностей  $(AA'T), (BB'T), (CC'T)$  эквивалентно тому, что  $Y$  принадлежит окружности  $(CC'T)$ . Это записывается как  $C + C' + T + Y = J$ , или, эквивалентно,  $A + A' = C + C'$ .  $\square$

Отметим, что есть короткое геометрическое решение, использующее инверсию с центром  $T$ .

16. В шестиугольнике  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  никакие четыре вершины не лежат на одной окружности, а диагонали  $A_1A_4$ ,  $A_2A_5$  и  $A_3A_6$  пересекаются в одной точке  $X$ . Обозначим через  $l_i$  радикальную ось окружностей  $(A_iA_{i+1}A_{i-2})$  и  $(A_iA_{i-1}A_{i+2})$  (мы указываем индексы по модулю 6). Докажите, что прямые  $l_1, \dots, l_6$  пересекаются в одной точке.

(И. Фролов, финальный тур олимпиады им. Шарыгина 2019 г.)

РЕШЕНИЕ (Р. Кузнецов). Проведём (циркулярную) кубику  $\mathcal{C}$  через точки  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, X, J_1, J_2$ . Имеем  $A_1 + A_4 + X = A_2 + A_5 + X = A_3 + A_6 + X = O$ .

Как мы уже знаем из примера 9 выше, вторая точка  $B_i$  пересечения окружностей  $(A_iA_{i+1}A_{i-2})$  и  $(A_iA_{i-1}A_{i+2})$  лежит на  $\mathcal{C}$  и такова, что  $A_i + A_{i+1} + A_{i-2} + B_i = J$  или  $A_i - X + B_i = J$ .

Тогда  $A_i + B_i = X + J$  не зависит от  $i$ , т. е. прямые  $A_iB_i$  (это и есть нужные нам радикальные оси) проходят через одну и ту же точку  $Z$  на кубике  $\mathcal{C}$ .  $\square$

В дополнение заметим, что прямая  $XZ$  параллельна асимптоте  $\mathcal{C}$  — это вытекает из равенства  $Z + X + J = O$ .

Интересен частный случай этой задачи, когда  $A_1 = A, A_3 = B, A_5 = C$  — вершины произвольного треугольника  $ABC$ , а точки  $A_4 = A', A_6 = B', A_2 = C'$  симметричны вершинам  $A, B, C$  относительно  $BC, CA, AB$  соответственно. Тогда кубика  $\mathcal{C}$  из решения — это кубика Нейберга треугольника  $ABC$ , она же — центральная изогональная кубика  $\mathcal{C}(ABC, J)$ , где  $J$  — бесконечно удалённая точка прямой Эйлера. Тогда  $Z$  — третья (помимо  $H$  и  $J$ ) точка пересечения прямой Эйлера кубикой, т. е. в этом случае  $Z = O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

17. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $AD$  и  $BC$  — в точке  $Q$ . Точки  $E$  и  $F$  внутри четырёхугольника  $ABCD$  таковы, что окружности  $(ABE)$ ,  $(CDE)$ ,  $(BCF)$ ,  $(ADF)$  пересекаются в одной точке  $K$ . Докажите, что окружности  $(PKF)$  и  $(QKE)$  вторично пересекаются на прямой  $PQ$ .

(П. Кожевников, отбор на IMO-2020)

РЕШЕНИЕ (Д. Демин). Так же, как в доказательстве теоремы Клиффорда (см. пример 11), рассмотрим (циркулярную) невырожденную кубику, проходящую через 9 точек  $A, B, C, D, P, Q, J_1, J_2, K$ . Так как  $A + B = C + D = -P$ , окружности  $(ABK)$  и  $(CDK)$  пересекают кубику

в одной и той же точке  $E = -(A + B) - K + J$ . Аналогично  $F$  лежит на кубике и  $F = -(A + D) - K + J$ . Прямая  $PQ$  пересекает кубику повторно в точке  $-P - Q$ . Эта точка лежит на окружности  $(QKE)$ , так как  $(-P - Q) + Q + K + E - J = -P - (A + B) = O$ .

Аналогично эта точка лежит на окружности  $(PKF)$ .  $\square$

Отметим, что «переброска вписанных углов» позволяет переформулировать данную задачу в разных формах, например, в данной конструкции можно показать, что  $\angle AFQ - \angle CEP = \angle ABC$ .

18. (а) Внутри данного выпуклого четырёхугольника, отличного от параллелограмма, выбираются пары точек  $X, Y$  такие, что  $\angle AXB = \angle AYB = \angle CXD = \angle CYD$ . Докажите, что прямые  $XY$  проходят через фиксированную точку  $T$ .

(См.: Берлов С., «Квант», № 1, 2018 г., с. 20, задача M2497.)

(б) При этом прямая, соединяющая точку  $T$  с точкой  $AB \cap CD$ , параллельна прямой, соединяющей середины отрезков  $AD$  и  $BC$ .

РЕШЕНИЕ. (а) Точки  $X$  и  $Y$  принадлежат кубике фокусов четырёхугольника  $ABDC$ , т. е. геометрическому месту точек  $X$ , для которых  $\angle(XA, XB) = \angle(XC, XD)$ . Нам про эту кубику ещё нужно знать, что она циркулярная, а также, что вершины  $A, B, D, C$  лежат на ней. Тогда из того, что  $X$  и  $Y$  лежат на одной окружности с точками  $A$  и  $B$ , следует, что  $X + Y + A + B = J$ , значит,  $X + Y = \text{const}$ , и согласно примеру 1 прямые  $XY$  пересекают кубику в одной и той же точке  $T$ .

(б) Точка  $P = AB \cap CD$  тоже принадлежит кубике фокусов, поэтому  $P + T = -(A + B) - (X + Y) = -J$ . Значит, прямая  $PT$  пересекает (в третий раз) кубику фокусов в точке  $J$ , т. е. параллельна асимптоте, которая, как известно, параллельна прямой Ньютона — Гаусса.  $\square$

Элементарное решение задачи (а) можно найти в журнале «Квант», № 4, 2018 г., с. 13–15.

19. Пусть  $ABC$  — данный треугольник. Рассматриваются такие точки  $P$ , у которых педальный треугольник  $P_a P_b P_c$  перспективен треугольнику  $ABC$  с некоторым перспектором  $S$ . Докажите, что всевозможные прямые  $PS$  проходят через фиксированную точку.

(А. Заславский)

РЕШЕНИЕ. Известно, что множество точек  $P$ , удовлетворяющих условию, — кубика Дарбу, она же центральная изогональная кубика  $\mathcal{C}(ABC, T)$ , где  $T$  — точка, симметричная ортоцентру  $H$  относительно центра  $O$  описанной окружности. Тогда прямые  $PP'$ , где  $P'$  изогонально сопряжена  $P$ , проходят через  $T$ .

Но  $P, P'$  и  $S$  лежат на одной прямой согласно теореме Сонда для перспективных и ортологических треугольников  $ABC$  и  $P_aP_bP_c$  (где  $P$  и  $P'$  — два центра ортологии этих треугольников).  $\square$

20. Внутри треугольника  $XYZ$  взяты точка  $D$  и её изогонально сопряжённая точка  $D'$ . На лучах  $XD$  и  $XD'$  взяты соответственно точки  $A'$  и  $A$  такие, что  $XD \cdot XA = XD' \cdot XA' = XY \cdot XZ$ . Аналогично на лучах  $YD$  и  $YD'$  определим точки  $B'$  и  $B$ , а на лучах  $ZD$  и  $ZD'$  — точки  $C'$  и  $C$ .

Пусть  $P_X$  — точка пересечения  $AD$  и  $BC$ ,  $P_Y$  — точка пересечения  $AC$  и  $BD$ ,  $P_Z$  — точка пересечения  $AB$  и  $CD$ . Точки  $Q_X, Q_Y, Q_Z$  определяются аналогично по точкам  $A', B', C', D'$ . Докажите, что

- (а) прямые  $P_XQ_X, P_YQ_Y, P_ZQ_Z$  пересекаются в одной точке;
- (б) эта точка лежит на окружности  $(XYZ)$ ,
- (в) прямые  $P_XQ_Y, P_YQ_X$  и  $XY$  пересекаются в одной точке  $Z'$ ;
- (г) при этом прямая  $ZZ'$  параллельна прямым  $AA', BB', CC', DD'$ .

(А. Заславский, из проектов 22-й и 32-й ЛКТГ)

РЕШЕНИЕ (А. Заславский). Из построения следует, что  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$  — два изогонально сопряжённых квартета для центральной изогональной кубики  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(XYZ, J)$  из примера 13 (б), где  $J$  — бесконечно удалённая точка прямой  $DD'$ .

(а) Согласно примеру 2 (в) точка  $P_X = AD \cap BC$  лежит на  $\mathcal{C}$  (так как  $A + D = 2D + C_1 = 2D + C_2 + C_3 = B + C$ ). Аналогично с точками  $P_Y, P_Z, Q_X, Q_Y, Q_Z$ .

Из равенств  $A + D + P_X = A' + D' + Q_X = O$  получаем

$$P_X + Q_X + (A + A' + D + D') = O.$$

Поскольку  $A + A' = D + D' = -J$ , имеем  $P_X + Q_X - 2J = O$ , т. е. прямая  $P_XQ_X$  пересекает кубику (в третий раз) в точке  $T = -2J$ . Прямые  $P_YQ_Y$  и  $P_ZQ_Z$  пересекают кубику в той же точке (не зависящей от выбора квартета).

(б) Следует из равенства

$$X + Y + Z + T = (J + C_1) + (J + C_2) + (J + C_3) - 2J = J.$$

Другое объяснение можно получить из равенства  $T + J + J = O$ , означающего, что точка  $T$  изогонально сопряжена точке  $J$ .

(в) Запишем (пользуясь коллинеарностью точек  $X, A, D'$  и  $Y, D, B'$ ):

$$P_X + Q_Y = -(A + D) - (B' + D') = -(A + D') - (D + B') = X + Y.$$

Полученное равенство  $P_X + Q_Y = X + Y$  означает, что прямые  $P_XQ_Y$  и  $XY$  пересекаются в одной точке  $Z'$  на кубике. В той же точке кубику пересекает и  $P_YQ_X$ .

(г) Достаточно показать, что  $Z + Z' + J = O$ . Действительно,

$$Z + Z' + J = Z - (X + Y) + J = J + C_3 - (J + C_1 + J + C_2) + J = O.$$

(Это согласуется с тем, что  $Z'$  изогонально сопряжена  $Z$  как точка, лежащая на прямой  $XU$ .)  $\square$

Заметим, что эта задача предлагалась в проекте ЛКТГ 2010 года и оказалась единственной задачей проекта, не решённой ни одним из участников.

Приведём без решения ещё одну весьма трудную задачу.

21. В треугольнике  $ABC$  проведены чевианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $X$ . Окружности  $(BB_1A_1)$  и  $(CC_1A_1)$  вторично пересекаются в точке  $A_2$ , аналогично определены точки  $B_2$  и  $C_2$ .

(а) Докажите, что окружности  $(BCA_2)$ ,  $(CAB_2)$ ,  $(ABC_2)$  пересекаются в одной точке.

(б) Окружности  $(XAA_2)$ ,  $(XBB_2)$ ,  $(XCC_2)$  пересекаются в той же точке.

(в) Прямые  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$  пересекаются в одной точке.

(А. Шевцов)

Решение этой задачи с помощью кубик предложил М. Туревский (в vk-сообществе «Олимпиадная геометрия»). Читатель может попробовать найти своё решение.

Завершим следующей несложной задачей.

22. Пусть дана окружность  $\omega$  и не пересекающая её прямая  $l$ . Пусть на  $l$  зафиксирована точка  $A$ , а на  $\omega$  — точка  $B$ . Через  $A$  и  $B$  проводим произвольную окружность, вторично пересекающую  $l$  и  $\omega$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что всевозможные прямые  $XU$  проходят через фиксированную точку.

Эту задачу можно решить элементарно — показать (с использованием антипараллелей или вписанных углов), что прямая  $XU$  проходит через точку  $Z \in \omega$  такую, что  $CZ \parallel l$ , где  $C$  — вторая точка пересечения  $AB$  и  $\omega$ .

Помимо элементарного рассуждения, напрашивается следующее «решение», в духе предыдущих примеров. На кубике  $\omega \cup l$  имеем  $A + B + X + Y = J$ , поэтому  $X + Y = \text{const}$ , т. е. все прямые  $XU$  проходят через фиксированную точку на этой кубике.

Как отметил М. Туревский, можно корректно ввести операцию сложения точек на  $\omega \cup l$  (объединении окружности и прямой), что позволяет такого сорта «решения» сделать абсолютно строгими. Это интересная и заслуживающая отдельного разговора идея. Заметим

лишь, что в случае сложения точек на  $\omega \cup l$  удобно взять в качестве  $O$  бесконечно удалённую точку  $l$  (так что  $O = J$ ), а проверка ассоциативности сложения сводится к применению антипараллелей и теоремы Паскаля. Тем самым, язык сложения точек на  $\omega \cup l$  по сути является краткой записью применения антипараллелей и теоремы Паскаля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] <https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/ctc.html>.
- [2] <https://www.turgor.ru/lktg/2010/1/index.htm>. Об изогональном сопряжении, точках Микеля, прямых Гаусса и др.
- [3] <https://www.turgor.ru/lktg/2020/2/index.html>. Кубики фокусов и циркулярные кубики
- [4] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Разные взгляды на изогональное сопряжение // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. М.: МЦНМО, 2007. С. 61–78.
- [5] *Соловьев Ю. П.* Арифметика эллиптических кривых // Квант. 1987. № 7. С. 2–7.
- [6] *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952.

---

Алексей Александрович Заславский, ЦЭМИ РАН, МЭИ  
[alzasl@yandex.ru](mailto:alzasl@yandex.ru)

Павел Александрович Кожевников, МФТИ  
[p.kozhevnikov@gmail.com](mailto:p.kozhevnikov@gmail.com)

# Алгебра на службе геометрии

М. А. Горелов

Часто считается особым шиком решить геометрическую задачу чисто геометрическим методом. Ниже рассказывается о нескольких случаях, когда отказ от этого принципа позволяет найти весьма эффективное решение.

Школьные курсы алгебры и геометрии связаны слабее, чем хотелось бы. В статье показано, что совсем простые факты школьной алгебры позволяют достаточно просто доказывать сложные геометрические теоремы.

У многих школьников есть устойчивое представление о том, что алгебра — это искусство проводить длинные преобразования сложных формул. Из приведённых доказательств видно, что это далеко не так. Формул в статье могло бы быть ещё меньше, но я побоялся совсем далеко отходить от принятого «академического» стиля изложения. «У доски» можно их количество существенно сократить. По этой причине в статье довольно много рисунков. Они могут служить адекватной заменой формул.

## § 1. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Рассмотрим треугольник  $ABC$  и точку  $X$  в его плоскости. Пусть  $S$  — площадь,  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $x$  — расстояние от центра  $O$  этой окружности до точки  $X$ . Далее, пусть  $A_X, B_X, C_X$  — проекции точки  $X$  на прямые  $BC, AC, AB$  соответственно, а  $S_X$  — площадь треугольника  $A_X B_X C_X$  (рис. 1).

Нас будет интересовать следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 1.** *Справедливо равенство  $S_X = S \frac{R^2 - x^2}{4R^2}$ .*

В данном случае удобно пользоваться ориентированными площадями, поэтому они могут быть отрицательными.

В [6] это утверждение приводится со ссылкой на Леонарда Эйлера. После доказательства этого результата (см. решение задачи 506) там

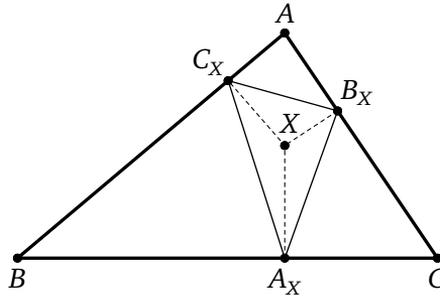


Рис. 1

приводится замечание о том, что из этой теоремы следует теорема Симсона (см. теорему 2 ниже). Если обратить это утверждение, то получится замечательно простое

Доказательство теоремы Эйлера. Зафиксируем прямую  $l$ , проходящую через точку  $O$ . Не ограничивая общности, можно считать, что точка  $X$  лежит на этой прямой, а  $x$  — длина ориентированного отрезка  $OX$ .

Начнём с совсем простых замечаний.

Длина отрезка  $A_X X$  линейно зависит от  $x$  (здесь опять удобно рассматривать направленные отрезки). Это следует, например, из подобия треугольников  $XL_A A_X$  и  $OL_A A_O$ , где  $A_O$  — проекция точки  $O$  на прямую  $BC$ , а  $L_A$  — точка пересечения этой прямой с прямой  $l$  (рис. 2). То же относится, разумеется, и к длинам отрезков  $B_X X$  и  $C_X X$ .

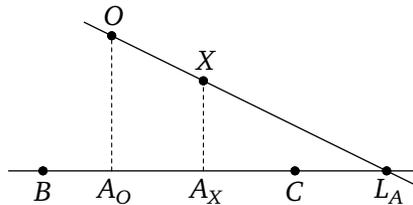


Рис. 2

Площадь треугольника  $A_X B_X C_X$  равна сумме площадей треугольников  $XA_X B_X$ ,  $XB_X C_X$  и  $XC_X A_X$  (рис. 1).

Площади треугольников  $XA_X B_X$ ,  $XB_X C_X$  и  $XC_X A_X$  — квадратичные функции от  $x$ . Например, площадь треугольника  $XA_X B_X$  равна

$$\frac{1}{2} A_X X \cdot B_X X \sin \gamma,$$

где  $\gamma$  — величина угла  $C$  треугольника  $ABC$ .

Следовательно, площадь  $S_X$  квадратично зависит от  $x$ .

По теореме Симсона, если  $x = \pm R$ , то точки  $A_X, B_X, C_X$  лежат на одной прямой, т. е.  $S_X = 0$ . Но тогда в общем случае  $S_X = \mu(x - R)(x + R)$ , где  $\mu$  — некоторая константа.

Если точка  $X$  совпадает с точкой  $O$ , то  $x = 0$ , а соответствующие проекции  $A_O, B_O, C_O$  — середины сторон треугольника  $ABC$ . Значит, площадь треугольника  $A_O B_O C_O$  равна  $\frac{1}{4}S$ . Тогда  $\frac{1}{4}S = -\mu R^2$ . Отсюда находим константу  $\mu$ , что и завершает доказательство теоремы.  $\square$

Ближайшее следствие<sup>1)</sup> доказанного результата получается, если точка  $X$  совпадает с центром  $I$  вписанной окружности. В этом случае длины отрезков  $A_I I, B_I I, C_I I$  равны радиусу  $r$  вписанной окружности, площадь треугольника  $A_I B_I C_I$  равна

$$S_I = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{a+b+c}{2R} = \frac{Sr}{2R}$$

(как обычно,  $a, b, c$  — стороны треугольника  $ABC$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы).

Отсюда находим, что квадрат расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей равен  $R^2 - 2Rr$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1 [6, задача 43]. Пусть  $ABC$  — правильный треугольник со стороной  $a$ ,  $M$  — некоторая точка плоскости, находящаяся на расстоянии  $d$  от центра треугольника  $ABC$ . Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны отрезкам  $MA, MB$  и  $MC$ , выражается формулой

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}|a^2 - 3d^2|.$$

УКАЗАНИЕ. Вместо теоремы Симсона можно воспользоваться результатом упражнения 2.

## § 2. ТЕОРЕМА СИМСОНА

Есть мнение, что «прямую Симсона следует прежде всего рассматривать как красивый пример геометрического рассуждения» [5]. В § 1 показано, что этот результат может быть использован при доказательстве вполне содержательных теорем. Но и сам он может быть доказан преимущественно алгебраическими методами.

Сделаем сначала небольшое теоретическое отступление, напомним некоторые факты, которые понадобятся в дальнейшем, но полезны и во многих других случаях (подробности см., например, в [3]).

<sup>1)</sup> Далеко не единственное.

Тригонометрическим полиномом называют функцию вида

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Если числа  $a_n$  и  $b_n$  не равны нулю одновременно, то говорят, что полином имеет степень  $n$ .

Непосредственно из определения следует, что сумма двух тригонометрических полиномов  $P(t)$  и  $Q(t)$  снова будет тригонометрическим полиномом. При этом, если степени полиномов  $P(t)$  и  $Q(t)$  равны  $n$ , то степень полинома  $P(t) + Q(t)$  не превосходит  $n$  (но может быть и строго меньше).

Из формул для синуса и косинуса суммы двух углов следует, что если  $\alpha$  — константа, то  $\sin(t + \alpha)$  и  $\cos(t + \alpha)$  — тригонометрические полиномы первой степени.

Если использовать те же формулы «в обратную сторону», то нетрудно заметить, что если  $P(t)$  — тригонометрический полином первой степени, то на интервале  $[0, 2\pi)$  уравнение  $P(t) = 0$  имеет не более двух корней. В самом деле, любой такой полином можно записать в виде  $a_0 + c \cos(t + \alpha)$ , а тогда всё очевидно.

Это утверждение обобщается следующим образом. Если  $P(t)$  — тригонометрический полином степени  $n$ , то на интервале  $[0, 2\pi)$  уравнение  $P(t) = 0$  имеет не более  $2n$  корней.

Доказательство начнём с такого замечания. Из формул для синуса и косинуса суммы двух углов следует, что если  $P(t)$  — тригонометрический полином степени  $n$ , то и  $P(t + \alpha)$  будет тригонометрическим полиномом степени  $n$ . Очевидно также, что числа корней уравнений  $P(t) = 0$  и  $P(t + \alpha) = 0$  одинаковы.

Из этого замечания следует, что можно, не ограничивая общности, считать, что число  $\pi$  не является корнем уравнения  $P(t) = 0$ .

Из формул для синусов и косинусов кратных углов следует, что уравнение  $P(t) = 0$  может быть записано в виде  $Q(\cos t, \sin t)$ , где  $Q(x, y)$  — алгебраический многочлен степени  $n$  от двух переменных.

Введём новую переменную  $\tau = \operatorname{tg}(t/2)$ . Если  $\pi$  не является корнем уравнения  $Q(\cos t, \sin t) = 0$ , то количество корней этого уравнения на интервале  $[0, 2\pi)$  равно числу корней алгебраического уравнения

$$Q\left(\frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \frac{2\tau}{1 + \tau^2}\right) = 0.$$

Умножив последнее уравнение на  $(1 + \tau^2)^n$ , приведём его к виду  $R(\tau) = 0$ , где  $R(\tau)$  — многочлен степени  $2n$ . Поэтому уравнение  $R(\tau) = 0$  имеет не более  $2n$  корней.

Вернёмся к нашей основной теме. В предыдущем разделе использовано следующее утверждение.

**ТЕОРЕМА 2.** *Если точка  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то точки  $A_X, B_X, C_X$  принадлежат одной прямой.*

**Доказательство.** Положение точки  $X$  на описанной окружности можно задавать, например, длиной  $t$  дуги  $AX$ .

Тогда расстояние от точки  $X$  до любой фиксированной прямой будет задаваться тригонометрическим полиномом первой степени:  $h = h_0 + R \sin(t - t_0)$  (рис. 3).

Но тогда площадь треугольника  $A_X B_X C_X$  задаётся тригонометрическим полиномом второй степени.

Достаточно доказать, что этот полином тождественно равен нулю. А для этого можно доказать, что он имеет пять различных корней. Мы найдём даже шесть.

Если точка  $X$  совпадает с одной из точек  $A, B$  или  $C$ , то две из трёх точек  $A_X, B_X, C_X$  совпадают и  $S_X = 0$ .

Если  $X$  — вторая точка пересечения прямой  $AO$  с описанной окружностью, то  $B_X$  и  $C_X$  совпадают с точками  $C$  и  $B$ , а точка  $A_X$  лежит на прямой  $BC$  (рис. 4). Значит,  $S_X = 0$ . Аналогично находятся ещё две точки.

Теорема почти доказана. Эти рассуждения не проходят только для прямоугольных треугольников: в этом случае среди шести найденных точек будет две пары совпадающих, а четырёх разных точек для наших целей недостаточно. Этот пробел в доказательстве вполне можно заполнить, используя соображения непрерывности.

Зафиксируем положения точек  $A, B$  и  $X$  и рассмотрим зависимость площади  $S_X$  от длины  $t_C$  дуги  $AC$ .

Расстояние

$$XB_X = CX \sin \frac{t}{2} = 2R \sin \frac{t_C - t}{2} \sin \frac{t}{2}$$

непрерывно зависит от  $t_C$ . Аналогично и расстояние  $XA_X$  непрерывно зависит от  $t_C$  (рис. 5). А расстояние  $XC_X$  вовсе постоянно. Значит, площадь  $S_X$  зависит от  $t_C$  непрерывно.

Не ограничивая общности, можно считать, что точка  $O$  не лежит на стороне  $AB$ . Как уже доказано,  $S_X = 0$  для всех положений точки  $C$

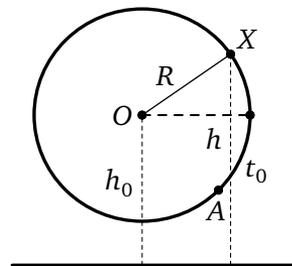


Рис. 3

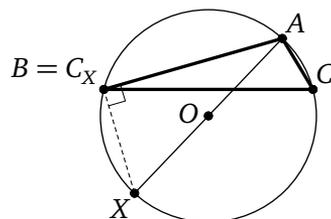


Рис. 4

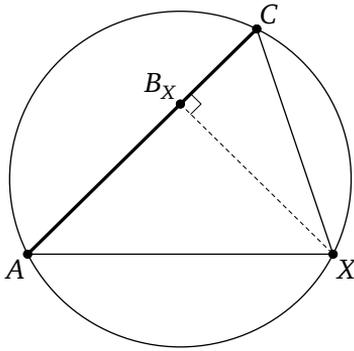


Рис. 5

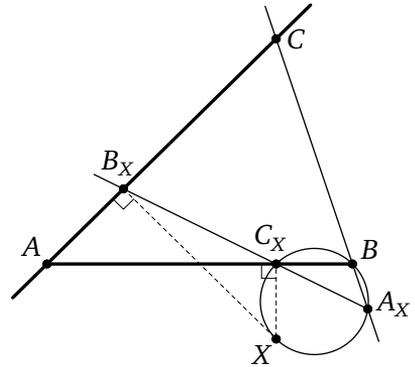


Рис. 6

кроме двух, диаметрально противоположных точкам  $A$  и  $B$ . По непрерывности она равна нулю и для этих положений.

Теорема доказана полностью.  $\square$

Справедливо и обратное утверждение.

**ТЕОРЕМА 3.** Если точки  $A_X, B_X, C_X$  коллинеарны, то точка  $X$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

**Доказательство.** Как уже отмечалось выше, это утверждение может быть выведено из теоремы 1, а она в свою очередь следует из теоремы 2. Но можно предложить доказательство, которое более коротким путём сводит теорему 3 к теореме 2.

Удобно переформулировать утверждение теоремы так: Если точки  $A_X, B_X, C_X$  коллинеарны, то точка  $C$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABX$ .

Рассмотрим «однопараметрическое» семейство задач. Будем считать, что точки  $A, B$  и  $X$ , а также проходящая через  $A$  прямая  $l$ , на которой лежит вершина  $C$ , фиксированы (рис. 6).

Тогда единственным образом определены точки  $B_X$  и  $C_X$ . Точка  $A_X$  должна лежать на окружности  $\omega$ , построенной на отрезке  $XB$  как на диаметре. Значит, из условия теоремы следует, что  $A_X$  — единственная отличная от  $C_X$  точка пересечения прямой  $B_XC_X$  с окружностью  $\omega$ . Но тогда и точка  $C$  определяется однозначно как точка пересечения прямых  $VA_X$  и  $l$ .

Таким образом, в рассматриваемом семействе существует не более одного треугольника, удовлетворяющего условию теоремы 3. Но по теореме 2 этому условию удовлетворяет треугольник, вписанный в описанную окружность треугольника  $ABX$ .

Теорема 3 доказана.  $\square$

В определённом смысле доказательства теорем 1, 2 и 3 очень похожи. Во всех трёх доказательствах используется тот факт, что некая вспомогательная задача имеет мало решений (в случае теоремы 3 — одно). Только при доказательстве теорем 1 и 2 такие факты получались из алгебраических соображений, а при доказательстве теоремы 3 аналогичный факт устанавливался с помощью техники построения циркулем и линейкой. У меня есть подозрение, что такой приём тоже может быть использован при решении разных задач. Но это уже выходит за рамки данной статьи.

В данном случае «перевести» доказательство с языка геометрических построений на язык алгебры не сложно. Но, видимо, после этого оно не станет проще.

Упражнение 2 (Московская математическая олимпиада, 1940 г.). Точки  $A, B, C$  — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка  $D$  лежит на меньшей дуге  $AB$ . Докажите, что  $DC = AD + BD$ .

Упражнение 3. Пусть точка  $X$  движется по окружности  $\omega$ , не concentricкой с описанной окружностью треугольника  $ABC$ . Докажите, что тогда площадь  $S_X$  треугольника  $A_X B_X C_X$  пропорциональна расстоянию от точки  $X$  до радикальной оси окружности  $\omega$  и описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Упражнение 4 (Папп). Докажите, что произведение расстояний от какой-нибудь точки на окружности до двух противоположных сторон вписанного в эту окружность четырёхугольника равно произведению расстояний от той же точки до двух других сторон этого четырёхугольника.

### § 3. ЕЩЁ ОДНА ФОРМУЛА

Из теоремы 1 можно получить ещё одно важное следствие.

Пусть  $u, v, w, d$  — расстояния от точки  $X$  до точек  $A, B, C, O$  соответственно, а  $a, b, c$  — как обычно, длины сторон треугольника  $ABC$ .

Выразим стороны треугольника  $A_X B_X C_X$  через эти параметры.

Дважды применяя теорему синусов, получим  $B_X C_X = u \sin \alpha = u \frac{a}{2R}$  (рис. 7).

Аналогично находятся две другие стороны.

Если теперь воспользоваться формулой Герона для треугольника  $A_X B_X C_X$  и теоремой 1, то получим следующую формулу:

$$16S^2(d^2 - R^2)^2 = 2(a^2u^2b^2v^2 + a^2u^2c^2w^2 + b^2v^2c^2w^2) - (a^4u^4 + b^4v^4 + c^4w^4),$$

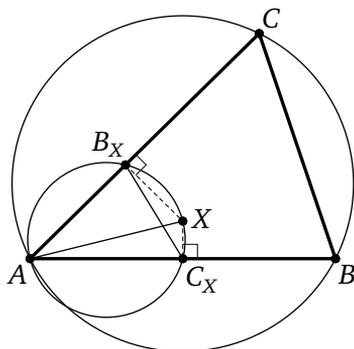


Рис. 7

связывающую расстояние от точки  $X$  до центра описанной около треугольника окружности с расстояниями от этой точки до его вершин.

О многочисленных следствиях этой формулы рассказано в [1]. Среди этих приложений теорема Птолемея и её обобщение — теорема Пурсера, теорема Фейербаха, теорема Понселе для случаев треугольников и четырёхугольников и многое другое.

#### § 4. ЯПОНСКАЯ ТЕОРЕМА

Разумеется, область применимости рассматриваемых идей не ограничивается доказанными теоремами. Вот ещё один пример.

**ТЕОРЕМА 4.** Если четырёхугольник  $ABCD$  вписанный, то сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $BCD$ , равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  (рис. 8 а и 8 б).

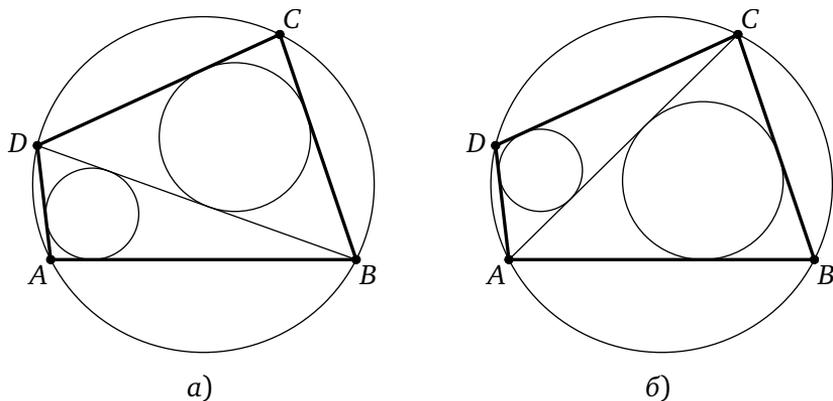


Рис. 8

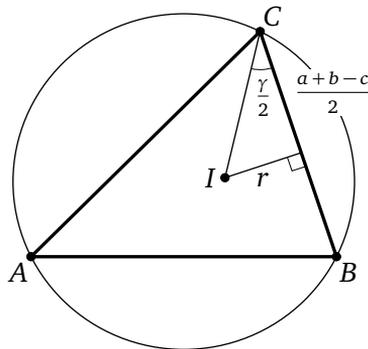


Рис. 9

Доказательство. Начнём с небольшой заготовки. Рассмотрим треугольник  $ABC$ , вписанный в данную окружность. Пусть вершины  $A$  и  $B$  фиксированы, а вершина  $C$  движется по одной из дуг с концами  $A$  и  $B$ . Выясним характер зависимости радиуса вписанной в треугольник  $ABC$  окружности от положения точки  $C$ .

Будем характеризовать положение точки  $C$  на дуге  $AB$  величиной  $t$  угла  $CAB$  (рис. 9). По теореме синусов длина  $a$  стороны  $BC$  выражается тригонометрическим полиномом первой степени от переменной  $t$ . По тем же причинам длина  $b$  стороны  $AC$  — тригонометрический полином первой степени. А длина  $c$  стороны  $AB$  постоянна. Если умножить величину  $(a + b - c)/2$  на постоянную величину  $\operatorname{tg}(\gamma/2)$  (где  $\gamma$  — величина угла  $ACB$ ), то получится радиус  $r$  вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Значит,  $r$  — тригонометрический полином первой степени от переменной  $t$ .

Теперь можно вернуться к доказательству теоремы.

Начнём с частного случая. Пусть диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника проходят через центр  $O$  описанной около него окружности. Тогда четырёхугольник является прямоугольником, все треугольники  $ABC$ ,  $DCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$  равны и утверждение теоремы очевидно (рис. 10 а и 10 б).

Теперь рассмотрим случай, когда диагональ  $AC$  проходит через точку  $O$  (рис. 11). Фиксируем вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  и будем характеризовать положение вершины  $D$  на дуге  $AC$ , не содержащей точку  $B$ , величиной  $t$  угла  $DAC$ . Как установлено выше, радиусы  $r_A$ ,  $r_B$  и  $r_C$  окружностей, вписанных в треугольники  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$  соответственно, описываются тригонометрическими полиномами первой степени от переменной  $t$ . А радиус  $r_D$  окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , постоянен. Следовательно,  $\varphi(t) = r_A + r_C - r_B - r_D$  — тригонометриче-

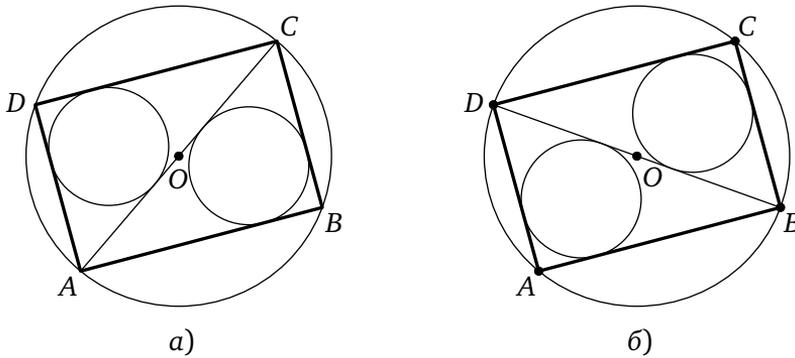


Рис. 10

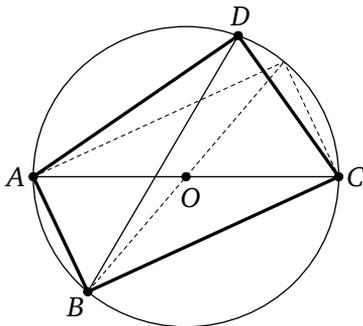


Рис. 11

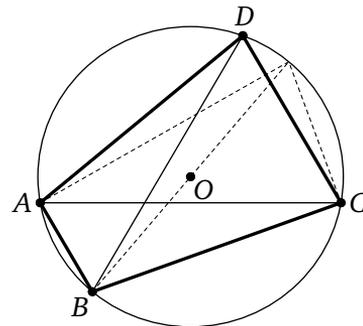


Рис. 12

ский полином первой степени. Нужно доказать, что он тождественно равен нулю. Очевидно,  $\varphi(0) = 0$ : в этом случае точка  $D$  совпадает с точкой  $C$  и потому  $r_D = r_C$ , а  $r_A = r_B = 0$ . По аналогичной причине  $\varphi(t)$  обращается в нуль, когда точка  $D$  совпадает с точкой  $A$ . А третий корень соответствует случаю, когда диагональ  $BD$  проходит через центр  $O$ . Поскольку полином  $\varphi(t)$  имеет три корня, он тождественно равен нулю.

Общий случай рассматривается аналогично, только нужно аккуратно выбрать обозначения. Пусть вершины четырёхугольника обозначены так, что точки  $B$  и  $O$  расположены по разные стороны от прямой  $AC$  (рис. 12). Используем обозначения предыдущего абзаца. Тогда два корня полинома  $\varphi(t)$  соответствуют случаям, когда вершина  $D$  совпадает с вершинами  $A$  или  $C$ . А третий корень соответствует случаю, когда диагональ  $BD$  проходит через точку  $O$  (такая точка  $D$  найдётся, если вершины обозначены так, как сказано выше). Полином первой степени имеет три корня, значит, он тождественно равен нулю.

Теорема доказана. □

УПРАЖНЕНИЕ 5 (Л. Карно). Пусть задан треугольник  $ABC$ ,  $R$  и  $r$  — радиусы его описанной и вписанной окружностей,  $d_a, d_b, d_c$  — расстояния от центра  $O$  описанной окружности до сторон  $a = BC$ ,  $b = AC$  и  $c = AB$  соответственно. Докажите, что если треугольник остроугольный, то

$$d_a + d_b + d_c = R + r,$$

а если угол  $C$  треугольника тупой, то имеет место равенство

$$d_a + d_b - d_c = R + r.$$

## § 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Читатель может сравнить сложность приведённых доказательств со сложностью традиционных [2, 6]. Разумеется, сложность — понятие субъективное. Например, в моём возрасте уже утомительно считать многочисленные вписанные углы.

Во всяком случае, не вызывает сомнения, что приведённые доказательства не лежат в «выпуклой оболочке» традиционных [7]. Уже этим они представляют интерес.

Понятно, что такие доказательства сложно «встроить» в систематический курс геометрии, особенно если планировать его отдельно от курса алгебры. Но как-то привести их в качестве демонстрации тезиса о единстве математики, вероятно, стоит.

Подобными методами, но сложнее, в книге [4] доказываются теоремы Паппа и Паскаля.

И ещё одно, надеюсь, преходящее замечание. Опыт показывает, что современные школьники неважно владеют понятием функции. Именно поэтому приведённые доказательства могут быть для них сложными. Но по той же причине на них стоит обратить внимание.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горелов М. А. Формула и содержание // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 83–110.
- [2] Ефремов Д. Д. Новая геометрия треугольника. М.: Ленанд, 2015.
- [3] Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. II. М.: Наука, 1978.
- [4] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П. Эллиптические функции. М.: Факториал, 1997.
- [5] Шарыгин Г. И. Лекции по элементарной геометрии. М.: МЦНМО, 2014.

- [6] Шарыгин И. Ф. Геометрия. 9–11 кл. От учебной задачи к творческой. М.: Дрофа, 1997.
- [7] Conway J. H., Shipman J. Extreme Proofs I: The Irrationality of  $\sqrt{2}$  // Math Intelligencer. 2013. Vol. 35, № 3. P. 2–7.

# Линейные семейства треугольников и ортологичность

Е. В. Бакаев, П. А. Кожевников

Два треугольника называются *ортологичными*, если перпендикуляры, проведённые через вершины одного из них к сторонам другого, пересекаются в одной точке (рис. 1). В этой статье мы посмотрим на отношение ортологичности с разных точек зрения. В основном изложение будет в рамках элементарной геометрии на обычной евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а в последнем разделе свяжем рассматриваемые понятия с геометрией в  $\mathbb{R}^4$ . Будет многократно использоваться следующая идея. Два ортологичных треугольника порождают однопараметрическое (линейное) семейство, и любые два треугольника из этого семейства ортологичны. Работа с таким семейством может дать естественный подход к решению некоторых вопросов.

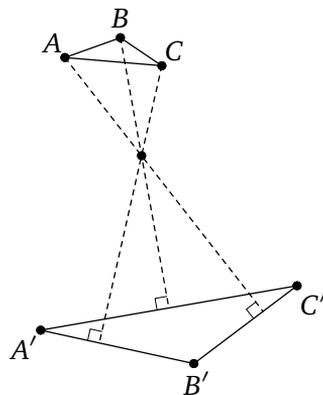


Рис. 1. Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  ортологичны

## § 1. ЛИНЕЙНЫЕ СЕМЕЙСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ И КЛАССОВ ГОМОТЕТОВ

Начнём с рассмотрений, связанных с линейным движением.

### 1.1. Одна точка

Пусть точка  $A$  движется по плоскости *линейно*, т. е. прямолинейно и с постоянной скоростью. Формально это движение задаётся отображением  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , так что точка  $A_t = A(t)$  определяется радиус-вектором  $\vec{OA}_t = \vec{OA}_0 + t \cdot \vec{v}_a$ , где  $O$  — начало отсчёта, а  $\vec{v}_a$  — *вектор скорости*. При  $\vec{v}_a \neq \vec{0}$  траекторией  $\{A_t\}$  точки  $A$  является некоторая прямая  $a$

с направляющим вектором  $\vec{v}_a$ , а графиком линейного движения точки будет являться прямая  $\{(t, A_t)\}$  в  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .

### 1.2. ПАРА ТОЧЕК

Рассмотрим пару точек  $A, B$ , каждая из которых движется линейно, соответственно со скоростями  $\vec{v}_a$  и  $\vec{v}_b$ . Заметим, что

$$\overrightarrow{A_t B_t} = \overrightarrow{A_0 B_0} + t(\vec{v}_b - \vec{v}_a).$$

В случае  $\overrightarrow{A_0 B_0} \parallel (\vec{v}_b - \vec{v}_a)$  все векторы  $\overrightarrow{A_t B_t}$  коллинеарны между собой или, эквивалентно, графики движения точек  $A$  и  $B$  в  $\mathbb{R}^3$  лежат в одной плоскости. Назовём описанную ситуацию и соответствующую пару движущихся точек  $A, B$  *особой*. В особой ситуации при  $\vec{v}_b \neq \vec{v}_a$  в какой-то момент точки сталкиваются (т. е.  $A_{t_0} = B_{t_0}$  для некоторого  $t = t_0$ ).

В неособом случае  $\overrightarrow{A_0 B_0} \nparallel (\vec{v}_b - \vec{v}_a)$  все векторы в семействе  $\{\overrightarrow{A_t B_t}\}$  ненулевые. Доопределив  $\overrightarrow{A_\infty B_\infty} \parallel \vec{v}_b - \vec{v}_a$ , можно заметить, что для каждого направления существует единственный вектор вида  $\overrightarrow{A_t B_t}$ , параллельный этому направлению (под *направлением* мы понимаем класс параллельных прямых).

Легко видеть, что для неособой пары  $A, B$  при  $\vec{v}_b \parallel \vec{v}_a$  все прямые  $A_t B_t$  проходят через одну точку. Если же  $\vec{v}_b \nparallel \vec{v}_a$ , то известны следующие факты (см., например, [1]): огибающей для семейства прямых  $A_t B_t$  является парабола (при этом прямые  $a$  и  $b$ , по которым движутся точки  $A$  и  $B$ , также являются прямыми вида  $A_t B_t$  и касаются этой параболы). Далее, всякая окружность, проходящая через точки  $A_t, B_t$  и  $a \cap b$ , проходит через фокус этой параболы  $M_{AB}$ . Тем самым  $M_{AB}$  является *точкой Микеля* для любой четвёрки из семейства прямых  $A_t B_t$ . Также  $M_{AB}$  является центром поворотных гомотетий, совмещающих пары векторов вида  $\overrightarrow{A_t B_t}$ . Кроме того,  $M_{AB}$  является центром поворотной гомотетии, переводящей прямую  $a$  в  $b$  и совмещающей точки  $A_t$  и  $B_t$  при фиксированном  $t$ .

В  $\mathbb{R}^3$  графики линейного движения неособой пары представляют собой пару скрещивающихся прямых, а прямые вида  $(t, A_t B_t)$  образуют семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида.

### 1.3. ТРОЙКА ТОЧЕК

Далее рассмотрим тройку точек  $A, B, C$ , каждая из которых движется линейно, соответственно со скоростью  $\vec{v}_a, \vec{v}_b$  и  $\vec{v}_c$ . Такую тройку называем *неособой*, если в ней каждая пара точек неособая. Тройка линейно движущихся точек  $A, B, C$  определяет множество треугольни-

ков  $\{A_t B_t C_t\}$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), которое будем называть *линейным семейством треугольников*. Как правило, далее будем рассматривать *неособые линейные семейства треугольников*, т. е. неособый случай линейного движения трёх точек.

Для неособого случая в любом треугольнике  $A_t B_t C_t$  никакие две из трёх вершин не совпадают, однако  $A_t, B_t, C_t$  могут лежать на одной прямой; в этом случае называем  $A_t B_t C_t$  *вырожденным треугольником*.

Ясно, что линейное семейство можно породить произвольными двумя его треугольниками (скажем, взяв их в качестве  $A_0 B_0 C_0$  и  $A_1 B_1 C_1$ ), при этом любые два треугольника линейного семейства определяют всё семейство.

Укажем ещё некоторые известные геометрические факты, связанные с неособым линейным семейством  $\{A_t B_t C_t\}$ . Центры поворотных гомотетий  $M_{AB}, M_{BC}, M_{AC}$  (определённые в п. 1.2) лежат на так называемой окружности подобия трёх фигур (в качестве фигур можно взять просто векторы  $\overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{B_0 B_1}, \overrightarrow{C_0 C_1}$ ). Прямая, соединяющая  $a \cap b$  с  $M_{AB}$ , и две аналогичные прямые пересекаются в одной точке, лежащей на окружности подобия. По окружности подобия движется общая точка  $P_t$  трёх окружностей — окружности, проходящей через  $A_t, B_t, a \cap b$ , и двух аналогичных окружностей. Указанные факты можно найти, например, в [5], § 19.8 «Окружность подобия трёх фигур». (Эти факты стали достаточно популярными и вошли во многие задачки и листки по поворотной гомотетии.)

#### 1.4. Тройка точек $\leftrightarrow$ ПАРА ВЕКТОРОВ

Треугольник  $ABC$  с точностью до параллельного переноса (сдвига) можно задать упорядоченной парой (свободных) векторов  $(\vec{b}, \vec{c}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Для линейного семейства  $A_t B_t C_t$  положим  $\vec{b}_t = \overrightarrow{A_t B_t}, \vec{c}_t = \overrightarrow{A_t C_t}$ . Нетрудно видеть, что справедливы векторные равенства

$$\vec{b}_t = (1-t)\vec{b}_0 + t\vec{b}_1, \quad \vec{c}_t = (1-t)\vec{c}_0 + t\vec{c}_1, \quad (1)$$

из которых, в частности, ясно, что после замены треугольников  $A_0 B_0 C_0$  и  $A_1 B_1 C_1$  на некоторые их сдвиги семейство  $\{A_t B_t C_t\}$  останется неизменным, т. е. будет состоять из тех же треугольников с точностью до сдвига.

#### 1.5. КЛАССЫ ГОМОТЕТОВ

Далее рассмотрим эквивалентность относительно гомотетий и параллельных переносов. Скажем, что на плоскости два множества  $S_1$  и  $S_2$  эквивалентны, если  $S_2$  получается из  $S_1$  некоторым сдвигом или

гомотетией. Класс эквивалентности  $[S]$  множества  $S$  состоит из гомотетов и сдвигов множества  $S$ ; этот класс для краткости можно называть *классом гомотетов* множества  $S$ . Для невырожденного треугольника  $ABC$  его класс  $[ABC]$  однозначно определяется упорядоченной тройкой направлений, параллельных  $BC, CA, AB$ .

Эквивалентность треугольников  $\overline{ABC}$  и  $\overline{A'B'C'}$  соответствует пропорциональности пар векторов  $(\overline{AB}, \overline{AC})$  и  $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'})$ . Так, классу  $[ABC]$  соответствует множество пар вида  $(t\overline{AB}, t\overline{AC})$ . По неособому линейному семейству треугольников  $A_t B_t C_t$  определим *линейное семейство классов*  $\{[A_t B_t C_t]\}$ , дополненное классом «треугольника на бесконечности»  $[A_\infty B_\infty C_\infty]$ , который можно задать парой векторов  $(\overline{A_\infty B_\infty}, \overline{A_\infty C_\infty})$ , пропорциональной паре  $(\vec{v}_b - \vec{v}_a, \vec{v}_c - \vec{v}_a)$ .

Правые части равенства (1), записанные в «однородной форме»

$$(x_0 \vec{b}_0 + x_1 \vec{b}_1, x_0 \vec{c}_0 + x_1 \vec{c}_1), \quad (2)$$

где  $x_0, x_1$  — произвольные константы, не равные одновременно 0, описывают линейное семейство классов, порождённое классами  $[A_0 B_0 C_0]$  и  $[A_1 B_1 C_1]$ . Случай  $x_0 + x_1 = 0$  будет соответствовать классу  $[A_\infty B_\infty C_\infty]$  «треугольника на бесконечности».

Из формул (2) нетрудно понять, что линейное семейство классов не изменится от замены треугольников  $A_0 B_0 C_0, A_1 B_1 C_1$  на их гомотеты. Кроме того, линейное семейство классов определяется любыми своими двумя (различными) классами, поэтому верно следующее: два несовпадающих линейных семейства классов либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по одному классу.

### 1.6. ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Хорошо известно следующее утверждение (этот факт предлагался, например, в виде задачи про пешеходов на Всесоюзной олимпиаде, см. [2, задача 228]).

*В линейном семействе треугольников либо не более двух вырожденных треугольников, либо все треугольники этого семейства вырожденные.*

Доказательство. Доказать это утверждение можно, например, исходя из равенства (1). Пусть в линейном семействе нашлись два вырожденных треугольника. Не умаляя общности можно считать, что это треугольники  $A_0 B_0 C_0$  и  $A_1 B_1 C_1$ . Тогда  $\vec{b}_0 \parallel \vec{c}_0$  и  $\vec{b}_1 \parallel \vec{c}_1$ . Если коэффициенты пропорциональности одинаковы, т. е.  $\vec{b}_t = \lambda \vec{c}_t$  для  $t = 0$  и  $t = 1$ , то согласно (1) равенство будет выполнено для всех  $t$ . (В этом

случае можно сказать, что всё семейство состоит из вырожденных «подобных» друг другу треугольников.) Иначе несложно видеть, что  $\vec{b}_t \nparallel \vec{c}_t$  при  $t \neq 0$  и  $t \neq 1$ .  $\square$

Если все треугольники семейства вырожденные, то семейство называем *вырожденным*. Для вырожденного неособого семейства треугольников три графика движения его вершин принадлежат одному гиперболическому параболоиду.

### 1.7. ПРИМЕРЫ

#### (1) «Поворотно-гомотетичное семейство»

Пусть неособое линейное семейство порождено подобными и одинаково ориентированными (в невырожденном случае) треугольниками  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$  (рис. 2). Из равенств (1) следует, что тогда в се-

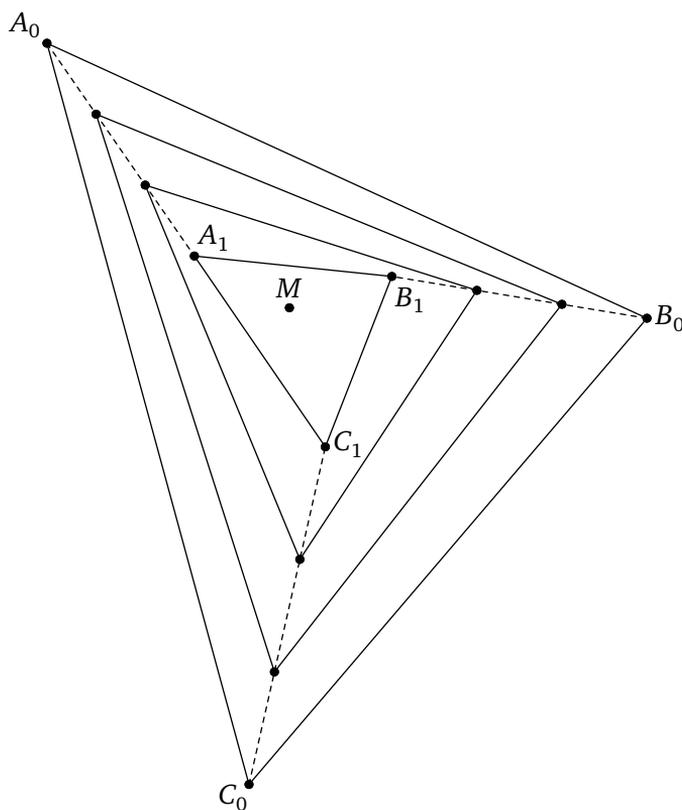


Рис. 2. Четыре подобных треугольника одного «поворотно-гомотетичного семейства»

мействе любой треугольник  $A_t B_t C_t$  тоже подобен  $A_0 B_0 C_0$  и одинаково ориентирован с ним.

При этом для всех треугольников семейства имеется общая соответственная точка  $M$ . Она является центром поворотной гомотеи, совмещающей любую пару векторов вида  $\overrightarrow{A_t B_t}$ , а значит, и любую пару треугольников нашего семейства. Таким образом, в рассматриваемом частном случае в обозначениях п. 1.2 и 1.3 имеем  $M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M$ .

## (2) «Педальное семейство»

Пусть даны фиксированные прямые  $a, b, c$ , а точка  $P$  движется линейно. Тогда проекции  $A_t, B_t, C_t$  точки  $P_t$  на прямые  $a, b, c$  движутся линейно и образуют линейное семейство *педальных* треугольников. Если прямые  $a, b, c$  образуют треугольник  $\Delta$ , то педальный треугольник точки  $P$  может вырождаться (в прямую Симсона), и происходит это тогда и только тогда, когда  $P$  лежит на окружности, описанной около  $\Delta$ .

Конструкцию педального семейства можно обобщить, если вместо педального треугольника точки  $P_t$  рассматривать точки  $A_t, B_t, C_t$  на прямых  $a, b, c$  такие, что каждый из направленных углов  $\angle(P_t A_t, a)$ ,  $\angle(P_t B_t, b)$ ,  $\angle(P_t C_t, c)$  равен одному и тому же фиксированному значению  $\alpha$ , так что направления прямых  $P_t A_t, P_t B_t, P_t C_t$  фиксированы; в таком случае треугольник  $A_t B_t C_t$  можно назвать « $\alpha$ -педальным».

В случае  $\alpha$ -педального семейства окружность подобия (по которой движется  $P_t$ ) вырождается в прямую, и точки  $M_{AB}, M_{BC}, M_{CA}$  оказываются фиксированными точками на этой прямой (при этом прямые, соединяющие пары точек  $M_{AB}$  и  $a \cap b$ ,  $M_{BC}$  и  $b \cap c$ ,  $M_{CA}$  и  $c \cap a$ , параллельны).

И наоборот, коллинеарным точкам  $M_{AB}, M_{BC}, M_{CA}$  соответствует « $\alpha$ -педальное» семейство: можно двигать линейно точку  $P_t$  по прямой  $M_{AB} M_{BC} M_{CA}$ . Тогда точка  $A_t$  пересечения окружностей, проходящих через тройки точек  $P_t, a \cap c, M_{CA}$  и  $P_t, a \cap b, M_{AB}$ , будет двигаться линейно по прямой  $a$ , при этом прямая  $A_t P_t$  сохраняет своё направление.

## 1.8. ГЕОМЕТРИЯ $\{T_t\}$ В СЛУЧАЕ ДВУХ ВЫРОЖДЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Пусть в линейном неособом семействе треугольников  $A_t B_t C_t$  имеются два вырожденных треугольника, лежащих на прямых  $x$  и  $y$ , пересекающихся в точке  $O$ . Для краткости треугольник  $A_t B_t C_t$  обозначаем  $T_t$ . Перепараметризуем семейство так, чтобы на прямой  $y$  находились

вершины треугольника  $T_0$ , а на прямой  $x$  — вершины треугольника  $T_1$ . Условия  $f(A_0) = A_1$ ,  $f(B_0) = B_1$ ,  $f(C_0) = C_1$  определяют единственное отображение  $f: y \rightarrow x$ , сохраняющее двойные отношения точек (здесь считаем, что  $x$  и  $y$  пополнены бесконечно удалёнными точками). Для фиксированной константы  $\lambda$  на каждой прямой вида  $Pf(P)$  (где  $P$  пробегает прямую  $y$ ) отмечаем точку  $P_\lambda$  такую, что  $\overrightarrow{PP_\lambda} = \lambda \overrightarrow{Pf(P)}$ , в частности,  $P_0 = P$ ,  $P_1 = f(P)$ . (Заметим, что эти обозначения согласуются с обозначением  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$  вершин треугольника семейства.)

1) В случае равенства отношений  $\overrightarrow{A_0B_0}/\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{A_1B_1}/\overrightarrow{A_1C_1}$  (иначе говоря, когда  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$  — вырожденные подобные треугольники), в соответствии с п. 1.6, все треугольники в семействе  $\{T_i\}$  — вырожденные и подобные между собой. В рассматриваемом случае  $f$  линейно (т. е. сохраняет отношения), и согласно п. 1.2 прямые вида  $Pf(P)$  касаются фиксированной параболы (в частности, её касаются прямые  $x$  и  $y$ ). При фиксированном  $\lambda$  точки  $P_\lambda$  лежат на прямой, также касающейся той же параболы.

2) Пусть теперь  $\overrightarrow{A_0B_0}/\overrightarrow{A_0C_0} \neq \overrightarrow{A_1B_1}/\overrightarrow{A_1C_1}$ . Тогда верно следующее:

При фиксированном  $\lambda \neq 0, 1$  точки вида  $P_\lambda$  образуют гиперболу  $\gamma_\lambda$  с асимптотами, параллельными прямым  $x$  и  $y$ .

Доказательство. В аффинной системе координат  $Oxy$  (с осями координат  $x$  и  $y$ ) можно задать координаты точки  $P$  как  $(0, \tau)$  и соответственно точки  $f(P)$  как  $(\alpha(\tau), 0)$ , где  $\alpha$  — дробно-линейная функция (поскольку  $f$  сохраняет двойные отношения). (Заметим, что при этом  $\alpha$  не является линейной функцией, так как этот случай соответствует равенству  $\overrightarrow{A_0B_0}/\overrightarrow{A_0C_0} = \overrightarrow{A_1B_1}/\overrightarrow{A_1C_1}$ .) Следовательно,  $P_\lambda$  имеет координаты  $(\lambda\alpha(\tau), (1-\lambda)\tau)$ . Тем самым  $P_\lambda$  образуют гиперболу  $x = \lambda\alpha\left(\frac{y}{1-\lambda}\right)$ .  $\square$

Отметим, что гиперболы  $\gamma_\lambda$  однозначно задаётся следующими условиями: она содержит вершины  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$  и её асимптоты параллельны прямым  $x$  и  $y$ .

При  $\lambda \neq 0, 1, \mu \neq 0, 1$  существует единственное аффинное преобразование  $g_{\lambda,\mu}$  плоскости, переводящее вершины  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$  в  $A_\mu, B_\mu, C_\mu$  соответственно. Видим, что в координатах  $Oxy$  преобразование  $g_{\lambda,\mu}$  можно задать как

$$x^* = \frac{\mu}{\lambda}x, \quad y^* = \frac{1-\mu}{1-\lambda}y,$$

где  $(x^*, y^*)$  — образ точки  $(x, y)$ . При этом каждая точка  $P_\lambda$  переходит в  $P_\mu$ , и соответственно гиперболы  $\gamma_\lambda$  переходит в гиперболы  $\gamma_\mu$ .

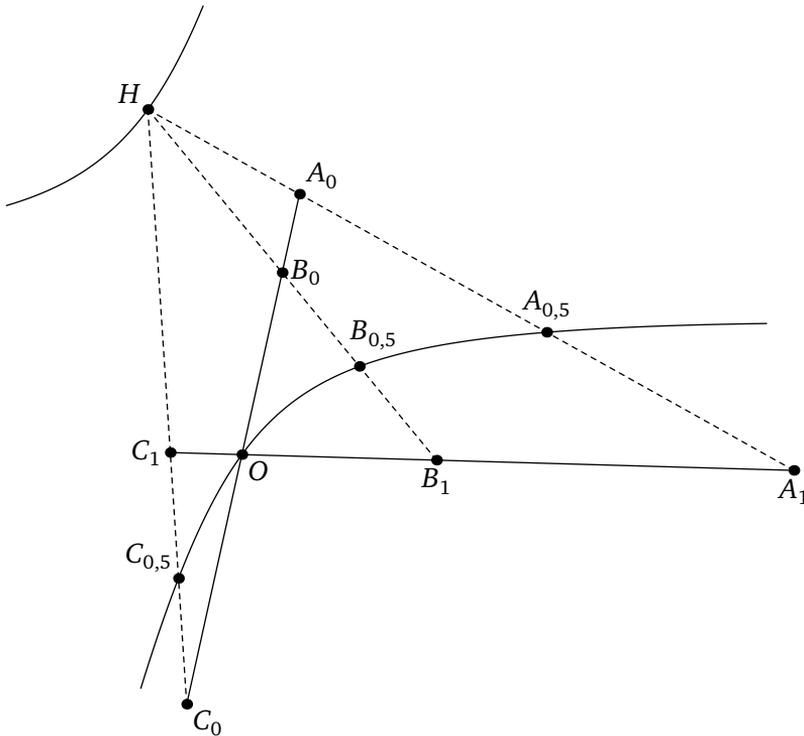


Рис. 3. Иллюстрация к случаю 2.1. Гипербола  $\gamma_\lambda$  при  $\lambda = 0,5$

2.1) Рассмотрим *конкурентный* случай, когда прямые  $a, b, c$  (по которым движутся вершины треугольников  $T_t$ ) пересекаются в одной точке  $H$  (рис. 3). Тогда отображение  $f: y \rightarrow x$  совпадает с центральным проектированием с центром  $H$ , поэтому все прямые вида  $Pf(P)$  проходят через  $H$ . Заметим, что при фиксированном  $\lambda \neq 0, 1$  точка  $H$  имеет вид  $P_\lambda$  для некоторой точки  $P$ , и также  $O = P_\lambda$  для  $P = O$ , поэтому гипербола  $\gamma_\lambda$  проходит через  $H$  и  $O$ .

Этот факт можно установить и непосредственной подстановкой в уравнение: находим

$$\alpha(\tau) = \frac{x_0}{1 - \frac{y_0}{\tau}},$$

где  $(x_0, y_0)$  — координаты точки  $H$ , откуда уравнение  $\gamma_\lambda$  имеет вид

$$x = \frac{\lambda x_0 y}{y - (1 - \lambda)y_0}.$$

Кроме того,  $\gamma_\lambda$  имеет асимптоты  $y = (1 - \lambda)y_0$  и  $x = \lambda x_0$  (геометрически описать положение асимптот можно, рассмотрев направления

прямых  $Pf(P)$ , близкие к направлению прямых  $x$  и  $y$ ). Отметим, что все гиперболы  $\gamma_\lambda$  имеют пару общих точек и параллельные асимптоты, поэтому входят в один пучок.

2.2) В неконкурентном случае известно, что прямые вида  $Pf(P)$  (когда  $P$  пробегает прямую  $y$ , а  $f(P)$  прямую  $x$ , с сохранением двойных отношений) касаются некоторой коники  $\varepsilon$ , в частности, прямые  $x$  и  $y$  — касательные к  $\varepsilon$ . На самом деле  $\varepsilon$  — эллипс или гипербола, случай параболы возникает выше в п. 1. Отметим, что гиперболы  $\gamma_\lambda$  дважды касаются коники  $\varepsilon$  (касание  $\gamma_\lambda$  и  $\varepsilon$  соответствует касанию прямой  $Pf(P)$  и  $\varepsilon$  в точке  $P_\lambda$ ).

### 1.9. Случай двух вырожденных треугольников, один из которых $T_\infty$

Пусть в линейном неособом семействе  $\{T_t\}$  ровно два вырожденных треугольника, первый из которых лежит на прямой  $y$ , а второй  $T_\infty$ .

Согласно п. 1.5 случай вырожденного треугольника  $T_\infty$  соответствует параллельности разностей скоростей  $(\vec{v}_b - \vec{v}_a) \parallel (\vec{v}_c - \vec{v}_a)$ . Иначе говоря, в аффинной системе координат  $Oxy$  с осью  $Ox$ , параллельной вектору  $(\vec{v}_b - \vec{v}_a)$ , векторы скоростей  $\vec{v}_a, \vec{v}_b, \vec{v}_c$  будут иметь равные ординаты.

Введём аффинную систему координат, принимая за ось ординат прямую  $y$ , а ось абсцисс  $Ox$  проводя параллельно вектору  $(\vec{v}_b - \vec{v}_a)$ . Перепараметризуем семейство так, чтобы на прямой  $y$  находились вершины треугольника  $T_0$ , так что

$$A_0 = (0, \tau_a), \quad B_0 = (0, \tau_b), \quad C_0 = (0, \tau_c).$$

Кроме того, считаем, что (равные) ординаты векторов  $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{B_0B_1}, \overrightarrow{C_0C_1}$  равны 1, так что

$$\overrightarrow{A_0A_1} = (\xi_a, 1), \quad \overrightarrow{B_0B_1} = (\xi_b, 1), \quad \overrightarrow{C_0C_1} = (\xi_c, 1)$$

(при этом абсциссы  $\xi_a, \xi_b, \xi_c$  различны, иначе семейство  $\{T_t\}$  — особое). Тогда  $A_\lambda$  имеет координаты  $(\lambda\xi_a, \tau_a + \lambda)$ , аналогично записываются координаты точек  $B_\lambda$  и  $C_\lambda$ .

Условия  $\alpha(\tau_a) = \xi_a, \alpha(\tau_b) = \xi_b, \alpha(\tau_c) = \xi_c$  определяют единственную дробно-линейную функцию  $\alpha$ . Соответственно для каждой точки  $P = P_0(0, \tau)$  прямой  $y$  определим  $P_\lambda = (\lambda\alpha(\tau), \tau + \lambda)$  (что согласуется с координатами  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ ). Отметим, что тогда отображение, сопоставляющее точке  $P$  прямую  $\{P_\lambda\}$ , фактически задаёт единственное отображение  $f$  с прямой  $y$  на бесконечно удалённую прямую, сохраняющее двойные отношения и такое, что  $f(A_0) = a, f(B_0) = b, f(C_0) = c$ .

Справедливо следующее утверждение:

При фиксированном  $\lambda \neq 0$  точки вида  $P_\lambda$  образуют гиперболу  $\gamma_\lambda$  с асимптотами, параллельными  $x$  и  $y$ .

Доказательство. Из координат  $P_\lambda = (\lambda\alpha(\tau), \tau + \lambda)$  в нашей аффинной системе координат  $Oxy$  видим, что  $P_\lambda$  движется по гиперболе  $x = \lambda\alpha(y - \lambda)$ . (Нетрудно заметить, что случай, когда  $\alpha$  оказывается линейной функцией, соответствует коллинеарности точек  $A_1, B_1, C_1$ , что противоречит нашим условиям.)  $\square$

Гипербола  $\gamma_\lambda$  однозначно задаётся следующими условиями: она содержит вершины  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$  и её асимптоты параллельны прямым  $x$  и  $y$ .

При  $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$  существует единственное аффинное преобразование  $g_{\lambda,\mu}$  плоскости, переводящее вершины  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$  в  $A_\mu, B_\mu, C_\mu$  соответственно. Видим, что в координатах  $Oxy$  преобразование  $g_{\lambda,\mu}$  можно задать как

$$x^* = \frac{\mu}{\lambda}x, \quad y^* = y + \mu - \lambda.$$

При этом каждая точка  $P_\lambda$  переходит в  $P_\mu$ , и соответственно гипербола  $\gamma_\lambda$  переходит в гиперболу  $\gamma_\mu$ .

0.1) Рассмотрим конкурентный случай, когда прямые  $a, b, c$  пересекаются в одной точке  $H(x_0, y_0)$ . Тогда упомянутое отображение  $f$  совпадает с центральным проектированием с центром  $H$ , поэтому все прямые вида  $\{P_\lambda\}$  (с фиксированной точкой  $P$ ) также проходят через  $H$ . Покажем, что

гиперболы  $\gamma_\lambda$  проходят через  $H$  и имеют асимптоту  $y$ .

Доказательство. Действительно, запишем условие того, что для данного  $P$  прямая  $\{P_\lambda\}$  проходит через точку  $H(x_0, y_0)$ :  $\lambda_0\alpha(\tau) = x_0, \tau + \lambda_0 = y_0$  выполнено для некоторого  $\lambda_0$ . Исключая  $\lambda_0$ , получаем

$$\alpha(\tau) = \frac{x_0}{y_0 - \tau} \quad (\text{при всех } \tau).$$

Значит, при фиксированном  $\lambda$  гипербола  $\gamma_\lambda$  имеет уравнение

$$x = \frac{\lambda x_0}{\lambda + y_0 - y}.$$

Как видим,  $x=0$  — асимптота, и  $(x_0, y_0)$  удовлетворяет уравнению.  $\square$

0.2) В неконкурентном случае прямые вида  $\{P_\lambda\}$  (для фиксированной точки  $P$ ) касаются некоторой параболы  $\varepsilon$ , в частности, её касаются прямая  $y$  и бесконечно удалённая прямая. Отметим, что, как и в п. 1.8, гиперболы  $\gamma_\lambda$  дважды касаются параболы  $\varepsilon$ .

## § 2. ОТНОШЕНИЕ ОРТОЛОГИЧНОСТИ

### 2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРТОЛОГИЧНОСТИ

Ещё раз скажем, что два треугольника  $ABC$  и  $A'B'C'$ , где  $A'B'C'$  — невырожденный (а  $ABC$  — возможно, вырожденный), называются *ортологичными*, если перпендикуляры из  $A$  на  $B'C'$ , из  $B$  на  $C'A'$  и из  $C$  на  $A'B'$  пересекаются в одной точке. Факт ортологичности треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  будем обозначать  $ABC \perp A'B'C'$ . Если треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  (с фиксированным порядком вершин) обозначить  $T$  и  $T'$ , то получим более короткую запись ортологичности:  $T \perp T'$ . Общая точка перпендикуляров, указанных выше, называется *центром ортологии*; будем обозначать его  $O_{T,T'}$ .

### 2.2. РЕФЛЕКСИВНОСТЬ

Очевидно, ортологичность рефлексивна:  $T \perp T$ , и центр ортологии  $O_{T,T}$  — это ортоцентр треугольника  $T$ .

### 2.3. ВЗАИМНОСТЬ (СИММЕТРИЧНОСТЬ)

Как известно, условие ортологичности для невырожденных треугольников симметрично, т. е.  $T \perp T' \Rightarrow T' \perp T$ . Значит, если  $T \perp T'$ , то существует второй центр ортологии  $O_{T',T}$ , вообще говоря, отличный от  $O_{T,T'}$  (рис. 4).

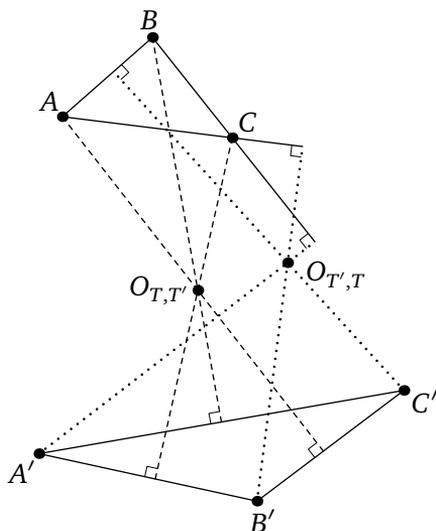


Рис. 4. Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  ортологичны.  
Точки  $O_{T',T}$  и  $O_{T,T'}$  — их центры ортологии

Симметричность отношения ортологичности следует, например, из известного условия Карно — Штейнера

$$A'B^2 - A'C^2 + B'C^2 - B'A^2 + C'A^2 - C'B^2 = 0, \quad (3)$$

эквивалентного условию ортологичности  $ABC \perp A'B'C'$ .

Понятно, что если вершину одного треугольника двигать вдоль перпендикуляра к соответствующей стороне другого треугольника (скажем, точку  $A$  двигать вдоль перпендикуляра к  $B'C'$ ), то как условие ортологичности, так и левая часть (3) остаются неизменными.

Равенство (3) возьмём в качестве определения ортологичности для пары вырожденных треугольников.

#### 2.4. ОРТОЛОГИЧНЫЕ ЧЕТВЁРКИ

Пусть  $D = O_{T, T'}$  и  $D' = O_{T', T}$  — центры ортологичности для невырожденных ортологичных треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ . Имеем  $AB \perp C'D'$ ,  $AC \perp B'D'$  и т. д. — шесть перпендикулярностей для четвёрок точек  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$ . Как видим, в этой конструкции четыре пары точек  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B'$ ,  $C$  и  $C'$ ,  $D$  и  $D'$  равноправны. Поэтому, например,  $A$  и  $A'$  — центры ортологичности для ортологичных треугольников  $B CD$  и  $B' C' D'$ , и т. д. Можно назвать четвёрки  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$  ортологичными. Шесть указанных выше перпендикулярностей берутся за определение ортологичных тетраэдров  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  в пространстве (см., например, [7]), в этом смысле ортологичные четвёрки на плоскости можно считать вырожденными ортологичными тетраэдрами. Нетрудно понять (например, из симметрии отношения ортологичности), что из пяти указанных выше перпендикулярностей следует шестая.

Докажем, что ортологичные четвёрки аффинно эквивалентны, иначе говоря, аффинное преобразование, переводящее  $A, B, C$  соответственно в  $A', B', C'$ , переводит  $D = O_{T, T'}$  в  $D' = O_{T', T}$ . Этот факт известен как теорема Ридо (см., например, [3]).

Доказательство. Положим  $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{D'A'} = \vec{a}'$ ,  $\overrightarrow{D'B'} = \vec{b}'$ ,  $\overrightarrow{D'C'} = \vec{c}'$ . Случай, когда среди векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}'$ ,  $\vec{b}'$ ,  $\vec{c}'$  есть нулевой, легко разбирается. Далее считаем, что все эти векторы ненулевые.

Из перпендикулярностей вытекает  $\vec{a}'(\vec{b} - \vec{c}) = 0$ , поэтому скалярные произведения  $\vec{a}'\vec{b}$  и  $\vec{a}'\vec{c}$  равны. И все шесть аналогичных скалярных произведений равны одной и той же величине, обозначим её  $p$ . Заметим также, что  $\vec{a}\vec{a}' \neq p$ , иначе из равенств  $\vec{a}\vec{a}' = \vec{b}\vec{a}' = \vec{c}\vec{a}' = p$  последовала бы коллинеарность точек  $A, B, C$ .

Пусть  $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$  и  $\alpha'\vec{a}' + \beta'\vec{b}' + \gamma'\vec{c}' = \vec{0}$ , где  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ . Чтобы завершить доказательство и установить нужную аффинную эквивалентность, нам достаточно показать, что  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ ,  $\gamma = \gamma'$ . Домножив скалярно первое равенство на  $\vec{a}'$ , имеем  $\alpha\vec{a} \cdot \vec{a}' + (\beta + \gamma)p = 0$ , откуда  $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{a}' - p) + (\alpha + \beta + \gamma)p = 0$ , и  $\alpha$  однозначно находится как  $\alpha = p / (p - \vec{a}\vec{a}')$ . Проведя аналогичные рассуждения, получим, что  $\alpha'$  равно тому же значению.  $\square$

Приведём также обобщение теоремы Ридо, обнаруженное А. Мякишевым [8, задача 4.2]: если пары треугольников  $A_iA_jA_k$  и  $B_iB_jB_k$  ортологичны для всех  $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , то четырёхугольники  $A_1A_2A_3A_4$  и  $B_1B_2B_3B_4$  аффинно эквивалентны.

### 2.5. ОРТОЛОГИЧНОСТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ НА КЛАССАХ ГОМОТЕТОВ

Из определения ясно, что факт  $T \perp T'$  сохраняется при замене треугольника  $T'$  на его сдвиг или гомотет. В силу симметрии ортологичности, то же верно для  $T$ . Поэтому отношение ортологичности треугольников  $T \perp T'$  поднимается до отношения  $[T] \perp [T']$  на классах гомотетов или, эквивалентно, на (упорядоченных) тройках направлений.

Ясно, что если к одному из двух ортологичных треугольников, скажем к  $ABC$ , применить сдвиг или гомотетию, этому сдвигу или гомотетии подвергнется вся четвёрка  $A, B, C, O_{T, T'}$  (при этом четвёрка  $A', B', C', O_{T', T}$  остаётся неизменной).

### 2.6. ОРТОЛОГИЧНОСТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ НА ПАРАХ ВЕКТОРОВ

Поскольку факт ортологичности  $ABC \perp A'B'C'$  не меняется при сдвиге одного из треугольников, отношение ортологичности можно понимать как отношение на множестве упорядоченных пар векторов (как и ранее, здесь треугольнику  $ABC$  ставим в соответствие пару векторов  $(\vec{b}, \vec{c}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ).

Соотношение (3) может быть преобразовано ко многим эквивалентным формам с использованием скалярного произведения. В частности, (3) эквивалентно равенству

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0.$$

Таким образом, отношение ортологичности на парах векторов  $(\vec{b}, \vec{c}) \perp (\vec{b}', \vec{c}')$  можно задать равенством

$$\vec{b}\vec{c}' - \vec{b}'\vec{c} = 0. \tag{4}$$

2.7. Ортологичность вырожденных треугольников

Пусть  $ABC$  и  $A'B'C'$  — вырожденные треугольники, так что  $\vec{c} = \alpha\vec{b}$  и  $\vec{c}' = \alpha'\vec{b}'$ . Тогда согласно (4) имеем

$$ABC \perp A'B'C' \iff \vec{b} \cdot (\alpha'\vec{b}') - (\alpha\vec{b}) \cdot \vec{b}' = 0 \iff (\alpha - \alpha')\vec{b}\vec{b}' = 0.$$

Видим, что  $ABC \perp A'B'C'$  выполняется в двух случаях: при  $\vec{b} \perp \vec{b}'$ , т. е. когда прямые  $ABC$  и  $A'B'C'$  перпендикулярны, а также в случае  $\alpha = \alpha'$ , — иначе говоря, когда вырожденные треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  «подобны».

2.8. Случай совпадения центров ортологии

Пусть  $ABC$  и  $A'B'C'$  — два ортологичных треугольника с совпадающими центрами ортологии (рис. 5):  $O = O_{T,T'} = O_{T',T}$ , тогда  $OA \perp B'C'$ ,  $OB \perp C'A'$ ,  $OC \perp A'B'$ ,  $OA' \perp BC$ ,  $OB' \perp CA$ ,  $OC' \perp AB$ . Положим  $C_0 = AB \cap OC'$ ,  $C'_0 = A'B' \cap OC$  и т. д., так что  $A_0B_0C_0$  — педальный треугольник точки  $O$  относительно треугольника  $ABC$  и аналогично  $A'_0B'_0C'_0$  — педальный треугольник точки  $O$  относительно  $A'B'C'$ . Тогда  $OC_0B$  и  $OB'_0C'$  — подобные прямоугольные треугольники, откуда получаем

$$\vec{OB}'_0 \cdot \vec{OB} = \vec{OC}_0 \cdot \vec{OC}'_0.$$

Все аналогичные произведения также равны. Эту ситуацию можно описать например, так:  $A'B'C'$  и  $ABC$  — образы соответственно педальных треугольников  $A'_0B'_0C'_0$  и  $A_0B_0C_0$  при инверсии (возможно,

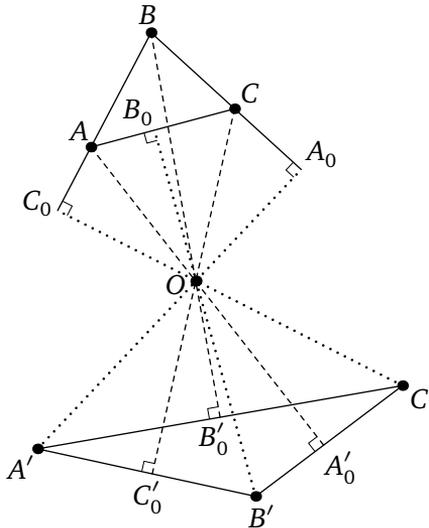


Рис. 5. Случай совпадения центров ортологии

мнимого радиуса) с центром  $O$ . Или, эквивалентно, прямые, содержащие стороны одного из треугольников  $T, T'$ , являются полярами соответствующих вершин другого треугольника относительно окружности с центром  $O$ .

Известно (см., например, задачу 20 из [1]), что в случае  $O_{T,T'} = O_{T',T}$  треугольники  $T$  и  $T'$  перспективны (т. е.  $AA', BB', CC'$  конкурентны).

Согласно п. 2.5, из общего случая ортологичных треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  можно получить случай совпадения центров ортологии сдвигом одной из четвёрок  $A, B, C, O_{T,T'}$  и  $A', B', C', O_{T',T}$ .

### 2.9. Ортологичность и теорема Максвелла

Можно ввести ещё одно отношение (его можно назвать *гармоничностью*) на классах гомететов невырожденных треугольников (или на тройках различных направлений). Скажем, что класс  $[ABC]$  гармоничен классу  $[A'B'C']$ , если прямые, проходящие через  $A, B, C$  и параллельные соответственно прямым  $B'C', C'A', A'B'$ , пересекаются в одной точке.

Пусть классу  $[ABC]$  соответствует тройка направлений  $a, b, c$ , а классу  $[A'B'C']$  — тройка направлений  $a', b', c'$ . Тогда ортологичность тройки  $(a, b, c)$  тройке  $(a', b', c')$  равносильна гармоничности тройки  $(a, b, c)$  тройке  $(a^\perp, b^\perp, c^\perp)$  (здесь через  $x^\perp$  обозначено направление, перпендикулярное  $x$ ). Последнее равносильно гармоничности тройки  $(a^\perp, b^\perp, c^\perp)$  тройке  $(a', b', c')$ , поскольку одновременный поворот всех направлений на один и тот же угол сохраняет как гармоничность, так и ортологичность. Видим, что факты о симметричности отношений ортологичности и гармоничности равносильны. Факт о симметричности отношения гармоничности известен как теорема Максвелла [6].

Приведём одну из возможных схем *аффинного* доказательства теоремы Максвелла без использования ортологичности.

Пусть прямые  $a, b, c, a', b', c'$ , параллельные соответственно сторонам  $BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B'$  треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , проходят через одну точку  $O$ . Пересечём эти прямые с произвольной прямой  $l$  и получим в пересечении точки  $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$ . Условие гармоничности  $ABC$  и  $A'B'C'$  равносильно равенству

$$\frac{\overrightarrow{A_0B'_0}}{\overrightarrow{B'_0C_0}} \cdot \frac{\overrightarrow{C_0A'_0}}{\overrightarrow{A'_0B_0}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_0C'_0}}{\overrightarrow{C'_0A_0}} = -1 \tag{5}$$

(это можно доказать, например, используя теорему Чевы в синусной форме), откуда видна взаимность. □

Термин *гармоничность* был выбран нами из-за того, что равенство (5) имеет вид «циклическое отношение  $2n$  точек равно  $-1$ », а, как известно, аналогичное равенство при  $n = 2$  определяет гармоническую четвёрку.

Рассмотрим две четвёрки точек  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$ , в которых нет тройки коллинеарных точек. Пусть  $AB \parallel C'D'$ ,  $AC \parallel B'D'$ ,  $AD \parallel B'C'$ ,  $BC \parallel A'D'$ ,  $BD \parallel A'C'$ ,  $CD \parallel A'B'$  (так что тройки  $ABC$  и  $A'B'C'$  — гармоничные, или, эквивалентно, тройки  $ABD$  и  $A'B'D'$  — гармоничные, и т. д.). Тогда четвёрки  $A, B, C, D$  и  $A', B', C', D'$  аффинно эквивалентны. Этот факт равносильно теореме Ридо об аффинной эквивалентности ортологичных четвёрок (но, конечно, может быть доказан и в рамках аффинной геометрии, без использования ортологичности).

### 2.10. $\alpha$ -ортологичность

Скажем, что треугольник  $ABC$  является  $\alpha$ -ортологичным треугольнику  $A'B'C'$ , если существует точка  $P$  такая, что

$$\angle(AP, B'C') = \angle(BP, C'A') = \angle(CP, A'B') = \alpha.$$

Тогда «обычная» ортологичность — это  $\frac{\pi}{2}$ -ортологичность, а введённое выше отношение гармоничности совпадает с 0-ортологичностью.

Если треугольник  $ABC$   $\alpha$ -ортологичен треугольнику  $A'B'C'$ , то после поворота на  $\alpha$  (или на  $\alpha + \pi/2$ ) он становится соответственно гармоничным (ортологичным) треугольнику  $A'B'C'$ .

Отсюда ясно, что если  $ABC$   $\alpha$ -ортологичен треугольнику  $A'B'C'$ , то  $A'B'C'$  ( $-\alpha$ )-ортологичен треугольнику  $ABC$ .

### 2.11. ПРИМЕРЫ

#### (1) Педальный треугольник

Пусть  $T$  — педальный треугольник точки  $P$  для треугольника  $ABC$  (рис. 6). Тогда  $T \perp ABC$ , при этом центры ортологии — это точка  $P$  и её изогонально сопряжённая точка.

Более общо,  $\alpha$ -педальный треугольник точки  $P$   $\alpha$ -ортологичен треугольнику  $ABC$  (с теми же центрами  $\alpha$ -ортологии и  $(-\alpha)$ -ортологии).

#### (2) Радикальные оси

Радикальная ось двух окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$  — это множество точек  $X$  таких, что  $XO_1^2 - XO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$ . Радикальная ось — это прямая, перпендикулярная  $O_1O_2$ . В случае пересекающихся окружностей радикальная ось проходит через точки пересечения окружностей.

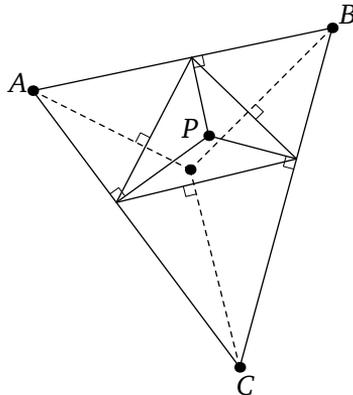


Рис. 6. Педальный треугольник точки  $P$

Пусть даны три окружности  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , с центрами  $O_i$ , не лежащими на одной прямой. Пусть  $X_{ij}$  — произвольная точка на радикальной оси окружностей  $\omega_i$  и  $\omega_j$ . Тогда  $O_1O_2O_3 \perp X_{23}X_{31}X_{12}$  (например, легко проверяется (3)). Этот факт эквивалентен тому, что три радикальные оси пересекаются в одной точке (радикальном центре).

**(3) Замена на гомотет**

Идея о том, что ортологичность не меняется при замене одного из треугольников на гомотет, весьма полезна. Здесь проиллюстрируем её решением следующей задачи.

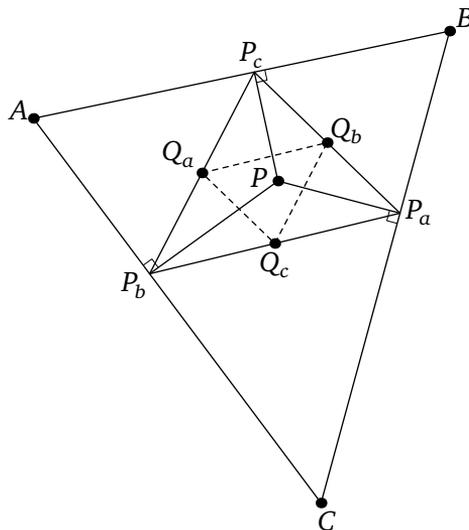


Рис. 7. К задаче о замене на гомотет

**Задача.** Рассмотрим проекции  $P_a, P_b, P_c$  точки  $P$  на прямые, содержащие стороны треугольника  $ABC$  (рис. 7). Через середину  $P_b P_c$  проводится прямая  $l_a$  перпендикулярно  $BC$ . Аналогично определяются прямые  $l_b$  и  $l_c$ . Докажите, что  $l_a, l_b, l_c$  конкurrentны.

**Решение.** Обозначим  $Q_a, Q_b, Q_c$  середины соответствующих сторон треугольника  $P_a P_b P_c$ . Утверждение задачи означает, что  $Q_a Q_b Q_c \perp ABC$ . Но это верно, поскольку  $P_a P_b P_c \perp ABC$ , а  $P_a P_b P_c$  и  $Q_a Q_b Q_c$  гомотетичны.

### § 3. Ортологичность и линейные семейства

Продолжим заниматься линейными семействами треугольников.

#### 3.1. Ортологичность данному треугольнику.

##### Линейность $O_{T_t, T'}$

Пусть два треугольника из линейного семейства  $\{T_t\}$  ортологичны данному треугольнику  $T'$ . Тогда  $T_t \perp T'$  при любом  $t$ .

Кроме того, если  $T'$  невырожденный, то центр ортологии  $O_{T_t, T'}$  движется линейно.

**Доказательство.** Вначале предположим, что  $T'$  невырожденный. Пусть, например,  $T_\lambda \perp T'$  и  $T_\mu \perp T'$  для  $\lambda \neq \mu$ . Пусть  $O_t$  — точка, движущаяся линейно и такая, что  $O_\lambda = O_{T_\lambda, T'}$  и  $O_\mu = O_{T_\mu, T'}$ . Так как  $A_\lambda O_\lambda \perp B'C'$  и  $A_\mu O_\mu \perp B'C'$ , получаем, что  $A_t O_t \perp B'C'$  для любого  $t$ . Проводя аналогичные рассуждения для других вершин, получаем, что перпендикуляры из  $A_t$  на  $B'C'$ , из  $B_t$  на  $C'A'$ , из  $C_t$  на  $A'B'$  пересекаются в точке  $O_t$ , т. е.  $O_t = O_{T_t, T'}$  для любого  $t$ .

Чтобы доказать первое утверждение без использования невырожденности  $T'$ , достаточно воспользоваться линейностью скалярного произведения и с учётом (1) и (4) вывести из равенств  $\vec{b}'\vec{c}_0 - \vec{c}'\vec{b}_0 = 0$  и  $\vec{b}'\vec{c}_1 - \vec{c}'\vec{b}_1 = 0$  равенство  $\vec{b}'\vec{c}_t - \vec{c}'\vec{b}_t = 0$  для произвольного  $t$ .  $\square$

Итак, для невырожденного треугольника  $T'$  траектория  $O_{T_t, T'}$  является прямой или вырождается в точку. Легко видеть, что вырождение происходит в случае, когда векторы скорости вершин треугольника  $T_t$  перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника  $T'$ . В частности, если треугольник  $T'$  сам принадлежит семейству  $\{T_t\}$ , то траектория  $O_{T_t, T'}$  может вырождаться в точку — ортоцентр треугольника  $T'$ .

Заметим также, что траектория  $O_{T_t, T'}$  не изменяется при замене  $T'$  на его гомотет или сдвиг.

### 3.2. ЛИНЕЙНОЕ ОРТОЛОГИЧНОЕ СЕМЕЙСТВО

Линейное семейство треугольников, в котором любые два треугольника ортологичны, для краткости будем называть *ортологичным семейством* треугольников. Аналогично определим ортологичные семейства классов гомотетов.

Верно следующее достаточное условие ортологичности семейства.

*Пусть два треугольника из семейства  $\{T_t\}$  ортологичны друг другу. Тогда  $\{T_t\}$  — ортологичное семейство.*

**Доказательство.** Не умаляя общности считаем, что  $T_0 \perp T_1$ . Поскольку  $T_0 \perp T_0$ , из п. 3.1 следует, что  $T_0 \perp T_t$  при всех  $t$ . Аналогично  $T_1 \perp T_t$  при всех  $t$ . Теперь для каждого фиксированного  $\lambda$  доказано, что  $T_1 \perp T_\lambda$  и  $T_0 \perp T_\lambda$ . Отсюда снова по п. 3.1 следует, что  $T_t \perp T_\lambda$  при всех  $t$ .  $\square$

Аналогично, если в линейном семействе классов гомотетов какие-то два различных класса, скажем  $[T_0]$  и  $[T_1]$ , ортологичны, то это семейство ортологично.

Более того, в таком случае (т. е. при  $[T_0] \neq [T_1]$ ) оказывается, что *треугольник  $T$  ортологичен обоим треугольникам  $T_0$  и  $T_1$  тогда и только тогда, когда  $[T]$  принадлежит линейному семейству, порождённому  $[T_0]$  и  $[T_1]$* . Поэтому ортологичные семейства классов — максимальные множества, в которых любая пара треугольников ортологична. Объяснение последнего факта мы увидим в п. 4.7 (хотя получить доказательство можно и непосредственной выкладкой).

### 3.3. ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ ОРТОЛОГИЧНЫХ СЕМЕЙСТВ

Пусть в ортологичном семействе есть два вырожденных треугольника. Тогда, согласно п. 2.7, эти треугольники либо подобны, либо лежат на перпендикулярных прямых. В первом случае, согласно п. 1.6, семейство будет вырожденным, оно будет состоять из вырожденных «подобных» треугольников.

Значит, в невырожденном ортологичном семействе два вырожденных треугольника могут лишь лежать на перпендикулярных прямых. Оказывается, это утверждение можно усилить до следующего.

*Пусть  $\{\{T_t\}\}$  — неособое невырожденное линейное ортологичное семейство классов. Тогда в нём ровно два класса вырожденных треугольников, и эти классы соответствуют перпендикулярным направлениям.*

Доказательство этого факта дадим ниже в п. 4.5 (хотя доказать это можно и непосредственно).

Итак, неособое невырожденное ортологичное семейство  $\{T_t\}$  содержит ровно два вырожденных треугольника, один из которых — возможно, «треугольник на бесконечности»  $T_\infty$ .

В первом случае, аналогично п. 1.8, ортологичное семейство перепараметризуем так, чтобы вырожденными треугольниками были  $T_1$  и  $T_0$  и они лежали соответственно на осях  $Ox$  и  $Oy$  прямоугольной декартовой системы координат  $Oxy$ .

В случае вырождения  $T_\infty$  считаем, что другой вырожденный треугольник — это  $T_0$  и он лежит на прямой  $y$ . Этот случай соответствует условиям  $\vec{v}_a - \vec{v}_b \perp y$  и  $\vec{v}_a - \vec{v}_c \perp y$ . Иначе говоря,  $T_\infty$  вырождается, если равны проекции скоростей вершин  $A_t, B_t, C_t$  на ось  $y$ , т. е. проекция  $A_t B_t C_t$  на  $y$  — это сдвиг (вдоль  $y$ ) вырожденного треугольника  $A_0 B_0 C_0$ .

### 3.4. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОРТОЛОГИЧНЫХ СЕМЕЙСТВ

#### (1) Ортопол

Пусть  $T_0$  — проекция треугольника  $T_1$  на некую прямую  $\ell$ . Как известно (и легко проверяется по (3)),  $T_0 \perp T_1$ . Центр ортологии  $O_{T_0, T_1}$  известен как *ортопол* (*ортополлюс*) треугольника  $T_1$  и прямой  $\ell$ . Ортологичное линейное семейство, порождённое  $T_0$  и  $T_1$ , содержит образы  $T_1$  при всевозможных растяжениях, сжатиях, отражении относительно  $\ell$ . В частности, из этого примера видим, что любой треугольник ортологичен своему зеркальному отражению (а значит, и любому сдвигу зеркального отражения). Конечно, ортологичность треугольника и его отражения можно доказать и непосредственно — пользуясь (4) или же явно указав положение одного из центров ортологии (он лежит на описанной окружности треугольника).

В соответствии с п. 3.3, в рассмотренном семействе  $T_\infty$  вырожден.

#### (2) Критерий ортологичности педальных треугольников

Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $O$  — центр его описанной окружности,  $A_0 B_0 C_0$  и  $A_1 B_1 C_1$  — педальные треугольники точек  $P_0$  и  $P_1$ .

Установим следующий критерий (он, в частности, предлагался в виде задачи 17 на заочном туре олимпиады им. И. Шарыгина 2009 года):  $A_0 B_0 C_0 \perp A_1 B_1 C_1 \iff P_0, P_1, O$  лежат на одной прямой.

Треугольники  $A_0 B_0 C_0$  и  $A_1 B_1 C_1$  порождают семейство педальных треугольников  $A_t B_t C_t$  точек  $P_t$ , движущихся по прямой  $P_0 P_1$ . Каждый из треугольников этого семейства ортологичен  $ABC$ , значит, семейство  $A_t B_t C_t$  ортологично тогда и только тогда, когда соответствующее семейство классов  $[A_t B_t C_t]$  содержит класс  $[ABC]$ . Но педальный треугольник гомотетичен  $ABC$  только для точки  $O$ .

Другое объяснение связано с рассмотрением вырожденных треугольников семейства  $A_t B_t C_t$  — прямых Симсона точек пересечения прямой  $P_0 P_1$  с окружностью  $(ABC)$ . Семейство  $A_t B_t C_t$  ортологично тогда и только тогда, когда две такие прямые существуют и перпендикулярны, т. е. когда точки пересечения прямой  $P_0 P_1$  с окружностью  $(ABC)$  существуют и диаметрально противоположны.

### (3) Задача Л. Емельянова

Задача (Всероссийская олимпиада 2002 г.). Докажите, что прямые, проходящие через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника параллельно соответствующим биссектрисам, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть  $X_a, X_b, X_c$  — точки касания сторон треугольника  $ABC$  с вневписанными окружностями. Достаточно показать, что треугольник  $X_a X_b X_c$  ортологичен какому-то треугольнику  $T$ , у которого стороны имеют направления внешних биссектрис треугольника  $ABC$ .

Способ 1. В качестве  $T$  возьмём треугольник  $K_a K_b K_c$  с вершинами в точках касания с вписанной окружностью. Поскольку  $K_a$  и  $X_a$  симметричны относительно середины  $A_0$  стороны  $BC$  (и аналогичное утверждение верно для пар  $K_b, X_b$  и  $K_c, X_c$ ), линейное семейство, порождённое треугольниками  $K_a K_b K_c$  и  $X_a X_b X_c$ , содержит серединный треугольник  $A_0 B_0 C_0$ . Так как  $K_a K_b K_c \perp ABC$ , получаем, что  $K_a K_b K_c \perp A_0 B_0 C_0$  (замена на гомотет). Значит, наше семейство ортологично, откуда  $K_a K_b K_c \perp X_a X_b X_c$ .

Способ 2. На самом деле этот сюжет сводится к примеру 2, так как  $K_a K_b K_c$  — педальный треугольник центра  $I$  вписанной окружности, а  $X_a X_b X_c$  — педальный треугольник так называемой точки Бэвена, симметричной  $I$  относительно  $O$ .

Способ 3 (предложил А. Бучаев). В качестве  $T$  возьмём треугольник  $A'B'C'$  с вершинами в серединах дуг  $BAC, CBA, ACB$ . Нетрудно доказать равенство отрезков  $BX_c = CX_b$ , откуда следует равенство треугольников  $A'X_c B$  и  $A'X_b C$ . Отсюда следует равенство  $A'X_c = A'X_b$ . Из последнего равенства и аналогичных ему ортологичность  $A'B'C' \perp X_a X_b X_c$  очевидно следует в силу (3).

### (4) Задача о серединах высот

Задача (Европейский математический кубок 2013 г.). Точки  $X, Y$  и  $Z$  — середины высот  $AD, BE$  и  $CF$  треугольника  $ABC$  соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из  $D$  на  $YZ$ , из  $E$  на  $ZX$  и из  $F$  на  $XY$ , пересекаются в одной точке.

РЕШЕНИЕ. Так как  $X, Y, Z$  лежат на высотах треугольника  $ABC$ , получаем, что  $ABC \perp XYZ$ . Значит,  $ABC$  и  $XYZ$  порождают ортоголичное линейное семейство. В этом семействе содержится и треугольник  $DEF$  (если  $ABC$  отвечает значению  $t = 0$ , а  $XYZ$  — значению  $t = 1$ , то  $DEF$  — значению  $t = 2$ ). Поскольку в этом семействе любые два треугольника ортоголичны, имеем  $DEF \perp XYZ$ , что и требуется.

### (5) Доказательство теоремы Сонда

Пусть  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$  — два данных ортоголичных и перспективных треугольника. Теорема Сонда утверждает, что тогда центры ортологии и персепктор лежат на одной прямой, причём эта прямая перпендикулярна оси перспективы (прямой Дезарга) данных треугольников (рис. 8).

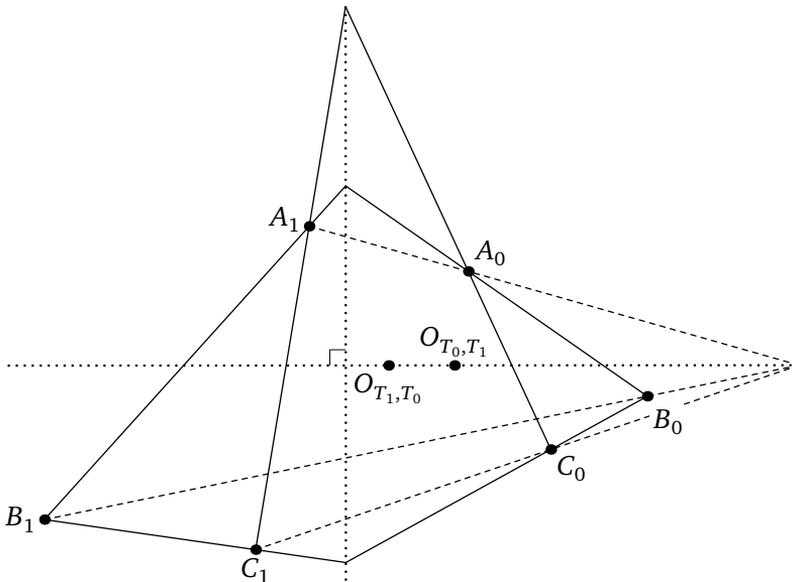


Рис. 8. Иллюстрация к теореме Сонда

Доказательство. Треугольники  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$  порождают ортоголичное семейство  $A_tB_tC_t$ . Пусть  $H$  — персепктор треугольников  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$  (он же — персепктор любых двух треугольников семейства). Достаточно показать, что при  $t \neq 0$  вектор  $\overrightarrow{HO_{T_t, T_0}}$  перпендикулярен оси перспективы треугольников  $A_0B_0C_0$  и  $A_tB_tC_t$ . Тогда для  $t = 1$  получим, что  $\overrightarrow{HO_{T_1, T_0}}$  перпендикулярен оси перспективы треугольников  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$ . Меняя  $T_0$  и  $T_1$  ролями, также докажем, что  $\overrightarrow{HO_{T_0, T_1}}$  перпендикулярен оси перспективы треугольников  $A_0B_0C_0$  и  $A_1B_1C_1$ , и это докажет теорему Сонда.

Заметим, что так как точка  $O_{T_t, T_0}$  движется линейно, вектор  $\vec{u}(t) = \overrightarrow{HO_{T_t, T_0}}$  зависит линейно от  $t$  (то есть координаты этого вектора в любой декартовой системе координат — линейные функции от  $t$ ).

Далее покажем, что точка  $A_0B_0 \cap A_tB_t$  движется линейно (по прямой  $A_0B_0$ ). Аналогично устанавливается, что  $A_0C_0 \cap A_tC_t$  движется линейно, и тогда направляющий вектор оси перспективы  $\vec{v}(t)$ , соединяющий эти точки, тоже зависит линейно от  $t$ .

Для доказательства выберем систему координат, в которой прямая  $A_0B_0$  совпадает с осью  $y$ , так что точка  $A_0B_0 \cap A_tB_t$  имеет координаты  $(0, y_1)$ , а точки  $A_t$  и  $B_t$  — координаты  $(\alpha t, \beta t + \gamma)$  и  $(\alpha' t, \beta' t + \gamma')$  для некоторых констант  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ . Условие коллинеарности векторов, соединяющих  $A_t$  и  $B_t$  с  $A_0B_0 \cap A_tB_t$  записывается как

$$\alpha t(\beta' t + \gamma' - y_1) = \alpha' t(\beta t + \gamma - y_1),$$

откуда после сокращения на  $t$  видно, что  $y_1$  зависит линейно от  $t$ .

Итак, нам нужно доказать, что  $\vec{u}(t) \perp \vec{v}(t)$  для всех  $t$ , или, эквивалентно,  $(\vec{u}(t), \vec{v}(t)) \equiv 0$ , где векторы  $\vec{u}(t)$  и  $\vec{v}(t)$  зависят от  $t$  линейно. Так как скалярное произведение  $(\vec{u}(t), \vec{v}(t))$  — многочлен от  $t$  степени не более чем 2, достаточно найти три различных значения  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , для которых выполнено  $\vec{u}(t_i) \perp \vec{v}(t_i)$ . Пусть  $t_1$  соответствует положению  $A_{t_1} = H$ . Тогда, как легко видеть, ось перспективы треугольников  $A_0B_0C_0$  и  $A_{t_1}B_{t_1}C_{t_1}$  совпадает с прямой  $B_0C_0$ , а вектор  $\overrightarrow{HO_{T_{t_1}, T_0}} = A_{t_1}O_{T_{t_1}, T_0}$  перпендикулярен  $B_0C_0$ , что и требуется установить. Аналогично, пусть  $t_2$  и  $t_3$  соответствуют положениям  $B_{t_2} = H$  и  $C_{t_3} = H$ . В случае неособого семейства  $A_tB_tC_t$  три значения параметра  $t_1, t_2, t_3$  попарно различны, поскольку точки  $A_t, B_t, C_t$  попарно различны, и в этом случае теорема доказана.

Если же семейство  $A_tB_tC_t$  особое, то у треугольников этого семейства одна из сторон не меняет направления,  $A_0B_0 \parallel A_tB_t$  для любого  $t$ . Тогда в рассуждениях выше можно сделать следующие упрощения: вектор  $\vec{v}(t)$  не меняет направления и будет параллелен  $A_0B_0$ , и надо понять, что вектор  $\vec{u}(t)$  всегда перпендикулярен  $A_0B_0$ . Так как  $\vec{u}(t)$  зависит от  $t$  линейно, достаточно проверить это для двух различных значений параметра. Подходят  $t = t_2$  и  $t = t_3$ , соответствующие положениям  $B_{t_2} = H$  и  $C_{t_3} = H$ , кроме случая, когда  $A_{t_2} = B_{t_2} = C_{t_2} = H$  и семейство  $A_tB_tC_t$  состоит из гомотетичных треугольников. Но в последнем случае теорема очевидна.  $\square$

### (6) Задача о мухах на высотах

Приведём формулировку задачи Е. Бакаева, которая на самом деле и послужила отправной точкой для написания этой работы.

Задача. Три мухи сели в разные вершины треугольника  $ABC$  и поползли по прямым, содержащим его высоты, с постоянными скоростями. В какой-то момент все мухи оказались на одной прямой  $x$ . Ещё через какое-то время они все оказались на одной прямой  $y$ . Докажите, что  $x \perp y$ .

Решение 1. Движение мух определяет линейное ортогональное семейство треугольников  $A_t B_t C_t$ . Действительно,  $A_0 B_0 C_0 = ABC$  и, очевидно,  $A_t B_t C_t \perp ABC$  для любого  $t$ . Поэтому утверждение задачи сразу следует из п. 3.3.

Приведём, однако, и авторское элементарно-геометрическое решение, которое заодно доказывает в условиях задачи в случае неособого семейства  $A_t B_t C_t$  существование прямых  $x$  и  $y$  (т. е. вырожденных треугольников семейства  $A_t B_t C_t$ ).

Решение 2. Считаем, что  $ABC$  — это  $A_0 B_0 C_0$ .

Пусть перпендикуляры к высотам  $a, b, c$  треугольника  $A_0 B_0 C_0$ , проведённые соответственно через точки  $A_t, B_t, C_t$ , образуют треугольник  $\Delta_t$ . Тогда  $A_t B_t C_t$  — педальный треугольник точки  $H$  для треугольника  $\Delta_t$ . Заметим, что  $\{\Delta_t\}$  — линейное (особое) семейство гомотетичных (или совмещаемых параллельным переносом) треугольников. Эти треугольники имеют общий центр гомотетии  $P$ , который одновременно является вырожденным треугольником семейства  $\{\Delta_t\}$  (в случае параллельного переноса можно считать  $P$  бесконечно удалённой точкой).

Тогда все окружности  $\Omega_t$ , описанные около треугольников  $\Delta_t$ , гомотетичны с центром в  $P$ , а центр  $S_t$  окружности  $\Omega_t$  движется линейно вдоль прямой, проходящей через  $P$ . Заметим, что  $H = S_0$ , поэтому  $S_t$  движется по прямой  $PH$ . (Отметим, что  $P \neq H$ , иначе все треугольники  $A_t B_t C_t$  гомотетичны с центром в  $H$ .)

Вырожденность педального треугольника  $A_t B_t C_t$  (в прямую Симсона) эквивалентна принадлежности  $H$  окружности  $\Omega_t$ . Видим (из гомотетии с центром  $P$ ), что  $H \in \Omega_t$  для двух различных значений  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , причём в этих положениях гомотетия, переводящая  $\Delta_{t_1}$  в  $\Delta_{t_2}$ , отправляет точку  $H$  окружности  $\Omega_{t_1}$  в точку, диаметрально противоположную точке  $H$  на окружности  $\Omega_{t_2}$ . Как известно, прямые Симсона треугольника, отвечающие диаметрально противоположным точкам, перпендикулярны (а гомотетия не меняет направлений прямых), поэтому вырожденные треугольники  $A_{t_1} B_{t_1} C_{t_1}$  и  $A_{t_2} B_{t_2} C_{t_2}$  лежат на перпендикулярных прямых.

### 3.5. ТРАЕКТОРИЯ $O_{T', T_t}$ — КОНИКА

Пусть  $\{T_t\}$  — неособое линейное семейство треугольников, ортологичных данному треугольнику  $T'$ . Тогда центр ортологии  $O_{T', T_t}$  движется по конике, проходящей через вершины  $A', B', C'$  треугольника  $T'$ .

Доказательство. Координаты векторов сторон треугольника  $T_t$  зависят линейно от  $t$ . Повернув эти векторы на  $90^\circ$ , получим направляющие векторы  $\vec{u}_a(t), \vec{u}_b(t), \vec{u}_c(t)$  перпендикуляров  $A'O_{T', T_t}, B'O_{T', T_t}, C'O_{T', T_t}$ , проведённых соответственно через  $A', B', C'$  к  $B_t C_t, C_t A_t, A_t B_t$ . Эти векторы тоже зависят линейно от  $t$ . Поэтому существует аффинное преобразование  $f$  плоскости, переводящее  $A'$  в  $B'$  и  $\vec{u}_a(t)$  в  $\vec{u}_b(t)$ , так что  $f$  переводит прямую  $A'O_{T', T_t}$  в  $B'O_{T', T_t}$  (для любого  $t$ ).

Как известно (см., например, [1]), если  $f$  — проективное преобразование, переводящее пучок прямых  $\Pi(X)$  (с центром  $X$ ) в пучок  $\Pi(Y)$  (где  $Y \neq X$ ), то точки пересечения  $l \cap f(l)$ , где  $l \in \Pi(X)$ , лежат на фиксированной прямой или на конике, проходящей через  $X$  и  $Y$ . В нашем случае получается, что  $O_{T', T_t}$  движется по прямой или по конике, проходящей через точки  $A'$  и  $B'$  (и аналогично, через  $C'$ ).  $\square$

Понятно, что множество  $\{O_{T', T_t}\}$  не изменяется при замене семейства  $\{T_t\}$  на другое семейство, задающее то же семейство классов  $\{[T_t]\}$ . При сдвиге или гомотетии треугольника  $T'$  множество  $\{O_{T', T_t}\}$  соответственно подвергается этому сдвигу или гомотетии.

Если треугольник  $T'$  — вырожденный, то  $\{O_{T', T_t}\}$  можно считать вырожденной квадрикой — объединением прямой  $A'B'C'$  с прямой, по которой движется точка  $O_{T', T_t}$ .

Заметим, что асимптотические направления коники  $\{O_{T', T_t}\}$  перпендикулярны прямым, содержащим вырожденные треугольники семейства  $\{T_t\}$ . Поэтому из п. 3.3 следует утверждение:

*Линейное неособое невырожденное семейство  $\{T_t\}$  является ортологичным тогда и только тогда, когда коника центров ортологии  $\{O_{T', T_t}\}$  имеет пару перпендикулярных асимптотических направлений (т. е. это прямоугольная гипербола или пара перпендикулярных прямых).*

Пусть  $\{T_t\}$  — невырожденное неособое ортологическое семейство, а  $T_\lambda$  — его фиксированный невырожденный треугольник. Из сказанного выше следует, что  $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$  — это гипербола с асимптотами, параллельными прямым, содержащим вырожденные треугольники семейства. Кроме того, эта гипербола очевидно содержит точки  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ . Таким образом,  $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$  удовлетворяет условиям, однозначно задаю-

щим гиперболу  $\gamma_\lambda$  из рассмотрений в п. 1.8 и 1.9, т. е.

$$\{O_{T_\lambda, T_t}\} \text{ совпадает с } \gamma_\lambda.$$

### Пример: образ прямой при изогональном сопряжении

Пусть дан треугольник  $ABC$ , и пусть  $\{T_t\}$  — педальное семейство треугольников (см. п. 1.7) для точки  $P_t$ , линейно движущейся вдоль прямой  $p$ . Тогда  $ABC$  ортологичен каждому из треугольников  $T_t$  и, в соответствии с примером 1 из п. 2.11, коника  $\{O_{ABC, T_t}\}$  — это образ прямой  $p$  при изогональном сопряжении относительно  $ABC$ .

Из примера 2 в п. 3.4 мы знаем, что педальное семейство  $T_t$  ортологично тогда и только тогда, когда  $p$  проходит через  $O$ , или, эквивалентно, когда  $\{O_{ABC, T_t}\}$  проходит через ортоцентр  $H$  треугольника  $ABC$ . В этом случае  $\{O_{ABC, T_t}\}$  — прямоугольная гипербола или пара перпендикулярных прямых, что согласуется с п. 3.5.

Например, если  $p$  — прямая  $OL$ , где  $L$  — точка пересечения симедиан (точка Лемуана), то  $\{O_{ABC, T_t}\}$  — гипербола Киперта. Ту же гиперболу можно получить как множество центров ортологии для другого семейства треугольников (которое, конечно, задаёт то же семейство классов гомотетов). Это семейство  $\{A_t B_t C_t\}$  породим серединным треугольником  $A_0 B_0 C_0$  треугольника  $ABC$  и треугольником  $A_1 B_1 C_1$  с вершинами в центрах квадратов, построенных на сторонах треугольника  $ABC$  вне его. Таким образом,  $A_t, B_t, C_t$  — вершины подобных равнобедренных треугольников, построенных на сторонах треугольника  $ABC$  вне его или внутрь него. Известно, что множество центров ортологии  $O_{ABC, A_t B_t C_t}$  — гипербола Киперта. Также гипербола Киперта — множество перспекторов  $ABC$  и  $A_t B_t C_t$ . Нетрудно показать, что  $AA_{1/t} \perp B_t C_t$ , так что перспектор  $ABC$  и  $A_{1/t} B_{1/t} C_{1/t}$  является центром ортологии  $O_{ABC, A_t B_t C_t}$ , и наоборот. Отметим также, что точки  $O_{ABC, A_t B_t C_t}$  и  $O_{ABC, A_{1/t} B_{1/t} C_{1/t}}$  лежат на одной прямой с  $O$  (см. [4]).

### 3.6. Прямая, соединяющая центры ортологии $O_{T_\lambda, T_\mu}$ и $O_{T_\mu, T_\lambda}$

Пусть  $\{T_t\}$  — невырожденное неособое ортологическое семейство, а  $T_\lambda$  и  $T_\mu$  — два его невырожденных треугольника.

Как отмечено в п. 3.5, центры ортологии  $O_{T_\lambda, T_\mu}$  и  $O_{T_\mu, T_\lambda}$  лежат на соответствующих гиперболах  $\gamma_\lambda$  и  $\gamma_\mu$ , определённых в п. 1.8 и 1.9. При этом аффинное преобразование  $g_{\lambda, \mu}$ , переводящее  $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$  соответственно в  $A_\mu, B_\mu, C_\mu$ , согласно теореме Ридо (см. п. 2.4) переводит  $O_{T_\lambda, T_\mu}$  в  $O_{T_\mu, T_\lambda}$ . Но тогда в обозначениях п. 1.8 и 1.9, точки  $O_{T_\lambda, T_\mu}$

и  $O_{T_\mu, T_\lambda}$  — это соответственно  $P_\lambda$  и  $P_\mu$  (для одной и той же точки  $P$  прямой  $y$ ). Отсюда получаем такие следствия.

1) Пусть  $\{T_t\}$  — конкурентное семейство. Тогда прямая  $P_0P_1$  (она же  $P_\lambda P_\mu$ ) проходит через перспектор  $H$ . Тем самым получаем, что

$$O_{T_\lambda, T_\mu}, O_{T_\mu, T_\lambda} \text{ и } H \text{ коллинеарны.}$$

Фактически мы получили ещё одно доказательство утверждения о коллинеарности из теоремы Сонда.

2) Пусть  $\{T_t\}$  — неконкурентное семейство. Из п. 1.8 и 1.9 мы знаем, что прямые  $P_0P_1$  касаются коники  $\varepsilon$  (т. е. той же коники, которой касаются прямые  $a, b, c$  и прямые, содержащие вырожденные треугольники семейства). Значит,

$$\text{прямая } O_{T_\lambda, T_\mu} O_{T_\mu, T_\lambda} \text{ касается коники } \varepsilon.$$

В некотором смысле это утверждение можно считать обобщением утверждения о коллинеарности из теоремы Сонда.

Далее, заметим, что

$$\text{прямая } \{O_{T_t, T_\lambda}\} \text{ также является касательной к конике } \varepsilon.$$

Действительно, пусть прямая  $\{O_{T_t, T_\lambda}\}$  (при фиксированном  $\lambda$ ) и гиперболы  $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$ , имеющие общую точку  $O_{T_\lambda, T_\lambda}$ , повторно пересекаются в точке  $X$ . Тогда  $X$  имеет вид  $O_{T_\lambda, T_r}$ . Но точка  $O_{T_r, T_\lambda}$  также лежит на прямой  $\{O_{T_t, T_\lambda}\}$ . Тем самым прямая  $\{O_{T_t, T_\lambda}\}$  совпадает с прямой  $O_{T_r, T_\lambda} O_{T_\lambda, T_r}$ , и нужное нам утверждение следует из предыдущего.

### 3.7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КОНКУРЕНТНОМ ОРТОЛОГИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ

Продолжим рассматривать неособое невырожденное ортологичное семейство треугольников  $\{T_t\}$ . Далее в этом разделе считаем, что точки  $A_t, B_t, C_t$  движутся линейно по трём различным прямым  $a, b, c$ , пересекающимся в точке  $H$ , так что любые два треугольника нашего семейства перспективны с перспектором  $H$ .

#### Перспектор как ортоцентр

Докажем, что

Для семейства  $\{T_t\}$  существует единственное  $h$  (возможно,  $h = \infty$ ) такое, что  $A_h B_h \perp c, B_h C_h \perp a, C_h A_h \perp b$ .

Иначе говоря, если  $h \neq \infty$ , в семействе есть треугольник, для которого  $H$  является ортоцентром, в таком случае перспективное ортологичное семейство описывается примером 6 из п. 3.4.

**Доказательство.** Если  $A_\infty B_\infty \perp c$ ,  $B_\infty C_\infty \perp a$ ,  $C_\infty A_\infty \perp b$ , то всё доказано.

Иначе пусть для определённости  $A_\infty B_\infty$  не перпендикулярно  $c$ . Тогда из п. 1.2 следует, что найдётся ровно одно вещественное  $h$ , для которого  $A_h B_h \perp c$ . Если ортоцентр треугольника  $A_h B_h C_h$  совпадает с  $H$ , то всё доказано. Иначе пусть он находится в точке  $H' \neq H$  — очевидно,  $H' \in c$ . Пусть  $H'' = O_{T_s, T_h}$  для некоторого  $s \neq h$ . Так как  $C_s H'' \perp A_h B_h$ , получаем, что  $H'' \in c$ . Тогда есть гомотетия с центром в  $H$ , переводящая треугольник  $A_s H'' B_s$  в треугольник  $A_h H' B_h$ . Отсюда  $A_s B_s \parallel A_h B_h$ , что противоречит тому, что  $\{T_t\}$  неособое.  $\square$

Таким образом, для найденного параметра  $h$  верно  $H = O_{T_\lambda, T_h}$  при любом  $\lambda$ . В частности, мы получаем ещё одно объяснение того факта, что гиперболы  $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$  проходят через  $H$ .

### Совпадение центров ортологии $O_{T_\lambda, T_\mu} = O_{T_\mu, T_\lambda}$ в точке $O$

Пусть наше семейство содержит два вырожденных треугольника  $T_0$  и  $T_1$ , лежащих на перпендикулярных прямых  $x$  и  $y$ . Покажем, что точка  $O = x \cap y$  лежит на прямой  $\{O_{T_\lambda, T_\lambda}\}$  для всех  $\lambda \neq 0, 1$ , кроме случая  $\lambda = h$ , когда  $H$  — ортоцентр  $A_h B_h C_h$ . Более того, покажем, что

*$O$  является общим центром ортологии для данного треугольника  $T_\lambda$  ( $\lambda \neq 0, 1, h$ ) и ещё одного треугольника  $T_\mu$  из нашего семейства, при этом соответствие  $\lambda \leftrightarrow \mu$  дробно-линейно.*

**Доказательство.** Положим  $a \cap x = (x_a, 0)$ ,  $a \cap y = (0, y_a)$  и т. д. Тогда для координат вершин треугольника  $T_\lambda$  имеем  $A_\lambda = (\lambda x_a, (1 - \lambda)y_a)$  и т. д. Условие  $OA_\mu \perp B_\lambda C_\lambda$  запишется как

$$\mu \lambda x_a (x_c - x_b) + (1 - \mu)(1 - \lambda)y_a (y_c - y_b) = 0.$$

Как видим, это равенство симметрично относительно  $\lambda$  и  $\mu$ , т. е. равносильно перпендикулярности  $OA_\lambda \perp B_\mu C_\mu$ . Если

$$\lambda \neq \frac{1}{k_a + 1}, \quad \text{где } k_a = \frac{x_a(x_c - x_b)}{y_a(y_c - y_b)},$$

то это равенство преобразуется к виду

$$\mu = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda(k_a + 1)}.$$

Выкладка показывает, что условие равенства аналогичных коэффициентов  $k_a = k_b$  (или  $k_a = k_c$ ) эквивалентно конкурентности прямых  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (уравнения которых  $x/x_a + y/y_a = 1$  и т. д.).  $\square$

Несложно видеть, что особое значение  $\lambda = 1/(k_a + 1)$  как раз соответствует тому, что  $H$  — ортоцентр треугольника  $T_\lambda$ .

В полученном выше соответствии  $\lambda \leftrightarrow \mu$  возможно равенство  $\lambda = \mu$  для не более чем двух значений  $\lambda$ . Это равенство соответствует тому, что  $O$  служит ортоцентром для  $T_\lambda$ .

Отметим, что совпадение центров ортологии  $O_{T_\mu, T_\lambda} = O_{T_\lambda, T_\mu}$  в принципе возможно не более чем в двух точках пересечения  $\{O_{T_\nu, T_\lambda}\}$  и гиперболы  $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$ . Одна из этих точек —  $O$ , и в ней, как мы видели, при  $\lambda \neq 0, 1, h$  действительно имеем совпадение центров ортологии, а другая точка — ортоцентр треугольника  $T_\lambda$ .

### Случай вырождения $T_\infty$

Рассмотрим случай вырожденного треугольника  $T_\infty$ . Пусть  $T_0$  — второй вырожденный треугольник, лежащий на прямой  $u$ . Покажем, что в этом случае при  $\lambda \neq 0$

*прямая  $\{O_{T_\nu, T_\lambda}\}$  параллельна прямой  $u$ .*

Доказательство. Непосредственная выкладка в аффинной системе координат  $Oxy$  из п. 1.9 показывает, что  $O_{T_\mu, T_\lambda}$  (т. е. точка пересечения перпендикуляров, проведённых из  $A_\mu$  на  $B_\lambda C_\lambda$  и из  $B_\mu$  на  $A_\lambda C_\lambda$ ) имеет абсциссу, не зависящую от  $\mu$ .  $\square$

Видим, что в данном случае гипербола  $\{O_{T_\lambda, T_t}\}$  и прямая  $\{O_{T_\nu, T_\lambda}\}$  имеют только одну общую точку (ортоцентр треугольника  $T_\lambda$ ).

### Пример: задача о мухах на жергоннианах

Задача (Е. Бакаев). Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Три мухи ползли по прямым  $AA_1, BB_1, CC_1$  с постоянными скоростями так, что в какой-то момент были в точках  $A, B, C$ , в другой момент были в точках  $A_1, B_1, C_1$ . Докажите, что в моменты, когда мухи были на одной прямой, на этой же прямой лежал центр вписанной окружности, при этом таких моментов два и соответствующие им прямые перпендикулярны. (Отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в точке Жергонна, поэтому их можно назвать жергоннианами.)

Ослабленная версия этой задачи (в которой уже дано, что было два момента коллинеарности) предлагалась на кубке памяти Колмогорова в 2017 г.

РЕШЕНИЕ. В задаче мы имеем дело с перспективным ортологичным семейством, порождённым треугольниками  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ . Заметим, что  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  ортологичны, причём оба центра ортологии совпадают с  $I$ . Отсюда (или же непосредственно показывая, что  $(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{AA_1}) \nparallel (\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{AA_1})$ ) мы видим, что это не случай вырождения  $T_\infty$ . Тогда из доказанного выше в п. 3.7 мы знаем, что  $I$  — точка пересечения перпендикулярных прямых  $x$  и  $y$ , на которых лежат вырожденные треугольники нашего семейства.

#### § 4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ В $\mathbb{R}^4$ И $\mathbb{R}P^3$

Треугольник  $ABC$  с точностью до параллельного переноса (сдвига) мы задавали упорядоченной парой (свободных) векторов  $(\vec{b}, \vec{c}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ . Пару  $(\vec{b}, \vec{c})$  можно отождествлять с вектором в  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

Обсудим, как некоторые предыдущие сюжеты переносятся на эту модель и что они означают на языке линейной алгебры.

##### 4.1. КЛАССЫ ГОМОТЕТОВ

Класс эквивалентности  $[ABC]$  также можно однозначно задать парами вида  $(\alpha \overrightarrow{AB}, \alpha \overrightarrow{AC})$ , так что  $[ABC]$  соответствует одномерному подпространству в векторном пространстве  $\mathbb{R}^4$ . Таким образом, множество классов (фактормножество) можно теперь отождествить с проективным пространством  $\mathbb{R}P^3$ .

##### 4.2. ЛИНЕЙНЫЕ СЕМЕЙСТВА

Из формул (1), (2) видим, что линейному семейству треугольников  $\{A_t B_t C_t\}$  соответствует прямая (т. е. одномерное линейное подмногообразие) в  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , а линейному семейству классов (содержащему хотя бы два различных класса) — двумерное подпространство в  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ , которое является линейной оболочкой векторов  $(\vec{b}_0, \vec{c}_0)$  и  $(\vec{b}_1, \vec{c}_1)$ .

##### 4.3. ЛИНЕЙНОЕ СЕМЕЙСТВО КЛАССОВ КАК ГРАФИК

Формуле (2) можно придать следующий вид:

$$(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{v}, \varphi(\vec{v})), \quad (6)$$

где  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — линейный биективный оператор (автоморфизм) на  $\mathbb{R}^2$ , определяемый действием на векторах базиса:  $\varphi(\vec{b}_t) = \vec{c}_t$ ,  $t = 0, 1$  (здесь, как и ранее, полагаем  $\vec{b}_t = \overrightarrow{A_t B_t}$ ,  $\vec{c}_t = \overrightarrow{A_t C_t}$ ). Скажем, для примера 1 из п. 1.7 соответствующий оператор  $\varphi$  является поворотной гомотетией.

То, что  $(\vec{b}_0, \vec{b}_1)$  и  $(\vec{c}_0, \vec{c}_1)$  — действительно базисы, эквивалентно тому, что пары движущихся точек  $A, B$  и  $A, C$  неособые.

Условие того, что пара  $B, C$  особая, означает, что  $\overrightarrow{B_0C_0} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$ , что равносильно  $\varphi(\vec{b}_0) - \vec{b}_0 \parallel \varphi(\vec{b}_1) - \vec{b}_1$ , а это эквивалентно вырожденности оператора  $\varphi - \text{Id}$  или наличию у  $\varphi$  собственного значения  $\lambda = 1$ . Наоборот, согласно (6) биективный линейный оператор  $\varphi$ , для которого  $\lambda = 1$  не является собственным значением, однозначно задаёт неособое линейное семейство классов треугольников.

#### 4.4. ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Рассмотрим координаты  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , где  $\vec{b} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{c} = (x_3, x_4)$ . Условие вырожденности соответствующего треугольника  $ABC$  будет записываться как  $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ . Как видим, вырожденным треугольникам  $ABC$  при соответствии  $ABC \mapsto (\vec{b}, \vec{c})$  соответствует асимптотический конус квадратичной формы сигнатуры  $(2, 2)$ .

Можно переформулировать условие вырожденности треугольника и по-другому, исходя из (6). Видим, что вырожденный треугольник соответствует собственному вектору введённого выше оператора  $\varphi$  (а класс гомотетов вырожденного треугольника соответствует одномерному инвариантному подпространству оператора  $\varphi$ ).

Как мы отмечали в п. 1.6, либо в линейном семействе треугольников не более двух вырожденных треугольников, либо все треугольники этого семейства вырожденные. Соответственно, в линейном семействе гомотетов либо не более двух классов вырожденных треугольников, либо все классы состоят из вырожденных треугольников. Теперь доказать это можно другим способом, исходя из  $\varphi$ : либо  $\varphi$  — гомотетия (и тогда соответствующий класс состоит только из вырожденных треугольников), либо  $\varphi$  имеет не более двух собственных векторов с точностью до пропорциональности.

#### 4.5. ОРТОЛОГИЧНОСТЬ И САМОСОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР

Получим условие на оператор  $\varphi$  из (6), эквивалентное ортологичности семейства классов.

Условие ортологичности любых двух треугольников  $ABC, A'B'C'$  из нашего семейства:  $\vec{b}'\vec{c}' - \vec{b}'\vec{c} = 0$  означает выполнение равенства

$$\vec{b}'\varphi(\vec{b}') - \vec{b}'\varphi(\vec{b}) = 0$$

при любых  $\vec{b}$  и  $\vec{b}'$ , т. е. эквивалентно тому, что  $\varphi$  — самосопряжённый оператор. Таким образом, ортологичным семействам классов соответствуют в точности графики самосопряжённых операторов  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Полученное соответствие позволяет теперь доказать утверждение из п. 3.3 о вырожденных треугольниках ортологичного семейства следующим образом. Известная теорема линейной алгебры гласит: линейный оператор в  $n$ -мерном евклидовом пространстве является самосопряжённым тогда и только тогда, когда у него есть ортогональный базис из собственных векторов. В нашем случае  $n = 2$  оператор  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  является самосопряжённым тогда и только тогда, когда у него есть пара ортогональных собственных векторов.

#### 4.6. Ортологичность как косоортогональность в $\mathbb{R}^4$

Как мы помним (см. п. 2.5), ортологичность треугольника  $ABC$  можно понимать как отношение на  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ .

Зададим на  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \{(\vec{b}, \vec{c})\}$  умножение  $*$  равенством

$$(\vec{b}, \vec{c}) * (\vec{b}', \vec{c}') = \vec{b}\vec{c}' - \vec{b}'\vec{c}. \quad (7)$$

Умножение  $*$  задаёт на  $\mathbb{R}^4$  билинейную кососимметричную невырожденную форму. Согласно (4) отношение ортологичности соответствует «косоортогональности» относительно  $*$ :

$$ABC \perp A'B'C' \iff (\vec{b}, \vec{c}) * (\vec{b}', \vec{c}') = 0. \quad (8)$$

#### 4.7. Косоортогональные дополнения

Будем обозначать ортогональное дополнение к подпространству  $U$  относительно введённого билинейного умножения  $*$  (или косоортогональное дополнение) через  $U^\perp$ .

Теперь описать в  $\mathbb{R}^4$  множество треугольников, ортологичных данному треугольнику  $ABC$ , можно так: это (трёхмерное) косоортогональное дополнение к (одномерному) подпространству, порождённому  $(\vec{b}, \vec{c})$ , т. е. подпространство  $\langle (\vec{b}, \vec{c}) \rangle^\perp$ .

Множество треугольников, ортологичных треугольникам  $ABC$  и  $A'B'C'$  из разных классов  $[ABC]$  и  $[A'B'C']$  — это (двумерное) подпространство  $\langle (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}', \vec{c}') \rangle^\perp$ .

Случай  $ABC \perp A'B'C'$  характеризуется тем, что ограничение умножения  $*$  на подпространство  $\langle (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}', \vec{c}') \rangle$  — нулевое, а значит, подпространство  $\langle (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{b}', \vec{c}') \rangle$  совпадает со своим косоортогональным дополнением. Иначе говоря, в этом случае треугольник, ортологичный обоим треугольникам  $ABC$  и  $A'B'C'$ , обязательно принадлежит линейному семейству классов, порождённому классами  $[ABC]$  и  $[A'B'C']$ .

Подпространства со свойством  $U^\perp = U$  называются *лагранжевыми* (относительно  $*$ ). Так в терминах ортологичности мы пришли к извест-

ному соответствию между графиками самосопряжённых операторов и лагранжевыми подпространствами.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.
- [2] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988.
- [3] Заславский А. А. Теорема Сонда // Математика в задачах. М.: МЦНМО, 2009. С. 135–139.
- [4] Zaslavsky A. A. Geometry of Kiepert and Grinberg — Myakishev hyperbolas // Journal of Classical Geometry. Vol. 1. P. 65–71.
- [5] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2018.
- [6] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Maxwell.shtml>.
- [7] Перспективно-ортологические треугольники и тетраэдры // 16-я Летняя конференция Турнира городов, 2004 г. <https://www.turgor.ru/lktg/2004/persor.ru/index.htm>.
- [8] Замечательные точки многоугольников // 30-я Летняя конференция Турнира городов, 2018 г. <https://www.turgor.ru/lktg/2018/2/index.html>.

---

Егор Владимирович Бакаев  
egor.bakaev@gmail.com

Павел Александрович Кожевников, МФТИ  
p.kozhevn@gmail.com



---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

---

## Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность

А. Б. Скопенков

Мы приводим простые доказательства теоремы Конвея — Гордона — Закса о неотъемлемой зацепленности в трёхмерном пространстве, а также теорем ван Кампена — Флореса и Уммеля о неотъемлемых пересечениях. Последние связаны с нереализуемостью некоторых гиперграфов в четырёхмерном пространстве. Доказательства используют сведение к меньшим размерностям, которое позволяет показать связь между этими результатами. Используя элементарный язык, мы преподносим основные идеи без технических подробностей. Поэтому изложение доступно неспециалистам в данной области, включая студентов и школьников, знающих основы стереометрии и готовых изучить простые четырёхмерные обобщения.

### СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение . . . . .	126
1.1. Неотъемлемые пересечения и зацепленность . . . . .	126
1.2. Почему этот обзор может быть интересным? . . . . .	128
1.3. Неотъемлемые пересечения в четырёхмерном пространстве . .	130
1.4. Неотъемлемые пересечения и зацепленность в высших размерностях . . . . .	131
1.5. Кратные пересечения и зацепленность . . . . .	132
§ 2. Доказательства . . . . .	133
2.1. Плоскость: доказательство утверждения 1.1 . . . . .	133
2.2. Ослабленные версии теоремы 1.2 . . . . .	135
2.3. «Количественные» версии . . . . .	135

2.4. Трёхмерное пространство: доказательство теоремы 1.2' . . . . .	137
2.5. Четырёхмерное пространство: доказательства теорем 1.5 и 1.5' . . . . .	139
2.6. Свойства «не зацепленности» . . . . .	141
§ 3. Некоторые важные замечания . . . . .	143
§ 4. Реализуемость произведений и гипотеза Менгера . . . . .	146
4.1. Гипотеза Менгера . . . . .	146
4.2. Реализуемость произведений . . . . .	147
4.3. Реализация произведений . . . . .	149
4.4. Нереализуемость произведений в трёхмерном пространстве . .	150
4.5. Нереализуемость произведений в четырёхмерном пространстве . . . . .	153
Список литературы . . . . .	155

'It's too difficult.'

'Write simply.'

'That's hardest of all.'

*I. Murdoch, The Message  
to the Planet.*

Этот обзор основан на лекциях автора в Московском физико-техническом институте, Независимом Московском университете, Институте науки и технологии (Австрия) и в различных летних школах и математических кружках. Благодарю за перевод текста на русский язык С. Дженжера, а также за полезные обсуждения О. Виро, С. Дженжера, А. Зимина, Дж. Зунга, И. Измestьева, Р. Карасева, А. Руховича, М. Скопенкова, А. Сосинского, С. Табачникова, Г. Челнокова, А. Шаповалова и анонимного рецензента от сборника «Математическое просвещение».

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

### 1.1. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ

«Невозможные конструкции», такие как невозможный куб, треугольник Пенроуза, невозможный трезубец и т. д., хорошо известны, в основном благодаря рисункам Маурица Корнелиса Эшера, см. рис. 1 и [Io], а также [Br68, CKS+, GSS+]. Эти изображения не допускают глобальной пространственной реализации из-за несоответствия локальных пространственных реализаций друг другу. В геометрии, топологии и теории графов также известны базовые примеры «невозможных конструкций» (в которых локальные части «возможны»).

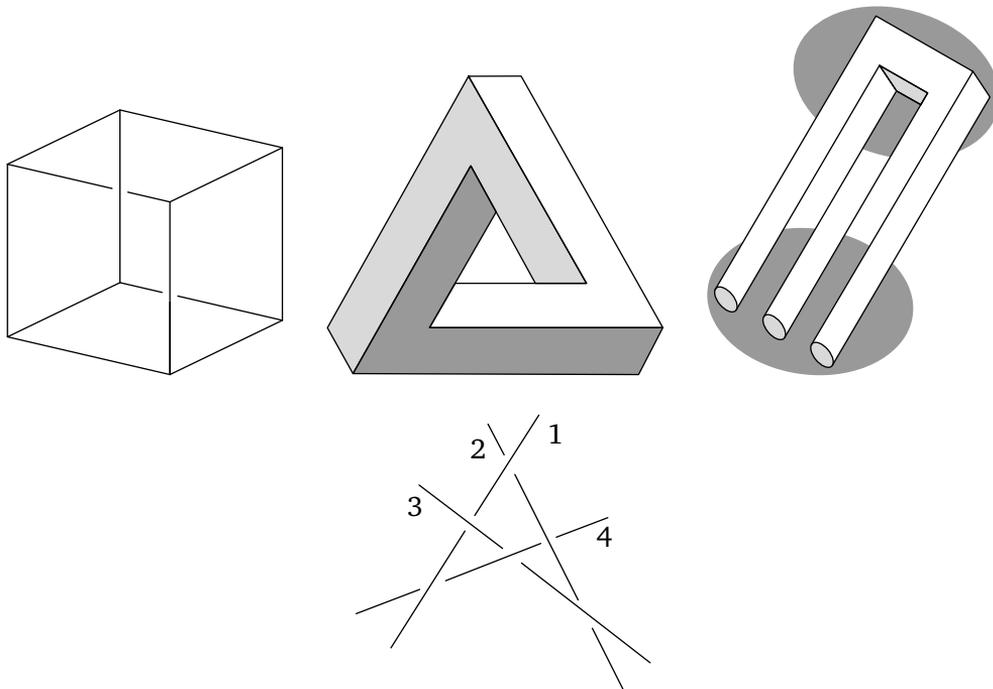


Рис. 1. Невозможный куб, треугольник Пенроуза, трезубец, невозможная проекция

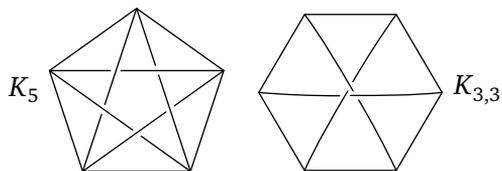


Рис. 2. Непланарные графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$

Следующий пример «невозможной конструкции» или «неотъемлемого пересечения» уже напрямую относится к данной статье: *Ни для каких пяти точек на плоскости невозможно попарно соединить их путями так, чтобы пути пересекались только в своих начальных или конечных точках*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Также невозможно расставить три домика и три колодца на плоскости и соединить путём каждый домик с каждым колодцем так, чтобы пути пересекались только в своих начальных или конечных точках. В терминах теории графов эти утверждения означают, что ни полный граф  $K_5$  на пяти вершинах, ни полный двудольный граф  $K_{3,3}$  не планарен, см. рис. 2. Нижеприведённое утверждение 1.1 является «линейной» версией непланарности графа  $K_5$ .

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1.** Для любых пяти точек на плоскости найдутся два пересекающихся отрезка с концами в этих точках, не имеющие общих вершин.

Далее понадобятся следующие соглашения. Мы сокращаем «трёхмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ » до «пространство», а « $d$ -мерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^d$ » до « $d$ -мерное пространство» или до « $\mathbb{R}^d$ » (в основном  $d = 4$ ). **Треугольником** называется часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной.

Возьмём два треугольника в пространстве, никакие 4 из 6 вершин которых не лежат в одной плоскости. Эти треугольники называются **зацепленными**, если контур первого из них пересекает второй треугольник ровно в одной точке. Например, треугольники  $A_1A_3A_5$  и  $A_2A_4A_6$ ,  $\Delta$  и  $\Delta'$  на рис. 3 зацеплены<sup>2)</sup>.

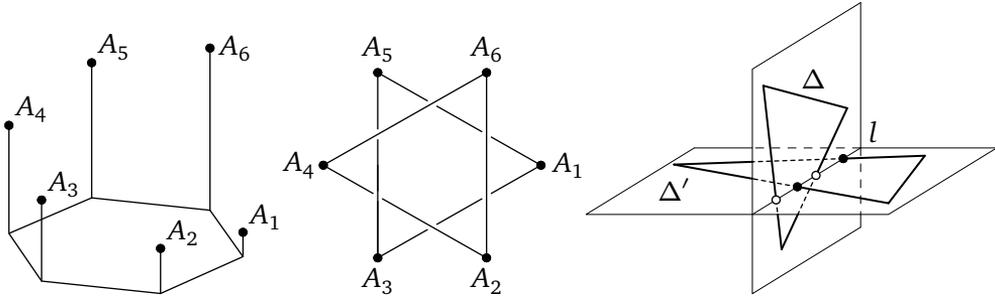


Рис. 3. Зацепленные треугольники

**ТЕОРЕМА 1.2** (Линейная теорема Конвея — Гордона — Зака; [Sa81, CG83]). Если никакие 4 из данных 6 точек в пространстве не лежат в одной плоскости, то найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в данных 6 точках.

## 1.2. ПОЧЕМУ ЭТОТ ОБЗОР МОЖЕТ БЫТЬ ИНТЕРЕСНЫМ?

Мы представляем интересные связи между

- «неотъемлемыми пересечениями» на плоскости (утверждения 1.1 и 2.3) и «неотъемлемой зацепленностью» в трёхмерном пространстве (теоремы 1.2 и 2.7);

<sup>2)</sup> Расстояние от точки  $A_j$  до плоскости проекции равно  $j$ . Поэтому проекция на рис. 3 посередине реализуема, в отличие от рис. 1 справа.

Свойство зацепленности симметрично (это не очевидно из определения, но имеет простое доказательство [Sk, Proposition 4.1.2]). Другие вводные результаты о зацепленных треугольниках приведены в [Sk, § 4.1 'Linking of triangles in 3-space'], [Sk24, § 1.1].

- последними результатами в трёхмерном пространстве и «неотъемлемыми пересечениями» в четырёхмерном пространстве (ниже приведённые теоремы 1.5 и 4.2, обобщающие утверждение 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3 (о понижении размерности). Часто удобно свести результат на плоскости к результату на прямой, а трёхмерный результат к результату на плоскости. Аналогично четырёхмерный результат можно сводить к трёхмерному, см. примеры в замечании 1.4.

Утверждение 1.1 о неотъемлемых пересечениях на плоскости сводится (в п. 2.1) к утверждению 2.1 о неотъемлемой зацепленности на прямой. Аналогично теорема 1.2 о неотъемлемой зацепленности в пространстве сводится (в п. 2.4) к утверждению 1.1 (более точно, к его количественной версии, утверждению 1.1'). Аналогично ниже приведённая теорема 1.5 о неотъемлемых пересечениях в четырёхмерном пространстве сводится (в п. 2.5) к теореме 1.2. Эта связь между неотъемлемой зацепленностью и неотъемлемыми пересечениями в последовательных размерностях обобщается на высшие размерности (теорема 1.6; мы упоминаем размерности выше четырёх только в этой теореме).

Благодаря такому «понижению размерности» читатель, незнакомый с четырёхмерным пространством, не должен пугаться.

Результаты о неотъемлемых пересечениях дают естественное обобщение непланарности графов: примеры *двумерных* аналогов графов, не реализуемых ни в трёхмерном, ни в четырёхмерном пространствах. Это разъяснено в замечании 3.1.

Мы приводим упрощённое изложение, доступное неспециалистам в этой области. Результаты формулируются в терминах систем точек. Поэтому мы не используем понятия реализуемости гиперграфа (но упоминаем это понятие, поскольку оно важно для *мотивировки*). Для понимания большей части статьи достаточно знать основы стереометрии, а также знать или быть готовым изучить простейшие четырёхмерные обобщения. Мы уверены, что элементарное описание простых приложений топологических методов делает эти методы более доступными. О сравнении с другими доказательствами см. замечание 3.2.

Поразительная связь между «неотъемлемыми пересечениями» и «неотъемлемой зацепленностью» не только даёт простые доказательства классических результатов. Она также подводит читателя к переднему краю науки, в частности, к доказательству обобщённой гипотезы Менгера (объяснённой в § 4). Изложенные результаты о неотъемлемой зацепленности являются отправной точкой (*рамсеевской*)

теории неотъемлемых зацеплений. См. обзоры [RA05, PS05, FMM+, Na20] и ссылки в них; о многомерных аналогах см. [SS92, Sk03, KS20]. Изложенные результаты о неотъемлемых пересечениях обобщаются до нереализуемости гиперграфов. См. обзоры [Sk06, § 4, § 5], [MTW, § 1], [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3] и ссылки в них, а также недавние работы [Pa15, Sk18o, AKM, PS20, Pa21, Me22, Sk23]. Об аналогичных проблемах, относящихся к вложениям динамических систем, см. [LT14] и ссылки в этой работе.

История вопроса изложена в замечании 3.3.

**О независимости.** Формально, замечания в дальнейшем не используются и могут быть пропущены. То же верно для п. 1.4 и п. 1.5. Параграфы 2, 3 и 4 независимы друг от друга, так что их можно читать в любом порядке. Ссылки на последующий текст, как и ссылки на другие работы, могут быть проигнорированы при первом чтении.

### 1.3. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Замечание 1.4 (наглядные результаты о четырёхмерном пространстве). (а) «Типичное» пересечение

- двух отрезков на плоскости — либо пустое множество, либо точка (здесь под «типичностью» подразумевается, что никакие три из концов отрезков не лежат на одной прямой);
- отрезка и треугольника в пространстве — либо пустое множество, либо точка;
- двух треугольников в четырёхмерном пространстве — либо пустое множество, либо точка.

(б) Для любых двух точек

- плоскости, отличных от некоторой точки  $A$ , найдётся ломаная, соединяющая эти две точки и не проходящая через  $A$ ;
- пространства, не лежащих на некоторой прямой  $l$ , найдётся ломаная, соединяющая эти две точки и не пересекающаяся с  $l$ ;
- четырёхмерного пространства, не лежащих в некоторой двумерной плоскости  $\alpha$ , найдётся ломаная, соединяющая эти две точки и не пересекающаяся с  $\alpha$ .

(с) Более продвинутая интуиция о четырёхмерном пространстве не является здесь необходимой, однако она может быть развита изучением, например, [Sk, § 5.1 «Как работать с четырёхмерным пространством»], [Sk24, § 2.1].

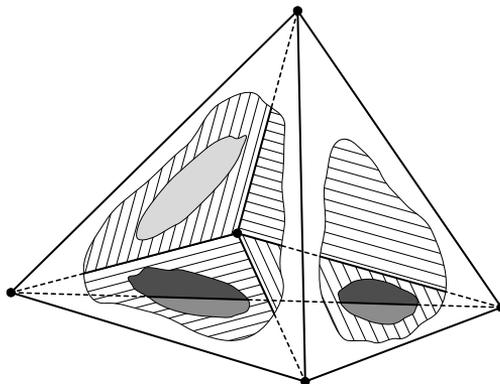


Рис. 4. Пять точек в  $\mathbb{R}^3$  (реализация полного 3-однородного гиперграфа на 5 вершинах)

**ТЕОРЕМА 1.5** (линейная теорема ван Кампена — Флореса; [vK32, Fl34]). *Для любых 7 точек в четырёхмерном пространстве найдутся два пересекающихся треугольника с вершинами в этих точках, не имеющие общих вершин.*

Аналоги теоремы 1.5 верны для 5 точек на плоскости и для 6 точек в пространстве (утверждения 1.1 и 2.4.b). Аналоги утверждения 1.1 и теоремы 1.5 неверны для 4 точек на плоскости и 6 точек в четырёхмерном пространстве соответственно: в  $\mathbb{R}^{2k}$  возьмём  $2k + 1$  вершину и внутреннюю точку  $2k$ -симплекса, ср. рис. 4.

#### 1.4. НЕОТЪЕМЛЕМЫЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ И ЗАЦЕПЛЕННОСТЬ В ВЫСШИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

Подмножество в  $\mathbb{R}^d$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек этого подмножества отрезок, их соединяющий, также лежит в этом подмножестве. *Выпуклой оболочкой* множества  $X \subset \mathbb{R}^d$  называется минимальное выпуклое множество, содержащее  $X$ .

**ТЕОРЕМА 1.6.** *Даны  $d + 3$  точки в  $\mathbb{R}^d$ .*

*Если  $d = 2k$ , то среди них найдутся два непересекающихся  $(k + 1)$ -элементных подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

*Если  $d = 2k - 1$  и никакие  $2k$  из данных точек не лежат в одной  $(2k - 2)$ -мерной гиперплоскости, то найдётся зацепленная пара  $(k + 1)$ -элементных подмножеств с вершинами в данных точках (зацепленность означает, что выпуклая оболочка первого подмножества пересекает границу выпуклой оболочки второго подмножества в нечётном числе точек).*

Эта теорема обобщает утверждение 1.1 (возьмите  $d = 2$ ), теореме 1.2 (возьмите  $d = 3$ ) и теореме 1.5 (возьмите  $d = 4$ ). Она принадлежит ван Кампену — Флоресу для чётных  $d > 2$  [vK32, Fl34] и Сегалу — Спешу — Ловасу — Шриверу — Танияме для нечётных  $d > 3$  [LS98, Corollary 1.1], [Ta00] (рассуждение про индексы в [SS92, § 1] допускает простое обобщение до теоремы 1.6; поэтому теорема 1.6 для нечётных  $d > 3$  неявно доказана в [SS92]).

Теорема 1.6 доказывается индукцией по  $d$ . База  $d = 1$  тривиальна. Шаг индукции доказан в § 2 для  $d = 2, 3, 4$ ; доказательство для общего случая аналогично.

Аналог теоремы 1.6 для  $d + 2$  точек

- не имеет смысла для  $d = 2k - 1$ , поскольку среди  $2k + 1$  точек в  $\mathbb{R}^{2k-1}$  невозможно взять два зацепленных подмножества;
- неверен для чётных  $d$  аналогично контрпримеру к соответствующему аналогу теоремы 1.5.

Для нечётных  $d$  имеется утверждение 2.4.b о неотъемлемых пересечениях и его многомерный аналог. Они слабее соответствующих теорем 1.2 и 1.6 о неотъемлемой зацепленности. Другие результаты приведены в [Sk16, § 4].

## 1.5. Кратные пересечения и зацепленность

Сформулируем аналог вышеприведённых результатов для трёхкратных неотъемлемых пересечений.

**ТЕОРЕМА 1.7** [Sa91g]. *Для любых 11 точек в пространстве найдутся три треугольника с вершинами в этих точках, имеющие общую точку, никакие два из которых не имеют общих вершин.*

Удивительно, что известное доказательство такого элементарного результата использует алгебраическую топологию. Интересно найти элементарное доказательство.

**ПРИМЕР 1.8.** В пространстве возьмём вершины тетраэдра и его центр, см. рис. 4. Либо возьмём каждую из этих 5 точек с кратностью два, либо для каждой из них возьмём близкую к ней. Получим 10 точек, для которых аналог теоремы 1.7 неверен.

О многомерном  $r$ -кратном аналоге теорем 1.6 и 1.7 см. [Sk16, Theorem 1.6], [Sk23', гипотеза 3.1.4 и текст после неё].

Сформулируем аналоги вышеприведённых результатов для неотъемлемой тройной зацепленности.

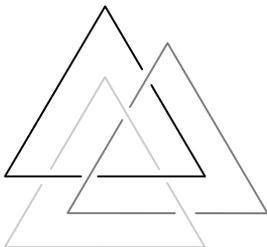


Рис. 5. Борромеевская тройка треугольников

Найдутся три попарно незацепленных треугольника в пространстве, которые вместе «зацеплены» (рис. 5; можно проверить, что эта проекция реализуема, в отличие от рис. 1 справа). Такая тройка называется *борромеевской*, ср. [Val] и [Sk, § 4.6].

**ТЕОРЕМА 1.9 [Ne91].** *Существует целое  $N > 0$  такое, что если никакие 4 из данных  $N$  точек в пространстве не лежат в одной плоскости, то найдётся борромеевская тройка треугольников с вершинами в данных точках.*

См. также [PS05, FNP]. Было бы интересно получить аналог теоремы 1.9 с конкретным  $N$ . Ввиду примера 1.8, взять  $N = 10$  нельзя. Можно ли взять  $N = 11$  (как в теореме 1.7)? Можно поставить компьютерный эксперимент, чтобы решить эту задачу, используя эквивалентное определение борромеевности [Ko19]. Было бы интересно получить многомерные  $r$ -кратные аналоги теоремы 1.9, ср. [BL, FFN+].

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Под  $k$  точками в  $\mathbb{R}^d$  (в этой статье в основном  $d \leq 4$ ) подразумевается  $k$  попарно различных точек. Обозначим  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.1. Плоскость: доказательство утверждения 1.1

Утверждение 1.1 легко доказывается перебором количества вершин в выпуклой оболочке 5 точек. Чтобы продемонстрировать идею «понижения размерности» (см. замечание 1.3) в наипростейшей ситуации, мы также выведем утверждение 1.1 из следующего очевидного одномерного результата.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1.** *Из любых 4 точек на прямой можно покрасить две в красный, а две в синий цвет так, что цвета будут чередоваться: красный–синий–красный–синий или синий–красный–синий–красный (иными словами, «красная пара зацеплена с синей»).*

Доказательство утверждения 1.1. Существует прямая, относительно которой ровно одна точка  $O$  из данных 5 лежит по одну сторону, а остальные точки  $A, B, C, D$  — по другую. Если для некоторых двух точек  $X, Y \in \{A, B, C, D\}$  точка  $X$  лежит на отрезке  $OY$ , то утверждение доказано. В противном случае можно считать, что точки  $A, B, C, D$  видны из точки  $O$  именно в таком порядке, см. рис. 6. Тогда получаем нужное по нижеприведённой лемме 2.2.  $\square$

ЛЕММА 2.2 (о понижении размерности; см. рис. 6 слева). Даны два треугольника на плоскости, имеющие единственную общую вершину. Прямая  $l$  отделяет её от оснований треугольников. Пересечения прямой  $l$  с контурами треугольников чередуются вдоль прямой. Тогда некоторые две стороны треугольников пересекаются, не имея общих вершин.

Эта лемма тривиальна. Она сформулирована явно для удобства её применения (здесь и в п. 2.5) и для иллюстрации её многомерного обобщения (лемма 2.8).

Следующие утверждения доказываются аналогично утверждению 1.1. Они используются для некоторых трёхмерных результатов (утверждения 4.1.ab и теорема 2.7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. (а) (См. рис. 2 справа.) Даны две тройки точек на плоскости. Тогда найдутся два пересекающихся отрезка, не имеющие общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

(б) (См. рис. 6 справа.) Даны четыре красных и две синих точки  $B_1, B_2$  на плоскости, для которых любые два отрезка с разноцветными концами либо не пересекаются, либо пересекаются по общему концу. Тогда найдутся две красные точки  $R_1, R_2$  такие, что четырёхугольник

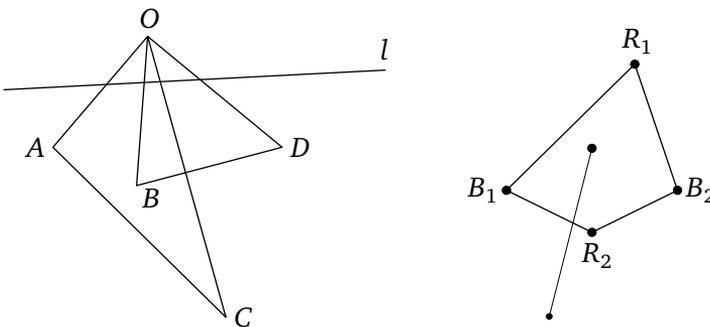


Рис. 6. Слева: к доказательству утверждения 1.1.  
Справа: к утверждению 2.3.b

$R_1B_1R_2B_2$  несамопересекающийся, а две оставшиеся красные точки лежат по разные стороны от этого четырёхугольника. («По разные стороны» означает, что ломаная общего положения, соединяющая две оставшиеся красные точки, пересекает контур четырёхугольника в нечётном числе точек.)

### 2.2. ОСЛАБЛЕННЫЕ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ 1.2

Сначала мы проиллюстрируем идею «понижения размерности» (см. замечание 1.3) доказательством следующих ослабленных версий теоремы 1.2.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4.** Среди любых 6 точек в пространстве найдутся  
 (а) 5 точек  $O, A, B, C, D$ , для которых треугольники  $OAB$  и  $OCD$  имеют общую точку, отличную от  $O$ ;

(б) непересекающиеся пара и тройка, для которых отрезок, соединяющий вершины пары, пересекает треугольник, образованный тройкой.

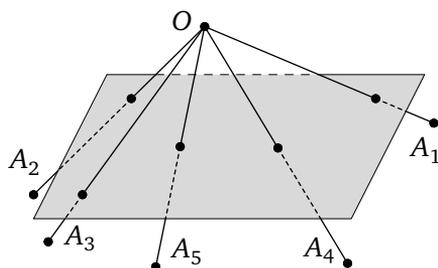


Рис. 7. К доказательствам утверждения 2.4.а и теоремы 1.2'.  
 Плоскость в  $\mathbb{R}^3$  пересекает отрезки  $OA_1, \dots, OA_5$  по точкам  $A'_1, \dots, A'_5$

Доказательство части (а). Существует плоскость, по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $O$  из данных, а остальные 5 точек — по другую. Рассмотрим пересечение этой плоскости с объединением треугольников  $OAB$  для всех пар  $A, B$  данных точек. Теперь часть (а) следует из утверждения 1.1.  $\square$

Часть (б) вытекает из (а) (и наоборот).

Часть (б) является пространственным аналогом утверждения 1.1.

Рисунок 4 показывает, что аналог части (а) для 5 точек неверен.

### 2.3. «КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ» ВЕРСИИ

Мы доказываем следующие усиленные «количественные» (алгебраические) версии результатов из § 1. (Вывод теоремы 1.2 из утвер-

ждения 1.1, а не из его «количественной» версии, содержит перебор, который трудно обобщить на высшие размерности.)

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1'** (очевидное). Любые 4 точки на прямой можно единственным (с точностью до порядка) способом разбить на две незацепленные пары.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1'**. Даны 5 точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Тогда количество точек пересечения внутренностей отрезков, соединяющих данные 5 точек, нечётно.

Это легко доказывается перебором выпуклых оболочек данных 5 точек, или вытекает из утверждения 2.1' и следующей леммы.

**ЛЕММА 2.2'**. (а) Даны два треугольника на плоскости, имеющие единственную общую вершину  $O$ . Никакие 3 из их 5 вершин не лежат на одной прямой. Прямая  $l$  отделяет вершину  $O$  от оснований треугольников. Тогда контуры треугольников пересекаются в чётном числе точек тогда и только тогда, когда пересечения прямой  $l$  с контурами треугольников чередуются вдоль прямой (т. е. когда пересечение одного треугольника с контуром другого содержит ровно один отрезок с концом в  $O$ ).

(б) Даны 5 точек  $O, A_1, A_2, A_3, A_4$  на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Тогда количество из утверждения 1.1' равно сумме количеств точек пересечения внутренностей сторон треугольников  $OPQ$  и  $ORS$  по всем неупорядоченным разбиениям точек  $A_1, A_2, A_3, A_4$  на две неупорядоченные пары  $P, Q$  и  $R, S$ .

(с) [DGN+, Proposition 7.5.a] Обозначим через  $X = \binom{[5]}{2}$  множество всех неупорядоченных пар двухэлементных подмножеств множества  $[5]$ . Для каждого (из всех трёх) неупорядоченного разбиения  $\sigma \sqcup \tau = [4]$  на двухэлементные множества обозначим

$$T_{\{\sigma, \tau\}} := \{ \{\alpha, \beta\} \in X : \alpha \subset \sigma \sqcup \{5\}, \beta \subset \tau \sqcup \{5\} \}.$$

При этих обозначениях пара  $\{\alpha, \beta\} \in X$  лежит в нечётном числе множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  (т. е. в одном или в трёх из этих трёх множеств) тогда и только тогда, когда<sup>3)</sup>  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

Часть (а) аналогична лемме 2.2 (и тривиальна). Часть (б) следует из (с). Несложное доказательство части (с) оставляем читателю.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.** Утверждение 1.1' действительно сильнее утверждения 1.1, поскольку достаточно доказать утверждение 1.1 при до-

<sup>3)</sup> Иными словами, сумма по модулю 2 (симметрическая разность) множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  по всем таким разбиениям  $\sigma \sqcup \tau = [4]$  равна  $\{ \{\alpha, \beta\} \in X : \alpha \cap \beta = \emptyset \}$ .

полнительном условии, что никакие 3 из 5 точек не лежат на одной прямой

(а) во-первых, так как иначе утверждение 1.1 очевидно: если точки  $A, B, C$  среди данных пяти лежат на одной прямой,  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ , а  $D$  — любая другая оставшаяся точка, то отрезки  $AC$  и  $BD$  пересекаются,

(б) во-вторых, так как можно немного пошевелить данные точки, чтобы никакие 3 из 5 пошевелённых точек не лежали на одной прямой и чтобы не добавилось точек пересечения отрезков с различными концами.

Аналогично рассуждению (б) получаем, что нижеприведённые теоремы 1.2' и 1.5' сильнее теорем 1.2 и 1.5.

Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.

**ТЕОРЕМА 1.2'** [Sa81, CG83]. *Даны 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда количество неупорядоченных пар зацепленных треугольников с вершинами в данных 6 точках нечётно.*

**ТЕОРЕМА 1.5'** [vK32, Fl34]. *Даны 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество точек пересечения пар треугольников с вершинами в данных 7 точках нечётно.*

Теорема 1.6 имеет аналогичную количественную версию.

Другие количественные версии приведены в п. 2.6. О контрпримерах к «целочисленным версиям» см. [KS20, Proposition 1.2 and Theorem 1.4].

#### 2.4. ТРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2'

В пространстве отрезок  $p$  ниже отрезка  $q$  (при взгляде из точки  $O$ ), если существует точка  $X \in p$ , для которой отрезки  $OX$  и  $q$  пересекаются.

**ЛЕММА 2.6** (о понижении размерности). *Даны 6 точек  $O, A_1, \dots, A_5$  в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда треугольники  $OA_1A_2$  и  $A_3A_4A_5$  зацеплены тогда и только тогда, когда отрезок  $A_1A_2$  ниже ровно одной стороны треугольника  $A_3A_4A_5$ .*

Лемма следует из того, что количество сторон треугольника  $A_3A_4A_5$ , ниже которых отрезок  $A_1A_2$ , равно количеству точек пересечения контура треугольника  $A_3A_4A_5$  с треугольником  $OA_1A_2$ .

Доказательство теоремы 1.2'. Существует плоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $O$  из данных, а остальные точки  $A_1, \dots, A_5$  — по другую (рис. 7). Возьмём 5 точек пересечения плоскости  $\alpha$  с отрезками  $OA_1, \dots, OA_5$ . Так как никакие 4 из данных 6 точек не лежат в одной плоскости, то никакие 3 из взятых 5 точек не лежат на одной прямой. На плоскости  $\alpha$  мы получаем картину, аналогичную рис. 3 посередине. Тогда следующие числа имеют одинаковую чётность:

- количество  $P$  зацепленных неупорядоченных пар треугольников, образованных данными 6 точками;
- количество  $Q$  отрезков  $A_i A_j$ , лежащих ниже нечётного количества сторон их «дополнительных» треугольников  $A_k A_l A_m$ ,  $\{i, j, k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ;
- количество «проходов», т. е. таких упорядоченных пар  $(A_i A_j, A_k A_l)$  отрезков, у которых первый отрезок ниже второго;
- количество точек пересечения внутренностей отрезков с концами в 5 взятых точках в  $\alpha$ .

Здесь числа  $P$  и  $Q$  имеют одинаковую чётность ввиду леммы 2.6 о понижении размерности: отрезок не может пересекать треугольник более, чем по двум точкам, поэтому в лемме можно заменить «ровно одной стороны» на «нечётного числа сторон».

По утверждению 1.1' последнее число нечётно. Следовательно,  $P$  также нечётно.  $\square$

Следующая версия теоремы 1.2 аналогично сводится к утверждению 2.3.b [Zi13]. Эта версия используется для некоторого четырёхмерного результата (теорема 4.2) в п. 4.5.

Возьмём два пространственных четырёхугольника (т. е. две замкнутые четырёхзвенные ломаные)  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ , никакие 4 из 8 вершин которых не лежат в одной плоскости. Четырёхугольники называются *зацепленными по модулю 2*, если количество точек пересечения четырёхугольника  $ABCD$  с объединением треугольников  $A'B'C'$  и  $A'D'C'$  нечётно.

(В отличие от случая треугольников, в пространстве существуют *зацепленные* четырёхугольники, не являющиеся при этом зацепленными по модулю 2, см. рис. 8. Ср. с определением в начале п. 4.5.)

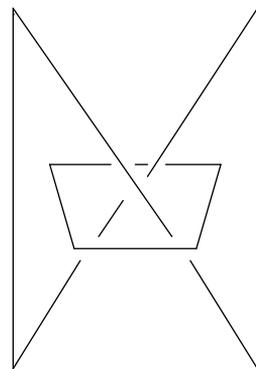


Рис. 8. Зацепление Уайтхеда, образованное пространственными четырёхугольниками

**ТЕОРЕМА 2.7 [Sa81].** *Даны 4 красные и 4 синие точки в пространстве. Никакие 4 из этих 8 точек не лежат в одной плоскости. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 пространственных четырёхугольника, состоящие из отрезков с разноцветными концами.*

**2.5. ЧЕТЫРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО:  
ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.5 И 1.5'**

**Доказательство теоремы 1.5.** Существует трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $O$  из данных, а остальные 6 точек — по другую (рис. 9). Возьмём 6 точек пересечения плоскости  $\alpha$  с отрезками, соединяющими  $O$  с остальными точками. Можно считать, что никакие 5 из данных 7 точек не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости (аналогично замечанию 2.5.b). Значит, никакие 4 из взятых 6 точек в  $\alpha$  не лежат в одной плоскости. Тогда по теореме 1.2 имеются два зацепленных треугольника с вершинами во взятых точках. Теперь получаем нужное по нижеприведённой лемме 2.8. □

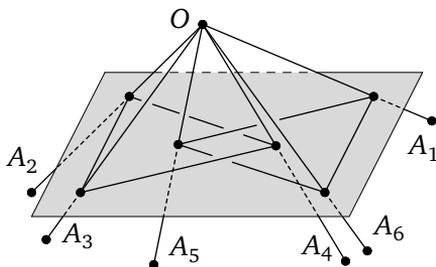


Рис. 9. К доказательству теоремы 1.5; гиперплоскость  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^4$  изображена как плоскость в  $\mathbb{R}^3$

**ЛЕММА 2.8 (о понижении размерности).** *Даны два тетраэдра  $\tau$  и  $\tau'$  в  $\mathbb{R}^4$ , имеющие единственную общую вершину. Трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$  отделяет её от оснований тетраэдров. Контуры треугольников  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$  не пересекаются и зацеплены в гиперплоскости  $\alpha$ . Тогда некоторые две грани тетраэдров пересекаются, не имея общих вершин.*

Эта лемма не так очевидна, как её маломерные аналоги (лемма 2.2 и аналогичный результат для треугольника и тетраэдра в пространстве), поскольку поверхность тетраэдра в  $\mathbb{R}^4$  не разбивает пространство  $\mathbb{R}^4$  (ср. с замечанием 1.4.b).

**Доказательство леммы 2.8.** Обозначим через  $\gamma$  плоскость пересечения трёхмерных гиперплоскостей, натянутых на тетраэдры. Тогда

$\alpha \cap \gamma$  — прямая пересечения плоскостей зацепленных треугольников  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$ . Значит,  $\tau \cap \gamma$  и  $\tau' \cap \gamma$  — треугольники с общей вершиной  $O$ , являющейся общей вершиной тетраэдров (рис. 6 слева). Так как  $\alpha$  отделяет  $O$  от оснований тетраэдров, то  $\alpha \cap \gamma$  отделяет  $O$  от оснований этих треугольников. Так как треугольники  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$  зацеплены, то точки пересечения прямой  $\alpha \cap \gamma$  с контурами треугольников  $\tau \cap \gamma$  и  $\tau' \cap \gamma$  чередуются вдоль этой прямой [Sk, утверждение 4.1.3.b] (ср. рис. 3 справа). Следовательно, по лемме 2.2 две стороны треугольников  $\tau \cap \gamma$  и  $\tau' \cap \gamma$  пересекаются, не имея общих вершин. Не более одной из этих сторон содержит точку  $O$ . Поэтому найденные стороны лежат в пересекающихся гранях тетраэдров, не имеющих общих вершин.  $\square$

Теорема 1.5' вытекает из теоремы 1.2' и следующей леммы 2.8'.

**ЛЕММА 2.8'.** (а) Даны два тетраэдра  $\tau$  и  $\tau'$  в  $\mathbb{R}^4$ , имеющие единственную общую вершину  $O$ . Никакие 5 из их 7 вершин не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$  отделяет  $O$  от оснований тетраэдров. Тогда поверхности тетраэдров  $\tau$  и  $\tau'$  пересекаются в чётном числе точек тогда и только тогда, когда треугольники  $\alpha \cap \tau$  и  $\alpha \cap \tau'$  зацеплены в гиперплоскости  $\alpha$  (т. е. когда пересечение одного тетраэдра с поверхностью другого содержит ровно один отрезок с концом в  $O$ ).

(б) Даны 7 точек  $O, A_1, \dots, A_6 \in \mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество из теоремы 1.5' равно сумме количеств точек пересечения внутренних граней тетраэдров  $O\Delta$  и  $O\Delta'$  по всем неупорядоченным разбиениям точек  $A_1, \dots, A_6$  на две неупорядоченные тройки  $\Delta$  и  $\Delta'$ . (Внутренностью треугольника называется дополнение до его контура.)

(с) Обозначим через  $X = \binom{[7]}{3 \atop 2}$  множество всех неупорядоченных пар трёхэлементных подмножеств множества  $[7]$ . Для каждого (из всех десяти) неупорядоченного разбиения  $\sigma \sqcup \tau = [6]$  на трёхэлементные множества обозначим

$$T_{\{\sigma, \tau\}} := \{ \{ \alpha, \beta \} \in X : \alpha \subset \sigma \sqcup \{7\}, \beta \subset \tau \sqcup \{7\} \}.$$

При этих обозначениях пара  $\{ \alpha, \beta \} \in X$  лежит в нечётном числе множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  тогда и только тогда, когда<sup>4)</sup>  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .

<sup>4)</sup> Иными словами, сумма по модулю 2 множеств  $T_{\{\sigma, \tau\}}$  по всем таким разбиениям равна  $\{ \{ \alpha, \beta \} \in X : \alpha \cap \beta = \emptyset \}$ .

Часть (а) аналогична лемме 2.8. Часть (б) следует из (с). Несложное доказательство части (с) оставляем читателю.

Следующая четырёхмерная версия утверждения 2.3.а связана (аналогично теореме 1.5) с некоторым трёхмерным результатом о неотъемлемой зацепленности [DS22, Remark 2.5].

**ТЕОРЕМА 2.9** [vK32, Fl34]. *Даны три тройки точек в  $\mathbb{R}^4$ . Тогда найдутся два пересекающихся треугольника без общих вершин, вершины каждого из которых лежат в трёх разных тройках.*

## 2.6. СВОЙСТВА «НЕ ЗАЦЕПЛЕННОСТИ»

Здесь мы приводим количественные версии, утверждающие чётность количества пересечений (или зацепленностей), ср. п. 2.3.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.10.** (2) *Существуют 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, и такие, что любой отрезок, соединяющий две из них, пересекает контур треугольника, образованного остальными тремя, в чётном числе точек. (То есть каждая пара точек «не зацеплена» с треугольником, образованным остальными тремя.)*

(2') *Даны 5 точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Тогда количество отрезков, их соединяющих и пересекающих ровно в одной точке контур треугольника, образованного остальными тремя точками, чётно.*

В пространстве вместо свойств не зацепленности 2.10.2,2' есть свойство зацепленности (теорема 1.2) и следующие свойства не зацепленности.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.11.** (3) *Существуют 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости, и такие, что любой отрезок, соединяющий две из них, пересекает поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя, в чётном числе точек. (То есть каждая пара точек «не зацеплена» с тетраэдром, образованным остальными четырьмя.)*

(3') *Даны 6 точек в пространстве, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Тогда количество отрезков, их соединяющих и пересекающих ровно в одной точке поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя точками, чётно.*

**НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.** (3) Возьмём точки, близкие к вершинам правильного октаэдра, или точки, близкие к вершинам треугольной призмы, или точки на кривой моментов.

(3') Любые два треугольника, натянутых на две непересекающиеся тройки данных точек, либо не пересекаются, либо пересекаются по отрезку (не вырожденному в точку). Концов таких отрезков чётное число. Концы таких отрезков — в точности точки пересечения отрезков, соединяющих данные точки, с поверхностями «дополнительных» тетраэдров.

ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sum_{\{A,B\}} |AB \cap \partial T_{AB}|_2 = \sum_{\{A,B\}} (|A \cap T_{AB}|_2 + |B \cap T_{AB}|_2) = \sum_A \sum_{B \neq A} |A \cap T_{AB}|_2 = 0.$$

Здесь

- $|S|_2$  — чётность количества элементов в конечном множестве  $S$ ;
- $T_{AB}$  — тетраэдр, образованный четырьмя данными точками, отличными от  $A, B$ ;
- последнее равенство верно, поскольку для любой точки  $A$  множество  $\{T_{AB}\}_{B \neq A}$  является 3-циклом, ср. [Sk23, замечание 1.3.6b].  $\square$

Утверждения 1.1, 1.1', 2.4.b и 2.11.3' показывают, что при переходе от размерности 2 к размерности 3 свойство существования пересечения сохраняется, а чётность числа пересечений меняется. Трёхмерные аналоги утверждений 1.1, 1.1' имеют более сильную форму: теоремы 1.2 и 1.2'.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.12.** (4–3) *Существуют 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости, и такие, что любой треугольник, образованный тремя из них, пересекает поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя точками, в чётном числе точек [St]. (То есть никакой треугольник, образованный тремя из этих точек, «не зацеплен» с тетраэдром, образованным остальными четырьмя.)*

(4'–3) *Даны 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество треугольников, образованных тремя из них и пересекающих ровно в одной точке поверхность тетраэдра, образованного остальными четырьмя точками, чётно.*

(4–2) (гипотеза) *Существуют 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости, и такие, что любой отрезок, соединяющий две из них, пересекает поверхность четырёхмерного симплекса, образованного остальными пятью точками, в чётном числе точек. (То есть никакая пара точек «не зацеплена» с четырёхмерным симплексом, образованным остальными пятью.)*

(4'–2) Даны 7 точек в  $\mathbb{R}^4$ , никакие 5 из которых не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Тогда количество точек пересечения отрезков, их соединяющих, с трёхмерными поверхностями четырёхмерных симплексов, образованных остальными пятью точками, чётно.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. (4–3) Возьмём точки на кривой моментов [St].

(4'–3) Пометим все точки пересечения пар треугольников, натянутых на две непересекающиеся тройки данных точек (это точки из теоремы 1.5'). Тогда искомое количество равно удвоенному числу помеченных точек. Следовательно, это количество чётно.

(4–2) Попробуйте взять точки на кривой моментов.

(4'–2) Аналогично другому доказательству утверждения 2.11.3'.  $\square$

ГИПОТЕЗА 2.13. ( $d-k$ ) Для любого  $d \neq 2k - 1$  существуют  $d + 3$  точек в  $\mathbb{R}^d$ , никакие  $d + 1$  из которых не лежат в одной  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости, и такие, что любой  $k$ -симплекс, натянутый на  $k + 1$  из них, пересекает поверхность  $(d + 1 - k)$ -симплекса, натянутого на остальные  $d + 2 - k$  точек, в чётном числе точек.

Указание. Попробуйте взять точки на кривой моментов.

( $d-k$ ) Даны  $d + 3$  точек в  $\mathbb{R}^d$ , никакие  $d + 1$  из которых не лежат в одной  $(d - 1)$ -мерной гиперплоскости. Тогда при  $d \neq 2k - 1$  количество  $k$ -симплексов, натянутых на  $k + 1$  из них и пересекающих ровно в одной точке поверхность  $(d + 1 - k)$ -симплекса, натянутого на остальные  $d + 2 - k$  точек, чётно.

Указание. Индукция по  $k$ ; аналогично другому доказательству утверждения 2.11.3'.

### § 3. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1 (связь с гиперграфами). (а) Двумерными аналогами (конечных) графов являются 3-однородные, или двумерные гиперграфы, определяемые как системы трёхэлементных подмножеств конечного множества<sup>5)</sup>. Для краткости мы опускаем «3-однородный» и «двумерный». Например, полным гиперграфом на  $k$  вершинах называется семейство всех трёхэлементных подмножеств  $k$ -элементного множества. Реализуемость (также называемая вложимостью) гипер-

<sup>5)</sup> В топологии такие объекты называются чистыми, или размерностно однородными, двумерными симплицальными комплексами. Термин «гиперграф» знаком большинству математиков и специалистам по компьютерным наукам.

графа в  $d$ -мерном пространстве определяется аналогично реализуемости графа на плоскости: надо «рисовать» треугольники для каждого трёхэлементного подмножества. См. рис. 4, 10 и 11; на последних рисунках подразбиение четырёхугольников, аналогичное рис. 10 слева, не показано. См. строгие определения, например, в [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3].

Гиперграфы (и симплициальные комплексы) играют важную роль в математике. Без них невозможно представить топологию и комбинаторику. Кроме того, они применяются в компьютерных науках и биоинформатике, см. например [PS11].

Соображения «малого шевеления» (или «общего положения») показывают, что любой граф реализуем в  $\mathbb{R}^3$ . Несложное обобщение показывает, что любой гиперграф реализуем в  $\mathbb{R}^5$ .

Полный гиперграф на 6 вершинах содержит «конус над  $K_5$ », а потому не реализуем в  $\mathbb{R}^3$  (утверждение 2.4.а). Уже в ранней истории топологии (1920-е гг.) математики пытались построить гиперграфы, не реализуемые в  $\mathbb{R}^4$ . Эгберт ван Кампен и Алехандро Флорес в 1932–1934 гг. доказали, что полный гиперграф на 7 вершинах не реализуем в  $\mathbb{R}^4$  (теорема 1.5). Этот результат является и ранним приложением *комбинаторной топологии* (сегодня она называется алгебраической топологией), и одним из первых результатов *топологической комбинаторики* (также являющейся областью современных активных исследований).

(b) Реализациями (= вложениями) называются отображения без самопересечений. Для топологической комбинаторики и дискретной геометрии интересно изучать отображения, самопересечения которых непусты (в отличие от вложений), но «не слишком замысловаты». Важным частным случаем является изучение отображений *без тройных пересечений* и вообще отображений *без  $r$ -кратных пересечений*, см. п. 1.5 и обзоры [Sk16], [Sk18, § 3.3], [Sk23', § 3].

(c) Мы представляем *линейные* версии результатов. О *кусочно-линейной (PL) и топологической реализуемости гиперграфов* см., например, [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3], [Sk, § 5]. Приводимые доказательства интересны тем, что они легко обобщаются до PL версий [Sk03, Zi13], в отличие от доказательств из [BM15, So12].

Из PL версий «количественных» результатов (см. п. 2.3) вытекают PL версии для *почти-вложений* (см. PL случай теорем 1.4.1 и 3.1.6 из [Sk18], [Sk23']). Последние влекут *топологические* версии (см. объяснения в [Sk18, абзац после теоремы 1.4.1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2 (сравнение с другими доказательствами). Теорема 1.6 для чётного  $d$  (а потому и её частные случаи — утверждение 1.1 и теорема 1.5) имеет другое простое доказательство, использующее число ван Кампена, см. например [Sk18, § 1.4], [Sk23', § 1.4], [Sk, § 1.4, § 6]. Эти два доказательства предположительно являются простейшими из известных («доказательства из Книги»); они проходят для количественной, PL и топологической версий, ср. замечание 3.1.с.

Обычно теорема 1.6 для чётного  $d$  (точнее, топологическая версия её и теоремы 2.9) доказывается при помощи теоремы Борсука — Улама [Sk20, § 8], [Ma03, § 5]. В отличие от доказательства в данной статье (и от альтернативного доказательства, использующего число ван Кампена), это требует некоторого знания алгебраической топологии. Это знание не упрощает жизнь: известные доказательства теоремы Борсука — Улама (см. [Ma03] и ссылки там) не проще, чем обсуждённые выше прямые доказательства теоремы 1.6 для чётного  $d$ . (Теорема Борсука — Улама доказывается с использованием понятия степени аналогично прямому доказательству теоремы 1.6 для чётного  $d$ , использующему число ван Кампена.)

В [BM15] представлено короткое алгебраическое доказательство теоремы 1.6 (и тем самым её частных случаев). Это доказательство в духе алгебраического доказательства теоремы Радона<sup>6)</sup>.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3 (историческое). Общие идеи «понижения размерности» или «линка вершины» просты и хорошо известны (см. замечание 1.3). О доказательствах теоремы Радона, основанных на этой идее, см. [Pe72, Ko18, RRS]. О приложении в компьютерной науке см. [DE94, proof of 2.3.i]. Также известна связь между зацепленностью и пересечениями<sup>7)</sup>. Развитие этой идеи до связи между неотъемлемой зацепленностью и нереализуемостью нетривиально (ср. с разницей

<sup>6)</sup> См. формулировку теоремы Радона, например, в [Sk23', § 3], [Sk16, § 1]. О связях между теоремой Радона и теоремами 1.2, 1.5, 1.6 см. [Sk23', § 3], [Sk16, § 4]. Доказательство в [BM15], по-видимому, является прямой (т. е. не использующей преобразования Гейла) версией доказательства теоремы 1.6 для чётного  $d$  (это [So12, Theorem 5] для  $k = 1$ ).

<sup>7)</sup> Например, коэффициент зацепления двух непересекающихся замкнутых ломаных в трёхмерной сфере  $\partial D^4$  равен алгебраическому числу пересечений двух двумерных дисков общего положения в четырёхмерном шаре  $D^4$ , натянутых на эти ломаные. Индуктивное доказательство, включающее утверждение о зацепленности в нечётных размерностях и утверждение о пересечениях в чётных размерностях, приведено в [RS72, Whitney Lemma 5.12 and Theorem 5.16].

между утверждением 2.4.a и теоремой 1.2). Доказательства, открывшие и использовавшие эту связь, видимо, не были опубликованы

- до [RST, RST', Sh03, RSS+, Zi13] — для доказательства теоремы Конвея — Гордона — Закса 1.2 сведением неотъемлемой зацепленности к неотъемлемым пересечениям в низшей размерности;
- до [Sk03, Example 2, Lemmas 2 and 1'], [RSS+] — для доказательств теоремы 1.5 и гипотезы Менгера (см. п. 4.1) сведением неотъемлемых пересечений к неотъемлемой зацепленности в низшей размерности.

## § 4. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ГИПОТЕЗА МЕНГЕРА

### 4.1. ГИПОТЕЗА МЕНГЕРА

(Декартовым) произведением  $F \times F'$  двух фигур  $F, F'$  в  $\mathbb{R}^3$  называется множество точек  $(x, y, z, x', y', z') \in \mathbb{R}^6$  таких, что  $(x, y, z) \in F$  и  $(x', y', z') \in F'$ .

Примеры реализации произведений приведены на рис. 10 и 11. Определение реализации см. например в [Sk18, § 3.2], [Sk23', § 3], [Sk, § 6]. Карл Менгер в 1929 году выдвинул гипотезу, что квадрат непланарного графа не реализуем в  $\mathbb{R}^4$  [Me29] (ср. с теоремой 4.2). Она была доказана только в 1978 году Брайаном Уммелем [Um78], использовавшим продвинутую алгебраическую топологию. Простое же доказательство, использующее *понижение размерности*, было получено в 2003 году Михаилом Скопенковым [Sk03], см. ниже. Его рассуждение доказывает обобщённую гипотезу Менгера (« $k$ -я степень непланарного графа не реализуема в  $\mathbb{R}^{2k}$ »). Оно даже даёт простую формулу для минимального  $d$  такого, что данное произведение нескольких графов реализуемо в  $\mathbb{R}^d$  [Sk03].

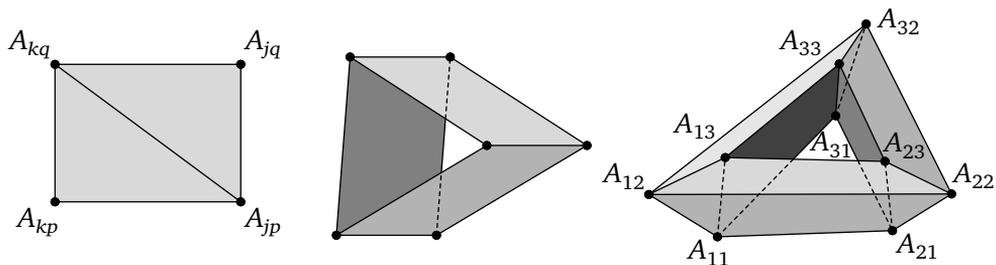


Рис. 10. Реализации произведений:  $K_2 \times K_2$  (слева),  $K_2 \times K_3$  (в центре),  $K_3 \times K_3$  (справа)

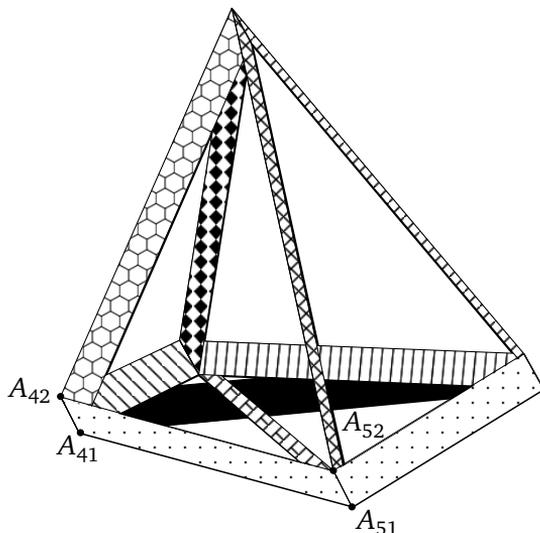


Рис. 11. Реализация произведения  $K_5 \times K_2$

Комбинаторной версией произведения является *произведение двух графов* (не обязательно планарных). Это произведение может быть рассмотрено (хотя и не канонически) как гиперграф. См. замечание 3.1.а; ср. с [DNS, § 3–6].

Из нижеприведённых утверждений 4.1.ab вытекает, что ни  $K_4 \times K_4$ , ни  $K_5 \times K_3$  не реализуемы (линейно) в  $\mathbb{R}^3$ . Доказательство утверждения 4.1.a показывает, что  $K_{3,1} \times K_{3,1}$  не реализуемо в  $\mathbb{R}^3$  (но это произведение реализуемо в  $\mathbb{R}^4$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Доказательство гипотезы Менгера, использующее число ван Кампена или теорему Борсука — Улама (см. замечание 3.2), неизвестно. Доказательство гипотезы Менгера в [Um78] проходит для топологической версии, но сложно. Более простое доказательство в [Sk03] использует для топологической версии непростую *аппроксимационную теорему Брайанта*. Доказательство топологической версии можно получить, придумав количественную PL версию гипотезы Менгера (т.е., улучшив PL версию теоремы 4.2 аналогично п. 2.3, см. задачу 4.4).

#### 4.2. РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Приведём формализацию идеи изображения в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^4$  произведения  $K_m \times K_n$ . Пусть имеется  $mn$  точек  $A_{jp}$ , где  $j \in [m]$  и  $p \in [n]$ , в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^4$ . Для чисел  $j, k \in [m]$ ,  $j < k$ , и  $p, q \in [n]$ ,  $p < q$ , обозначим

$$jk \times pq := \{A_{jp}A_{kq}A_{jq}, A_{jp}A_{kq}A_{kp}\}.$$

Это набор двух треугольников, имеющих общую сторону (рис. 10 слева). Их объединение может быть, но не обязательно быть, плоским четырёхугольником. Назовём  $(m, n)$ -произведением объединение наборов

$$jk \times pq, \quad 1 \leq j < k \leq m, \quad 1 \leq p < q \leq n.$$

(Всего имеется  $mn(m-1)(n-1)/2$  таких треугольников.) Объединение треугольников  $(m, n)$ -произведения называется его **телом**. Оно является многогранным, возможно, самопересекающимся

- квадратом, если  $m = n = 2$  (рис. 10 слева);
- цилиндром (точнее, боковой поверхностью цилиндра), если  $m = 3$  и  $n = 2$  (рис. 10 посередине);
- тором, если  $m = n = 3$  (рис. 10 справа).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. В пространстве

(а) в любом  $(4, 4)$ -произведении, (б) в любом  $(3, 5)$ -произведении найдутся пересекающиеся треугольник и сторона треугольника, не имеющие общих вершин.

Эти фольклорные результаты сводятся в п. 4.4 к PL аналогам утверждений 2.3.ab.

ТЕОРЕМА 4.2 (о квадрате; [Um78, Sk03]). В любом  $(5, 5)$ -произведении в  $\mathbb{R}^4$  найдутся два пересекающихся треугольника, не имеющие общих вершин.

Теорема о квадрате 4.2 сводится в п. 4.5 к версии теоремы 2.7.

ПРИМЕР 4.3. Аналоги утверждения 4.1 и теоремы 4.2 неверны для (а)  $(2, n)$ -произведения в пространстве для каждого  $n$  (для  $n \leq 4$  это очевидно; для  $n = 5$  см. рис. 11: вершины  $(2, 5)$ -произведения являются вершинами параллелограммов; для  $n \geq 6$  конструкция аналогична, см. п. 4.3; ср. [RSS', Theorem 1.5]);

(б)  $(3, n)$ -произведения в пространстве для каждого  $n \leq 4$  (для  $n \leq 3$  это очевидно, см. рис. 10 справа; для  $n = 4$  конструкция аналогична, см. п. 4.3);

(с)  $(4, n)$ -произведения в  $\mathbb{R}^4$  для каждого  $n$  (см. п. 4.3).

ЗАДАЧА 4.4 (количественная проблема Менгера). Обозначим

$$\tilde{K}_5^2 := \left\{ \{(X, Y), (X', Y')\} : X, Y, X', Y' \in \binom{[5]}{2}, \right. \\ \left. \text{либо } X \cap X' = \emptyset, \text{ либо } Y \cap Y' = \emptyset \right\}.$$

Найдите подмножество  $M \subset \tilde{K}_5^2$  такое, что для любого кусочно-линейного отображения  $f: K_5 \times K_5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  является нечётным количество

пар  $\{(X, Y), (X', Y')\} \in M$ , для которых количество точек в пересечении  $f(X \times Y) \cap f(X' \times Y')$  нечётно, где под  $X, Y, X', Y'$  понимаются рёбра графа  $K_5$ .

### 4.3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Набросок доказательства примера 4.3.a. Возьмём точки  $A_{11}, \dots, A_{1n} \in \mathbb{R}^3$ , никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Возьмём вектор  $v$ , не параллельный никакой плоскости, проходящей через 3 из этих точек. Для каждого  $p \in [n]$  положим  $A_{2p} := v + A_{1p}$ . Если  $v$  достаточно мал, то точки  $A_{jp}, j \in \{1, 2\}, p \in [n]$ , — искомые, т. е. в образованном ими  $(2, n)$ -произведении не найдётся пересекающихся треугольника и стороны треугольника, не имеющих общих вершин.

Действительно,  $12 \times pq$  — параллелограмм для любых  $p \neq q$ . Поскольку никакие 4 из точек  $A_{11}, \dots, A_{1n}$  не лежат в одной плоскости, и по выбору вектора  $v$ , для любых попарно различных  $p, q, r, s$  отрезки  $A_{1p}A_{1q}$  и  $A_{1r}A_{1s}$  не пересекаются. Поскольку  $v$  достаточно мал, предыдущее верно и с заменой 1 на 2. Тогда любые два параллелограмма  $12 \times pq$  и  $12 \times rs$  (точнее, их выпуклые оболочки), не имеющие общей стороны, не пересекаются. Теперь можно проверить, что точки  $A_{jp}$  — искомые.  $\square$

Набросок доказательства примера 4.3.b. Обозначим

$$A_{11} = (1, 0, 1), \quad A_{12} = (-1, 0, 1), \quad A_{13} = (0, 0, 2), \quad A_{14} = (0, 0, 3).$$

Обозначим через  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  вращение на  $2\pi/3$  вокруг оси  $x$ . Положим  $A_{2p} = f(A_{1p})$  и  $A_{3p} = f(f(A_{1p}))$  для всех  $p \in [4]$  (рис. 10 справа). Тогда точки  $A_{jp}, j \in [3], p \in [4]$ , — искомые.

Действительно,  $jk \times pq$  — параллелограмм для любых  $j \neq k, p \neq q$ . Поскольку любые два отрезка, соединяющие точки  $A_{1p}$ , либо не пересекаются, либо пересекаются по общей вершине, то любые два из этих параллелограммов, не имеющие общих сторон, не пересекаются. Теперь можно проверить, что точки  $A_{jp}$  — искомые.  $\square$

Набросок доказательства ослабленной версии примера 4.3.c:  $(3, 5)$ -произведение в  $\mathbb{R}^4$ . Возьмём трёхмерную гиперплоскость в  $\mathbb{R}^4$  (показанную на рис. 12 слева как плоскость в  $\mathbb{R}^3$ ). В ней возьмём 10 точек  $A_{jp}$ , где  $j \in [5], p \in \{1, 2\}$ , показанных на рис. 11. Возьмём вектор  $v$ , не параллельный гиперплоскости. Положим  $A_{j3} := A_{j1} + v$ . (На рис. 12 слева мы видим боковую поверхность призматоида  $A_{41}A_{42}A_{43}A_{51}A_{52}A_{53}$ .) Тогда точки  $A_{jp}, j \in [5], p \in [3]$ , — искомые, т. е. в образованном ими  $(3, 5)$ -произведении не найдётся двух пересекающихся треугольников, не имеющих общих вершин.  $\square$

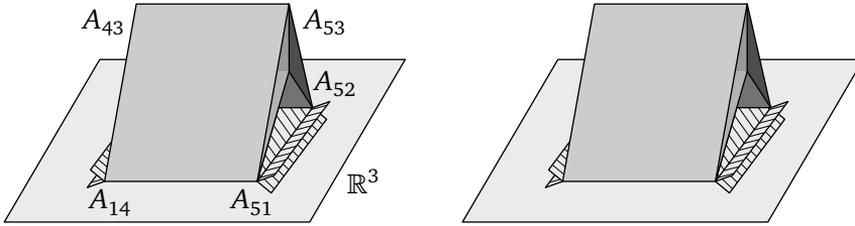


Рис. 12. Слева: к реализации произведения  $K_3 \times K_5$  в  $\mathbb{R}^3$ .  
 Справа: к реализации произведения  $K_4 \times K_5$  в  $\mathbb{R}^4$

Набросок доказательства примера 4.3.с. Возьмём точки  $A_{jp} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ,  $j \in \{1, 2\}$ ,  $p \in [n]$  из доказательства примера 4.3.а. Тогда  $\overrightarrow{A_{1p}A_{1q}} = \overrightarrow{A_{2p}A_{2q}}$  для всех  $p \neq q$ . Возьмём неколлинеарные векторы  $v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ , не параллельные гиперплоскости  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Обозначим  $A_{jp} := A_{1p} + v_j$ ,  $j \in \{3, 4\}$ . Можно считать, что  $v_3, v_4$  взяты так, что  $A_{41}$  лежит внутри треугольника  $A_{11}A_{21}A_{31}$ . См. рис. 12 справа. Тогда точки  $A_{jp}$ ,  $j \in [4]$ ,  $p \in [n]$ , — искомые.  $\square$

#### 4.4. НЕРЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДИЙ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Доказательство утверждения 4.1.а. (Аналогично утверждению 2.4.) Существует плоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $A_{jp}$  из данных, а остальные 15 точек — по другую (рис. 13 слева). Точку пересечения плоскости  $\alpha$

- с отрезком  $A_{jp}A_{kp}$  покрасим в синий для каждого  $k \in [4] - \{j\}$ ;
- с отрезком  $A_{jp}A_{jq}$  покрасим в красный для каждого  $q \in [4] - \{p\}$ .

Пересечение произведения  $jk \times pq$  с  $\alpha$  назовём дугой. Тогда дуги имеют разноцветные концы. (Пересечение плоскости  $\alpha$  с телом данного  $(4, 4)$ -произведения является PL изображением, возможно с самопересечениями, графа  $K_{2,4}$  в  $\alpha$ , т. е. образом PL отображения  $K_{3,3} \rightarrow \alpha$ .)

Значит, по PL аналогу<sup>8)</sup> утверждения 2.3.а найдутся две пересекающиеся дуги, не имеющие общих концов. Тогда найдутся  $k, k' \in [4] - \{j\}$  и  $q, q' \in [4] - \{p\}$  такие, что  $k \neq k'$ ,  $q \neq q'$ , и некоторые два треугольника — один из произведения  $jk \times pq$ , а другой из произведения

<sup>8)</sup> Этот аналог и доказывается аналогично, см. [Sk23', замечание 1.4.4b]. Можно взять  $A_{11}$  вместо  $A_{jp}$ , маленькую сферу с центром в  $A_{11}$  вместо  $\alpha$ , и сферический аналог утверждения 2.3.а вместо кусочно-линейного. Ниже аналогичные замечания в доказательствах утверждения 4.1.b и теоремы 4.2 пропускаются.

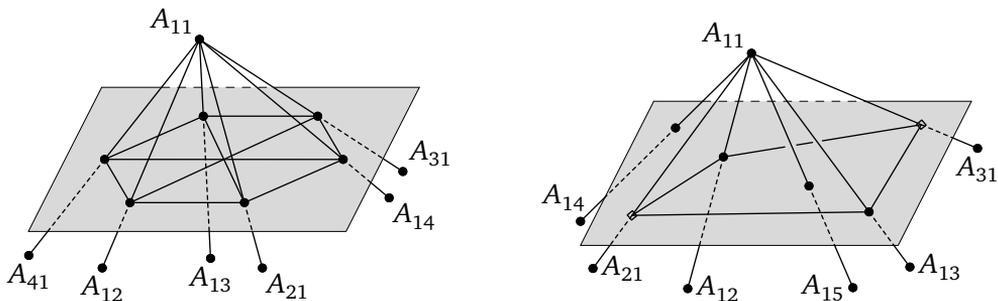


Рис. 13. К доказательствам утверждений 4.1.a (слева) и 4.1.b (справа) для  $j = p = 1$

$jk' \times pq'$  — имеют общую точку, отличную от общей вершины  $A_{jp}$  этих треугольников. Значит, один из этих треугольников пересекает сторону другого треугольника, не проходящую через  $A_{jp}$  и потому не имеющую с первым треугольником общих вершин.  $\square$

Для данных 9 точек  $A_{jp}$ ,  $j \in \{u, v, w\}$ ,  $p \in \{u', v', w'\}$ , в  $\mathbb{R}^3$  или в  $\mathbb{R}^4$ , обозначим через  $uvw \times u'v'w'$  соответствующее  $(3, 3)$ -произведение (рис. 10 справа; в отличие от рисунка,  $(3, 3)$ -произведение может «иметь самопересечения»).

Доказательство утверждения 4.1.b. Можно считать, что никакие 4 из данных 15 точек  $A_{jp}$ ,  $j \in [3]$ ,  $p \in [5]$ , не лежат в одной плоскости (аналогично замечанию 2.5.b). Существует плоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна точка  $A_{jp}$  из данных, а остальные 14 точек — по другую (рис. 13 справа). Точку пересечения плоскости  $\alpha$

- с отрезком  $A_{jp}A_{kp}$  покрасим в синий для каждого  $k \in [3] - \{j\}$ ;
- с отрезком  $A_{jp}A_{jq}$  покрасим в красный для каждого  $q \in [5] - \{p\}$ .

Пересечение произведения  $jk \times pq$  с  $\alpha$  назовём дугой. Тогда дуги имеют разноцветные концы. (Пересечение плоскости  $\alpha$  с телом данного  $(3, 5)$ -произведения является PL изображением, возможно с самопересечениями, графа  $K_{2,4}$  в  $\alpha$ .)

Аналогично последнему абзацу доказательства утверждения 4.1.a либо

- (1) в данном  $(3, 5)$ -произведении найдутся пересекающиеся треугольник и сторона треугольника, не имеющие общих вершин,

либо

- (2) любые две дуги пересекаются только в их общей вершине (если она есть).

Во втором случае обозначим синие точки через  $K$  и  $L$ . По PL аналогу утверждения 2.3.b найдутся две красные точки  $Q, R$  такие, что оставшиеся две красные точки  $S, T$  лежат в  $\alpha$  по разные стороны от замкнутой ломаной  $\gamma$ , являющейся объединением дуг  $QK, KR, RL, LQ$ . Возьмём  $k, l \in [3] - \{j\}$  и  $q, r, s, t \in [5] - \{p\}$  такие, что точки  $K, L$  и  $Q, R, S, T$  принадлежат отрезкам, соединяющим  $A_{jp}$  с  $A_{kp}, A_{lp}$  и  $A_{jq}, A_{jr}, A_{js}, A_{jt}$  соответственно. Тогда плоскость  $\alpha$  пересекает

- контур треугольника  $j \times pst := A_{jp}A_{js}A_{jt}$  по точкам  $S$  и  $T$  (заметим, что этот треугольник не лежит в данном  $(3, 5)$ -произведении);
- тело  $(3, 3)$ -подпроизведения  $jkl \times pqr$  (содержащегося в данном  $(3, 5)$ -произведении) по ломаной  $\gamma$ .

Если  $\gamma$  имеет самопересечения, то получаем свойство (1). Если не имеет, то, так как точки  $S, T$  лежат в  $\alpha$  по разные стороны от  $\gamma$ , по нижеприведённой лемме 4.5 получаем свойство (1).  $\square$

**Лемма 4.5** (о понижении размерности). Пусть в пространстве контур  $\partial\Delta$  треугольника  $\Delta$  и  $(3, 3)$ -произведение  $\tau$  имеют единственную общую вершину  $O$ . Никакие 4 из вершин треугольника  $\Delta$  и  $(3, 3)$ -произведения  $\tau$  не лежат в одной плоскости. Плоскость  $\alpha$  отделяет  $O$  от основания треугольника  $\Delta$  и от оставшихся 8 точек  $(3, 3)$ -произведения  $\tau$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает

- тело  $|\tau|$  по замкнутой ломаной, не имеющей самопересечений;
- $\partial\Delta$  по двум точкам  $S, T$ , лежащим по разные стороны от ломаной.

Тогда в  $\tau$  и в  $\partial\Delta$  найдутся пересекающиеся треугольник и сторона треугольника, не имеющие общих вершин.

**Доказательство.** Обозначим через  $\langle\Delta\rangle$  плоскость треугольника  $\Delta$ . Тогда  $\alpha \cap \langle\Delta\rangle$  — прямая. Пересечение  $\alpha \cap \Delta$  — отрезок  $ST$ . Точки  $S, T$  лежат в  $\alpha$  по разные стороны от замкнутой ломаной  $\alpha \cap |\tau|$ , не имеющей самопересечений, и никакие 3 точки среди  $S, T$  и вершин ломаной  $\alpha \cap |\tau|$  не лежат на одной прямой. Поэтому отрезок  $ST$  пересекает  $|\tau| \cap \langle\Delta\rangle$  в нечётном количестве точек. Аналогично прямая  $\alpha \cap \langle\Delta\rangle$  пересекает  $|\tau| \cap \langle\Delta\rangle$  в чётном количестве точек. Кроме того, никакие 4 из вершин треугольника  $\Delta$  и тетраэдра  $\tau$  не лежат в одной плоскости. Из всего этого получаем, что  $\tau \cap \langle\Delta\rangle := \{\Gamma \cap \langle\Delta\rangle : \Gamma \in \tau\}$  является 1-циклом, т. е. набором отрезков в плоскости  $\langle\Delta\rangle$  таким, что каждая точка из  $\langle\Delta\rangle$  является концом чётного (возможно, нулевого) количества отрезков набора. В силу предположений об  $\alpha$  мы можем выбрать отрезки 1-цикла так, чтобы прямая  $\alpha \cap \langle\Delta\rangle$  отделяла  $O$  от  $S, T$  и от всех вершин отрезков 1-цикла, отличных от  $O$  (ср. рис. 6 слева).

Поэтому по аналогу леммы 2.2 для треугольника и 1-цикла, некоторые два отрезка из  $\partial\Delta$  и из  $\tau \cap \langle\Delta\rangle$  пересекаются, не имея общих вершин. Не более одного из этих отрезков содержит точку  $O$ . Поэтому найденный отрезок 1-цикла  $\tau \cap \langle\Delta\rangle$  является пересечением с плоскостью  $\langle\Delta\rangle$  треугольника из  $\tau$ , пересекающего сторону треугольника  $\Delta$ , не имея с ней общих вершин.  $\square$

#### 4.5. НЕРЕАЛИЗУЕМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Зейфертовой цепью* (или кограницей) замкнутой ломаной  $a$  в пространстве называется конечный набор  $S$  треугольников (не вырожденных в отрезок или точку) в пространстве такой, что

- каждое ребро ломаной  $a$  является стороной ровно одного треугольника из  $S$ ;
- каждый отрезок, не являющийся ребром ломаной  $a$ , является стороной чётного (возможно, нулевого) количества треугольников из  $S$ .

Две непересекающиеся замкнутые ломаные  $a$  и  $a'$  в пространстве зацеплены по модулю 2, если для любых зейфертовых цепей  $S$  для  $a$  и  $S'$  для  $a'$  таких, что контур любого треугольника из  $S$  не пересекается с контуром любого треугольника из  $S'$ , количество зацепленных по модулю 2 пар  $(\Delta, \Delta')$  треугольников  $\Delta$  из  $S$  и  $\Delta'$  из  $S'$  нечётно. Эквивалентность другим определениям зацепленности по модулю 2 (в частности, определению, приведённому перед теоремой 2.7) доказана в [Sk, Lemma 4.8.3].

Доказательство теоремы о квадрате 4.2. Можно считать, что никакие 5 из данных 25 точек  $A_{jp}$ ,  $j, p \in [5]$ , не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости (аналогично замечанию 2.5.b). Существует трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$ , по одну сторону от которой лежит ровно одна

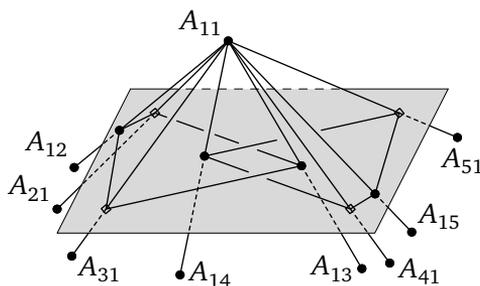


Рис. 14. К доказательству теоремы о квадрате 4.2

точка  $A_{jp}$  из данных, а остальные 24 точки — по другую (рис. 14). Точку пересечения гиперплоскости  $\alpha$

- с отрезком  $A_{jp}A_{kp}$  покрасим в синий для каждого  $k \in [5] - \{j\}$ ;
- с отрезком  $A_{jp}A_{jq}$  покрасим в красный для каждого  $q \in [5] - \{p\}$ .

Пересечение произведения  $jk \times pq$  с  $\alpha$  назовём дугой. Тогда дуги имеют разноцветные концы.

Аналогично последнему абзацу доказательства утверждения 4.1.а либо

(1) в данном  $(5, 5)$ -произведении найдутся два пересекающихся треугольника, не имеющих общих вершин,

либо

(2) любые две дуги пересекаются только в их общей вершине (если она есть).

В случае (2) пересечение плоскости  $\alpha$  с телом данного  $(5, 5)$ -произведения является PL изображением без самопересечений графа  $K_{4,4}$  в  $\alpha$ . Воспользуемся следующим PL аналогом теоремы 2.7: в любом PL изображении без самопересечений графа  $K_{4,4}$  в  $\mathbb{R}^3$  найдутся два зацепленных по модулю 2 цикла длины 4 (см. доказательство в [Sa81, Zi13]). Получаем две зацепленные по модулю 2 замкнутые ломаные в  $\alpha$ , каждая из которых составлена из четырёх дуг. Возьмём  $\{a, b, a', b'\} = [5] - \{j\}$  и  $\{c, d, c', d'\} = [5] - \{p\}$  такие, что дуги

- первой ломаной содержатся в произведениях  $ja \times pc, jb \times pc, ja \times pd, jb \times pd$ ,
- второй ломаной содержатся в произведениях  $ja' \times pc', jb' \times pc', ja' \times pd', jb' \times pd'$ .

Значит, ломаные являются пересечениями гиперплоскости  $\alpha$  с телами  $(3, 3)$ -произведений  $jab \times pcd$  и  $ja'b' \times pc'd'$ . Тогда получаем нужное по нижеприведённой лемме 4.6.  $\square$

**ЛЕММА 4.6** (о понижении размерности). *Даны два  $(3, 3)$ -произведения в  $\mathbb{R}^4$ , имеющие единственную общую вершину  $O$ , причём никакие 5 из их 17 вершин не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости. Трёхмерная гиперплоскость  $\alpha$  отделяет  $O$  от оставшихся 16 точек  $(3, 3)$ -произведений. Эта гиперплоскость  $\alpha$  пересекает их тела по двум непересекающимся замкнутым ломаным, зацепленным по модулю 2 в  $\alpha$ . Тогда в этих  $(3, 3)$ -произведениях найдутся два пересекающихся треугольника, не имеющие общих вершин.*

**Доказательство.** Обозначим через  $S$  (через  $S'$ ) множество всех тех треугольников из первого (из второго)  $(3, 3)$ -произведения, которые

не содержат точку  $O$ . Так как никакие 5 из 17 вершин  $(3, 3)$ -произведений не лежат в одной трёхмерной гиперплоскости, то никакие 4 из их 16 проекций на  $\alpha$  с центром  $O$  не лежат в одной плоскости. Поэтому контуры треугольников  $\alpha \cap O\Delta$  и  $\alpha \cap O\Delta'$  не пересекаются для любых  $\Delta \in S$  и  $\Delta' \in S'$ . Обозначим через  $\gamma$  и  $\gamma'$  непересекающиеся замкнутые ломаные из условия. Так как  $\gamma$  и  $\gamma'$  зацеплены по модулю 2, то количество зацепленных по модулю 2 пар  $(\Delta, \Delta')$  таких треугольников нечётно. По лемме 2.8'.а такие треугольники зацеплены по модулю 2 тогда и только тогда, когда поверхности тетраэдров  $O\Delta$  и  $O\Delta'$  пересекаются в чётном количестве точек (включая  $O$ ). Для любой стороны  $MN$  треугольника из  $S$ , не лежащей в  $\gamma$ , и стороны  $M'N'$  треугольника из  $S'$ , не лежащей в  $\gamma'$ , пересечение  $OMN \cap OM'N'$  входит в ровно два пересечения боковых поверхностей тетраэдров  $O\Delta$  и  $O\Delta'$ . Поэтому количество пар пересекающихся треугольников одного из трёх следующих типов нечётно:

- пар  $(\Delta, \Delta')$  для  $\Delta \in S$  и  $\Delta' \in S'$ ;
- пар  $(OMN, \Delta')$  для стороны  $MN$  ломаной  $\gamma$  и треугольника  $\Delta' \in S'$ ;
- пар  $(\Delta, OM'N')$  для стороны  $M'N'$  ломаной  $\gamma'$  и треугольника  $\Delta \in S$ .

Теперь лемма следует из того, что в указанных парах треугольники не имеют общих вершин, а также содержатся в треугольниках из данных  $(3, 3)$ -произведений.  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В этом списке звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

- [AKM] *Abrahamsen M., Kleist L., Miltzow T.* Geometric Embeddability of Complexes is  $\exists \mathbb{R}$ -complete. arXiv:2108.02585.
- [BL] \* [https://ru.wikipedia.org/wiki/Брунново\\_зацепление](https://ru.wikipedia.org/wiki/Брунново_зацепление).
- [BM15] *Bogdanov I., Matushkin A.* Algebraic proofs of linear versions of the Conway — Gordon — Sachs theorem and the van Kampen — Flores theorem. arXiv:1508.03185.
- [Br68] *Bruegel P.* 1568, [https://ru.wikipedia.org/wiki/Сорока\\_на\\_виселице](https://ru.wikipedia.org/wiki/Сорока_на_виселице).
- [CG83] *Conway J. H., Gordon C. M. A.* Knots and links in spatial graphs // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7:4. P. 445–453.
- [CKS+] \* Новые способы плетения корзинок, представили И. Богданов, А. Каибханов, Ю. Кудряшов, А. Скопенков, А. Сосинский и Г. Челноков, <http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.ru/index.htm>.
- [DE94] *Dey T. K., Edelsbrunner H.* Counting triangle crossings and halving planes // Discrete Comput. Geom. 1994. Vol. 12, № 3. P. 281–289.

- [DGN+] \* Минимизация ранга восполнением матриц, представляли А. Воропаев, Т. Гараев, С. Дженжер, О. Никитенко, А. Петухов и А. Скопенков, [https://www.mccme.ru/circles/oim/netflix\\_rus.pdf](https://www.mccme.ru/circles/oim/netflix_rus.pdf).
- [DNS] \* Дженжер С., Никитенко О., Скопенков А. Циклы в графах и в гиперграфах, <https://www.mccme.ru/circles/oim/cyclesg-jour.pdf>.
- [DS22] Dzhenzher S., Skopenkov A. To the Kühnel conjecture on embeddability of  $k$ -complexes into  $2k$ -manifolds. arXiv:2208.04188.
- [FFN+] Flapan E., Foisy J., Naimi R., Pommersheim J. Intrinsically  $n$ -linked graphs // J. Knot Theory Ramifications. 2001. Vol. 10, № 8. P. 1143–1154.
- [F134] Flores A. Über  $n$ -dimensionale Komplexe die im  $E^{2n+1}$  absolut selbstverschlungen sind // Ergebnisse Math. Kolloq. 1934. Bd. 6. S. 4–7.
- [FMM+] \* Flapan E., Mattman T., Mellor B., Naimi R., Nikkuni R. Recent Developments in Spatial Graph Theory // Knots, links, spatial graphs, and algebraic invariants. Providence, RI: AMS, 2017. (Contemp. Math.; Vol. 689). P. 81–102. arXiv:1602.08122.
- [FNP] Flapan E., Naimi R., Pommersheim J. Intrinsically triple linked complete graphs // Topology Appl. 2001. Vol. 115, № 2. P. 239–246.
- [GSS+] \* Проекция скрещивающихся прямых, представили А. А. Гайфуллин, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, А. В. Шаповалов, <http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php>.
- [Io] \* [https://ru.wikipedia.org/wiki/Категория:Невозможные\\_объекты](https://ru.wikipedia.org/wiki/Категория:Невозможные_объекты).
- [Ko19] Kogan E. Linking of three triangles in 3-space. arXiv:1908.03865.
- [Ko18] \* Колпаков Е. Доказательство теоремы Радона при помощи понижения размерности // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 23. М.: МЦНМО, 2018. С. 130–133. arXiv:1903.11055.
- [KS20] Karasev R., Skopenkov A. Some “converses” to intrinsic linking theorems // Discrete Comp. Geom. 2023. Vol. 70, № 3. P. 921–930. arXiv:2008.02523.
- [LS98] Lovasz L., Schrijver A. A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, № 5. P. 1275–1285.
- [LT14] Lindenstrauss E., Tsukamoto M. Mean dimension and an embedding problem: an example // Israel J. Math. 2014. Vol. 199, № 2. P. 573–584.
- [Ma03] \* Matoušek J. Using the Borsuk — Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.
- [Me29] Menger K. Über plättbare Dreiergraphen und Potenzen nicht plättbarer Graphen // Ergebnisse Math. Kolloq. 1929. Bd. 2. S. 30–31.

- [Me22] *Melikhov S. A.* Embeddability of joins and products of polyhedra // *Topol. Methods in Nonlinear Anal.* 2022. Vol. 60, № 1. P. 185–201. arXiv:2210.04015.
- [MTW] *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* Hardness of embedding simplicial complexes in  $\mathbb{R}^d$  // *J. Eur. Math. Soc.* 2011. Vol. 13, № 2. P. 259–295. arXiv:0807.0336.
- [Na20] \* *Naimi R.* A brief survey on intrinsically knotted and linked graphs. arXiv:2006.07342.
- [Ne91] *Negami S.* Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1991. Vol. 324, № 2. P. 527–541.
- [Pa15] *Parsa S.* On links of vertices in simplicial  $d$ -complexes embeddable in the Euclidean  $2d$ -space // *Discrete Comput. Geom.* 2018. Vol. 59, № 3. P. 663–679. This is arXiv:1512.05164v4 up to numbering of sections, theorems etc.; we refer to numbering in arxiv version. Correction: *Discrete Comput. Geom.* 2020. Vol. 64, № 3. P. 227–228.
- [Pa20] *Parsa S.* On the Smith classes, the van Kampen obstruction and embeddability of  $[3] * K$ . arXiv:2001.06478.
- [Pa21] *Parsa S.* Instability of the Smith index under joins and applications to embeddability // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2022. Vol. 375, № 10. P. 7149–7185. arXiv:2103.02563.
- [Pe72] \* *Peterson B. B.* The Geometry of Radon’s Theorem // *Amer. Math. Monthly.* 1972. Vol. 79. P. 949–963.
- [PS05] \* *Прасолов В. В., Скопенков М. Б.* Рамсеевская теория зацеплений // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9.* М.: МЦНМО, 2005. С. 108–115.
- [PS20] *Parsa S., Skopenkov A.* On embeddability of joins and their “factors” // *Topology Appl.* 2023. Vol. 326. Paper № 108409, 4. arXiv:2003.12285.
- [PS11] *Ponty Y., Saule C.* A combinatorial framework for designing (pseudo-knotted) RNA algorithms // *Proc. of the 11th Intern. Workshop on Algorithms in Bioinformatics, WABI’11.* P. 250–269.
- [RA05] \* *Ramírez Alfonsín J. L.* Knots and links in spatial graphs: a survey // *Discrete Math.* 2005. Vol. 302. P. 225–242.
- [RRS] \* *Ретинский В., Рябичев В., Скопенков А.* Мотивированное доказательство теоремы Тверберга // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27.* М.: МЦНМО, 2021. С. 166–169. arXiv:2008.08361.
- [RS72] \* *Рурк К. П., Сандерсон Б. Дж.* Введение в кусочно-линейную топологию. М.: Мир, 1974.
- [RSS’] *Repovš D., Skopenkov A. B., Ščepin E. V.* On embeddability of  $X \times I$  into Euclidean space // *Houston J. Math.* 1995. Vol. 21, № 1. P. 199–204.

- [RSS+] \* Реализуемость гиперграфов: примеры и алгоритмы, представляли А. Зимин, А. Рухович, А. Скопенков, М. Скопенков, <https://www.turgor.ru/lktg/2013/1/1-1ru.pdf>.
- [RST] \* *Robertson N., Seymour P., Thomas R.* A survey of linkless embeddings // *Graph Structure Theory* (Seattle, WA, 1991). Providence, RI: AMS, 1993. (Contemp. Math.; Vol. 147). P. 125–136.
- [RST'] *Robertson N., Seymour P., Thomas R.* Linkless embeddings of graphs in 3-space // *Bull. of the Amer. Math. Soc. (N. S.)*. 1993. Vol. 28, № 1. P. 84–89.
- [Sa81] *Sachs H.* On spatial representation of finite graphs, in: *Finite and infinite sets* (Eger, 1981), 649–662, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, 37, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [Sa91g] *Sarkaria K. S.* A generalized van Kampen — Flores theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. Vol. 111, № 2. P. 559–565.
- [Sh03] *Шаповалов А.* Решение олимпиадной задачи о 6 точках в пространстве. 2003. (Не опубликовано.)
- [Sk] \* *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algorg.pdf>.
- [Sk03] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // *Fund. Math.* 2003. Vol. 179, № 3. P. 191–198. arXiv:0808.1199.
- [Sk06] \* *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // *Surveys in contemporary mathematics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 347). P. 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk16] \* *Skopenkov A.* A user's guide to the topological Tverberg Conjecture. arXiv:1605.05141v4. (Ранее опубликован сокращённый вариант: *Russian Math. Surveys*. 2018. Vol. 73, № 2. P. 323–353.)
- [Sk18] \* *Skopenkov A.* Invariants of graph drawings in the plane // *Arnold Math. J.* 2020. Vol. 6, № 1. P. 21–55. Full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk18o] \* *Skopenkov A.* A short exposition of S. Parsa's theorems on intrinsic linking and non-realizability // *Discrete Comp. Geom.* 2021. Vol. 65, № 2. P. 584–585. Full version: arXiv:1808.08363.
- [Sk20] \* *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения / 2-е изд. М.: МЦНМО, 2020. Часть книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.
- [Sk23] *Skopenkov A.* To S. Parsa's theorem on embeddability of joins. arXiv:2302.11537.
- [Sk23'] \* *Скопенков А.* Инварианты изображений графов на плоскости // *Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 31.* М.: МЦНМО, 2023. С. 74–127. arXiv:1805.10237.

- [Sk24] Скопенков А. Б. Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве. Представлено к публикации в «Математическое просвещение».
- [So12] Soberon P. Equal coefficients and tolerance in coloured Tverberg partitions // *Combinatorica*. 2015. Vol. 35, № 2. P. 235–252. arXiv:1204.1202. We refer to numbering in arxiv version.
- [SS92] Segal J., Spieź S. Quasi embeddings and embeddings of polyhedra in  $\mathbb{R}^m$  // *Topology Appl.* 1992. Vol. 45, № 3. P. 275–282.
- [St] Starkov M. An “unlinked” set of  $2k + 3$  points in  $2k$ -space.
- [Ta00] Taniyama K. Higher dimensional links in a simplicial complex embedded in a sphere // *Pacific Jour. of Math.* 2000. Vol. 194, № 2. P. 465–467.
- [Um78] Ummel B. The product of nonplanar complexes does not imbed in 4-space // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978. Vol. 242. P. 319–328.
- [Val] \* <https://ru.wikipedia.org/wiki/Валькнут>.
- [vK32] Kampen E. R. van. Komplexe in euklidischen Räumen // *Abh. Math. Sem. Hamburg*. 1933. Bd. 9. S. 72–78; Berichtigung dazu. S. 152–153.
- [Zi13] Zimin A. Alternative proofs of the Conway — Gordon — Sachs Theorems. arXiv:1311.2882.

# Телефонные сети и графы с цветными рёбрами

В. М. Журавлёв, К. В. Журавлёва

Немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) считал, что теоретическим исследованиям не нужно стремиться придать поскорее промышленную, инженерную направленность. Как-то его перед лекцией предупредили, что он должен высказаться против идеи несовместимости науки и техники. Помня об этом предупреждении, с присутствующим ему остроумием он в своём выступлении сказал:

— Приходится слышать разговоры о враждебности между учёными и инженерами. Я не верю в это. Я действительно твердо убеждён в том, что это неправда. Ничего подобного и не может иметь места, потому что ни те, ни другие не имеют ничего общего между собой.

*Ю. С. Мусабеков. Занимательные истории из жизни ученых, с. 68.*

И со свечкой искали они, и с умом.

*Льюис Кэрролл. Охота на Снарка*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Читая книгу Джимми Сони и Роба Гудмэна о Клоде Шенноне — гении информационного века [14], можно наткнуться на следующие интересные сведения.

Работая в «Лабораториях Белла», Шеннон должен был решить следующую задачу. Имеется ряд устройств  $A, B, \dots, K$ , которые должны

быть соединены друг с другом. Соединительные провода входят в кабель, причем концевые выводы, относящиеся к  $A$ , выходят в одной точке, относящиеся к  $B$ , — в другой, и т. д. Может идти, к примеру, четыре провода от  $A$  к  $B$ , два от  $B$  к  $C$ , три от  $C$  к  $D$  и один от  $A$  к  $D$ . Чтобы различать провода, необходимо, чтобы все провода, выходящие из кабеля в одной точке, были разного цвета. Например, провода между  $A$  к  $B$  должны быть все разных цветов, и все они должны отличаться от проводов, идущих между  $B$  и  $C$  или между  $A$  и  $D$ . Но при этом провода между  $C$  и  $D$  могут быть такими же, как между  $A$  и  $B$ . Если предположить, что не более чем  $m$  концевых выводов могут начинаться в одной точке, возникает вопрос о минимальном количестве разных цветов, достаточном для любой сети.

Ответ Шеннона был таков: следует умножить  $m$  на 1,5, и тогда ближайшее целое, не меньшее полученного числа, и будет нужным количеством цветов.

Попытаемся разобраться в этом вопросе. В качестве наглядной иллюстрации нарисуем схему для четырёх устройств  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  по приведённому выше описанию (рис. 1 а). Цвета на схеме мы обозначаем цифрами.

В этом примере наибольшее количество концевых выводов равняется 6 и сосредоточено в точке  $B$ . Следовательно,  $m = 6$  и, согласно «ответу Шеннона», нам хватит 9 цветов ( $9 = 1,5 \times 6$ ). Однако из схемы видно, что мы использовали всего лишь 6 разных цветов.

Посмотрим на рис. 1 б, здесь также  $m = 6$ , но использовать придётся все 9 цветов, и меньшим числом цветов в этой схеме не обойтись.

Таким образом, «ответ Шеннона» даёт нам оценку сверху, которая для некоторых схем достигается, а в некоторых случаях завышена.

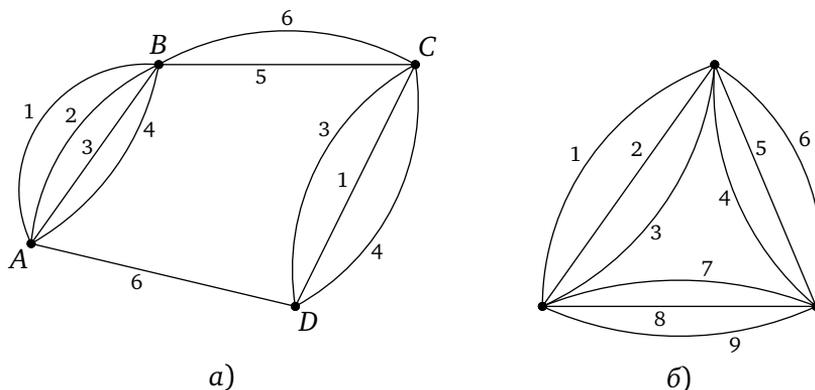


Рис. 1

Учитывая разнообразие схем, «ответ Шеннона» вполне удовлетворил инженеров из «Лабораторий Белла», которым необходимо было решать практические задачи и, как сказано в [14], «подобное решение можно было реализовать немедленно».

Но может ли такой ответ удовлетворить математика?

Еще раз посмотрим на рисунки схем. Задача, которую поставили перед Шенноном, относится к теории графов. Отметим, что Шеннон решал эту задачу летом 1940 года и теория графов, скорее всего, ему тогда не была известна. Сам термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д. Кёнига лишь в 1936 г. (хотя появление теории графов как раздела математики связывают со знаменитой задачей Эйлера о кёнигсбергских мостах.) Поэтому, не умаляя значение результата Шеннона, давайте взглянем на эту задачу с применением подходов, которые имеются сегодня.

Мы обратились к студентам Московского энергетического института, чтобы узнать, известно ли им что-то про «теорему цветового кодирования», которая применяется в телефонных сетях. К сожалению, мы получили ответы — «нет», «не слышали», «не знаем». Впрочем, надо признать, что выборка опрашиваемых студентов была нерепрезентативной.

Сформулируем вопросы, которые у нас появились при чтении отрывка из книги [14].

Вопрос 1. *Для каких схем точна оценка Шеннона?*

Вопрос 2. *Можно ли улучшить оценку Шеннона?*

Чтобы детальнее разобраться в задаче, рассмотрим некоторые частные случаи.

## § 2. ГРАФЫ. МУЛЬТИГРАФЫ. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим частный случай, когда любые два устройства соединены не более чем одним проводом. В этом случае нам требуются простые (обыкновенные) графы<sup>1)</sup>.

В этом разделе мы будем использовать формальные определения из книги [15], для наглядности будем применять общепринятую терминологию.

Пусть  $V$  — непустое множество,  $V^{(2)}$  — множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара  $(V, E)$ , где  $E$  — произвольное подмноже-

<sup>1)</sup> Отметим, что журнал «Квант» неоднократно публиковал статьи о графах для школьников. Когда один из авторов был школьником, то ему запомнились статьи про графы с цветными рёбрами [8] и [9].

ство из  $V^{(2)}$ , называется (*простым*) *графом*. Элементы множества  $V$  называются *вершинами* графа, а элементы множества  $E$  — *рёбрами*. Множества вершин и рёбер графа  $\Gamma$  обозначаются символами  $V\Gamma$  и  $E\Gamma$  соответственно.

Две вершины графа называются *смежными*, если они соединены ребром, и *несмежными* в противном случае. Множество всех вершин графа, смежных с некоторой вершиной  $A$ , называется *окружением вершины  $A$*  и обозначается  $N(A)$ . Количество вершин, смежных с данной, называется её *степенью*. Аналогично два ребра графа называются *смежными*, если у них есть общая вершина (они выходят из одной вершины).

Теперь мы можем каждому из устройств в электросети поставить в соответствие вершину графа. Каждому проводу, соединяющему два устройства, будет соответствовать ребро графа. Мы должны рассмотреть граф с цветными рёбрами, у которого все рёбра, выходящие из одной вершины, окрашены в разные цвета.

Пронумеруем цвета числами. *Рёберной  $k$ -раскраской* графа называется функция  $\phi$ , ставящая в соответствие каждому его ребру  $r$  число  $\phi(r)$  из множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

Рёберная  $k$ -раскраска называется *правильной*, если смежные рёбра имеют разные цвета. Граф, допускающий правильную рёберную  $k$ -раскраску, называется *рёберно  $k$ -раскрашиваемым*. Минимальное число  $k$ , при котором граф  $\Gamma$  является рёберно  $k$ -раскрашиваемым, называется *хроматическим индексом* (*рёберным хроматическим числом*) графа и обозначается через  $\chi'(\Gamma)$ .

Если  $\chi'(\Gamma) = k$ , то граф  $\Gamma$  называется *рёберно  $k$ -хроматическим*.

Кроме раскраски рёбер графа, рассматривается раскраска вершин графа. При этом вводятся понятия *правильной раскраски вершин графа* и *хроматического числа* (не путать с хроматическим индексом). Но это тема отдельной статьи.

Через  $\Delta(\Gamma)$  обозначим наибольшую из степеней вершин графа  $\Gamma$ . В обозначениях нашей задачи имеем  $\Delta(\Gamma) = m$ .

Самое время вспомнить, что мы начинали с телефонных сетей. В телефонных сетях случай, когда любые два устройства соединены не более чем одним проводом, практически не встречается. Даже в домашней электросети сейчас применяются провода трёх цветов: для фазы, нуля и земли<sup>2)</sup>, что уж говорить про сложные коммутаторные устройства.

---

<sup>2)</sup> Инженеры отметят, что некоторые люстры с двухкнопочным выключателем содержат фазу, два нуля и землю, т. е. такая домашняя электросеть устроена немного сложнее.

Мы видим, что приведенного выше определения простого графа недостаточно для общей задачи. Придётся рассматривать объекты, в которых две вершины могут соединяться более чем одним ребром. На помощь приходит понятие мультиграфа.

*Мультиграф* — это пара  $(V, E)$ , где  $V$  — непустое множество *вершин*, а  $E$  — семейство подмножеств множества  $V^{(2)}$  (*рёбер*). При таком определении мы считаем, что элементы множества  $V^{(2)}$  могут в  $E$  повторяться, т. е. допускаются *кратные рёбра*. Если любые две вершины мультиграфа соединены не более чем  $p$  рёбрами, то такой мультиграф называется  $p$ -графом.

Пусть теперь  $\Gamma$  обозначает мультиграф. Через  $\Delta(\Gamma) = t$  обозначим наибольшую из степеней вершин мультиграфа  $\Gamma$ . Хроматический индекс мультиграфа обозначим через  $\chi'(\Gamma)$ .

### § 3. ТЕОРЕМА ЦВЕТОВОГО КОДИРОВАНИЯ. ТЕОРЕМА ВИЗИНГА

Сформулируем теорему цветового кодирования на языке графов.

**ТЕОРЕМА 1** (К. Шеннон, теорема цветового кодирования). *Пусть дан мультиграф, степень каждой вершины которого не больше  $t$ . Тогда хроматический индекс графа не больше  $\lceil 3t/2 \rceil$ <sup>3)</sup>.*

Первым, кто существенно улучшил «ответ Шеннона», был советский математик Вадим Визинг.

В одном из своих интервью Вадим Визинг вспоминает следующее (см. [7]; ниже обозначение  $d$  заменено на  $t$ ).

*В Новосибирске я начал работать над практической задачей, связанной с окраской проводов сети. Чтобы решить эту задачу, я ознакомился с теоремой Шеннона 1949 года (рёбра любого  $p$ -графа могут быть окрашены в  $\lceil 3t/2 \rceil$  цветов). Благодаря теореме Шеннона я заинтересовался более теоретическими вопросами.*

*Теорема Шеннона даёт наилучшую оценку для произвольных  $p$ -графов, но я спросил себя, какова была бы ситуация для графов без кратных рёбер? Шаг за шагом я улучшал оценку Шеннона. В какой-то момент у меня было что-то вроде  $8t/7$ , но в конечном итоге я доказал наилучший возможный результат:  $t + 1$ . Следующим шагом было рассмотрение  $p$ -графов.*

<sup>3)</sup>  $\lceil x \rceil$  обозначает функцию «потолок» — наименьшее целое, большее или равное  $x$ .

Я отправил результат в престижный журнал «Доклады АН СССР», но его отвергли. Рецензент сообщил, что это просто частный случай теоремы Шеннона и он не интересен. Результат не поняли. Поэтому я опубликовал его на месте в Новосибирске в сборнике «Дискретный анализ». Он вышел в 1964 году, когда я также решил случай  $p$ -графа. К этому времени результат уже был замечен на Западе, когда Зыков изложил его в материалах заседания в Смоленице, опубликованных совместно Чехословацкой академией наук и издательством Academic Press.

Сформулируем теорему Визинга для случая простых графов. Случай  $p$ -графов рассмотрим чуть позже.

**ТЕОРЕМА 2** (В. Г. Визинг [10, 15]). Для любого простого графа  $\Gamma$  верны неравенства  $\Delta(\Gamma) \leq \chi'(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + 1$ .

Чтобы доказать теорему 2, нам понадобится ещё несколько определений.

Как и прежде, мы приводим формальные определения из [15], там же читатель может найти дополнительные пояснения и примеры.

Вершина  $v$  и ребро  $r$  называются *инцидентными*, если  $v$  является концом ребра  $r$ , т. е.  $r = (u, v)$ . *Путь* в графе — это последовательность рёбер вида  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$ , где  $v_1, \dots, v_k$  — некоторые вершины. Если  $v_1, \dots, v_{k-1}$  попарно различны, а  $v_k$  совпадает с  $v_1$ , то путь называется (*простым*) *циклом*. Граф *связан*, если существует путь между любыми двумя вершинами. Любой граф состоит из *компонент связности* — максимальных связных подграфов. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов. Если в каждой компоненте графа  $\Gamma$  выбрано максимальное дерево, то их объединение  $H$  называется *остовом* (или *каркасом*) графа  $\Gamma$ .

В настоящее время имеется уже несколько доказательств теоремы Визинга (см., например, [4]).

Приведем одно из них.

**Доказательство теоремы 2.** Отметим, что левое неравенство следует из определения. Докажем правое неравенство.

Очевидно, что правое неравенство верно для графа, состоящего из одного ребра. Предположим, что в общей ситуации правое неравенство не выполняется. Среди всех графов, ему не удовлетворяющих, выберем граф  $\Gamma$  с минимальным числом рёбер.

Пусть  $A_0$  и  $A_1$  — вершины графа  $\Gamma$ , соединённые ребром  $r_1$ . Удалим ребро  $r_1$  и рассмотрим получившийся граф  $H = \Gamma - r_1$ .

Согласно нашему предположению имеем

$$\chi'(\Gamma) > \Delta(\Gamma) + 1, \quad (1)$$

но

$$\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1 \leq \Delta(\Gamma) + 1.$$

Положим  $m = \Delta(\Gamma)$ . Зафиксируем правильную раскраску  $\phi : EH \rightarrow \{1, 2, \dots, m+1\}$  рёбер графа  $H$  и скажем, что цвет  $q \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  *отсутствует в вершине*  $A \in VH$ , если  $\phi(r) \neq q$  для любого ребра  $r$ , инцидентного вершине  $A$ . Так как число возможных цветов больше, чем  $m$ , в каждой вершине отсутствует хотя бы один цвет.

Пусть  $t_0$  и  $t_1$  — цвета, отсутствующие в вершинах  $A_0$  и  $A_1$  соответственно. Рассмотрим окружение  $N(A_0)$  вершины  $A_0$  в графе  $\Gamma$ . Будем последовательно выбирать из окружения  $N(A_0)$  вершины с соответствующими им рёбрами, обозначая вершины и рёбра соответственно  $A_1, A_2, \dots, A_k$  (вершина  $A_1$  уже обозначена) и  $r_1 = A_0A_1, r_2 = A_0A_2, \dots, r_k = A_0A_k$  соответственно. При этом параллельно будем строить последовательность цветов  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , соблюдая следующие условия.

- I) Цвет  $t_i$  отсутствует в вершине  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ).
- II)  $\phi(r_{i+1}) = t_i$  ( $i = 2, \dots, k-1$ ).

Пусть последовательности  $A_1, A_2, \dots, A_i$  и  $t_1, t_2, \dots, t_i$  уже построены. Если существует такое ребро  $r_{i+1} \in EH$ , инцидентное вершине  $A_0$ , что  $r_{i+1} \notin \{r_1, r_2, \dots, r_i\}$ ,  $\phi(r_{i+1}) = t_i$ , то конец ребра обозначаем через  $A_{i+1}$  и берём в качестве  $t_{i+1}$  один из цветов, отсутствующих в вершине  $A_{i+1}$ . Если же описанного ребра  $r_{i+1}$  не существует, то считаем построение законченным и полагаем  $k = i$ .

Поясним подробнее, как мы ищем вершину  $A_2$ . Поскольку в вершине  $A_1$  отсутствует цвет  $t_1$ , мы ищем ребро, инцидентное  $A_0$  и окрашенное в цвет  $t_1$ . Если ребра такого цвета нет, то построение закончено,  $k = 1$  и мы получили пару  $A_1, t_1$ . Если есть ребро цвета  $t_1$ , то мы обозначаем его конец  $A_2$ , выбираем цвет, отсутствующий в вершине  $A_2$ , обозначаем его  $t_2$  и приступаем к поиску ребра, инцидентного  $A_0$  и имеющего цвет  $t_2$ . Если ребра цвета  $t_2$  нет, то построение закончено и  $k = 2$ . Если есть ребро цвета  $t_2$ , то его конец обозначаем буквой  $A_3$ , в качестве  $t_3$  выбираем цвет, отсутствующий в вершине  $A_3$ , и т. д.

Таким образом, мы построим нужные последовательности. Далее возможны две ситуации.

1. Не существует ребра  $r \in EH$ , инцидентного вершине  $A_0$ , для которого  $\phi(r) = t_k$ . Переопределим функцию  $\phi$ , положив  $\phi(r_i) = t_i$

( $i = 1, \dots, k$ ) и оставив значения на других рёбрах неизменными. Получим правильную раскраску  $\phi: EG \rightarrow \{1, 2, \dots, m+1\}$  рёбер графа  $\Gamma$ .

2. Существует ребро  $r \in EH$ , инцидентное вершине  $A_0$ , для которого  $\phi(r) = t_k$ . Тогда это ребро совпадает с каким-либо из  $r_i$  ( $i = 2, \dots, k$ ). Пусть, скажем,  $r = r_j$ , тогда  $t_k = t_{j-1}$ . Снова переопределим функцию  $\phi$ , полагая  $\phi(r_i) = t_i$  ( $i = 1, \dots, j-1$ ). Ребро  $r_j$  пока не окрашено, значения функции  $\phi$  на всех остальных рёбрах не меняются.

Рассмотрим остовный подграф  $F$  графа  $\Gamma$ , рёбрами которого служат все рёбра графа  $\Gamma$ , имеющие цвет  $t_0$  или  $t_k$ . Очевидно, что степень каждой вершины графа  $F$  не больше двух, и потому каждая его связная компонента является либо простой цепью (незамкнутым путём), либо простым циклом, либо изолированной вершиной. Степени вершин  $A_0$ ,  $A_j$  и  $A_k$  в  $F$  не больше единицы, следовательно, эти три вершины не могут входить в одну компоненту. Рассмотрим отдельно два случая.

а) Вершины  $A_0$  и  $A_j$  находятся в разных компонентах графа  $F$ . В этом случае в компоненте, содержащей вершину  $A_j$ , «переставим» цвета  $t_0$  и  $t_k$ , т. е. положим  $\phi(r) = t_0$ , если было  $\phi(r) = t_k$ , и наоборот. Тогда цвет  $t_0$  будет отсутствовать и в вершине  $A_0$ , и в вершине  $A_j$ , что позволит положить  $\phi(r_j) = t_0$ . Вновь получается правильная  $(m+1)$ -раскраска рёбер графа  $\Gamma$ .

б) Вершины  $A_0$  и  $A_k$  находятся в разных компонентах графа  $F$ . Положим  $\phi(r_i) = t_i$  ( $i = j, \dots, k-1$ ), а ребро  $r_k$  оставим пока не окрашенным. Это действие не затрагивает рёбер графа  $F$ . Переставим теперь цвета  $t_0$  и  $t_k$  в компоненте графа  $F$ , содержащей вершину  $A_k$ . Теперь цвет  $t_0$  отсутствует и в вершине  $A_0$ , и в вершине  $A_k$ . Полагаем далее  $\phi(r_k) = t_0$ . Построена правильная  $(m+1)$ -раскраска рёбер графа  $\Gamma$ .

Итак, в любой ситуации строится правильная  $(m+1)$  — раскраска рёбер графа  $\Gamma$ , что противоречит неравенству (1).

Это противоречие и доказывает теорему.  $\square$

Теорема Визинга дает исключительно точные оценки хроматического индекса графа. Поскольку величина  $\chi'(\Gamma)$  может принимать только два значения, все простые графы распадаются на два класса: *первый класс*, где  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$ , и *второй класс*, где  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma) + 1$ .

Таким образом, оценка Шеннона для простых графов завышена. В этой ситуации не требуется брать  $\lceil 3m/2 \rceil$  различных цветов для проводов, а вполне хватит  $m+1$  цвета.

## § 4. ПРИМЕРЫ

Найдем хроматический индекс полных графов.

ТЕОРЕМА 3 [15]. Пусть  $K_p$  — полный граф с  $p$  вершинами. Справедливы равенства

$$\chi'(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1}) + 1 = 2n + 1, \quad (2)$$

$$\chi'(K_{2n}) = \Delta(K_{2n}) = 2n - 1. \quad (3)$$

Доказательство теоремы 3 мы дадим чуть ниже, а сейчас приведём примеры правильных раскрасок для полных графов  $K_4$  и  $K_5$  (рис. 2).

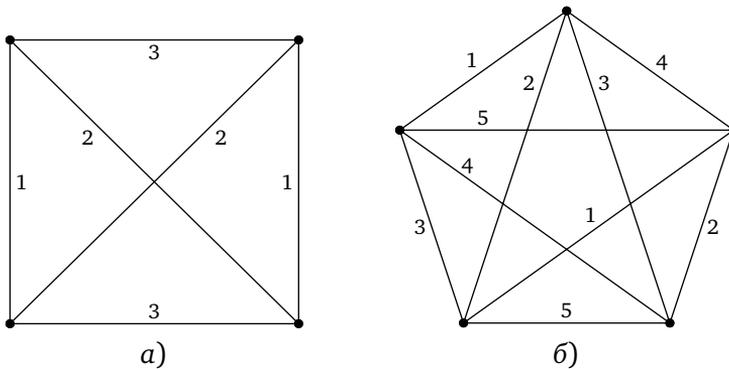


Рис. 2

ЗАДАЧА 1. Найдите правильные раскраски для полных графов  $K_6$  и  $K_7$ .

Теорема Визинга стала классической, и в настоящее время трудно представить себе учебник по теории графов, в котором она не упоминается.

В своих работах Вадим Визинг также показал, что планарный<sup>4)</sup> граф заведомо принадлежит первому классу, если его максимальная степень не меньше восьми. Кроме того, он отметил, что для максимальной степени от двух до пяти существуют планарные графы второго класса. Для степени два любой нечётный цикл является таким графом.

ЗАДАЧА 2. Постройте планарные графы второго класса с максимальной степенью: а) 3; б) 4; в) 5.

<sup>4)</sup> Плоским называется граф, вершины которого являются точками плоскости, а рёбра — непрерывными плоскими линиями без самопересечений, причём никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, который можно так изобразить на плоскости, называется *планарным* [15].

Гипотеза Визинга о планарных графах утверждает, что все простые планарные графы с максимальной степенью шесть или семь принадлежат первому классу. В 2001 году установлено, что все планарные графы с максимальной степенью семь принадлежат первому классу [6]. Таким образом, остаётся открытым только случай максимальной степени шесть.

Если говорить о типичной ситуации, то верна следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 4** (П. Эрдёш [15]). *Почти все графы относятся к первому классу. А именно, если  $U_n$  — множество графов первого класса с  $n$  вершинами, а  $V_n$  — множество всех графов с  $n$  вершинами, то*

$$\frac{|U_n|}{|V_n|} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство этой теоремы опирается на две теоремы Эрдёша, первая из которых говорит, что почти все графы связны, а вторая — что почти все графы имеют единственную вершину максимальной степени. Зная эти два утверждения, достаточно показать (как это сделал Визинг, см. ниже теорему 9), что каждый граф с единственной вершиной максимальной степени должен быть первого класса. Точнее, Визинг показал, что каждый граф второго класса должен иметь по крайней мере три вершины максимальной степени [11].

Несмотря на то, что величина  $\chi'(\Gamma)$  может принимать только два значения,  $\Delta(\Gamma)$  или  $\Delta(\Gamma) + 1$ , её отыскание является весьма трудной задачей. Рассмотрим дополнительные примеры.

Граф называется *двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части (*доли*), что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

**ТЕОРЕМА 5** (Д. Кёниг [15]). *Для любого двудольного графа  $\Gamma$  верно равенство  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma)$ .*

Другими словами, все двудольные графы являются графами первого класса. Доказательство теоремы 5 читатель найдет в [15].

Граф называется *регулярным*, если степени всех его вершин равны.

**ТЕОРЕМА 6** (см. [15]). *Регулярный граф с нечетным числом вершин относится ко второму классу.*

Прежде чем доказывать теорему 6, вспомним следующее.

**ЛЕММА** (о рукопожатиях). *Сумма всех степеней вершин графа — четное число, равное удвоенному числу рёбер.*

**Доказательство.** Разрежем каждое ребро пополам и просуммируем.  $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть  $G$  — некоторый  $k$ -регулярный граф с  $n$  вершинами,  $n = 2s + 1$  для некоторого натурального  $s$ . По лемме о рукопожатиях  $G$  имеет  $kn/2$  рёбер. Предположим, что  $G$  рёберно  $k$ -раскрашиваем. Тогда по принципу Дирихле существует хотя бы один цвет, в который окрашены не менее  $n/2 = s + 1/2$  рёбер. Итак, должен быть по крайней мере один цвет, который появляется на  $s + 1$  рёбрах. Но  $G$  имеет только  $2s + 1$  вершину, так что из некоторой вершины выходят два ребра одного цвета. Получаем противоречие.

Согласно теореме Визинга единственным другим вариантом для хроматического индекса является  $k + 1$ .  $\square$

Теперь несложно доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Поскольку полный граф с нечетным числом вершин регулярен, равенство 2 является следствием теоремы 6. Явная раскраска приведена в решении задачи 1.

Рассмотрим реализацию полного графа  $K_{2n}$  в виде правильного  $2n$ -угольника со всеми диагоналями. Каждая сторона и диагональ соответствует ребру полного графа. Раскрасим стороны  $2n$ -угольника попеременно в 2 цвета. Разобьём множество диагоналей  $2n$ -угольника на  $2n - 3$  подмножества, где каждое подмножество состоит из  $n - 1$  взаимно параллельных диагоналей и одной диагонали, которая им перпендикулярна. Очевидно, что в каждом подмножестве диагонали между собой не имеют общих вершин, следовательно, их можно покрасить в один цвет. Мы получили правильную раскраску полного графа  $K_{2n}$  в  $2n - 1$  цвет.  $\square$

Дополнительную информацию о регулярных графах можно найти в статье [12].

Задача 3. Найдите ответ на вопрос 1 в случае обыкновенных графов.

## § 5. ОХОТА НА СНАРКОВ

*Мост* — это такое ребро графа, при удалении которого увеличивается число связных компонент.

*Снарк* — это 3-регулярный граф без мостов, второго класса.

Самым известным примером снарка<sup>5)</sup> является граф Петерсена (рис. 3). На рис. 3 а приведено классическое изображение графа Пе-

<sup>5)</sup> Наименование «снарк» было придумано в 1976 году Мартином Гарднером в честь неуловимого существа из поэмы абсурда Льюиса Кэрролла «Охота на Снарка». Слово «снарк» образовано от англ. слов snake — змея и shark — акула.

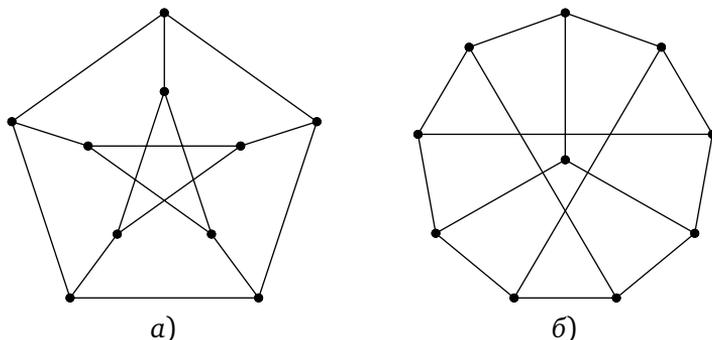


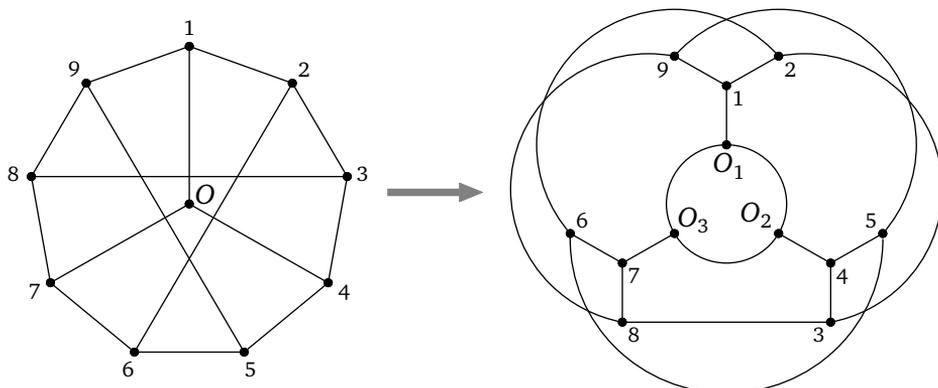
Рис. 3. Граф Петерсена

терсена, а на рис. 3 б — изоморфное изображение графа Петерсена, которое нам понадобится для дальнейших построений. До 1946 года граф Петерсена был единственным известным снарком. С тех пор открыто много других и, в частности, построены бесконечные семейства снарков.

**Задача 4.** Докажите, что граф Петерсена относится ко второму классу.

В 1975 году Руфус Айзекс построил бесконечное семейство снарков, получившее название *цветочных* снарков. До этого момента были известны только три снарка.

Построение цветочных снарков начинается с графа Петерсена (рис. 3 б), см. [2]. В этом графе мы заменяем центральную вершину циклом длиной 3, чтобы сформировать  $J_3$  — трёхлепестковый цветочный снарк. Трансформация графа Петерсена в трёхлепестковый цветочный снарк  $J_3$  показана на рис. 4.

Рис. 4. Трансформация графа Петерсена в  $J_3$

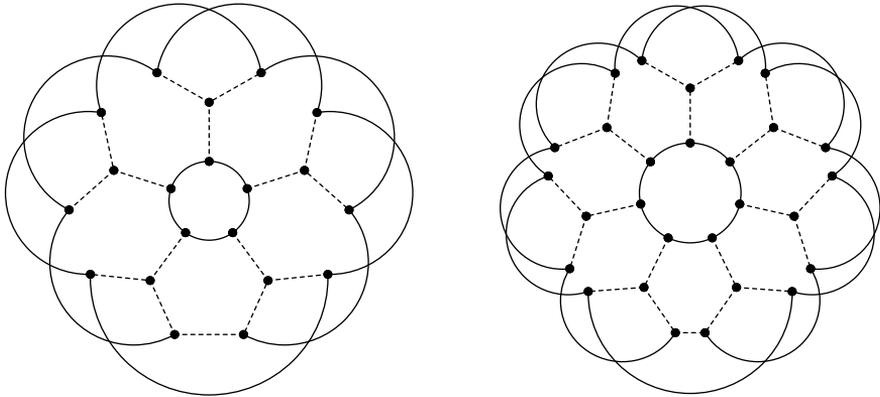


Рис. 5. Цветочные снарки

Занумерованные вершины переходят в вершины с теми же номерами, а вместо вершины  $O$  образован цикл  $O_1O_2O_3$ .

Цветочные снарки  $J_5$ ,  $J_7$  и т. д. строятся путем добавления двух лепестков к графу и двух вершин к центральному циклу.

Цветочные снарки  $J_5$  и  $J_7$  изображены на рис. 5.

Задача 5. Докажите, что графы  $J_3$ ,  $J_5$  и  $J_7$  являются снарками.

Таттом (Tutte) выдвинута следующая

Гипотеза (см. [2]). *Каждый снарк стягивается к графу Петерсена*<sup>6)</sup>.

Другими словами, каждый снарк может быть сведен к графу Петерсена путем удаления одних рёбер и сжатия других.

## § 6. МУЛЬТИГРАФЫ. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы уже упоминали, что в 1964 году Вадим Визинг получил результат не только для простых графов, но и для мультиграфов ( $p$ -графов). Самое время сформулировать теорему Визинга для мультиграфов, но для этого введем ещё несколько обозначений.

Назовём  $M(u, v)$ -кабелем совокупность всех рёбер мультиграфа, соединяющих вершины  $u$  и  $v$ , а толщиной кабеля  $\mu(u, v) = |M(u, v)|$  — количество рёбер в нем. Пусть  $p = \mu(\Gamma)$  обозначает максимальную из толщин всех кабелей в мультиграфе  $\Gamma$ :

$$p = \mu(\Gamma) = \max\{\mu(u, v), u, v \in V(\Gamma)\}.$$

<sup>6)</sup> *Стягивание ребра  $uv$*  означает отождествление смежных вершин  $u$  и  $v$ . Граф  $G$  называется *стягиваемым к графу  $H$* , если  $H$  получается из  $G$  в результате некоторой последовательности стягиваний рёбер [15].

Как и прежде,  $\Delta(\Gamma) = t$  обозначает наибольшую из степеней вершин мультиграфа  $\Gamma$ .

Для мультиграфа электрической сети квартиры  $p = 3$  (в любом кабеле имеются лишь фаза, нуль и земля).

Классический результат для мультиграфов таков.

**ТЕОРЕМА 7** (В. Г. Визинг). *Для любого мультиграфа  $\Gamma$  выполнено соотношение  $\chi'(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma) + \mu(\Gamma) = t + p$ .*

Поскольку в простом графе любые две вершины соединены не более чем одним ребром, имеем  $p \leq 1$  ( $p = 0$ , если все вершины изолированные). Поэтому теорема 2 является частным случаем теоремы 7.

Мы не будем приводить доказательство теоремы 7. Оно во многом повторяет доказательство теоремы 2 с небольшими поправками на специфику мультиграфов. Заинтересованный читатель может найти доказательство в [10].

Найден ещё один важный параметр, от которого зависит количество цветов, — это максимальная из толщин кабелей в мультиграфе.

Приведем без доказательства ещё две теоремы о рёберной раскраске мультиграфов, ставшие классическими.

**ТЕОРЕМА 8** (Андерсен [1], Гольдберг [3, 13]). *Рассмотрим мультиграф  $\Gamma$ . Пусть  $S$  — множество всех путей  $(u, v, w)$  длины 2 в  $\Gamma$ . Тогда*

$$\chi'(\Gamma) \leq \max \left\{ \Delta(\Gamma), \max_{(u,v,w) \in S} \frac{d(u) + \mu(u, v) + d(w) + \mu(v, w)}{2} \right\}.$$

Нам понадобится ещё одно определение. Простой граф  $\Gamma$  называется *критическим*, если  $\chi'(\Gamma) = \Delta(\Gamma) + 1$  и  $\chi'(\Gamma - e) < \chi'(\Gamma)$  для каждого ребра  $e \in E(\Gamma)$ . Лемма о смежности Визинга, изложенная ниже, является полезным инструментом для изучения краевых раскрасок графов.

**ТЕОРЕМА 9** (В. Г. Визинг [11]). *Если  $\Gamma$  — критический граф степени  $\Delta(\Gamma) \geq 2$  и  $(u, v) \in E(\Gamma)$ , то вершина  $v$  имеет по крайней мере  $\max\{2, \Delta(\Gamma) - d(u) + 1\}$  соседей степени  $\Delta(\Gamma)$ .*

Новые доказательства этих классических теорем можно найти в [4].

Выведем из теоремы Визинга 7 теорему цветового кодирования Шеннона.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.** Предположим противное: контрпример существует. Пусть  $\Gamma$  — контрпример минимального размера. Пусть  $\Delta(\Gamma) = t$  и  $\mu(\Gamma) = \mu$  и  $\chi'(\Gamma) = k$ .

Поскольку  $\Gamma$  минимален, для каждого ребра  $f \in E$  получаем

$$\chi'(\Gamma - f) = k - 1.$$

По теореме 7 имеем  $k \leq t + \mu$ . По предположению,  $k > 3t/2$ . Тогда  $3t/2 < k \leq t + \mu$ , следовательно,  $t/2 < \mu$ .

Пусть  $v$  и  $w$  — вершины в  $\Gamma$  такие, что их соединяют  $\mu$  рёбер. Пусть  $e$  — одно из рёбер, соединяющих  $v$  и  $w$ . Тогда  $\chi'(\Gamma - e) = k - 1$ , так что существует  $(k - 1)$ -раскраска графа  $\Gamma - e$ . Число цветов, не используемых при окраске рёбер, инцидентных  $v$ , равно по крайней мере  $(k - 1) - (t - 1) = k - t$ . То же самое верно и для рёбер, инцидентных  $w$ .

Каждый из этих  $k - t$  или более цветов, не используемых для окраски рёбер, инцидентных  $v$ , должен использоваться для окраски рёбер, инцидентных  $w$ , и наоборот (в противном случае  $e$  может быть легко окрашено и мы получим  $(k - 1)$ -раскраску графа  $\Gamma$ ).

Таким образом, число цветов, используемых для окраски рёбер, инцидентных  $v$  и  $w$  (за исключением  $e$ ), не меньше  $2(k - t) + \mu - 1$  и не больше  $(k - 1)$ .

Тогда  $2k - (3t/2) - 1 < 2(k - t) + \mu - 1 < k - 1$ , следовательно,  $k < 3t/2$ . Получаем противоречие.  $\square$

Уже для мультиграфа электрической сети квартиры «ответ Шеннона» можно существенно улучшить: вместо  $3t/2$  цветов достаточно взять  $t + 3$  цвета.

После вопроса: «Сколько необходимо цветов для раскраски?» зададим следующий: «Как раскрашивать?».

В 1992 году описан алгоритм раскраски за полиномиальное время любого простого графа с помощью  $t + 1$  цветов, где  $t$  — максимальная степень графа (см. [5]). Алгоритм использует ту же стратегию, что и изначальное доказательство теоремы Визинга — алгоритм начинает с неокрашенного графа и последовательно ищет способы вовлечь в раскраску ещё одно ребро. Таким образом, алгоритм использует оптимальное число цветов для графов второго класса и максимум один лишний цвет для графов первого класса.

Мы показали эту статью инженеру. Он посмотрел на нас и сказал: — ...На дворе 21-й век, а вы рассказываете о цветных проводах на телефонных линиях. Знаете ли вы, что теперь уже давно используют IP-телефонию. И, вообще-то, крупные компании давно на оптоволокне...

Мы ничего не ответили, а просто перечитали эпиграф.

### Благодарности

Авторы благодарят П. Кожевникова за ценные замечания и П. Саволова за внимание к работе.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ

1. а) См. рис. 6.

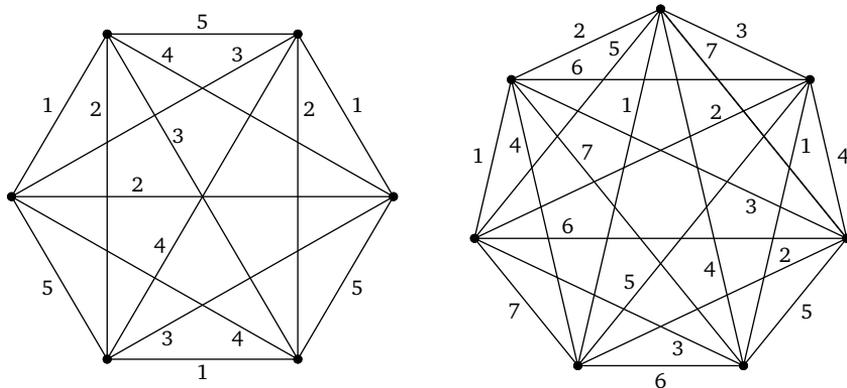


Рис. 6

Рассмотрим реализацию полного графа  $K_{2n+1}$  в виде правильного  $(2n + 1)$ -угольника со всеми проведёнными диагоналями. Раскрасим стороны  $(2n + 1)$ -угольника в  $2n + 1$  цвет. Каждую диагональ покрасим в цвет стороны, которая ей параллельна. Мы получили правильную раскраску полного графа  $K_{2n+1}$ .

2. См. рис. 7.

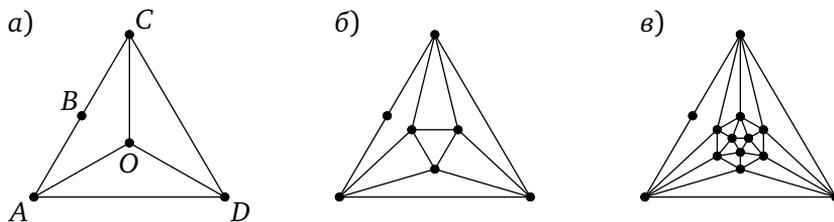


Рис. 7

Такие графы можно построить из графов правильных многогранников путём замены одного ребра на путь из пары смежных рёбер. На рисунке показаны графы, полученные из графов тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.

ПРИМЕЧАНИЕ. Каждому графу мы можем сопоставить систему линейных уравнений. Количество переменных в системе равняется числу рёбер. Если у нас есть  $k$  цветов, то переменные принимают значения из множества  $\{2^1, 2^2, \dots, 2^k\}$ . Таким образом, задачу по раскраске рёбер графа можно запрограммировать как задачу нахождения решения системы линейных уравнений.

3. Из условия имеем, что для графа  $\Gamma$  оценка Шеннона точна, т. е.  $\chi'(\Gamma) = \lceil 3m/2 \rceil$ .

С другой стороны, по теореме Визинга для графов  $\chi'(\Gamma) \leq m + 1$ . Если  $m$  нечетное, то тогда  $(3m+1)/2 \leq m+1$ , откуда  $m=1$ . Значит, любая связная компонента графа — либо ребро, либо изолированная вершина. Для раскраски рёбер такого графа достаточно одного цвета. Но  $\chi'(\Gamma) = \lceil 3/2 \rceil = 2$ . Противоречие, т. е. в этом случае оценка Шеннона не точна.

Если  $m$  четное, то тогда  $3m/2 \leq m+1$ , откуда  $m=2$ . Значит, любая связная компонента графа — либо простая цепь (нециклическая или простой цикл), либо изолированная вершина. Но  $\chi'(\Gamma) = \lceil (3 \cdot 2)/2 \rceil = 3$ . Значит, в этом случае оценка Шеннона точна только для простых циклов нечетной длины.

4. Предположим, что существует правильная 3-раскраска графа Петерсена. Поскольку граф Петерсена содержит внешний цикл 5-го порядка, все три цвета должны появиться на этом цикле. Назовем эти цвета 1, 2 и 3. Один из этих цветов появится один раз, тогда как другие появятся дважды. Предположим без потери общности, что окраска внешнего цикла следующая:  $1 - 2 - 3 - 1 - 2$ . Это определяет цвета рёбер, соединяющих внутренний цикл пятого порядка с внешним. Кроме того, это определяет цвет четырех рёбер внутреннего цикла, два из которых расположены рядом и имеют одинаковый цвет. Получаем противоречие.  $\square$

5. Очевидно, что графы  $J_3$ ,  $J_5$  и  $J_7$  являются 3-регулярными и не имеют мостов. Остается доказать, что для правильной окраски рёбер трёх цветов недостаточно.

Рассмотрим случай графа  $J_3$ . Предположим, что рёбра графа  $J_3$  можно покрасить в три цвета. Назовем эти цвета 1, 2 и 3. Поскольку

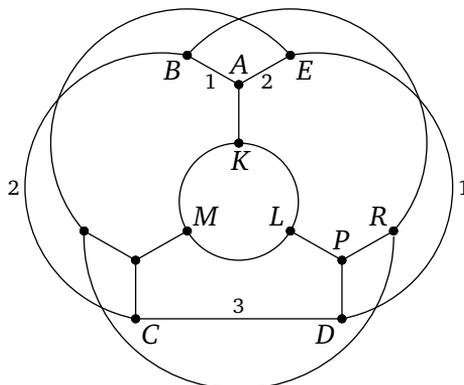


Рис. 8

граф  $J_3$  содержит цикл 5-го порядка ABCDE, без потери общности предположим, что окраска цикла следующая:  $1-2-3-1-2$  (рис. 8). Тогда рёбра  $AK$  и  $BR$  имеют цвет 3, а ребро  $PD$  должно быть покрашено в цвет 2. Значит, ребро  $PR$  должно иметь цвет 1 и, следовательно, ребро  $PL$  должно быть окрашено в цвет 3. С другой стороны, одно из рёбер в цикле  $KLM$  должно иметь цвет 3, что невозможно, так как в вершины  $K$  и  $L$  входят рёбра цвета 3. Приходим к противоречию.

Для графов  $J_5$  и  $J_7$  предлагаем использовать компьютер.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andersen L. D. On edge-colourings of graphs // Math. Scand. 1977. V. 40. P. 161–175.
- [2] Green R. Vizing's Theorem and edge-chromatic Graph Theory. 2015. <https://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Green.pdf>.
- [3] Goldberg M. K. Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique // J. Graph Theory. 1984. V. 8. P. 123–137.
- [4] Kostochka A. A new tool for proving Vizing's Theorem, 2015. <https://kostochk.web.illinois.edu/math581/viz4.pdf>.
- [5] Misra J., Gries D. A constructive proof of Vizing's Theorem // Information Processing Letters. 1992. V. 41, № 3. P. 131–133.
- [6] Sanders D. P., Zhao Yue. Planar graphs of maximum degree seven are class I // J. Comb. Theory. Ser. B. 2001. V. 83, № 2. P. 201–212.
- [7] Interview with Vadim G. Vizing // European Mathematical Society. 2000. № 38. P. 22–23.
- [8] Березина Л. О графах с цветными рёбрами // Квант. 1973. № 8. С. 49–53.
- [9] Вагутен В. Н. Задачи о графах, или Сказка «Иван-царевич и Серый Волк» // Квант. 1974. № 11. С. 23–29, 59.
- [10] Визинг В. Г. Об оценке хроматического класса  $p$ -графа // Дискретный анализ. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1964. Вып. 3. С. 25–30.
- [11] Визинг В. Г. Критические графы с данным хроматическим классом // Дискретный анализ. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. 1965. Вып. 5. С. 9–17.
- [12] Гашков С. Б. Регулярные графы // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 79–109.
- [13] Гольдберг М. К. Строение мультиграфов с ограничением на хроматический класс // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1977. Вып. 30. С. 3–12.

- [14] *Гудмэн Р., Сони Дж.* Игра разума: как Клод Шеннон изобрел информационный век. М.: Эксмо, 2018.
- [15] *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009.

---

Валерий Михайлович Журавлёв, АО «Туполев», Москва

ZhuravlevVM@mail.ru

Каролина Валерьевна Журавлёва, ООО «Джи и Хэлскеа», Москва

ZhuravlevaKV@mail.ru

---

---

# Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

---

---

## Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. а) Пусть  $x$  — корень уравнения  $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ . Пусть

$$y = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n.$$

Тогда  $y$  есть корень уравнения

$$y^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

При этом  $p_1$  — однородная линейная форма;  $p_2$  — однородная квадратичная форма;  $\dots$ ,  $p_n$  — однородная форма  $n$ -ой степени (от  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , причём все функции полиномиально зависят от  $a_i$ ).

б) Пусть при этом  $n = 5$ . Тогда  $p_2 = u_1v_1 + u_2v_2$ , где  $u_i, v_i$  ( $i = 1, 2$ ) — линейные формы от  $b_1, b_2, b_3, b_4$ . (А. Я. Канель-Белов)

2. Рассмотрим граф  $G$ , образованный вершинами и рёбрами четырёхмерного куба. Можно ли все рёбра графа  $G$  разбить на два гамильтонова цикла без общих рёбер? (Цикл называется *гамильтоновым*, если он обходит все вершины графа по одному разу.)  
(Л. Радзивиловский)
3. Пусть  $f(z)$  — аналитическая функция комплексного переменного, определённая в окрестности нуля. Всегда ли функцию  $f(z)$  можно аналитически продолжить на связную область, выходящую за пределы единичного круга? (Функция  $g$  называется *аналитической в окрестности точки*, если в этой окрестности она разлагается в ряд Тейлора.)  
(Фольклор)
4. Дана конечная группа  $G$ , разбитая на три подмножества  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Докажите, что  $N_{ABC} = N_{CBA}$ . (Здесь  $N_{UVW}$ , где  $U, V, W \subset G$ , — количество таких троек  $(x, y, z) \in U \times V \times W$ , что  $xuz = 1$ .)  
(Л. Радзивиловский)
5. Назовём число  $V$  *хорошим*, если существуют два выпуклых подмножества  $X, Y$  трёхмерного единичного куба объёма  $V$  с непересекающимися проекциями на каждую из координатных плоскостей. Найдите супремум множества хороших чисел.  
(Й. Ткадлец, А. Акопян)
6. Пусть дана конечная последовательность  $W$  из букв «О» и «Р». Бросят монетку много раз и пишут результаты: ООРОРОО... Докажите, что матожидание времени появления последовательности  $W$  — целое число.  
(по Д. Уильямсу)
7. Дана ортогональная матрица размера  $n \times n$ . Пусть  $d_1$  — определитель её блока размера  $k \times k$ , стоящего в левом верхнем углу,  $d_2$  — определитель её блока размера  $(n - k) \times (n - k)$ , стоящего в правом нижнем углу. Докажите, что  $|d_1| = |d_2|$ .  
(Л. Радзивиловский)
8. а) Раскрасим области, на которые  $d$  прямых общего положения делят плоскость, в два цвета — белый и чёрный (области, соседние по стороне, окрасим в разные цвета). Тогда число чёрных областей асимптотически не превосходит удвоенного числа белых (существует такая константа  $C$ , что разность между числом чёрных областей и удвоенным числом белых не больше  $C \cdot d$ ).
- б) На плоскости можно расположить  $p$  точек так, чтобы асимптотически  $p^2/6$  прямых ( $p \rightarrow \infty$ ) проходили ровно через три точки.
- в) Выведите из п. (б), что оценка из п. (а) асимптотически достигается.

г) Постарайтесь обобщить результаты предыдущих пунктов на многомере.  
(В. И. Арнольд, Ю. В. Чеканов)

9. Пусть  $C(n)$  — минимальное число линий, требуемое для увеличения отрезка в  $n$  раз с помощью одного циркуля,  $CL(n)$  — соответственно циркуля и линейки.

а) Докажите, что последовательность  $\frac{C(n)}{CL(n)}$  не ограничена при  $n \rightarrow \infty$ .

б) Докажите, что  $\lim \frac{C(n)}{CL(n)} = \infty$ .

в) Докажите, что  $CL(n) > \frac{\ln(\ln(n))}{1000}$ .

(А. Я. Канель-Белов, М. В. Алехнович)

10. Даны натуральные  $n$  и  $k$ ,  $2 \leq k \leq n$ . Также есть множество  $M$  из  $n$  различных фруктов. Натюрморт — это такая последовательность  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в которой каждый фрукт из  $M$  встречается ровно один раз. Есть непустое множество  $S$ , состоящее из натюрмортов. Оказалось, что для каждого натюрморта  $x$  из  $S$  есть такие  $k$  индексов  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , что множество  $S$  содержит все  $k - 1$  натюрмортов, полученных из  $x$  перестановкой фруктов  $x_{i_k}$  и  $x_{i_{j+1}}$  при различных  $j$ ,  $1 \leq j < k$ . Докажите, что  $|S| \geq k!$ .

(И. В. Митрофанов)

11. а) Докажите, что плитками, изображёнными на рис. 1, можно замостить плоскость. Докажите, что любое такое замощение непериодично.

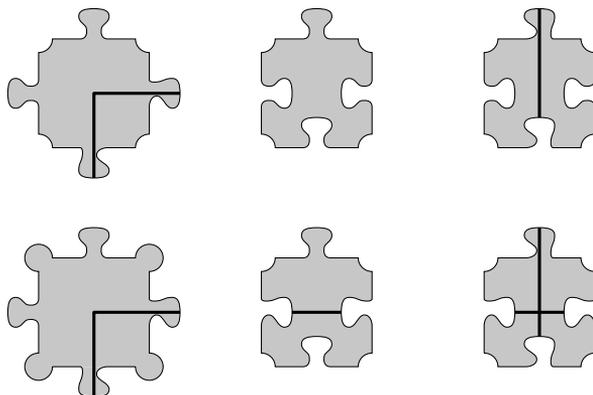


Рис. 1. Набор плиток Робинсона

б) Докажите, что плиткой, изображённой на рис. 2, можно замостить плоскость. Докажите, что любое такое замощение непериодично.

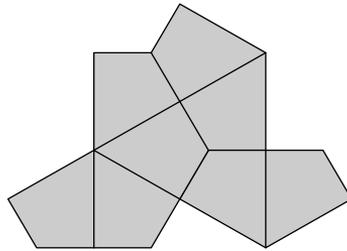


Рис. 2

в) Известно, что параллельными переносами некоторой связной плитки можно замостить плоскость. Докажите, что это можно сделать периодическим образом. (Для несвязной плитки результат неизвестен.) (предложил А. Я. Канель-Белов)

12. Докажите сравнение по простому модулю  $p$

$$\left( \sum_{i=1}^{p-1} x_i \right)^{p-2} \equiv \sum_{\sigma \in S_{p-1}} x_{\sigma(1)} (x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}) \dots (x_{\sigma(1)} + \dots + x_{\sigma(p-1)}).$$

Здесь  $S_{p-1}$  — множество всех перестановок  $p-1$  элементов.

(А. Н. Гришков)

13. Дана коника  $\Omega$  и точка  $O$  вне её. Прямая  $\ell$ , касательная к конике  $\Omega$ , не проходящая через  $O$ . Прямые  $\ell_1, \ell_2$  — касательные из точки  $O$  к конике  $\Omega$ . Точка  $H$  — ортоцентр треугольника, образованного прямыми  $\ell, \ell_1, \ell_2$ . Найдите геометрическое место точек  $H$  при изменении прямой  $\ell$ . (К. А. Бельский)

14. Пусть  $f(n)$  и  $g(n)$  суть числитель и знаменатель несократимой дроби представляющей  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ . Докажите, что  $g(n) > n^{0,999 \cdot n}$  для всех достаточно больших  $n$ . (Ф. В. Петров)

15. Назовём  $m$  раз дифференцируемую функцию  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$   $m$ -хорошей, если  $f(0, \dots, 0) = 0$  и для любого  $k \leq m$  и любого набора индексов  $i_1, i_2, \dots, i_k$  имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(0, \dots, 0) = 0.$$

Пусть  $f$  — некоторая  $m$ -хорошая функция. Докажите, что тогда существует набор таких  $(m-1)$ -хороших функций  $f_1, \dots, f_k$ , что

$$\sum_{i=1}^k x_i f_i = f. \quad (\text{Фольклор})$$

## Дополнение и комментарии к задачку

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и ответственность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачку нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 6, с. 140–142) опубликована

Задача 2.7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку  $[-1,99; +1,99]$ ? (А. Я. Канель)

В выпуске 28 (с. 238, см. решение: настоящий выпуск, с. 192–193) опубликована родственная

Задача 2.7'. У многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что  $P(x)$  делит многочлен вида  $x^n - 1$  для некоторого  $n$ . (М. Л. Концевич)

В продолжение темы (задача была в 2020 году на отборе команды США на Международную математическую олимпиаду):

Задача 2.7''. У многочленов  $p$  и  $p + 1$  с комплексными коэффициентами все комплексные корни имеют модуль 1. Найдите все такие многочлены среди приведённых многочленов с комплексными коэффициентами. (Ankan Bhattacharya)

В выпуске 3 (с. 232, см. решение: выпуск 4, с. 223) опубликована

Задача 3.1. Пусть  $A, B, C$  — произвольные матрицы размера  $2 \times 2$ . Докажите тождество Холла:  $[[A, B]^2, C] = 0$ . (Через  $[A, B] = AB - BA$  обозначается коммутатор). (М. Холл)

В продолжение темы:

Задача 3.1''. Докажите, что все тождества алгебры матриц второго порядка над комплексными числами следуют из тождества Холла и стандартного тождества степени 4:

$$\sum_{\sigma \in S_4} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} \equiv 0. \quad (\text{Ю. П. Размыслов})$$

Поясним, что у понятия следования тождеств есть две эквивалентные формулировки.

- (а) Семантическая: тождество  $f$  следует из системы  $\{g_i\}_{i \in I}$ , если в любой алгебре, где выполняется система  $\{g_i\}_{i \in I}$ , выполняется  $f$ .
- (б) Синтаксическая: тождество  $f$  следует из системы  $\{g_i\}_{i \in I}$ , если оно получается из набора  $\{g_i\}_{i \in I}$  с помощью следующих операций:
- 1) взятия линейных комбинаций;
  - 2) умножения на многочлен (с двух сторон);
  - 3) подстановки многочленов вместо переменных.

В выпуске 3 (с. 233, см. решение: выпуск 18, с. 262) опубликована

Задача 3.5. Дан произвольный многочлен с комплексными коэффициентами. Докажите, что корни его производной лежат внутри выпуклой оболочки корней самого многочлена.

(Теорема Гаусса — Люка)

Опубликованы родственные задачи: 3.5' (выпуск 26, с. 268), 3.5'' (выпуск 28, с. 239), 3.5(3) и 3.5(4) (выпуск 29, с. 260).

В продолжение темы:

Задача 3.5(5). Докажите, что центр тяжести множеств корней многочлена и его производной совпадают. (Фольклор)

Развитием сюжета служит *многомерная теорема Лагранжа*:

**ЗАДАЧА 3.5(6).** *Дана непрерывно дифференцируемая векторозначная функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Докажите, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \in \text{conv}(\text{Im})f',$$

где  $\text{conv}$  — выпуклая оболочка,  $\text{Im}$  — образ, т. е.  $\text{Im} f' = \{f'(x) : x \in (a, b)\}$ .  
(М. В. Коробков)

В выпуске 3 (с. 223, см. решение: выпуск 8, с. 239–245) опубликована

**ЗАДАЧА 3.10.**  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = 9^{a_n}$ ,  $x = \sum \frac{1}{a_i}$ . Докажите, что в десятичном разложении числа  $x$  встречается любая комбинация цифр.

(А. Я. Канель, А. Е. Ерошин)

Статью А. Е. Ерошина «Периодические десятичные дроби» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 8, М.: МЦНМО, с. 239–245), содержащую решение этой задачи, можно использовать на занятиях (А. Ерошин за решение этой задачи получил премию на конкурсе научных работ школьников Intel ISEF). С этим сюжетом связана несложная, но изящная и методически полезная

**ЗАДАЧА 3.10'.** Явно выпишите период дроби  $\frac{1}{81}$ . (Фольклор)

В выпуске 7 (с. 187, см. решение: выпуск 9, с. 229; выпуск 10, с. 274, 275) опубликована

**ЗАДАЧА 7.3.** Покажите, что матрицы  $AA^T$  и  $A^T A$  имеют один и тот же набор ненулевых собственных чисел, где  $A$  — прямоугольная матрица,  $A^T$  — транспонированная матрица. (А. К. Ковальджи)

В продолжение темы:

**ЗАДАЧА 7.3'.** (а) Даны две квадратные матрицы  $A, B$ . Верно ли, что матрицы  $AB, BA$  подобны?

(б) Верно ли, что матрицы  $A$  и  $A^T$  подобны?

(Матрицы  $X$  и  $Y$  подобны, если  $X = PYP^{-1}$  для некоторой обратной матрицы  $P$ .) (Фольклор)

В выпуске 7 (с. 187–188) опубликована

**ЗАДАЧА 7.5.** (а) При каких  $k$  через любые  $k$  точек плоскости проходит кривая  $n$ -го порядка?

(б) На плоскости отмечено несколько точек. Если окружность проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

(в) На плоскости отмечено несколько точек. Если кривая второго порядка проходит через пять отмеченных, то она проходит и через шестую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной кривой второго порядка. Обобщите это утверждение для кривых  $n$ -го порядка. (А. Я. Белов)

Вот связанный сюжет:

Задача 7.5'. (а) На плоскости отмечено  $n \geq 6$  точек, никакие 6 из которых не лежат на одной квадрике. Пусть  $k \leq n - 5$ . Докажите, что найдутся три точки такие, что квадрика, через них проходящая, содержит ровно  $k$  отмеченных точек.

(б) Обобщите это утверждение для кривых  $n$ -го порядка, а также для окружностей. (Г. А. Гальперин)

В выпуске 23 (с. 219, см. решение: выпуск 25, с. 178–179) опубликована

Задача 11.9'. Существует ли нечётнозвенная замкнутая ломаная, вписанная в квадратную решётку, все звенья которой имеют одинаковую длину? (А. К. Ковальджи)

Ответ отрицательный. В продолжение темы:

Задача 11.9''. Существует ли пятизвенная замкнутая ломаная, вписанная в трёхмерную кубическую решётку, все звенья которой имеют одинаковую длину? (Л. Радзивиловский)

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 23, с. 224–225) опубликована

Задача 13.4. Для каких  $\lambda \in [0, 1]$  для любой непрерывной функции  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что  $f(0) = f(1)$ , обязательно найдётся такое  $x \in [0, 1 - \lambda]$ , что  $f(x) = f(x + \lambda)$ ? (Фольклор)

В продолжение темы:

Задача 13.4'. (а) Рассмотрим множество  $V$  всех дифференцируемых функций  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Найдите все вещественные  $\alpha$  такие, что для любого  $f \in V$  существует  $\xi \in (0, 1)$  такое, что  $f(\xi) + \alpha = f'(\xi)$ .

(ИМС-2022, предложил Mike Daas, Leiden University)

(б) Дана монотонно возрастающая функция  $f: [0, 1] \rightarrow [e, +\infty)$ . Докажите, что для некоторых  $x, y \in [0, 1]$  выполняются неравенства

$$f(y) \leq 2f(x), \quad y - x \geq \frac{1}{10 \ln(f(x))^2}. \quad (\text{Фольклор})$$

В выпуске 14 (с. 272, см. решение: выпуск 28, с. 254–255) опубликована

**Задача 14.1.** Дано бесконечное периодическое слово минимального периода  $n$  и два его одинаковых под слова длины  $n - 1$ . Докажите, что их начальные буквы находятся на расстоянии, кратном  $n$ .

(А. Я. Белов)

В продолжение темы:

**Задача 14.1'.** Две последовательности периодов  $m$  и  $n$  соответственно имеют общее начало длины  $m + n - 1$ . Докажите, что они совпадают.

(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 15 (с. 232, см. решение: выпуск 30, с. 238–239) опубликована

**Задача 15.3.** Гипербола  $H : xy = 1$  повернута на угол  $\alpha$  относительно начала координат  $(0, 0)$ ; получилась гипербола  $H_\alpha$ . Найдите угол между их касательными в точках пересечения  $H$  и  $H_\alpha$ .

(А. В. Акопян, D. Schleicher)

В продолжение темы:

**Задача 15.3'.** Назовём гиперболу прямоугольной, если её асимптоты образуют прямой угол.

(а) На прямоугольной гиперболе  $\Gamma : \{xy = 1\}$  взята точка  $P$ . Точка  $D$  симметрична точке  $P$  относительно начала координат. Окружность с центром в  $P$  пересекает гиперболу  $\Gamma$  в четырёх точках:  $A, B, C, D$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — правильный.

(б) Дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что центры симметрий прямоугольных гипербол, проходящих через  $A, B, C$ , лежат на одной окружности.

(Л. Радзивилловский)

В выпуске 16 (с. 230, см. решение: выпуск 20, с. 263–264) опубликована

**Задача 16.3.** Пусть  $y$  функции, определённой на отрезке [или на прямой], в каждой точке этого отрезка [прямой] есть конечный предел (не обязательно совпадающий со значением в точке). Насколько такая функция может отличаться от непрерывной? Более точно, каким может быть множество точек разрыва у такой функции? (М. Прасолов)

В продолжение темы:

**Задача 16.3'.** Производная непрерывной функции  $f$  равна нулю в каждой рациональной точке. Верно ли, что  $f \equiv \text{const}$ ? (Фольклор)

В выпуске 25 (с. 168, см. решение: выпуск 26, с. 249–257) опубликована

**Задача 25.4.** Даны такие симметрические матрицы  $A_1, \dots, A_k$  размера  $n \times n$  с вещественными коэффициентами, что  $\det(\sum_{i=1}^k A_i^2) = 0$ . Докажите, что  $\det(\sum_{i=1}^k A_i B_i) = 0$  для любых матриц  $B_1, \dots, B_k$  размера  $n \times n$ .  
(П. Гурбанов)

В продолжение сюжета:

**Задача 25.4'.** (а) Назовём многочлен  $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$  хорошим, если

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) = \det(x_1 A_1 + \dots + x_k A_k)$$

для некоторого набора  $2 \times 2$ -матриц  $A_1, A_2, \dots, A_k$  с вещественными коэффициентами. Для каких  $k$  все многочлены степени 2 от  $k$  переменных являются хорошими? Аналогичные вопросы для комплексных коэффициентов и старших степеней.

(б) Даны две ортогональные вещественные матрицы  $A, B$  размера  $n \times n$ . Каково максимально возможное значение  $\det(A + B)$ ?

(Л. Радзивиловский)

В выпуске 25 (с. 169) опубликована

**Задача 25.12.** Докажите, что уравнение  $\operatorname{tg} x - x = a$  не имеет решений в элементарных функциях.  
(А. Я. Канель-Белов)

В продолжение сюжета:

**Задача 25.12'.** Докажите, что уравнения  $\sin x - x = a$  и  $e^x - x = a$  не имеют решений в элементарных функциях.  
(А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: выпуск 27, с. 266–269) опубликована

**Задача 26.4.** Пусть  $k + 2$  точечных птичек в  $k$ -мерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички  $k + 2$  раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности  $k$ , то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности  $k$ .  
(А. Я. Канель-Белов)

Развитием темы служит

**Задача 26.4''.** (а) Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны.

(Фольклор)

(б) Обобщите и решите задачу для случая попадания  $k + 1$  многомерной птички в  $(k - 1)$ -мерное подпространство. (А. Я. Канель-Белов)

Эти задачи решаются путём перевода на язык внешних произведений и определителей. Для иллюстрации силы этого метода приведём ещё несколько задач.

ЗАДАЧА 26.4(3). (а) Выведите красивую формулу для площади многоугольника с последовательными вершинами  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  (именно в таком порядке).

(б) Даны описанный плоский четырёхугольник  $ABCD$  и точка  $P$  в пространстве. Докажите, что

$$PD^2 \cdot S_{ABC} + PB^2 \cdot S_{ACD} = PA^2 \cdot S_{BCD} + PC^2 \cdot S_{ABD}.$$

(в) Дана матрица  $R$ , отвечающая вращению в трёхмерном евклидовом пространстве. Найдите угол и ось вращения. (Фольклор)

В выпуске 27 (с. 236) опубликована

Задача 27.12. (а) Укажите полную систему инвариантов обычного кубика Рубика (т. е. опишите, из каких начальных конфигураций можно его собрать).

(б) Укажите полную систему инвариантов трёхмерного кубика Рубика с ребром  $n$ .

(в) Исследуйте многомерный аналог данной задачи.

(А. Я. Канель-Белов)

Для решения этой задачи полезна

ЗАДАЧА 27.12'. (а) Пусть  $G, H$  — простые группы (т. е. не содержащие нетривиальных нормальных подгрупп) с образующими соответственно  $a_1, \dots, a_k$  и  $b_1, \dots, b_k$ , не изоморфные как группы с фиксированными наборами образующих. Рассмотрим подгруппу  $E$  прямой суммы  $G \oplus H$ , порождённую векторами  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ . Докажите, что  $E = G \oplus H$ .

(б) Обобщите утверждение для произведения нескольких групп.

(Для обычного кубика Рубика  $i$  — номер поворота грани,  $a_i$  — соответствующее угловое преобразование,  $b_i$  — рёберное преобразование.) (А. Я. Канель-Белов)

В выпуске 29 (с. 255–256) опубликована

Задача 29.1. Докажите иррациональность числа  $e$ .

(а) Докажите, что при целых  $a, b$  величина  $ae + be^{-1}$  не является целой. Выведите из этого, что  $e$  не является квадратичной иррациональностью.

(б) Усовершенствовав рассуждение, докажите, что  $e$  не является алгебраическим числом четвёртой степени.

(в) Рассмотрим интеграл

$$I_n = q^{2n} \int_0^{\pi} (x(\pi - x))^n.$$

Докажите, что  $I_n > 0$ ,  $I_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и если  $\pi = p/q$ , где  $p, q$  — целые числа, то  $I_n$  — целое число. Выведите отсюда иррациональность числа  $\pi$ .

(г) Докажите иррациональность числа  $e^n$  при любом целом  $n$ .

(Фольклор)

Методы решения п. (б) и (в) позволяют получить следующий факт:

Задача 29.1'. Докажите трансцендентность числа  $e$ , т. е. что число  $e$  не является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

(Ш. Эрмит)

Дальнейшее развитие техники приводит к теореме Линдемана — Вейерштрасса, утверждающей, что если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — линейно независимые над  $\mathbb{Q}$  алгебраические числа, то экспоненты от них  $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n}$  алгебраически независимы.

## Решения задач из прошлых выпусков

СЕРИЯ 2, вып. 1, с. 221, задача 9. Условие. Докажите, что если рациональная функция от  $x$  не меняется при замене  $x$  на  $1/x$ , то она является рациональной функцией от  $x + 1/x$ .

РЕШЕНИЕ. Положим  $z = x + x^{-1}$ . Пусть

$$f(x) = \frac{x^k P(x)}{x^\ell Q(x)} = \frac{x^k (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)}{x^\ell (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m)},$$

где  $a_0, b_0 \neq 0$ . Из условия задачи получаем

$$\begin{aligned} f(x^{-1}) &= x^{\ell-k+m-n} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \equiv \\ &\equiv f(x) = x^{k-\ell} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2(k - \ell) = m - n \quad (1)$$

и

$$P(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = a_n x^n + \dots + a_0,$$

т. е.  $P(x) = a_0 x^n + \dots + a_0$  — возвратный многочлен, и аналогично  $Q(x) = b_0 x^m + \dots + b_0$  — возвратный многочлен.

Пусть  $n$  чётно,  $n = 2n'$ . Тогда

$$P(x) = x^{n'} (a_0 (x^{n'} + x^{-n'}) + \dots). \quad (2)$$

Для любого натурального  $k$  имеем

$$(x + x^{-1})^k = (x^k + x^{-k}) + k(x^{k-1} + x^{-k+1}) + \dots$$

Индукцией по  $k$  получаем, что  $x^k + x^{-k}$  является функцией от  $z$ . Тогда ввиду (2)

$$P(x) = x^{n'} \psi(z), \quad (3)$$

где  $\psi$  — рациональная функция.

Если же  $n$  нечётно,  $n = 2n' + 1$ , то  $P(x) = (x + 1)P_1(x)$ , где  $P_1(x)$  — возвратный многочлен степени  $2n'$ . Согласно равенству (3) имеем

$$P(x) = x^{n'}(x + 1)\psi(z), \quad (4)$$

где  $\psi$  — рациональная функция.

Аналогично, если  $m$  чётно,  $m = 2m'$ , то

$$Q(x) = x^{m'}\varphi(z), \quad (5)$$

а если  $m$  нечётно,  $m = 2m' + 1$ , то

$$Q(x) = x^{m'}(x + 1)\varphi(z), \quad (6)$$

где  $\varphi$  — рациональная функция.

Ввиду (1) либо  $m, n$  оба чётны, либо оба нечётны, причём в обоих случаях  $k - \ell = m' - n'$ . Из (3)–(6) получаем

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = x^{k-\ell+n'-m'} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \Psi(z),$$

где  $\Psi$  — рациональная функция, что и требовалось. (Ю. Раскин)

2.7'. Условие. У многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что  $P(x)$  делит многочлен вида  $x^n - 1$  для некоторого  $n$ .

(М. Л. Концевич)

РЕШЕНИЕ. Нам потребуется лемма 1 из статьи: Белов А. Я. О круговых многочленах // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 8. М.: МЦНМО, 2004. С. 181–184.

Пусть  $Q(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Тогда при всех  $k \in \mathbb{N}$  коэффициенты многочлена

$$\tilde{Q}_k(x) = (x - x_1^k) \cdot \dots \cdot (x - x_n^k)$$

также целые.

Если все корни многочлена  $Q(x)$  по модулю равны единице, то все корни многочлена  $Q_k(x)$  тоже по модулю равны единице. Далее, из теоремы Виета следует, что модули всех коэффициентов всех  $Q_k$  ограничены и не превосходят максимального числа членов в элементарном симметрическом многочлене  $s_k$  (ибо каждое слагаемое есть произведение корней, а оно равно единице по модулю). Это число максимально, когда  $k = [n/2]$ , и тогда оно равно  $\binom{n}{[n/2]}$ . В силу леммы имеем, что все коэффициенты  $Q_k$  — целые. Так как они не превосходят

по модулю  $\binom{n}{[n/2]}$ , множество всех коэффициентов всех  $Q_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , конечно. Тогда и множество самих многочленов  $Q_k$  тоже конечно.

Поэтому  $Q_\ell = Q_k$  при некоторых  $\ell \neq k$ . Это значит, что  $x_i^\ell = x_i^k$  при  $i = 1, \dots, n$ . Следовательно, все  $x_i$  суть корни из единицы, откуда следует утверждение задачи. (А. Я. Канель-Белов)

26.8. Условие. Пусть 2019 точек случайно, независимо и равномерно распределены на единичном диске  $(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1$ , и пусть  $S$  есть их выпуклая оболочка. Какая вероятность больше: что  $S$  — треугольник или что  $S$  — четырёхугольник? (Ф. В. Петров)

Ответ. Больше вероятность, что  $S$  — четырёхугольник.

Решение. Эти вероятности можно оценить численно достаточно грубо. Сначала оценим сверху вероятность того, что  $S$  — треугольник. Обозначим через  $S$  максимальную площадь треугольника, расположенного внутри единичного круга. Как известно, эта площадь равна  $3\sqrt{3}/4 \approx 1,299$  — площади вписанного равностороннего треугольника.

$$\begin{aligned} P(S \text{ — это треугольник}) &= C_{2019}^3 \cdot P(\text{первые 2016 точек лежат} \\ &\text{внутри выпуклой оболочки последних трёх}) < \\ &< C_{2019}^3 \left(\frac{S}{\pi}\right)^{2016} < 2019^3 \cdot 0,42^{2016} < 10^{10} \cdot 0,42^{2016}. \end{aligned}$$

Теперь будем оценивать вероятность того, что  $S$  — четырёхугольник. Впишем в круг квадрат  $A_1A_2A_3A_4$ , его площадь равна 2. Выберем  $\varepsilon = 1/20$  и обозначим  $\varepsilon$ -окрестности вершин квадрата  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Площадь каждой из этих окрестностей оценим снизу как  $1/1000$ . Если выбрано по точке внутри этих окрестностей, то выпуклая оболочка этих четырёх точек имеет площадь чем  $2 - 4\sqrt{2}\varepsilon > 1,7$ .

$$\begin{aligned} P(S \text{ — это треугольник}) &> P(\text{первые 4 точки лежат} \\ &\text{соответственно в } O_1, O_2, O_3, O_4, \text{ а остальные 2015 точек лежат} \\ &\text{внутри выпуклой оболочки первых четырёх}) > \\ &> \left(\frac{1}{1000\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{1,7}{\pi}\right)^{2015} > 10^{-16} \cdot 0,54^{2015}. \end{aligned}$$

Теперь достаточно проверить, что

$$10^{-16} \cdot 0,54^{2015} > 10^{10} \cdot 0,42^{2016}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{0,54}{0,42}\right)^{2015} > \left(\left(\frac{0,54}{0,42}\right)^{10}\right)^{200} > 10^{200},$$

а отсюда следует и требуемое неравенство. (И. В. Митрофанов)

27.4. Условие. Дробно-кубическое отображение — это отображение вида

$$z \rightarrow \frac{a_1 z^3 + b_1 z^2 + c_1 z + d_1}{a_2 z^3 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2}.$$

Всегда ли его можно представить в виде композиции отображений вида  $z \rightarrow z^2$ ,  $z \rightarrow z^3$ ,  $z \rightarrow az + b$ ,  $z \rightarrow 1/z$ ? (А. Я. Канель-Белов)

Ответ. Не всегда.

Решение. Будем рассматривать рациональные (дробно-рациональные) функции  $R(z) = P(z)/Q(z)$  над некоторым полем  $\mathbb{K}$ , представленные в несократимом виде. Это означает, что  $P$  и  $Q$  — многочлены над  $K$ , не имеющие общих делителей, причём  $Q \neq 0$ . Степень такой функции по определению равна  $\deg R = \max(\deg P, \deg Q)$ . Разделив многочлены  $P$  и  $Q$  на ненулевой коэффициент одного из них, получим нормированный вид функции  $R$ , в котором хотя бы один коэффициент равен 1. Рациональная функция степени  $n$  в нормированном виде может быть задана  $2n + 1$  параметром. Далее считаем, что рассматриваемые рациональные функции имеют нормированный вид.

Дробно-рациональная функция степени 3 называется дробно-кубической. Дробно-линейное отображение есть рациональная функция  $H(z)$  степени один:

$$H(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad cz \neq 0.$$

Известно (упражнение для читателя), что дробно-линейное отображение можно представить как композицию отображений вида  $z \rightarrow az + b$ ,  $z \rightarrow 1/z$ .

Далее композиция функций обозначается  $\circ$ :  $(R_1 \circ R_2)(z) = R_1(R_2(z))$ . Если  $R_1, R_2$  — рациональные функции, то коэффициенты функции  $R_1 \circ R_2$  являются многочленами от коэффициентов функций  $R_1, R_2$ .

Лемма 1. (а) Пусть  $R$  — рациональная функция,  $k$  — натуральное число. Тогда  $\deg R^k = k \cdot \deg R$ .

(б) Пусть  $H_1, H_2$  — дробно-линейные отображения,  $R$  — рациональное отображение. Тогда  $\deg(H_1 \circ R \circ H_2) = \deg R$ .  $\square$

Следствие. Пусть дробно-кубическое отображение  $R$  представлено в виде композиции отображений, каждое из которых может иметь лишь одну из следующих форм:  $z \rightarrow z^2$ ,  $z \rightarrow z^3$ ,  $z \rightarrow az + b$  ( $a, b \in \mathbb{K}$ ),  $z \rightarrow 1/z$ . Тогда представление имеет вид

$$R = H_1 \circ (H_2)^3, \quad (*)$$

где  $H_1, H_2$  — дробно-линейные отображения. В частности, отображение  $z \rightarrow z^2$  в представлении отсутствует.

Доказательство. Если в композиции присутствует  $z \rightarrow z^2$ , то в силу леммы 1 (а), (б) степень композиции чётна. Если, далее, отсутствует  $z \rightarrow z^3$ , то степень будет равна 1, а если  $z \rightarrow z^3$  присутствует более одного раза, то степень будет выше 3. Значит,  $z \rightarrow z^3$  присутствует один раз, а до и после этого применяются дробно-линейные отображения. Композиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением. Отсюда следует (\*).  $\square$

Идея решения задачи 27.4 — в сравнении количества параметров. Дробно-кубическая функция задаётся семью параметрами, пара дробно-линейных функций — шестью, а семь независимых параметров невозможно выразить через шесть. Аргумент сравнения количеств параметров кажется очевидным, но его реализация нетривиальна! (Вспомним, что существуют *кривые Пеано*, которые осуществляют непрерывное отображение отрезка на множество более высокой размерности.) Мы воспользуемся тем, что этот аргумент работает для векторных пространств: подпространство векторного пространства не может иметь размерность выше, чем всё пространство.

ЛЕММА 2. Пусть  $Q$  — общий знаменатель рациональных функций  $R_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) от переменных  $x_1, \dots, x_m$ , его степень равна  $v$ , а максимум степеней функций  $R_i$  равен  $w$ . Тогда множество линейных комбинаций мономов степени не выше  $k$  относительно  $R_1, \dots, R_n$  вкладывается как векторное пространство в множество  $V$  линейных комбинаций мономов степени не выше  $k \cdot (v + w)$  относительно  $x_1, \dots, x_m$ .

Доказательство. Рассмотрим отображение  $g \rightarrow g \cdot Q^k$ , где  $g$  пробегает все линейные комбинации мономов от  $R_1, \dots, R_n$  степени не выше  $k$ . Это отображение линейно, взаимно однозначно, и его образ содержится в пространстве  $V$ .  $\square$

ЛЕММА 3. Пусть  $V_{k,m}$  — векторное пространство, состоящее из всех многочленов от  $x_1, \dots, x_m$  степени не выше  $k$ . Тогда размерность пространства  $V_{k,m}$  равна  $\binom{k+m}{m}$ .

Доказательство. Нужная размерность равна количеству различных мономов от  $x_1, \dots, x_m$  с коэффициентом 1 и степени не выше  $k$ . Введя переменную  $x_0$  и домножая мономы на её степени, сведём задачу к подсчёту мономов от  $x_0, x_1, \dots, x_m$  степени ровно  $k$  с коэффициентом 1. Такой моном — произведение  $k$  мономов степени 1, причём

можно считать, что сначала идут вхождения  $x_0$ , потом вхождения  $x_1$  и т. д. После всех вхождений  $x_0$  вставим в строку символ 1, после всех вхождений  $x_1$  — символ 2 и т. д. Получаем строку длины  $k + m$ , и каждый моном степени  $k$  определяется тем, в каких  $m$  позициях стоят символы 1, ...,  $m$ . Отсюда следует ответ.  $\square$

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $R_1, \dots, R_n$  — рациональные функции от  $m < n$  переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Тогда существует такой ненулевой многочлен  $P$ , что  $P(R_1, \dots, R_n) \equiv 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $k$  — натуральное число, а обозначения  $v, w, V$  имеют тот же смысл, что в лемме 3. Положим  $C = v + w$ . По лемме 3 пространство  $V$  имеет размерность  $\binom{Ck + m}{m}$ .

С другой стороны, по той же лемме 3 количество всевозможных мономов от  $R_1, \dots, R_n$  степени не выше  $k$  с коэффициентом 1 равно  $\binom{k + n}{n}$ . При достаточно больших  $k$  имеем

$$\binom{Ck + m}{m} = (Ck + m) \dots (Ck + 1) < (2Ck)^m < k^n < (k + n) \dots (k + 1) = \binom{k + n}{n}.$$

Значит, при достаточно большом  $k$  количество таких мономов больше, чем размерность пространства  $V$ . В силу леммы 2 между мономами от  $R_1, \dots, R_n$  степени не выше  $k$  существует линейная зависимость

$$\sum_I a_I R_1^{i_1} \dots R_n^{i_n} = 0.$$

Тогда в качестве искомого многочлена  $P$  можно взять

$$\sum_I a_I y^{i_1} \dots y^{i_n}. \quad \square$$

Продолжим решение задачи 27.4. Пусть некоторое дробно-кубическое отображение  $R$  является композицией отображений, указанных в условии задачи. По следствию из леммы 1 представление имеет вид (\*). Тогда 7 коэффициентов отображения  $R$  являются многочленами от 6 коэффициентов отображений  $H_1, H_2$ . В силу доказанной теоремы существует ненулевой многочлен  $P$ , тождественно равный нулю на коэффициентах любой функции вида (\*). Значит, любое дробно-кубическое отображение, коэффициенты которого не обращают  $P$  в нуль, не представляется в виде (\*).

**Замечание.** В случае комплексных коэффициентов дробно-квадратичная функция представима в виде композиции отображений вида  $z \rightarrow z^2, z \rightarrow az + b, z \rightarrow 1/z$ . В вещественном случае ситуация следующая.

Дана функция

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d},$$

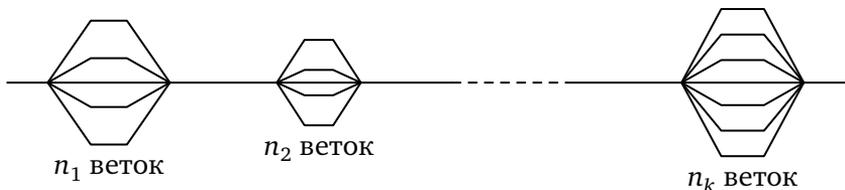
где трёхчлены  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + cx + d$  не имеют общих корней. Тогда следующие два утверждения равносильны:

- 1) найдётся числовой интервал, свободный от значений функции;
- 2) функция  $f(x)$  представима в виде  $f(x) = f_1(f_2(\dots(f_{n-1}(f_n(x))\dots)))$ , где каждая из функций  $f_i(x)$  есть функция одного из видов:  $k_i x + b_i$ ,  $x^{-1}$ ,  $x^2$ .

(Двадцатый Турнир городов, осень 1998 г., основной вариант, 10–11 кл., задача 6, автор А. Я. Канель-Белов. См. в статье: Бугаенко В. О Избранные задачи математических соревнований 1998 года в Москве // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 3. М.: МЦНМО, 1999. С. 215–216, 225–228.)

(А. Я. Канель-Белов)

29.5. Условие. Схема железнодорожного узла имеет следующий вид:



Справа к узлу приближается состав из  $t$  локомотивов, которые могут двигаться лишь справа налево, при этом на одной ветке может уместиться любое число локомотивов. При каком наибольшем  $t$  локомотивы при прохождении через узел могут перестроиться в любом порядке? (Фольклор)

Ответ. При  $M \leq n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ .

Решение. Траектория каждого локомотива однозначно определена выбором веток, которые он проходил. А это составляет  $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  возможностей. Если  $M > N$ , то по принципу Дирихле два локомотива будут иметь одну и ту же траекторию и не смогут поменять порядок.

Покажем теперь, что если  $M$  не превосходит  $N$ , то любой порядок осуществим. Сопоставим каждому локомотиву  $k$ -значный код. Последняя (наименее значимая) цифра кода есть число от 1 до  $n_1$ , вторая — от 1 до  $n_2$ , и т. д., старшая цифра — число от 1 до  $n_k$ . Общее количество возможных кодов равно  $N$ , так что если  $M$  не превосходит  $N$ , всем локомотивам можно присвоить разные коды.

Движение локомотивов осуществляется по следующим правилам.

- (a) Только после того, как все локомотивы подъезжают к развилке, они разъезжаются по её веткам.
- (b) Номер ветки, куда направляется локомотив, равен  $i$ -му знаку его кода.
- (c) С развилки сперва выезжают локомотивы первой ветки, затем второй, и т. д.

Легко видеть, что в итоге коды будут возрастать слева направо. Значит, любая перестановка осуществима.

КОММЕНТАРИЙ. На эти темы см.: Кулаков А. Г. Задача 3. Сортировка железнодорожных составов // 8 Летняя конференция Турнира городов. М.: ИЦТГ, 1996. С. 31–38, 76–99. <https://www.turgor.ru/lktg/1996/lktg1996.pdf>.

(А. Канель-Белов, Л. Радзивиловский)

30.10. УСЛОВИЕ. Матрицей Маркова называется квадратная матрица  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , такая, что 1)  $a_{ij} \geq 0$  для любых  $i, j$ ; 2)  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$  для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пусть  $A = (a_{ij})$  — матрица Маркова порядка  $n \geq 18$ . Тогда из неё можно получить циклическими перестановками элементов строк такую матрицу Маркова  $B = (b_{ij})$ , что

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} < 2, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (\text{К. Э. Каибханов})$$

РЕШЕНИЕ содержится в статье: Каибханов К. Э. Об одном свойстве матрицы Маркова // Математическое образование. 2022. № 3(103). С. 23–32. <https://matob.ru/files/nomer103.pdf>.

## ОПЕЧАТКИ, ЗАМЕЧЕННЫЕ В ПРОШЛЫХ ВЫПУСКАХ

Выпуск	Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
30	204	11 снизу	$(\text{mod } p)^k$	$(\text{mod } p^k)$
30	204	10 снизу	$(\text{mod } p)^{k+1}$	$(\text{mod } p^{k+1})$
30	204	10 снизу	$(\text{mod } p)^k$	$(\text{mod } p^k)$
30	204	10 снизу	$(\text{mod } p)^{k+2}$	$(\text{mod } p^{k+2})$
31	185	2 снизу	лицей «Вторая школа» им. В. Ф. Овчинникова	факультет математики и компьютерных наук СПбГУ
31	215		Задача 9.5'.	Задача 9.5''.
31	218		Задача 19.3'.	Задача 19.3''.
31	218		Задача 20.4'.	Задача 20.4''.

### ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Сборник не публикует существенно новые научные результаты, требующие оценки специалистов. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

2. Материалы принимаются по электронной почте на адрес [matpros@yandex.ru](mailto:matpros@yandex.ru) в виде двух файлов (pdf и tex) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в Word. При наличии графики в текстовом файле необходимо прислать все исходные файлы.

3. Материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

4. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

5. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. <http://www.mcme.ru/free-books/matpros.html>

6. В конце статьи указывается (если у авторов нет возражений):

— фамилия, имя, а также отчество (если есть) полностью,

— место работы/обучения,

— электронный адрес.

7. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение.

8. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый. Просим обращаться по адресу [matpros@yandex.ru](mailto:matpros@yandex.ru)

Научно-популярное издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 32

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».

г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.

Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.

E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 01.12.2023 г. Формат 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 12,5. Тираж 500 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ

от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком (6+)

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести  
в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745-80-31.  
E-mail: biblio@mcsme.ru, <http://biblio.mcsme.ru>

---