МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

Третья серия

выпуск 33

Москва
Издательство МЦНМО

УДК 51.009
ББК 22.1
М34

Издано при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС»

Редакционная коллегия

Бугаенко В. О.
Вялый М. Н.
Гайфуллин А. А.
Гальперин Г. А.
Гусейн-Заде С. М.
Дориченко С. А.
Заславский А. А.
Ильяшенко Ю. С.
Канель-Белов А. Я.
Митрофанов И. В.
Полянский А. А.
Прасолов В. В.
Райгородский А. М.
Семёнов А. Л.
Сосинский А. Б.
Тихомиров В. М.
Устинов А. В.
Френкин Б. Р.
Ященко И. В.

Главный редактор А. М. Райгородский
Отв. секретарь Б. Р. Френкин

Адрес редакции:
119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, МЦНМО
(с пометкой «Математическое просвещение»)
Email: matpros@yandex.ru
Web page: www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Математическое просвещение. Третья серия, вып. 33. —
М34 М.: МЦНМО, 2024. — 208 с.
ISBN 978-5-4439-1856-3

В сборниках серии «Математическое просвещение» публикуются материалы о проблемах современной математики, изложенные на доступном для широкой аудитории уровне, статьи по истории математики, обсуждаются проблемы математического образования.

УДК 51.009
ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-1856-3

© МЦНМО, 2024

Содержание

Математический мир

Алексею Яковлевичу Канель-Белову — шестьдесят! 5

Г. Б. Шабат
Юрий Иванович Манин — математик, мыслитель, Учитель. II . . 15

Наш семинар: математические сюжеты

А. П. Веселов
Числа Бернулли и формальные группы 41

Н. Н. Осипов, А. В. Савватеев
Об уравнении Эйлера $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ и тройках Рамануджана . . . 57

А. Б. Скопенков
Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве . . 87

Т. С. Казанцева, А. А. Арутюнов
Короткое доказательство теоремы Халина и некоторые следствия из неё 133

Нам пишут

В. М. Журавлёв, К. В. Журавлёва
Письмо в редакцию 149

По мотивам задачника

А. А. Разборов
Миша Алехнович. 1978–2006 151

А. Я. Канель-Белов
Памяти Миши Алехновича 154

М. В. Алехнович, А. Я. Канель-Белов, А. О. Сулейкин
Сложность алгоритмов при построениях циркулем и линейкой . . 155

Задачник (составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач 183

Дополнение к задачнику 187

Решения задач из прошлых выпусков 196

1 октября 2023 года исполнилось 50 лет сербскому математическому обществу «Архимедес» (г. Белград). Кружки, олимпиады, летние и зимние школы, издание математической литературы — различные аспекты его многообразной деятельности.

Желаем коллегам дальнейших успехов! Уверены в продолжении и развитии плодотворного сотрудничества сербских и российских математиков и педагогов!

Математический мир

Алексею Яковлевичу Канель-Белову — шестьдесят!

Н. Х. Агаханов, Н. Н. Андреев, С. А. Дориченко, А. А. Заславский, И. А. Иванов-Погодаев, В. М. Имайкин, А. К. Ковальджи, П. А. Кожевников, С. И. Комаров, И. В. Митрофанов, Ю. П. Николаев, А. М. Райгородский, А. Л. Семёнов, Д. А. Терёшин, В. А. Тиморин, В. М. Тихомиров, Б. Р. Френкин, Г. А. Четин, И. В. Ященко

9 июня 2023 года исполнилось 60 лет известному математику и педагогу Алексею Яковлевичу Канель-Белову. Он родился в Москве, в семье математиков. Его мать — Майя Михайловна Белова (1931–1985),

доцент Станкина, ученица В. В. Немыцкого, была хорошо известна на мехмате. К сожалению, она рано умерла; на похороны пришло около 200 людей из математического сообщества. Отец — Яков Исаакович Канель (1932–2006), известный специалист по теории уравнений частных производных, защитил диплом в Томском государственном университете под руководством А. И. Фета, кандидатскую диссертацию защитил под руководством О. А. Олейник.

Дядя Геннадий Исаакович Канель, чл.-корр. РАН, известный физик, сотрудник В. Е. Фортова, был профессором МФТИ и мехмата МГУ (отделение механики). Алексей Яковлевич многие свои статьи подписывал так, как его имя указано в заголовке, хотя «по паспорту» его фамилия — просто «Белов». Двойную фамилию он использовал, чтобы подчеркнуть уважение к своей семье.

В 1980 году А. Я. окончил школу № 2 Октябрьского района г. Москвы (ныне лицей «Вторая Школа»). Он успешно участвовал в олимпиадах школьников, получил вторую премию на Всесоюзной математической олимпиаде в 1980 году. Во Второй школе участвовал в матбоях, организованных В. А. Сендеровым. В дальнейшем участвовал в согласовании питерских и московских правил матбоя (организовал это согласование А. К. Ковальджи). Канонические правила были опубликованы в журнале «Математика в школе». В старших классах вёл занятия в ВМШ при ММО.

Учёба и начало пути в науке. В 1985 году А. Я. окончил МГПИ им. В. И. Ленина (ныне Московский педагогический государственный университет). Был победителем Московских и Всесоюзных студенческих олимпиад. Будучи председателем студенческого научного общества (СНО), он вместе с С. В. Пчелинцевым (преподавателем, ответственным за СНО) проводил студенческие математические олимпиады в МГПИ. Также он учился в так называемом «Народном университете», где наибольшее влияние на него оказал Д. Б. Фукс[1)].

Тема дипломной работы Алексея Яковлевича — «О базисе Ширшова относительно свободной алгебры сложности n» (научный руководитель С. В. Пчелинцев). В 1985 году А. Я. поступил в аспирантуру Московского горного института (МГИ), которую окончил в 1988 году. В 1992 году в Институте физики Земли им. О. Ю. Шмидта защитил кандидатскую диссертацию по техническим наукам «Статистическая

[1)] Подробнее см. *Белов-Канель А.*, *Резников А.* Об истории Народного университета // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 9. М.: МЦНМО, 2005. С. 30–31.

геометрия и равновесие блочных массивов» (научный руководитель Р. Л. Салганик). Основным математическим результатом диссертации был метод, позволяющий для широкого класса разбиений плоскости прямыми сводить изучение получающихся многоугольников к изучению линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод позволил вывести закон распределения площадей и периметров многоугольников для различных классов случаев, в частности для пуассоновского поля прямых и мозаик Вороного. Исследования блочных массивов, введённых в диссертации, послужили промежуточным шагом к изобретению самозаклинивающихся структур, см. с. 11.

В 1988–1990 годах Алексей Яковлевич работал в МГИ, в 1990–2001 годах в Доме научно-технического творчества молодёжи (ДНТТМ). В дальнейшем А. Я. работал в ряде университетов в разных странах мира (Россия, Австралия, Германия, Израиль, КНР), а также в Московском институте открытого образования (ранее — Московский институт повышения квалификации работников образования).

Окончательное формирование основных научных интересов: комбинаторная алгебра. С 1984 года Алексей Яковлевич начинает активно заниматься алгеброй, продолжая свою студенческую линию исследований, и принимает участие в работе семинара кафедры алгебры МГУ «Теория колец» под руководством В. Н. Латышева, А. В. Михалёва и Е. С. Голода и в семинаре по *PI*-теории под руководством В. Н. Латышева. Под влиянием С. В. Пчелинцева, В. Н. Латышева и А. В. Михалёва Алексей Яковлевич начинает заниматься *PI*-теорией.

Тождеством в алгебре называется многочлен, тождественно обращающийся в нуль при подстановке *любых* элементов алгебры вместо переменных. Например, в коммутативных алгебрах выполняется тождество $[x, y] := xy - yx = 0$, а в алгебрах матриц второго порядка — *тождество Холла* — $[[x, y]^2, z] = 0$ и *тождество Амицура — Левицкого* степени 4:

$$\sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(4)} = 0.$$

Тождество f *следует* из набора тождеств $\{g_i\}$, если везде, где выполняется $\{g_i\}$, выполняется и f. Алгебра, в которой выполняется ненулевое тождество, называется *PI-алгеброй*.

Класс всех алгебр или иных алгебраических систем, где выполняется некоторый набор тождеств, называется *многообразием*. Один из наиболее естественных вопросов здесь — конечная базируемость: *верно ли, что каждое многообразие из некоторого класса может быть задано конечным числом тождеств* (аналог теоремы компакт-

ности в логике и топологии). Для многообразий групп Х. Нойман в 1937 году поставила вопрос: каждое ли многообразие может быть определено конечным множеством тождеств. На рубеже 1970-х гг. он был отрицательно решён одновременно и независимо тремя исследователями: С. И. Адяном на основе мощного метода Новикова — Адяна, построенного для бернсайдовских групп, а также Воган-Ли и А. Ю. Ольшанским.

В случае ассоциативных колец проблема конечной базируемости была поставлена Шпехтом в 1950 году: *Верно ли, что все тождества произвольной ассоциативной PI-алгебры следуют из конечного их числа*? Вся работа Шпехта была посвящена алгебрам над полем нулевой характеристики. Он явно мотивировал это невозможностью использования применяемых им методов в случае простой характеристики. Проблема Шпехта для характеристики 0 была решена положительно А. Р. Кемером в 1984 году. Чуть позже А. Р. Кемер распространил доказательство на случай локальной представимости над бесконечным полем характеристики 0, доказав, что любой T-идеал конечно порождённой свободной ассоциативной алгебры над бесконечным полем порождается конечным множеством элементов как T-идеал.

Алексей Яковлевич существенно развил метод А. Р. Кемера, добавив соображения, связанные с некоммутативной алгебраической геометрией и применением леммы Артина — Риса. Для алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным нётеровым кольцом А. Я. доказал, что любая система тождеств от ограниченного числа переменных следует из конечной подсистемы. Более того, он распространил этот результат на алгебры над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом, а не только над полем. При этом для общего (нелокального) случая он построил бесконечно базируемую систему тождеств над произвольным полем положительной характеристики. (А. В. Гришин и В. В. Щиголев в дальнейшем также построили такие системы). Тем самым было завершено исследование проблемы Шпехта.

Все эти результаты были собраны в докторской диссертации «Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы», которую А. Я. защитил в 2002 году. Научными консультантами были В. Н. Латышев и А. В. Михалёв. Оппонентами выступили А. Р. Кемер, С. В. Пчелинцев и А. В. Яковлев.

Дальнейшие исследования. Со временем Алексей Яковлевич существенно расширил область своих научных интересов. Он получает ряд ярких результатов и в PI-теории, и в некоммутативной теории колец, и в алгебраической геометрии, а также успешно работает в при-

кладных областях математики и в математической педагогике. Ниже представлены основные направления его исследований.

Алгебраическая геометрия, в том числе некоммутативная. Проблемы шпехтового типа дали новый взгляд на созданную Ф. А. Березиным теорию супералгебр. А. Р. Кемер в нулевой характеристике свёл изучение бесконечно порождённых свободных алгебр к случаю конечно порождённых супералгебр. Алгебра Грассмана обычно изучается над полем характеристики, не равной 2 (в случае характеристики 2 стандартный набор соотношений даёт обычную коммутативную алгебру). Контрпримеры к проблеме Шпехта в характеристике 2 привели к построению конструкции, нетривиально обобщающей алгебру Грассмана над любым кольцом (включая поле характеристики 2). Работа была проведена совместно с Галем Дором и Узи Вишне. При этом вместо знака перестановки (плюс или минус один) возникло понятие обобщённого знака — элемента некоторого модуля, сопоставляемого перестановке. Эти конструкции открывают путь к построению супертеории над полем произвольной характеристики (включая 2).

Знаменитая *гипотеза якобиана* состоит в обратимости любого полиномиального отображения с единичным якобианом. Хотя сама проблема якобиана далека от своего решения, сопутствующие ей методы и подходы являются чрезвычайно ценными. Например, так называемое *антиквантование* — редукция кольца дифференциальных операторов по модулю бесконечно большого простого числа (в смысле нестандартного анализа) и изучение скобок Пуассона на центре этого кольца. А. Я. Канель-Белов совместно с М. Л. Концевичем (и независимо от них Цучимото) разработали подход к теории D-модулей, гипотезе о якобиане и смежным вопросам (например, относящимся к универсальным обёртывающим алгебрам конечномерных алгебр Ли), связанным с квантованием.

Классические работы по основаниям алебраической геометрии преследовали цель связать топологические свойства с арифметическими, изучив взаимосвязь между языками теории колец и геометрии. А. Я. начал изучение связи геометрических и арифметических свойств с алгоритмическими. Например, интересен вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы изоморфизма двух алгебраических многообразий над полем комплексных чисел. Даны два ассоциативно-коммутативных кольца, заданных образующими и соотношениями. Как проверить, изоморфны ли они? Первый результат здесь был получен совместно с А. А. Чиликовым — это алгоритмическая неразрешимость

проблемы вложимости алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики.

Построение алгебраических монстров. Одной из непревзойдённых вершин комбинаторного подхода в алгебре является решение П. С. Новиковым и С. И. Адяном проблемы Бёрнсайда. Геометрическая интерпретация этого подхода в стиле теории малых сокращений, также с преодолением экстремальных технических трудностей, была создана А. Ю. Ольшанским и И. Рипсом. В некоммутативной алгебре имеются конструкции самых разнообразных алгебраических «монстров», построенные Адяном, Ольшанским и другими авторами: бесконечные бернсайдовские группы, монстр Тарского, пример Голода — Шафаревича и др. Естественно возникает вопрос об аналогах в случае полугрупп и колец. Исходя из уже рассмотренных результатов А. Я. Канель-Белова, напрашивается аналогия между спектром результатов Адяна, последовавших за решением проблемы Бёрнсайда, и спектром результатов Канель-Белова, последовавших за решением проблемы Шпехта. Эти результаты, однако, далеко не ограничивались уже перечисленными.

В. Н. Латышев обратил внимание на важность требования конечной определённости алгебраических объектов. Например, открытым вопросом является существование конечно определённой бесконечной периодической группы. Конечная определённость даёт возможность интерпретировать алгебраические объекты в терминах конечных семейств конечных автоматов — буква алфавита символизирует конечный автомат, а слово — цепочку локально взаимодействующих автоматов. Задача состоит в координации поведения системы автоматов при обратимых преобразованиях из любых начальных состояний (обратимость отражает возможность прямого и обратного перехода при использовании определяющих соотношений).

Л. Н. Шеврин и М. В. Сапир в Свердловской тетради поставили проблему существования бесконечной конечно определённой нильполугруппы. Построение такой полугруппы является результатом цикла работ И. А. Иванова-Погодаева и А. Я. Канель-Белова. Для этого построения потребовались принципиально новые методы, связанные с геометрией апериодических мозаик. Слова рассматриваются как пути в равномерно эллиптическом пространстве, обладающем апериодической природой и набором специальных свойств. Эквивалентные слова при этом соответствуют локально эквивалентным путям с общим началом и концом. Определяющие соотношения отвечают минимальным клеткам некоторого комплекса.

Динамические системы. В пленарном докладе на Международном математическом конгрессе в 2022 году Ричард Шварц сформулировал следующую гипотезу.

«Внешние бильярды вокруг правильного n-угольника имеют апериодическую орбиту при $n \neq 3, 4, 6$. *Полагаю, что ответ неизвестен кроме случаев* $n = 5, 8, 10, 12$ *и, возможно,* 7».

А. Я. совместно с Ф. Д. Руховичем и В. А. Тимориным установил, что и для внешнего бильярда вокруг правильного семиугольника: 1) существуют самоподобия с мультипликативно независимыми коэффициентами; 2) существует континуум попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств с различными символическими динамиками — замыканий апериодических орбит точек. Тем самым показано, что существуют траектории, кодирующиеся неподстановочными системами. Впервые при изучении внешних бильярдов вокруг правильных многоугольников был обнаружен мультифрактал.

Совместно с В. А. Тимориным, Ф. Д. Руховичем и В. Д. Згурским, Алексей Яковлевич установил наличие бесконечного набора самоподобий при $n = 9$, а также наличие апериодических точек при $n = 2k + 1$, $2(2k + 1)$, где $k > 1$.

Самоподобные структуры возникают во многих разделах математики. Так, самоподобными объектами в комбинаторике слов являются морфические последовательности. Эти последовательности интересны тем, что бесконечный объект (сверхслово и соответствующая динамическая система) описывается конечным набором информации: два алфавита, подстановка и кодирование[2)].

Прикладная математика. Алексей Яковлевич активно занимается и прикладными вопросами. Отличным примером может служить придуманная им замечательная конструкция самозаклинивающихся структур. Слой одинаковых кубов (или тетраэдров) можно расположить между двумя параллельными плоскостями так, что ни одно тело нельзя убрать из слоя, не затронув остальные тела. Начавшись с олимпиадной задачи, предложенной Алексеем Яковлевичем на Московской математической олимпиаде в 2000 году, эта тема стремительно развивалась, были получены интересные результаты[3)]. В дальнейшем Ю. Эстриным на полученный мегагрант Правительства РФ (2013) со-

---

[2)] Подробнее о внешних биллиардах см. *Табачников С. Л.* Внешний биллиард // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 5. М.: МЦНМО, 2001. С. 125–135.

[3)] См. *Канель А. Я.* История одной олимпиадной задачи // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 5. М.: МЦНМО, 2001. С. 207–208; *Белов А. Я.* Самозаклинивающиеся структуры // Квант. 2009. № 1. С. 20–23.

здана исследовательская лаборатория. Сейчас конструкция используется для создания новых типов композитных материалов.

Недавно была проведена проектная смена в образовательном центре «Сириус»[4)]. Учащимися были получены принципиально новые типы кладок. Ими разрабатываются компьютерные модели для создания новых типов материалов. Работы учащихся играют существенную роль в реализации гранта РНФ, полученного Магнитогорским государственным техническим университетом им. Г. И. Носова.

Педагогическая деятельность и ученики. С молодых лет Алексей Яковлевич уделял большое внимание математическому образованию. В студенческие годы был старшим по параллели Московской математической олимпиады (ММО), руководил математическими кружками. С тех пор А. Я. постоянно входит в методкомиссию ММО, являясь автором многих замечательных задач — как глубоких и сложных, так и доступных всем и при этом изящных.

Вот примеры таких задач.

(14-й Турнир городов, весна 1993 г., 10–11 классы, задача 5.)

Существует ли кусочно-линейная функция f, определённая на отрезке $[-1, 1]$ (включая концы), для которой $f(f(x)) = -x$ при всех x? (Функция называется кусочно-линейной, если её график есть объединение конечного числа точек и интервалов прямой; она может быть разрывной.)

(Московская математическая олимпиада, 1995, 10 класс, задача 6.)

На табло горят несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдётся кнопка, соединённая с нечётным числом лампочек из этого набора. Докажите, что, нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

(Московская математическая олимпиада, 2001, 11 класс, задача 5.)

Докажите, что в пространстве существует такое расположение 2001 *выпуклого многогранника, что никакие три из многогранников не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (то есть имеют хотя бы одну граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).*

[4)] *Белов А. Я., Годунов И. В., Гребнев К. Е., Мантуров В. О., Маркелов Ю. С., Нилов Ф. К., Песин А. М., Певницкий Д. Л., Полозков С. С., Уваров Ф. В.* Самозаклинивающиеся структуры, `https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1488`, 2023, Майская проектная программа по математике и теоретической информатике. «Сириус». 2023.

Алексей Яковлевич был председателем жюри Международной интернет-олимпиады в Ариэле, участвовал в подготовке команд Германии и Израиля на Международную олимпиаду школьников, входил в состав жюри Международной олимпиады школьников в 2020 и 2021 годах.

В разное время А. Я. был организатором и руководителем студенческих команд университета Якобса (Бремен) и Южного научно-технологического университета (Шэньчжэнь) на Международной студенческой олимпиаде. Им также были заложены и в течение многих лет поддерживались традиции участия Израиля в международной студенческой олимпиаде. А. Я. много занимался со способными школьниками на различных сборах и летних математических школах. Свыше 30 лет он входит (как правило, руководителем проекта) в жюри Летней конференции Турнира городов, являющейся важнейшим этапом при переходе школьников от олимпиад к исследовательской работе в математике. В течение 10 лет руководил секцией математики конференции школьников «Поиск» в Доме научно-технического творчества молодёжи, совместно с Р. В. Плыкиным проводил математическую секцию Всероссийской конференции школьников «Юность, наука, культура», постоянно участвует в жюри конференции «Интел-Авангард».

Алексей Яковлевич написал ряд широко известных статей и учебных пособий, а также, совместно с А. К. Ковальджи, книгу для школьников «Как решают нестандартные задачи», которая выдержала 15 изданий. Участвовал в выработке окончательной версии правил математического боя[5)].

А. Я. отличается широтой научных интересов и умением увидеть перспективные направления и идеи. Эти качества дали возможность получить ряд научных результатов совместно с учениками. Благодаря этому многие молодые математики продолжают развивать широкое дерево научных интересов Алексея Яковлевича.

А. Я. подготовил семерых кандидатов физ.-мат. наук: это И. А. Иванов-Погодаев, А. Л. Чернятьев, М. И. Харитонов, И. В. Митрофанов (все совместно с проф. А. В. Михалёвым), Ф. Д. Рухович (совместно с академиком А. Л. Семёновым), А. М. Елишев, В. О. Кирова, а также трёх PhD: это С. Малев (совместно с профессором Л. Роуэном), З. Венчао, Ф. Розавия. Кроме того, подготовлена к защите диссертация Ф. А. Ивлева.

[5)] *Дерягин Д. В., Канель А. Я., Ковальджи А. К., Кондаков Г. В., Рубанов И. С., Финашин С. М., Фомин Д. В., Шапиро А. А., Яценко А. Д.* Математический бой двух команд: правила, комментарии, опыт проведения // Математика в школе. 1990. № 4. С. 20–25.

Алексей Яковлевич сохраняет и развивает традиции московской математической школы, сочетая широкий научный кругозор с активной работой по подготовке научной смены.

Гуманитарные аспекты. Работа над созданием подборок задач и олимпиадным учебниками имеет гуманитарное значение, выходящее за пределы подготовки к олимпиадам. Классификация идей и стереотипов решения задач есть инструмент исследования человеческого мышления. Результаты, полученные в рамках преподавательской деятельности (в частности, создание олимпиадных задач) имеют значение прежде всего для верификации вычленения идей и стереотипов. Такое исследование представляется полезным в связи с работами по искусственному интеллекту. С этим связан интерес А. Я. Канель-Белова к комбинаторике, в частности, к комбинаторной геометрии.

По словам известного лингвиста А. В. Гладкого, «литературоведческое» исследование математических текстов перекликается с анализом текстов на естественных языках (NLP) и с известными работами В. Проппа об исторических корнях волшебной сказки. Олимпиадные книги и статьи А. Я. являются шагами в этом направлении.

Итоги и признание. Алексей Яковлевич участвует в редколлегиях целого ряда изданий: «Фундаментальная и прикладная математика», «Чебышёвский сборник», «Квант», «Математическое просвещение» (редактор задачного раздела), «Математическое образование», «Потенциал», «Вестник Академии наук Чеченской Республики». А. Я. имеет звание федерального профессора, эксперта РАН и РНФ, а также профессора по специальности «Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика».

О научных результатах А. Я. Канель-Белова подробнее см.[6]: *Агаханов Н. Х. Андреев Н. Н., Асхабов С. Н. и др.* Алексей Яковлевич Канель-Белов // Чебышёвский сборник. Т. 24, вып. 4. С. 380–400, а также `https://www.mathnet.ru/rus/person/8698`.

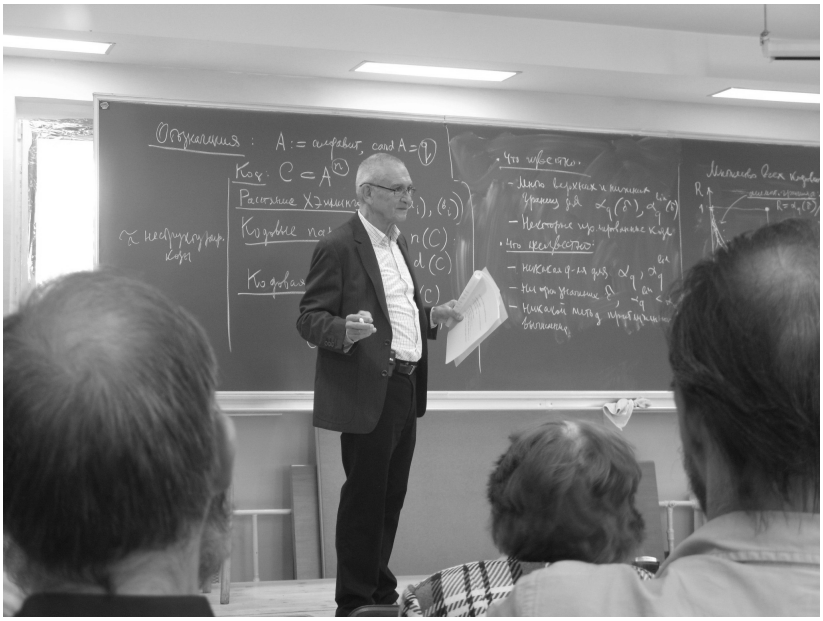
А. Я. Канель-Белов продолжает с увлечением заниматься математикой. Поздравляем Алексея Яковлевича с юбилеем и желаем новых научных достижений, доброго здоровья, счастья и реализации задуманных планов!

---

[6] В настоящей статье существенно использованы материалы этой статьи по согласованию с редакцией.

Юрий Иванович Манин — математик, мыслитель, Учитель. II

Г. Б. Шабат



§ 3. Манин и физика

По публикациям Ю. И. в первые примерно два десятилетия не видна его важная черта — он воспринимал математику как часть мировой культуры, и работа в одной только математике была тесна для него. Эта черта присуща и некоторым другим выдающимся математикам, но мы здесь заниматься сопоставлениями не будем.

Физика играла особую роль во внематематических занятиях Ю. И. С одной стороны это, видимо, связано с тем, что он мог интересоваться физикой и думать о ней, оставаясь математиком — ниже мы кратко

Первая часть статьи опубликована в выпуске 32, с. 23–52.

прокомментируем некоторые примеры вклада Ю. И. в математические составляющие современных физических проблем; вместе с тем он был готов добросовестно учиться физике наподобие студента (в первой части статьи говорилось о его несостоявшейся попытке осуществить это намерение буквально). Например, по книге [КМ1997] видно, с каким усердием Ю. И. осваивал физическую конкретику, упорно преодолевая непостижимые для математика трудности — вычитания «бесконечностей» по несформулированным правилам, расплывчатость понятия атома и т. п. С другой стороны, Ю. И. — яркий представитель «шестидесятников», и, хотя проблемы *физиков vs лириков* для него, разумеется, не существовало (он был близок и тем, и другим), для этого поколения характерна убеждённость, что физика способна объяснить ВЕСЬ мир, а Ю. И. не мог удовлетвориться лишь частью этой великой цели.

3.0. Преодоление междисциплинарных барьеров

Прежде чем перейти к собственно научному вкладу Ю. И. в физику, отметим *социологический* аспект его влечения. Дело в том, что он обладал огромным авторитетом, особенно среди своих непосредственных учеников, и его убеждённость в плодотворности контактов математиков с физиками передавалась ученикам и другим посетителям его семинаров и курсов.

Такие контакты не были необычны для московского мехмата 1970-х — например, С. П. Новиков ставил условием руководства студентами прочтение ими Ландау и Лифшица. Однако это соответствовало основным занятиям С. П. Новикова в то время, тогда как к Ю. И. шли (сильнейшие!) студенты, собирающиеся заниматься разделами математики, которые *тогда* казались далёкими от физики — алгебраической геометрией, теорией чисел, модулярными формами (всё это было полвека назад, сейчас связи этих разделов с физикой общеизвестны). В результате образовывался, например, такой удивительный тандем, как В. Г. Дринфельд (первые публикации — по модулярным кривым) и А. А. Белавин (докторская диссертация о *невылетании кварков*). А. А. Бейлинсон (сыгравший важную роль в развитии производных категорий, автор известнейших гипотез по К-теории) и Дринфельд написали высоко цитируемую книгу о конформной теории поля. И. В. Чередник, начинавший с неархимедовой теории Галуа и p-адической униформизации кривых, в дальнейшем писал работы, например, о нелинейном уравнении Шрёдингера.

Приведено лишь несколько примеров обращения к физике математиков манинской школы. Это отражало общую мировую тенденцию

конца XX века — например, в 1996–1997 годах Институт высших исследований в Принстоне организовал специальный годовой проект, ориентированный на обучение математиков фундаментальным физическим идеям, в результате чего появился уникальный двухтомник [DKE1999]. Ю. И. и его ученики внесли весомый вклад в эту тенденцию.

3.1. Применение математики в физике

Ограничимся упоминанием двух (из многих) направлений работ Ю. И. рассматриваемого класса.

Геометрия дифференциальных уравнений. Работы Ю. И. связаны с существенным *осовремениванием* почтенной классической науки. Начиная со времён Ньютона, *неизвестными* в дифференциальных уравнениях были *функции*, а их *решения* задавались *формулами*. Но уже в XIX веке областями определения неизвестных функций становились не только области в $\mathbb{R}^n$, но и открытые множества *многообразий*. Теперь классически понимаемые решения дифференциальных уравнений могли быть записаны разве что в *локальных* координатах, а их выбор связан с неизбежным произволом.

В случае уравнений математической физики постепенно осознавалось, что неизвестными являются не функции, а метрики, связности и т. п., и глубже всего они понимаются в бескоординатной форме[1)]. Обычно самые фундаментальные из этих уравнений *нелинейны*, хотя удобно начинать осознание сформулированного принципа с линейной системы *уравнений Максвелла*, в которой электромагнитное поле интерпретируется как связность в подходящем расслоении; прямые обобщения этой системы — *уравнения Янга — Миллса*, уже нелинейные.

Ю. И. умел объяснять эти идеи математикам строго и ясно, не теряя из вида физический смысл. Сам он внёс значительный вклад в развитие голоморфной и алгебраической геометрии уравнений: потребовались разнообразные средства математики, которые лишь постепенно стали известны физикам — расслоения и связности в них, пучки и их когомологии, комплексные структуры и их деформации и т. п. Разумеется, Ю. И. мастерски владел этими понятиями; это для математиков второй половины XX века была не редкость, но он глубже многих видел стоящую за этими конструкциями физику. Уже упоминалась работа [HM1980] как первая работа этого цикла; отметим ещё очень глубокую работу [KM1986].

[1)] Хотя и современный физик под метрикой может понимать выражение $g^{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j$.

Уже в 1970-е годы манинская школа уверенно входила в мировую математику. Так, огромную известность приобрела почти мгновенно написанная уже упомянутая работа четырёх авторов [ADHM1978].

Пространства модулей и теория струн. Это — тема, в которой классическая алгебраическая геометрия, испытавшая подъём в 1960-е годы, встретилась с современной физикой.

Пространства модулей, введённые Б. Риманом в 1857 году, с некоторыми оговорками представляют собой для каждого $g \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ алгебраическое многообразие $\mathscr{M}_g$ размерности $3g-3$, точки которого соответствуют классам изоморфизма гладких полных связных кривых рода g. Над полем комплексных чисел это множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством *классов конформной эквивалентности* римановых метрик на топологической поверхности рода g.

В физике пространства модулей кривых появились в 1980-е годы, в связи с надеждой заменить точки микромира на крошечные колечки, *струны*, движущиеся в многомерном[2)] вещественном пространстве, заметая в нём *мировые линии* — вещественные поверхности. Поскольку частицы рождаются, взаимодействуют и умирают, эти поверхности можно считать замкнутыми. Для физиков представляется естественным, что, помимо метрики, индуцированной вложением, на поверхностях рассматривается и внутренняя метрика. Встала задача фейнмановского «интегрирования» по вложению и внутренней метрике.

Интегрирование и по вложениям, и по метрикам, конформно эквивалентным данной, напоминает гауссово интегрирование и не представляло затруднений для физиков. Интегрирование же по множеству конформных структур на поверхности данного рода, т. е. по пространству модулей $\mathscr{M}_g(\mathbb{C})$, было трудной задачей, совершенно по-новому связывающей физику и математику. Эта задача оказалась весьма плодотворной для обеих наук, и Ю. И. со свойственной ему энергией включился в её решение.

Сначала он опубликовал короткую заметку [Manin1986]. Эта заметка написана совершенно не в «манинском» стиле: она в основном состоит из формул, обращение с которыми, впрочем, демонстрирует исключительную виртуозность Ю. И. Однако стоящая за [Manin1986] общематематическая идея просматривается: обсуждавшиеся интегралы уже были вычислены А. Белавиным и В. Книжником, причём очень красиво и с применением замечательных, но экстравагантных понятий

[2)] Некоторое время казалось удивительным, что с необходимостью в 26-мерном — иначе теория содержала фатальные расходимости.

(формулы следа Сельберга). Ю. И. же закрепил другой подход, тоже, впрочем, намеченный А. Белавиным и В. Книжником, связав новомодную теорию струн с самыми классическими разделами голоморфной и алгебраической геометрии; технически все ответы были выписаны в терминах тета-функций, причём *критическая* размерность 26 получила красивое алгебро-геометрическое объяснение. Впоследствии этот результат с необходимыми подробностями был закреплён в совместной публикации [BM1986], написанной уже в «манинском» стиле — с красивым введением, мотивировками, краткой сводкой необходимых сведений из классической математики и россыпью проблем для дальнейшего продумывания.

3.2. Физическая интуиция в математике

Глубокое понимание физики позволяло Ю. И. успешно внедрять физические идеи в разнообразные разделы математики. Приведём примеры.

Квантовая механика. Для Ю. И. она прежде всего мотивировала переход от «обычной» алгебраической геометрии к *некоммутативной*; это направление уже обсуждалось выше, Ю. И. излагал его с особым *педагогическим* мастерством. Но у него были и оригинальные связанные с квантованием работы: например, рядом авторов были определены *квантовые торы* — они представляют частные случаи упомянутых выше квантовых групп, при определении которых за основу берутся функции на группах; в случае квантового тора на этих функциях возникают дополнительные структуры, например, преобразования Фурье. Ю. И. в серии работ дополнил эту теорию теорией *квантовых тета-функций*, и в [Манин2003] завершил построение теории, введя *функциональные уравнения*, которые в классическом пределе вырождаются в обычные функциональные уравнения для классических тета-функций. Так квантовая механика помогла Ю. И. построить интересный математический объект.

Квантовые когомологии. В работе [KM1994] физическая теория была строго изложена для алгебраических геометров. Квантовые когомологии связывались с одной из горячих точек алгебраической геометрии — упоминавшимися выше *мотивами* Гротендика, которые по сей день остаются недостижимой мечтой об *универсальной* теории когомологий алгебраических многообразий.

Тем не менее, уже построенных фрагментов теории достаточно, чтобы работать с *классами Громова — Виттена*, теория которых актив-

но развивается после цитированной работы Концевича и Манина и её продолжения. В [KM1994] обсуждаются важные вопросы оснований алгебраической геометрии — например, как перейти от пространств модулей кривых к пространствам «модулей» поверхностей и далее.

Среди многочисленных математических приложений этой теории есть одно особенно эффектное, связанное с одним из самых классических разделов алгебраической геометрии — *перечислительной* геометрией. Так, подсчёты количеств рациональных кривых на квинтиках приводят к астрономическим числам. Количество таких кривых степени 10, выражаемое 30-значным числом, было указано физиками, см. [COGP1991] (математики сначала с помощью компьютерной программы получили неправильной ответ, но потом нашли ошибку в программе и получили правильный).

Применение статфизики в кодировании. Ю. И. с соавторами написал несколько работ на эту тему, например, [MM2011]. Отсылаем за деталями к [Tsf2023].

Ренормализация и вычисления. Работа [Manin2009a] представляется совершенно оригинальной. В ней Ю. И. параллельно рассматривает бесконечности в классической теории вычислений (неразрешимость проблемы остановки и т. п.) и в квантовой теории поля. Понятие *ренормализации* переносится из физики в вычислительную математику; диаграммы Фейнмана уподобляются блок-схемам. Ю. И. ставит вопрос о выработке аналога физического понятия *действия* в вычислительной математике, упоминает сформулированный И. М. Гельфандом за полвека до написания [Manin2009a] *принцип наименьшего* взаимо*действия* в теории конечных автоматов и утверждает, что колмогоровская сложность является подходящим кандидатом.

Наряду с общими соображениями, [Manin2009a] содержит теоремы, связывающие фейнмановские интегралы с формальными суммами по конечным графам. Такого рода суммы (в частности, суммы по деревьям) появляются в работах Ю. И. на разные темы, например, в работах, посвящённых пространствам модулей кривых; это — один из намёков на единство понимания Ю. И. далеко отстоящих друг от друга разделов математики и физики.

3.3. Синтез

Ю. И. написал несколько работ, обычно в соавторстве, в которых есть и математика, и физика, но которые нельзя отнести ни к математике, ни к физике. Скажем несколько слов об одной из них, [MM2014]. На первый взгляд, работа относится к научной фантастике — в ней

фигурирует мнимое время и смена *эонов Пенроуза*. Для широкой публики *эон* — это этап жизни Вселенной от рождения (Большого Взрыва) до Конца Света. «Потом» начинается новый эон. Согласно доступным интервью, Пенроуз предполагает, что нашему эону «предшествовали» другие[3)]. Тем не менее авторы, как и вдохновивший их нобелевский лауреат Р. Пенроуз, прекрасно знают современные космологические модели. Эти модели, однако, адекватно описывают лишь гладкие области пространства-времени — где фигурируют римановы и лоренцевы метрики и можно (хотя бы на классическом уровне) дифференцировать наблюдаемые.

Что же касается *сингулярностей* пространства-времени, то средств классической математики оказывается недостаточно. И проблема даёт огромный простор для математиков и физиков, обладающих такой эрудицией, воображением и квалификацией, как Ю. И. и М. Марколли: надо какими-то средствами *вне* традиционной математики описать то, что происходит на границах гладкости пространства-времени, на уровне сегодняшних представлений — при Больших Взрывах и Больших Хлопках[4)] (а также в *чёрных дырах*, которые в [MM2014] не рассматриваются).

Для описания переходов из эона в эон Манин и Марколли используют *поворот Вика* (переход из вещественного времени в комплексное), *раздутия* из бирациональной геометрии, разумеется, *твисторы*, деревья, состоящие из трёхмерных проективных пространств с отмеченными точками, семейства эллиптических кривых и модулярные кривые, символическую динамику геодезических потоков на модулярных кривых и т. п.

Авторы весьма сдержанно пишут о возможности экспериментальной проверки их моделей, но какие-то направления в духе [GP2013] упоминают.

3.4. Арифметическая физика

Некоторые трудности во взаимопонимании математика и физика смоделированы в книге [KM1997], существенная часть которой — «диалоги» Математика и Физика (с участием Философа и Экспериментатора). В ответ на претензии математика к внутренне противоречи-

---

[3)] Он, однако, не знает, принимали ли фундаментальные физические константы (например, скорость света) те же значения….

[4)] Русские термины *Большой Хлопок* — и, тем более, *Большое сжатие*, по своему смыслу противоположные Большому взрыву, не так широкого распространились в русском языке, как *Большой Взрыв*. По-английски используется более выразительный термин *Big Crunch*.

вому пониманию микромира физиками, Физик отвечает: *Наверное, в этом виноваты ваши коллеги времён Евдокса. Нам подсунули слишком простую модель континуума.*

Математик мог бы ответить, что после Евдокса появились многочисленные альтернативы вещественному континууму $\mathbb{R}$. Среди них есть бросающиеся в глаза: если фундаментальные числа, описывающие природу — натуральные, образующие полукольцо $\mathbb{N}$, и мы хотим производить над наблюдаемыми величинами четыре арифметические операции, то числа, описывающие природу, должны содержать поле $\mathbb{Q}$.

Далее, от чисел требуется возможность рассматривать *приближённые* значения наблюдаемых величин, и для этого на поле $\mathbb{Q}$ нужна топология. Как мы знаем из теоремы Островского, таких топологий, помимо определённых вложениями $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, существует ровно по одной для каждого простого числа p, и определены вложения $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ поля рациональных чисел в *полные* поля p-адических чисел. Эти пополнения поля рациональных чисел и представляют собой очевидные альтернативы единственному континууму, который физики со времён Евдокса (без достаточных оснований) объявили вездесущим.

Ю. И. не раз, в текстах, лекциях и устных беседах, старался распространить идею (в своё время сформулированную также А. Вейлем и другими), которую он называл *адельной демократией*:

все пополнения поля рациональных чисел имеют равные права.

Демократия названа *адельной*, поскольку весьма плодотворен взгляд на все эти пополнения вместе, собранные в топологическом *кольце аделей*

$$\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \prod_{\text{простые } p} \mathbb{Q}_p.$$

В беседах [KM1997] Ю. И. эти альтернативы вещественному континууму не обсуждал, но посвятил арифметической физике отдельную работу [Manin1987]. Он скромно назвал её *своевременными размышлениями профессионального теоретико-числовика и физика-любителя о таком противоречивом предмете, как арифметическая физика*.

В качестве исходного примера Ю. И. рассмотрел формулу Эйлера

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_{\text{простые } p} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p^2}}, \tag{Э}$$

интерпретируя правую часть как принадлежащую теории чисел, а левую — как «физическую константу». Он объяснил формулу Эйлера

с помощью вышеупомянутой адельной демократии, точнее — с помощью левоинвариантной меры $\mathrm{d}m$ на однородном пространстве $\mathsf{SL}_2(\mathbb{A})$, нормализованной условием

$$\int\limits_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{A})/\mathsf{SL}_2(\mathbb{Q})} \mathrm{d}m = 1.$$

Формула (Э) объясняется покомпонентным вычислением интеграла (в очевидных обозначениях)

$$1 = \int\limits_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{A})/\mathsf{SL}_2(\mathbb{Q})} \mathrm{d}m = \int\limits_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})/\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{d}m_\infty \times \prod_p \int\limits_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{d}m_p$$

вместе с известными равенствами

$$\int\limits_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})/\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{d}m_\infty = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int\limits_{\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}_p)} \mathrm{d}m_p = 1 - \frac{1}{p^2}.$$

Основную гипотезу, названную Ю. И. *несколько рискованным обобщением*, процитируем полностью[5]:

На фундаментальном уровне наш мир не является ни вещественным, ни p-адическим: он адельный. По каким-то причинам, связанным с физической природой нашей разновидности живой материи (возможно, с тем, что мы состоим из массивных частиц), мы обычно проектируем адельную картину в вещественную сторону. С тем же успехом мы могли бы духовно проектировать её в неархимедову сторону и вычислять наиболее важные вещи арифметически.

«Вещественная» и «арифметическая» картины мира находятся в отношении дополнительности, напоминающем отношение между сопряжёнными наблюдаемыми в квантовой механике.

Далее Ю. И. высказывает осторожное предположение об адельном направлении развития теории струн. Среди обоснований своих надежд он (лестным для автора этих строк образом[6]) упоминает статью [ShV1990], в которой в качестве «римановых сумм» при струнном интегрировании по «всем» римановым метрикам на компактных ориентируемых поверхностях предлагается рассмотреть суммирование по метрикам, определённым равносторонними триангуляциями.

---

[5] Русский текст — по переводу С. М. Львовского в сборнике «Математика как метафора».

[6] Ещё я пытался внести вклад в арифметическую физику в работе [Sh2016a], в которой показал, что законы Кеплера можно открыть и обосновать, пользуясь только *алгебраическими* числами, и пытался на основе этого подхода наметить построение *адельной* гравитации.

Согласно теории *детских рисунков* Гротендика — Белого, в результате пространство модулей алгебраических кривых над полем комплексных чисел заменяется на такое же пространство над полем *алгебраических* чисел, т. е. действительно струнная теория делает шаг в сторону *арифметической*. К сожалению, в течение времени, прошедшего после публикации [ShV1990], этот подход к теории струн развития не получил.

После публикации [Manin1987] p-адическая физика получила значительное развитие. Адельная физика, видимо, находится на начальной стадии[7].

Можно предположить, что предвидения Ю. И., касающиеся арифметической физики, значительно шире, чем относительно расширения или построения альтернативных версий традиционного континуума. Сам Ю. И. (иногда в сотрудничестве с М. Марколли и другими) прилагал значительные усилия к развитию такого ещё не вполне сформировавшегося раздела математики, как *некоммутативная арифметика*. В последние десятилетия усиливается интерес физиков к математическим теориям, которые полвека назад казались бесконечно далёкими от физики, и в частности к арифметическим. Среди этих теорий — близкие Ю. И. *модулярные формы*, см., например, недавний курс лекций [HK2022].

§ 4. Манин как гуманитарий

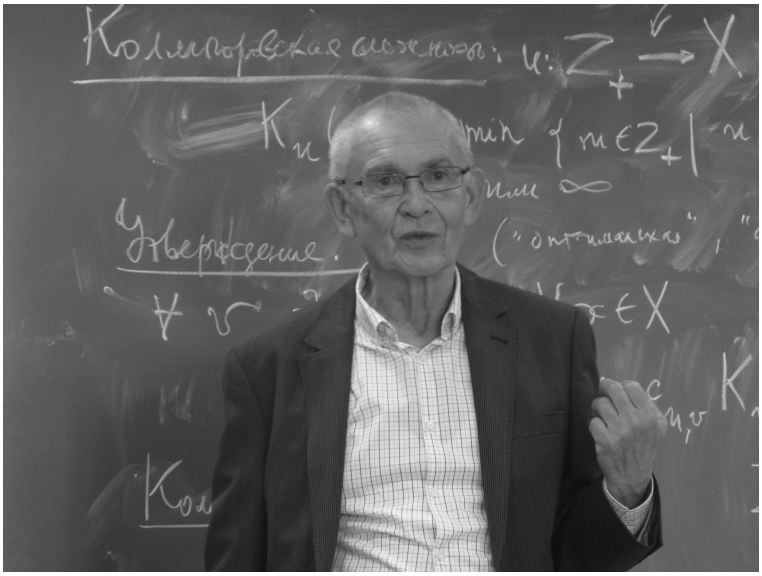
Мы ограничимся краткими комментариями, касающиеся текстов, собранных в книге [Манин2008] «Математика как метафора». По словам Ю. И., в ней собраны …*заметки на полях, наброски мыслей, подготовительные черновики, не превратившиеся в теоремы, определения, романы* или философские трактаты. Однако всякому, кто возьмёт эту книгу в руки, станет очевидно, что в ней отражена огромная интеллектуальная работа Ю. И., связанная с математикой, но не сводящаяся к ней.

Как уточнил сам Ю. И., его …*не соблазняла перспектива применить свои рабочие навыки математика к гуманитарному материалу. Мне хотелось вжиться в него, как вживаются в чужую страну, и описать увиденное словами не столь точными, сколь выразительными*.

4.0. Занятия науками о человеке

Классифицировать тексты Ю. И. гуманитарной направленности ещё труднее, чем математические и физические, и мы не будем пытаться

[7] См. работы Бранко Драговича.



этого делать. В этих текстах отражены интересы Ю. И. к лингвистике, психологии, нейрофизиологии, литературоведению, и его идеи обычно связаны с взаимодействиями этих дисциплин. Ни одной из них он не занимался профессионально, но его эрудиция позволяла как задавать содержательные вопросы профессионалам (из которых он обычно выбирал весьма авторитетных и иногда собирал их на своих домашних семинарах), так и высказывать свои соображения, глубокие, оригинальные и обычно *междисциплинарные*. Некоторая часть этих соображений сохранилась в письменной форме; получившиеся тексты были опубликованы, а затем вошли в сборник [Манин2008].

Адресаты этих текстов вряд ли были очень хорошо определены. Видимо, прежде всего это были математики[8)], и особо эти тексты интересны ученикам Ю. И., рассеянным по университетам разных стран, — а также ученикам учеников и т. д. Но требования к читателю, который захотел бы даже просто понять, о чём идёт речь, весьма высоки. Например, фрагменты фраз *Субдоминантное порождение речи …могло быть мощным фактором суггестии* или *…согласно О. М. Фрейденберг* (*и отчасти — К. Леви-Строссу*), *они* (герои мифа и эпоса) *не столько субъекты жизненных действий, сколько заместители когнитивных категорий* заставят заинтересованного математика не раз обратиться к Google.

---

8) Часть текстов была написана по-английски и вошла в [Манин2008] в прекрасных переводах С. М. Львовского.

Что заставляло Ю. И. отвлекаться от основных занятий и работать над вопросами, формально далёкими от его основной профессии, в которой он был так несомненно успешен? Ответ можно было бы сформулировать общими словами об интересе Ю. И. к Культуре вообще, и соответствующие выразительные цитаты Ю. И. приведены выше. Однако мы в этом разделе рассмотрим гуманитарные тексты Ю. И. с более конкретной точки зрения.

При всей широте тематики он всё-таки писал не обо всём на свете. Сильно сузив предмет рассмотрения и упрощая подходы к гуманитарному творчеству Ю. И., выделим среди гуманитарных дисциплин те, которые прежде всего привлекают внимание *математика*.

- Математики получают свои результаты в результате размышлений. Отсюда наш особый интерес к Мышлению вообще.
- Математики формулируют свои результаты на специальных языках. Отсюда особый интерес к Языку вообще.

Будем считать, что эти очевидные тезисы объясняют интерес Ю. И. к психологии и лингвистике.

Как было отмечено выше, сочинения Ю. И. не подразделяются на классы, относящиеся к этим (а иногда и к другим) гуманитарным наукам. Он рассматривает проблемы этих наук в их сложной взаимосвязи и, как это свойственно ему и в математических работах, с одной стороны, ставит как можно более общие вопросы, а с другой — изучает их, тщательно анализируя «крайние случаи». Так, среди его текстов есть исключительно благожелательная и тактичная рецензия (с характерным заголовком «Это — любовь?») на книгу-дневник матери девочки-аутистки, а развитие языка он рассматривает с самых ранних стадий до искусственных языков компьютерной эры.

Мы остановимся на вопросе, который Ю. И. с наивностью неспециалиста ставит относительно происхождения языков. Как это принято среди лингвистов, он сопоставляет освоение языка древним человеком и маленьким ребёнком[9]. Он пишет: …*Но ребёнок начинает говорить, лишь поскольку он погружён в речевую среду — вокруг него и с ним говорят взрослые. Кто был «взрослым» для раннего человека*?

Отвечая на поставленный вопрос, Ю. И. освобождается от оков дедуктивных наук и даёт волю своей фантазии. Он предваряет свои рассмотрения словами *Эта работа не является ни обзорной, ни полемической*; *это частная попытка рассмотреть проблему глоттогенеза в свете данных психолингвистики*.

[9] Это называется *привлечение онтогенетических параллелей*.

Основа ответа — *неравномерность языкового развития*. В историческое время это иллюстрируется, например, тем, что *Данте и Пушкин настолько превосходят по своим языковым способностям общий уровень, что на столетия выступают учителями языка всей нации*. Ю. И. предполагает, что *Роль людей с выдающимися речевыми способностями… была ещё более значительна на заре становления языка*.

Как подобную гипотезу можно проверить? По аналогии с естественнонаучными и математическими гипотезами — вероятно, никак. Однако Ю. И. мысленно переносится в невообразимо далёкие времена (порядка 200 тысяч лет назад) и предлагает методику, связанную с переходом *от эволюции словаря к эволюции системы функций языка, <…> от лингвистики к психолингвистике*.

Ю. И. уточняет свою гипотезу, пользуясь понятиями *доминантного* и *субдоминантного* полюсов речевого поведения. Не будем пытаться эти понятия воспроизвести, ограничившись фрагментами приведённых Ю. И. ссылок на [Д1984]: доминантное связано *главным образом… с рациональными и волевыми инстанциями психики*, тогда как в субдоминантной моде *содержание речи не подвергается критической оценке, уровень его сознания понижен, <…> речевой акт может стать полностью неподконтрольным сознанию*.

Ю. И. отвечает на свой вопрос о «взрослых», учивших наших древних предков говорить, несколько расплывчато, но содержательно. По его мнению, данте и пушкины незапамятных времён — это некоторые выдающиеся личности, достаточно высоко стоящие в иерархии древних обществ, *сильные, властные, активные* (*и легко внушаемые*) *вожди племён, первосвященники и жрецы-шаманы*[10]. Характерные черты такой личности — *глоссолалирующий, плутующий, слышащий голоса богов, полубезумный*[11]. Более сложные черты «учителей» связаны с раздвоениями личности (здесь возникают термины *трикстер* и *мифологический плут*); Ю. И. разбирает их весьма подробно, но мы не берёмся их комментировать.

Обосновывая свою гипотезу, Ю. И. обращается к данным гипнотических экспериментов, к результатам изучению семантики цветообозначений естественного языка, к данным палеолитического искусства, этнографии, психиатрии и нейрофизиологии.

---

[10] Настоящим Данте и Пушкину эти черты, очевидно, не были свойственны.

[11] Г. Ш.: Не сохранились ли некоторые из этих черт у современных фюреров? Однако вряд ли они учат свои нации языку….

Убедительны ли эти аргументы для гуманитариев? Google не даёт положительного ответа на этот вопрос — ссылки на гуманитарные работы Ю. И. не находятся, по крайней мере сразу. Правда, и спектр гуманитарных дисциплин, к которым обращается Ю. И., видимо, настолько широк, что внимательное чтение его работ затруднительно не только для математиков, но и для, например, лингвистов.

Однако можно надеяться, что для гуманитариев будущего работы Ю. И. сыграют свою роль. Вероятно, межпредметные барьеры будут не так непреодолимы для гуманитариев будущего, как сейчас; по крайней мере, как предсказывал С. А. Старостин, биологам, лингвистам и археологам придётся пользоваться одними и теми же большими базами данных. И тогда работы Ю. И., в которых с единых позиций рассмотрены науки о Человеке, будут прочитаны и продолжены.

На этом мы в основном закончим обсуждение гуманитарных статей из [Манин2008], опустив интереснейшие рецензии на книги, статью об общей семиотике, рассказ о взаимоотношениях Ватикана с современны научным сообществом и (одно из многих) интервью «Пространство свободы».

Добавим лишь одно конкретное замечание[12)]. В своих размышлениях о праязыках Ю. И., как мы видели, вслед за многими лингвистами остановился на глубине около 20 тысяч лет, сформулировав вопрос *Может ли компаративистика заглянуть намного дальше вглубь*? В работе [С1989] утверждается, что *основные корни могут сохраняться значительно дольше*. С. А. Старостин разработал методику *ступенчатой реконструкции*, позволяющую — правда, с убывающей уверенностью — строить предположения о самых ранних праязыках. Ситуация отдалённо напоминает переход от классической механики к квантовой, и нет сомнения, что, если бы Ю. И. заинтересовался этим подходом к науке о языке раннего человечества, то существенно продвинул бы его. Точнее, признав огромную ценность качественной информации, содержащейся в построенных к настоящему времени реконструкциях, предложил бы для их количественного анализа (основная проблема которого — оценка времени от распада языка-предка до наблюдаемых свойств языков-потомков) заменить используемые сейчас простые формулы — без достаточно убедительных оснований построенные по аналогии с радиоуглеродным методом измерения возраста органических веществ —

[12)] Автор этих строк, более тридцати лет преподающий математику лингвистам в Российском Гуманитарном Университете, сформировал свой взгляд математика на некоторые лингвистические проблемы.

на более адекватный и продвинутый математический аппарат, например, подходящим образом модифицированный из работы [MM2011].

Закончим этот раздел несколькими цитатами из гуманитарных текстов Ю. И.

> *Мозг образует замечательно сложную материальную систему, которая обслуживает психику и является её носителем. Поэтому законен и очень интересен вопрос об эволюции нейрофизиологических коррелятов психических процессов.*
>
> *Попытка З. Фрейда была, возможно, самой заметной героической вылазкой разума против иррационального в человеческой психике. Как было сказано, на кушетку психоаналитика легла вся западная культура этого столетия.*
>
> *Бэконианские призраки не исчезли от того, что на них указали пальцем, и шепчут нам что-то о нас самих.*
>
> *В Риме времена прорастают друг сквозь друга, и Вера Рубин, одна из открывателей таинственной тёмной материи, участвующей только в гравитационном взаимодействии, гуляет под сводами Сикстинской капеллы и разглядывает Сотворение Мира.*

4.1. Литературное наследие

Важная часть этого наследия, не вошедшая в [Манин2008], — предисловие Ю. И. к дневнику его деда по маме Зиновия Миллера. Дневник называется «Из пережитого. История одной эвакуации» и описывает трагические события жизни в 1941–1942 годах советской семьи (в которую входил четырёхлетний Юрочка), бежавшей от наступавших немецких войск из Симферополя в Среднюю Азию. События, увы, вполне обыкновенные для тех лет, включавшие перемещения в нечеловеческих условиях в переполненных поездах и кораблях, ночлеги под открытым небом и т. п. … Необыкновенным было то, что описания всех этих кошмаров аккуратно заносились дедом Ю. И. в школьную тетрадку *неправдоподобно ясным и красивым почерком, почти без помарок, каждая буква — каллиграфическое совершенство*. Дневник был посвящён любимому внуку Юрочке и закончен в день его пятилетия.

Ю. И. писал своё предисловие в 2010 году, отметив, что на его столе дневник деда лежит рядом с распечаткой блога его внука Фёдора Манина, который, *закончив институт <…> в одиночку пересёк на велосипеде всю Японию с севера на юг*. Предисловие наполнено явными или неявными генеалогическими сопоставлениями и является, по-видимому, единственным сравнительно полным источником сведений

о предках Ю. И.: в отличие от Колмогорова, Понтрягина и Гротендика, времени для написания своей автобиографии Ю. И. не нашёл.

Об авторе дневника Зиновии Григорьевиче Миллере Ю. И. счёл нужным сообщить, что в городе Юзовке, в котором тот родился, около 1904 года *готовилась к постановке пиеса «Юдифь», соч. З. Г. Миллера*. Рукопись этой пьесы сохранилась и, по словам Ю. И. почерк автора *отличается тем же щегольством*, что дневник.

О деде Гавриле по отцу, *леснике и крестьянине*, Ю. И. знал гораздо меньше. Сохранилась единственная фотография Гаврилы — *мужик в лаптях, с толстовской бородой и суровым взором, сидит на стуле, поставленном прямо в лесу*, и передаваемое потомкам устно (Гаврила был неграмотен) четверостишие, посвящённое сезонной смене жилья:

Соберём свои лоскутья, // старый веник — одни прутья, // и печальною гурьбой // побредём к себе домой.

Ю. И. отмечает, что *Страсть к стихоплётству, видимо, была генетической*: *её унаследовали четыре следующие поколения Маниных*.

Словцо, отразившее не вполне уважительное отношение Ю. И. к поэтической продукции не только своих потомков и предков, но и к собственной, повлияло на композицию [Манин2008]: стихи (как и небольшая подборка мемуаристики) помещены в раздел «Из ненаписанного».

Стихи пишут многие математики. Некоторые (А. А. Болибрух, В. Е. Захаров, В. А. Успенский) их публикуют, бóльшая часть ограничивается тем, что читает их ближним, скромно считая их любительством.

Стихи Ю. И. весьма профессиональны Это видно, например, по стихотворению, посвящённому В. Е. Захарову:

Я узнаю по коду
деревьев, стен и лиц
последнюю погоду
перед отлётом птиц.

Последнюю погоду,
прощальное тепло.

Меняю на свободу
родное ремесло,
с каким почти до края
мне вышло добрести,
зелёный лист теряя
из высохшей горсти…

Это стихотворение — одно из немногих «серьёзных» и собственных, т. е. не (достаточно вольных) переводов и стилизаций, среди вошедших в [Манин2008]. Из несерьёзных можно привести пример фрагмента *Загляну-ка я под мини*: *// Интересно, что под ними*? *// …А заглядывать под макси // Удаётся только таксе*, а из стилизации — начало «Памяти Иосифа Бродского»

До-светания, — как бы прощаясь глухо,
Тело есть лишь продукт разложенья духа,
Слабый свет — продукт разложенья тела,
Кто-то это сказал, но не в этом дело…

Учтя поэтическое мастерство Ю. И., продемонстрированное хотя бы в приведённых примерах, можно смело предположить, что поэтическое наследие Ю. И. гораздо шире вошедшего в [Манин2008]. Это предположение косвенно подтверждается Матильдой Марколли, которая в своём пронзительном тексте [M2023], среди прочего, рассказывает о разборе бумаг Ю. И. в его кабинете в Институте Макса Планка и утверждает, что *Poetry is everywhere*. Ближние решат, будут ли опубликованы какие-то ещё стихи Ю. И.[13)]

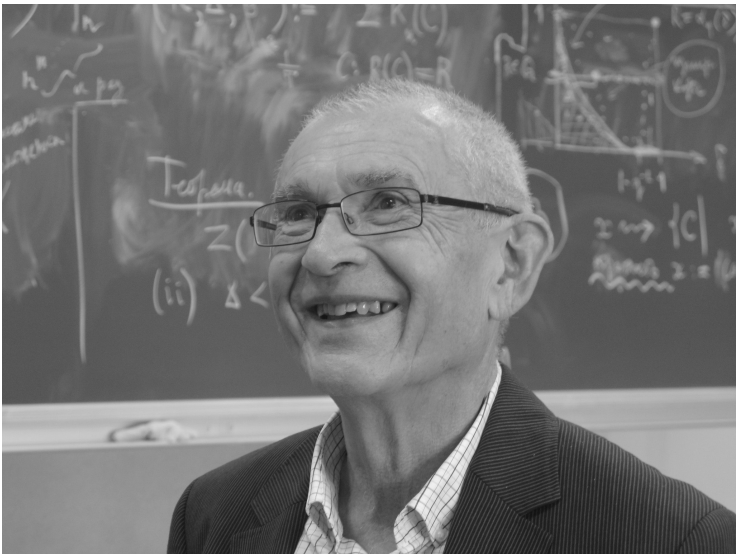
Прозаические произведения Ю. И., включённые в [Манин2008], носят мемуарный характер. Для коллег и учеников Ю. И. эти произведения существенно расширяют представления о личности Ю. И. Мне, например, до прочтения «Аркадий, Борис, Володя» трудно было представить себе Ю. И., к которому Высоцкий регулярно приезжает после театра, берётся за гитару и поёт *далеко заполночь*. Но пришлось понять, что интерес Ю. И. к Культуре распространяется и на этот пласт, далёкий от формальной изысканности.

§ 5. Манин как Учитель

Что запомнилось из курсов Ю. И., прослушанных в МГУ ещё в советское время? (Начиная с 1990-х, Ю. И., работая в основном за границей, выступал в России только с отдельными лекциями — правда, довольно многочисленными).

Прежде всего — невероятное разнообразие тем. Названия курсов за несколько десятилетий, видимо, ни разу не повторились. Каждый год они содержали что-то, чем Ю. И. в тот год занимался; это — не очень сильное ограничение, поскольку Ю. И. всегда одновременно

[13)] Конечно, переиздания [Манин2008] весьма желательны, причём с правильным написанием géométrie или géomètre на обложке.



занимался несколькими вещами (и автору этих строк он советовал, если что-то не получается, *на время* резко сменить тематику).

Лекции были построены мастерски и артистично. На первых лекциях аудитории были переполнены, отчасти потому, что на них приходили, например, лингвисты и биологи — насладиться понятными и профессиональными введениями и прекрасным русским языком (разумеется, после 1990-х те же свойства относились к английскому). Постепенно количество слушателей сокращалось: лекции становились более техническими, на последних возникало ощущение, что Ю. И. делится проведёнными накануне вычислениями. Однако и такие лекции были тщательно подготовлены. Возможно, манинских учеников можно распознать по привычке писать на листах А4, положив их горизонтально: Ю. И. объяснял нам, что так мы видим перед собой образ доски в аудитории.

При всей чёткости стиля лекции были очень живыми. Запомнились такие выражения Ю. И., как *Это была преамбула, а сейчас начнётся амбула* или *Ой, доска кончается…* Были и более серъёзные апелляции к культурному бэкграунду слушателей — при выводе уравнения Кортевега-де-Фриза волн на мелкой воде упоминались гравюры Кацусика Хокусай…

Сочетание гуманитарной и математической культуры позволяло Ю. И. обогащать математический язык, вводить обороты, которые сразу входили в обиход, проясняя сложные концепции. *Адельная демократия* — это «равные права» для всех пополнений поля рациональных чисел. *Теория категорий* воплощает *социологический подход к мате-*

матике: *каждый объект рассматривается как член сообщества себе подобных*.

Лекции Ю. И., прочитанные в 1960-х, 1970-х и 1980-х годах в аудиториях мехмата на 13–16 этажах здания МГУ на Воробьёвых горах, остались лишь в памяти тогдашних слушателей, стареющих и уходящих… К счастью, прочитанные с тем же совершенством лекции в XXI веке сохраняются на YouTube и, надо надеяться, переживут многие поколения математиков. (Ю. И. смотрел в будущее со своеобразным оптимизмом: *Если уж выжили людоедство, астрология и генералы, то и наука не исчезнет*. — см. [Манин2008].)

Ю. И. был мастером не только публичных выступлений, но и личного профессионального общения. После его лекций в XXI веке в Московском независимом университете к нему выстраивались очереди. Он был неизменно корректен и чёток, выслушивал любые соображения (иногда очень незрелые) любых собеседников, уточнял их и почти всегда чем-то делился в ответ. Из этих кратких бесед становилось ясно, насколько количество его идей превосходило возможность все их реализовать самостоятельно; впрочем, часто эти идеи в дальнейшем трансформировались в препринты и статьи, иногда в соавторстве с собеседником.

Личные отношения Ю. И. с учениками варьировались в широких пределах, от сравнительно формальных до переходящих в дружбу. С автором настоящих строк отношения были ближе к формальным — я, как было упомянуто выше, поздно стал формальным учеником Ю. И., перейдя к нему по не зависящим от нас причинам от И. Р. Шафаревича; возможно, и другие личностные обстоятельства препятствовали нашему дальнейшему сближению.

Тем не менее личные отношения безусловно были; они сыграли огромную роль в моей жизни, как, скорее всего, и в жизни большинства учеников Ю. И. (были и примеры печальных результатов — подавленные интеллектуальным совершенством учителя, некоторые разочаровывались в своих силах). Наш учитель очевидно применял свои знания о Человеке, о которых речь шла выше, к конкретным молодым людям; несмотря на огромное количество учеников, мы никогда не были для Ю. И. однородной массой. Так, лично мне он адресовал совершенно нетривиальное наблюдение: *вам для успешной работы, видимо, полезны стрессовые ситуации*; *в цейтноте вы больше успеваете*.

Огромное удовольствие доставляло общение с Ю. И. у него дома; я могу писать лишь о советском периоде и о квартире на Юго-Западе Москвы. Попадая туда, можно было почувствовать одну из важнейших черт личности Ю. И. — построение жизни по своим эстетическим пра-

вилам, независимо от внешних обстоятельств. В квартире, разумеется, было тесно от книг, но находилось место и для картин; на видном месте была доска, основное средство общения на математические темы вне казённой обстановки Университета. Также (в до-компьютерную эпоху в советской жизни, в 1970–1980-е годы) всегда была готова к работе пишущая машинка. Низкие зарплаты советских профессоров не могли быть препятствием для организации жизни Ю. И. по своему вкусу: так, он много, быстро и качественно переводил математические книги (на упомянутой пишущей машинке непосредственно производил готовый текст, оставляя пробелы нужных размеров для ручной вставки формул).

Эти уроки личной независимости и организации жизни много работающего интеллектуала были весьма убедительны. Я не использую словосочетания *русский интеллигент*, поскольку традиционные черты этого сословия (невнимание к одежде, беспорядок в квартире и т. п.) не были свойственны Ю. И. Скорее, ещё в советский период своей жизни он по возможности вёл жизнь западного профессионала; не удивительно, что начиная с 1990-х он естественно вписался в западную математическую жизнь (сохраняя связи с российской). Эта же способность передалась многим его ученикам.

Важная черта Ю. И. — мягкость характера; он не любил плохо говорить ни о людях, ни о текстах. Однако он умел быть жёсток и твёрд; так, на защите блистательной кандидатской диссертации Дринфельда, которая по обычаям мехматской жизни 1970-х имела шанс быть проваленной, Ю. И., произнеся все обычные слова научного руководителя, произнёс что-то о празднике, на котором все присутствовали, и, особенно грозно посмотрев на членов учёного совета, сказал *и я надеюсь, что никто нам этот праздник не испортит*. Мы никогда не узнаем, напугал ли он кого-нибудь, но защита прошла успешно, с каким-то небольшим количеством «чёрных шаров».

Думаю, что имею моральное право от имени формальных и неформальных учеников Юрия Ивановича выразить любовь и огромную благодарность за всё, чему он нас научил как математик и как человек. Светлая память!

Список литературы

[Манин1956] *Манин Ю. И.* О сравнениях третьей степени по простому модулю // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1956. Т. 20, вып. 5. С. 673–678.

[Манин1958] *Манин Ю. И.* Алгебраические кривые над полями с дифференцированием // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1958. Т. 22, вып. 6. С. 737–756.

[Манин1963] *Манин Ю. И.* Доказательство аналога гипотезы Морделла для кривых над функциональными полями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 152. С. 1061–1063.

[Manin1965] *Manin Yu. I.* Moduli fuchsiani // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3). 1965. Vol. 19. P. 113–126.

[Манин1968] *Манин Ю. И.* Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // Матем. сб. 1968. Т. 119, № 4. С. 475–507.

[Манин1970] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. I: Аффинные схемы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.

[Манин1971] *Манин Ю. И.* Лекции по алгебраической геометрии. Часть II: К-функтор в алгебраической геометрии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971.

[Манин1971a] *Манин Ю. И.* Добавление переводчика к книге: Д. Мамфорд. Абелевы многообразия. М.: Мир. 1971. С. 286–292.

[ИМ971] *Исковских В. А.*, *Манин Ю. И.* Трёхмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86(128), № 1(9). С. 140–166.

[Манин1973] *Манин Ю. И.* Десятая проблема Гильберта // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1973. С. 5–37.

[Манин1974] *Манин Ю. И.* Лекции о математической логике. М.: Московский институт инженеров электронного машиностроения, 1974.

[Манин1975] *Манин Ю. И.* Проблема континуума // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 5, М.: ВИНИТИ, 1975. С. 5–72.

[Манин1975a] *Манин Ю. И.* Теорема Гёделя // Природа, 1975. № 12. С. 80–87.

[ГМШ1976] *Манин Ю. И.* Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 30–34.

[Манин1977] *Манин Ю. И.* Человек и знак // Природа. 1977. № 5. С. 150–152.

[Manin1977a] *Manin Yu. I.* A course in mathematical logic for mathematicians / Second edition. New York: Springer, 2010. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 53).

[ADHM1978] *Atiyah M. F.*, *Hitchin N. J.*, *Drinfel'd V. G.*, *Manin Yu. I.* Construction of instantons // Phys. Lett. A. 1978. Vol. 65, № 3. P. 185–187.

[DM1978] *Atiyah M. F.*, *Hitchin N. J.*, *Drinfel'd V. G.*, *Manin Yu. I.* A description of instantons // Comm. Math. Phys. 1978. Vol. 63, № 2. P. 177–192.

[Манин1978] *Манин Ю. И.* Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. С. 5–152.

[Манин1978a] *Манин Ю. И.* Матричные солитоны и расслоения над кривыми с особенностями // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 4. С. 53–63.

[HM1980] *Henkin G. M.*, *Manin Yu. I.* Twistor description of classical Yang — Mills — Dirac fields // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 95, № 3–4. P. 40–408.

[ЛМ1980] *Лебедев Д. Р.*, *Манин Ю. И.* Уравнения длинных волн Бенни II. Представление Лакса и законы сохранения // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Т. 12. Л.: Наука, 1980. (Зап. научн. сем. ЛОМИ; Т. 96). С. 169–178.

[Manin1981] *Manin Yu. I.* Expanding constructive universes // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). С. 255–260.

[Манин1982] *Манин Ю. И.* Замечания об алгебраических супермногообразиях // Алгебра. Сб. работ, посвящённых 90-летию О. Ю. Шмидта. М.: МГУ, 1982. С. 95–101.

[BM1984] *Влэдуц С. Г.*, *Манин Ю. И.* Линейные коды и модулярные кривые // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. Т. 25, М.: ВИНИТИ, 1984. С. 209–257.

[Манин1984] *Манин Ю. И.* Новые размерности в геометрии // УМН. 1984. Т. 39, вып. 6(240). С. 47–73.

[Manin1986] *Manin Yu. I.* Theta-function representation of the partition function of a Polyakov string // Pis'ma Zh. Eksp. Teor Fiz. 1986. Vol. 43, № 4. P. 161–163.

[BM1986] *Beilinson A. A.*, *Manin Yu. I.* The Mumford Form and the Polyakov Measure in String Theory // Comm. Math. Phys. 1986. Vol. 107, № 3. P. 359–376.

[KM1986] *Kapranov M. M.*, *Manin Yu. I.* The twistor transformation and algebraic-geometric constructions of solutions of the equations of field theory // Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, № 5. P. 33–61.

[Manin1987] *Manin Yu. I.* Reflections on arithmetical physics // Conformal Invariance and string theory. Poiana Brasov, 1987. Boston, MA: Academic Press, 1989. P. 293–303.

[Manin1991] *Manin Yu. I.* Topics in noncommutative geometry // Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979). Berlin: Springer, 1981. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 122). P. 255–260.

[Manin1991a] *Manin Yu. I.* Quantum groups // Nederl. Akad. Wetensch. Verslag Afd. Natuurk. 1991. Vol. 100, № 5. P. 55–68.

[Manin1993] *Manin Yu. I.* Notes on the arithmetic of Fano threefolds // Compositio Math. 1993. Vol. 85, № 1. P. 37–55.

[KM1994] *Kontsevich M.*, *Manin Yu.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ // Comm. Math. Phys. 1994. Vol. 164, № 3. P. 525–562.

[Manin1995] *Manin Yu. I.* Gromov — Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). 1995. Astérisque. № 228. P. 121–163.

[CMZ1997] *Cohen P. B.*, *Manin Yu.*, *Zagier D.* Automorphic pseudodifferential operators // Algebraic aspects of integrable systems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. Vol. 26. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1997. P. 17–47.

[KM1997] *Кобзарев В. Ю.*, *Манин Ю. И.* Элементарные частицы. М.: Фазис, 1997.

[Manin1998] *Manin Yu. I.* Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ // Geometry of differential equations. Providence, RI: AMS, 1998. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; Vol. 186). P. 131–151.

[Manin2000] *Manin Yu. I.* Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm // Séminaire Bourbaki. Vol. 1998/99. Astérisque. 2000. № 266. Exp. No. 862. P. 375–404.

[KM2001] *Kanevsky D.*, *Manin Yu.* Composition of points and the Mordell — Weil problem for cubic surfaces // Rational points on algebraic varieties. Basel: Birkhäuser, 2001. (Progr. Math.; Vol. 199). P. 199–219.

[Manin2002] *Manin Yu. I.* Real multiplication and noncomutative geometry // Selecta Math. (N. S.). 2002. Vol. 8, № 3. P. 475–521.

[MM2002] *Manin Yu. I.*, *Marcolli M.* Continued fractions, modular symbols, and noncommutative geometry. arXiv:math/0202109v1 [math.AG], 12 Feb 2002.

[Манин2003] *Манин Ю. И.* Некоммутативная геометрия и квантовые тета-функции // Глобус. Записки математического семинара МНУ. 2004. Т. 1. С. 91–108.

[Манин2008] *Манин Ю. И.* Математика как Метафора. М.: МЦНМО, 2008.

[Manin2009] *Manin Yu. I.* Cyclotomy and analytic geometry over $\mathbb{F}_1$. arXiv: 0809.1564v2 [math.AG].

[Manin2009a] *Manin Yu. I.* Renormalization and computation I: motivation and background. arXiv:0904.4921v2 [math.QA].

[MM2011] *Manin Yu. I.*, *Marcolli M.* Error-correcting codes and phase transitions // Math. Comput. Sci. 2011. Vol. 5, № 2. P. 133–170.

[LM2009] *Luef F.*, *Manin Yu. I.* Quantum theta functions and Gabor frames for modulation spaces // Lett. Math. Phys. 2009. Vol. 88, № 1–3. P. 131–161.

[Манин2012] *Манин Ю. И.* Введение в теорию схем и квантовые группы. М.: МЦНМО, 2012.

[BM2013] *Buium A.*, *Manin Yu. I.* Arithmetic differential equations of Painlevé VI type. arXiv:1307.3841v2 [math.NT], 18 Dec 2013.

[Манин2014] *Манин Ю. И.* Закон Ципфа и вероятностные распределения Левина // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48, вып. 2. С. 51–66.

[Manin2014] *Manin Yu. I.* Forgotten motives: the varieties of scientific experience // ICCM Not. 2014. Vol. 2, № 1. P. 6–10.

[MM2014] *Manin Yu. I.*, *Marcolli M.* Big Bang, Blowup, and Modular Curves // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2014. Vol. 10. Paper 073. P. 20.

[Manin2015] *Manin Yu. I.* Neural codes and homotopy types: mathematical models of place field recognition // Mosc. Math. J. 2015. Vol. 15, № 4. P. 741–748.

[MM2020] *Manin Yu. I.*, *Marcolli M.* Quantum Statistical Mechanics of the Absolute Galois Group // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2020. Vol. 16. Paper 038. P. 52. arXiv:1907.13545.

[Manin2023] *Manin Yu. I.* Rational points of algebraic varieties: a homotopical approach // Известия РАН. Сер. Матем. 2023. Т. 87, № 3 (в печати).

[AM1972] *Artin M.*, *Mumford D.* Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. (3). 1972. Vol. 25. P. 75–95.

[B2016] *Beauville A.* The Lüroth problem // Rationality problems in algebraic geometry. Cham: Springer, 2016, (Lecture Notes in Math.; Vol. 2172). P. 1–27.

[CG1972] *Clemens H.*, *Griffiths P.* The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. of Math. (2). 1972. Vol. 95. P. 281–356.

[C1990] *Coleman R.* Manin's proof of the Mordell conjecture over function fields // Enseignement Mathematique. 1990. Vol. 36. P. 393–427.

[COGP1991] *Candelas P.*, *de la Ossa X.*, *Green P.*, *Parkes L* A pair of Calabi — Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory // Nuclear Phys. B. 1991. Vol. 359, № 1. P. 21–74.

[CCM2008] *Connes A.*, *Consani C.*, *Marcolli M.* Fun with $\mathbf{F}_1$. arXiv:0806.2401v1 [math.AG].

[DKE1999] *Deligne P.*, *Kazhdan D.*, *Etingof P. et al.* Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians (2 Volume Set). AMS, 1999.

[D2008] *Durov N.* New Approach to Arakelov Geometry. arXiv:0704.2030v1 [math.AG].

[E1912] *Enriques F.* Sopra una involuzione non razionale dello spazio // Rend. Acc. Lincei (5a). 1912. Vol. 21. P. 81–83.

[F1983] *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.

[F1908] *Fano G.* Sopra alcune variet'a algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti R. Acc. Sci. Torino. 1908. Vol. 43. P. 973–984.

[F1962] *Feferman S.* Transfinite recursive progressions of axiomatic theories // J. Symbolic Logic. 1962. Vol. 27, № 3. P. 259–316.

[G1962] *Grothendieck A.* On the DeRham Gohomology of Algebraic Varieties // Publ. Math. IHES. 1966. Vol. 29.

[G1969] *Grothendieck A.* Standard Conjectures on Algebraic Cycles // Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968). London: Oxford University Press, 1969. (Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.; Vol. 4). P. 193–199.

[G1984] *Grothendieck A.* Esquisse d'un programme // Geometric Galois actions, 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242). P. 5–48. With an English translation on pp. 243–283.

[GP2013] *Gurzadyan V. G.*, *Penrose R.* On CCC-predicted concentric low-variance circles in the CMB sky // Eur. Phys. J. 2013. Vol. 128. Article 22.

[H2017] *Haran S.* Geometry over $\mathbb{F}_1$. arXiv:1709.05831v1 [math.AG], 18 Sep 2017.

[HK2022] *D'Hoker E.*, *Kaidi J.* Lectures on modular forms and strings. arXiv:2208.07242v2 [hep-th], 18 Nov 2022.

[K1968] *Katz N. M.* On the differential equations satisfied by period matrices // Publications mathématiques de l'IHÉS. 1968. Vol. 35. P. 71–106.

[K1962] *Kent C. F.* Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 104. P. 347–362.

[L1990] *Lang S.* Mordell's review, Siegel's Ietter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics // Notices Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 42, № 3. P. 339–350.

[L1876] *Lüroth J.* Beweis eines Satzes über rationale Curven // Math. Ann. 1876. Bd. 9. S. 163–165.

[M2023] *Marcolli M.* Pierced by a sun ray. Preprint 2023.

[M2020] *Milne J. S.* Grothendieck's standard conjecture of Lefschetz type over finite fields. arXiv:2011.06563v1 [math.AG].

[M1922] *Mordell L. J.* On the rational solutions of the indeterminate equation of the third and fourth degrees // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1922. Vol. 21. P. 179–192.

[S1960] *Segre B.* Variazione continua ad omotopia in geometria algebrica // Ann. Mat. Pura ed Appl. (4). 1960. Vol. 50. P. 149–186.

[Sh2016] *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 446. С. 182–220.

[Sh2016a] *Shabat G.* On the elliptic time in the adelic gravity // Facta universitatis. Ser. Physics, Chemistry and Technology. 2016. Vol. 14, № 3. Special issue. P. 307–319.

[ShV1990] *Shabat G. B.*, *Voevodsky V. A.* Drawing Curves Over Number Fields // *Cartier P.*, *Illusie L.*, *Katz N. M.*, *Laumon G.*, *Manin Y. I.*, *Ribet K. A.* (eds.) The Grothendieck Festschrift. Progress in Mathematics. Vol 88. Boston, MA: Birkhäuser, 1990.

[Tsf2023] *Tsfasman M.* To appear in the Notices of AMS.

[Б1979] *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // Известия АН СССР. Сер. Матем. 1979. Т. 43, вып. 2. С. 267–276.

[В1989] *Вейль Г.* Давид Гильберт и его математическое творчество. М.: Наука, 1989.

[ВШ1989] *Воеводский В. А.*, *Шабат Г. Б.* Равносторонние триангуляции римановых поверхностей и кривые над числовыми полями // ДАН СССР. 1989. Т. 39, № 1. С. 38–41.

[Д1984] *Дридзе Т. М.* Текстовая деятельность в структуре социальной коммуникации. М.: Наука, 1984.

[ЗШ1973] *Захаров В. Е.*, *Шабат А. Б.* О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // ЖЭТФ. 1973. Т. 64, № 5. С. 1627–1639.

[ИШ1989] *Исковских В. А.*, *Шафаревич И. Р.* Алгебраические поверхности // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фунд. направ. Т. 35. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 131–263.

[КШ2017] *Куликов Вик. С.*, *Шабат Г. Б.* Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 22. М.: МЦНМО, 2017. С. 35–61.

[К1965] *Колмогоров А. Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. Т. 1, № 1. С. 3–11.

[ПГ1969] Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969.

[С1989] *Старостин С. А.* Сравнительно-историческое языкознание и лексико-статистика // Лингвистическая реконструкция и древнейшая история Востока. М.: Наука, 1989. С. 3–39.

[С2019] *Стюарт И.* Давид Гильберт. М.: Альпина нон-фикшн, 2019.

Георгий Борисович Шабат, Российский государственный гуманитарный университет, Москва

george.shabat@gmail.com

Наш семинар: математические сюжеты

Числа Бернулли и формальные группы

А. П. Веселов

Потому, что все оттенки смысла
Умное число передаёт.

Н. С. Гумилёв

Я расскажу о замечательных числах Бернулли и их связи с теорией формальных групп и алгебраической топологией.

§ 1. Введение: как Якоб Бернулли вычислял суммы степеней

Самое замечательное в истории математики — это как великие её представители могли видеть большое за не очень значительными на вид наблюдениями. Замечательным примером является открытие чисел Бернулли, пожалуй самых мистических чисел в математике, играющих важную роль в различных её областях от алгебры и теории чисел до анализа и алгебраической топологии.

А начиналось всё с невинного вычисления сумм степеней первых n натуральных чисел

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + \ldots + (n-1)^m.$$

Мы здесь (по французской традиции) включили 0 в натуральные числа, полагая, что $0^0 = 1$, для того чтобы у нас в сумме было n членов и чтобы было $S_0(n) = n$ (здесь важно, что Бернулли считает сумму до $(n-1)^m$ включительно).

Следующие формулы были известны в математике очень давно и могут быть доказаны, например, методом математической индукции:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n,$$
$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$
$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Последнее равенство можно переписать в замечательном виде:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 = (1 + 2 + \ldots + (n-1))^2,$$

что послужило мотивом дальнейшего изучения сумм нечётных степеней немецким учёным Иоганном Фаульхабером в книге 1631 года, одной из первых книг по алгебре, написанных на немецком языке.

Швейцарский математик Якоб Бернулли продолжил исследования Фаульхабера в 1703 году и нашёл, в частности, что

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$
$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 - \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^3 - \frac{1}{12}n^2,$$
$$S_6(n) = \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n.$$

Две закономерности легко видеть: старший коэффициент $S_m(n)$ равен $1/(m+1)$, а следующий коэффициент всегда равен $-1/2$.

Гениальное наблюдение Бернулли состоит в том, что все остальные коэффициенты легко определяются по коэффициентам в $S_m(n)$ при первой степени n, которые теперь называются *числами Бернулли* и обозначаются B_m:

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}. \tag{1}$$

Здесь $C_l^k = \dfrac{l!}{k!(l-k)!}$ — это биномиальные коэффициенты из разложения

$$(a+b)^l = \sum_{k=1}^{l} C_l^k a^k b^{l-k}.$$

Числа Бернулли однозначно определяются рекуррентно из свойства

$$S_m(1) = \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^k B_k = 0, \quad m > 0, \tag{2}$$

где $B_0 = 1$. В частности, для первых m имеем

$$2B_1 + B_0 = 0, \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \quad 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0,$$

откуда $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$. Продолжая вычисления[1)], получаем

$$B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0,$$
$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

Этих вычислений было достаточно для Бернулли, чтобы посчитать сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел $S_{10}(1000)$ «в течение половины четверти часа», чем он явно очень гордился.

Бросается в глаза, что все числа Бернулли B_k с нечётными $k > 1$ равны нулю, а знаки чисел Бернулли B_k с чётными k чередуются. Это действительно так, и мы это сейчас докажем. Однако в остальном последовательность чисел Бернулли выглядит довольно загадочно и появляется в целом ряде поистине магических связей.

§ 2. Чудеса чисел Бернулли

Нам будет удобно использовать следующую «магическую» символику, восходящую к английским математикам XIX века Джону Блиссарду и Джеймсу Джозефу Сильвестру. Запишем рекурсию чисел Бернулли (2) в символическом виде как

$$(\mathscr{B} + 1)^n = \mathscr{B}^n, \quad n > 1, \tag{3}$$

где по договорённости $\mathscr{B}^k$ следует заменить на B_k. При этом формула Бернулли (1) может быть записана как

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}((\mathscr{B} + n)^{m+1} - \mathscr{B}^{m+1}). \tag{4}$$

Часть свойств чисел Бернулли мы докажем, используя «магические» обозначения. Читателю предлагается продумать, как это соотносится с традиционным подходом.

Начнём с доказательства следующей явной формулы для экспоненциальной производящей функции чисел Бернулли:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}. \tag{5}$$

[1)] Интересно, что вычисление чисел Бернулли было целью одной из первых «компьютерных» программ, написанной в 1841 году Адой Лавлейс, дочерью Байрона и ученицей Бэббиджа. В честь неё назван один из языков программирования.

Для этого нам надо доказать равенство рядов

$$(e^z - 1)\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \equiv z.$$

Заметим, что, используя нашу символику, мы можем записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{B}^n \frac{z^n}{n!} = e^{\mathscr{B}z},$$

так что наше равенство можно переписать как

$$(e^z - 1)e^{\mathscr{B}z} = e^{(\mathscr{B}+1)z} - e^{\mathscr{B}z} = \sum_{n=1}^{\infty}[(\mathscr{B}+1)^n - \mathscr{B}^n]\frac{z^n}{n!} \equiv z,$$

что верно в силу (3), так как единственный ненулевой коэффициент (при z) равен 1.

Соотношение (5) часто используется как определение чисел Бернулли. Воспользуемся им для доказательства того, что B_{2k+1} при $k > 0$ равны нулю.

Для этого добавим к нашей производящей функции линейный член $z/2 = -B_1 z$:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z(e^z+1)}{2(e^z-1)} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} = \frac{z}{2}\operatorname{cth}\frac{z}{2}. \tag{6}$$

Поскольку эта функция чётная, все её нечётные коэффициенты равны нулю.

По этой причине иногда числами Бернулли называют только чётные коэффициенты, забывая про нули и B_1. Мне это очень не нравится (особенно игнорирование важного коэффициента $B_1 = -1/2$), и мы так делать не будем.

Докажем теперь формулу Бернулли (1). Для этого введём, используя нашу символику, классические *многочлены Бернулли* $B_m(x)$ как

$$B_m(x) := (\mathscr{B} + x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k B_k x^{m-k}, \quad m \geqslant 0. \tag{7}$$

Их свободные члены — это числа Бернулли: $B_n(0) = B_n$.

Экспоненциальная производящая функция многочленов Бернулли имеет вид

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!}. \tag{8}$$

В самом деле,

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=e^{\mathscr{B}z}e^{xz}=e^{(\mathscr{B}+x)z}=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathscr{B}+x)^n\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Многочлены Бернулли обладают следующими двумя замечательными свойствами: разностная производная

$$B_m(x+1)-B_m(x)=mx^{m-1} \tag{9}$$

совпадает с обычной производной степенной функции x^m, а обычная производная удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dx}B_m(x)=mB_{m-1}(x), \tag{10}$$

которое аналогично свойству степенной функции.

Первое свойство проще всего увидеть, используя производящую функцию (8):

$$\frac{ze^{(x+1)z}}{e^z-1}-\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\frac{ze^{xz}(e^z-1)}{e^z-1}=ze^{xz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nz^{n+1}}{n!}=\sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1}\frac{z^m}{m!}.$$

Второе свойство следует прямо из определения (7).

Нетрудно доказать также свойство симметрии многочленов Бернулли:

$$B_m(1-x)=(-1)^mB_m(x), \tag{11}$$

из которого следует, в частности, что $B_m(1)=(-1)^mB_m$.

Докажем теперь, что суммы степеней можно выразить через многочлены Бернулли как

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n)-B_{m+1}). \tag{12}$$

Действительно, по определению $S_m(n)$ и свойству многочленов Бернулли (9) получаем

$$S_m(n+1)-S_m(n)=n^m=\frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n+1)-B_{m+1}(n)).$$

Это означает, что

$$S_m(n)=\frac{B_{m+1}(n)}{m+1}+C_m,$$

где константа C_m находится из условия $S_m(1)=0$, дающего $C_m=-\frac{B_{m+1}}{m+1}$. Так как

$$B_{m+1}(x)=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^kB_kx^{m+1-k},$$

это доказывает и формулу Бернулли (1).

Расскажем теперь о других поистине мистических проявлениях чисел Бернулли.

2.1. Формулы Эйлера — Маклорена и Стирлинга

Начнём с замечательного открытия Леонарда Эйлера и его современника шотландского математика Колина Маклорена, что те же самые числа Бернулли появляются при суммировании значений любой (достаточно хорошей) функции! Более точно, имеет место следующая *формула суммирования Эйлера — Маклорена*

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{N} \frac{B_k}{k!}\left(f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right) + R_N, \qquad (13)$$

где $f^{(k)}(x)$ — это k-я производная функции $f(x)$, B_k — числа Бернулли, а остаток имеет вид

$$R_N = \frac{(-1)^{N+1}}{N!} \int_a^b B_N(x-[x]) f^{(N)}(x)\,dx,$$

где $B_k(x)$ — многочлены Бернулли, а $[x]$ обозначает целую часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.

Если мы применим эту формулу к функции $f(x) = x^m$ при $a = 0$, $b = n$, $N = m+1$, то, поскольку $(m+1)$-я производная x^m равна тождественно нулю, мы имеем $R_N = 0$ и как следствие формулу Бернулли (1).

Применим теперь формулу Эйлера — Маклорена к натуральному логарифму $f(x) = \ln x$ при $a = 1$, $b = n$, $N = 1$. Так как неопределённый интеграл $\int \ln x\,dx$ равен $x\ln x - x + C$, имеем

$$\int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1,$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = n\ln n - n + 1 - \frac{1}{2}\ln n + R_1(n),$$

где мы использовали, что $B_1 = -1/2$. Добавляя член $\ln n$ к обеим частям, получаем, что

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + 1 + \frac{1}{2}\ln n + R_1(n), \quad n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{R_1(n)+1}.$$

Можно показать[2)] (см. например, [3, с. 521–529]), что

$$\lim_{n\to\infty} e^{R_1(n)+1} = \sqrt{2\pi},$$

[2)] Интересно, что Стирлинг не знал точного значения этого предела ещё несколько лет после его вычисления де Муавром [3, с. 521].

что приводит к одной из самых замечательных формул в математике — *формуле Стирлинга*, ещё одного шотландского математика XVIII века:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{14}$$

Здесь символ $\sim$ означает, что предел отношения левой и правой частей стремится к 1, когда n стремится к бесконечности. Сочетание чисел e, π с алгебраическим квадратным корнем объединяет в этой формуле анализ, геометрию и алгебру. Заметим, что квадратный корень из n происходит здесь из первого числа Бернулли!

2.2. Базельская проблема и значения дзета-функции

Поистине чудесным образом числа Бернулли появились и при решении Эйлером следующей знаменитой *Базельской проблемы*. Якоб Бернулли привлёк внимание к этой проблеме в 1698 году, не зная о более ранней работе 1650 года итальянского математика Пьетро Менголи, также содержащей этот вопрос. Проблема состоит в том, чтобы найти «в явном виде» сумму обратных квадратов всех натуральных чисел, т. е. в вычислении бесконечной суммы

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots$$

Проблема в частности предполагает, что такой явный вид возможен. И действительно, Эйлер показал, что это так, доказав, что

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Более того, Эйлер вычислил значения *дзета-функции*

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

при всех целых чётных $s = 2m$, получив замечательную формулу

$$\zeta(2m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} B_{2m} \pi^{2m}, \tag{15}$$

где B_{2m} — числа Бернулли! Узнав об этом замечательном открытии, учитель Эйлера Иоганн Бернулли сокрушался: «Вот если бы брат был жив…».

Гениальная идея Эйлера состояла в использовании следующего разложения котангенса $\operatorname{ctg} z$ на простые дроби по полюсам $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

А теперь вспомним формулу (6), из которой следует, что

$$z \operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k}. \tag{16}$$

Сравнение двух последних формул даёт формулу Эйлера для значений дзета-функции (15) (проверьте!). Так как они очевидно положительны, мы, в частности, получаем доказательство чередуемости знаков чисел B_{2k}. А используя формулу Стирлинга, мы получаем асимптотику чисел Бернулли при больших k :

$$|B_{2k}| \sim 4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k},$$

откуда видно, что они растут супер-экспоненциально!

Интересно, что про значения дзета-функции в нечётных натуральных числах практически ничего не известно, так что если бы Бернулли спросил, чему равна сумма

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \ldots,$$

мы бы до сих пор не знали ответа… Гении знали, что спрашивать!

2.3. Арифметика чисел Бернулли

Уже числа

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

выглядят достаточно загадочно. Оказывается, что знаменатели чисел Бернулли $B_{2m} = p_{2m}/q_{2m}$ допускают следующее явное описание:

$$q_{2m} = \prod_{p-1|2m} p, \tag{17}$$

где справа стоит произведение по простым числам p, таким что $p-1$ делит $2m$. В частности, для $2m = 10$ имеем произведение $2 \times 3 \times 11 = 66$, а для $2m = 12$ — произведение $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2730$.

Это вытекает из замечательной теоремы, доказанной в 1840 году независимо немецким математиком Карлом фон Штаудтом и датским математиком Томасом Клаузеном. Она утверждает, что сумма

$$B_{2m} + \sum_{p-1|2m} \frac{1}{p}$$

является целым числом (см. например, [4, с. 279–284]). В частности, для $2m = 10$ и $2m = 12$

$$\frac{5}{66} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} = 1, \quad -\frac{691}{2730} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} = 1.$$

Все эти чудеса чисел Бернулли являются классическими и хорошо известны.

Я хочу теперь объяснить, как числа Бернулли естественно возникают в теории формальных групп, что проясняет их природу, а также их важную роль в алгебраической топологии.

§ 3. Формальные группы

Напомним, что *группой* называется множество G с операцией умножения: $x, y \to x * y \in G$, для которой выполнены следующие условия:

- *Ассоциативность*: для любых трёх элементов $x, y, z \in G$
$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$
- *Существование единицы* e: для любого элемента $x \in G$
$$e * x = x * e = x.$$
- *Существование обратного*: для любого элемента $x \in G$ существует $x^{-1} \in G$, такой что
$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

Если при этом ещё $x * y = y * x$ для всех $x, y \in G$, то группа называется *коммутативной*.

Мы будем рассматривать *формальные коммутативные группы* с законом умножения
$$x * y = F(x, y) = x + y + \sum_{i,j>0} a_{ij} x^i y^j, \tag{18}$$
где x, y и коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ будем для начала считать вещественными числами. Ряд здесь является формальным, т. е. никакой сходимости не предполагается, отсюда и название группы. Легко видеть, что 0 является единицей в такой группе, наличие обратного следует из общей теории формальных рядов. Основное свойство здесь ассоциативность, понимаемая как равенство формальных рядов
$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)). \tag{19}$$
Теория таких групп была инициирована Нильсом Хенриком Абелем в 1826 году, который в частности показал, что ассоциативность влечёт в этом случае коммутативность.

Вот примеры таких законов умножения (проверьте условие ассоциативности!):
$$\text{(I)} \quad x * y = F_a := x + y + axy, \tag{20}$$
$$\text{(II)} \quad x * y = F_{a,b} := \frac{x + y + axy}{1 - bxy}. \tag{21}$$

Заметим, что этих примерах закон умножения не только формальный и задаёт операцию для всех (например, вещественных) чисел x, y в первом случае и для $bxy \neq 1$ во втором.

Покажем, что примеры (20) исчерпывают все полиномиальные формальные законы умножения вида

$$F(x, y) = x + y + \sum_{0<i,j\leqslant N} a_{ij} x^i y^j.$$

В самом деле, степень по z левой части соотношения ассоциативности (19) равна N, в то время как степень по z правой части равна N^2. Отсюда следует, что $N = 1$ и закон умножения имеет вид (20).

Можно показать также (см. например [2]), что примеры (21) исчерпывают все рациональные формальные законы умножения вида

$$F(x, y) = \frac{x + y + \sum\limits_{0<i,j\leqslant N} a_{ij} x^i y^j}{1 + \sum\limits_{0<i,j\leqslant M} b_{ij} x^i y^j}.$$

Определим *логарифм* формальной группы (18) как формальный ряд

$$\log_F(t) = t + \sum_{j>1} b_j t^i,$$

такой что

$$\log_F(x * y) = \log_F(F(x, y)) = \log_F(x) + \log_F(y). \tag{22}$$

Следуя Абелю [1], докажем, что логарифм формальной группы существует и единственен.

Введём формальный ряд

$$f(y) := \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 1 + \sum_{j>0} a_{1j} y^j.$$

Дифференцируя (22) по x и полагая $x = 0$, имеем

$$f(y) \log_F'(y) = \log_F'(0) = 1,$$

откуда

$$\log_F(y) = \int_0^y \frac{dt}{f(t)}. \tag{23}$$

Обратно, зададим $\log_F(y) =$ формулой (23) и докажем условие (22). При $x = 0$ оно очевидно выполняется. Докажем теперь, что производ-

ные по x обеих частей (22) совпадают, т. е.

$$\log_F'(F(x,y))\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \log_F'(x),$$

или, с учётом (23),

$$f(x)\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = f(F(x,y)). \tag{24}$$

Воспользуемся свойством ассоциативности $F(F(t,x),y) = F(t,F(x,y))$. Дифференцируя это равенство по t и полагая $t=0$, получаем (24), что и требовалось доказать.

Продемонстрируем это на примере $F(x,y) = x+y+axy$:

$$f(y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 1+ay,$$

что даёт соответствующий логарифм

$$\log_F(y) = \int\limits_0^y \frac{dt}{1+at} = \frac{1}{a}\ln(1+at) = \sum_{j\geqslant 0}\frac{a^j}{j+1}y^{j+1}. \tag{25}$$

Определим теперь *экспоненту* формальной группы (18) как формальный ряд $\exp_F(u) = u+\ldots$, обратный к логарифму:

$$\exp_F(\log_F(t)) \equiv t, \quad \log_F(\exp_F(u)) \equiv u.$$

Экспонента обладает следующим характеристическим свойством:

$$\exp_F(u+v) = F(\exp_F(u), \exp_F(v)). \tag{26}$$

В предыдущем примере

$$\exp_F(u) = \frac{e^{au}-1}{a} = \sum_{j\geqslant 0}\frac{a^j}{(j+1)!}y^{j+1}. \tag{27}$$

Обратите внимание на появление факториала в знаменателе экспоненты; это важное отличие экспоненты от логарифма как формального ряда.

Ещё один поучительный пример рациональной группы с $a=0$, $b=1$:

$$F = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Экспонентой в этом случае является $\exp_F(u) = \operatorname{tg} u$, который как известно удовлетворяет теореме сложения

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1-\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Соответственно, логарифмом является

$$\log_F(t) = \operatorname{arctg} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} t^{2n-1}.$$

А вот какой формальный ряд у обратной функции — тангенса, знают немногие:

$$\operatorname{tg} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n (1-4^n)}{(2n)!} B_{2n} u^{2n-1}, \tag{28}$$

где B_{2n} — числа Бернулли! Для доказательства воспользуемся следующей формулой:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{ctg} u - 2 \operatorname{ctg} 2u,$$

вытекающей из формулы удвоения для котангенса

$$\operatorname{ctg} 2u = \frac{\operatorname{ctg}^2 u - 1}{2 \operatorname{ctg} u} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} u - \frac{1}{2 \operatorname{ctg} u}.$$

Теперь формула (28) следует из уже известной нам формулы (16). Это ещё одно замечательное свойство чисел Бернулли, определяющих степенные ряды как самой функции, так и её обратной (по умножению).

Приведём теперь явную формулу для экспоненты в общем случае рациональной группы с произвольными параметрами a и b.

Пусть λ_1, λ_2 — (вообще говоря, комплексные) корни квадратного уравнения $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$, $D := a^2 - 4b$ — дискриминант этого уравнения, $\mu := \sqrt{D}$, так что $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \mu)$. Тогда в предположении, что $D \neq 0$, нетрудно показать, что экспонента формальной группы (21) задаётся формулой

$$\exp_{a,b}(u) := \frac{e^{\lambda_1 u} - e^{\lambda_2 u}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 u} - \lambda_2 e^{\lambda_1 u}} = \frac{e^{\mu u} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2 e^{\mu u}}. \tag{29}$$

В частности, для $a = 0$, $b = 1$ получаем $\mu = 2i$, $\lambda_{1,2} = \pm i$ и экспоненту

$$\frac{1}{i} \frac{e^{2iu} - 1}{1 + e^{2iu}} = \frac{1}{i} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = \operatorname{tg} u.$$

В случае, когда $D = a^2 - 4b = 0$, экспонента имеет простой вид

$$\exp_F(u) = \frac{u}{1 - \frac{a}{2} u}. \tag{30}$$

В частности, для формальной группы с законом умножения

$$x * y = \frac{x + y - 2xy}{1 - xy} \tag{31}$$

получаем $\exp_F(u) = u/(1+u)$.

§ 4. Роды Хирцебруха в топологии и числа Бернулли

Назовём *рядом Хирцебруха* формальной группы (18) ряд

$$h_F(u) = \frac{u}{\exp_F(u)}. \tag{32}$$

Любой формальный ряд

$$h(u) = 1 + \sum_{j>0} h_j u^j$$

определяет топологическую характеристику $\chi_h(M^{2n})$ комплексного многообразия M^{2n}, называемую *родом Хирцебруха*.

В 1950-х годах немецкий математик Фридрих Хирцебрух сделал замечательное открытие, что роды, отвечающие некоторым специальным рядам, играют очень важную роль в топологии и алгебраической геометрии [5].

Для читателей, знакомых с теорией характеристических классов из алгебраической топологии [6], роды Хирцебруха [5] задаются интегралом

$$\chi_h(M^{2n}) = \int\limits_{M^{2n}} \prod_{j=1}^{n} h(t_j), \tag{33}$$

где t_j определяются равенством

$$c(M^{2n}) = \prod_{j=1}^{n} (1 + t_j),$$

а $c(M^{2n}) = 1 + c_1(M^{2n}) + \ldots + c_n(M^{2n})$ — полный класс Черна касательного расслоения M^{2n}. Для остальных скажем, что это даёт далеко идущее обобщение *эйлеровой характеристики* многообразия, определяемой в случае поверхности M^2 как

$$\chi(M^2) = V - E + F,$$

где V, E, F — числа вершин, рёбер и треугольников для некоторого разбиения поверхности. То, что это число не зависит от выбора разбиения (при некоторых условиях простоты на области) и тем самым определяет топологическую характеристику поверхности, является замечательным результатом Эйлера, положившим начало топологии как области математики. Он обычно формулируется для выпуклых многогранников в виде

$$V - E + F = 2,$$

где V, E, F — числа вершин, рёбер и граней многогранника. Это означает, что эйлерова характеристика двумерной сферы равна 2.

Формулы Хирцебруха можно рассматривать как далеко идущие обобщения формулы Гаусса — Бонне из дифференциальной геометрии поверхностей

$$\int\limits_{M^2} K\, d\sigma = 2\pi\chi(M^2),$$

выражающей интеграл от гауссовой кривизны K поверхности через её эйлерову характеристику.

С точки зрения теории формальных групп, специальные роды Хирцебруха отвечают рядам Хирцебруха рациональных формальных групп. Посмотрим повнимательнее на соответствующие ряды в случае, когда $D \neq 0$:

$$h_{a,b}(u) := \frac{u}{\exp_{a,b}}(u) = \frac{u(\lambda_1 - \lambda_2 e^{\mu u})}{e^{\mu u} - 1} = -\lambda_2 u + \frac{\mu u}{e^{\mu u} - 1}.$$

Мы видим, что за исключением линейного члена всё сводится к разложению в ряд Тэйлора функции

$$\beta(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Мы видим также особую роль первого коэффициента в формуле для ряда Хирцебруха, которую можно теперь записать как

$$h_{a,b}(u) = -\lambda_2 u + \frac{\mu u}{e^{\mu u} - 1} = -\lambda_2 u + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n B_n \frac{u^n}{n!} \tag{34}$$

или, используя нашу символику, как

$$h_{a,b}(u) = -\lambda_2 u + e^{\mu \mathscr{B} u}.$$

Это объясняет загадочное появление чисел Бернулли во многих формулах в алгебраической топологии, в частности, для так называемой сигнатуры и рода Тодда алгебраических многообразий [5].

Эйлерова характеристика отвечает вырожденному случаю закона умножения (31) с нулевым дискриминантом, когда ряд Хирцебруха обрывается на первом члене: $h_F(u) = 1 + u$, так что здесь числа Бернулли не видны.

А вот род Тодда, появляющийся в фундаментальной теореме Римана — Роха — Хирцебруха и формуле Атьи — Зингера для индекса, отвечает полиномиальной формальной группе с законом умножения

$$x * y = F(x, y) = x + y - xy$$

и рядом Хирцебруха

$$h_F(u) = \frac{u}{1 - e^{-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{u^n}{n!} = u + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{u^n}{n!}.$$

В классической формуле Хирцебруха [5] для сигнатуры многообразий появляется L-род, отвечающий закону умножения

$$x * y = F(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy},$$

который задаёт закон сложения для гиперболического тангенса, и ряду Хирцебруха

$$h_F(u) = \frac{u}{\operatorname{th} u} = u \operatorname{cth} u = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n} B_{2n} \frac{u^{2n}}{(2n)!}$$

(см. выше формулу (6)).

Наконец, самый общий рациональный закон умножения

$$x * y = F_{a,b} := \frac{x + y + axy}{1 - bxy}$$

отвечает знаменитому χ_y-роду Хирцебруха [5].

А именно, следуя Хирцебруху, положим без ограничения общности в формуле (34) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = y$ и получим ряд Хирцебруха

$$h_y(u) = \frac{u(1 + ye^{-u(1+y)})}{1 - e^{-u(1+y)}} = -yu + \frac{u(y+1)}{1 - e^{-u(1+y)}} = -yu + \sum_{n=0}^{\infty} (y+1)^n B_n \frac{u^n}{n!},$$

что отвечает в обозначениях Хирцебруха функции $Q(y; u)$ (см. [5, с. 29]). Соответствующий χ_y-род задает альтернированные суммы чисел Ходжа алгебраических многообразий и является мощным средством для их вычисления. Род Тодда и L-род являются частными случаями, отвечающими $y = 0$ и $y = 1$.

В заключение скажем, что важная роль формальных групп в алгебраической топологии (и, в частности, в теории комплексных кобордизмов), впервые была прояснена в работах С. П. Новикова и его школы [7], но обсуждение этой глубокой связи выходит далеко за пределы нашей статьи.

Список литературы

[1] *Abel N. H.* Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y // Crelle's Journal, 1826. OEuvres completes, I. Christiania (1881). P. 61–65.

[2] *Coleman R. F.*, *McGuinness F. O.* Rational formal group laws // Pacific Journal of Mathematics. 1991. Vol. 147, № 1. P. 25–27.

[3] *Кнут Д.*, *Грэхем Р.*, *Паташник О.* Конкретная математика. Основания информатики. М.: Бином, 2009.

[4] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: ГИФМЛ, 1959.

[5] *Хирцебрух Ф.* Топологические методы в алгебраической геометрии. М.: Мир, 1973.

[6] *Милнор Дж.*, *Сташеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.

[7] *Бухштабер В. М.*, *Мищенко А. С.*, *Новиков С. П.* Формальные группы и их роль в аппарате алгебраической топологии // УМН. 1971. Т. 26, вып. 2. С. 131–154.

Александр Петрович Веселов, Loughborough University,
Лафборо, Великобритания

A.P.Veselov@lboro.ac.uk

Об уравнении Эйлера $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ и тройках Рамануджана

Н. Н. Осипов, А. В. Савватеев

Когда сумма трех кубов целых чисел может оказаться равной единице? В статье рассказывается об экспоненциальных тройках (x_n, y_n, z_n) С. Рамануджана и других бесконечных сериях целочисленных решений уравнения Л. Эйлера $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, уже полиномиального типа, впервые найденных К. Малером и позднее обобщенных Д. Лемером.

Введение

Как известно, никакой куб целого числа нельзя нетривиальным образом представить в виде суммы двух таких кубов (это частный случай хорошо известной *великой теоремы Ферма*). А что будет, если брать суммы трех кубов целых чисел? Здесь уже есть нетривиальные примеры типа неожиданного равенства

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3, \tag{0.1}$$

обнаруженного Л. Эйлером (1770). Более того, таких примеров даже бесконечно много. Ясно, что задача описания всех равенств

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3$$

с целыми числами a, b, c, d эквивалентна решению диофантова уравнения (называемого далее *уравнением Эйлера*)

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

в рациональных числах. Обычно диофантовы уравнения с тремя и более неизвестными решаются с большим трудом (а чаще вообще никак

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075–02–2024–1429).

А. В. Савватеев выражает исключительную признательность Кавказскому математическому центру Адыгейского государственного университета за финансовую поддержку во время работы над статьей.

не решаются), однако в случае уравнения Эйлера есть сравнительно простой способ найти все тройки (x, y, z) рациональных чисел, которые ему удовлетворяют. Таких троек существует целое бесконечное семейство, которое можно описать несложными формулами с двумя свободными параметрами (см. ниже предложение 4).

Уравнение Эйлера можно также решать в целых числах, но здесь ответ уже не записывается в столь простой явной форме.

Это явление хорошо известно в теории диофантовых уравнений: если уравнение удается решить в рациональных числах и решений оказывается бесконечно много, то выискивать среди них все решения в целых числах зачастую не проще, чем непосредственно решать исходное уравнение в целых числах. Вот пример, на котором данное явление можно прочувствовать. Все рациональные точки кривой $x^3 - x^2y - y^3 - xy = 0$ описываются формулами

$$x = -\frac{t}{t^3+t-1}, \quad y = -\frac{t^2}{t^3+t-1}, \tag{0.2}$$

где t — произвольное рациональное число (это простой и элементарно доказываемый факт). В то же время, целые точки данной кривой — это только $(x, y) \in \{(-1, -1), (0, 0), (18, 12)\}$, но попытка отыскать их по формулам (0.2) приведет к необходимости решать так называемые *уравнения Туэ* (см., например, [5, гл. IV]), элементарные методы решения которых неизвестны.

Тем не менее, можно относительно легко предъявить однопараметрическое семейство решений (3.6) полиномиального типа, впервые обнаруженное К. Малером (см. [16]). Позднее Д. Лемер [15] привел и другие примеры полиномиальных семейств решений, которых оказалось даже бесконечно много. Более того, Лемер указал простой способ, с помощью которого можно получать однопараметрические семейства решений в целых числах, однако зависимость от параметра в этих семействах является уже экспоненциальной. Следует отметить, что задолго до Лемера пример такого экспоненциального семейства решений, причем в довольно экзотической форме, обнаружил С. Рамануджан (см. с. 341 в книге [21]).

В настоящей статье мы хотим подробно рассказать об этих результатах про уравнение Эйлера (и вокруг него), к исследованию которого причастны многие выдающиеся математики. Кроме того, мы дополним результат Лемера, касающийся однопараметрических семейств решений полиномиального типа, а также укажем на одну небольшую неточность в его статье [15]. Эту неточность удалось обнаружить благодаря современным средствам символьных вычислений, которые мы

задействовали для проверки корректности решения некоторых сопутствующих диофантовых уравнений 2-й степени с двумя неизвестными, упоминаемых в статье Лемера. В наше время подобная практика — применять для разного рода вычислений *системы компьютерной алгебры* — кажется совершенно естественной, но во времена Малера и Лемера (первая половина XX века) это было невозможно.

Попутно мы рассматриваем некоторое семейство кубических кривых, связанное с уравнением Эйлера (см. § 2, формула (2.1)). Представленные здесь результаты (относящиеся скорее к элементарной алгебраической геометрии, чем к диофантовым уравнениям) почти не связаны с остальными результатами, излагаемыми в статье, но могут быть интересны сами по себе. Идея рассмотреть подобное семейство кривых возникла при изучении специальной эллиптической кривой, заданной уравнением

$$a^3+b^3+c^3=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 \tag{0.3}$$

в однородных координатах $[a:b:c]$.

Кривая (0.3) содержит точку $[3:4:5]$ (что сразу следует из равенства Эйлера (0.1)), а также бесконечно много других рациональных точек.

Вот набросок элементарного доказательства последнего утверждения (пример подобного, но более детализированного рассуждения читатель может найти, например, в статье [19]). Положим $c=1$ и сделаем замену $a=(u+v)/2$, $b=(u-v)/2$. Тогда кривая (0.3) запишется в виде

$$u^3+6uv^2-3u^2-3u+7=0. \tag{0.4}$$

Стартуя с точки $(u_0,v_0)=(7/5,-1/5)$, лежащей на кривой (0.4), определим последовательность точек (u_j,v_j) рекуррентной формулой $(u_{j+1},v_{j+1})=$ $=\Phi(u_j,v_j)$, где

$$\Phi(u,v)=\left(\frac{4u(u^3-3u^2-3u+7)}{3u^4-8u^3+6u^2+7},\frac{u^6+30u^5-105u^4+140u^3-105u^2-42u+49}{12uv(3u^4-8u^3+6u^2+7)}\right).$$

Эта громоздкая формула имеет простой геометрический смысл: если точка (u,v) принадлежит кривой (0.4), то $\Phi(u,v)$ — это вторая точка пересечения касательной, проведенной к этой кривой в точке (u,v), с этой же кривой. В частности, все точки (u_j,v_j) оказываются лежащими на кривой (0.4). Далее можно показать, что все эти точки попарно различны (ввиду того, что знаменатели рациональных чисел u_j в несократимом представлении строго возрастают).

Поскольку при изложении основных результатов статьи мы часто будем апеллировать к теории уравнений Пелля (и, вообще, теории

диофантовых уравнений 2-й степени с двумя неизвестными), для удобства читателя в § 1 приводятся необходимые для дальнейшего факты из этой теории. Более подробное изложение можно найти, например, в книге [8] (см. также небольшое по объему, но довольно содержательное учебное пособие [7] или главу «Уравнения Пелля» в книге [4]).

§ 1. Об уравнениях Пелля

Обычно под *уравнением Пелля* подразумевают уравнение вида

$$x^2 - Ay^2 = 1, \tag{1.1}$$

где A — натуральное число, не являющееся точным квадратом. Мы же этот термин будем использовать для уравнений более общего вида

$$x^2 - Ay^2 = B, \tag{1.2}$$

где $B \neq 0$ — целое число, а уравнение (1.1) при этом называть *классическим уравнением Пелля*.

Можно, конечно, задаться вопросом, как быть с уравнением (1.2) в случае, когда A является точным квадратом. Но это легкий вопрос: ввиду того, что левая часть уравнения в этом случае разлагается на множители с целыми коэффициентами, он сводится к нахождению всех делителей числа $B \neq 0$. В частности, множество решений всегда будет конечным.

Решая уравнение Пелля в целых числах, удобно под решением понимать не только пару (x, y) целых чисел, удовлетворяющих уравнению (1.2), но и одно вещественное число $x + y\sqrt{A}$ (такое соответствие взаимно однозначно из-за иррациональности $\sqrt{A}$). Теория уравнений Пелля базируется на следующей фундаментальной связи между уравнением (1.2) и *ассоциированным* с ним (т. е. с тем же коэффициентом A) уравнением (1.1): если $x + y\sqrt{A}$ — некоторое решение уравнения (1.2), $x_0 + y_0\sqrt{A}$ — одно из решений уравнения (1.1), то их произведение

$$(x + y\sqrt{A})(x_0 + y_0\sqrt{A}) = (xx_0 + Ayy_0) + (xy_0 + yx_0)\sqrt{A}$$

будет еще одним решением уравнения (1.2).

Другой фундаментальный факт теории относится к классическим уравнениям Пелля (1.1): все они нетривиально разрешимы, т. е. имеют решения, отличные от $(\pm 1, 0)$. Далее через

$$\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{A} \tag{1.3}$$

мы будем обозначать *минимальное* (с наименьшими натуральными x_0, y_0) решение этого уравнения. Все решения уравнения (1.1) можно

описать простой формулой

$$x+y\sqrt{A}=\pm\varepsilon^n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

В частности, уравнение (1.1) имеет бесконечно много решений в целых числах. Как следствие, любое частное решение $X+Y\sqrt{A}$ уравнения Пелля (1.2) может быть «размножено» до бесконечной серии решений вида

$$x+y\sqrt{A}=\pm(X+Y\sqrt{A})\varepsilon^n, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Множество решений уравнения (1.2) в целых числах описывается более сложным образом: оно состоит, вообще говоря, из нескольких бесконечных серий решений типа (1.4), а именно:

$$x+y\sqrt{A}=\pm(X_j+Y_j\sqrt{A})\varepsilon^n, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Здесь $X_j+Y_j\sqrt{A}$ — так называемые *базисные решения* уравнения (1.2), ε — минимальное решение (1.3) ассоциированного уравнения (1.1). Еще один фундаментальный факт теории утверждает, что множество базисных решений всегда конечно (быть может, пусто).

Формально базисное решение $X+Y\sqrt{A}$ уравнения (1.2) можно определить как удовлетворяющее двойному неравенству

$$q\leqslant X+Y\sqrt{A}<q\varepsilon,$$

где $q>0$ — некоторое фиксированное число. Теоретически q можно брать произвольным (например, в книге [4] взято $q=1$), но для поиска базисных решений методом brute force оптимальным оказывается выбор $q=q_{\mathrm{opt}}$, где

$$q_{\mathrm{opt}}=\sqrt{\frac{|B|}{\varepsilon}}.$$

При $q=q_{\mathrm{opt}}$ базисные решения $X+Y\sqrt{A}$ можно найти из следующих явных условий (см., например, [8, разд. 4.4.5]):

1) если $B>0$, то

$$-\sqrt{\frac{B(x_0-1)}{2A}}\leqslant Y<\sqrt{\frac{B(x_0-1)}{2A}}, \quad X=\sqrt{AY^2+B};$$

2) если $B<0$, то

$$\sqrt{\frac{|B|}{A}}\leqslant Y<\sqrt{\frac{|B|(x_0+1)}{2A}}, \quad X=\pm\sqrt{AY^2+B},$$

а также

$$Y=\sqrt{\frac{|B|(x_0+1)}{2A}}, \quad X=-\sqrt{AY^2+B}.$$

Можно показать, что если $q \neq q_{\text{opt}}$, то интервал перебора для Y будет шире, чем в случае $q = q_{\text{opt}}$.

Очевидно, если $|B|$ или x_0 велики, то такой переборный метод поиска базисных решений практически нереализуем.

Следует отметить, что минимальное решение $\varepsilon = x_0 + y_0\sqrt{A}$ классического уравнение Пелля (1.1) может оказаться довольно большим даже в случае небольшого A. Так, например, при $A = 61$ имеем

$$\varepsilon = 1766319049 + 226153980\sqrt{61}.$$

Более общий пример: если $A = 5^{2k-1}$, то

$$\varepsilon = (9 + 4\sqrt{5})^{5^{k-1}},$$

где k — любое натуральное число (читателю предлагается доказать в качестве упражнения).

Тем не менее, техника базисных решений может оказаться полезной при исследовании *параметрических* уравнений Пелля (когда коэффициенты A и B зависят от параметра d, пробегающего бесконечный ряд значений). Приведем один иллюстрирующий пример.

Пример 1. Докажем, что при любом целом $d \geqslant 2$ уравнение Пелля

$$x^2 - (d^2 + 2)y^2 = -3 \tag{1.6}$$

неразрешимо в целых числах x, y.

Здесь важно, что для минимального решения (x_0, y_0) ассоциированного классического уравнения Пелля есть простая формула при любом $d \geqslant 1$, а именно,

$$(x_0, y_0) = (d^2 + 1, d),$$

при этом x_0 не слишком сильно растет с ростом d.

Нетрудно убедиться, что пара $(d^2 + 1, d)$ является решением соответствующего классического уравнения Пелля. Предположим, что оно не минимально, т. е. $(x_0, y_0) \neq (d^2 + 1, d)$. Тогда

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2 + 2} = \left(x_0 + y_0\sqrt{d^2 + 2}\right)^n$$

для некоторого целого $n \geqslant 2$. Имеем

$$y_0 \geqslant 1 \quad \text{и} \quad x_0 = \sqrt{(d^2 + 2)y_0^2 + 1} \geqslant \sqrt{d^2 + 3} > d,$$

так что

$$d^2 + 1 + d\sqrt{d^2 + 2} = \left(x_0 + y_0\sqrt{d^2 + 2}\right)^n \geqslant \left(x_0 + y_0\sqrt{d^2 + 2}\right)^2 > \left(d + \sqrt{d^2 + 2}\right)^2.$$

Но неравенство

$$d^2+1+d\sqrt{d^2+2} > \left(d+\sqrt{d^2+2}\right)^2$$

невозможно ни при каком $d \geqslant 1$.

Теперь для базисных решений $X+Y\sqrt{d^2+2}$ уравнения (1.6) имеем

$$0 < Y \leqslant \sqrt{\frac{|B|(x_0+1)}{2A}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

откуда находим единственное возможное значение $Y=1$. Но тогда

$$X^2 = (d^2+2)Y^2 - 3 = d^2-1,$$

и видно, что при $d \geqslant 2$ такого целого X не существует. Следовательно, базисных решений нет, а значит, уравнение (1.6) неразрешимо при любом $d \geqslant 2$.

Для контраста приведем также пример параметрического уравнения Пелля, когда подобные рассуждения будут безуспешны:

$$x^2-(d^2+d)y^2 = d^3+2d+2$$

(найдено по ссылке [27]). Здесь $x_0 = 2d+1$ (что лучше, чем в примере 1), однако правая часть $B = d^3+2d+2$ слишком сильно растет с ростом d, что не позволяет ограничить Y равномерно по d. Очевидно, таких примеров можно привести много.

В заключение скажем несколько слов о решении общего уравнения 2-й степени

$$au^2+buv+cv^2+du+ev+f=0 \tag{1.7}$$

с двумя неизвестными u, v в целых числах. С теоретической точки зрения наиболее интересен случай, когда уравнение (1.7) геометрически задает *гиперболу*, причем число $A=b^2-4ac>0$ (дискриминант квадратичной формы в левой части (1.7)) не является точным квадратом.

Во всех остальных случаях (когда уравнение (1.7) задает эллипс или параболу, а также когда оно задает гиперболу, но дискриминант A есть точный квадрат) исследование будет проще в том смысле, что можно обойтись без теории уравнений Пелля.

Считая $a \neq 0$, уравнение (1.7) *методом Лагранжа* можно привести к виду (1.2), где

$$B = (bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af) \neq 0,$$

при этом

$$x = (b^2-4ac)v+bd-2ae, \quad y = 2au+bv+d.$$

Тогда любое решение (u, v) уравнения (1.7) находится по формулам

$$u = \frac{-bx + (b^2 - 4ac)y - 2a(be - 2dc)}{2a(b^2 - 4ac)}, \quad v = \frac{x - bd + 2ae}{b^2 - 4ac},$$

где (x, y) — решение уравнения (1.2), удовлетворяющее системе сравнений

$$\begin{cases} x \equiv bd - 2ae \pmod{b^2 - 4ac}, \\ -bx + (b^2 - 4ac)y \equiv 2a(be - 2dc) \pmod{2a(b^2 - 4ac)}. \end{cases}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.2) и отбору нужных решений. Последнее, хотя бы теоретически, можно осуществить, опираясь на *периодичность* решений $x + y\sqrt{A}$ из каждой серии (1.5) по любому заранее заданному модулю m (в нашем случае речь идет о модуле $m = 2a(b^2 - 4ac)$). Эта периодичность, в свою очередь, следует из существования такого натурального числа $K = K(m)$, что

$$\varepsilon^K \equiv 1 \pmod{m}$$

(читателю предлагается доказать в качестве упражнения; сравнение квадратичных иррациональностей по модулю m здесь следует понимать «покоординатно», т. е. $x + y\sqrt{A} \equiv x' + y'\sqrt{A} \pmod{m}$ означает одновременное выполнение сравнений $x \equiv x' \pmod{m}$ и $y \equiv y' \pmod{m}$). Предлагаемый способ решения уравнения (1.7) не всегда удобен практически, но он позволяет сделать важный качественный вывод: если на гиперболе (1.7) лежит хотя бы одна целая точка, то таких точек на ней бесконечно много.

Пример 2. В качестве иллюстрации решим уравнение

$$21u^2 + 43uv + 21v^2 + 16u + 16v + 4 = 0 \tag{1.8}$$

в целых числах. Здесь разумно отступить от общей схемы и сделать замену неизвестных $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$. Тогда уравнение (1.8) примет вид

$$85x^2 + 32x + 4 - y^2 = 0.$$

Если теперь положить $z = 85x + 16$, то получим

$$z^2 - 85y^2 = -84. \tag{1.9}$$

Нас интересуют те решения (z, y) уравнения (1.9), для которых

$$z \equiv 16 \pmod{85}. \tag{1.10}$$

Минимальное решение соответствующего классического уравнения Пелля есть

$$\varepsilon = 285769 + 30996\sqrt{85},$$

а множество базисных решений уравнения (1.9) — это

$$\big\{(\pm1,1),\ (\pm16,2),\ (\pm101,11),\ (\pm341,37),\ (\pm424,46),\ (\pm1429,155)\big\}.$$

Пусть $\varepsilon^n=S_n+T_n\sqrt{85}$. Поскольку $S_1=285769\equiv-1 \pmod{85}$, индукцией по n нетрудно показать, что для любого $n\in\mathbb{Z}$ имеет место сравнение

$$S_n\equiv(-1)^n \pmod{85}.$$

Отсюда следует, что условию (1.10) удовлетворяют только решения (z,y), получаемые из следующих шести серий:

$$z+y\sqrt{85}=\begin{cases}(16\pm2\sqrt{85})(-\varepsilon)^n,\\(101\pm11\sqrt{85})(-\varepsilon)^n,\\(-1429\pm155\sqrt{85})(-\varepsilon)^n,\end{cases}$$

где в каждой серии $n\in\mathbb{Z}$. Далее можно обнаружить, что $\varepsilon=\varepsilon_1^3$, где

$$\varepsilon_1=\frac{83+9\sqrt{85}}{2}.$$

Это позволяет объединить указанные шесть серий в две серии:

$$z+y\sqrt{85}=(16\pm2\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n. \tag{1.11}$$

Все решения (u,v) уравнения (1.8) теперь можно найти по формулам

$$u=\frac{z+85y-16}{85},\quad v=\frac{z-85y-16}{85}.$$

Если в формуле (1.11) взять знак «плюс», то получим половину решений $(u,v)=(u_n,v_n)$, где

$$u_n=\frac{1}{85}\big((93+9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n+(93-9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n}-16\big),$$

$$v_n=\frac{1}{85}\big((-77-7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n+(-77+7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n}-16\big).$$

Выбор знака «минус» даст симметричную половину $(u,v)=(v_{-n},u_{-n})$.

§ 2. Семейство кривых $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$

На *комплексной проективной плоскости* $\mathbb{CP}^2$ рассмотрим семейство кривых $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$, заданных уравнением

$$a^3+b^3+c^3=(\alpha a+\beta b+\gamma c)^3 \tag{2.1}$$

в однородных координатах $[a:b:c]$ (первоначальные сведения об *алгебраических кривых* читатель может найти в книгах [6, гл. III] или [3, гл. 2]). Тройку параметров $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$ будем предполагать отличной от $(0,0,0)$.

Предложение 1. *Уравнение* (2.1) *является приводимым над* $\mathbb{C}$ *тогда и только тогда, когда в тройке* (α, β, γ) *куб одной из компонент равен единице, а кубы двух других компонент равны.*

Доказательство. Однородный многочлен

$$F(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3$$

может разлагаться в произведение только однородных многочленов. При $c = 0$ имеем

$$F(a,b,0) = a^3 + b^3 - (\alpha a + \beta b)^3 \neq 0,$$

поэтому можно положить, например, $c = 1$ и далее выяснять, когда многочлен

$$f(a,b) = F(a,b,1) = a^3 + b^3 + 1 - (\alpha a + \beta b + \gamma)^3$$

будет разложим над $\mathbb{C}$. Поскольку $\deg f(a,b) = 3$, в случае разложимости одним из сомножителей обязан быть линейный многочлен, при этом возможны два случая.

1. При некотором $k \in \mathbb{C}$ многочлен $f(k,b) \in \mathbb{C}[b]$ есть тождественно нулевая функция. Тогда все его коэффициенты должны быть нулевыми, т. е.

$$1 - \beta^3 = 0, \quad \beta^2(k\alpha + \gamma) = 0, \quad \beta(k\alpha + \gamma)^2 = 0, \quad k^3 + 1 = (k\alpha + \gamma)^3,$$

откуда находим $\beta^3 = 1$, $k\alpha + \gamma = k^3 + 1 = 0$ и, следовательно, $\alpha^3 = \gamma^3$.

2. При некоторых k, $l \in \mathbb{C}$ многочлен $f(a, ka + l) \in \mathbb{C}[a]$ задает тождественно нулевую функцию. Тогда

$$k^3 + 1 = (k\beta + \alpha)^3, \quad l^3 + 1 = (l\beta + \gamma)^3, \tag{2.2}$$

$$(l\beta + \gamma)(k\beta + \alpha)^2 = k^2 l, \quad (l\beta + \gamma)^2(k\beta + \alpha) = kl^2. \tag{2.3}$$

Если $k^3 + 1 = 0$, то $k\beta + \alpha = 0$, $l = 0$, откуда находим $\gamma^3 = 1$ и $\alpha^3 = \beta^3$. Если $l^3 + 1 = 0$, то аналогично получим $\alpha^3 = 1$ и $\beta^3 = \gamma^3$. Предположим, что $k^3 + 1 \neq 0$ и $l^3 + 1 \neq 0$. Тогда $k\beta + \alpha \neq 0$ и $l\beta + \gamma \neq 0$. Разделив первое из равенств (2.3) на второе, получим

$$\frac{k\beta + \alpha}{l\beta + \gamma} = \frac{k}{l},$$

откуда

$$l\beta + \gamma = \frac{l}{k} \cdot (k\beta + \alpha)$$

и далее

$$\frac{l}{k} \cdot (k\beta + \alpha)^3 = k^2 l.$$

Значит, $(k\beta + \alpha)^3 = k^3$ и, как следствие, $k^3 + 1 = k^3$, что невозможно.

В явном виде разложение многочлена $f(a,b)$ в случае $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \alpha, 1)$ будет приведено далее (см. тождество (3.1)). □

Если бы в случае $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Q}^3$ мы исследовали вопрос о приводимости уравнения (2.1) над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то при доказательстве предложения 1 можно было бы «махнуть дубинкой» — для анализа уравнений (2.2) применить великую теорему Ферма для показателя 3, согласно которой все рациональные точки кривой $x^3+y^3=1$ суть $(x,y)\in\{(1,0),(0,1)\}$.

Пусть есть еще одна тройка параметров $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$, но с ограничением

$$x^3+y^3+z^3=1. \tag{2.4}$$

Рассмотрим подсемейство кривых $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$, определяемое условием

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=1. \tag{2.5}$$

Пусть $P=[x:y:z]$. Тогда $P\in C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ и, в частности, $P\in C_{(x^2,y^2,z^2)}$.

Предложение 2. *Пусть для троек параметров (α,β,γ) и (x,y,z) выполнены условия* (2.4) *и* (2.5).

(a) *Проведем через точку $P=[x:y:z]$ касательную к кривой $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ и предположим, что она (касательная) пересекает кривую $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ в точке $Q\neq P$. Тогда Q лежит на кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$.*

(b) *Точка $P=[x:y:z]$ является особой точкой кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$.*

Доказательство. (a) Уравнение касательной в точке $P=[x:y:z]$ имеет вид

$$k_a(a-x)+k_b(b-y)+k_c(c-z)=0, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned}k_a&=\frac{\partial}{\partial a}\left(a^3+b^3+c^3-(\alpha a+\beta b+\gamma c)^3\right)\Big|_{[a:b:c]=P}=\\&=3a^2-3\alpha(\alpha a+\beta b+\gamma c)^2\Big|_{[a:b:c]=P}=3x^2-3\alpha\end{aligned}$$

и аналогично $k_b=3y^2-3\beta$, $k_c=3z^2-3\gamma$. Учитывая (2.4) и (2.5), равенство (2.6) можно записать в виде

$$x^2a+y^2b+z^2c=\alpha a+\beta b+\gamma c.$$

Теперь утверждение о том, что $Q=[a:b:c]$ лежит на кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$, непосредственно следует из (2.1).

Уравнение касательной (2.6) можно было бы сразу записать в более простой форме

$$k_aa+k_bb+k_cc=0$$

(см. [3, упр. 2.1.9]). Равенство $xk_a+yk_b+zk_c=0$ следует из *тождества Эйлера для однородных многочленов* (см., например, теорему 10.2 [6, гл. I]).

(b) Действительно, имеем

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(a^3+b^3+c^3-(x^2a+y^2b+z^2c)^3\right)\Big|_{[a:b:c]=P}=$$
$$=3a^2-3x^2(x^2a+y^2b+z^2c)^2\Big|_{[a:b:c]=P}=3x^2-3x^2\cdot 1=0$$

и аналогично с остальными частными производными. □

Таким образом, при условии (2.4) кривая $C_{(x^2,y^2,z^2)}$ является особой: на ней есть особая точка $P=[x:y:z]$. Можно показать, что в неприводимом случае особая точка P будет *двойной* (причем *простой двойной* при условии $xyz\neq 0$). В частности, кубическая кривая $C_{(x^2,y^2,z^2)}$ будет рациональной (определение *кратности* особой точки, *рациональной кривой* и сопутствующие факты см., например, в книге [3, гл. 2]). Чтобы написать явные формулы рациональной параметризации, положим $c=z$ (считая $z\neq 0$) и затем всюду заменим z^3 на $1-x^3-y^3$. Тогда уравнение кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$ в соответствующей аффинной карте примет вид

$$a^3+b^3+1-x^3-y^3=(x^2a+y^2b+1-x^3-y^3)^3. \tag{2.7}$$

Проводя прямую $b=t(a-x)+y$ (здесь t — параметр) через точку (x,y) и находя вторую точку пересечения этой прямой с кривой (2.7), получим[1)]

$$a=\frac{x(y^6-1)t^3+3y(x^3y^3-y^3+1)t^2+3x^2y^2(x^3-2)t+x(x^6-3x^3+2)}{(y^6-1)t^3+3x^2y^4t^2+3x^4y^2t+x^6-1},$$
$$b=\frac{y(y^6-3y^3+2)t^3+3x^2y^2(y^3-2)t^2+3x(x^3y^3-x^3+1)t^2+y(x^6-1)}{(y^6-1)t^3+3x^2y^4t^2+3x^4y^2t+x^6-1}. \tag{2.8}$$

Это и есть искомая рациональная параметризация кривой (2.7). График ее вещественной части может выглядеть по-разному, в зависимости от значений параметров x, y (один из вариантов представлен на рис. 1).

Имеются ли на кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$ другие особые точки, кроме точки $P=[x:y:z]$? Известно, что на неприводимой кубической кривой более одной особой точки быть не может (см., например, [6, гл. III, разд. 4.3]). Остается не столь интересный случай приводимой кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$, который можно явно описать с помощью предложения 1.

Есть ли еще случаи вырождения кривых $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$, помимо указанного в п. (b) предложения 2? Покажем, что нет.

[1)] Здесь было бы уместно применение системы компьютерной алгебры.

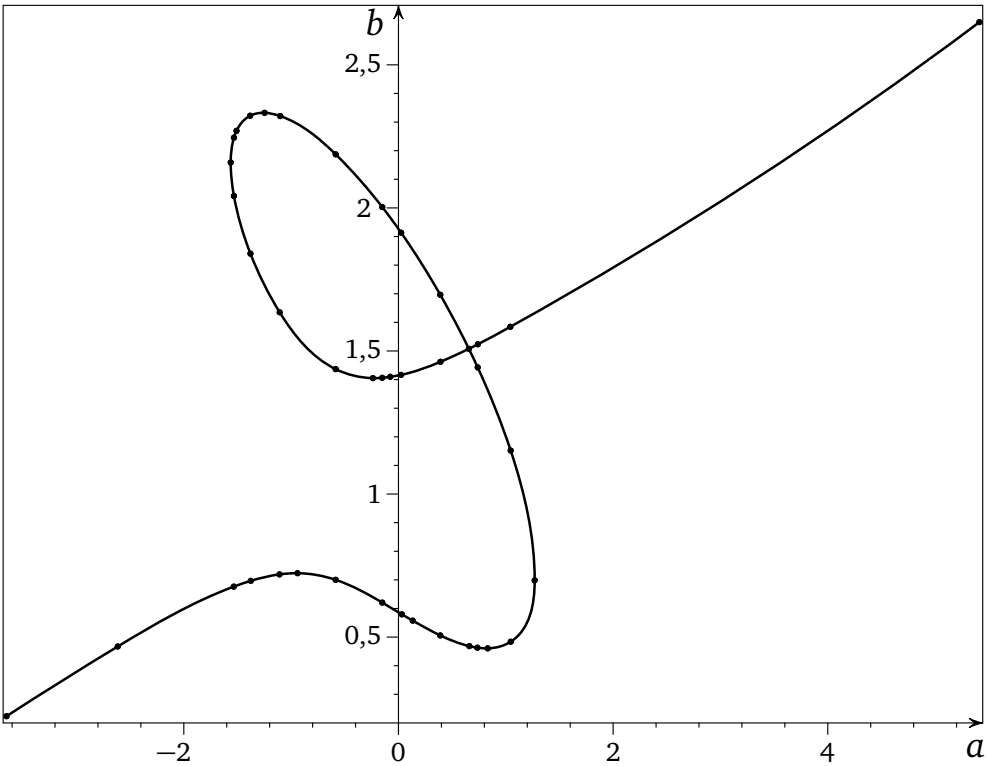


Рис. 1. График вещественной части кривой (2.7) при $x=2/3$, $y=3/2$

Предложение 3. *Если кривая $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ является особой, то существует такая тройка $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$, удовлетворяющая условию* (2.4), *что* $(\alpha,\beta,\gamma)=(x^2,y^2,z^2)$.

Доказательство. Запишем (α,β,γ) в виде (x^2,y^2,z^2), где $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ (здесь x, y, z определены с точностью до знака). Если $[a_0:b_0:c_0]$ — особая точка кривой $C_{(x^2,y^2,z^2)}$, то

$$a_0^2=(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^2x^2,$$
$$b_0^2=(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^2y^2,$$
$$c_0^2=(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^2z^2,$$
$$a_0^3+b_0^3+c_0^3=(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^3.$$

Ясно, что $x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0\neq 0$. Имеем

$$a_0=\pm x(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0),$$
$$b_0=\pm y(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0),$$
$$c_0=\pm z(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0).$$

Следовательно,

$$a_0^3+b_0^3+c_0^3=(\pm x^3\pm y^3\pm z^3)(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^3=(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^3.$$

После сокращения на $(x^2a_0+y^2b_0+z^2c_0)^3$ получим $\pm x^3\pm y^3\pm z^3=1$. Учитывая неоднозначность в выборе тройки (x,y,z), можно считать, что выполнено именно условие (2.4). □

Далее мы рассмотрим семейство кривых $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ при дополнительном предположении $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Q}^3$. В этом случае критерий приводимости кривой $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ (см. предложение 1) упрощается: одна из компонент тройки параметров (α,β,γ) должна быть равна единице, а две другие должны совпасть. Предложение 3 также можно уточнить: при условии неприводимости такая кривая будет особой, только когда $(\alpha,\beta,\gamma)=(x^2,y^2,z^2)$, при этом выполнено условие (2.4) и все числа x, y, z рациональны. Последнее требование вытекает из такого утверждения: если $(x^2,y^2,z^2)\in\mathbb{Q}^3$, выполнено условие (2.4) и каждое из чисел x, y, z отлично от единицы, то $(x,y,z)\in\mathbb{Q}^3$.

Доказательство этого несложного, но содержательного утверждения предоставляется читателю. Здесь возникает более общий вопрос: может ли неприводимая кубическая кривая, задаваемая многочленом с рациональными коэффициентами, иметь особую точку, которую нельзя задать тройкой рациональных однородных координат? Ответ: нет (если бы такое случилось, то особых точек было бы больше одной — та, которая дана, и все *алгебраически сопряженные* с ней)[2].

Таким образом, чтобы выяснить, для каких $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{Q}^3$ неприводимая кривая $C_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ будет рациональной, осталось описать все решения (x,y,z) уравнения (2.4) в рациональных числах. Такое описание давно известно (см., например, [18, гл. 11]).

Предложение 4. *Если не учитывать решения вида* $(1,t,-t)$, *то все решения* (x,y,z) *уравнения* (2.4) *в рациональных числах даются формулами*

$$\begin{aligned} x&=\frac{(p^2-pq+q^2)^2-p-q}{(p-q)^3-q^3-1},\\ y&=-\frac{(p^2-pq+q^2)^2-p+2q}{(p-q)^3-q^3-1},\\ z&=\frac{p^3+q^3-1}{(p-q)^3-q^3-1}, \end{aligned}\tag{2.9}$$

[2] В приводимом случае такое возможно: например, особые точки кривой $(a-b)(a^2-2b^2+2c^2)=0$ суть $[\sqrt{2}:\sqrt{2}:1]$ и $[-\sqrt{2}:-\sqrt{2}:1]$.

где $(p,q)\in\mathbb{Q}^2\backslash\{(-1,-1),(1,0)\}$. *При этом пара* (p,q) *получается из тройки* (x,y,z) *следующим образом*:

$$p=\frac{xz-yz+x}{z^2+z+1},\quad q=\frac{xz+y}{z^2+z+1}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть $(x,y,z)\neq(1,t,-t)$ — решение уравнения (2.4) в рациональных числах. Имеем $x^3+y^3=1-z^3$, что можно переписать как

$$(x+y)(x+y\omega)(x+y\omega^2)=(1-z)(1-z\omega)(1-z\omega^2), \tag{2.11}$$

где $\omega=(-1+\sqrt{-3})/2$ (кубический корень из единицы). Определим теперь пару $(p,q)\in\mathbb{Q}^2$ равенством

$$\frac{x+y\omega}{1-z\omega}=p+q\omega. \tag{2.12}$$

Нетрудно видеть, что $(p,q)\notin\{(-1,-1),(1,0)\}$. Явные выражения для p и q даются формулами (2.10). Сопрягая (2.12), получим

$$\frac{x+y\omega^2}{1-z\omega^2}=p+q\omega^2. \tag{2.13}$$

Наконец, после подстановок (2.12) и (2.13) равенство (2.11) примет вид

$$(x+y)(p^2-pq+q^2)=1-z. \tag{2.14}$$

Формулы (2.9) получаются, если решить систему линейных уравнений (2.12)–(2.14) относительно x, y, z (определитель этой системы пропорционален $(p-q)^3-q^3-1$ и потому отличен от нуля, так как $(p,q)\notin\{(-1,-1),(1,0)\}$). Можно проверить, что отображения, задаваемые формулами (2.9) и (2.10), являются взаимно обратными. □

Еще один способ описать все решения уравнения (2.4) в рациональных числах читатель может найти в книге [2, § 51] (см. также более позднее издание [11, § 36]).

§ 3. Уравнение Эйлера $x^3+y^3+z^3=1$

Диофантово уравнение (2.4) принято называть уравнением Эйлера (см., например, [18, гл. 11]). Известно, что оно имеет бесконечное множество решений в целых числах, но само это множество, по-видимому, не допускает простого описания. Тем не менее, можно легко предъявить некоторые бесконечные серии решений в целых числах[3)].

[3)] Здесь мы не имеем в виду тривиальную серию решений вида $(1,t,-t)$.

Для отыскания таких серий можно оттолкнуться от предложения 1, где описываются все тройки параметров (α, β, γ), для которых однородный многочлен

$$a^3 + b^3 + c^3 - (\alpha a + \beta b + \gamma c)^3$$

разложим. В частности, этот многочлен разлагается на множители в случае тройки вида $(\alpha, \alpha, 1)$. А именно, при $c = 1$ разложение имеет вид

$$a^3 + b^3 + 1 - (\alpha(a+b)+1)^3 = -(a+b) \cdot q_\alpha(a,b), \tag{3.1}$$

где квадратичный сомножитель $q_\alpha(a,b)$ в правой части выглядит так:

$$q_\alpha(a,b) = (\alpha^3 - 1)a^2 + (2\alpha^3 + 1)ab + (\alpha^3 - 1)b^2 + 3\alpha^2(a+b) + 3\alpha.$$

Предположим, что при некотором $\alpha \in \mathbb{Q}$ на кривой, заданной уравнением

$$q_\alpha(a,b) = 0, \tag{3.2}$$

есть целая точка (a,b). Тогда в силу тождества (3.1) она задает тройку

$$(x,y,z) = (-a, -b, \alpha(a+b)+1) \tag{3.3}$$

целых чисел, удовлетворяющую уравнению (2.4). Обратно, пусть есть некоторая тройка (x,y,z) целых чисел, удовлетворяющая (2.4), при этом $x + y \neq 0$. Положим

$$\alpha = \frac{1-z}{x+y}.$$

Тогда $\alpha \in \mathbb{Q}$ и, как опять-таки вытекает из тождества (3.1), на кривой (3.2) лежит целая точка $(a,b) = (-x,-y)$.

Пусть теперь параметр $\alpha \in \mathbb{Q}$ таков, что дискриминант

$$\Delta = (2\alpha^3 + 1)^2 - 4(\alpha^3 - 1)^2 = 3(4\alpha^3 - 1)$$

квадратичной формы, входящей в состав $q_\alpha(a,b)$, положителен, но не является квадратом рационального числа. Тогда уравнение (3.2) определяет гиперболу, и можно надеяться, что на ней лежит бесконечно много целых точек (a,b), которые и дадут искомую бесконечную серию троек (3.3) целых чисел, удовлетворяющих уравнению Эйлера (2.4).

Фактически от $\alpha \in \mathbb{Q}$ требуется выполнение только следующих условий:

$$\alpha > 2^{-2/3}, \quad \alpha \neq 1.$$

Первое есть просто решение неравенства $3(4\alpha^3 - 1) > 0$, а второе следует из того факта, что эллиптическая кривая

$$3(4\alpha^3 - 1) = \delta^2 \tag{3.4}$$

бирационально эквивалентна кривой Ферма $x^3 + y^3 = 1$ и потому имеет только две рациональные точки $(\alpha, \delta) \in \{(1,-3), (1,3)\}$. Как

следствие, если $\alpha \neq 1$, то число $3(4\alpha^3-1)$ не является квадратом рационального числа.

Бирациональная эквивалентность означает, что с помощью формул

$$x=\frac{3+\delta}{6\alpha}, \quad y=\frac{3-\delta}{6\alpha}, \quad \alpha=\frac{1}{x+y}, \quad \delta=\frac{3(x-y)}{x+y}$$

мы можем установить биективное соответствие между рациональными точками этих кривых. Как уже упоминалось, все рациональные точки кривой Ферма суть $(x,y)\in\{(1,0),(0,1)\}$, поэтому все рациональные точки кривой (3.4) — это $(\alpha,\delta)\in\{(1,-3),(1,3)\}$.

Более того, если α удовлетворяет условиям выше и на гиперболе (3.2) лежит хотя бы одна целая точка, то таких точек на ней автоматически бесконечно много (см. § 1). В статье [15] указываются некоторые целые значения α, а именно,

$$\alpha\in\{4,7,55,79\},$$

для которых такой поиск целочисленных решений уравнения (2.4) будет удачным. Отметим, что при $\alpha=55$ на гиперболе (3.2) на самом деле нет ни одной целой точки (читатель может это проверить, воспользовавшись какой-нибудь системой компьютерной алгебры, умеющей решать уравнения 2-й степени с двумя неизвестными в целых числах, например [23, 24]; см. также [25])[4]. Источником этой досадной ошибки является банальная невнимательность при цитировании данных: вместо правильного решения $(-1544, 1537, 368)$ уравнения (2.4) из статьи [17] Лемер приводит ошибочное $(-1544, 1537, 386)$, на основе которого затем получает $\alpha=(1-z)/(x+y)=55$ (а должно быть $\alpha=367/7$).

Можно задаться целью выписать подряд все целые значения α, для каждого из которых на гиперболе (3.2) есть целые точки. Начало этого ряда будет таким:

$$3,4,7,9,12,13,16,19,21,25,27,28,31,36,37,39,43,48,49,\ldots \tag{3.5}$$

Опираясь на факт существования параметрического решения

$$(x,y,z)=(-9t^4+3t,9t^4,-9t^3+1) \tag{3.6}$$

уравнения (2.4), можно установить, что ряд (3.5) бесконечен. Действительно, для тройки (3.6) имеем

$$\alpha=\frac{1-z}{x+y}=\frac{1-(-9t^3+1)}{(-9t^4+3t)+9t^4}=\frac{9t^3}{3t}=3t^2,$$

[4] Или просто заметить, что сравнение $q_{55}(a,b)\equiv 0 \pmod m$ неразрешимо при $m=5^2$ или $m=11^2$ (см. далее предложение 5).

поэтому на гиперболе (3.2) при $\alpha = 3t^2$ имеется целая точка

$$(a, b) = (9t^4 - 3t, -9t^4) \tag{3.7}$$

и, как следствие, ряд (3.5) содержит все числа вида $3t^2$ $(t = 1, 2, \ldots)$.

Решение (3.6) уравнения Эйлера впервые было найдено К. Малером в 1936 году. В статье [16] он находит это решение, манипулируя «хорошо известным» тождеством

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3,$$

где

$$x = \rho^2 - \sigma\rho_1, \quad y = \sigma_1\rho_1 - \rho^2, \quad z = \rho_1^2 - \rho\sigma_1, \quad u = \rho_1^2 - \rho\sigma,$$

при этом

$$\rho = a^2 + 3b^2, \quad \rho_1 = a_1^2 + 3b_1^2,$$
$$\sigma = aa_1 + 3bb_1 + 3ab_1 - 3a_1b, \quad \sigma_1 = aa_1 + 3bb_1 - 3ab_1 + 3a_1b.$$

Разумеется, решение (3.6) можно получить из общего решения (2.9) уравнения (2.4) в рациональных числах (см. предложение 4). До этого нужно дополнительно потребовать, чтобы $(p - q)^3 - q^3 = 0$, что равносильно условию $p = 2q$. Тогда $(x, y, z) = (-9q^4 + 3q, 9q^4, -9q^3 + 1)$, что с точностью до обозначений совпадает с (3.6).

Более того, Лемер в статье [15] предъявляет даже бесконечную серию параметрических решений типа (3.6), воспользовавшись тем удачным обстоятельством, что в случае $\alpha = 3t^2$ дискриминант равен

$$\Delta = 3(4\alpha^3 - 1) = 324t^6 - 3,$$

а для такого Δ можно указать решение классического уравнения Пелля

$$X^2 - \Delta Y^2 = 1 \tag{3.8}$$

в многочленах от t с целыми коэффициентами. Это позволяет стандартным образом «размножить» точку (3.7) (см. § 1), а затем и само решение (3.6). Ниже в предложении 6 мы дадим полное описание целых точек на гиперболе (3.2) при $\alpha = 3t^2$.

Имеем $\Delta = 324t^6 - 3 = 9d^2 - 3$, где $d = 6t^3$. Для классического уравнения Пелля $X^2 - (9d^2 - 3)Y^2 = 1$ минимальным решением является $(X_0, Y_0) = (6d^2 - 1, 2d)$.

В самом деле, если решение $(6d^2 - 1, 2d)$ не минимально, то

$$6d^2 - 1 + 2d\sqrt{9d^2 - 3} = \left(X_0 + Y_0\sqrt{9d^2 - 3}\right)^n$$

для некоторого $n \geqslant 2$, где (X_0, Y_0) — минимальное решение. Поскольку $Y_0 \geqslant 1$, имеем

$$X_0 = \sqrt{(9d^2 - 3)Y_0^2 + 1} \geqslant \sqrt{9d^2 - 2} > 3d - 1,$$

т. е. $X_0 \geqslant 3d$. Но тогда

$$6d^2-1+2d\sqrt{9d^2-3} \geqslant \left(X_0+Y_0\sqrt{9d^2-3}\right)^2 \geqslant \left(3d+\sqrt{9d^2-3}\right)^2,$$

что невозможно ни при каком $d \geqslant 1$. Таким образом, при $\Delta = 324t^6-3$ минимальным решением (3.8) будет $(X_0, Y_0) = (216t^6-1, 12t^3)$.

Можно указать еще один простой пример бесконечной последовательности, содержащейся внутри ряда (3.5).

Пример 3. При $\alpha = t^2$ $(t = 2, 3, \ldots)$ на гиперболе (3.2) лежит точка $(a, b) = (t, -t)$. Таким образом, ряд (3.5) содержит все точные квадраты, кроме 1. К сожалению, здесь $\Delta = 12t^6-3$ и соответствующее уравнение (3.8) уже не имеет решений в многочленах от t с рациональными коэффициентами (легкое упражнение, см. доказательство аналогичного утверждения далее в примере 4). И хотя точку $(t, -t)$ можно «размножить» при любом конкретном t, получить на этом пути результат, аналогичный результату Лемера, не удастся.

Следующее простое наблюдение могло бы помочь автору статьи [15] избежать оплошности с числом $\alpha = 55$. Для краткости будем называть *числами Лёша* (Loeschian numbers, по имени немецкого экономиста A. Löesch, см. OEIS [26]) те целые числа, которые можно представить формой $\xi^2-\xi\eta+\eta^2$, где переменные ξ и η принимают целые значения.

Предложение 5. *Для того, чтобы на гиперболе* (3.2) *были целые точки, необходимо, чтобы α было числом Лёша.*

Доказательство. Воспользуемся следующим критерием: α является числом Лёша тогда и только тогда, когда каноническое разложение α не содержит простых чисел $p \equiv 2 \pmod 3$ в нечетной степени.

Конечно, данный критерий не так широко известен, как классический критерий представимости целого числа суммой двух квадратов целых чисел (см., например, часть IV главы «Суммы квадратов» в книге [4]), но может быть доказан совершенно аналогичным образом.

Запишем уравнение гиперболы (3.2) в виде

$$a^2-ab+b^2 = \alpha(\alpha^2(a+b)^2+3\alpha(a+b)+3). \tag{3.9}$$

Достаточно показать, что в каноническом разложении числа α не может быть простых чисел $p \equiv 2 \pmod 3$ в нечетных степенях (и тогда по критерию α будет числом Лёша).

Действительно, предположим, что показатель $\nu_p(\alpha)$ нечетен. Заметим, что показатель $\nu_p(a^2-ab+b^2)$, напротив, всегда четен (поскольку

из сравнения $a^2 - ab + b^2 \equiv 0 \pmod p$ вытекает $a \equiv b \equiv 0 \pmod p$, а значит, $a^2 - ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p^2}$). Кроме того, мы имеем

$$\nu_p\left(\alpha^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3\right) = 0.$$

Все это делает равенство (3.9) невозможным. □

В частности, при $\alpha = 55 = 5 \cdot 11$ уравнение (3.9) неразрешимо в целых числах, так как 5 и 11 — простые числа $\equiv 2 \pmod 3$.

Если число α рационально и на кривой (3.2) есть целая точка, то утверждение о представимости α квадратичной формой $\xi^2 - \xi\eta + \eta^2$ останется в силе, но при условии, что значения переменных ξ и η теперь считаются рациональными. В самом деле, любая целая точка (a, b) на кривой (3.2) порождает тройку (3.3), удовлетворяющую (2.4). Тогда (см. предложение 4, формулы (2.9)) получаем

$$\alpha = \frac{1-z}{x+y} = p^2 - pq + q^2$$

для некоторых рациональных p и q. Более того, если воспользоваться формулами (2.10), то для p и q можно даже дать явные формулы:

$$p = -\frac{\alpha(a^2-b^2) + 2a - b}{\alpha^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3}, \quad q = -\frac{\alpha(a^2+ab) + a + b}{\alpha^2(a+b)^2 + 3\alpha(a+b) + 3}.$$

Чтобы исчерпать этот локальный сюжет, читатель мог бы в качестве упражнения доказать следующий факт[5)]: если целое число α представимо формой $\xi^2 - \xi\eta + \eta^2$ с рациональными ξ и η, то оно представимо этой формой и с целыми ξ и η.

Является ли необходимое условие из предложения 5 достаточным? Рассмотрим следующий пример.

Пример 4. Пусть $\alpha = t^2 + 3$ $(t = 0, 1, \ldots)$. Поскольку

$$t^2 + 3 = (t+1)^2 - (t+1)(t-1) + (t-1)^2,$$

такие α являются числами Лёша. С помощью [25] нетрудно убедиться, что для каждого $t \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ на гиперболе (3.2) действительно найдутся целые точки. Вместе с тем, можно показать, что не существует никакого параметрического решения уравнения (3.2) вида

$$(a, b) = (a(t), b(t)),$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены с рациональными коэффициентами.

[5)] Предостережение: для произвольной квадратичной формы это утверждение неверно (например, форма $\xi^2 - 34\eta^2$ представляет число -1 с рациональными ξ и η, но не представляет с целыми).

Удобно перейти к неизвестным $u=a+b$, $v=a-b$. Тогда уравнение (3.2) примет вид

$$9v^2=\Delta u^2+36\alpha^2u+36\alpha, \tag{3.10}$$

где, напомним, $\Delta=3(4\alpha^3-1)$. Отметим, что переход к уравнению (3.10) равносильный, так как условие $u\equiv v \pmod 2$ обратного перехода выполняется автоматически.

При $\alpha=t^2+3$ мы получим уравнение

$$9v^2=(12t^6+108t^4+324t^2+321)u^2+36(t^2+3)^2u+36(t^2+3).$$

Это уравнение не имеет решений $(u,v)=(u(t),v(t))$ в многочленах с рациональными коэффициентами. Действительно, если $u(t)$ — нулевой многочлен, то

$$9v(t)^2=36(t^2+3),$$

что невозможно ни для какого многочлена $v(t)$. Иначе пусть C — старший коэффициент многочлена $u(t)$. Тогда старший коэффициент правой части уравнения равен $12C^2$, в то время как старший коэффициент левой части имеет вид $9D^2$, где D — старший коэффициент многочлена $v(t)$. Значит, $9D^2=12C^2$, но для ненулевых рациональных C и D это невозможно.

Возникает подозрение, что такая оптимистичная ситуация с целыми точками будет не всегда. И действительно, при $t=21$ впервые получаем контрпример — для соответствующего $\alpha=444$ на гиперболе (3.2) нет ни одной целой точки.

При $\alpha=444$ уравнение (3.10) принимает вид

$$9v^2=1\,050\,340\,605u^2+7\,096\,896u+15\,984.$$

Можно ли установить неразрешимость этого уравнения в целых числах, не прибегая к системам компьютерной алгебры? (И это при том, что в рациональных числах оно разрешимо.) Вопрос не совсем риторический, особенно в свете периодически возникающей дискуссии о доверии результатам компьютерных вычислений.

Пример 4 показывает, что условие «α — число Лёша» не является достаточным для существования целых точек на гиперболе (3.2). Начало ряда чисел Лёша α, для которых на гиперболе (3.2) нет целых точек, таково:

$$129,\ 189,\ 219,\ 273,\ 279,\ 336,\ 372,\ 399,\ 409,\ 444,\ \ldots$$

На момент написания статьи эта последовательность отсутствовала в OEIS.

Отметим, что в статье [15] рассматриваются только целые значения α. Но для дробных значений α также имеет смысл искать целые точки на гиперболе (3.2), так как тройка (3.3) и в этом случае обязана быть целочисленной.

Пример 5. Используя [25] (и предложение 5 для предварительного отбора), можно проверить, что дробным значением $\alpha = m/n$ с наименьшей *высотой* (т. е. суммой $m+n$), для которого на гиперболе (3.2) есть целые точки, является $\alpha = 12/7$. При таком значении α одной из целых точек гиперболы (3.2) будет $(a, b) = (-243\,876,\ 105\,570)$, что дает тройку

$$(x, y, z) = (243\,876,\ -105\,570,\ -237\,095).$$

У этого метода поиска целочисленных решений уравнения (2.4) — через поиск целых точек на гиперболе (3.2) — есть существенный недостаток: решения при этом получаются, как правило, очень большие (содержат сотни и тысячи десятичных знаков для некоторых значений α из примера 4). Увы, но это объективный недостаток: нахождение целых точек на гиперболах сводится к решению уравнений Пелля, а в теории таких уравнений хорошо известен феномен, когда уравнение с небольшими коэффициентами может иметь огромные наименьшие решения (см. § 1).

По поводу общего уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = k \tag{3.11}$$

существует большое количество публикаций и даже откровенной рекламы (читатель ради любопытства может пройти по ссылке [28]). Отметим лишь следующие два случая.

1. Случай $k=2$. Если в формулах (2.8) взять $(x, y) = (0, -1)$, то получим

$$a = 6t^2, \quad b = 6t^3 - 1,$$

при этом $a^3 + b^3 + 2 = (b+2)^3$. Это дает параметрическое решение, которое впервые обнаружил А. С. Веребрюсов в 1908 году (см. статью [1]).

2. Случай $k=3$. В 1953 году Л. Морделл задал вопрос о наличии пятого решения уравнения $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ (четыре очевидных решения — это $(1, 1, 1)$ и $(4, 4, -5)$ вместе с перестановками). Ответ был получен лишь спустя 65 лет: нашлось решение

$$\begin{aligned}(x, y, z) = (&569\,936\,821\,221\,962\,380\,720,\\ &-569\,936\,821\,113\,563\,493\,509,\ -472\,715\,493\,453\,327\,032).\end{aligned}$$

Подробности есть, например, в статье [10]. Просматривая эту работу, поражаешься нетривиальности инструментов, применяемых для решения этого, казалось бы, элементарного вопроса. Совершенно очевидно, что никакой прямой brute force не позволил бы найти предъявленное решение, компоненты которого суть числа порядка 10^{20}. Здесь используются довольно тонкие методы из разных областей теории чисел и, конечно, современная многопроцессорная вычислительная техника.

Вместе с тем, сравнительно легко (и разными способами) можно показать, что для произвольного рационального k уравнение (3.11) имеет бесконечно много решений в рациональных числах (см. [22]).

§ 4. Тройки Рамануджана

По-видимому, впервые бесконечную серию целочисленных решений уравнения Эйлера (2.4) обнаружил С. Рамануджан. В статье [13] показано, как эту серию решений можно было бы получить на основе следующего *тождества Рамануджана*:

$$(3u^2+5uv-5v^2)^3+(4u^2-4uv+6v^2)^3+ \\ +(5u^2-5uv-3v^2)^3=(6u^2-4uv+4v^2)^3$$

(см. [9, разд. 8.5]). Найденную серию решений Рамануджан преподносит в интригующей форме, а именно, в виде серии равенств

$$a_n^3+b_n^3=c_n^3+(-1)^n, \tag{4.1}$$

где a_n, b_n, c_n $(n=0,1,2,\dots)$ определяются как *коэффициенты ряда Тейлора* для рациональных функций

$$A(s)=\frac{9s^2+53s+1}{s^3-82s^2-82s+1},\quad B(s)=\frac{-12s^2-26s+2}{s^3-82s^2-82s+1},$$
$$C(s)=\frac{-10s^2+8s+2}{s^3-82s^2-82s+1}$$

соответственно в окрестности точки $s=0$. Различные доказательства равенств (4.1) можно найти в статьях [12, 14], а одно интересное обобщение — в статье [20].

Если положить

$$x_n=(-1)^n b_n,\quad y_n=(-1)^{n+1}c_n,\quad z_n=(-1)^n a_n,$$

то из (4.1) получим

$$x_n^3+y_n^3+z_n^3=1. \tag{4.2}$$

Разлагая рациональные функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ в сумму простейших дробей, нетрудно получить явные формулы для коэффициентов a_n, b_n, c_n (см. [13]). В итоге *тройки Рамануджана* (x_n, y_n, z_n), являющиеся решениями уравнения Эйлера, в явном виде выглядят так:

$$x_n=\frac{1}{85}\big((77+7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n+(77-7\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n}+16\big),$$
$$y_n=\frac{1}{85}\big((-93-9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n+(-93+9\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n}+16\big),$$
$$z_n=\frac{1}{85}\big((64+8\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^n+(64-8\sqrt{85})(-\varepsilon_1)^{-n}-43\big),$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{83 + 9\sqrt{85}}{2}.$$

Ясно, что, будучи верными для $n = 0, 1, 2, \ldots$, равенства (4.2) и для любого $n \in \mathbb{Z}$ будут верны[6]. Заметим теперь, что справедливы также и равенства

$$4 = \frac{1 - z_n}{x_n + y_n}, \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}, \tag{4.3}$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой указанных выше выражений для x_n, y_n, z_n. Но тогда из (4.2) и (4.3) вытекает, что при $n \neq 0$ целые точки

$$(a, b) = (-x_n, -y_n) \tag{4.4}$$

лежат на гиперболе (3.2) при $\alpha = 4$, т. е. удовлетворяют уравнению

$$21a^2 + 43ab + 21b^2 + 16a + 16b + 4 = 0.$$

Для точки $(a, b) = (-x_0, -y_0) = (-2, 2)$ это тоже верно. Дальнейшее исследование показывает, что точки (a, b) вида (4.4), где $n \in \mathbb{Z}$, составляют ровно половину всех целых точек на указанной гиперболе.

Действительно, соответствующее диофантово уравнение уже было решено нами в примере 2, остается только заметить, что $(-x_n, -y_n) = (v_n, u_n)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ (формулы для u_n, v_n даны в конце примера 2).

Тем самым открывается простой путь к получению бесконечных серий решений уравнения Эйлера типа троек Рамануджана (x_n, y_n, z_n): для этого следует взять какое-нибудь конкретное число α из списка (3.5) (или подходящее дробное число, см. пример 5), найти бесконечную серию целых точек (a, b) на гиперболе (3.2) в явном виде, затем вычислить по формуле (3.3) соответствующую серию троек (x, y, z) и, наконец, подобрать рациональные функции $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, чтобы оформить все это в стиле Рамануджана.

Продемонстрируем этот метод на примере $\alpha = 3$. Здесь вместо уравнения (3.2) удобнее решать уравнение (3.10), которое в данном случае принимает вид

$$9v^2 = 321u^2 + 324u + 108,$$

при этом $a = (u + v)/2$, $b = (u - v)/2$. После подстановки $u = (w - 54)/107$ нужно будет решить уравнение Пелля

$$w^2 - 321v^2 = -936$$

[6] Вместо этого Рамануджан выписывает двойственную к (4.1) серию равенств, в которой используются уже *коэффициенты ряда Лорана* для рациональных функций $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ в окрестности $s = \infty$.

и среди его решений (w,v) отобрать те, что удовлетворяют условию

$$w \equiv 54 \pmod{107}.$$

Минимальное решение ассоциированного классического уравнения Пелля есть $\varepsilon_2 = 215+12\sqrt{321}$, а само уравнение Пелля имеет только одну пару базисных решений $(\pm 267, 15)$. Поскольку

$$215 \equiv 1 \pmod{107}, \quad -267 \equiv 54 \pmod{107},$$

искомые пары (w,v) находятся в сериях

$$w+v\sqrt{321} = (-267 \pm 15\sqrt{321})\varepsilon_2^n.$$

Все решения (a,b) уравнения (3.2) при $\alpha=3$ теперь можно найти по формулам

$$a = \frac{w+107v-54}{214}, \quad b = \frac{w-107v-54}{214}.$$

Если в формуле для (w,v) выбрать знак «плюс», то в итоге получим такую серию троек Рамануджана (x_n, y_n, z_n):

$$x_n = \frac{1}{214}\big((-669+37\sqrt{321})\varepsilon_2^n + (-669-37\sqrt{321})\varepsilon_2^{-n} + 54\big),$$

$$y_n = \frac{1}{107}\big((468-26\sqrt{321})\varepsilon_2^n + (468+26\sqrt{321})\varepsilon_2^{-n} + 27\big),$$

$$z_n = \frac{1}{214}\big((-801+45\sqrt{321})\varepsilon_2^n + (-801-45\sqrt{321})\varepsilon_2^{-n} - 110\big).$$

Равенства (4.2) по-прежнему в силе. Соответствующие рациональные функции таковы:

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n s^n = \frac{6(446s^2-429s+1)}{s^3-431s^2+431s-1},$$

$$B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n s^n = \frac{-9(417s^2-430s+1)}{s^3-431s^2+431s-1},$$

$$C(s) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n s^n = \frac{2(1615s^2-1729s+4)}{s^3-431s^2+431s-1}.$$

Все они имеют только рациональные коэффициенты, так как получаются в результате суммирования «сопряженных» геометрических прогрессий.

В статье [15] Д. Лемер в случае $\alpha = 3t^2$, где t — любое натуральное число, предъявил явные формулы для соответствующих троек $(x_n(t), y_n(t), z_n(t))$, однако он не объяснил, почему эти формулы являются универсальными (в том смысле, что в них задействованы все целые точки гиперболы (3.2) при $\alpha=3t^2$). Далее мы докажем этот факт.

Предложение 6. *Пусть t — любое натуральное число. При $\alpha = 3t^2$ все целые точки (a, b) гиперболы (3.2) с учетом симметрии описываются формулами*

$$\begin{aligned} a &= \frac{t}{2\Delta/3}\Big(\big(a_1(t) + a_2(t)\sqrt{\Delta}\big)\varepsilon^n + \big(a_1(t) - a_2(t)\sqrt{\Delta}\big)\varepsilon^{-n} - 54t^3\Big), \\ b &= \frac{t}{\Delta/3}\Big(\big(b_1(t) + b_2(t)\sqrt{\Delta}\big)\varepsilon^n + \big(b_1(t) - b_2(t)\sqrt{\Delta}\big)\varepsilon^{-n} - 27t^3\Big), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta = 324t^6 - 3$, $\varepsilon = 216t^6 - 1 + 12t^3\sqrt{\Delta}$, а многочлены $a_i(t)$ и $b_i(t)$ таковы:

$$a_1(t) = 972t^9 - 324t^6 + 18t^3 + 3, \quad a_2(t) = -54t^6 + 18t^3 - 1,$$
$$b_1(t) = -486t^9 + 18t^3, \quad b_2(t) = 27t^6 - 1.$$

Доказательство. Как и в рассмотренном выше частном случае $\alpha = 3$, будем сразу решать уравнение (3.10), которое можно записать в виде

$$v^2 = \frac{108t^6 - 1}{3}u^2 + 36t^4u + 12t^2$$

(в частности, u должно делиться на 3). Введем обозначения:

$$R = 972t^8 - 36t^2, \quad X_0 = 216t^6 - 1, \quad Y_0 = 12t^3.$$

Теперь после подстановки

$$u = \frac{w - 54t^4}{\Delta/3}$$

мы получим параметрическое уравнение Пелля

$$w^2 - \Delta v^2 = -R. \tag{4.6}$$

Требуется найти все его решения (w, v), удовлетворяющие условию

$$w \equiv 54t^4 \pmod{\Delta/3}. \tag{4.7}$$

Как уже отмечалось, для уравнения Пелля (4.6) известно минимальное решение ассоциированного с ним классического уравнения Пелля — это

$$\varepsilon = X_0 + Y_0\sqrt{\Delta} = 216t^6 - 1 + 12t^3\sqrt{\Delta}.$$

Любое решение (w, v) уравнения (4.6) можно получить по формуле

$$w + v\sqrt{\Delta} = \pm(W + V\sqrt{\Delta})\varepsilon^n,$$

где $n \in \mathbb{Z}$, а (W, V) — одно из базисных решений этого уравнения. Имеем

$$L = \sqrt{\frac{R(X_0 + 1)}{2\Delta}} = 18t^4 - \frac{1}{4t^2} + O\left(\frac{1}{t^8}\right), \quad t \to \infty.$$

Видно, что L — нецелое число[7]. Базисные решения (W,V) уравнения (4.6) определяются условиями

$$\sqrt{\frac{R}{\Delta}} \leqslant V < L, \quad W = \pm\sqrt{\Delta V^2 - R}$$

(см. § 1). Заметим теперь, что $X_0 \equiv 1 \pmod{\Delta/3}$. Как следствие, чтобы выполнить условие (4.7), достаточно найти только те базисные решения (W,V), для которых

$$W \equiv 54t^4 \pmod{\Delta/3}, \tag{4.8}$$

а это существенно легче, чем искать все базисные решения[8].

Приступим к отысканию базисных решений (W,V) уравнения (4.6), удовлетворяющих условию (4.8). Имеем

$$V^2 = \frac{108t^6-1}{3}\,U^2 + 36t^4U + 12t^2, \tag{4.9}$$

где число

$$U = \frac{W-54t^4}{\Delta/3}$$

является целым (и, очевидно, ненулевым). Тогда

$$-3t-1 < -\frac{\sqrt{\Delta L^2-R}+54t^4}{\Delta/3} < U < \frac{\sqrt{\Delta L^2-R}-54t^4}{\Delta/3} < 3t \tag{4.10}$$

(проверка крайних неравенств с помощью системы компьютерной алгебры предоставляется читателю в качестве упражнения). Обозначим правую часть уравнения (4.9) через $f(t)$.

Рассмотрим сначала случай $U>0$. Считая U константой, можно получить следующее асимптотическое равенство:

$$\sqrt{f(t)} = 6Ut^3 + 3t + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t\to\infty.$$

Попробуем доказать, что $V = 6Ut^3+3t$. Для этого получим двойное неравенство

$$(6Ut^3+3t-1)^2 < f(t) < (6Ut^3+3t+1)^2,$$

опираясь на оценки (4.10). Действительно, левое неравенство равносильно неравенству

$$12Ut^3 + 3t^2 + 6t - \frac{U^2+3}{3} > 0,$$

---

[7] Строго говоря, асимптотическая формула только намекает на то, что L — нецелое число, но привести доказательство нетрудно.

[8] Вполне возможно, что уравнение (4.6) при любом $t \geqslant 1$ имеет в точности одну пару базисных решений. С помощью [24] мы проверили это для всех $t \leqslant 100$, но доказательства в общем случае у нас нет.

а правое — неравенству

$$12Ut^3 - 3t^2 + 6t + \frac{U^2+3}{3} > 0.$$

Очевидно, оба последних неравенства верны при $0 < U < 3t$. Но тогда $f(t) = (6Ut^3 + 3t)^2$ и $V = 6Ut^3 + 3t$. Однако

$$f(t) - (6Ut^3 + 3t)^2 = \frac{(3t-U)(3t+U)}{3},$$

т. е. $U = 3t$ — противоречие, которое означает, что случай $U > 0$ невозможен.

В случае $U < 0$ рассуждения аналогичны. А именно, из двойного неравенства

$$(-6Ut^3 - 3t - 1)^2 < f(t) < (-6Ut^3 - 3t + 1)^2,$$

вытекает, что $V = -6Ut^3 - 3t$. Тогда $U = -3t$ и, следовательно, $V = 18t^4 - 3t$. Видно, что условие $V < L$ выполнено, при этом

$$W = 54t^4 + U\frac{\Delta}{3} = -324t^7 + 54t^4 + 3t.$$

Итак, единственное базисное решение уравнения (4.6) с условием (4.8) — это

$$(W, V) = (-324t^7 + 54t^4 + 3t,\ 18t^4 - 3t).$$

Теперь все решения (w, v) уравнения (4.6), удовлетворяющие условию (4.7), находятся из формулы

$$w + v\sqrt{\Delta} = \left(-324t^7 + 54t^4 + 3t \pm (18t^4 - 3t)\sqrt{\Delta}\right)\varepsilon^n.$$

Выберем здесь для определенности знак корня «плюс». Поскольку

$$a = \frac{u+v}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{w - 54t^4}{\Delta/3} + v\right),$$

$$b = \frac{u-v}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{w - 54t^4}{\Delta/3} - v\right),$$

мы в итоге придем к формулам (4.5). Точки (a, b) указанного вида составляют ровно половину всех целых точек гиперболы (3.2) при $\alpha = 3t^2$. □

При $n = 0$ по формулам (4.5) получим точку (3.7), а вместе с ней (применяя формулу (3.3)) и решение (3.6), с которого все и началось.

Благодарности

Авторы благодарят А. Д. Рябичева за проявленное внимание к статье и ряд полезных замечаний, несомненно способствовавших улучшению текста статьи.

Список литературы

[1] *Веребрюсовъ А. С.* Объ уравненіи $x^3+y^3+z^3=2u^3$ // Математический сборник. 1908. Т. 26, № 4. С. 622–624.

[2] *Диксон Л. Е.* Введение в теорию чисел. Тбилиси: Изд-во АН Грузинской ССР, 1941.

[3] *Казарян М. Э.*, *Ландо С. К.*, *Прасолов В. В.* Алгебраические кривые. По направлению к пространствам модулей. М.: МЦНМО, 2019.

[4] *Спивак А. В.* Арифметика-2. М.: Бюро Квантум, 2008.

[5] *Спринджук В. Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.

[6] *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М.: ИЛ, 1952.

[7] *Чанга М. Е.* Элементарная теория уравнений Пелля. М.: МПГУ, 2019.

[8] *Andreescu T.*, *Andrica D.* Quadratic Diophantine Equations. New York: Springer, 2015.

[9] *Andrews G. E.*, *Berndt B. C.* Ramanujan's Lost Notebook. Part IV. New York: Springer, 2013.

[10] *Booker A. R.*, *Sutherland A. V.* On a question of Mordell. `https://arxiv.org/abs/2007.01209`.

[11] *Dickson L. E.* Introduction to the theory of numbers. New York: Dover, 1957.

[12] *Han J. H.*, *Hirschhorn M. D.* Another Look at an Amazing Identity of Ramanujan // Mathematics Magazine. 2006. Vol. 79, № 4. P. 302–304.

[13] *Hirschhorn M. D.* An Amazing Identity of Ramanujan // Mathematics Magazine. 1995. Vol. 68, № 3. P. 199–201.

[14] *Hirschhorn M. D.* A Proof in the Spirit of Zeilberger of an Amazing Identity of Ramanujan // Mathematics Magazine. 1996. Vol. 69, № 4. P. 267–269.

[15] *Lehmer D. H.* On the diophantine equation $x^3+y^3+z^3=1$ // J. London Math. Soc. 1956. Vol. 31. P. 275–280.

[16] *Mahler K.* Note On Hypothesis K of Hardy and Littlewood // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 136–138.

[17] *Miller J. C. P.*, *Woollett M. F. C.* Solutions of the Diophantine equation $x^3+y^3+z^3=k$ // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 101–110.

[18] *Mordell L. J.* Diophantine equations. London: Academic Press Inc., 1969.

[19] *Netay I. V.*, *Savvateev A. V.* Sharygin triangles and elliptic curves // Bull. Korean Math. Soc. 2017. Vol. 54, № 5. P. 1597–1617.

[20] *Panzone P. A.* On a Formula of S. Ramanujan // Amer. Math. Monthly. 2015. Vol. 122, № 1, P. 65–69.

[21] *Ramanujan S.* The Lost Notebook and Other Unpublished Papers. New Delhi: Narosa, 1988.

[22] *Richmond H. W.* On rational solutions of $x^3 + y^3 + z^3 = R$ // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1930. Vol. 2. P. 92–100.

[23] https://www.wolfram.com/mathematica.

[24] https://pari.math.u-bordeaux.fr.

[25] https://www.alpertron.com.ar/QUAD.HTM.

[26] https://oeis.org/A003136.

[27] https://mathoverflow.net/questions/459745.

[28] https://en.wikipedia.org/wiki/Sums_of_three_cubes.

Николай Николаевич Осипов, Сибирский федеральный университет (Красноярск)

nnosipov@rambler.ru

Алексей Владимирович Савватеев, Адыгейский государственный университет (Майкоп), МФТИ, ЦЭМИ РАН

hibiny@mail.ru

Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве

А. Б. Скопенков

Содержание

§ 1. Зацепленность в трёхмерном пространстве 90
1.1. Зацепленность треугольников 90
1.2. Зацепленность по модулю 2 замкнутых ломаных 93
1.3. Коэффициент зацепления замкнутых ломаных 98
1.4. Изотопность зацеплений 100
1.5. Комбинаторная изотопность зацеплений треугольников 102
1.6. Сингулярная гомотопность зацеплений 103
1.7. Кольца и треугольники Борромео 105
1.8. Алгебраическое число пересечений 107
1.9. Коэффициент зацепления и зейфертовы цепи 111
1.10. Тройной коэффициент зацепления 113
§ 2. Зацепленность в четырёхмерном пространстве 117
2.1. Как работать с четырёхмерным пространством? 117
2.2. Зацепленность симплексов 120
2.3. Зацепленность ломаных и двумерных «многогранников» 123
2.4. Коэффициенты зацепления как пересечения в $\mathbb{R}^4$ 126
Список литературы 130

Понятие коэффициента зацепления двух непересекающихся замкнутых ломаных в пространстве — одно из важнейших базовых понятий для топологии и её приложений к физике. То же справедливо для «тройного коэффициента зацепления» трёх попарно непересека-

Статья написана по материалам спецкурсов и докладов на мехмате МГУ, на ФПМИ МФТИ, в НМУ, на Летней Конференции Турнира Городов [KRR+]. Благодарю Э. Алкина, Е. Бордачеву, Т. Гараева и А. Заславского за полезные обсуждения, а также Е. Бордачеву за перевод части текста на русский язык.

ющихся замкнутых ломаных. Важные применения этих понятий — доказательства нерасцепляемости ломаных. Говоря неформально, коэффициент зацепления — количество оборотов, которые одна ломаная делает вокруг другой. Это понятие является трёхмерной версией количества оборотов ломаной вокруг точки [Wn]. Мы приводим строгое определение, удобное для вычисления на компьютере (п. 1.3).

Сначала зацепленность изучается для простейшего случая, когда обе ломаные являются треугольниками (п. 1.1). Эта конструкция обобщается до зацепленности по модулю 2 произвольных ломаных (п. 1.2). Определение коэффициента зацепления, приведённое в п. 1.3, отличается от обычно излагаемого на математических кружках, которое использует проекцию ломаных на плоскость (см. утверждения о проекции 1.2.7 и 1.3.5, а также [Sk20u, §§ 4, 8]). Приведённое определение более естественно: оно

- не требует для доказательства его важнейшего свойства (изотопической инвариантности) технически непростого утверждения [Sk20u, теорема Рейдемейстера 3.4];
- позволяет продемонстрировать некоторые базовые идеи теории гомологий на элементарном языке, доступном неспециалистам, на примере доказательства свойств коэффициента зацепления.

Неформально, две непересекающиеся замкнутые ломаные *изотопны*, если одна может быть преобразована в другую деформацией, при которой эти ломаные остаются непересекающимися. Строгое определение даётся сначала для «комбинаторной» формализации (п. 1.5), а затем для «топологической» (п. 1.4).

В пространстве можно зацепить три кольца, чтобы их нельзя было расцепить, но после разрезания любого из них они расцеплялись. Аналогичный пример есть и для большего числа колец. Эти примеры приводятся и обсуждаются в п. 1.7 (плоский аналог приведён в [Sk20, задача 3.2.2]). Для доказательства нерасцепляемости вводится свойство зацепленности по модулю 2 трёх замкнутых ломаных (никакие две из которых не зацеплены по модулю 2). Это свойство и «тройной коэффициент зацепления» (число Милнора) трёх замкнутых ломаных определяются в п. 1.10. Приводимые определения используют тройные пересечения некоторых поверхностей, ограниченных этими ломаными. Более точно, используются комбинаторные аналоги таких поверхностей, т. е. *зейфертовы цепи* (п. 1.9). Для их определения необходим новый взгляд на «двойной» коэффициент зацепления — основы комбинаторной (алгебраической) теории пересечений в пространстве (п. 1.8).

Многие области знания и техники — прежде всего математика, программирование и физика — часто работают с многомерным пространством. Изучение п. 2.1 позволит освоить базовые навыки такой работы: развивать пространственное воображение и интуицию, а также проверять их строгими рассуждениями. Это полезно для последующего изучения компьютерной графики и необходимой для неё базы из линейной алгебры и геометрии. В п. 2.1 не требуется предварительных знаний по стереометрии. Полезны пространственное воображение и умение решать системы линейных уравнений (см. задачу 2.1.2). В пп. 2.2–2.4 приводятся простейшие аналоги предыдущего материала для зацепленности в четырёхмерном и в многомерном пространстве.

В этом тексте «трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3$» коротко называется «пространством». Если не оговорено противное, то фигуры рассматриваются в пространстве, и слова «в пространстве» часто пропускаются. Под *треугольником* Δ подразумевается часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной (контуром) $\partial\Delta$. «Кусочно-линейный» сокращается до «PL».

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших (обычно маломерных) частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счёт этого и текст становится доступным для начинающих, и удаётся быстро добраться до интересных, сложных и важных результатов, методов и теоретических идей. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировок. Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», вспомогательные результаты — «леммами».

Изучение путём решения задач не только характерно для серьёзного изучения математики [HC19, § 1.1], [ZSS, § 1.2], но и продолжает древнюю культурную традицию. В тексте имеется небольшое количество задач (полезно рассматривать и утверждения как задачи). Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). Указания к задачам

приводятся либо сразу, либо в конце параграфа. *Загадкой* называется не сформулированный чётко вопрос; здесь нужно придумать и чёткую формулировку, и доказательство. Если номер задачи помечен звёздочкой, то эта задача посложнее соседних.

Определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

Замечания формально не используются в дальнейшем.

§ 1. Зацепленность в трёхмерном пространстве

1.1. Зацепленность треугольников

В этом пункте Δ и Δ' — невырожденные треугольники (в пространстве), контуры которых не пересекаются.

Пусть сначала никакие четыре из вершин двух треугольников не лежат в одной плоскости. Треугольники называются **зацепленными**, если контур первого пересекает второй ровно в одной точке. См. пример на рис. 1.1.1 и [Sk14, рис. 2].

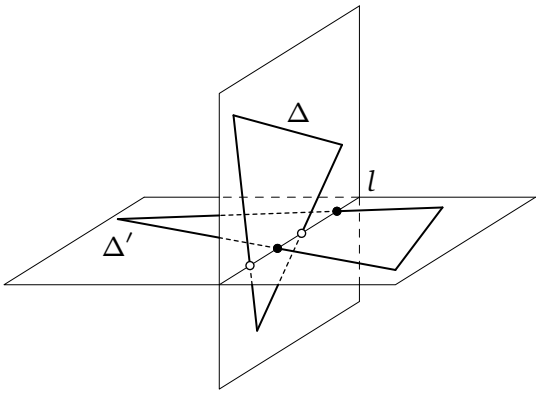


Рис. 1.1.1. Зацепленные треугольники и зацепленные пары точек

В общем случае треугольники Δ и Δ' называются **зацепленными**, если выполнено любое из следующих равносильных условий.

Задача 1.1.1. Следующие условия равносильны.

(1) Каждый из треугольников пересекает контур другого.

(2) Пересечение треугольников есть отрезок, концы которого лежат на контурах разных треугольников.

(3) Пересечение $\partial\Delta \cap \Delta'$ есть одна точка, и два отрезка контура $\partial\Delta$, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости треугольника Δ'.

(3') То же, что в (3), с переменой местами Δ и Δ'.

(4) Плоскость треугольника Δ' пересекает контур $\partial\Delta$ в двух точках, лежащих по разные стороны от контура $\partial\Delta'$ (такая пара точек называется *зацепленной* с $\partial\Delta'$).

(4') То же, что в (4), с переменой местами Δ и Δ'.

(5) Плоскости треугольников пересекаются по прямой, пересечение которой с контуром каждого из треугольников есть пара точек, причём эти пары точек чередуются вдоль прямой (такие пары точек называются *зацепленными* на прямой; рис. 1.1.1).

Указание. Пересечение $\Delta \cap \Delta'$ является либо пустым, либо одной точкой, либо отрезком.

Предложение 1.1.2 (о проекции). *Пусть никакие четыре из точек A, B, C, D, E, F, O не лежат в одной плоскости. Тогда следующие три условия равносильны.*

(1) *Треугольники ABC и DEF зацеплены.*

(2) *Отрезок BC* проходит ниже *ровно одной из сторон треугольника DEF при взгляде из точки A (т. е. существует единственная пара (P, x), состоящая из точки $P \in BC$ и стороны x треугольника DEF, такая что отрезок AP пересекает сторону x).*

(3) *Контур треугольника ABC проходит ниже нечётного числа сторон треугольника DEF при взгляде из точки O.*

Равносильность (1) $\Leftrightarrow$ (2) вытекает из того, что, когда P пробегает отрезок BC, отрезки AP заметают треугольник ABC. Равносильность (1) $\Leftrightarrow$ (3) есть [Sk14, лемма 2.6] (она там же несложно доказана).

Задача 1.1.3. Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников?

Задача 1.1.4. В пространстве имеется 13 точек: 3 красных и 10 жёлтых. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Тогда количество жёлтых треугольников, зацепленных с красным треугольником, чётно. *Красным* (*жёлтым*) *треугольником* называется любой треугольник с красными (жёлтыми) вершинами. Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.

Задача 1.1.5. Для любых 6 точек $0, 1, 2, 3, 4, 5$

(a) если любые два объекта из треугольников $0jk$, $1 \leqslant j < k \leqslant 5$, $k \neq 2$, и отрезка 12 не имеют общих внутренних точек, то контур треугольника 012 пересекает треугольник 345; более того, треугольники 012 и 345 зацеплены;

(b) если любые два объекта из треугольников $0jk$, $1 \leqslant j < k \leqslant 5$, $(j, k) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$, и отрезков 12, 13 не имеют общих внутренних

точек, то зацеплены либо треугольники 012 и 345, либо треугольники 013 и 245;

(c) если любые два объекта из треугольников $0jk$, $1 \leqslant j < k \leqslant 5$, $(j,k) \notin \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$, и отрезков 12, 13, 14 не имеют общих внутренних точек, то зацеплены либо треугольники 012 и 345, либо треугольники 013 и 245, либо треугольники 014 и 235.

(d) Попробуйте угадать утверждение!

Утверждения 1.1.5.abc следуют из количественной линейной теоремы Конвея — Гордона — Закса [Sk14, теорема 1.2'], ср. теорему 1.2.9.a. Утверждения [Sk18, 1.7.1 и 1.7.2], 1.1.5 и 2.2.4 иллюстрируют некоторые идеи доказательства теоремы об NP-трудности [Sk18, 3.8.3].

Подсказка к части задачи 1.1.1. Обозначим через l прямую из (5).

Доказательство импликации (3)&(3′) $\Rightarrow$ (5). Ввиду (3), Δ пересекает плоскость треугольника Δ', поэтому $\Delta \cap l \neq \varnothing$. Пересечение $\Delta \cap l$ содержит только две точки, назовём их A, B. Аналогично, ввиду (3'), пересечение $\Delta' \cap l$ содержит только две точки, назовём их A', B'. Пересечение $\Delta' \cap \partial\Delta$ содержится в отрезке $A'B'$. Значит, ровно одна из точек A и B лежит на отрезке $A'B'$. Поэтому пары A, B и A', B' зацеплены в l.

Доказательство импликации (4)&(5)$\Rightarrow$(3). Предположим, что пары $\{A,B\} = \Delta \cap l$ и $\{A',B'\} = \Delta' \cap l$ зацеплены в l. Тогда (3) следует из (4).

Подсказка к 1.1.3. Ответ: да.

Решение (придумано Е. Коганом, предварительная версия написана Р. Карасевым). Возьмём правильный треугольник T. Обозначим через AB одну из его высот, а через $R^\varepsilon = R^{\varepsilon,\varepsilon}_{AB}$ преобразование пространства, являющееся композицией переноса на вектор $\varepsilon\overrightarrow{AB}$ и вращения вокруг $\overrightarrow{AB}$ на угол ε (винтовое движение). При достаточно малом ε треугольники T и $R^\varepsilon(T)$ зацеплены, так как пересечение их плоскостей содержит высоты каждого из них и в этом пересечении контур одного из них проходит через выпуклую оболочку другого. Поэтому треугольники

$$R^{m\varepsilon/100}(T) \quad \text{и} \quad R^{n\varepsilon/100}(T) = R^{(n-m)\varepsilon/100}(R^{m\varepsilon/100}(T))$$

зацеплены при любых $0 \leqslant m < n < 100$.

Отредактированное решение Ю. Семенова. Покажем, как строить пример по индукции. Пусть у нас есть несколько попарно зацепленных треугольников и контур одного из них находится на расстоянии не менее ε от контуров всех других. Тогда этот треугольник T можно пошевелить менее чем на ε и получить треугольник T', зацепленный с T

(например, работает конструкция из предыдущего решения для двух треугольников). Так как при шевелении контур двигался менее чем на ε, то контур движущегося треугольника не пересекал контуры других треугольников. Следовательно, T' зацеплен с каждым из остальных треугольников, как и T (см. утверждение 1.4.1.b и замечание 1.4.6).

Подсказка к 1.1.4. Чётность этого количества равна сумме количеств точек пересечения (выпуклых оболочек) жёлтых треугольников с контуром красного. Эта сумма чётна, поскольку объединение жёлтых треугольников разлагается в сумму по модулю 2 поверхностей некоторых тетраэдров. Ср. утверждение 1.8.5.a и лемму о чётности 1.8.2.

Решение И. Богданова. Рассмотрим полный двудольный граф на множестве жёлтых точек: одна доля — точки с одной стороны от плоскости красного треугольника, другая — с другой. Покрасим ребро в красный, если оно пересекает красный треугольник, и в чёрный иначе. Тогда количество треугольников, зацепленных с красным, — это количество пар разноцветных рёбер с общим концом (назовём их галками).

Если обе доли нечётны, то количество галок с центром в любой вершине чётно.

Если обе доли чётны, то количество галок с центром в данной вершине нечётно тогда и только тогда, когда её (красная) степень нечётна. Поскольку количество таких вершин чётно, то и общее количество галок тоже чётно.

1.2. Зацепленность по модулю 2 замкнутых ломаных

Узлом называется замкнутая несамопересекающаяся ломаная. **Зацеплением** называется набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления (рис. 1.2.1). Такие упорядоченные наборы называются упорядоченными или раскрашенными зацеплениями, а такие неупорядоченные наборы называются неупорядоченными или нераскрашенными зацеплениями. В дальнейшем мы будем сокращать «упорядоченное зацепление» до «зацепление», поскольку будем рассматривать только упорядоченные зацепления.

В пп. 1.2, 1.3 через a и b обозначены непересекающиеся узлы.

Говоря неформально, двухкомпонентное зацепление *зацеплено по модулю* 2, если поверхность «общего положения» («случайная»), натянутая на первую компоненту, пересекает вторую компоненту в нечётном числе точек (см. подробнее замечание 1.2.8.a). Путь к удобной формализации этого понятия не так короток. Во-первых, поверхность

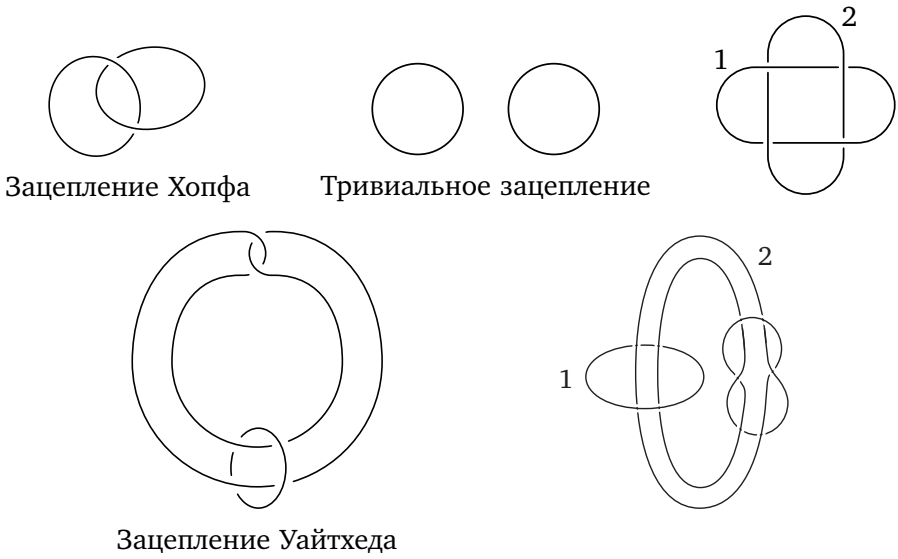


Рис. 1.2.1. Примеры зацеплений

удобно взять самопересекающейся, а тогда и просто «диском» (подробнее см. замечание 1.2.8.b,d). Во-вторых, вместо этой поверхности (или диска) удобно рассматривать набор треугольников, т. е. вместо геометрического объекта — алгебраический. Последнее подводит к одной из основных идей теории гомологий (см. также более общее определение зацепленности по модулю 2 в п. 1.9).

Точка O находится **в общем положении** с зацеплением (a, b), если для каждого ребра MN узла a выполнено $b \cap \partial OMN = \varnothing$ и OMN не содержит вершин узла b.

Например, один треугольник внутри другого в плоскости образуют зацепление, для которого никакая вершина треугольников не находится в общем положении с зацеплением.

Задача 1.2.1. Какие точки куба находятся в общем положении с границами противоположных граней куба?

Лемма 1.2.2. (a) *В любом двухкомпонентном зацеплении есть точка, находящаяся в общем положении с этим зацеплением.*

(b) *Если точка O находится в общем положении с (a, b), то для каждого ребра MN узла a пересечение $OMN \cap b$ состоит из конечного числа точек.*

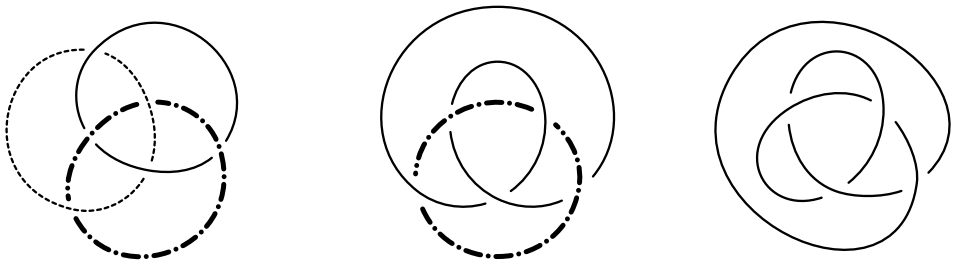
Пункт (b) следует из того, что для каждого ребра MN узла a и для каждого ребра PQ узла b пересечение $OMN \cap PQ$ либо пусто, либо является внутренней точкой как треугольника OMN, так и отрезка PQ.

Узлы a, b (или зацепление (a, b)) называются **зацепленными по модулю 2**, если существует точка O в общем положении с (a, b), для которой нечётна сумма

$$\sum_{MN} |OMN \cap b|,$$

где суммирование ведётся по рёбрам MN узла a. Корректность определения следует из леммы 1.2.2.a.

Задача 1.2.3. Какие из зацеплений на рис. 1.2.1 и 1.2.2.bw зацеплены по модулю 2? (Возьмите любые зацепления с данными проекциями на ваш выбор; используйте без доказательства лемму 1.2.4.a.)



(b) (w) (t)

Рис. 1.2.2. Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

Определение связной суммы зацеплений приведено, например, в [Sk20u, конец § 7].

Лемма 1.2.4. (a) *Зацепление (a, b) является зацепленным по модулю 2 тогда и только тогда, когда сумма $\sum_{MN} |OMN \cap b|$ нечётна для каждой точки O в общем положении с зацеплением.*

(b) *Два треугольника, имеющие непересекащиеся контуры, зацеплены (в смысле п. 1.1) тогда и только тогда, когда они зацеплены по модулю 2 (в смысле этого раздела).*

(c) *Зацепленность по модулю 2 является «аддитивной» по отношению к связной сумме двухкомпонентных зацеплений.*

Подсказка. В утверждении (a) используйте лемму 1.2.5.

Ясно, что если ломаная не пересекает контур треугольника и ни одна из вершин ломаной не лежит в треугольнике, то ломаная пересекает треугольник в конечном числе точек (ср. [Sk18, утверждение 1.3.1]).

Лемма 1.2.5 (о чётности; ср. [Sk18, лемма о чётности 1.3.2]). *Даны замкнутая несамопересекающаяся ломаная и тетраэдр. Ломаная не*

пересекает рёбер тетраэдра, и ни одна из вершин ломаной не лежит на поверхности тетраэдра. Тогда ломаная пересекает поверхность тетраэдра в чётном числе точек.

Указание. Тетраэдр разбивает пространство, далее аналогично [Sk18, лемма о чётности 1.3.2.a].

Обозначим через $\partial XYZT$ поверхность тетраэдра $XYZT$.

Набросок доказательства леммы 1.2.4.a. Пусть *пара точек* $\{O, O'\}$ *находится в общем положении* с (a, b) (определите это так, чтобы приведённое доказательство было верным!). Тогда

$$\sum_{MN}(|OMN \cap b| + |O'MN \cap b|) \underset{2}{\equiv} \sum_{MN} |\partial OO'MN \cap b| \underset{2}{\equiv} 0.$$

Здесь суммирование ведётся по рёбрам MN узла a. Второе сравнение следует из леммы 1.2.5.

Если каждая из двух точек O, O' находится в общем положении с зацеплением, то существует точка O'', для которой каждая из пар $\{O, O''\}$ и $\{O'', O\}$ находится в общем положении с зацеплением. □

Предложение 1.2.6 (о симметричности). *Зацепленность по модулю* 2 *пары ломаных не зависит от порядка ломаных.*

Подсказка. Используйте либо сингулярные конусы, либо утверждение о проекции 1.2.7.

Набросок доказательства утверждения 1.2.6 с использованием сингулярного конуса. Пусть *пара точек* (O, O') *находится в общем положении* с зацеплением (a, b) (определите это так, чтобы приведённое доказательство было верным!). Тогда

$$\sum_{MN} |OMN \cap b| \overset{(1)}{=} \sum_{MN,\,PQ} |OMN \cap PQ| \overset{(2)}{\equiv} \sum_{MN,\,PQ} |OMN \cap \partial O'PQ| \overset{(3)}{\equiv}$$
$$\overset{(3)}{\equiv} \sum_{MN,\,PQ} |\partial OMN \cap O'PQ| \overset{(4)}{\equiv} \sum_{PQ} |a \cap O'PQ|.$$

Здесь суммирование ведётся по всем рёбрам MN узла a и рёбрам PQ узла b; сравнения по модулю 2. Сравнение (3) справедливо, поскольку

- либо $OMN \cap O'PQ = \varnothing$, тогда $OMN \cap \partial OPQ = \partial OMN \cap O'PQ = \varnothing$,
- либо $OMN \cap O'PQ$ является невырожденным отрезком, имеющим два конца, тогда $|OMN \cap \partial O'PQ| \underset{2}{\equiv} |\partial OMN \cap O'PQ|$.

Сравнение (4) аналогично сравнениям (1) и (2). □

Предложение 1.2.7 (о проекции; ср. утверждение о проекции 1.1.2). *Пусть вершины ортогональной проекции некоторого двухкомпонентного зацепления на некоторую плоскость находятся в общем положении (см. определение в* [Sk18, п. 1.3]). *В точках, где проекции компонент пересекаются, отметим, какая из компонент «проходит выше» другой (как на рис.* 1.2.1 *и* 1.2.2). *Зацепление является зацепленным по модулю* 2 *тогда и только тогда, когда число точек пересечения, где первая компонента проходит выше второй, нечётно.*

Замечание 1.2.8. (a) Пусть существует «изотопия» ([Sk20u, § 1], п. 1.4) между двумя двухкомпонентными зацеплениями, причём вторая компонента не меняется при этой гомотопии. Тогда след первой компоненты является сингулярным (т. е. криволинейным и самопересекающимся) цилиндром, не пересекающимся со второй компонентой. Если после изотопии компоненты содержатся в непересекающихся шарах, то цилиндр может быть дополнен до сингулярного диска, не пересекающего второй компоненты. Это мотивирует неформальное описание в начале п. 1.2.

(b) Для точки O и подмножества $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *сингулярным конусом* $O * \Gamma$ над Γ называется объединение отрезков $\bigcup_{M \in \Gamma} OM$. Если $OM \cap ON = \{A\}$ для каждых двух различных точек $M, N \in \Gamma$, то сингулярный конус называется просто *конусом*.

(c) Существуют зацепление (a, b) и точка O в общем положении с этим зацеплением, такие что зацепление является зацепленным по модулю 2, но $|(O * a) \cap b|$ чётно. (Действительно, возьмём узел a, у которого есть непересекающиеся скрещивающиеся рёбра PQ и RS, возьмём точку O, такую что треугольники OPQ и ORS имеют общую точку, отличную от O, и возьмём узел b, проходящий через эту точку.)

(d) Следующее эквивалентное определение зацепленности по модулю 2 более наглядно, но с ним сложнее работать (поскольку (c) показывает, что нужно более сильное условие общего положения, приведённое ниже).

Зацепление (a, b) является *зацепленным по модулю* 2, если $|(O * a) \cap b|$ нечётно для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) точки O, такой что

- ни одна вершина узла b не принадлежит $O * a$ и
- если M является либо вершиной ломаной a, либо точкой ломаной a, для которой внутренность отрезка OM пересекает a, то $b \cap OM = \varnothing$.

Предложение 1.2.9. (a) (Конвей — Гордон — Закс) *В пространстве даны* 6 *точек. Любые две из них соединены несамопересекающейся ло-*

маной, причём пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных по модулю 2 *цикла длины* 3. (*Иными словами, в образе любого* кусочно-линейного вложения *графа* K_6 *в пространство найдутся два зацепленных по модулю* 2 *цикла длины* 3.)

(b) (Закс) *В пространстве даны* 4 *красные и* 4 *синие точки. Любые две разноцветные из них соединены несамопересекающейся ломаной, причём пересекаются только ломаные, имеющие общий конец, и только в этом конце. Тогда найдутся два зацепленных по модулю* 2 *цикла длины* 4. (*Иными словами, в образе любого кусочно-линейного вложения графа* $K_{4,4}$ *в пространство найдутся два зацепленных по модулю* 2 *цикла длины* 4.)

Эти утверждения доказываются аналогично их «линейным» аналогам [Sk14, § 2]. См. простое доказательство в [Zi13].

1.3. Коэффициент зацепления замкнутых ломаных

Мотивировки к нижеприведённому строгому определению коэффициента зацепления аналогичны мотивировкам, приведённым в начале п. 1.2. Альтернативные определения приведены в утверждении о проекции 1.3.5, в замечании 1.3.6.ab, а также в п. 1.9.

Отрезок и треугольник называются *трансверсальными*, если вектор e отрезка вместе с базисом f_1, f_2 плоскости треугольника образуют базис e, f_1, f_2 пространства.

Знаком $\operatorname{sgn} X$ точки пересечения X трансверсальных ориентированных отрезка и треугольника называется число $+1$, если вектор e отрезка вместе с положительным базисом f_1, f_2 треугольника образуют положительный базис e, f_1, f_2 пространства, и число -1 в противном случае. Иными словами, *знаком* называется число $+1$, если ориентации отрезка и треугольника согласованы по правилу *левой руки* (*левого винта*), и -1, если не согласованы.

Коэффициентом зацепления $\operatorname{lk}(a, b)$ ориентированного зацепления (a, b) называется

$$\operatorname{lk}(a, b) := \sum_{MN} \sum_{X \in OMN \cap b} \operatorname{sgn} X,$$

где точка O находится в общем положении с зацеплением и первое суммирование ведётся по ориентированным рёбрам MN узла a.

Задача 1.3.1. Найдите коэффициенты зацепления зацеплений на рис. 1.2.1. (Возьмите некоторую ориентацию зацеплений с данной проекцией на ваш выбор; используйте без доказательства лемму 1.3.2.a.)

Лемма 1.3.2. (a) (Ср. лемму 1.2.4.a.) *Коэффициент зацепления корректно определён, т. е. не зависит от выбора точки O.*

(b) *Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует ориентированное зацепление, имеющее коэффициент зацепления n.*

(c) *Коэффициент зацепления аддитивен по отношению к связной сумме двухкомпонентных зацеплений.*

(d) *Для каждой тройки целых чисел k, l, m существует трёхкомпонентное ориентированное зацепление с попарными коэффициентами зацепления k, l, m.*

Лемма 1.3.2.a и утверждения 1.3.4, 1.3.5, 1.4.4 доказываются аналогично их аналогам по модулю 2, с использованием подходящей версии следующей леммы.

Лемма 1.3.3 (ср. [Sk18, лемма о тривиальности 1.3.3] и лемму о чётности 1.2.5). *Даны замкнутая ориентированная несамопересекающаяся ломаная и ориентированный тетраэдр* (*т. е. тетраэдр с согласованными ориентациями граней*, см. рис. 1.3.1). *Ломаная не пересекает рёбер тетраэдра, и ни одна из вершин ломаной не лежит на поверхности тетраэдра. Тогда сумма знаков точек пересечения ломаной и поверхности тетраэдра нулевая.*

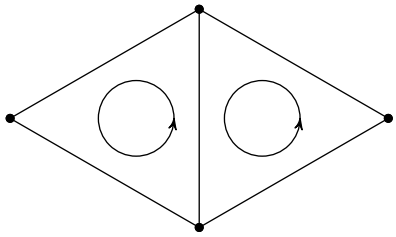


Рис. 1.3.1. Согласованные ориентации

Предложение 1.3.4 (о симметричности). (a) (Ср. утверждение о симметричности 1.2.6.) *Коэффициент зацепления пары ломаных не зависит от порядка ломаных.*

(b) *Изменение ориентации одной из компонент меняет коэффициент зацепления на противоположный.*

(c) *Зеркальная симметрия меняет коэффициент зацепления на противоположный.*

Предложение 1.3.5 (о проекции). *В условиях утверждения о проекции* 1.2.7, *для ориентированного зацепления коэффициент зацепления равен сумме* знаков (определение приведено в [Sk18, п. 1.6]) *тех точек пересечения, в которых первая компонента проходит над второй.*

Замечание 1.3.6. (a) Пусть $f, g : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — (кусочно-линейные, гладкие или непрерывные) отображения с непересекающимися образами. Коэффициент зацепления их ориентированных образов равен *степени* [Sk20, § 8] отображения $S^1 \times S^1 \to S^2$, определяемого формулой

$$(x, y) \mapsto \frac{f(x) - g(y)}{|f(x) - g(y)|}.$$

(b) Для непересекающихся гладких замкнутых кривых

$$f, g \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

имеем

$$\mathrm{lk}(f, g) = \int\limits_{[0,\,2\pi]^2} \frac{f(x) - g(y)}{|f(x) - g(y)|^3} \wedge f'(x) \wedge g'(y)\, dx\, dy.$$

(c) Для *вложения* графа в $\mathbb{R}^3$ можно определить аналог коэффициента зацепления — *инвариант Ву* (аналогично [Sk18, пп. 1.5, 1.6]). См. подробнее [Sk06, §§ 4, 5].

(d) См. [Sk, утверждения 6.13.2.abc] и дальнейшие обсуждения в [BE82, § 19], [RN11].

1.4. Изотопность зацеплений

Предложение 1.4.1 (устойчивость). *Для любого двухкомпонентного зацепления существует $\delta > 0$, такое что при любом сдвиге вершин ломаных на расстояния, не превышающие δ,*

(a) *сдвинутые компоненты не пересекаются*;

(b) *сдвинутые компоненты зацеплены по модулю* 2 *тогда и только тогда, когда исходные компоненты зацеплены по модулю* 2.

Часть (a) доказывается несложно. А вот для доказательства части (b) полезно понятие изотопности зацеплений, введённое ниже.

Пусть стороны AC и CB треугольника ABC — рёбра некоторого узла, не пересекающего треугольник ABC ни в каких других точках. *Элементарная изотопия* $ACB \to AB$ — замена двух рёбер AC и CB ребром AB (рис. 1.4.1). Два узла называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если их можно соединить последовательностью

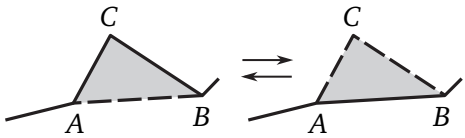


Рис. 1.4.1. Элементарная изотопия

узлов, в которой соседние получаются друг из друга элементарной изотопией.

Аналогичным образом определяется изотопность зацеплений.

Предложение 1.4.2. *Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) двухкомпонентные зацепления одновременно зацеплены по модулю* 2 *или не зацеплены по модулю* 2.

Набросок доказательства. Достаточно рассмотреть элементарную изотопию $ACB \to AB$, меняющую зацепление (a, b) на зацепление (a', b). Существует точка O *общего положения*, т. е.

- находящаяся в общем положении с (a, b), в общем положении с (a', b), причём
- такая что никакая вершина ломаной b не лежит на поверхности тетраэдра $OABC$ и b не пересекает рёбер $OABC$.

Так как $ABC \cap b = \varnothing$, то по лемме о чётности 1.2.5 имеем

$$|OAC \cap b|_2 + |OCB \cap b|_2 = |OAB \cap b|_2.$$

Используя точку O, заметим, что зацепления (a, b) и (a_1, b) либо оба зацеплены по модулю 2, либо оба не зацеплены по модулю 2. □

Тривиальным зацеплением (с любым числом компонент) называется зацепление, состоящее из попарно непересекающихся треугольников.

Пример 1.4.3. Существует двухкомпонентное зацепление, не зацепленное по модулю 2 и не изотопное тривиальному.

В качестве примера можно взять любое зацепление с коэффициентом зацепления 2, например, третье зацепление на рис. 1.2.1. Неизотопность доказывается при помощи коэффициента зацепления; она следует из результата задачи 1.3.1, леммы 1.3.2.a и утверждения 1.4.4.ab.

Предложение 1.4.4. (a) *Изотопные ориентированные двухкомпонентные зацепления имеют равные коэффициенты зацепления.*

(b) *Изотопные двухкомпонентные зацепления имеют равные модули коэффициентов зацепления.*

Пример 1.4.5. Существует двухкомпонентное зацепление, имеющее нулевой коэффициент зацепления, но не изотопное тривиальному.

Примером является зацепление Уайтхеда (рис. 1.2.2.w и предпоследнее зацепление на рис. 1.2.1). Неизотопность доказывается через «высший коэффициент зацепления» (число Сато — Левина); она следует из результатов задач 1.10.10.abg.

Замечание 1.4.6. Справедлив аналог утверждений 1.4.1.ab для треугольников и их зацепленности. Обсудим доказательство аналога утверждения 1.4.1.b.

Пусть никакие четыре из шести вершин двух треугольников не лежат в одной плоскости. Количество точек пересечения отрезков и треугольников (из пяти вершин которых никакие четыре не лежат в одной плоскости) сохраняется при достаточно малом шевелении этих пяти вершин. Тогда аналог утверждения 1.4.1.b вытекает из следующего результата (который следует из простого частного случая леммы 1.2.5).

Пусть никакие четыре из семи вершин треугольника Δ *и точек* A, B, C, X, Y, Z, Z' *не лежат в одной плоскости. Если* $(XZZ' \cup YZZ') \cap \partial\Delta = \varnothing$, *то пары* (Δ, XYZ) *и* (Δ, XYZ') *либо обе зацеплены, либо обе не зацеплены.*

Интересно, что перенесение столь естественного рассуждения на общий случай включает технические сложности, поэтому для общего случая удобнее использовать более общее понятие зацепленности ломаных по модулю 2: аналог утверждения 1.4.1.b вытекает из утверждения 1.4.1.b и леммы 1.2.4.b.

1.5. Комбинаторная изотопность зацеплений треугольников

Если вершины двух треугольников движутся непрерывно так, что контуры треугольников в любой момент не пересекаются, то треугольники остаются зацепленными или незацепленными. Строгая формулировка этого факта на «дискретном» языке (утверждение 1.5.1.a) использует нижеприведённое понятие комбинаторной изотопности.

Мы не различаем треугольники, отличающиеся перестановкой вершин. Пусть (Δ, XYZ) — зацепление двух треугольников, а Z' — точка вне прямой XY, для которой $(XZZ' \cup YZZ') \cap \partial\Delta = \varnothing$. Тогда *элементарной комбинаторной изотопией* назовём замену XYZ на XYZ'. *Элементарной комбинаторной изотопией* назовём также аналогичное преобразование первого треугольника при неизменном втором. Два зацепления треугольников назовём *комбинаторно изотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений треугольников, в которой соседние получаются друг из друга элементарной комбинаторной изотопией.

Предложение 1.5.1. (a) *Комбинаторно изотопные зацепления треугольников одновременно зацеплены или не зацеплены.* (*Значит, существуют два зацепления треугольников, не являющиеся комбинаторно изотопными.*)

(b) *Если два треугольника не зацеплены, то образованное ими зацепление комбинаторно изотопно тривиальному зацеплению треугольников.*

(c) *Любые две пары зацепленных треугольников комбинаторно изотопны.*

Пункт (a) следует из утверждения 1.4.1.b (или из леммы 1.2.4.b или утверждения 1.4.2), поскольку элементарную комбинаторную изотопию можно сделать за две элементарные изотопии. Пункт (c) вытекает из свойства 1.1.1.(2); записать доказательство интересно, ибо оно даст алгоритм преобразования пары зацепленных треугольников к стандартному виду, а также позволит подойти к гипотезам 2.2.6, 2.2.8. Ср. [Ko19], [Sk20u, утверждение 4.5].

Замечание 1.5.2. (a) Из утверждений 1.5.1.bc вытекает, что *любое зацепление треугольников комбинаторно изотопно либо тривиальному зацеплению, либо либо зацеплению Хопфа*, см. рис. 1.2.1. (Иными словами, два треугольника зацеплены тогда и только тогда, когда соответствующее зацепление не тривиально.)

(b) Было бы интересно доказать, что существуют три *зацепления ориентированных треугольников*, для которых любое такое зацепление *ориентированно комбинаторно изотопно* одному из них. (Дайте необходимые определения самостоятельно. Это аналог утверждений 1.5.1.bc.)

(c) Из утверждения 1.5.1.c вытекает, что комбинаторная изотопность пар треугольников равносильна изотопности (определённой в п. 1.4). Было бы интересно выяснить, равносильны ли они для зацеплений более двух треугольников.

1.6. Сингулярная гомотопность зацеплений

Введём естественное понятие *сингулярной гомотопности* зацеплений, относительно которого «полным» инвариантом двухкомпонентных зацеплений является коэффициент зацепления (теорема 1.6.1, ср. с примером 1.4.5). «Полным» инвариантом трёхкомпонентных зацеплений относительно сингулярной гомотопности окажется «тройной» коэффициент зацепления, введённый в п. 1.10 (см. теорему Милнора 1.7.4).

Говоря неформально, два зацепления называются *сингулярно гомотопными*, если одно из зацеплений можно привести к другому непрерывной деформацией, при которой не возникает пересечений разных компонент (но могут появляться самопересечения компонент).

Приведём строгое определение (для неориентированных зацеплений; определение для ориентированных зацеплений аналогично).

Пусть AC и CB являются последовательными рёбрами одной компоненты a зацепления и ни одна из остальных компонент не пересекает треугольника ABC. *Элементарной сингулярной гомотопией* называется замена в a двух рёбер AC и CB ребром AB. Два зацепления называются *сингулярно гомотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений, в которой каждые два соседних зацепления элементарно сингулярно гомотопны. (Или, что эквивалентно, если некоторая плоская диаграмма одного зацепления может быть преобразована в некоторую плоскую диаграмму второго зацепления движениями Рейдемейстера и изменениями перекрёстков одной из компонент, все эти определения приведены в [Sk20u, § 3].)

Например, зацепление Уайтхеда сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

Приведём стандартное более общее определение (используемое только в замечании 1.6.2). Отображение $f\colon X_1 \sqcup X_2 \to \mathbb{R}^3$ называется *сингулярным зацеплением*, если $f(X_1) \cap f(X_2) = \varnothing$. Более общо, отображение $f\colon X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n \to \mathbb{R}^3$ называется *сингулярным зацеплением*, если $f(X_i) \cap f(X_j) = \varnothing$ для любых i, j. Сингулярные зацепления $f_0, f_1\colon X \to \mathbb{R}^3$, где $X := X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$, называются *сингулярно гомотопными*, если существует семейство $f_t\colon X \to \mathbb{R}^3$ сингулярных зацеплений, непрерывно зависящих от $t \in [0, 1]$.

Теорема 1.6.1. *Ориентированные двухкомпонентные зацепления сингулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их коэффициенты зацепления равны.*

Необходимость доказывается аналогично утверждению 1.4.4.a. Доказательство достаточности сложнее, и мы не рекомендуем начинающему пытаться его придумать (сначала приводят первые компоненты к «стандартным», а затем совмещают вторые компоненты в дополнении к совпадающим стандартным первым).

Замечание 1.6.2. (a) Возьмём двухкомпонентное сингулярное зацепление, у которого первая компонента — одно из колец Борромео (рис. 1.2.2.b), а вторая — объединение других двух колец. Это сингулярное зацепление сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению.

(b) Двухкомпонентные сингулярные зацепления, состоящие из дизъюнктного объединения двух графов (не обязательно связных), сингулярно гомотопны тогда и только тогда, когда у них равны наборы коэффициентов зацепления для циклов из разных компонент [Sk00].

1.7. Кольца и треугольники Борромео

Пример 1.7.1 (кольца Борромео). (a) Существует трёхкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному, каждое двухкомпонентное подзацепление которого изотопно тривиальному (рис. 1.2.2.b и 1.7.1).

(b) Для каждого r существует r-компонентное зацепление, не изотопное тривиальному, каждое $(r-1)$-компонентное подзацепление которого изотопно тривиальному [BL, BL4].

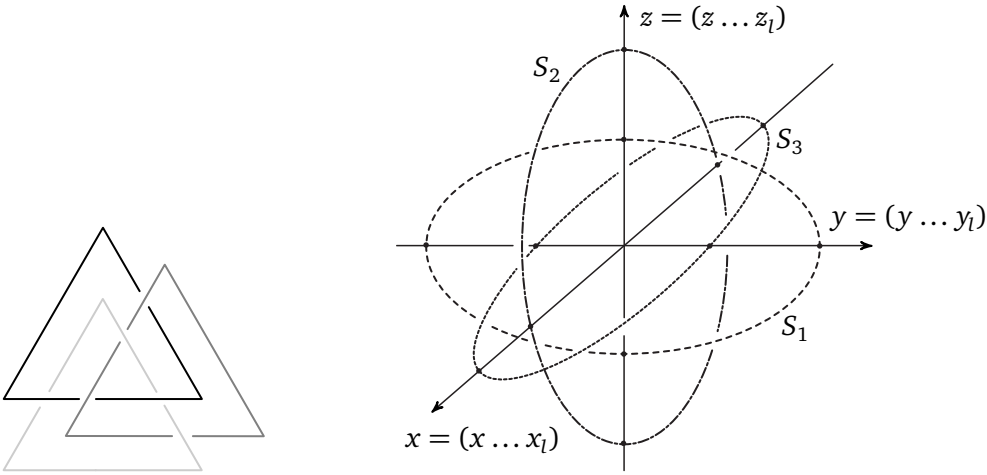


Рис. 1.7.1. Слева: треугольники Борромео. Справа: эллипсы Борромео

В качестве колец Борромео можно взять три эллипса (рис. 1.7.1, справа), заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 2z^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Построение колец Борромео при помощи тора. См. рис. 1.7.2. Рассмотрим *стандартный тор*, т. е. фигуру, образованную вращением окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy. Первая кривая — окружность вне тора, близкая к меридиану тора. Вторая кривая — окружность вне тора, зацепленная с меридианом тора и пересекающая тор в двух точках. Третья кривая — кривая на торе, близкая к границе квадрата, полученного из тора разрезанием вдоль параллели и меридиана.

Ясно, что построенные три ломаные (или кривые) попарно не зацеплены. Нетривиальность в примере 1.7.1.a следует из лемм 1.10.1.ab и утверждения 1.10.2. Аналогично доказываются пример 1.7.1.b и утверждения 1.7.3.ab.

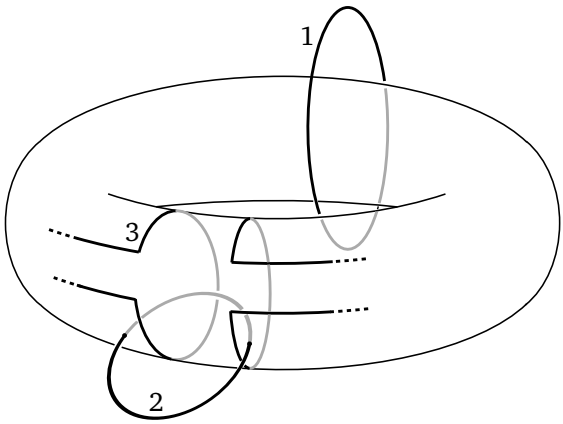


Рис. 1.7.2. Построение колец Борромео при помощи тора

Другое доказательство нерасцепляемости использует *фундаментальную группу* (см., например, [Sk20, п. 14.1]). Приведём это доказательство для построения на рис. 1.7.2. Обозначим через S и S' первую и вторую кривую. Группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S - S')$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. Параллель и меридиан тора (произвольно ориентированные) представляют первую и вторую образующие соответственно. Третья кривая представляет их коммутатор. Так как он не равен единице и даже не сопряжён с ней, то третья кривая не гомотопна вне $S \cup S'$ отображению в точку.

Задача 1.7.2. (a) Существует три треугольника, проекции которых показаны на рис. 1.7.1 слева (ср. [Val, CKS+, GSS+]).

(b) (нерешённая задача) При каких r существует r попарно непересекающихся треугольников со свойством из примера 1.7.1.b?

(c) (нерешённая задача) Опишите классы комбинаторной изотопности зацеплений трёх треугольников. (*Комбинаторная изотопность* зацеплений из трёх треугольников определяется аналогично случаю пар. Гипотеза и продвижения приведены в [Ko19].)

Задача 1.7.3. (a) Существуют два не изотопных (даже не сингулярно гомотопных) ориентированных трёхкомпонентных зацепления с попарными коэффициентами зацепления $2, 0, 0$, сужения которых на любое двухкомпонентное подзацепление изотопны.

(b) Зацепление «кольца Борромео» B не является сингулярно гомотопным тривиальному зацеплению.

(c) Для некоторого ориентированного трёхкомпонентного зацепления L с попарными коэффициентами зацепления $1, 0, 0$ некоторая связная сумма $B\#L$ сингулярно гомотопна L.

(d) Любые два ориентированных трёхкомпонентных зацепления с попарными коэффициентами зацепления $1, 0, 0$ сингулярно гомотопны.

(e) Для некоторого ориентированного трёхкомпонентного зацепления L с попарными коэффициентами зацепления $2, 0, 0$ некоторая связная сумма $B\#B\#L$ сингулярно гомотопна L.

Доказательства утверждений (a) и (b) используют п. 1.10. Доказательства утверждений (c), (d) и (e) могут быть непросты для начинающего.

Теорема 1.7.4 (Милнор). *Множество классов сингулярной гомотопности трёхкомпонентных ориентированных зацеплений с попарными коэффициентами зацепления k, l, m*

- *содержит бесконечно много элементов, если $k = l = m = 0$, и*
- *содержит $\gcd(k, l, m)$ элементов иначе.*

Этот результат легко получить из [Mi54] (хотя ранее он не был сформулирован столь явно). Ср. лемму 1.3.2.d. Мы предлагаем читателю привести простое доказательство, используя *число Милнора по модулю* $\gcd(k, l, m)$, определяемое аналогично п. 1.10 и принимающее значения в множестве остатков по модулю $\gcd(k, l, m)$ (мы полагаем $\gcd(0, 0, 0) = 0$, так что $|\mathbb{Z}_{\gcd(0,0,0)}| = |\mathbb{Z}| = \infty$). Это доказательство иллюстрируется задачами 1.7.3 и 1.10.9. Биекция между множеством из теоремы Милнора 1.7.4 и $\mathbb{Z}_{\gcd(k,l,m)}$ задаётся числом Милнора по модулю $\gcd(k, l, m)$.

1.8. Алгебраическое число пересечений

Основные результаты этого пункта — леммы о чётности 1.8.2 и о тривиальности 1.8.4. Они обобщают [Sk18, лемма о чётности 1.3.2] и лемму 1.2.5 и соответственно [Sk18, лемма о тривиальности 1.3.3] и лемму 1.3.3. Приложения этого пункта приведены в п. 1.9 (который нужен для п. 1.10, который нужен для доказательств результатов п. 1.7). Изучение этого пункта можно начать с решения задачи 1.8.5, которая ярко иллюстрирует нетривиальность материала.

В этом пункте α — набор отрезков, а β — набор треугольников.

Наборы α и β называются находящимися в *общем положении*, если для любого отрезка MN из α и любого треугольника Δ из β выполнено $\{M, N\} \cap \Delta = MN \cap \partial\Delta = \varnothing$. Для таких наборов определим **алгебраическое число пересечений по модулю 2**

$$\alpha \cap_2 \beta := \sum_{MN,\Delta} |MN \cap \Delta|_2 \in \mathbb{Z}_2,$$

где суммирование ведётся по всем отрезкам MN из a, а также треугольникам Δ из β. Это чётность количества пар MN, Δ, образованных пересекающимися отрезком MN из множества a и треугольником Δ из множества β.

Вершинами набора отрезков (треугольников) называются концы его отрезков (вершины его треугольников). *Телом* $|\gamma|$ набора γ отрезков (треугольников) называется объединение его отрезков (треугольников).

Замечание 1.8.1. (a) Алгебраическое число пересечений нужно для работы с непересекающимися ломаными, вершины которых ни в каком смысле не находятся в общем положении. Кроме того, чем больше размерность евклидова пространства и пересекающихся объектов, тем более громоздкими становятся условия общего положения, необходимые для работы с *геометрическими* пересечениями, см. (ii) в (d).

(b) Если никакие четыре вершины отрезков из a и треугольников из β не лежат в одной плоскости, то a и β находятся в общем положении.

(c) Для любого треугольника Δ выполнено $a \cap_2 \Delta = ||a| \cap \Delta|_2$, если никакие четыре вершины отрезков из a не лежат в одной плоскости (но не без этого условия).

(d) Набор точек находится в *общем положении*, если

(i) никакие 4 из них не лежат в одной плоскости и

(ii) для любых пары x, тройки y и тройки y' среди них, для которых $x \cap y = x \cap y' = \varnothing$ и $y \neq y'$, прямая, проходящая через x, плоскость, проходящая через y, и плоскость, проходящая через y', не имеют общих точек. (Плоскость, проходящая через y, определена, так как если точки множества y лежат на одной прямой, то, добавив к ним точку из x, получим противоречие с условием (i).)

(e) Имеем $a \cap_2 \beta = \big||a| \cap |\beta|\big|_2$, если все вершины отрезков из a и треугольников из β находятся в общем положении (но не без этого условия, см. замечание 1.2.8.c).

Назовём 1-*циклом* конечный набор отрезков (не вырожденных в точку), такой что каждая точка плоскости является концом чётного числа отрезков набора. Примером 1-цикла является набор всех рёбер замкнутой ломаной. Назовём 2-*циклом* конечный набор треугольников (не вырожденных в точку или в отрезок), такой что любой отрезок на плоскости является стороной чётного числа треугольников набора. Примером 2-цикла является множество граней тетраэдра (или другой «триангулированной поверхности»). Ср. [DMN+].

Лемма 1.8.2 (о чётности). *Если 1-цикл a и 2-цикл β находятся в общем положении, то $a \cap_2 \beta = 0$.*

Аналогично [Sk18, другое доказательство леммы о чётности 1.3.2.b в п. 1.7], использующему сингулярный конус, лемма следует из своего частного случая, в котором 2-цикл является множеством всех граней тетраэдра (можно дополнительно предполагать, что 1-цикл является треугольником). Этот случай аналогичен лемме 1.2.5.

Замечание 1.8.3. (a) Если вершины замкнутой ломаной и 2-цикла находятся в общем положении (см. замечание 1.8.1.d), то ломаная пересекает тело 2-цикла в чётном числе точек.

(b) Если условие (ii) из замечания 1.8.1.d требовать только для попарно непересекающихся x, y, y', то полученный аналог утверждения (a) будет неверен (аналогично замечанию 1.2.8.c).

(c) Леммы о чётности [Sk18, 1.3.2] и 1.8.2, а также их обобщения на p-циклы и q-циклы в $\mathbb{R}^{p+q}$ известны в фольклоре. Например, [Sk03, лемма о чётности 3] сформулирована в качестве простого результата — без явного определения общего положения, а также в терминах тел (как в (a), в замечании 1.8.1.e и в [Sk18, лемма о чётности 1.3.2.b]). Однако дать правильную формулировку леммы о чётности, либо явно определив общее положение (как в замечании 1.8.1.d), либо использовав алгебраические пересечения (как в лемме о чётности 1.8.2), не так просто, как может показаться. Например, случай $p = q = 1$ (для 1-циклов на плоскости) неверно сформулирован в [Pr04, задача 1.2], а случай $p = 1$, $q = 2$ (для 1-цикла и 2-цикла в трёхмерном пространстве) неверно сформулирован в лемме 4.6 в архивной версии 6 статьи [Sk14] (соответствующие утверждения в других версиях верны).

Целочисленным (или ориентированным) **1-циклом** называется набор (не обязательно различных) ориентированных отрезков (не вырожденных в точку), такой что для каждой точки количество входящих отрезков равно количеству исходящих.

Целочисленным (или ориентированным) **2-циклом** называется набор (не обязательно различных) ориентированных треугольников (не вырожденных в отрезок или точку), такой что для каждого ориентированного отрезка количество входящих треугольников равно количеству исходящих (рис. 1.3.1). Ориентированный треугольник ABC *входит* в ориентированный отрезок BA и *выходит* из ориентированного отрезка AB.

Лемма 1.8.4 (о тривиальности). *Если целочисленные* 1*-цикл и* 2*-цикл находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения по всем парам пересекающихся отрезков* 1*-цикла и треугольников* 2*-цикла равна нулю.*

Задача 1.8.5. (Этот яркий частный случай лемм о чётности 1.8.2 и о тривиальности 1.8.4 предлагался 01.04.2015 на ФОПФ МФТИ в курсе «Современные топологические методы в физике».)

В пространстве имеется 17 точек: 7 красных и 10 жёлтых. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости.

(a) Может ли количество пар пересекающихся красного отрезка (т. е. отрезка, соединяющего красные точки) и жёлтого треугольника (т. е. треугольника, натянутого на жёлтые точки) быть равным 7?

Указание. Если красных точек 3, а жёлтых — 4, то количество таких пар чётно, см. лемму 1.2.5.

Примечание. Рассматриваемое количество равно количеству точек пересечения красных отрезков и жёлтых треугольников только в предположении, что никакой красный отрезок не пересекает никакой отрезок пересечения жёлтых треугольников.

(b) После решения пункта (a) Илья Муромец подошёл к точкам поближе. Он увидел, что по красным отрезкам течёт ток. Чу! Сколько в красную точку миллиампер входит, столько из неё и выходит.

А по ориентированным жёлтым треугольникам свистит *свист*. То есть на каждом ориентированном жёлтом треугольнике стоит соловьеметр, измеряющий свист в Соловьях ($1\text{С} = 1\text{А}^2$). Чу! Сколько в ориентированный жёлтый отрезок микросоловьев входит, столько из него и выходит.

Для каждой пары пересекающихся красного отрезка и жёлтого треугольника имеется гривнометр. По закону Владимира-Красное-Солнышко показание гривнометра равно произведению показаний соответствующих амперметра и соловьеметра, если направление красного тока и ориентация жёлтого треугольника согласованы по правилу *левой руки* (*буравчика*), и минус этому произведению, если не согласованы. (Таким образом, $1\ \text{Грн} = 1\text{С} \times 1\text{А} = 1\text{А}^3$.)

За понимание условия пункта (b) князь одарил Илью величиной *потока тока через свист*, т. е. суммой показаний гривнометров. Могли ли так располагаться точки, течь ток по красным отрезкам и свистеть свист по жёлтым треугольникам, что Илья получил 42 нанагривны?

Указание. Если красных точек 3, а жёлтых — 4, то поток тока через свист равен нулю ввиду леммы 1.3.3.

1.9. Коэффициент зацепления и зейфертовы цепи

Здесь мы приводим более общие определения коэффициента зацепления (утверждения 1.9.3 и 1.9.5), которые используются в п. 1.10, а также интересны сами по себе.

Зейфертовой цепью (или кограницей) узла a называется конечный набор S треугольников (не вырожденных в отрезок или точку), такой что

- каждое ребро узла a является стороной ровно одного треугольника из S;
- каждый отрезок, не являющийся ребром из a, является стороной чётного (возможно, нулевого) количества треугольников из S.

Примерами зейфертовых цепей являются набор треугольников сингулярного конуса $O * a$ для некоторой точки O (замечание 1.2.8.b), а также триангуляция *поверхности Зейферта* [Pr95, § 3]. Более общие зейфертовы цепи, чем сингулярные конусы, нам нужны, например, для определения числа Милнора, т. е. для нижеприведённой леммы 1.9.4.

Для множества β треугольников положим

$$\partial\beta := \sum_{\Delta\in\beta} \partial\Delta,$$

где суммирование ведётся по модулю 2.

Задача 1.9.1. (a) Если S является зейфертовой цепью узла a, то ∂S является 1-циклом, тело которого совпадает с a.

(b) Для одной из компонент зацепления Уайтхеда нарисуйте зейфертову цепь, не пересекающую оставшуюся компоненту.

(c) Для одного из колец Борромео нарисуйте зейфертову цепь, не пересекающую объединение двух других колец.

Лемма 1.9.2. *Для любых непересекающихся узлов a и b существует зейфертова цепь S узла a, находящаяся в общем положении с b (определение приведено в начале п.* 1.8).

Предложение 1.9.3. *Следующие условия эквивалентны для зацепления (a, b):*

(i) *зацепление не зацеплено по модулю* 2;

(ii) *для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) зейфертовой цепи S узла a, находящейся в общем положении с b, выполнено $b \cap_2 S = 0$;*

(iii) *существует зейфертова цепь узла a, тело которой не пересекает b;*

(iv) *для некоторой (или, что эквивалентно, для любой) зейфертовой цепи S узла a, для которой контур любого треугольника из S не пересекает b, количество треугольников из S, зацепленных по модулю 2 с b, чётно*;

(v) *для некоторых (или, что эквивалентно, для любых) зейфертовых цепей S узла a и T узла b, таких что контур любого треугольника из S не пересекает контура ни одного треугольника из T, количество зацепленных по модулю 2 пар (Δ, Γ) треугольников Δ из S и Γ из T чётно.*

Набросок доказательства. Эквивалентность (i) $\Leftrightarrow$ (ii) и эквивалентность «для некоторого» и «для любого» в (ii) следуют из леммы о чётности 1.8.2.

Очевидно, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Обратная импликация доказывается сдвигом S в общее положение так, чтобы $||S| \cap b|$ было чётным, а также добавлением ручек к $|S|$.

Эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) ((ii) $\Leftrightarrow$ (v)) получается из первого равенства (из обоих равенств)

$$b \cap_2 S = \sum_{\Delta \in S} b \cap_2 \Delta = \sum_{\Delta \in S,\, \Gamma \in T} \partial\Gamma \cap_2 \Delta.$$

Эти равенства следуют из аддитивности алгебраического пересечения, второе из них — с учётом утверждения 1.9.1.a. □

Лемма 1.9.4. *Если (a, b, c) — зацепление, в котором a не зацеплено по модулю 2 ни с b, ни с c, то существует зейфертова цепь узла a, тело которой не пересекает $b \cup c$.*

Эта лемма доказывается при помощи утверждения 1.9.3.

Аналогично вышесказанному определяется *целочисленная зейфертова цепь* S ориентированного узла a, её *тело*, а также *алгебраическое число пересечений* $S \cdot b \in \mathbb{Z}$. Следующие результаты доказываются аналогично их аналогам по модулю 2 (утверждению 1.9.3 и лемме 1.9.4).

Предложение 1.9.5. *Пусть (a, b) — ориентированное зацепление.*

(a) *Для любой зейфертовой цепи S узла a в общем положении с b выполнено* $\mathrm{lk}(a, b) = S \cdot b$.

(b) *Целочисленная зейфертова цепь узла a, тело которой не пересекает b, существует тогда и только тогда, когда* $\mathrm{lk}(a, b) = 0$.

Лемма 1.9.6. *Если (a, b, c) — ориентированное зацепление, для которого $\mathrm{lk}(a, b) = \mathrm{lk}(a, c) = 0$, то существует целочисленная зейфертова цепь узла a, тело которой не пересекает $b \cup c$.*

Задача 1.9.7. (a) Аналогично вышесказанному определите *зейфертову цепь* S_a *по модулю* 3 ориентированного узла a, её *тело*, а также *алгебраическое число пересечений* $S_a \cdot b \in \mathbb{Z}_3$ *по модулю* 3.

(b), (c), (d) Сформулируйте и докажите аналоги по модулю 3 утверждений 1.9.5.ab и леммы 1.9.6.

1.10. Тройной коэффициент зацепления

В этом разделе через (a_1, a_2, a_3) обозначается трёхкомпонентное зацепление, компоненты которого попарно не зацеплены по модулю 2.

По лемме 1.9.4 существуют зейфертовы цепи S_1, S_2, S_3 узлов a_1, a_2, a_3, такие что $|S_i| \cap a_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Более того, можно выбрать зейфертовы цепи *в тройном общем положении*, т. е. такие, что для любых треугольников $\Delta_k \in S_k$, $k=1,2,3$, пересечение $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3$ либо пусто, либо является внутренней точкой в каждом из треугольников $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Зацепление (a_1, a_2, a_3) называется **зацепленным по модулю 2**, если количество троек $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, имеющих общую точку, нечётно.

Ясно, что это свойство не зависит от перестановки трёх компонент.

Лемма 1.10.1. (a) *Кольца Борромео зацеплены по модулю* 2 (*используйте любую из конструкций п.* 1.7 *на ваш выбор*; *используйте* (*b*) *без доказательства*).

(b) *Зацепленность по модулю* 2 *корректно определена, т. е. не зависит от зейфертовых цепей* S_1, S_2, S_3 *общего положения.*

(c) *Зацепленность по модулю* 2 *«аддитивна» относительно связной суммы трёхкомпонентных зацеплений.*

Предложение 1.10.2. *Изотопные* (*даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные*) *трёхкомпонентные зацепления одновременно зацеплены по модулю* 2 *или не зацеплены по модулю* 2.

Два набора S_1 и S_2 треугольников *находятся в общем положении*, если контуры треугольников из разных наборов не пересекаются и никакой треугольник одного из них не содержит вершины никакого треугольника из другого. Определим

$$S_1 \cap S_2 := \{\Delta_1 \cap \Delta_2 \colon \Delta_1 \in S_1,\ \Delta_2 \in S_2\}.$$

Задача 1.10.3. (a) Пересечение двух 2-циклов в общем положении является 1-циклом.

(b) Пусть S_1 и S_2 — множества треугольников в общем положении, для которых

$$|S_1| \cap |\partial S_2| = |S_2| \cap |\partial S_1| = \varnothing.$$

Тогда $S_1 \cap S_2$ является 1-циклом.

(c) В п. (b) пересечение $|S_1| \cap |S_2|$ не обязательно является телом 1-цикла.

(*Подсказка*: аналогично замечанию 1.8.3.b.)

(d) (загадка) Пусть $f, g : S^2 \to \mathbb{R}^3$ являются кусочно-линейными отображениями в общем положении (определите, что это!). Тогда $f^{-1}(g(S^2))$ является телом 1-цикла в S^2 (определите, что это!).

(По п. (a), $f(S^2) \cap g(S^2)$ является телом 1-цикла в $\mathbb{R}^3$. Обобщение см. [Al22].)

Предложение 1.10.4. *Зацепление (a_1, a_2, a_3) зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда узел a_3 зацеплен по модулю 2 с 1-циклом $S_1 \cap S_2$ для некоторых (или, что эквивалентно, для любых) зейфертовых цепей S_1 и S_2 в общем положении, для которых*

$$|S_1| \cap (a_2 \cup a_3) = |S_2| \cap (a_1 \cup a_3) = \varnothing.$$

(*Такие зейфертовы цепи существуют по лемме* 1.9.4. *Пересечение $S_1 \cap S_2$ является 1-циклом по утверждению* 1.10.3.*b. Зацепленность по модулю 2 для 1-циклов с непересекающимися телами определяется аналогично п.* 1.2.)

Предложение 1.10.5. (a) *Даны два множества M, N точек на окружности, в каждом из которых чётное число точек. Разобьём точки множества M на пары. Возьмём некоторые дуги окружности так, что каждая дуга соединяет точки некоторой пары. Множества M и N называются* зацепленными по модулю 2 *на окружности, если количество дуг, содержащих нечётное число точек из N, нечётно, т. е. сумма $\sum_a |a \cap N|_2$ по всем дугам a нечётна. Свойство зацепленности по модулю 2 не зависит от выбора разбиения и дуг.*

(b) *Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$ — непересекающиеся «вложенные многогранные 2-диски» (например, сингулярные конусы, ограниченные узлами a_1, a_2) в общем положении с a_3, такие что $a_i = \partial D_i$ для каждого $i = 1, 2$. Тогда для каждого $j = 1, 2$ пересечение $D_j \cap a_3$ состоит из чётного количества точек вне D_{3-j}. Зацепление (a_1, a_2, a_3) зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда $D_1 \cap a_3$ и $D_2 \cap a_3$ зацеплены по модулю 2 в a_3.*

Набросок доказательства п. (b). Возьмём зейфертовы цепи S_1, S_2 в общем положении, для которых $|S_1| \cap (a_2 \cup a_3) = |S_2| \cap (a_1 \cup a_3) = \varnothing$. Поскольку a_1, a_2 ограничивают D_1, D_2, то можно выбрать S_1, S_2, для которых $S_i \cap D_{3-i} = \varnothing$. Обозначим через C_1 внутренность по модулю 2 (определение аналогично [Sk18, п. 2.2]) 2-цикла $D_1 \cup S_1$. Тогда возьмём $C_1 \cap a_3$ в качестве объединения дуг из (a). Применим лемму о чётности 1.8.2 к a_3 и $D_2 \cup S_2$. Получим, что множества $D_1 \cap a_3$

и $D_2 \cap a_3$ зацеплены по модулю 2 в a_3 тогда и только тогда, когда $|C_1 \cap a_3 \cap D_2|_2 = |a_3 \cap C_1 \cap S_2|_2$ нечётно. Поскольку $C_1 \cap D_2 = \varnothing$, ввиду общности положения имеем

$$\partial(C_1 \cap S_2) = (\partial C_1 \cap S_2) \cup (C_1 \cap \partial S_2) = \partial C_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_2.$$

Теперь п. (b) следует из утверждения 1.10.4. Ср. [Ко91, утверждение 3.10]. □

В оставшейся части раздела (a_1, a_2, a_3) является ориентированным зацеплением с нулевыми попарными коэффициентами зацепления. По лемме 1.9.6 существуют целочисленные зейфертовы цепи S_1, S_2, S_3 узлов a_1, a_2, a_3, такие что $|S_i| \cap a_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$. Более того, можно взять целочисленные зейфертовы цепи в *тройном общем положении* (оно определяется так же, как для зейфертовых цепей по модулю 2). **Тройным коэффициентом зацепления** $\mu(a_1, a_2, a_3)$ называется сумма знаков тройных точек пересечения:

$$\mu(a_1, a_2, a_3) := \sum_{\substack{\Delta_k \in S_k,\, k=1,2,3,\\ \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 \neq \varnothing}} \operatorname{sgn}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3) \in \mathbb{Z},$$

где **знаком** $\operatorname{sgn}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ является знак базиса в $\mathbb{R}^3$, образованного тремя векторами нормалей к Δ_k, согласованных с ориентациями на Δ_k по правилу левой руки (левого винта). Это число было введено в 1954–68 гг. Милнором, Хефлигером, Стиром, Масси и, возможно, другими.

Лемма 1.10.6. (a) *Тройной коэффициент зацепления как-то ориентированных колец Борромео равен* ± 1 (докажите в предположении п. (b)).

(b) *Тройной коэффициент зацепления корректно определён, т. е. не зависит от выбора зейфертовых цепей S_1, S_2, S_3 в общем положении.*

(c) *Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ существует трёхкомпонентное зацепление с тройным коэффициентом зацепления n.*

(d) *Тройной коэффициент зацепления аддитивен относительно связной суммы трёхкомпонентных зацеплений.*

Предложение 1.10.7 (о симметрии). (a) *При перестановке компонент тройной коэффициент зацепления умножается на знак перестановки.*

(b) *При изменении ориентации одной из компонент тройной коэффициент зацепления меняет знак.*

(c) *При зеркальной симметрии тройной коэффициент зацепления меняет знак.*

Предложение 1.10.8. *Изотопные (даже кусочно-линейно сингулярно гомотопные) трёхкомпонентные зацепления имеют равные тройные коэффициенты зацепления.*

Оставшиеся задачи этого пункта могут быть непросты для начинающего.

Задача 1.10.9. (a) Зацепление (a_1, a_2, a_3) сингулярно гомотопно тривиальному зацеплению, если $\mu(a_1, a_2, a_3) = 0$.

(b) Два ориентированных зацепления a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 с нулевыми попарными коэффициентами зацепления сингулярно гомотопны, если $\mu(a_1, a_2, a_3) = \mu(b_1, b_2, b_3)$.

(Используйте, что «конкордантность влечёт сингулярную гомотопность для зацеплений».)

Задача 1.10.10 (о высшем коэффициенте зацепления). (Вы можете начать изучение этого материала с его аналога по модулю 2.) Пусть (a, b) является ориентированным двухкомпонентным зацеплением, для которого $\mathrm{lk}(a, b) = 0$. По утверждению 1.9.5.b, существуют целочисленные зейфертовы цепи S_a узла a и S_b узла b, для которых $|S_a| \cap b = \varnothing = a \cap |S_b|$. Можем считать, что S_a и S_b находятся в общем положении. Тогда аналогично задаче 1.10.3.b пересечение $S_a \cap S_b$ является целочисленным 1-циклом. Каждый ориентированный отрезок MN целочисленного 1-цикла $S_a \cap S_b$ содержится в треугольнике Δ_{MN} из S_a. Перенесём MN на маленький вектор, касательный к Δ_{MN} и образующий вместе с MN положительный базис в Δ_{MN}. Эти маленькие векторы можно выбрать так, чтобы после всех переносов получился целочисленный 1-цикл s'. Определим *число Сато — Левина* как $\mathrm{lk}(S_a \cap S_b, s')$.

(a) Число Сато — Левина корректно определено, т. е. не зависит от целочисленных зейфертовых цепей S_a и S_b общего положения, а также от достаточно малого сдвига $S_a \cap S_b$ вдоль S_a.

(b) Найдите числа Сато — Левина зацепления на рис. 1.2.2.w, а также последних двух зацеплений на рис. 1.2.1 (возьмите ориентацию на ваш выбор).

(c) Для каждого чётного n существует зацепление с числом Сато — Левина, равным n.

(d) Как при перестановке компонент меняется число Сато — Левина?

(e) Как при изменении ориентации одной из компонент меняется число Сато — Левина?

(f) Как при зеркальной симметрии меняется число Сато — Левина?

(g) Изотопные зацепления имеют одинаковые числа Сато — Левина (это неверно для сингулярно гомотопных зацеплений).

(h) Верно ли, что число Сато — Левина зацепления $(a_1, a_2 \# a_3)$ равно $\pm 2\mu(a_1, a_2, a_3)$?

§ 2. Зацепленность в четырёхмерном пространстве

2.1. Как работать с четырёхмерным пространством?

Задача 2.1.1. Сколько точек может быть в пересечении прямой и плоскости в трёхмерном пространстве?

Задача 2.1.2. Сколько решений может быть у системы линейных уравнений: (a) 2×2; (b) 2×3 (2 уравнения, 3 переменных); (c) 3×2?

Определим

- *прямую* как множество действительных чисел;
- *плоскость* $\mathbb{R}^2$ как множество всех упорядоченных пар (x, y) действительных чисел;
- (*трёхмерное*) *пространство* $\mathbb{R}^3$ как множество всех упорядоченных троек (x, y, z) действительных чисел;
- *четырёхмерное пространство* $\mathbb{R}^4$ как множество всех упорядоченных четвёрок (x, y, z, t) действительных чисел.

Определение *d-мерного пространства* $\mathbb{R}^d$ для $d > 4$ даётся аналогично.

Напутствие. В планиметрии и стереометрии обычно только простейшие свойства выводятся из аналитических определений (или же принимаются за аксиомы). Более сложные свойства могут быть выведены из простейших «синтетически» (т. е. как в школьной геометрии, без использования аналитических определений). Часто бывает удобно свести двумерную задачу к одномерной (т. е. к задаче на прямой), а трёхмерную задачу — к двумерной. Аналогично удачный подход к четырёхмерным задачам — это аналогия с трёхмерными задачами или сведение к ним.

Для точек $A = (x_1, y_1, z_1, t_1), B = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\lambda A := (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1) \quad \text{и} \quad A + B := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2).$$

Задача 2.1.3. Разбивает ли двумерная плоскость четырёхмерное пространство на куски? То есть для любых ли двух точек, не лежащих в двумерной плоскости $x = y = 0$ четырёхмерного пространства

(x, y, z, t), существует ломаная, соединяющая эти точки и не пересекающая плоскость?

Для точек $A, B \in \mathbb{R}^4$ *отрезком* AB называется множество

$$\{\lambda A + (1-\lambda)B \colon \lambda \in [0, 1]\}.$$

Ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ называется объединение отрезков A_iA_{i+1} по всем $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Указание. Для точек $A = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ и B, не лежащих на плоскости $x = y = 0$, определим точки

$$A_x = A + (1, 0, 0, 0) = (x_0 + 1, y_0, z_0, t_0)$$

и

$$A_y = A + (0, 1, 0, 0) = (x_0, y_0 + 1, z_0, t_0).$$

Докажите, что хотя бы одна из ломаных AB, AA_xB и AA_yB не пересекает плоскость $x = y = 0$.

Задача 2.1.4. Чем является пересечение *двумерной сферы*

$$S^2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

со следующими множествами:

(a) прямая $x = y = 0$, содержащая центр сферы;

(b) плоскость $x = 0$, содержащая центр сферы;

(c) пересечение неотрицательного октанта в $\mathbb{R}^3$ и объединения двумерных координатных плоскостей, т. е. множество

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ и } xyz = 0\right\}.$$

Задача 2.1.5. Чем является пересечение *трёхмерной сферы*

$$S^3 := \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\right\}$$

со следующими множествами:

(a) прямая $x = y = z = 0$, содержащая центр сферы;

(b) плоскость $x = y = 0$, содержащая центр сферы;

(c) (трёхмерная) гиперплоскость $x = 0$, содержащая центр сферы;

(d) пересечение неотрицательной «одной шестнадцатой» $\mathbb{R}^4$ и объединения двумерных координатных плоскостей, т. е. множество

$$\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \right.$$
$$\left. \text{и хотя бы два из четырёх чисел } x, y, z, t \text{ равны нулю}\right\}.$$

Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ называется **прямой**, если L не является точкой и найдутся точки $A, B \in \mathbb{R}^4$, для которых $L = \{A + Bt \colon t \in \mathbb{R}\}$.

Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ называется (двумерной) **плоскостью**, если L не является ни точкой, ни прямой, и найдутся точки $A, B, C \in \mathbb{R}^4$, для которых $L = \{A + Bt + Cu : t, u \in \mathbb{R}\}$.

Задача 2.1.6. Напишите аналогичное определение (трёхмерной) **гиперплоскости** в $\mathbb{R}^4$.

В решениях следующих задач вы можете использовать без доказательств результаты задачи 2.1.7, а также все строго сформулированные вами верные факты о решениях систем линейных уравнений.

Задача 2.1.7. (a) Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $L \neq \varnothing$, $L \neq \mathbb{R}^4$ и существуют $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, для которых $L = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = e\right\}$.

(b) Подмножество $L \subset \mathbb{R}^4$ является плоскостью тогда и только тогда, когда $L \neq \varnothing$, $L \neq \mathbb{R}^4$, L не является гиперплоскостью и существуют $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 \in \mathbb{R}$, для которых

$$L = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = e_1,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2t = e_2\right\}.$$

(c) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для прямой в $\mathbb{R}^4$.

Задача 2.1.8. Чем может быть пересечение в $\mathbb{R}^4$:
(a) прямой и гиперплоскости?
(b) прямой и плоскости?
(c) плоскости и гиперплоскости?
(d) двух гиперплоскостей?
(e) двух плоскостей?

Указание к п. (a). *Ответ*. Пустое множество, точка, прямая.

Примеры. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $x = 1$ по пустому множеству. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $t = 0$ по точке. Прямая $x = y = z = 0$ пересекается с гиперплоскостью $x = 0$ по прямой.

Доказательство того, что другие пересечения невозможны. Достаточно доказать, что если пересечение в $\mathbb{R}^4$ прямой l и гиперплоскости содержит хотя бы две точки, то пересечение совпадает с прямой l. Это верно, так как *для любых двух точек существует единственная прямая, содержащая обе эти точки*. Последний факт легко выводится из определения прямой. (Во многих других изложениях этот факт принимается за аксиому.)

Задача 2.1.9. Для различных точек $X, Y \in \mathbb{R}^4$ определим *прямую* XY как $\{X + (Y - X)t = (1 - t)X + tY : t \in \mathbb{R}\}$. Для точек $X, Y, Z \in \mathbb{R}^4$,

не лежащих на одной прямой, определим *плоскость* XYZ как

$$\left\{X+(Y-X)t+(Z-X)u=(1-t-u)X+tY+uZ\colon t,u\in\mathbb{R}\right\}.$$

Никакие пять из восьми точек $1,2,3,4,5,6,7,8$ в $\mathbb{R}^4$ не лежат на одной гиперплоскости. Чем может быть пересечение:

(b) прямой 12 и плоскости 567?

(d) гиперплоскостей 1234 и 5678?

(e) плоскостей 123 и 567?

Ответы.

2.1.1. 0, если прямая и плоскость параллельны; 1, если прямая пересекает плоскость; ∞, если прямая лежит в плоскости.

2.1.4. (a) Пара точек $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$.

(b) Окружность $\begin{cases} x=0, \\ y^2+z^2=1. \end{cases}$

(c) Объединение четвертей трёх окружностей:

$$\begin{cases} x=0, \quad y\geqslant 0,\ z\geqslant 0, \\ y^2+z^2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \quad x\geqslant 0,\ z\geqslant 0, \\ x^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z=0, \quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

2.1.5. (a) Пара точек $(0,0,0,1)$ и $(0,0,0,-1)$.

(b) Окружность $\begin{cases} x=y=0, \\ z^2+t^2=1. \end{cases}$ (c) Сфера $\begin{cases} x=0, \\ y^2+z^2+t^2=1. \end{cases}$

(d) Граф K_4, образованный объединением четвертей шести окружностей, одна из которых — $\begin{cases} x=y=0, \quad z\geqslant 0,\ t\geqslant 0, \\ z^2+t^2=1. \end{cases}$

2.1.8. (b) Пустое множество, точка (если прямая пересекает плоскость), прямая (если прямая содержится в плоскости).

(c) Пустое множество, прямая (если плоскость пересекает гиперплоскость), плоскость (если плоскость содержится в гиперплоскости).

(d) Пустое множество, плоскость (если гиперплоскости пересекаются), гиперплоскость (если гиперплоскости совпадают).

(e) Пустое множество, точка или прямая (если плоскости пересекаются), плоскость (если плоскости совпадают).

2.1.9. (b) Пустое множество. (d) Плоскость или пустое множество. (e) Точка или пустое множество.

2.2. Зацепленность симплексов

Если никакие пять из шести вершин двух треугольников в $\mathbb{R}^4$ не лежат в одной (трёхмерной) гиперплоскости, то контур первого не пересекает второй (это следует из ответа к задаче 2.1.9.a).

Определения конуса и сингулярного конуса приведены в замечании 1.2.8.

Лемма 2.2.1. *Если контуры двух треугольников в $\mathbb{R}^4$ не пересекаются, то конус с некоторой вершиной над одним из контуров не пересекает другой контур.*

Это означает, что треугольники в $\mathbb{R}^4$ «не зацеплены».

Треугольник и тетраэдр в $\mathbb{R}^4$, никакие пять из семи вершин которых не лежат в одной гиперплоскости, называются *зацепленными*, если треугольник пересекает поверхность тетраэдра ровно в одной точке.

Пример 2.2.2. Существуют зацепленные треугольник и тетраэдр в $\mathbb{R}^4$, никакие пять из семи вершин которых не лежат в одной гиперплоскости.

Подсказка. Используйте понижение размерности или [Sk16h, Example 2.1].

Задача 2.2.3 (ср. утверждение 1.1.1). Обозначим через Δ и τ выпуклые оболочки треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^4$. Если $\partial\Delta \cap \partial\tau = \varnothing$, то следующие условия равносильны:

(1) $\Delta \cap \partial\tau \neq \varnothing \neq \partial\Delta \cap \tau$;

(2) пересечение $\Delta \cap \tau$ есть отрезок, один конец которого лежит на контуре треугольника, а другой — на поверхности тетраэдра;

(3) пересечение $\partial\Delta \cap \tau$ есть одна точка, и два отрезка контура $\partial\Delta$, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от гиперплоскости тетраэдра τ;

(3') пересечение $\Delta \cap \partial\tau$ есть одна точка, и маленькую трёхмерную сферу с центром в этой точке Δ и $\partial\tau$ пересекают по замкнутым ломаным, *зацепленным* в этой сфере;

(4) плоскость треугольника пересекает τ по отрезку, один конец которого лежит в Δ, а другой — нет;

(4') гиперплоскость тетраэдра пересекает Δ по отрезку, один конец которого лежит в τ, а другой — нет;

(5) прямая пересечения плоскости треугольника и гиперплоскости тетраэдра пересекает каждый из них по паре точек, и эти пары чередуются на прямой.

Задача 2.2.4. Возьмём любые семь точек в четырёхмерном пространстве, никакие пять из которых не лежат в одной гиперплоскости, а также треугольник T, вершинами которого являются три из них.

(a) Пусть никакие два треугольника, образованные точками из семи данных, отличные от T и не имеющие общих вершин, не пере-

секаются (ср. [Sk, пример 6.2.1.f]). Тогда T зацеплен с тетраэдром, образованным оставшимися четырьмя из семи точек.

(b), (c), (d) Попробуйте догадаться до утверждений, аналогичных п. (a) и задаче 1.1.5!

Подсказка. Утверждения (a), (b), (c), (d) следуют из количественной линейной теоремы ван Кампена — Флореса [Sk14, теорема 1.5']. Ср. [Sk18, утверждения 1.7.1 и 1.7.2].

Зацеплением симплексов (возможно, имеющих разные размерности) в $\mathbb{R}^d$ называется набор невырожденных симплексов в $\mathbb{R}^d$, границы которых попарно не пересекаются. *Тривиальность* зацепления симплексов определяется аналогично случаю треугольников в пространстве (п. 1.4).

Пусть $(\Delta, Z * \delta)$ — зацепление двух симплексов, а Z' — точка вне гиперплоскости симплекса δ, для которой $\partial\Delta$ не пересекает ни одного из отрезков, соединяющих некоторую точку отрезка ZZ' с некоторой точкой границы $\partial\delta$. Тогда *элементарной комбинаторной изотопией* назовём замену $Z * \delta$ на $Z' * \delta$. *Элементарной комбинаторной изотопией* назовём также аналогичное преобразование первого симплекса при неизменном втором. Два зацепления симплексов назовём *комбинаторно изотопными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений симплексов, в которой соседние получаются друг из друга элементарной комбинаторной изотопией.

По лемме 2.2.1 любое зацепление двух треугольников в $\mathbb{R}^4$ комбинаторно изотопно тривиальному. То же справедливо для зацепления любого количества треугольников.

Задача 2.2.5. (a) Комбинаторно изотопные зацепления треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^4$ одновременно зацеплены или не зацеплены.

(b) Если треугольник и тетраэдр в $\mathbb{R}^4$ не зацеплены, то образованное ими зацепление комбинаторно изотопно тривиальному зацеплению.

Утверждение (a) означает, что существуют два зацепления треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^4$, не являющиеся комбинаторно изотопными: тривиальное и пара из зацепленных треугольника и тетраэдра.

Гипотеза 2.2.6 (ср. утверждение 1.5.1.c). *Любые две пары зацепленных треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^4$ комбинаторно изотопны.*

Гипотеза 2.2.6 означает, что существуют два зацепления треугольника и тетраэдра в $\mathbb{R}^4$ (тривиальное и зацепление из примера 2.2.2), для которых любое такое зацепление комбинаторно изотопно одному из них. Ввиду утверждения 2.2.5.a эти два зацепления не являются

комбинаторно изотопными. Гипотеза 2.2.6 также означает, что треугольник и тетраэдр в $\mathbb{R}^4$ зацеплены тогда и только тогда, когда они зацеплены по модулю 2 (см. следующий пункт).

По-видимому, доказательство гипотез 2.2.6 и 2.2.8 несложно вытекает из свойства 2.2.3.(2) и его многомерного аналога.

Предложение 2.2.7. (*a*) *Если $d \geqslant k+l$ и поверхности k-мерного и l-мерного симплексов в $\mathbb{R}^d$ не пересекаются, то конус с некоторой вершиной над одной из поверхностей не пересекает другую поверхность.*

(*b*) *При любых k, l существует зацепление k-мерного и l-мерного симплексов в $\mathbb{R}^{k+l-1}$, не являющееся комбинаторно изотопным тривиальному.*

(*c*) *Если $k, l < d < k+l-1$, то любое зацепление k-мерного и l-мерного симплексов в $\mathbb{R}^d$ комбинаторно изотопно тривиальному.*

Утверждение (a) означает, что любое зацепление k-мерного и l-мерного симплексов в $\mathbb{R}^d$ комбинаторно изотопно тривиальному.

Гипотеза 2.2.8. *При любых k, l существуют два зацепления k-мерного и l-мерного симплексов в $\mathbb{R}^{k+l-1}$, для которых любое зацепление таких симплексов комбинаторно изотопно одному из них.*

2.3. Зацепленность ломаных и двумерных «многогранников»

Лемма 2.3.1 (ср. лемму 2.2.1). (a) *Для любых двух замкнутых непересекающихся ломаных в $\mathbb{R}^4$ некоторый сингулярный конус над одной из них не пересекает другую.*

(b) *Для любой замкнутой несамопересекающейся ломаной в $\mathbb{R}^4$ некоторый сингулярный конус над ней является конусом.*

(c) *Для любых двух замкнутых непересекающихся несамопересекающихся ломаных в $\mathbb{R}^4$ некоторый сингулярный конус над одной из них не пересекает другую и является конусом.*

Подсказка к п. (*b*). Для каждой пары различных отрезков возьмите аффинное подпространство (т. е. гиперплоскость, плоскость или прямую), натянутое на эту пару. Возьмите точку в $\mathbb{R}^4$, лежащую вне объединения таких подпространств.

Одномерные *узлы* и *зацепления* в $\mathbb{R}^d$, а также их *тривиальность* и *изотопность*, определяются аналогично случаю $d=3$ (п. 1.4, ср. определения в [Sk18, п. 1.6], [Is]). Леммы 2.3.1.bc показывают, что

- любой узел в $\mathbb{R}^4$ изотопен контуру треугольника;
- любое двухкомпонентное зацепление в $\mathbb{R}^4$ изотопно тривиальному.

Аналоги этих лемм и утверждений справедливы для зацеплений из любого количества компонент, для ориентированных зацеплений, а также в $\mathbb{R}^d$ при любом $d > 3$.

Определения 1-*цикла* и 2-*цикла* (по модулю 2 и целочисленных) в $\mathbb{R}^4$, а также их *тел*, аналогичны случаю плоскости и пространства, см. п. 1.8.

Определение *зацепленности по модулю* 2 для 1-цикла и 2-цикла по модулю 2 в $\mathbb{R}^4$ с непересекающимися телами аналогично определению из п. 1.2. Ввиду примера 2.2.2 существуют 1-цикл и 2-цикл по модулю 2 в $\mathbb{R}^4$, зацепленные по модулю 2.

Задача 2.3.2 (загадка). Придумайте и докажите (или опровергните) аналоги лемм 1.2.2.ab и 1.2.4.ab для 1-цикла и 2-цикла по модулю 2 в $\mathbb{R}^4$. (По поводу аналога теоремы 1.2.9.a см. [Sk14, § 2.6] и [St24].)

Для задачи 2.3.2 нужна лемма о чётности 2.3.4.c. Начнём с яркого частного случая.

Задача 2.3.3 (ср. с утверждениями [Sk18, 1.3.4.a] и 1.8.5). В $\mathbb{R}^4$ имеется 16 точек: 8 красных и 8 жёлтых. Никакие пять из них не лежат в одной гиперплоскости. Тогда количество пар (Δ, Δ') пересекающихся красных (т. е. натянутых на красные точки) треугольников Δ и жёлтых треугольников Δ' чётно.

Два набора треугольников в $\mathbb{R}^4$ *находятся в общем положении*, если никакой треугольник одного из них не пересекает контур никакого треугольника из другого.

Лемма 2.3.4 (о чётности; ср. леммы о чётности [Sk18, 1.3.3] и 1.2.5, 1.8.2). (a) *Если никакие пять из восьми вершин двух тетраэдров в* $\mathbb{R}^4$ *не лежат в одной гиперплоскости, то поверхности этих тетраэдров пересекаются в чётном числе точек.*

(b) *Если среди вершин двух* 2-*циклов по модулю* 2 *в* $\mathbb{R}^4$ *никакие пять не лежат в одной гиперплоскости и никакие три треугольника, натянутые на эти вершины, не имеют общей внутренней точки, то тела этих* 2-*циклов пересекаются в чётном числе точек.*

(c) *Если два* 2-*цикла по модулю* 2 *в* $\mathbb{R}^4$ *находятся в общем положении, то количество пар* (Δ, Δ') *пересекающихся треугольников* Δ *и* Δ' *соответственно первого и второго* 2-*цикла, чётно.*

Указание. Доказательство аналогично доказательству леммы о чётности 1.8.2. Для утверждения (a) рассмотрите пересечение выпуклых оболочек тетраэдров.

Пара треугольников в $\mathbb{R}^4$ называется *трансверсальной*, если базис e_1, e_2 плоскости первого треугольника вместе с базисом f_1, f_2 плоскости второго треугольника образуют базис e_1, e_2, f_1, f_2 пространства $\mathbb{R}^4$. *Знаком* $\operatorname{sgn} X$ точки пересечения X трансверсальной пары ориентированных треугольников в $\mathbb{R}^4$ называется число $+1$, если положительный базис e_1, e_2 первого треугольника вместе с положительным базисом f_1, f_2 второго треугольника образуют положительный базис e_1, e_2, f_1, f_2 пространства $\mathbb{R}^4$, и число -1 в противном случае.

Задача 2.3.5. Знак точки пересечения трансверсальной пары ориентированных треугольников в $\mathbb{R}^4$ не меняется при перестановке треугольников в паре (ср. утверждение [Sk18, 1.5.9.a]).

Задача 2.3.6. Определение *коэффициента зацепления* для целочисленных 1-цикла и 2-цикла в $\mathbb{R}^4$ с непересекающимися телами аналогично определению из п. 1.3.

(a) Для любого $n \in \mathbb{Z}$ существуют целочисленные 1-цикл и 2-цикл в $\mathbb{R}^4$, коэффициент зацепления которых равен n.

(b) (загадка) Аналоги каких утверждений п. 1.3 верны для целочисленных 1-цикла и 2-цикла в $\mathbb{R}^4$?

Лемма 2.3.7 (о тривиальности). *Если два целочисленных 2-цикла в $\mathbb{R}^4$ находятся в общем положении, то сумма знаков точек пересечения по всем парам (Δ, Δ') пересекающихся треугольников соответственно первого и второго 2-цикла, равна нулю.*

Пример 2.3.8 (ср. пример 1.4.5). Рассмотрим зацепление Уайтхеда в $\mathbb{R}^3$ (рис. 1.2.2.w и предпоследнее зацепление на рис. 1.2.1). Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ как гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$. Построим объединение двух конусов над его первой компонентой, вершины которых лежат по разные стороны от гиперплоскости. Это объединение и вторая компонента зацепления Уайтхеда образуют зацепленные замкнутую ломаную и «вложенную многогранную двумерную сферу», коэффициент зацепления которых равен нулю (при любой их ориентации).

Пример 2.3.9. Рассмотрим кольца Борромео в $\mathbb{R}^3$ (пример 1.7.1.a), заданные уравнениями. Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ как гиперплоскость $t = 0$ в $\mathbb{R}^4$. Возьмём двумерные эллипсоиды в $\mathbb{R}^4$, заданные уравнениями

$$\begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 1.5t^2 = 1. \end{cases}$$

Эти два эллипсоида вместе с первым кольцом Борромео попарно не пересекаются (ибо на пересечении эллипсоидов имеем $2x^2 + 2t^2 = 1 =$

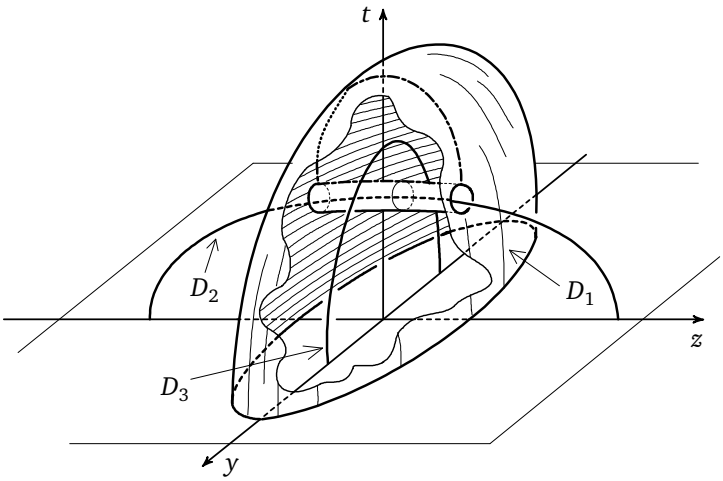


Рис. 2.3.1. Три полуэллипсоида D_1, D_2, D_3 в $\mathbb{R}^4_+$, ограниченные кольцами Борромео. Изображено сечение гиперплоскостью $x = 0$. Кольца Борромео пересекают гиперплоскость по двум парам точек (одна на оси y, другая на оси z) и эллипсу (в плоскости yz). Полуэллипсоиды пересекают гиперплоскость по двум полуэллипсам и полуэллипсоиду. Показано, как полуэллипсоид D_1 превратить приклеиванием ручки в тор с вырезанным диском

$= x^2 + 1.5t^2$; рис. 2.3.1). Из них любые два объекта без третьего «не зацеплены» (т. е. один эллипсоид ограничивает трёхмерный «шар», не пересекающий другой эллипсоид, и не пересекает некоторый двумерный «диск», ограниченный первым кольцом Борромео). Все три объекта вместе зацеплены (т. е. изотопны объединению объектов, лежащих в непересекающихся шарах).

В высших размерностях существуют заузленные сферы и зацепления из сфер — в частности, «сферы Борромео», аналогичные примерам 1.7.1.а и 2.3.9. О классификации многомерных узлов и зацеплений см. [Sk, пример 6.13.5], [Sk06, § 3], [Sk16h, Sk16s].

2.4. Коэффициенты зацепления как пересечения в $\mathbb{R}^4$

Обозначим через $\mathbb{R}^4_+ := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon t \geqslant 0\}$ четырёхмерное полупространство.

Аналогично случаю трёхмерного пространства (п. 1.8) определяются

- общность положения двух наборов треугольников в $\mathbb{R}^4$;
- алгебраическое число пересечений $A \cdot B$ двух наборов A, B треугольников в $\mathbb{R}^4$, находящихся в общем положении.

Лемма 2.4.1. *Пусть компоненты a, b зацепления в $\mathbb{R}^3$ ограничивают зейфертовы цепи A, B общего положения в $\mathbb{R}^4_+$.*

(a) *Зацепление зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда $|A \cap B|$ чётно.*

(b) *Если a, A и b, B ориентированы согласованно, то $\mathrm{lk}(a, b) = A \cdot B$.*

В частности, если зейфертовы цепи не пересекаются, то ломаные имеют нулевой коэффициент зацепления.

Набросок доказательства утверждения (b). Обозначим через $A' \subset \mathbb{R}^4_-$ ориентированный диск (например, конус), ограниченный ломаной a. Обозначим через $B' \subset \mathbb{R}^3$ целочисленную зейфертову цепь ломаной b, находящуюся в общем положении с a. Имеем $A' \cap (B \cup |B'|) = \varnothing$, поэтому

$$(A \cup A') \cap (B \cup |B'|) = (A \cap B) \cup (a \cap |B'|).$$

Обозначим теми же буквами целочисленные цепи, носителями которых являются a, A, A', B. Тогда по лемме о тривиальности 2.3.7

$$\mathrm{lk}(a, b) = a \cdot B' = A \cdot B - (A - A') \cdot (B - B') = A \cdot B. \qquad \square$$

Пример 2.4.2 (см. рис. 2.3.1). Существуют полуэллипсоиды D_1, D_2, $D_3 \subset \mathbb{R}^4_+$ «общего положения», ограниченные кольцами Борромео («зейфертовы»), для которых $D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \varnothing$, а $D_1 \cap D_2$ является парой точек.

Построение. Возьмём полуэллипсоиды $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^4_+$, заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 2z^2 + t^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 + 2t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 1.5t^2 = 1. \end{cases}$$

соответственно. Эти полуэллипсоиды ограничены кольцами Борромео. На пересечении $D_1 \cap D_3$ имеем $y^2 + t^2 = 2y^2 + 1.5t^2 = 1$, следовательно, $D_1 \cap D_3 = \varnothing$. Аналогично $D_2 \cap D_3 = \varnothing$. Множество $D_1 \cap D_2$ является парой точек

$$\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \ \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

(Превратив полуэллипсоид D_1 в проколотый тор приклеиванием ручки, см. рис. 2.3.1, получим попарно непересекающиеся зейфертовы цепи в $\mathbb{R}^4_+$, ограниченные кольцами Борромео.) $\square$

Пусть P и Q являются точками пересечения внутренностей *кусочно-линейно вложенных 2-дисков $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^4$ в общем положении*. Соединим P и Q дугами $l_1 \subset D_1$ и $l_2 \subset D_2$, не содержащими точек пересечения,

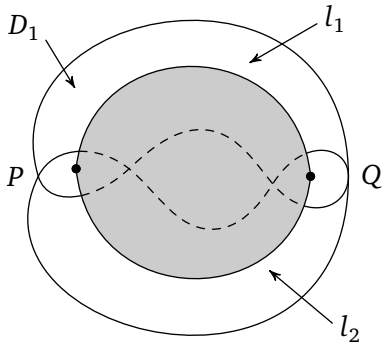


Рис. 2.4.1. Диск Уитни

отличных от D_1 и D_2 (рис. 2.4.1). *Диск Уитни* (чёрный на рис. 2.4.1) — вложенный в $\mathbb{R}^4$ 2-диск общего положения, границей которого является $l_1 \cup l_2$. Такой диск существует по лемме 2.3.1.b.

Пример 2.4.3. Для двух точек пересечения $D_1 \cap D_2$ из построения примера 2.4.2 существует диск Уитни, пересекающий D_3 ровно в одной точке.

Построение. Используем диски из построения примера 2.4.2. Пара точек $D_1 \cap D_2$ ограничивает в D_1 и в D_2 дуги l_1 и l_2, заданные уравнениями

$$\begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 2z^2 + t^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ z^2 + 2t^2 = 1. \end{cases}$$

Объединение этих дуг ограничивает в $\mathbb{R}^4_+$ диск (Уитни) D, заданный уравнениями

$$\begin{cases} x = y = 0, \\ z^2 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1-z^2}{2} \leqslant t^2 \leqslant 1 - 2z^2. \end{cases}$$

Легко проверить, что $D \cap D_3 = \{(0, 0, 0, \sqrt{2/3})\}$. □

Лемма 2.4.4. *Пусть $D_1, D_2, D_3 \subset \mathbb{R}^4_+$, $i = 1, 2, 3$, являются собственными зейфертовыми дисками общего положения для зацепления $L :=$ $:= (\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3)$.* (Собственные *означает* $\operatorname{Int} D_i \cap \mathbb{R}^3 = \varnothing$.)

(a) (*Ср. задачу* 1.10.5.) *Пусть зацепление L попарно не зацеплено по модулю* 2. *Тогда по лемме* 2.4.1.*a число $|D_i \cap D_j|$ чётно. Поэтому*

можно разбить точки пересечения $D_i \cap D_j$ на пары. Возьмём дизъюнктное объединение W_{ij} дисков Уитни «общего положения», соответствующих этому разбиению. Зацепление зацеплено по модулю 2 тогда и только тогда, когда $|W_{12} \cap D_3| + |W_{23} \cap D_1| + |W_{31} \cap D_2|$ нечётно.

(b) (*Ср.* [AK21, определение 4.4].) *Пусть попарные коэффициенты зацепления компонент нулевые. Выберем ориентации на дисках и соответствующие ориентации на компонентах зацепления. Тогда $D_i \cdot D_j = 0$ по лемме 2.4.1.b. Поэтому можно разбить точки пересечения $D_i \cap D_j$ на пары точек с разными знаками. Возьмём дизъюнктное объединение $W_{ij} = W_{(i,j)}$ дисков Уитни, соответствующих этому разбиению. На каждом диске из W_{ij} выберем ту ориентацию, которая задаёт на граничной окружности диска направление от отрицательной точки пересечения к положительной вдоль D_i, а вдоль D_j наоборот. Тогда*

$$\mu(L) = W_{12} \cdot D_3 + W_{23} \cdot D_1 + W_{31} \cdot D_2.$$

Замечание 2.4.5 (об орнаментах; [AMS+]). Обозначим через $S = S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_r$ дизъюнктное объединение r копий сферы S^n, а через $D = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_r$ дизъюнктное объединение r копий диска D^{n+1}; размерности объединений S, D ясны из контекста. Назовём *r-компонентным n-орнаментом в S^d* кусочно-линейное отображение $f : S \to S^d$ общего положения (см. определение в [RS72]), такое что $fS_1 \cap \ldots \cap fS_r = \varnothing$.

Пусть $r \geqslant 2$ и f является r-компонентным $(k(r-1)-1)$-мерным орнаментом в S^{kr-1}. Продолжим f до кусочно-линейного отображения $g : D \to B^{kr}$ общего положения (продолжение строится, например, при помощи построения конуса над каждым $f|_{S_i}$ с вершиной во внутренней точке шара B^{kr}, причём берётся своя вершина для каждой компоненты). Определим *коэффициент r-зацепления* по модулю 2 отображения f как $\mathrm{lk}_2 f := |gD_1 \cap \ldots \cap gD_r|_2 \in \mathbb{Z}_2$. Это обобщение коэффициента зацепления (он получается для $r = 2$, см. лемму 2.4.1) и μ-инварианта [FT77] (он получается для $r = 3$ и $k = 1$).

(a) Тогда $\mathrm{lk}_2 f$ корректно определён, т. е. не зависит от выбора продолжения g.

(b) Обозначим $I := [0, 1]$. *Конкордантностью* орнамента является отображение $F : S \times I \to S^d \times I$, такое что

$$F(\cdot, t) \subset S^d \times \{t\} \quad \text{для каждого} \quad t \in \{0, 1\}$$

и

$$F(S_1 \times I) \cap F(S_2 \times I) \cap \ldots \cap F(S_r \times I) = \varnothing.$$

Тогда $\mathrm{lk}_2 f$ является инвариантом конкордантности орнамента.

(c) Для $r = 3$ и $k = 1$ верно ли, что $\mathrm{lk}_2 f = |fS_1 \cap fS_2 \cap \mathrm{Int}_2 fS_3|_2$?

(d) Аналогично определяется коэффициент r-зацепления $\operatorname{lk} f \in \mathbb{Z}$ как сумма *знаков* точек в пересечении $gD_1 \cap \ldots \cap gD_r$.

Если f ограничивает отображение $g : D \to B^{kr}$, такое что $gD_1 \cap \ldots \cap \cap gD_r = \varnothing$, то $\operatorname{lk} f = 0$.

Обратное верно для каждого $k \geqslant 2$ [AMS+, теорема 1.13.a].

Для $k = 1$ обратное очевидно при $r = 2$ и неверно ни для какого $r \geqslant 3$ [AMS+, теорема 1.10].

Коэффициент r-зацепления определяет биекцию между $\mathbb{Z}$ и множеством классов конкордантности r-компонентных $(k(r-1)-1)$-мерных орнаментов в S^{kr-1} для каждого $r, k \geqslant 2$ [AMS+, теорема 1.13.a].

Список литературы

В этом списке звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

[AK21] *Arone G.*, *Krushkal V.* Embedding obstructions in $\mathbb{R}^d$ from the Goodwillie — Weiss calculus and Whitney disks. arXiv:2101.10995.

[Al22] *Alkin E.* Hardness of almost embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$, II. arXiv:2206.13486.

[AMS+] *Avvakumov S.*, *Mabillard I.*, *Skopenkov A.*, *Wagner U.* Eliminating Higher-Multiplicity Intersections, III. Codimension 2 // Israel J. Math. 2021. Vol. 245. P. 501–534. arxiv:1511.03501.

[BE82] * *Болтянский В. Г.*, *Ефремович В. А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982.

[BL] `https://en.wikipedia.org/wiki/Brunnian_link`.

[BL4] Students form a 4-component Brunnian link. `http://www.mccme.ru/circles/oim/foto2014/brunn4.png` (5Mb).

[CKS+] * New ways of weaving baskets, presented by G. Chelnokov, Yu. Kudryashov, A. Skopenkov and A. Sossinsky. `http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.en/index.htm`.

[DMN+] * *Дженжер С.*, *Мирошников А.*, *Никитенко О.*, *Скопенков А.* Циклы в графах и в гиперграфах. `https://www.mccme.ru/circles/oim/cyclesg_jour.pdf`.

[FT77] *Fenn R.*, *Taylor P.* Introducing doodles // Topology of Low-Dimensional Manifolds. Proceedings of the Second Sussex Conference (Chelwood Gate, 1977). Berlin: Springer, 1979. (Lecture Notes in Math.; Vol. 722). P. 37–43.

[GSS+] * Projections of skew lines, presented by A. Gaifullin, A. Shapovalov, A. Skopenkov and M. Skopenkov. `http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php`.

[HC19] * *Clemens C. Herbert*. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach. Providence, RI: AMS, 2019.

[Is] * http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy.

[Ko91] *Koschorke U.* Link homotopy with many components // Topology. 1991. Vol. 30, № 2. P. 267–281.

[Ko19] *Kogan E.* Linking of three triangles in 3-space. arXiv:1908.03865.

[KRR+] * Towards higher-dimensional combinatorial geometry, presented by E. Kogan, V. Retinskiy, E. Riabov and A. Skopenkov. https://www.mccme.ru/circles/oim/multicomb.pdf.

[Mi54] *Milnor J.* Link groups // Ann. of Math. (2). 1954. Vol. 59. P. 177–195.

[Pr95] * *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.

[Pr04] * *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004. http://www.mccme.ru/prasolov.

[RN11] * *Ricca R. L.*, *Nipoti B.* Gauss' linking number revisited // J. Knot Theory Ramifications. 2011. Vol. 20, № 10. P. 1325–1343. https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ricca.pdf.

[RS72] * *Рурк К. П.*, *Сандерсон Б. Дж.* Введение в кусочно-линейную топологию. М.: Мир, 1974.

[Sk00] *Skopenkov A.* On the generalized Massey — Rolfsen invariant for link maps // Fund. Math. 2000. Vol. 165, № 1. P. 1–15.

[Sk03] *Skopenkov M.* Embedding products of graphs into Euclidean spaces // Fund. Math. 2003. Vol. 179, № 3. P. 191–198. arXiv:0808.1199.

[Sk06] * *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // Surveys in contemporary mathematics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 347). P. 248–342. arXiv:math/0604045.

[Sk14] * *Скопенков А.* Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 32. М.: МЦНМО, 2024. С. 125–159. arXiv:1402.0658.

[Sk16h] * *Skopenkov A.* High codimension links // Boll. Man. Atl. (to appear). http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High_codimension_links.

[Sk16s] * *Skopenkov A.* Knots, i. e. embeddings of spheres. http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Knots,_i.e._embeddings_of_spheres.

[Sk18] * *Скопенков А.* Инварианты изображений графов на плоскости, Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 31. М.: МЦНМО, 2023. С. 74–127. arXiv:1805.10237.

[Sk20] * *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения / 2-е изд. М.: МЦНМО, 2020. Часть книги: http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf.

[Sk20u] * *Скопенков А.* Основы теории узлов и зацеплений для пользователя // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 128–165. arXiv:2001.01472.

[Sk] * *Скопенков А.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`.

[St24] *Starkov M.* An example of an “unlinked” set of $2k+3$ points in $2k$-space. arXiv:2402.09002.

[Val] * `https://en.wikipedia.org/wiki/Valknut`.

[Wn] * `https://en.wikipedia.org/wiki/Winding_number`.

[Zi13] *Zimin A.* Alternative proofs of the Conway — Gordon — Sachs Theorems. arXiv:1311.2882.

[ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник / Под ред. А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf`.

[Zu] *Zung J.* A non-general-position Parity Lemma. `http://www.turgor.ru/lktg/2013/1/parity.pdf`.

Аркадий Борисович Скопенков, МФТИ, НМУ
`https://users.mccme.ru/skopenko`

Короткое доказательство теоремы Халина и некоторые следствия из неё

Т. С. Казанцева, А. А. Арутюнов

В школе обычно рассматривают конечные графы и связанные с ними задачи. Однако и в приложениях, и в «большой математике» куда чаще встречаются графы бесконечные. В данном работе именно о таких графах, а также об идеях, связанных с так называемой грубой геометрией (см., например, [1]), и пойдёт речь.

Прежде всего мы рассмотрим теорему Халина, которая, коротко выражаясь, говорит, что в любом бесконечном графе, «не похожем» на прямую, обязательно найдётся гексагональная решётка. Таким образом, получается, что может быть одно из двух: либо граф «тонкий», т. е. похож на прямую, либо в нём имеется структура из (возможно, нескольких) гексагональных решёток. Оригинальное доказательство Р. Халина (см. [2]) достаточно сложное. Мы предложим простое, доступное старшекласснику, доказательство, основанное на работе Р. Дистеля [3]. Затем мы рассмотрим несколько новых задач, связанных с понятием конца графа, при решении которых будем пользоваться теоремой Халина, а также некоторыми смежными идеями и понятиями.

Мы надеемся, что эти идеи и задачи окажутся интересны школьникам старших классов, студентам и их преподавателям. О некоторых других вариантах использования грубой геометрии, доступных этой аудитории (см., например, [4]).

Авторы выражают признательность анонимному рецензенту за внимание и содержательные рекомендации, а также редакции сборника за помощь и поддержку.

Арутюнов А. А. поддержан грантом Российского научного фонда № 20–11–20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/.

§ 1. Основные определения

Под графом мы, как обычно, понимаем систему, состоящую из множества вершин и рёбер, соединяющих пары вершин. Будем считать, что степени всех вершин (т. е. количества выходящих из них рёбер) конечны, а также (впрочем, это не существенное в данной работе ограничение), что между парой вершин есть не более одного ребра.

Определение 1. *Простой путь* — последовательность неповторяющихся вершин графа, в которой каждая следующая вершина соединена с предыдущей ребром.

Определение 2. *Лучом* в графе будем называть бесконечный в одну сторону простой путь. Если выкинуть из луча простой путь, являющийся его началом, получим *подлуч*.

Определение 3. Здесь и далее для двух наборов путей $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}'$ под $\mathscr{P}' \leqslant \mathscr{P}$ считаем, что $\mathscr{P}'$ состоит из связных подмножеств конечных или бесконечных путей из $\mathscr{P}$. Например, $\mathscr{P}$ состоит из лучей, а $\mathscr{P}'$ из их подлучей.

Определение 4. Два луча считаются *эквивалентными*, если существует третий луч, пересекающийся с каждым из них по бесконечному числу вершин.

Несложно убедиться, что в последнем определении действительно введено отношение эквивалентности. Мы должны проверить симметричность, рефлексивность и транзитивность введенного отношения.

- *Рефлексивность*. Луч эквивалентен сам себе, поскольку он пересекает сам себя по бесконечному числу точек.
- *Симметричность*. Если луч a эквивалентен лучу b, то третий луч, который пересекается с каждым из них в бесконечном множестве вершин, осуществит и обратную эквивалентность луча b лучу a.
- *Транзитивность*. Пусть даны лучи h^1, h^2, h^3 и известно, что пары лучей h^1, h^2 и h^2, h^3 эквивалентны. Пусть лучи a, b пересекают по бесконечному числу точек пары h^1, h^2 и h^2, h^3 соответственно. Покажем, что h^1 эквивалентен h^3. Занумеруем вершины лучей h^1, h^2, h^3 естественным образом. Построим следующий луч. Пройдём по лучу h_1 от начала до пересечения с a, затем по лучу a (в направлении возрастания номеров вершин) до пересечения с h_2, аналогично по лучу h_2 до пересечения с b, по лучу b до пересечения с h_3 в некоторой точке P. Далее повторяем процедуру начиная с точки P и луча h_3, пока не вернёмся на луч h_1 в некоторой

точке Q. Затем повторяем всё описанное начиная с точки Q, и т. д. Ясно, что будет построен луч (самопересечения отсутствуют) и он пересекает h_1 и h_3 по бесконечному числу точек.

Определение 5. *Концом* в графе будем называть класс эквивалентности лучей.

Полезно разделить концы на два типа.

Определение 6. Будем говорить, что конец *толстый*, если он содержит бесконечно много непересекающихся эквивалентных лучей, и *тонкий* иначе.

Например, граф, состоящий из одного простого бесконечного пути (назовём его *прямая*) содержит два тонких конца. А граф, вершины которого расположены в целых точках координатной плоскости и рёбра соединяют вершины в соседних узлах (*плоскость*) — один толстый.

Определение 7. Для множеств A и B будем называть $(A \backsim B)$-*путём* простой путь, соединяющий какую-нибудь пару вершин из множеств A и B соответственно и не содержащий строго внутри никаких вершин из $A \cup B$ (чаще всего в качестве A и B будем рассматривать лучи или наборы лучей).

Определение 8. *Подразбиением* графа G будем называть граф, полученный из G с помощью операций замены ребра между вершинами v, u на два новых ребра v, t и t, u, где t — новая вершина.

Под гексагональной решёткой будем понимать набор вертикальных лучей и «чередующихся перегородок» между ними (рис. 1).

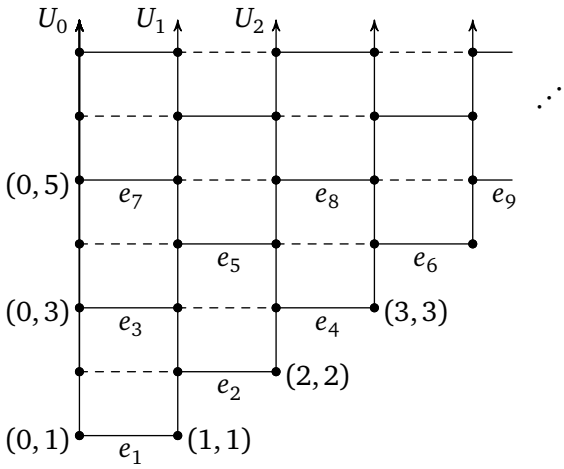


Рис. 1. Гексагональная решётка H

Оказывается, наличие у графа толстого конца равносильно тому, что он содержит в себе нечто «похожее» на плоскость. Прояснить и формализовать это наблюдение помогает следующее утверждение, предложенное впервые Р. Халиным в [2]. При доказательстве мы будем в основном опираться на работу [3].

Теорема 1 (Халин). *Любой граф, имеющий толстый конец, содержит подграф, изоморфный некоторому подразбиению графа гексагональной решётки.*

Сразу заметим, что в обратную сторону это утверждение очевидно: если уж в графе нашлась гексагональная решётка, то конец у него заведомо толстый. Так что для доказательства нам достаточно предъявить в графе с толстым концом гексагональное подразделение.

При доказательстве нам потребуется следующее утверждение, известное как лемма Кёнига (см. оригинальную работу [6] и подробное изложение в [5, теорема 22, с. 52]).

Лемма 1 (Кёниг). *Каждое бесконечное дерево содержит вершину бесконечной степени или бесконечный простой путь.*

Для полноты изложения приведём доказательство.

Доказательство. Если есть вершина бесконечной степени, то утверждение очевидно. Так что будем считать, что у всех вершин конечная степень. Подвесим граф за какую-нибудь вершину v_0. Тогда для какой-то из вершин первого уровня число её потомков бесконечно. Назовём её v_1 и добавим в путь.

Продолжим этот процесс: пусть уже выбрано k вершин, тогда по нашему алгоритму у v_{k-1} бесконечное число потомков, но вершин на k-м уровне, достижимых из неё — конечное число. Значит, у одной из них бесконечное число потомков. Назовём её v_k и добавим в путь.

Таким образом получаем искомый бесконечный простой путь. □

Перейдём к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть G — граф с толстым концом ω. Наша основная цель — индуктивно найти в нём набор «вертикальных» лучей, играющих роль $U_0, U_1, \ldots$, и «горизонтальных» путей $e_1, e_2, \ldots$ между ними, как на рис. 1.

Вначале определим набор $\mathscr{R}_0$ как бесконечное множество непересекающихся эквивалентных лучей из толстого конца ω. Начнём с индуктивного построения последовательности лучей $Q_0, Q_1, \ldots$, где для каждого номера i найдём номер $p(i)$ с соответствующим набо-

ром $Q_i \backsim Q_{p(i)}$ путей. В дальнейшем из множества лучей Q_i выделим набор «вертикальных» лучей для решётки, а $Q_i \backsim Q_{p(i)}$ пути послужат «горизонтальными перемычками».

1. Предположение индукции

На n-м шаге построения нашей последовательности будем добиваться выполнения следующих пяти условий.

(a) $Q_n \in \omega$ и Q_n не пересекается с $Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n-1}$.

(b) $p(n) < n$ для любого $n \geqslant 1$.

(c) Для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ множество $\mathscr{P}_n(Q_i)$ состоит из непересекающихся $Q_i \backsim Q_{p(i)}$ путей и удовлетворяет следующим двум условиям.

  i. Для любых $i \neq j$, где $i, j \leqslant n$, пути между наборами не пересекаются, т. е. $\mathscr{P}_n(Q_i) \cap \mathscr{P}_n(Q_j) = \varnothing$.

  ii. Для любых $i \neq j$ и $i, j \leqslant n$, где $j \neq p(i)$, пути между двумя лучами из последовательности не содержат внутри себя точек других лучей. Иначе говоря, $\mathscr{P}_n(Q_i) \cap Q_j = \varnothing$.

(d) Бесконечное множество $\mathscr{R}_{n+1} \leqslant \mathscr{R}_n$ из «неиспользованных» лучей не пересекается с множествами $Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ и $\bigcup_n \mathscr{P}_n(Q_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

(e) $\mathscr{P}_n(Q_i) \subseteq \mathscr{P}_{n-1}(Q_i)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. В процессе доказательства функция $p\colon i \mapsto p(i)$ будет оставаться неизменной после определения, но набор $\mathscr{P}_n(Q_i)$ из $Q_i \backsim Q_{p(i)}$ путей будет меняться с ростом n.

Замечание. Неформально говоря, $\mathscr{P}_n(Q_i)$ рассматривается как лучший на данный момент кандидат на систему путей между лучами Q_i и $Q_{p(i)}$. Но, когда добавляется Q_m, где $m > n$, нам, может быть, придётся менять $\mathscr{P}_n(Q_i)$, выкидывая из него лишнее. (Возможно, в пределе мы выкинем всё, так что итоговые «перемычки» придётся выбирать именно из $\mathscr{P}_n(Q_i)$, а не из их пересечения по всем n).

Будем вести индукцию по $n \in \mathbb{N}$.

2. База индукции

Если $n = 0$, то в качестве луча Q_0 выберем любой из множества $\mathscr{R}_0$ и положим $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_0 \setminus \{Q_0\}$. Очевидно, что сейчас все условия (1a)–(1e) выполнены.

3. Шаг индукции

(a) **Выбор нового пути, не пересекающего старые.**

Если, $n \geqslant 1$, то рассмотрим любой луч $R_n^0 \in \mathscr{R}_n$. Из свойства (1d) следует, что R_n^0 не пересекается с объединением всех уже выбранных

лучей и перегородок между ними

$$H_n := Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_{n-1}(Q_i).$$

Так как и $R_n^0 \in \omega$, и $Q_0 \in \omega$, существуют бесконечные наборы непересекающихся $R_n^0 \backsim H_n$ путей.

Есть два варианта.

• Среди этих путей найдётся такой набор $\mathscr{P}$, что построенные пути не пересекаются ни с какими из старых, т. е.

$$\mathscr{P} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{P}_{n-1}(Q_i) \right) = \varnothing.$$

На каждом пути из $\mathscr{P}$ отметим первую точку, лежащую на каком-то из Q_i. Тогда найдётся i, для которого будет отмечено бесконечно много путей. Оставим в $\mathscr{P}$ только части путей между R_n^0 и Q_i. Тогда набор $\mathscr{P}$ таков, что $\mathscr{P} \cap Q_i \neq \varnothing$ только для одного i. Положим $p(n) = i$ и $\mathscr{P}_n(Q_j) = \mathscr{P}_{n-1}(Q_j)$ для всех $j < n$.

• В противоположном случае, если невозможно выбрать $\mathscr{P}$ так, чтобы он не пересекался со старыми путями, то выбираем семейство $\mathscr{P}$ так, что все его вершины, общие с H_n, лежат в $\mathscr{P}_{n-1}(Q_i)$ для единственного i. Такой выбор возможен, ведь пути из $\mathscr{P}_{n-1}(Q_i)$ не пересекаются для различных i по свойству (1c), и потому на каждом пути из $\mathscr{P}$ можно отметить первую точку, лежащую в каком-то $\mathscr{P}_{n-1}(Q_i)$. Тогда каждый путь из $\mathscr{P}$ можно продлить до Q_i или до $Q_{p(i)}$ так, чтобы новые пути были несамопересекающимися, так как на каждом из них мы выбирали первую точку в $\mathscr{P}_{n-1}(Q_i)$.) Тогда для какого-то i отмечено бесконечное число путей.

(b) **Проблема: могло не остаться неиспользованных путей.**

i) Теперь выделим бесконечные подмножества $\mathscr{P}' \leqslant \mathscr{P}$ и $\mathscr{P}_n(Q_i) \leqslant \leqslant \mathscr{P}_{n-1}(Q_i)$ так, чтобы они не пересекались. Продлим бесконечное подмножество путей из $\mathscr{P}'$ (далее для удобства будем называть это подмножество $\mathscr{P}$) до Q_i или $Q_{p(i)}$, как было описано выше, отрезками путей из $\mathscr{P}_{n-1}(Q_i) \backslash \mathscr{P}_n(Q_i)$ и положим $p(n) = i$ или $p(n) = p(i)$ соответственно. При этом $\mathscr{P}_n(Q_j) = \mathscr{P}_{n-1}(Q_j)$ для всех $j \leqslant n$, $j \neq i$.

В каждом из случаев мы выбрали множества $\mathscr{P}_n(Q_j)$ для всех $j \neq i$ так, чтобы выполнялось условие (1e), определили номер $p(n)$ как требуется в условии (1b) и нашли набор $\mathscr{P}$ из непересекающихся $R_n^0 \backsim Q_{p(n)}$ путей, которые также не пересекают лучи Q_i и сопоставленные им наборы путей $\mathscr{P}_n(Q_i)$ для всех $i \neq p(n)$, т. е. верны условия (1a)

и (1c). Всё, что нам мешает выбрать R_n^0 в качестве Q_n, — это условие (1d): если $\mathscr{P}$ пересекается со всеми, кроме, может быть, конечного числа лучей из множества $\mathscr{R}_n$ бесконечное число раз, то мы не можем выбрать семейство $\mathscr{R}_{n+1} \leqslant \mathscr{R}_n$, для которого $\mathscr{R}_{n+1} \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

ii) Покажем, что для любого луча R из определённого выше множества лучей $\mathscr{R}_n$ и набора $\mathscr{P}' \leqslant \mathscr{P}$ таких, что $\mathscr{P}'$ — бесконечный набор $R \backsim Q_{p(n)}$ путей, существует луч R' из $\mathscr{R}_n$, не совпадающий с R и имеющий бесконечно много общих точек с $\mathscr{P}'$.

Действительно, пусть нашлись луч R и набор $\mathscr{P}'$, удовлетворяющие описанным условиям. Тогда выберем R в качестве Q_n, а $\mathscr{P}'$ в качестве $\mathscr{P}_n(Q_n)$ и от каждого $R^* \in \mathscr{R}_n$, не равного R, оставим его подлуч, не имеющий общих точек с R.

При этом множество I лучей, подходящих в качестве R', бесконечно. В противном случае можно применить предыдущее рассуждение к множеству $\mathscr{R}_n \backslash I$ и получить ещё один луч из I, что приводит к противоречию.

iii) Занумеруем пути из $\mathscr{P}$ номерами вершин из луча R_n^0, в которых эти пути начинаются. Тогда на любом подмножестве $\mathscr{P}' \leqslant \mathscr{P}$ есть индуцированный порядок.

Пусть $\mathscr{P}'$ является набором $R \backsim Q_{p(n)}$ путей для некоторого луча R. Назовём введённый порядок *совместимым* с R, если он совпадает с порядком, который задаётся лучом R на этом наборе путей.

(c) **Соберём луч из конечных частей неиспользованных лучей.**

Докажем, что можно выбрать две последовательности $R_n^0, R_n^1, \ldots$ и $\mathscr{P}^0 \geqslant \mathscr{P}^1 \geqslant \ldots$ такие, что все R_n^i являются подлучами различных лучей из $\mathscr{R}_n$, а каждое $\mathscr{P}^i$ является набором $R_n^i \backsim Q_{p(n)}$ путей, порядок на которых совместим с R_n^i.

Пусть луч R_n^0 уже есть. Положим $\mathscr{P}^0 = \mathscr{P}$, v_0 — первая вершина в R_n^0. Пусть уже найдены первые $k-1$ элементов каждой последовательности. Тогда применим аналогичные с п. (3b, ii) рассуждения к лучу R_n^{k-1} и набору путей $\mathscr{P}^{k-1}$: найдётся луч R_n^*, не пересекающий ни один из уже выбранных и не пересекающий конечный набор путей $P_0, P_1 \ldots P_{k-2}$. Пусть $P_{k-1} \in \mathscr{P}^{k-1}$ — какой-нибудь путь, v_{k-1}^- — его стартовая вершина на луче R_n^{k-1}, а вершина v_k — самое верхнее его пересечение с R_n^*. Возьмём в качестве R_n^k подлуч R_n^*, стартующий с вершины v_k. Очевидно, можно выбрать теперь бесконечное множество путей $\mathscr{P}^k \leqslant \mathscr{P}^{k-1}$ с совместимым с R_n^k порядком.

Каждый путь P_k из найденных выше разбивается на два пути: от R_n^k до v_{k+1} и от v_{k+1} до $Q_{p(n)}$. Обозначим их P_k^- и P_k^+ соответственно. Пусть,

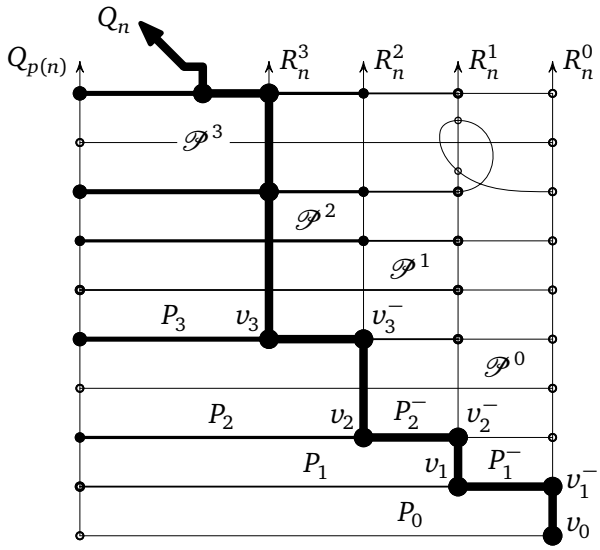


Рис. 2. Построение Q_n (из статьи [3])

далее, R_{n+1}^k — подлуч в R_n^k, не пересекающий путь P_i ни для какого i. Тогда положим (рис. 2):

- $Q_n := v_0 R_n^0 v_1^- P_1^- v_1 R_n^1 v_2^- P_2^- v_2 R_n^2 \ldots$;
- $\mathscr{P}_n(Q_n) := \{P_0^+, P_1^+, P_2^+, P_3^+ \ldots\}$;
- $\mathscr{R}_{n+1} := \{R_{n+1}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Осталось проверить, что условия (1a)–(1e) выполнены после шага индукции. Условия (1b) и (1e) мы уже проверяли. Условия (1a) и (1c) верны, ведь Q_n состоит из отрезков лучей из $\mathscr{R}_n$, которые, в свою очередь, не пересекаются с $Q_0 \cup Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n-1}$, причём $\mathscr{P}_n(Q_n) \leqslant \mathscr{P}$, а для $\mathscr{P}$ утверждение было верно. Условие (1e) справедливо, поскольку никакие подлучи R_{n+1}^i не пересекаются как с выбранными ранее лучами или путями, так и с лучом Q_n и путями $\mathscr{P}_n(Q_n)$ по построению.

6. Построение решётки

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Кёнига (лемма 1).

Построим граф, состоящий из вершин v_i, $i = \{0, 1, 2, \ldots\}$, где v_i соединена с $v_{p(i)}$, и применим к нему лемму 1. Получим последовательность $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$, где или $p(n_{i+1}) = n_i$ или $p(n_i) = n_0$ для любого $i \geqslant 1$. Рассмотрим оба случая.

(a) Если выполнено первое условие, т. е. $p(n_{i+1}) = n_i$ для всех i, то выкинем все не входящие в нашу последовательность номера. Останутся $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ всё ещё удовлетворяющие условиям (1a)–(1e), при-

чём все наборы $\mathscr{P}_n(Q_{i+1})$ состоят из $Q_{i+1} \backsim Q_i$ путей. Наша цель — выбрать подлучи Q_i' из Q_i, соответствующие $U_0, U_1, U_2, \ldots$, и пути S_1, S_2, S_3, … между ними, соответствующие $e_1, e_2, e_3, \ldots$, чтобы прийти к картинке, аналогичной рис. 1. Будем подбирать нужные элементы индуктивно (таким образом, на каждом шаге построения выбрано лишь конечное число «вертикалей» и «перегородок»).

Пусть $Q_0' = Q_0$ и S_0 — любой путь из $\mathscr{P}_n(Q_0)$. Пусть k и n — минимальные такие, что S_k и Q_n' ещё не определены. Мы опишем, как выбрать S_k и, если требуется для определения S_k, то и Q_n'. Пусть i — такой номер, что e_k соединяет U_{i-1} и U_i в H. Если $i = n$, положим Q_n' равным такому подлучу Q_n, что он не пересекает $S_1, S_2 \ldots S_{k-1}$, в противном случае Q_n' уже был определён ранее. Теперь можем выбрать $S_k \in \mathscr{P}_n(Q_i)$ «достаточно высоко», чтобы отразить положение e_k в H. Благодаря условиям (1a)–(1e) мы знаем, что S_k не пересекает ни один из ранее выбранных путей Q_i' или S_i.

(b) Осталось рассмотреть второй случай, когда $p(n_i) = n_0$ для любого $i \geqslant 1$. Переименуем Q_{n_0} в Q, а все остальные Q_{n_i} в Q_i для $i \geqslant 1$. Тогда наши наборы $\mathscr{P}_n(Q_i)$ состоят из непересекающихся $Q_i \backsim Q$ путей. Мы будем выбирать Q_n' и S_k индуктивно, как раньше, за исключением того, что теперь S_k состоит из трёх частей: отрезок из $\mathscr{P}_n(Q_{i-1})$, отрезок из Q и, наконец, отрезок из $\mathscr{P}_n(Q_i)$. Но тогда S_k всё ещё может быть определён на каждом шаге, ведь из Q всегда выкинут лишь конечный отрезок, а значит, есть бесконечный подлуч со всеми старыми условиями.

Тем самым доказательство теоремы завершено. □

§ 2. Число концов и функции роста графов

Мы уже отмечали, что структура концов — это грубый инвариант графа, т. е. его свойство, которое не меняется при локальных изменениях. Другое важное грубое свойство — функция роста. Она имеет глубокие приложения, например в теории групп. В частности, хорошо известен пример Григорчука групп промежуточного роста (см. [7, 8]). Понятие степени роста активно используется и в грубой геометрии (см. [1]), а также при изучении аменабельных и гиперболических групп (см. [1, 9]). В частности функция роста является ключевой при определении фёльнеровости. В тоже время для графов это понятие выглядит достаточно просто и наглядно.

Определение 9. *Шар радиуса r с центром в вершине v* (обозначение $\mathrm{Ball}(v, r)$) — множество всех таких вершин, что минимальная длина пути по рёбрам от них до v не превосходит r.

Число элементов в множестве будем обозначать через $|\cdot|$.

Определение 10. Назовём *функцией роста* графа γ в вершине x_0 отображение $f_{x_0}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, определяемое для $x_0 \in \gamma$ формулой

$$f(n) := |\mathrm{Ball}(x_0, n)|.$$

Несложно проверить, что в связном графе γ для любых двух точек x_0, x_1 выполнено свойство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{x_0}(n)}{f_{x_1}(n)} = C$$

для некоторой константы C. Таким образом, все функции роста данного графа *эквивалентны*. Соответствующий класс функций будем называть *типом роста*. Так, у любого графа, грубо эквивалентного прямой, тип роста обязательно линеен. У графа, грубо эквивалентного плоскости, — квадратичен, и так далее.

Выявим связь между линейностью функции роста графа G и наличием у него толстых концов.

Теорема 2. *Если функция роста графа G линейна, то все его концы тонкие.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно и граф имеет толстый конец при линейной скорости роста. В таком случае по теореме Халина можно выделить подграф, изоморфный гексагональной решётке. Поскольку функция роста графа линейна, существует такое $C > 0$, что $f(n) < Cn$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Выкинем из нашего подграфа все горизонтальные пути (которые соединяют разные вертикали решётки), кроме одного для каждой пары вертикальных лучей. Выберем стартовую вершину v и занумеруем вертикали: U_0 содержит v, $U_{-1}, U_{-2}, \ldots$ идут влево и $U_1, U_2, \ldots$ — вправо. За некоторое конечное число k шагов можно добраться до как минимум $2C+1$ различных вертикалей. Тогда $f(k) \geqslant 2C+1$ и

$$f(k+t) \geqslant (2C+1) + t(2C+1) = (t+1)(2C+1) > 2Ct.$$

Положим $t = 2k$, тогда

$$f(k+t) = f(3k) > 4Ck \quad \Rightarrow \quad f(k+t) > C(k+t) = 3Ck.$$

Получили противоречие. □

Обратное вообще говоря не имеет места. Приведём несколько примеров.

Пример 1. Граф с бесконечным числом тонких концов, без толстого конца и имеющий экспоненциальный рост.

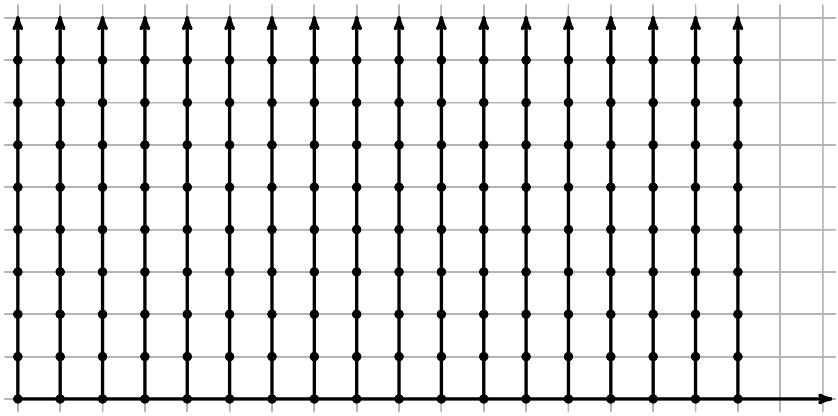


Рис. 3. Граф без толстых концов с нелинейной функцией роста

Рассмотрим граф, состоящий из точек вида (k, n) на координатной сетке (рис. 3), где $k, n \geqslant 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$, и проведём все вертикальные отрезки и горизонтальные между соседними точками с абсциссой 0. Тогда у графа нет ни одного толстого конца, ведь никакие два непересекающихся луча не эквивалентны. Но если назначить вершиной отсчёта точку $(0, 0)$, то $f(n-1) = n(n+1)/2$.

Пример 2. Граф с единственным тонким концом, обладающий экспоненциальным ростом.

Более того, даже если тонкий конец один и степени вершин ограничены каким-нибудь числом M, то граф может иметь нелинейную функцию роста. Приведём пример такого графа.

Назовём бинарным деревом порядка k бинарное дерево с k уровнями. Рассмотрим простой луч с занумерованными вершинами. К каждой вершине с номером i присоединим бинарное дерево порядка i (рис. 4).

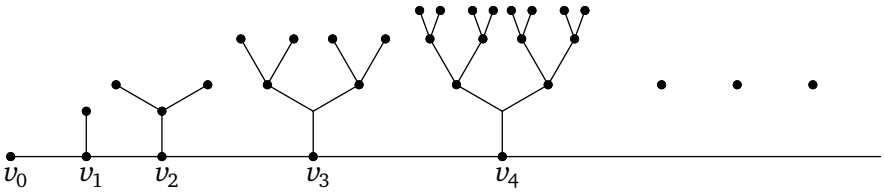


Рис. 4. Граф из бинарных деревьев

Легко видеть, что

$$|\mathrm{Ball}(v_0, 2k)| \geqslant k+1+(1-1)+(2-1)+\ldots+(2^{k-1}-1)+(2^k-1) = 2^{k+1}-1,$$

т. е. граф растёт экспоненциально, причём степень каждой вершины не превосходит 3.

Данный пример легко модифицировать, получая любую полиномиальную степень роста.

§ 3. Вершинно-транзитивные графы

Перейдём к рассмотрению так называемых вершинно-транзитивных графов, для которых можно доказать (при определённых условиях) утверждение, обратное к нашей теореме 2, что и является нашей ближайшей целью.

Определение 11. *Автоморфизм графа* — произвольная подстановка ϕ на множестве вершин графа, сохраняющая отношение смежности; т. е. образы $\phi(u)$ и $\phi(v)$ вершин u и v смежны тогда и только тогда, когда смежны сами вершины u и v.

Определение 12. *Вершинно-транзитивный граф* — граф, у которого для любых двух вершин v и u существует автоморфизм, переводящий v в u.

Замечание. Для вершинно-транзитивных графов скорость роста не может быть более, чем экспоненциальной, так как

$$|\mathrm{Ball}(v_0, n)| \leqslant \Sigma|\mathrm{Ball}(v_i, n-1)| = \deg(v_0) \cdot |\mathrm{Ball}(v_0, n-1)|,$$

где v_i — соседи вершины v_0.

Лемма 2. *Если число концов связного вершинно-транзитивного графа G конечно, то их не больше, чем* 2.

Доказательство. Пусть их больше, чем два, скажем, k. Тогда найдём такой конечный подграф $G_0 \subset G$, при удалении которого остаётся k бесконечных компонент связности. Обозначим их через $L_1 \dots L_k$.

Выберем точки $v_1 \in L_1$ и $v_0 \in G_0$ такие, что $\rho(v_1, G_0) > d$, где d — диаметр[1)] графа G_0. Такие точки найдутся, поскольку L_1 — связный подграф и все вершины в нём имеют конечную степень, а значит, в L_1 есть сколь угодно далёкие от v_0 точки.

Рассмотрим автоморфизм f, который переводит вершину v_0 в v_1. Имеем $f(G_0) \subset L_1$. После удаления множества $f(G_0) \cup G_0$ у нас сохраняется $k-1$ бесконечная компонента $L_2, \dots, L_k$ и добавляется «расщепление» компоненты L_1 на ещё $k-1$ бесконечную компоненту — итого не менее чем $2k-2$ конца. Значит, если $k > 2$, то, повторяя процедуру, получим, что число концов бесконечно. □

[1)] То есть максимальное расстояние между вершинами (расстояние — наименьшее количество рёбер в пути между вершинами).

Для знакомых с началами теории групп отметим, что из леммы 2 сразу следует теорема Хопфа, гласящая, что в графе Кэли для конечно порождённой группы число концов либо бесконечно, либо не более чем два.

Теорема 3. *Скорость роста вершинно-транзитивного графа с конечным числом тонких концов линейна.*

Доказательство. По лемме 2 вершинно-транзитивный граф с конечным числом концов имеет или один конец, или два.

• Пусть в графе два конца. Тогда рассмотрим какой-нибудь граф H, при выкидывании которого остаются две бесконечные компоненты. Пусть он лежит в некотором $\mathrm{Ball}(v_0, d) = G_0$. Тогда при выкидывании G_0 останутся две бесконечные компоненты L_0 и R_0 и конечный (не обязательно связный) подграф Q_0.

• Покажем, что $Q_0 \subset \mathrm{Ball}(v_0, 2d)$.

Пусть это неверно, тогда найдётся $w \notin \mathrm{Ball}(v_0, 2d)$, $w \in Q_0$. Рассмотрим автоморфизм, переводящий v_0 в w. Тогда после удаления $\mathrm{Ball}(w, d)$ должны остаться две бесконечные компоненты связности. Заметим, что

$$\mathrm{Ball}(w, d) \cap \mathrm{Ball}(v_0, d) = \varnothing,$$

$$\mathrm{Ball}(w, d) \cap L_0 = \varnothing, \quad \mathrm{Ball}(w, d) \cap R_0 = \varnothing.$$

Но тогда, если удалить $\mathrm{Ball}(w, d) \cup \mathrm{Ball}(v_0, d)$, в графе останутся три бесконечные компоненты, противоречие.

• Выберем вершину $v_1 \in R_0$ на расстоянии $2d$ от v_0 и рассмотрим автоморфизм f, переводящий v_0 в v_1. Тогда $\mathrm{Ball}(v_1, d) \cap L_0 = \varnothing$, т. е. $\mathrm{Ball}(v_1, d) \setminus Q_0 \subset R_0$. Аналогично определим Q_1, L_1, R_1. Далее, так же определим

$$v_2 = f(f(v_0)), \quad v_3 = f(f(f(v_0))), \quad \ldots$$

и

$$v_{-1} = f^{-1}(v_0), \quad v_{-2} = f^{-1}(f^{-1}(v_0)), \quad \ldots$$

Тогда весь наш граф представлен в виде $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ball}(v_i, 2d)$, причём пересекаются не на границе только шары с центрами в вершинах с индексами, отличающимися на 1. Выполнена оценка

$$|\mathrm{Ball}(v_0, 2kd)| \leqslant 2|\mathrm{Ball}(v_0, 2d)| \cdot (k+1) \leqslant C \cdot 2k.$$

Следовательно, скорость роста не более чем линейна. Поскольку мы предполагаем, что граф бесконечный, получаем утверждение теоремы.

• Остаётся заметить, что если у графа единственный конец, то доказательство аналогично. Нужно только учесть, что все индексы вершин v_i будут принимать только натуральные значения. □

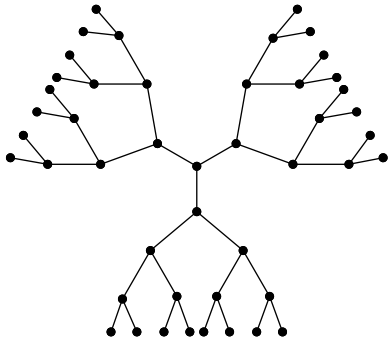


Рис. 5. Транзитивный граф $T3$ с экспоненциальной функцией роста

Требование конечности числа концов в теореме 3 существенно. Соответствующим примером является граф $T3$, определяемый следующим образом: три бинарных дерева, склеенных в одной вершине (см. рис. 5 и пример 3).

Следствие 1. *Если у графа Кэли все концы тонкие, то он либо экспоненциального роста, либо линейного.*

Пример 3. Граф $T3$ является вершинно-транзитивным, у него нет толстых концов и его скорость роста экспоненциальна.

Доказательство. Покажем, что данный граф вершинно-транзитивен. Рассмотрим вершины $v_1, v_2 \in T3$. Понятно, как выглядит автоморфизм, переводящий v_1 в v_2: поставим в соответствие бинарным деревьям, смежным с v_1, деревья, смежные с v_2.

Очевидно, что у этого графа нет толстых концов, ведь в нём нет циклов, а, как следствие, и выделить решётку в нём нельзя. Но его функция роста имеет вид

$$|\mathrm{Ball}(v_0, n)| = 1 + 3 + 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + 2^{n-1} \cdot 3 = 3 \cdot 2^n - 2,$$

поскольку при увеличении радиуса на единицу множество новых вершин удваивается. Значит, скорость роста экспоненциальна. □

На самом деле верно, что у вершинно-транзитивного графа G с бесконечным числом концов скорость роста не менее чем экспоненциальна. Рассмотрим конечный граф G_0 — такой подграф в G, что его удаление приводит к разбиению графа на $k > 2$ бесконечных компонент. Рассмотрим вершину $v_0 \in G_0$. Для неё существует такое число r, что $G_0 \subset \mathrm{Ball}(v_0, r)$. Заметим теперь, что при удалении графа $\mathrm{Ball}(v_0, t(r+1))$ исходный распадётся как минимум на $k(k-1)^{t-1}$ бесконечных компонент. Действительно, при любом выборе вершины v

граф после удаления $\mathrm{Ball}(v, r)$ распадается на k бесконечных компонент. Значит, каждый из бесконечных подграфов, полученных на i-м шаге, через r итераций распадётся на как минимум $k-1$ бесконечную компоненту. Таким образом, $|\mathrm{Ball}(v_0, t(r+1))| \geqslant k(k-1)^{t-1}$.

Список литературы

[1] *Roe J.* Lectures on coarse geometry. Providence, RI: AMS, (University Lecture Series; Vol. 31). 2003.

[2] *Halin R.* Ueber unendliche Wege in Graphen // Math. Ann. 1964. Bd. 157. S. 125–137.

[3] *Diestel R.* A short proof of Halin's grid theorem // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg. 2004. Bd. 74. S. 237–242.

[4] *Арутюнов А.* Математическая грубость (в хорошем смысле слова), 2023. `https://www.trv-science.ru/2023/01/matematicheskaya-grubost-v-xoroshem-smysle-slova/`.

[5] *Верещагин Н. К.*, *Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления / 4-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2012.

[6] *König D.* Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche // Acta Sci. Math. (Szeged). 1927. Bd. 3. S. 121–130.

[7] *Григорчук Р. И.* Степени роста конечно-порождённых групп и теория инвариантных средних‘ // Известия АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 5. С. 939–985.

[8] *Grigorchuk R. I.*, *Pak I.* Groups of Intermediate Growth, an Introduction // Enseign. Math. (2). 2008. Vol. 54, № 3–4. P. 251–272.

[9] *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps ((with an appendix by J. Tits) // Publications mathematiques de l'IHES. 1981. Vol. 53. P. 53–78.

Татьяна Сергеевна Казанцева, МФТИ

`tanya.s.kazantseva@gmail.com`

Андроник Арамович Арутюнов,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, МФТИ

`andronick.arutyunov@gmail.com`

Нам пишут

Письмо в редакцию

В. М. Журавлёв, К. В. Журавлёва

В нашей статье «Телефонные сети и графы с цветными рёбрами» в выпуске 32 «Математического просвещения» допущена неточность в доказательстве теоремы 3 на с. 170. Второй абзац доказательства должен читаться так:

Рассмотрим реализацию полного графа K_{2n} в виде правильного $(2n-1)$-угольника $A_1 \dots A_{2n-1}$ со всеми диагоналями и центром O, который соединён со всеми вершинами. Множество рёбер цвета i $(i = 1, \dots, 2n-1)$ состоит из отрезка OA_i, перпендикулярной ему стороны и всех перпендикулярных ему диагоналей. Очевидно, что в каждом таком множестве рёбра не имеют общих вершин. Мы получили правильную раскраску полного графа K_{2n} в $2n-1$ цвет.

Валерий Михайлович Журавлёв, АО «Туполев», Москва
ZhuravlevVM@mail.ru

Каролина Валерьевна Журавлёва, ООО «Джи И Хэлскеа», Москва
ZhuravlevaKV@mail.ru

По мотивам задачника

Миша Алехнович. 1978–2006

А. А. Разборов

Миша Алехнович родился в Москве 26 октября 1978 года. В 1991 Миша начал учиться в 8Б классе 57 школы и в 1995 поступил в МГУ им. М. В. Ломоносова на механико-математический факультет. В 2000 Миша окончил мехмат с красным дипломом, в 2000–2001 участвовал в специальной программе по теории сложности, проводимой Институтом Перспективных Исследований (Institute for Advanced Study) в Принстоне, США, а в 2001–2003 учился в аспирантуре в Массачусетском Технологическом Институте (MIT). Получив учёную степень

(PhD) в 2003, Миша вернулся в Принстон, IAS и провёл там следующие два года (2003–2005). В 2005 он начал работать на факультете математики в Калифорнийском Университете Сан-Диего.

Миша трагически погиб в водном походе 5 августа 2006 года в возрасте 27 лет.

Его ранняя смерть приостановила начавшуюся — и, несомненно, продолжившуюся бы — яркую и многообещающую карьеру в области Theoretical Computer Science. Миша начал работу в теории сложности доказательств, одном из наиболее трудных подразделов теории сложности, куда он внёс весьма впечатляющий вклад. Отметим некоторые из его результатов. В статьях [1] и [2] Миша изучал основополагающий вопрос об автоматизируемости различных систем доказательств и доказал сильные (условные) результаты о невозможности такой автоматизируемости. Эти результаты остаются непревзойдёнными; они установили неожиданную связь между сложностью доказательств и другими областями, такими как вероятностно проверяемые доказательства (PCP) или теория параметризованной сложности. Работы [3, 4] закладывают основы теории псевдослучайных генераторов в сложности доказательств и показывают, как построить такие генераторы для многих нетривиальных систем. Эта теория остаётся одним из немногих имеющихся разумных подходов к центральной и широко открытой проблеме в теории сложности доказательств. Статьи [5, 6] дают строгие нижние оценки для конкретных систем доказательств, и вновь эти результаты сегодня остаются одними из самых сильных.

В последние годы Миша также начал применять в смежных областях наработанный им в сложности доказательств опыт. Он уже сделал несколько интересных шагов в этом направлении и, незадолго до трагедии, активно работал над двумя многообещающими исследовательскими проектами. Отметим некоторые из его достижений. В работе [7] устанавливаются сильные нижние оценки в теории proper learning, основанные на новых и оригинальных связях с автоматизируемостью систем доказательств. Работа [8] устанавливает очень интересные результаты про внутренние ограничения методов, базируемых на полуопределённой релаксации; эти методы весьма популярны среди специалистов по теории алгоритмов. В статье [9] получены сильные нижние оценки сложности решения задачи о выполнимости в ограниченной, но естественной (и также очень популярной) модели.

Помимо того, что Миша был по-настоящему восходящей звездой, он оставался приятным, весёлым и обаятельным человеком. Для мно-

гих из нас он стал настоящим другом, не только коллегой или соавтором. Нам всем будет его не хватать.

Оригинал статьи здесь:

`http://www.mi.ras.ru/~razborov/misha_sigact.pdf`.

Список литературы

[1] *Alekhnovich M.*, *Buss S.*, *Moran S.*, *Pitassi T.* Minimum propositional proof length is *NP*-hard to linearly approximate // J. Symbolic Logic. 2001. Vol. 66, № 1. P. 171–191,

[2] *Alekhnovich M.*, *Razborov A.* Resolution is not automatizable unless W[P] is tractable // Proceedings of the 42nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2001. P. 210–219,

[3] *Alekhnovich M.*, *Ben-Sasson E.*, *Razborov A.*, *Wigderson A.* Pseudorandom generators in propositional proof complexity // SIAM J. Comput. 2004. Vol. 34, № 1. P. 67–88.

[4] *Alekhnovich M.*, *Razborov A.* Lower bounds for the polynomial calculus: non-binomial case // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2003. Vol. 242. P. 18–35.

[5] *Alekhnovich M.*, *Johannsen J.*, *Pitassi T.*, *Urquhart A.* An exponential separation between regular and general resolution // Proceedings of the 34th ACM Symposium on the Theory of Computing. 2002. P. 448–456.

[6] *Alekhnovich M.* Lower bounds for k-DNF resolution on random 3-CNFs // Proceedings of the 37th ACM Symposium on the Theory of Computing. New York: ACM, 2005. P. 251–256,

[7] *Alekhnovich M.*, *Braverman M.*, *Feldman V.*, *Klivans A. R.*, *Pitassi T.* Learnability and automatizability // Proceedings of the 45th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2004. P. 621–630,

[8] *Alekhnovich M.*, *Arora S.*, *Tourlakis I.* Toward strong nonapproximability results in the Lovasz — Schrijver hierarchy // Proceedings of the 46th ACM Symposium on the Theory of Computing. New York: ACM, 2005. P. 294–303,

[9] *Alekhnovich M.*, *Hirsch E.*, *Itsykson D.* Exponential lower bounds for the running time of DPLL algorithms on satisfiable formulas // Automata, languages and programming. Berlin: Springer, 2004. (Lecture Notes in Comput. Sci.; Vol. 3142). P. 84–96.

Александр Александрович Разборов, университет Чикаго

`razborov@uchicago.edu`

Памяти Миши Алехновича

А. Я. Канель-Белов

Я познакомился с Мишей, когда руководил командой Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике в 1993 году. В дальнейшем я несколько раз с ним общался, будучи старшим по параллели на Московской математической олимпиаде школьников. В 1995 году на Всероссийской олимпиаде школьников была предложена моя задача, которая была оценена школьниками как лучшая (11 класс, задача 3):

Пусть Ц(n) — минимальное число линий, которое требуется, чтобы увеличить отрезок в n раз с помощью одного циркуля, ЦЛ(n) — соответственно циркуля и линейки. Докажите, что отношение Ц(n)/ЦЛ(n) неограниченно.

На разборе задач я заявил, что не могу доказать равенство бесконечности предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Ц}(n)}{\text{ЦЛ}(n)} = \infty.$$

И тут ко мне подошёл Миша и сказал, что может. Потом возникли задачи о верхней и нижней асимптотике величины ЦЛ(n), о глазомере и т. п., в результате чего возникла наша статья.

В дальнейшем Миша стал заниматься сложностью вычислений и пошёл в ученики к А. Разборову.

Его трагическая смерть в водном походе была шоком для всех нас.

Памяти Миши Алехновича был посвящён специальный выпуск журнала «Computational complexity»: vol. 20, p. 579–590 (2011), `https://link.springer.com/article/10.1007/s00037-011-0032-2/`.

Домашняя страница Миши: `https://www.math.ias.edu/~misha/`.

Алексей Яковлевич Канель-Белов, МФТИ, университет Бар-Илана
`kanelster@gmail.com`

Сложность алгоритмов при построениях циркулем и линейкой

М. В. Алехнович, А. Я. Канель-Белов, А. О. Сулейкин

Статья посвящена решению задачи 32.9 (выпуск 32, с. 181). Пусть на плоскости отмечены две точки A и B и задано натуральное число n. Наша цель — построить на прямой, проходящей через эти точки, третью точку C так, чтобы длина отрезка AC была в n раз больше длины отрезка AB, с помощью линейки и (или) циркуля (при этом прямая AB считается проведённой). На каждом шаге мы можем либо проводить линейкой прямую через две отмеченные точки, либо строить окружность с центром в отмеченной точке радиусом, равным расстоянию между отмеченными точками. При пересечении проведённых прямых и окружностей возникают новые отмеченные точки. Обозначим через Ц(n) минимальное число шагов, необходимое при решении задачи одним циркулем, а через ЦЛ(n) — число шагов, необходимых при решении её циркулем и линейкой. Задача заключается в оценке асимптотического поведения функций Ц(n) и ЦЛ(n). Основной результат работы заключается в следующем. Существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что:

$$\text{а) } c_1 \ln n \leqslant \text{Ц}(n) \leqslant c_2 \ln n; \quad \text{б) } c_1 \ln\ln n \leqslant \text{ЦЛ}(n) \leqslant \frac{c_2 \ln n}{\ln\ln n}.$$

Наиболее интересный результат получается при нижней оценке функции ЦЛ(n), где совершенно неожиданно возникают чисто алгебраические понятия, такие как высота числа и др.

Над статьёй совместно работали М. В. Алехнович и А. Я. Канель-Белов. Работа была завершена А. Я. Канель-Беловым и А. О. Сулейкиным.

§ 1. Используемые обозначения и вспомогательные утверждения

В этой статье будут рассматриваться несколько способов построений на плоскости (построения одним циркулем, циркулем и линейкой, одной линейкой и т. д.). С каждым способом построения связаны свои алгоритмы для достижения того или иного результата (деление отрезка пополам, увеличение его в n раз и т. п.). Будем говорить, что способ построения P *эквивалентен* способу Q (обозначение: $P \sim Q$), если существует такая константа $c > 0$, что для любого алгоритма построения

для P, работающего за k операций, существует имитирующий его алгоритм для Q, который работает не более чем за $c \cdot k$ операций, и наоборот, для любого алгоритма для Q существует имитирующий алгоритм для P, причём время работы увеличивается не более чем в c раз. Далее, если $f(x)$ — функция, то через $O(f(x))$, как обычно, обозначается любая такая функция $g(x)$, что существует константа $c > 0$, для которой $g(x) \leqslant c \cdot f(x)$ для всех x. В частности, $O(1)$ означает ограниченное число. Везде в данной работе в качестве $O(1)$ можно взять число 100. Если же

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = 0,$$

то $g(x) = o(f(x))$. Сформулируем без доказательства следующие известные факты.

Лемма 1.1. *Существуют алгоритмы построения за $O(1)$ действий*

а) *отрезка, равного по длине сумме двух отрезков, с помощью одного циркуля*;

б) *отрезка, равного по длине произведению двух отрезков, с помощью циркуля и линейки*;

в) *отрезка, равного по длине квадратному корню из заданного отрезка, с помощью циркуля и линейки.* □

Лемма 1.2. *Справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma^{-1}(n)}{\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}}\right) = 1. \qquad \square$$

Напомним, что $\Gamma(x)$ — гамма-функция от действительной переменной, которая на натуральных числах совпадает с функцией $(n-1)!$, а $\Gamma^{-1}(x)$ — функция, обратная к $\Gamma(x)$.

§ 2. О формализации и роли математических понятий

Много говорят о *формализме*, неудобстве его восприятия, важность содержательной стороны противопоставляют формальной и т. д. Но тем не менее *формализация* — нечто очень важное и ценное. Почему?

Формализация необходима, чтобы сделать рассуждение объектом изучения средствами математики. Конструирование формализации даёт лучшее понимание сути и выявляет подводные камни, и, наконец, после формализации появляется возможность не приводить каждый

раз одно и то же рассуждение, а сослаться на теорему. Эта деятельность сродни *переводу*, и существуют *приёмы перевода* («нечто» — множество объектов, «определяет» — существует функция и т. д.). Этот математический канцелярит важно знать, так как если на него отвлекаться, то уйдёт суть. Когда мы решаем трудную задачу, мы строим воображаемый автомат, её решающий, но при этом необходимые понятия надо перевести на доступный для него язык. Формализация — не для нас, а для «автомата». Между формализацией и программированием, их трудностями есть глубокая связь. Например, тригонометрия автоматизирует рассуждения, связанные с подобными треугольниками. Автоматизированные и формализованные рассуждения суть *вычисления*.

Имея дополнительно формальный перевод, идею легче увидеть и применить. (Впрочем, любая переформулировка полезна, но работа с математическим объектом бывает удобнее.) Формализация не исчерпывает сущности (см. П. Флоренского о комплексных числах), объект может иметь много формализаций, каждая — взгляд со своей стороны. Например, *бесконечно малое* может быть формализовано как *дифференциал* (с помощью касательного отображения) или как в нестандартном анализе. Процедура формализации раскрывает важные вещи, и не формализуемое до конца нельзя до конца и понять. На самом деле кроме формального есть и другие уровни чёткости, так что формализацию и обоснование можно рассматривать в более широком контексте перевода.

Интересно, что в школьном курсе нет полной строгости. Например, такие важные понятия, как «теорема», «доказательство», не имели строгих определений. Они появились только в XX веке. Чтобы построить теорему, из которой вытекала бы её собственная недоказуемость, а тем самым — пример недоказуемого и неопровержимого утверждения, понадобилась формализация понятий «теорема», «доказательство» (удивительно, до какой степени она оказалась непростой!). Понятие *алгоритма* было формализовано, когда было установлено наличие алгоритмически неразрешимых проблем. В частности, таковой является проблема останова.

Дело в том, что в математике могут моделироваться не только объекты природы, но и сами рассуждения и математические конструкции. *Формализация* — это и есть такое моделирование. Только она делает из рассуждения математический объект. Это часто нужно в доказательствах невозможности чего-либо. Например, чтобы доказать разрешимость кубического уравнения в радикалах, достаточно вывести формулу, но чтобы доказать *неразрешимость* общего уравнения пятой

степени в радикалах, потребовалось формализовать само понятие *разрешимости* (что и сделал Абель). Эти алгебраические концепции, возникшие в начале XIX века, изменили лицо алгебры.

2.1. Радикалы и невозможность удвоения куба

Пусть K — некоторое *поле*, т. е. множество (комплексных) чисел, замкнутое относительно арифметических операций, т. е. операций сложения, вычитания, умножения и деления (кроме деления на нуль). Над полями можно строить арифметику и производить все привычные конструкции, в частности рассматривать *векторные пространства* над K, их базисы, изучать размерности. *Расширение поля* K набором чисел $\{x_i\}$ (обозначение: $K' > K$) есть множество чисел, получающееся из поля K и набора $\{x_i\}$ с помощью арифметических операций. Иными словами, это минимальное по включению поле K', содержащее $K \cup \{x_i\}$. Эти два понятия выглядят совершенно невинно, однако их достаточно для решения знаменитых задач древности об удвоении куба и трисекции угла. Мы это продемонстрируем, чтобы читатель отнёсся с должным уважением и к другим понятиям теории полей, отражающим глубокие идеи, которые необходимо не спеша продумать[1)].

Чтобы доказать возможность построения циркулем и линейкой, достаточно понимания процедуры с позиции обычного здравого смысла. Однако для доказательства *невозможности* необходимо саму процедуру построения сделать математическим объектом, т. е. *формализовать*. (Аналогичные разговоры следует вести при изучении построения одной линейкой.) Прежде всего, если задан единичный отрезок, несложно проверить, что все длины, которые мы можем построить, выражаются через 1 с помощью арифметических действий и вычисления квадратного корня[2)].

Начнём с упражнения, доступного читателю, знающему, как делить многочлены с остатком.

[1)] Короткие тексты с большой концентрацией идей весьма коварны (например, при изучении цепных дробей также сталкиваются с большим числом идей в коротком тексте, отсюда возникают методические проблемы). Такие тексты надо изучать *очень медленно*.

[2)] Координаты точки пересечения двух прямых выражаются через угловые коэффициенты прямых с помощью арифметических операций, а координаты точек пересечения окружности и прямой выражаются через координаты центра окружности, угловой коэффициент прямой и радиус окружности с помощью арифметических действий и операции извлечения квадратного корня; ситуация с пересечением двух окружностей аналогична.

Упражнение. Даны многочлен P третьей степени и многочлен Q второй степени, оба с рациональными коэффициентами. Докажите, что если P и Q имеют общий корень, то многочлен P имеет рациональный корень.

Этот факт легко обобщается для произвольного числового поля.

Упражнение. Даны многочлен P третьей степени и многочлен Q второй степени, оба с коэффициентами из поля K. Докажите, что если P и Q имеют общий корень, то многочлен P имеет корень в K.

Квадратичным расширением K' поля K называется расширение поля K корнем квадратного трёхчлена с коэффициентами из K.

Упражнение. Докажите, что каждый элемент из K' либо принадлежит K, либо является корнем квадратного уравнения с коэффициентами из K.

Следствие 2.1. *Пусть поле K есть квадратичное расширение поля L. Пусть многочлен P с коэффициентами из L имеет степень 3 и не имеет корня в L. Тогда у него нет и корня в K.* □

Следствие 2.2. *Пусть поле K_{i+1} есть квадратичное расширение поля K_i, $i = 0, \ldots, n$, а многочлен P с коэффициентами из K_0 имеет степень 3 и не имеет корня в K_0. Тогда у него нет и корня в K_n.* □

Предположим, что $\sqrt[3]{2}$ выражается через квадратные радикалы. Тогда существует такая *башня* (*квадратичных*) *расширений*, т. е. цепочка полей $K_0 = \mathbb{Q} \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n$, что

- $\sqrt[3]{2} \in K_n$;
- K_i есть квадратичное расширение поля K_{i-1} для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Понятие *башни квадратичных расширений* даёт формализацию понятия *разрешимости в квадратных радикалах*.

Следующее утверждение означает невозможность удвоения куба.

Следствие 2.3. *Корень уравнения $x^3 - 2 = 0$ не выражается в квадратных радикалах*[3]. □

Для доказательства невозможности удвоения куба в пятимерном пространстве (т. е. невозможности построения $\sqrt[5]{2}$) достаточно ввести

[3] В преподавании при разговоре о доказательстве невозможности удвоения куба с помощью циркуля и линейки (и аналогично о доказательстве невозможности трисекции угла) опять говорим о *процедуре формализации*, о том, как формализовать понятие *разрешимости уравнения в радикалах*, а также *разрешимости уравнения в квадратных радикалах*. Затем следует ввести понятие *башни* (*квадратичных*) *расширений*.

ещё одно понятие. Пусть $K' > K$ — расширение поля K. Тогда K' можно рассматривать как векторное пространство над K, ибо любой элемент поля K' можно умножить на любой другой элемент поля K', в том числе и на элемент поля K. Размерность поля K' над K есть *степень поля K' над K*, она обозначается $[K' : K]$.

Упражнение. Пусть $K'' > K' > K$. Докажите, что

$$[K'' : K] = [K'' : K'] \cdot [K' : K].$$

Указание. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис поля K' над K, а $\{f_j\}_{j=1}^m$ — базис поля K'' над K'. Тогда $\{e_i f_j\}_{i=1}^n{}_{j=1}^m$ есть базис поля K'' над K.

Иными словами, размерность подполя делит размерность поля. Если $K' \neq K$ есть квадратичное расширение поля K, то $[K' : K] = 2$. Если $F > K$ получается башней квадратичных расширений, то $[F : K]$ есть степень двойки. С другой стороны, $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{2}]$ имеет размерность 5 над $\mathbb{Q}$, а пятёрка не делит степень двойки.

Упражнение. Докажите, что $\sqrt[5]{2}$ не выражается в квадратных и кубических радикалах.

Мы рекомендуем читателю обратиться к материалам 32-й Летней конференции международного математического Турнира городов.

2.2. Построения одной линейкой

Та же ситуация возникает с алгоритмами и с построением циркулем и линейкой.

Задача. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя опустить из данной точки на прямую перпендикуляр.

Решение. Будем действовать от противного. Пусть существует правило (алгоритм), по которому мы можем опустить из данной точки перпендикуляр на данную прямую. Что это значит? Казалось бы, всё тут яснее ясного. Попробуйте, не читая дальше, определить понятие *алгоритма* сами. Оказывается, сконструировать определение такого, казалось бы, «очевидного» понятия далеко не просто! При этом до сих пор нам хватало интуитивного понимания для успешного проведения построений, а сейчас понадобилось определение. Разве это не удивительно?

Процедура построения одной линейкой состоит из следующих шагов.

1. Построение прямой, соединяющей две данные ранее построенные точки.
2. Построение точки пересечения ранее построенных прямых.

3. Взятие «произвольной» точки в ранее построенной области (на луче, прямой, отрезке, области плоскости, ограниченной ранее построенными линиями).

Шаг 3 не однозначен, результат не должен от него зависеть (подробности см. в разделе, посвящённом *глазомеру*).

Упражнение. Определите по аналогии процедуру построения циркулем и линейкой.

Перейдём к **решению**. Найдём образ прямой и не лежащей на ней точки при некотором аффинном преобразовании. Получим также прямую и не лежащую на ней точку. Будем поэтапно выполнять алгоритм построения перпендикуляра для прямой и её образа. Все шаги алгоритма сохранятся, ибо при аффинном преобразовании отрезок переходит в отрезок, прямая в прямую и т. д.

Но в результате выполнения алгоритма мы построим перпендикуляр. Его образ, коль скоро наш алгоритм корректно строит перпендикуляры, также будет перпендикуляром к образу прямой. С другой стороны, при правильно подобранном аффинном преобразовании образ уже перпендикуляром не будет. Мы получили противоречие. Значит, предположение неверно и с помощью одной линейки нельзя опустить перпендикуляр на прямую.

Следующая задача также неразрешима.

Задача. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя провести через данную точку прямую, параллельную данной прямой.

Решение. При аффинном преобразовании параллельность сохраняется, так что предыдущее решение нуждается в модификации. Построение одной линейкой имеет более глубокие корни — проективные. Предположим, некий профессор Nobody изобрёл алгоритм и собирается осчастливить человечество своим открытием. Он демонстрирует его на слайде. Когда он проводит прямую, на экране тоже проводится прямая, когда он находит точку пересечения — на экране тоже строится точка пересечения.

Может, однако, так случиться, что линия, соединяющая точку пересечения двух прямых и источник света, будет параллельна плоскости экрана. Этого не произойдёт, если слайд параллелен плоскости экрана. Не произойдёт этого и если зафиксировать процесс построения и затем достаточно мало скосить плоскость экрана.

При этом, скосив экран подходящим образом, можно добиться, чтобы в результате на экране параллельная пара прямых перестала

быть параллельной. Но при этом процесс построения на экране будет по-прежнему корректным. Профессор Nobody оконфузился. Получили противоречие.

Задачи

1. Дана окружность. Можно ли построить её центр с помощью одной линейки?
2. Дана окружность, в которой проведён диаметр. Можно ли построить её центр с помощью одной линейки?
3. Проведите прямую, проходящую через недоступную точку пересечения двух прямых и точку, лежащую а) между прямыми; б) по одну сторону от прямых. (*Указание*. Воспользуйтесь конфигурацией из теоремы Дезарга.)
4. Дана недоступная прямая T, заданная двумя точками пересечения пар прямых M_1, M_2 и N_1, N_2 соответственно. Постройте прямую, проходящую через точку P и пересекающую данную прямую L на недоступной прямой T.
5. Даны окружность и точка. Одной линейкой постройте касательную к окружности, проходящую через эту точку, если точка а) лежит на окружности; б) не лежит.
6. Дана некоторая окружность с центром. Постройте с помощью одной линейки следующее:
   а) перпендикуляр из данной точки на данную прямую;
   б) отрезок на данной прямой с концом в данной точке, равный данному отрезку;
   в) точки пересечения прямой с окружностью, центр которой — данная точка, а радиус равен длине данного отрезка;
   г) точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки.
7. Даны две параллельные прямые. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок, лежащий на одной из данных прямых.
8. Даны две параллельные прямые и отрезок, лежащий на одной из них. Удвойте этот отрезок.
9. Даны две параллельные прямые. Разделите отрезок, лежащий на одной из них, на n равных частей.
10. Даны две параллельные прямые и точка P. Проведите через точку P прямую, параллельную данным прямым.
11. Даны окружность, её диаметр AB и точка P. Проведите через точку P перпендикуляр к прямой AB (см. [6])

§ 3. Построение одним циркулем

Известно (теорема Мора — Маскерони), что любое построение с помощью циркуля и линейки в принципе можно осуществить одним циркулем (прямые задаются парами точек). Доказательство этой теоремы основано на двух конструкциях:

1) построение точек пересечения окружности и прямой (в случае, когда центр окружности не лежит на прямой, это лёгкое упражнение);
2) построение точки пересечения двух прямых.

Последняя конструкция представляет собой основную трудность. Один из путей её осуществления — построение образов прямых и точек при инверсии. Однако процедура построения инверсного образа одним циркулем может потребовать сколь угодно большого числа действий (когда точка или прямая находятся близко к центру инверсии). И это не случайно: хотя без линейки и можно обойтись, её наличие может существенно экономить количество операций. На XXI Всероссийской математической олимпиаде была предложена следующая задача.

Задача. Пусть Ц(n) — минимальное число линий, необходимых для увеличения отрезка в n раз с помощью одного циркуля, а ЦЛ(n) — с помощью циркуля и линейки. Докажите, что отношение Ц(n)/ЦЛ(n) не ограничено.

Приведём решение. Вначале докажем лемму.

Лемма 3.1. *Справедливо неравенство* $1 \leqslant \dfrac{\text{Ц}(n)}{\log_2 n} \leqslant O(1)$.

Доказательство. По условию мы можем строить циркулем окружности с центром в построенных ранее точках, причём имеем право делать раствор, равный какому-то уже построенному расстоянию. Ясно, что диаметр множества всех точек может увеличиться после построения одной окружности не более чем вдвое. Поэтому Ц$(n) \geqslant \log_2 n$. Но так как мы умеем строить сумму двух отрезков за $O(1)$ действий, мы сможем построить число n за $O(\log_2 n)$ действий (достаточно рассмотреть двоичное разложение числа n). □

Для решения задачи остаётся заметить, что с помощью линейки мы можем за несколько действий возводить в квадрат (лемма 1.1). Таким образом, ЦЛ$(2^{2^n}) \leqslant O(n)$, а с другой стороны, Ц$(2^{2^n}) \geqslant 2^n$, и, значит,

$$\frac{\text{ЦЛ}(2^{2^n})}{\text{Ц}(2^n)} \geqslant \frac{2^n}{O(n)},$$

что при $n \to \infty$ стремится к бесконечности. Задача решена.

§ 4. Построение циркулем и линейкой

Перейдём к более подробному изучению построений. Мы убедились, что отношение Ц(n)/ЦЛ(n) не ограничено. В частности, при $n = 2^{2^k}$ и $k \to \infty$ это отношение стремится к бесконечности. Возникает вопрос: верно ли, что наличие линейки существенно экономит количество построений при всех $n \to \infty$?

Иными словами, равен ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\text{Ц}(n)}{\text{ЦЛ}(n)}$ бесконечности? Поскольку Ц(n) имеет порядок $\ln n$ (по лемме 3.1), достаточно доказать следующий результат.

Лемма 4.1 (верхняя оценка). *Справедливо неравенство*

$$\text{ЦЛ}(n) \leqslant O\Big(\frac{\ln n}{\ln\ln n}\Big).$$

Доказательство. Приведём алгоритм построения. Представим n в факториальной системе счисления:

$$n = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_{[\Gamma^{-1}(n)]}[\Gamma^{-1}(n)]!, \quad a_i \leqslant i.$$

Будем строить число n в три этапа.

1. Последовательно построим числа $1, 2, 3, \ldots, [\Gamma^{-1}(n)]$. Это требует $[\Gamma^{-1}(n)]$ сложений.
2. Последовательно построим числа $1!, 2!, 3!, \ldots, [\Gamma^{-1}(n)]$. Это требует не более $[\Gamma^{-1}(n)]$ умножений.
3. Пользуясь полученными числами, построим число n. Этот этап потребует не более $[\Gamma^{-1}(n)]$ сложений и $[\Gamma^{-1}(n)]$ умножений.

Поскольку каждое сложение и умножение можно осуществить за $O(1)$ операций (лемма 1.1) и

$$\Gamma^{-1}(n) = O\Big(\frac{\ln n}{\ln\ln n}\Big),$$

этот алгоритм обеспечивает нужную оценку. □

Итак,

$$\text{ЦЛ}(n) = O\Big(\frac{\ln n}{\ln\ln n}\Big).$$

Оказывается, эта асимптотика является точной. А именно, имеет место следующая лемма.

Лемма 4.2 (достижимость верхней оценки). *Существует такая константа $c > 0$, что для бесконечно многих n выполняется неравенство*

$$\text{ЦЛ}(n) \geqslant \frac{c_2 \ln n}{\ln\ln n}.$$

Прежде чем перейти к доказательству, опишем его идею. Она состоит в том, что существует не более $(6n)!$ алгоритмов построения, работающих за n шагов, и соответственно не более $(6n)!$ возможных результатов, которые не могут покрывать все числа от 1 до $(6n)!+1$.

Сформулируем вспомогательные утверждения.

Лемма 4.3. а) *Если проведено n линий, то имеется не более чем n^2 точек пересечения.* б) *Если имеется не более чем n^2 точек пересечения, то можно провести не более $(n^2)^3$ прямых или окружностей.* □

Следствие 4.4. *Число способов построения за n действий не превышает $(n!)^6 < (6n)!$.* □

Доказательство леммы 4.2. Выпишем по порядку все числа, которые могут быть получены в результате n действий. Их не более $(6n)!$. Поэтому всегда существует натуральное k, меньшее чем $(6n)!$, которое не выписано. Это значит, что увеличение отрезка в k раз не может быть получено за n действий, где $n = [\Gamma^{-1}(k)/6]$. Итак, мы получили, что для бесконечного множества натуральных чисел $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\text{ЦЛ}(k) \geqslant \frac{\Gamma^{-1}(k)}{6} \geqslant \frac{c_1}{6}\frac{\ln n}{\ln\ln n},$$

где c_1 — константа из леммы 1.2. □

Итак, для бесконечно многих n (даже для «большинства») оценка $\ln n/\ln\ln n$ для ЦЛ(n) существенно не улучшается. Тем не менее для некоторых «хороших» n её улучшить можно. Например, имеет место следующий результат.

Лемма 4.5. *Если n является степенью двойки, то* ЦЛ$(n) \leqslant O(\ln\ln n)$.

Доказательство. Пусть $n = 2^t$. Рассмотрим двоичное разложение числа t:

$$t = a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^r a_r, \quad \text{где } r = [\log_2 n].$$

Тогда за r операций умножения мы можем построить числа $1, 2, \ldots, 2^r$ и ещё за $r-1$ операцию умножения построить

$$n = 2^{a_0} \cdot 4^{a_1} \cdot \ldots \cdot (2^r)^{a_r}.$$

Остаётся заметить, что $r \sim \ln\ln n$. □

4.1. Основной результат. Нижняя оценка сложности

Предыдущее предложение показывает, что нижняя оценка в основной теореме достигается. Легко доказать аналогичное утверждение для $n = q^k$. Итак, для некоторых n можно обойтись лишь $c\ln\ln n$ опе-

рациями. А каков самый удачный случай? Существуют ли такие n, которые можно построить ещё быстрее? Оказывается, асимптотика $\ln\ln n$ тоже является точной. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.6 (нижняя оценка). *Существует такая константа $c>0$, что для любого n выполнено неравенство* ЦЛ$(n) > c\ln\ln n$.

Это основной результат данной работы.

Чтобы понять общую ситуацию, начнём с изучения более простого случая. Рассмотрим задачу на построение одной линейкой. Сформулируем её так.

Задача. Дан единичный квадрат, в котором отмечены середины сторон. Оцените количество операций ЦЛ(n), необходимое для построения отрезка длины n.

Следующая лемма аналогична лемме 1.1.

Лемма 4.7. *Пусть на плоскости отмечены вершины квадрата. Тогда с помощью одной линейки за $O(1)$ действий можно построить*

а) *сумму двух отрезков, лежащих на одной прямой, так, чтобы отрезок-сумма принадлежал той же прямой;*

б) *произведение двух отрезков, лежащих на одной прямой, так, чтобы отрезок-произведение принадлежал той же прямой.* □

Таким же способом, что и в предыдущем случае, можно доказать аналоги лемм 4.1, 4.2, 4.5.

Лемма 4.8.

а) *Существует такое C, что для всех n выполнено неравенство*

$$Л(n) \leqslant C\frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

б) *Существует такое c, что для бесконечного множества значений n выполнено неравенство*

$$ЦЛ(n) \geqslant c\frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

в) *Для любого числа k существует такая константа $c(k)$, что*

$$ЦЛ(k^q) \leqslant c(k)\ln\ln(k^q).$$ □

Теперь перейдём к доказательству более простого аналога теоремы 4.6.

Теорема 4.9. *Существует такая константа $c>0$, что для любого n выполнено неравенство* $Л(n) > c\ln\ln n$.

Доказательство. Введём на плоскости декартову систему координат и будем записывать уравнения всех возникающих линий и точек в аналитическом виде. Прямой будем считать набор из трёх коэффициентов, задающих её уравнение, точкой — пару координат. Очевидно, что можно выразить координаты точки пересечения прямых через коэффициенты этих прямых с помощью не более чем 30 операций из множества $\{+, -, \cdot, /\}$. Аналогично можно выразить коэффициенты прямой, проходящей через пару точек, через координаты этих точек не более чем за 30 операций из множества $\{+, -, \cdot, /\}$. Первоначально у нас отмечены точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Если мы докажем, что за k арифметических операций из чисел 0, 1 мы не можем получить число, большее чем 2^{2^k}, то утверждение будет доказано. Заметим, что все числа, возникающие в наших построениях, рациональны. Определим высоту $\mathrm{ht}(q) = \mathrm{ht}(m/n)$ рационального числа q, представленного в виде несократимой дроби m/n, как $|m| + |n|$.

Тогда

1) $\mathrm{ht}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}\right) = \mathrm{ht}\left(\frac{m}{n}\right)$;

2) $\mathrm{ht}\left(-\left(\frac{m}{n}\right)\right) = \mathrm{ht}\left(\frac{m}{n}\right)$;

3) $$\mathrm{ht}\left(\frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2}\right) = |m_1 \cdot m_2| + |n_1 \cdot n_2| \leqslant \\ \leqslant (|m_1| + |n_1|) \cdot (|m_2| + |n_2|) = \mathrm{ht}\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \cdot \mathrm{ht}\left(\frac{m_2}{n_2}\right);$$

4) $$\mathrm{ht}\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) = |m_1 \cdot n_2 + m_2 \cdot n_1| + |n_1 \cdot n_2| \leqslant \\ \leqslant (|m_1| + |n_1|) \cdot (|m_2| + |n_2|) = \mathrm{ht}\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \cdot \mathrm{ht}\left(\frac{m_2}{n_2}\right).$$

Таким образом, если h — максимальная высота построенных нами чисел, то после выполнения любой операции максимальная высота не превышает h^2. Это означает, что если мы выполнили k операций, то высота результата не превышает

$$\underbrace{\left(((2^2)^2)\dots\right)^2}_{k \text{ раз}} = 2^{2^k}.$$

Доказательство теоремы 4.9 завершено. □

Перейдём к **доказательству теоремы 4.6**.

Будем, как и в теореме 4.9, использовать аналитическое представление прямых и окружностей. Задача о построении циркулем и линейкой переводится на аналитический язык. С одной стороны, ариф-

метические операции и операция извлечения квадратного корня имеют интерпретацию на языке геометрических построений, а с другой стороны, координаты точек пересечения прямых или окружностей выражаются как корни линейных или квадратных уравнений.

В частности, любое число, которое можно построить с помощью циркуля и линейки, выражается через квадратные радикалы. (Поскольку числа π и $\sqrt[3]{2}$ не выражаются через квадратные радикалы, а $\cos(\varphi/3)$ не выражается с помощью квадратных радикалов через $\cos(\varphi)$, три знаменитые проблемы древности о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба оказались неразрешимыми.) Подробнее об алгебраических задачах, связанных с геометрическими построениями и решением уравнений в радикалах, рассказано в книге [1].

Итак, для доказательства основной теоремы следует показать, что за n применений арифметических операций и операции извлечения корня нельзя построить числа, большие m^{m^n}, где m — некоторая константа. Основная трудность состоит именно в наличии операции извлечения корня.

Как и в доказательстве предыдущей теоремы, постараемся определить *высоту* — «размер» числа — и проверить, что она растёт не слишком быстро. Для того чтобы избежать трудностей с корнем, мы будем представлять возникающие алгебраические числа в виде матриц с целыми коэффициентами. При этом извлечение корня будет преобразовываться в расширение матрицы до вдвое большего размера.

Если определять *высоту числа* стандартным образом — как сумму модулей коэффициентов его минимального многочлена, то нужные оценки не получатся. Дело в том, что высоты суммы и произведения $\mathrm{ht}(\alpha+\beta)$ и $\mathrm{ht}(\alpha\beta)$ оцениваются как $\mathrm{ht}(\alpha)^{\deg\beta}\,\mathrm{ht}(\beta)^{\deg\alpha}$. Нетрудно показать, что степень полученных не более чем за n шагов чисел не превосходит 2^n. В самом деле, квадратичное расширение удваивает размерность построенного числового поля. Поэтому размерность поля, порождённого значениями координат точек, построенных не более чем за n шагов, не превосходит 2^n. Степень алгебраического числа не больше размерности числового поля, в котором оно лежит. Таким образом, высота числа, построенного за n шагов, оценивается величиной

$$\underbrace{(2^{2^n})^{2^n}\ldots}_{n\ \text{раз}} = 2^{n^2},$$

что позволяет получить лишь нижнюю оценку $\sqrt{\ln\ln n}$.

Однако оценки

$$\mathrm{ht}(\alpha)^{\deg\beta}\,\mathrm{ht}(\beta)^{\deg\alpha}$$

получаются с помощью техники симметрических многочленов. А это означает, что, используя эти оценки, мы работаем в нормальном замыкании числового поля, порождённого всеми ранее построенными величинами, которое в нашем случае может иметь степень 2^{2^n}, что много больше, чем степень того расширения, которое нам нужно. Поэтому, чтобы не иметь дело с лишними расширениями, мы пользуемся представлением чисел матрицами.

4.2. Основные конструкции

Пусть k — некоторое *числовое поле*, т. е. множество алгебраических чисел, замкнутое относительно арифметических операций. (Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем уравнения с целыми коэффициентами.) Мы будем изображать элементы поля k с помощью целочисленных матриц. При этом сумме чисел отвечает сумма соответствующих матриц, а произведению — произведение. Таким образом, мы работаем с некоторым коммутативным подкольцом $K_1 \subseteq M_n$.

Кроме того, мы будем всегда помнить, какое число какой матрице соответствует. Это значит, что вместе с подкольцом $K_1 \subseteq M_n$ всякий раз фиксируется некоторый гомоморфизм (т. е. отображение, сохраняющее операции сложения и умножения) из K_1 в поле действительных чисел. Этот гомоморфизм будет обозначаться через F.

Несколько сложнее обстоит дело с операцией извлечения квадратного корня из матрицы A. В исходном кольце K_1 осуществление такой операции может оказаться затруднительным, поэтому мы воспользуется следующим трюком из линейной алгебры: перейдём к другому матричному кольцу K_2, в котором корень из элемента, соответствующего A, строится явно.

Итак, пусть у нас есть матрица A, из которой нужно извлечь квадратный корень. Покажем, как расширить кольцо K_1 и доопределить гомоморфизм F так, чтобы A была квадратом некоторой матрицы. Рассмотрим кольцо $K_1' \subseteq M_{2n}$, $K_1' \simeq K_1$, где элементы кольца K_1 связаны с элементами кольца K_1' следующим образом:

$$X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. При этом $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Новое кольцо K_2 порождено кольцом K_1' и элементом B. Нетрудно видеть, что K_2 — коммутативное кольцо, являющееся расширением кольца K_1'. При этом мож-

но доопределить гомоморфизм F из K_2 в поле действительных чисел так, что $F(B)=\sqrt{F(A)}$. Отметим, что если в кольце K_1 уже существовал элемент x, дающий в квадрате A, то в K_2 появятся *делители нуля* (элементы с нулевым умножением). В самом деле, $(x-\sqrt{A})(x+\sqrt{A})=0$. Если же извлекается корень из делителя нуля, то могут возникнуть и *нильпотенты* (элементы, степени которых равны нулю), ибо

$$\left(\sqrt{x-\sqrt{A}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{A}}\right)^2=0.$$

Теперь можно считать, что вместо чисел мы оперируем с матрицами. В самом начале у нас есть единичная матрица из кольца M_1 над $\mathbb{Z}$. Операции извлечения квадратного корня соответствует не алгебраическая операция, а расширение нашего кольца, при котором размер матриц увеличивается вдвое.

Чтобы обойти трудности, связанные с делением, воспользуемся той же конструкцией, что и при построении множества рациональных чисел с помощью пар целых. Мы будем работать с парами матриц и операциями

$$(A,B)+(C,D)=(AD+BC,BD),\ (A,B)\cdot(C,D)=(AC,BD),\ (A,B)^{-1}=(B,A)$$

и $\sqrt{(A,B)}=(\sqrt{A},\sqrt{B})$. Таким образом, при извлечении корня из дроби размер матриц будет увеличиваться в 4 раза.

Определим теперь для произвольной матрицы A понятие *высоты* $\operatorname{ht}(A)$ как максимум модулей коэффициентов матрицы A. За высоту «дроби» (A,B) примем максимум из высот матриц A и B. Высота матриц, как нетрудно убедиться, обладает следующими свойствами.

Лемма 4.10.

а) *Справедливо неравенство* $\operatorname{ht}(A+B)\leqslant \operatorname{ht}A+\operatorname{ht}B$.

б) *Если* $A,B\in M_n$, *то* $\operatorname{ht}(A\cdot B)\leqslant n\cdot\operatorname{ht}A\cdot\operatorname{ht}B$.

в) *Справедливо равенство* $\operatorname{ht}\sqrt{A}=\operatorname{ht}A$. □

Из леммы 4.10 непосредственно получается следующий результат.

Лемма 4.11.

а) *Если мы произвели над парами матриц n операций, то размер получившихся матриц не превосходит* 4^n.

б) *Если мы произвели над парами матриц n операций, то максимальная высота получившихся матриц не превосходит*

$$\underbrace{4^n\left(\ldots\left(4^n((4^n)^2)\right)^2\ldots\right)^2}_{n\ \text{раз}}=(4^n)^{(1+2+\ldots+2^n)}\leqslant 4^{n2^{n+1}}\leqslant 5^{5^n}.$$ □

Итак, мы получили пару матриц A и B высоты не более чем 5^{5^n}. Теперь наша цель — оценить высоту $F(A)/F(B)$. Нам понадобятся несколько фактов и понятий из линейной алгебры.

Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен от x, равный $\det(A - xE)$ (если формально раскрыть определитель), где E — единичная матрица.

Хорошо известна следующая теорема.

Теорема 4.12 (Гамильтон — Кэли). *Если $f(x)$ — характеристический многочлен матрицы B, то $f(B) = 0$.* □

Теперь нам надо оценить коэффициенты и корни характеристического многочлена матрицы A, построенной за n операций из предыдущей леммы.

Лемма 4.13. *Пусть A — матрица из M_n, $\mathrm{ht}(A) < h$. Тогда модули коэффициентов её характеристического многочлена*

$$f(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

удовлетворяют оценке $|a_i| \leqslant (n!)^2 h^n$.

Доказательство. Раскрывая формально определитель матрицы $A - xE$, получаем сумму, состоящую из $n!$ произведений вида

$$(a_{i_1 j_1} - x) \cdot (a_{i_2 j_2} - x) \cdot \ldots \cdot (a_{i_{l-1} j_{l-1}} - x) \cdot a_{i_l j_l} \cdot \ldots \cdot a_{i_n j_n}.$$

Модули коэффициентов при степенях x в каждом из таких слагаемых не превосходят коэффициента при соответствующей степени в $(x + h)^n$, который, в свою очередь, не больше $n! \cdot h^n$. Отсюда получаем, что модули коэффициентов характеристического многочлена не больше $(n!)^2 h^n$. □

Лемма 4.14. *Пусть $f(x)$ — такой многочлен с целыми коэффициентами степени n, что модуль каждого его коэффициента не превышает m. Пусть x — его корень. Тогда*

а) $|x| \leqslant n \cdot m$;

б) *если x отличен от нуля, то $|1/x| \leqslant n \cdot m$.*

Доказательство. Докажем сначала пункт а). Предположим, что x_0 — корень и $x_0 > n \cdot m$. Но

$$|f(x_0)| = |a_n \cdot x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_0| \geqslant$$
$$\geqslant |a_n \cdot x_0^n| - n \cdot (m \cdot x_0^{n-1}) \geqslant (x_0^{n-1}) \cdot (x_0 - n \cdot m) > 0.$$

Получили противоречие. Отсюда вытекает правильность оценки из пункта а).

Для доказательства пункта б) достаточно заметить, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то x_0^{-1} — корень многочлена, полученного при выписывании коэффициентов многочлена $f(x)$ в обратном порядке. □

4.3. Завершение доказательства теоремы 4.6

Допустим, что мы получили число k за n операций. На языке наших матриц это означает, что мы получили такую пару матриц (A, B), что $k = F(A)/F(B)$, где $F(X)$ — наш гомоморфизм из матриц в числа.

Положим $a = F(A)$, $b = F(B)$. Оценим a сверху.

Пусть $f(x)$ — характеристический многочлен матрицы A. Тогда по теореме Гамильтона — Кэли $f(A) = 0$, а значит, и $F(f(A)) = f(F(A)) = f(a) = 0$.

По лемме 4.11 высота матрицы A не превышает 5^{5^n}, следовательно, по лемме 4.13 модули коэффициентов многочлена $f(x)$ не превосходят

$$(n!)^2 \cdot (5^{5^n})^n = (n!)^2 \cdot 5^{n \cdot 5^n}.$$

Так как a — корень многочлена $f(x)$, по лемме 4.14 получаем оценку

$$k \leqslant n \cdot (n!)^2 \cdot 5^{n \cdot 5^n},$$

а это выражение, начиная с некоторого n, меньше чем 6^{6^n}.

Аналогично получается верхняя оценка $b^{-1} < 6^{6^n}$ с той лишь разницей, что мы оцениваем не сам корень характеристического многочлена, а обратную ему величину.

Итак, $k < 6^{6^n} \cdot 6^{6^n} < 7^{7^n}$ для всех $n > n_0$. Доказательство теоремы 4.6 завершено. □

Утверждение этой теоремы выглядит совершенно элементарно и невинно. Однако при доказательстве потребовалось довольно глубокое применение линейной алгебры. Неожиданным образом стали работать такие вещи, как расширения колец, матричные представления, теорема Гамильтона — Кэли, оценки определителей.

Замечание 4.15. Трюк, связанный с переходом к матрицам большего размера, проходит не только для операции извлечения квадратного корня, но и в общем случае. Чтобы присоединить корень уравнения

$$x^k = A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k, \qquad (*)$$

надо перейти к матрицам в k раз большего размера и в качестве x взять матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ A_1 & A_2 & \ldots & A_k \end{pmatrix}.$$

Так выглядит матрица оператора умножения на корень x уравнения $(*)$ в базисе $1, x, \ldots, x^{k-1}$. При этом 1 переходит в x, x — в x^2, …, x^{k-1} — в $A_1x^{k-1} + \ldots + A_k$ (см. [3]).

Основную теорему из данной работы можно обобщить так: высота числа, получившегося за n последовательных алгебраических расширений, каждое из которых получено присоединением корня многочлена ограниченной степени с целыми ограниченными коэффициентами, имеет порядок, не больший t^{t^n}, где t — некоторая константа.

Замечание 4.16. При доказательстве этой теоремы мы встретились с изучением коммутативных матричных алгебр. Опишем (без доказательства), как устроены гомоморфизмы таких алгебр в числовые поля. Пусть A — подалгебра алгебры $(n \times n)$-матриц, действующая на n-мерном пространстве V; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — её образующие. Тогда V разлагается в прямую сумму «жордановых клеток» — таких подпространств $V_I = V_{\lambda_{I_1}\lambda_{I_2}\ldots\lambda_{I_k}}$, что $a_j - \lambda_{I_j}E$ является нильпотентом на $V_{\lambda_{I_1}\lambda_{I_2}\ldots\lambda_{I_k}}$. Любому гомоморфизму $\varphi\colon A \to \mathbf{F}$ отвечает ограничение алгебры A на некоторое инвариантное одномерное подпространство (содержащееся в некотором V_I), при этом $\varphi(a_s) = \lambda_{I_s}$. Множество всех гомоморфизмов алгебры A в поле называется её спектром и обозначается $\mathrm{spec}(A)$. (Напомним, что спектральные линии веществ отвечают собственным значениям операторов в квантовой механике.)

§ 5. Введение глазомера и комплексных чисел

В этой части мы постараемся понять, почему время построения одним циркулем так сильно отличается от времени построения циркулем и линейкой. Одна из причин заключается в том, что уравнение второй степени не всегда имеет решение в поле действительных чисел, из-за чего две окружности (окружность и прямая) на плоскости часто не имеют точек пересечения.

Отметим, что процедура построения, которая рассматривалась выше, несколько отличается от обычной процедуры. Дело в том, что обычно разрешается операция выбора так называемой «произвольной» точки, прямой или окружности. Эта операция формализуется следующим образом.

Определение 5.1. Введём новый способ построения точек. Мы можем задать любую отмеченную точку O и (не обязательно отмеченный) радиус R и отметить некоторую точку, лежащую вне окружности с центром O и радиусом R (т. е. точку, удалённую от O на расстоя-

ние, большее R). При этом алгоритм построения считается корректным, если результат не зависит от того, какая именно точка выбрана во внешности окружности с центром O. Назовём этот способ применением *слабого глазомера*.

Сильный вариант глазомера определяется так. Мы можем задать любую (не обязательно отмеченную) точку P и любой (не обязательно отмеченный) радиус ε и отметить точку из окрестности $U_\varepsilon(P)$. Алгоритм считается корректным, если конечный результат не зависит от того, куда именно в заданной окрестности попала отмеченная точка. Этот способ назовём применением сильного глазомера. Очевидно, что с помощью сильного глазомера можно имитировать слабый глазомер.

После того как мы определили два варианта глазомера, становится возможным с помощью комбинирования допустимых инструментов получать много новых способов построения на плоскости (Ц, Ц + Сильный глазомер, ЦЛ + Слабый глазомер и т. д.).

Постараемся понять, насколько эффективнее становятся способы построения, если в них добавить глазомер. Впоследствии окажется, что Ц + Слабый глазомер $\sim$ ЦЛ + Слабый глазомер $\sim$ ЦЛ + Сильный глазомер.

Из элементарной геометрии известно, что любое построение циркулем и линейкой можно выполнить одним лишь циркулем (в традиционном смысле) за число действий, превышающее ЦЛ лишь в константу раз. Дело в том, что, выбирая «произвольные» точки общего положения, можно добиваться того, что нужные линии имеют точки пересечения.

Лемма 5.2. *С помощью применения слабого глазомера и циркуля можно находить точки пересечения прямой, заданной двумя точками, и окружности, а также точку пересечения двух прямых, заданных по двум точкам, за время, не большее $O(1)$ построений.*

Доказательство. Задача о нахождении точки пересечения прямой и окружности — несложное упражнение, поэтому единственным трудным фактом в лемме является алгоритм построения точки пересечения двух прямых. Схема этого алгоритма состоит в том, чтобы инверсией перевести эти прямые в окружности, найти точку их пересечения и отразить её обратно (см. [4, с. 31–33]). Это и будет точка пересечения заданных прямых.

Сложность заключается в том, что с помощью одного циркуля можно быстро строить инверсные образы не всех точек и прямых, а лишь тех, которые удалены от центра инверсии на расстояние порядка ра-

диуса окружности, относительно которой делается инверсия. Поэтому надо выбрать центр и радиус этой окружности так, чтобы каждая из заданных прямых и точка их пересечения располагались на расстоянии порядка радиуса.

Для этой цели мы выбираем с помощью слабого глазомера точку X, удалённую от наших пар точек (задающих прямые) и точки их пересечения на расстояние l, много большее диаметра множества, составленного из этих точек. Далее мы строим правильный шестиугольник с вершиной в точке X и с центром в одной из точек, задающих прямые. Одна из вершин шестиугольника удалена от обеих прямых и наших точек на расстояние порядка l (т. е. не больше чем $2l$ и не меньше чем $l/6$). □

Следствие 5.3. Ц + *Слабый глазомер* ~ ЦЛ + *Слабый глазомер*. □

Постараемся понять, что означает выбор случайной точки на алгебраическом языке. Любой алгоритм построения циркулем (циркулем и линейкой) может иметь следующую трактовку.

Определение 5.4. Пусть имеется некоторое множество чисел (отмеченные точки). За один шаг можно выбрать любые два числа из этого множества и добавить в него их сумму, произведение, частное или корень из элемента, принадлежащего множеству. Будем называть этот способ построением с помощь *калькулятора*.

Лемма 5.5. ЦЛ ~ *Калькулятор*.

Доказательство. Поставим в соответствие каждому алгоритму построения циркулем (циркулем и линейкой) алгоритм на калькуляторе, записав координаты точек пересечения прямых и окружностей в аналитической форме. Это можно сделать, так как существует алгебраическая формула, выражающая точку пересечения двух окружностей (двух прямых, прямой и окружности) через уравнения этих окружностей. С другой стороны, для любого алгоритма построения на калькуляторе существует эквивалентный алгоритм построения циркулем и линейкой. В самом деле, с помощью ЦЛ возможно реализовать все арифметические операции и операцию извлечения квадратного корня. □

Введение возможности глазомера на калькуляторе соответствует тому, что наш калькулятор работает не только с числами, но и с выражениями в радикалах от некоторого набора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждой переменной x_i соответствует её область определения — некоторый отрезок $[a_i, b_i]$ (если глазомер сильный) или $[a_i, +\infty)$ (если глазомер слабый), который мы задаём, выбирая случайную точку.

Алгоритм вычисления считается корректным, если для любого набора значений $x_1, \ldots, x_n$ из области определения наше выражение-результат определено на нём и не зависит от выбора точек.

Следующая лемма означает возможность «избавления от иррациональности в знаменателе».

Лемма 5.6. *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, выражающаяся через операции из множества $\{+, -, \cdot, \sqrt{}\}$. Тогда существует функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающая тем же свойством и такая, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n),$$

где P — полином. □

Ясно, что мы можем представить наше выражение на калькуляторе в виде

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

где f_1, f_2 — выражения, не использующие деление. По лемме 5.6 из того, что выражение f_1/f_2 не зависит от выбора переменных $x_i \in [a_i, b_i]$, следует, что это выражение является константой для всех значений, для которых оно определено. В каких случаях выражение, составленное из операций $\{+, \cdot, -, /, \sqrt{}\}$, может быть не определено? Либо когда возникает корень из отрицательного числа (отсутствие пересечений), либо когда возникает деление на нуль, которое при построении циркулем (циркулем и линейкой) соответствует некоторому вырождению (концентрическим окружностям или параллельным прямым). Чтобы избавиться от трудностей с извлечением квадратного корня, мы выйдем на комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$. Мы покажем, что «комплексные» операции можно осуществить «вещественными» средствами. Остаётся следить только за тем, чтобы знаменатель не обращался в нуль.

5.1. Комплексные построения

Пусть мы работаем в комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. Прямые задаются уравнениями $ax + by + c = 0$, где a, b, c — комплексные числа; окружности — уравнениями $(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$, где a, b, r — комплексные числа. Мы можем также обобщить понятие калькулятора, позволяя ему оперировать с комплексными числами, и получить *комплексный калькулятор*. Для комплексного калькулятора можно так же, как и для вещественного, определить понятие сильного и слабого глазомера (сильный позволяет выбирать точку в любом открытом множестве, а слабый — в любой окрестности бесконечности вида $\{|z| > R\}$).

Лемма 5.7. ЦЛ *на комплексной плоскости* $\sim$ *Комплексный калькулятор* $\sim$ *Вещественный калькулятор* $\sim$ ЦЛ *на вещественной плоскости*.

Доказательство. Мы уже убедились в эквивалентности Вещественный калькулятор $\sim$ ЦЛ на вещественной плоскости. Эквивалентность ЦЛ на комплексной плоскости $\sim$ Комплексный калькулятор доказывается аналогично.

Таким образом, осталось показать эквивалентность комплексных и вещественных калькуляторов. В самом деле, комплексное число $z = x + iy$ можно рассматривать как пару вещественных чисел x и y. Арифметическим операциям над комплексными числами соответствуют арифметические операции над их вещественными и мнимыми частями. Несколько сложнее обстоит дело с операцией извлечения квадратного корня. Для этого можно воспользоваться следующими формулами:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

где

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg z, \quad \cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Косинус и синус половинного угла выражаются по формулам

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}, \quad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}. \qquad \square$$

Из этой леммы вытекают следующие эквивалентности: Вещественный калькулятор + Сильный глазомер $\sim$ Комплексный калькулятор + Сильный глазомер, Вещественный калькулятор + Слабый глазомер $\sim$ Комплексный калькулятор + Слабый глазомер.

Отметим, что если бы мы работали с кубическими корнями, то с помощью вещественного калькулятора нельзя было бы сымитировать комплексный. Дело в том, что для извлечения кубического корня из комплексного числа нужно уметь не только извлекать кубические корни из вещественных чисел, но и решать задачу «трисекции угла» (т. е. нахождения $\cos(\varphi/3)$ по $\cos\varphi$).

Покажем, что на комплексной плоскости Ц $\sim$ ЦЛ. Опишем сначала идею доказательства. Мы знаем, что циркуль с помощью глазомера может находить точку пересечения двух прямых (прямой и окружности). Правда, при этом нам нужно выбирать некоторые «случайные» точки из заданной окрестности. Как будет показано ниже, вместо них можно выбирать произвольные точки плоскости с одним лишь ограничением, чтобы было обеспечено наличие нужных пересечений. В вещественном случае наблюдаются «неприятности» двух типов: извлечение

корня из отрицательного числа и деление на нуль. После перехода в комплексную плоскость остаются только «вырождения», связанные с делением на нуль, а таковых должно быть не слишком много. В некоторых случаях их удаётся избежать путём имитации случайного выбора: если построить много разных точек, то какие-нибудь из них могут подойти для алгоритма в качестве «случайных» и вырождения не произойдёт. Перейдём к доказательствам.

Несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 5.8. *Пусть выбрана система координат и отмечены точки с координатами* $(0,0)$, $(x,0)$, $(y,0)$ (*где* x *и* y — *вещественные числа*). *Тогда за* $O(1)$ *действий одним циркулем без глазомера можно отметить точку с координатами* (x,y). □

Лемма 5.9. *Пусть* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *полином степени* k, *отличный от тождественного нуля. Пусть* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$ — *некоторый набор различных чисел. Тогда переменным* $x_1, \ldots, x_n$ *можно присвоить значения из* A *так, что* P *не обратится в нуль на этих значениях.*

Доказательство. Так как многочлен P не является тождественным нулём, существует такой набор значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, что P не обращается в нуль. Фиксируем все значения, кроме первого, и будем рассматривать P как многочлен от одной переменной $P(x_1)$, степень которого не больше k. Тогда для x_1 можно подобрать значение c_1' из множества A так, что $P(x_1) \neq 0$. Так мы получим такой набор $c_1', c_2, \ldots, c_n$, что P не обращается в нуль. Действуя по индукции, можно получить набор значений, целиком состоящий из элементов A и такой, что P не обращается в нуль. □

Следствие 5.10. *Пусть имеется алгоритм для калькулятора с сильным (слабым) глазомером, работающий с вещественными или комплексными числами и использующий* n *случайных переменных* x_1, x_2, …, x_n. *Тогда в качестве случайных переменных могут быть использованы любые* n *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *для которых результат калькулятора определён.* □

Следствие 5.11. ЦЛ + *Сильный глазомер* ∼ ЦЛ + *Слабый глазомер.*

Доказательство. Так как ЦЛ + Сильный глазомер ∼ Вещественный калькулятор + Сильный глазомер и ЦЛ + Слабый глазомер ∼ Комплексный калькулятор + Слабый глазомер, достаточно показать эквивалентность глазомеров для калькулятора, оперирующего с комплексными числами. Для этого нужно выбрать «случайные» перемен-

ные, используя слабый глазомер, так, чтобы знаменатель не обратился в нуль. □

Теорема 5.12. Ц *на* $\mathbb{C}^2 \sim$ ЦЛ *на* $\mathbb{C}^2$.

Доказательство. Докажем, что с помощью одного циркуля на комплексной плоскости можно построить точку пересечения двух прямых, заданных по двум точкам, не используя глазомер. По лемме 5.2 существует алгоритм построения, использующий глазомер, работающий за 100 операций. Пусть этот алгоритм требует выбора n случайных точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). Рассмотрим соответствующее построение на калькуляторе. Пусть мы получили в пересечении точку (x, y), где

$$x = \frac{f_1(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}{f_2(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}, \quad y = \frac{f_3(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}{f_4(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)}.$$

Пусть $f_2 \cdot f_4 \cdot g = P$, где P — полином степени k. Рассмотрим множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, k+1\}$. По лемме 5.9 переменным $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ можно присвоить значения из A так, чтобы знаменатель не обратился в нуль. По лемме 5.8 мы можем отметить точки (x_i, y_i) за время $200 \cdot (k+1)$ (сначала строим точки $(1, 0), (2, 0), \ldots, (k+1, 0)$, а потом уже строим (x_i, y_i)). Если теперь мы применим алгоритм с глазомером и будем выбирать эти точки вместо случайных точек, мы корректно построим точку пересечения данных прямых. Абсолютно аналогично доказывается, что за постоянное число операций можно найти точки пересечения прямой и окружности. Мы доказали, что на комплексной плоскости Ц $\sim$ ЦЛ. □

§ 6. Заключительные замечания. Задачи и перспективы

В данной работе мы рассмотрели задачи, связанные со сложностью вычислений. Нашей главной целью было не столько получить те или иные результаты, сколько показать читателю, как естественным образом одна за другой возникают задачи и как строится научное исследование.

Результаты, изложенные в предложениях 4.1, 4.2, 4.5 и в теореме 4.6, следует считать окончательными. Почему все оценки сложности следует осуществлять с точностью до постоянного множителя? Дело в том, что вычисление соответствующих констант представляется нереальным. При этом те или иные «инженерные» улучшения ничего принципиально нового не дают. Построение оптимальных алгоритмов

скорее относится к области головоломок. А головоломки интересны тогда, когда они изящны, т. е. оперируют малым материалом.

Для дальнейшего знакомства с задачами, относящимися к построениям с ограничениями, мы отсылаем читателя к брошюре [4]. Наша же цель — познакомить читателя с математическими задачами, которые непосредственно примыкают к теме данной статьи и решение которых нам неизвестно.

1. Верно ли, что Л(n)/ЦЛ(n) не ограничено? Иными словами, может ли операция извлечения корня существенно сокращать «рациональные вычисления»?
2. Позволяет ли глазомер существенно экономить вычисления? Если перевести это на язык «калькулятора», то верно ли, что недетерминированный способ построения позволяет в некоторых случаях получить существенный выигрыш? Выигрыш этот может быть достигнут только за счёт того, что трансцендентные промежуточные параметры позволяют избегать появления нуля в знаменателе. Но можно ли за ограниченное число линий эти параметры сымитировать? Более общая задача такова: показать эквивалентность детерминированной и недетерминированной вычислительных схем.
3. Мы рассматривали только квадратичные расширения. Однако, действуя так же, как и в доказательстве теоремы 4.6, можно получить аналогичные результаты для расширений бóльших порядков (см. замечание 4.15). Вместе с тем возникают дополнительные вопросы: даёт ли комплексный калькулятор в случае извлечения кубических корней существенное преимущество над вещественным (в случае вычисления целых чисел)? Верно ли, что наличие возможностей вычисления разных корней, например кубического и квадратного, приводит к существенным упрощениям в вычислениях различных классов чисел?
4. Пусть числа x_i задаются системой k уравнений $\{P_j(\vec{x}) = 0\}$, где $P_j(\vec{x}) = P_j(x_1, \ldots, x_k)$ — многочлен степени n от k переменных, причём $n \ll k$. Интересно было бы получить оценку на высоты чисел $\{x_i\}$.

Наиболее перспективным представляется подход, связанный с построением матричного представления факторкольца $C[\vec{x}]/\mathrm{id}(\{P_j(\vec{x})\})$. Высоту можно оценить исходя из размеров матриц и величины коэффициентов. Размер же матриц можно оценить как k^γ, где γ — размер базиса Грёбнера идеала $\mathrm{id}(\{P_j(\vec{x})\})$, порождённого набором многочленов $\{P_j(\vec{x})\}$.

Для дальнейшего знакомства с проблематикой, связанной со сложностью алгебраических вычислений, советуем обратиться к учебнику [5].

Результаты, изложенные в предложениях 4.1, 4.2, 4.5, были получены независимо С. Б. Гашковым. Авторы приносят благодарность О. Н. Попову за идею доказательства предложения 4.1.

Список литературы

[1] *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: Наука, 1976.

[2] *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979.

[3] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.

[4] *Костовский А. Н.* Геометрические построения одним циркулем. Сер. Популярные лекции по математике. Вып. 29. М.: Наука, 1984.

[5] *Латышев В. Н.* Комбинаторная теория колец. Сложность алгебраических алгоритмов. М.: МГУ, 1987.

[6] *Канель-Белов А. Я.*, *Нилов Ф. К.*, *Радзивиловский Л. В.* Задача Мишустина // Потенциал. 2022. № 11. С. 19–22.

Михаил Владимирович Алехнович, университет Сан-Диего

Алексей Яковлевич Канель-Белов, МФТИ, университет Бар-Илана
kanelster@gmail.com

Аллан Олегович Сулейкин, мехмат МГУ
allan.suleykin@math.msu.ru

Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

Обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(k^k k!)}}{(n+1)!}$. (*Л. Радзивиловский*)

2. Если в конечной группе равенство $xy = yx$ выполнено для $> 90\,\%$ пар (x, y), то группа абелева. (*Фольклор*)

3. Проекции k-угольника ($k \geqslant 3$) на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными k-угольниками. Докажите, что эти k-угольники конгруэнтны. (*Фольклор*)

4. Докажите неприводимость следующих многочленов.
а) **Критерий Эйзенштейна.** Пусть $p(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами, p — простое число. При этом a_0 не делится на p; a_n не делится на p^2; $a_1, \ldots, a_n$ делятся на p.
б) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 7$.
в) $P(x) = x^8 + x + 1$.
г) $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$.
д) $x^{13} + 2x^{12} - 6x^{11} + 2x^{10} - 10x^8 + 4x^6 + 60x^5 - 44x^4 - 4x + 4$.
е) **Признак неприводимости Кона.** Пусть многочлен

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

степени n над $\mathbb{Z}[x]$ таков, что $0 \leqslant a_i \leqslant t-1$ и $P(t)$ является простым числом. Тогда $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$.
ж) **Признак неприводимости Мурти.** Для многочлена

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

степени n над $\mathbb{Z}[x]$ обозначим

$$H = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|.$$

Тогда если для некоторого натурального $t \geqslant H + 2$ число $P(t)$ простое, то $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}[x]$. (*Фольклор*)

5. В трёхмерном пространстве даны несколько шаров с непересекающимися внутренностями. Оказалось, что каждый касается ровно k других. Чему равно наибольшее возможное значение k?
(*Ф. К. Нилов*)

6. Аппарат имеет форму куба. Он передвигается, перекатываясь через ребро на соседнюю грань. Перекатыватели на двух рёбрах сломались. Сможет ли аппарат обследовать всю плоскость?
(*А. Я. Канель-Белов*)

7. С величиной $\varepsilon > 0$ свяжем геометрическое место точек $M_\varepsilon = (x, y, z)$, для которых

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \\ x^2 + y^2 - z^2 \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть объём M_ε равен V_ϵ. Найдите $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{V_\varepsilon}{\varepsilon}$. (*Л. Радзивиловский*)

8. а) Разбиение многоугольника на треугольники называется *антитриангуляцией*, если никакая пара треугольников разбиения не имеет общей стороны. Для каких k можно антитриангулировать треугольник на k треугольников?
   б) При каких n можно антитриангулировать выпуклый n-угольник?
   (*Н. Б. Васильев, П. А. Кожевников*)

9. В n-мерном пространстве задана гиперповерхность S, определяемая уравнением $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где P — многочлен степени k. Докажите, что если n намного больше, чем k, то через любую точку из S проходит 2024-мерное аффинное подпространство, содержащееся в S. (*А. Я. Канель-Белов*)

10. Двоичный куб размерности n разбит на подкубы (т. е. множества, являющиеся декартовыми произведениями n пар точек) так, что в каждой из $2n$ гиперграней содержится хотя бы один подкуб разбиения. Найдите наименьшее количество подкубов в таком разбиении. (*И. И. Богданов*)

11. Существует ли отображение шара размерности $m > n$ в а) ограниченную область в $\mathbb{R}^n$; б) в $\mathbb{R}^n$, не уменьшающее расстояния?
   (*Фольклор*)

12. Параболы $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ пересекаются в точках A, B, C, D так, что диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Хорды X_1Y_1 и X_2Y_2 парабол $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ соответственно пересекаются в точке O и симметричны относительно диагоналей. Тогда точки X_1, X_2, Y_1, Y_2 лежат на одной окружности. (*К. А. Бельский*)

13. Центрально-симметричный шестиугольник можно разбить на три параллелограмма двумя способами. Переход от одного к другому называется *флипом* (рис. 1).

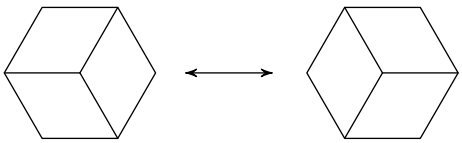


Рис. 1

   а) Рассмотрим разбиение правильного 6-угольника со стороной n на ромбы с единичными сторонами. Там появляются тройки, образующие шестиугольники, и к ним можно применить *флип*. Докажите, что с помощью цепочки флипов любое разбиение можно

перевести в любое, и найдите, какое минимально возможное количество флипов для этого требуется. (*А. Смирнов*)

б) Рассмотрим разбиения правильного $2n$-угольника с единичными сторонами на ромбы с единичными сторонами. За какое минимально возможное количество флипов любое разбиение можно перевести в любое?

в) Какое минимальное число шестиугольников может появиться при разбиении правильного $2n$-угольника с единичными сторонами на параллелограммы? (*А. Я. Канель-Белов*)

г) Пусть N k-миношек уложены в виде прямоугольника $r \times t$. Если k из них образуют квадрат, то можно осуществить *флип*: повернуть их на 90° (рис. 2). Докажите, что можно все k-миношки сориентировать одинаково. Найдите минимально возможное число операций и оцените минимально возможное количество позиций где можно осуществить флип. (*Фольклор*)

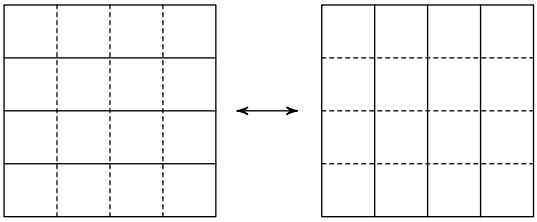


Рис. 2

14. а) Матрицы A, B второго порядка таковы, что матричное уравнение $X^2 + AX + B = 0$ имеет конечное число решений, равное n. Найдите максимально возможное n.

    б) Аналогичный вопрос для матриц порядка m.

    (*Л. Радзивиловский*)

15. На клетчатой плоскости задан *шаблон* — множество из k клеток. 2^k маляров собираются предложить 2^k способов раскрасить клетки плоскости в чёрный и белый цвета (каждую клетку — в один из цветов). Они хотят, чтобы для любого сдвига (параллельного переноса) шаблона все 2^k предлагаемых ими раскрасок клеток этого сдвига были различны. Докажите, что маляры могут предложить такие способы. (*И. В. Митрофанов*)

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 2 (с. 217, см. решение: выпуск 6, с. 140–142) опубликована

Задача 2.7. Конечно или бесконечно множество многочленов без кратных корней, со старшим коэффициентом 1, все коэффициенты которых целые, а все корни вещественны и принадлежат отрезку $[-1{,}99; +1{,}99]$? (*А. Я. Канель*)

В выпуске 28 (с. 238, см. решение: выпуск 32, с. 192–193) опубликована родственная

Задача 2.7′. У многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1 все корни различны и их модули равны 1. Докажите, что $P(x)$ делит многочлен вида $x^n - 1$ для некоторого n.
(*М. Л. Концевич*)

Ещё одна родственная задача 2.7″ опубликована в выпуске 32, с. 184.

В продолжение темы:

Задача 2.7(3) (на исследование). *Опишите все такие интервалы* (a, b), *что имеется бесконечное число многочленов с целыми коэффициентами, все корни которых лежат на интервале* (a, b).
(*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 7 (с. 187–188) опубликована

Задача 7.5. (а) При каких k через любые k точек плоскости проходит кривая n-го порядка?

(б) На плоскости отмечено несколько точек. Если окружность проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной окружности.

(в) На плоскости отмечено несколько точек. Если кривая второго порядка проходит через пять отмеченных, то она проходит и через шестую. Докажите, что все отмеченные точки лежат на одной кривой второго порядка. Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка. (*А. Я. Белов*)

Вот связанный сюжет (выпуск 32, с. 186):

Задача 7.5′. (а) На плоскости отмечено $n \geqslant 6$ точек, никакие 6 из которых не лежат на одной квадрике. Пусть $k \leqslant n-5$. Докажите, что найдутся три точки такие, что квадрика, через них проходящая, содержит ровно k отмеченных точек.

(б) Обобщите это утверждение для кривых n-го порядка, а также для окружностей. (*Г. А. Гальперин*)

В продолжение сюжета:

Задача 7.5″. (а) *При каких k через любые k точек n-мерного пространства проходит поверхность m-го порядка*?

Напомним знаменитую *теорему Сильвестра*. На плоскости отмечено несколько точек. Если прямая проходит через две отмеченные, то она проходит и через третью. Тогда все отмеченные точки лежат на одной прямой.

(б) *В пространстве отмечено несколько точек. Если плоскость проходит через три отмеченные, то она проходит и через четвёртую. Верно ли, что все отмеченные точки лежат в одной плоскости*?

(в) *Аналогичные вопросы для произвольной размерности и для кривых (поверхностей) произвольной степени в случае, когда отмеченных точек достаточно много.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 15, с. 237) опубликована

Задача 13.3. Известно, что для любой такой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, имеем $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < \infty$. Докажите, что тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty. \qquad (\textit{Фольклор})$$

Ей родственна

Задача 13.3′ (выпуск 26, с. 269). Известно, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, $a_i > 0$. Пусть $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$. Докажите, что тогда $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i/s_i) = \infty$. (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 13.3″. *Известно, что* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$, $a_i > 0$. *Пусть* $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$. *Докажите, что* $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i/s_i^2) < \infty$. (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 19 (с. 257, см. решение: выпуск 20, с. 265–267) опубликована

Задача 19.3. Решите уравнения

$$\text{а) } x^2 + y^2 = (x+1)^3; \quad \text{б) } x^2 + xy + 2y^2 = (y+1)^3$$

в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Родственная задача 19.3′ того же автора опубликована в выпуске 26 (с. 272).

В продолжение темы:

Задача 19.3″. *Решите уравнение* $x^2 + xy + 41y^2 = (yz+1)^3$ *в натуральных числах.* (*Н. Н. Осипов*)

В выпуске 23 (с. 216) опубликована

Задача 23.6. Все вершины выпуклого 10^9-угольника имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не меньше 10^{12}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Задача была предложена на третьем Краснодарском фестивале юных математиков в 1992 году. Следующая задача была на олимпиаде 239 школы Санкт-Петербурга в 1998 году и опубликована в выпуске 27 (с. 245–246).

Задача 23.6′. Вершины выпуклого $2n$-угольника ($n \geqslant 2$) лежат в узлах целочисленной решётки. Пусть S_n — минимальное возможное значение его площади.

(а) Докажите, что $S_n \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(б) Докажите, что существует положительное число α такое, что при всех натуральных n выполнено неравенство $S_n > \alpha \cdot n^3$.

(*С. Иванов*)

На международной студенческой олимпиаде IMC-2020 была предложена задача на родственный сюжет (см. п. (а)):

Задача 23.6″. (а) Докажите, что для любого натурального d найдётся константа $C(d)$ такая, что для любого центрально-симметрич-

ного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^d$ и любого $0 < \varepsilon < 1$ найдётся выпуклый многогранник $L \subset \mathbb{R}^d$ с не более чем $C(d)\varepsilon^{1-d}$ вершинами, для которого $(1-\varepsilon)K \subseteq L \subseteq K$. (*Ф. В. Петров*)

(б) Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^d$ на 4^d вершинах и все вершины имеют целые координаты. Тогда найдутся грань Γ и точка q во внутренности этой грани такие, что q лежит в минимальной решётке, натянутой на вершины Γ. (*Д. А. Захаров*)

В продолжение темы:

Задача 23.6(3). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая фигура, центрально-симметричная относительно начала координат, ∂K — её граница. Пусть*

$$\iint\limits_K \operatorname{dist}(\vec{x}, \partial K)\, d^2\vec{x} > 2,$$

где $\operatorname{dist}(\vec{x}, \partial K)$ *— расстояние от точки $\vec{x}$ до ∂K. Докажите, что K содержит хотя бы 3 целых точки.* (*Л. Радзивиловский.*)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: выпуск 27, с. 266–269) опубликована

Задача 26.4. Пусть $k+2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k+2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k, то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k. (*А. Я. Канель-Белов*)

Развитием темы служит

Задача 26.4′. (а) (выпуск 27, с. 248). Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны. (*Фольклор*)

(б) (выпуск 28, с. 236). Обобщите и решите задачу из п. (а) для случая попадания $k+1$ птички в $(k-1)$-мерное подпространство. (*А. Я. Канель-Белов*)

Эти задачи решаются путём перевода на язык внешних произведений и определителей. Для иллюстрации силы этого метода приведём ещё несколько задач.

Задача 26.4(3) (выпуск 32, с. 189). (а) *Выведите красивую формулу для площади многоугольника с последовательными вершинами* (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) (*именно в таком порядке*).

(б) *Даны описанный плоский четырёхугольник $ABCD$ и точка P в пространстве. Докажите, что*

$$PD^2 \cdot S_{ABC} + PB^2 \cdot S_{ACD} = PA^2 \cdot S_{BCD} + PC^2 \cdot S_{ABD}.$$

(в) *Дана матрица R, отвечающая вращению в трёхмерном евклидовом пространстве. Найдите угол вращения и ось.* (*Фольклор*)

В продолжение темы:

Задача 26.4(4). (а) *Даны точки $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij} = |P_iP_j|$, $A = (a_{ij})$. При каком максимальном m матрица A может оказаться обратимой?*

(б) *Многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ вписан в окружность. Рассмотрим такую кососимметрическую $(n \times n)$-матрицу a_{ij}, что при $i < j$ всегда $a_{ij} = |A_iA_j|$. Докажите, что ранг этой матрицы не превосходит 2.*

(в) *При каком условии четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) лежат на одном* цикле (*т. е. окружности или прямой*)?

(г) *Докажите, что две квадрики пересекаются не более чем в четырёх точках.*

(д) *Обобщите пп.* (б) *и* (в) *на гиперповерхности произвольной степени и многомерье.*

(е) (Результант.) *При каком условии два многочлена*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{и} \quad Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_m$$

имеют общий корень? (*Фольклор*)

В выпуске 29 (с. 256) опубликована

Задача 29.6. Дана матрица размера $k \times 667$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{667}$. Известно, что в разности между любыми двумя различными строками каждый остаток $x \in \mathbb{Z}_{667}$ встречается ровно k раз. Докажите, что то же самое верно и для столбцов. (*А. Я. Канель-Белов*)

При решении этой задачи полезно начать с её даунгрейда.

Задача 29.6′. *Дана матрица размера $2n \times 2n$ с коэффициентами из $\{0, 1\}$. Известно, что любые два столбца различаются в n позициях. Докажите, что любые две строки тоже различаются в n позициях.* (*Фольклор*)

В выпуске 29 (с. 256–257) опубликована

Задача 29.7. Перестановке (биекции) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ отвечает преобразование рядов: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \to \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma(i)}$.

Назовём перестановку *полезной*, если она может преобразовать расходящийся ряд в сходящийся, и *зловредной*, если она может преобразовать сходящийся ряд в расходящийся.

(а) Существует ли полезная и не зловредная перестановка?

(б) Назовём перестановку *могучей*, если она может преобразовать сходящийся ряд в сходящийся, но с другой суммой. Верно ли, что могучая перестановка является и полезной и зловредной? Верно ли, что полезная и зловредная перестановка является могучей?

(*М. Л. Гервер*)

В развитие темы:

Задача 29.7′. *Приведите критерии полезности, зловредности и могучести для перестановки.* (*М. Л. Гервер*)

В выпуске 30 (с. 231) опубликована

Задача 30.12. Дана непрерывная функция $f:[0,1]\to[0,1]$. Её *k-я итерация* $f^{(k)}(x)$ — это $f(f(\ldots(x)\ldots))$ (k раз). Известно, что $f^{(3)}(x)=x$, но $f(x)\neq x$ при некотором x. Докажите, что тогда для любого k существует такое $y\in[0,1]$, что $f^{(k)}(y)=y$, но $f^{(m)}(y)\neq y$ при всех $1\leqslant m<k$. (*Теорема Шарковского*)

Приведём более общий факт.

Задача 30.12′. (а) *Рассмотрим следующее отношение порядка на множестве натуральных чисел*:

$$3\rhd 5\rhd 7\rhd\ldots,\quad 6\rhd 10\rhd 14\rhd\ldots,\quad 2^k3\rhd 2^k5\rhd\ldots,$$
$$\ldots 2^k\rhd 2^{k-1}\rhd\ldots\rhd 8\rhd 4\rhd 2\rhd 1.$$

Предположим, что непрерывная функция $f:[0,1]\to[0,1]$ имеет период n, причём $n\rhd m$. Докажите, что тогда f имеет период m.

(*Теорема Шарковского*)

(б) *Постройте функцию f, все периоды которой равны степеням двойки.* (*В. А. Тиморин, А. И. Буфетов*)

В выпуске 30 (с. 231–232) опубликована

Задача 30.15. Периодическую последовательность символов можно задавать запретами, которые показывают, какие последовательности символов не могут в ней появляться. Например, последовательность $aabaabaab\ldots$ задаётся тремя запретами b^2, bab, a^3.

(а) Дана последовательность периода n. Скольких запретов заведомо будет достаточно?

(б) Периодическая последовательность над n-буквенным алфавитом задана запретами длины k. Каков её максимально возможный период?

(в) Докажите, что последовательность периода n нельзя задать меньше чем $\log_2 n$ запретами. (*А. Я. Канель-Белов*)

В продолжение темы (см. также 29.15′, выпуск 30, с. 237):

Задача 30.15′. Сверхслово (*т. е. бесконечное слово*) *называется* равномерно рекуррентным (*сокращённо* р. р.) (*в другой терминологии* почти периодическим), *если для любого его подслова* $u \sqsubset W$ *найдётся такая константа* $N(u)$, *что* u *входит в любой фрагмент сверхслова* W *длины* $N(u)$.

(а) *Докажите, что для любого сверхслова* U *найдётся равномерно рекуррентное сверхслово* W *такое, что если* $v \sqsubset W$, *то* $v \sqsubset U$ *для любого слова* v.

(б) *Назовём* обструкцией u *минимальный запрет в сверхслове* W. *Это значит, что* $u \not\sqsubset W$, *но всякое собственное подслово в* u *есть подслово в* W. *Пусть* $O_W(n)$ — *количество обструкций в* W *длины не больше* n. *Пусть* W — *р. р. сверхслово. Докажите, что* $W_O(n) \leqslant \log_2 n$ *при бесконечно многих* n.

(в) (Открытый вопрос.) *Пусть* W — *р. р. сверхслово. Докажите, что* $W_O(n) \leqslant k_n$ *при бесконечно многих* n. (*А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 31 (с. 210) опубликована

Задача 31.5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырёхугольник $ABCE$, который делится диагональю BE на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины рёбер BC и CE равны. Сумма длин рёбер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объём пирамиды равен $1/6$. Найдите радиус шара, имеющего наибольший объём среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

(*Письменный вступительный экзамен, ВМК МГУ*, 1978 *г.*)

Такого рода достаточно интересные стереометрические «гробы» на письменном экзамене были распространены в те годы (особенно интересные — на ВМК, хорошо бы их собрать). Сейчас, к сожалению, стереометрии уделяется гораздо меньше внимания.

Приведём ещё несколько задач той же стилистики:

Задача 31.5′. (а) *В пирамиде* $SABC$ *грани* ASC, BSC *и* ASB *равновелики. Сумма расстояний от середины ребра* BC *до граней* ASB *и* ASC *в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины* S. *Внутри пирамиды есть точка* M, *полусумма расстояний от которой до вершин* A, B *и* C *равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра* AS *равна* $\sqrt{31/11}$. (*Письменный вступительный экзамен, ВМК МГУ*, 1977 *г.*)

(б) *Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, лежат три шара радиусов* 4, 4, *и* 5. *Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Найдите радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен* $2\operatorname{arctg}(1/4)$. (*Письменный вступительный экзамен, мехмат МГУ*, 1976 *г.*)

В выпуске 31 (с. 211) была опубликована

Задача 31.9. Робот Чертёжник является *конечным автоматом*, т. е. имеет только конечное число внутренних состояний. Он может передвигаться по клетчатому листу бумаги, закрашивая клетки. Для Чертёжника допустимы всего три действия:

1) *закрасить* — закрасить клетку;
2) *налево* — повернуться на 90 градусов налево вокруг начала стрелки;
3) *прыгнуть* — перепрыгнуть в центр соседней клетки по направлению стрелки.

Кроме того, Чертёжник умеет проверять условие *впереди край*.

(а) Напишите программу для Чертёжника, по которой он на любом листе бумаги (в том числе и тогда, когда размер листа не помещается в его памяти) закрасит все клетки квадрата, кроме клеток, содержащих его центр (в зависимости от чётности длины стороны листа это одна клетка или четыре клетки).

(б) Можно ли написать программу, чтобы Чертёжник закрасил *только* центр листа? (*А. Я. Канель-Белов, М. В. Сапир*)

В продолжение темы:

Задача 31.9′. Робот — *это автомат с конечным количеством состояний памяти, производящий определённый набор действий по заранее заданной программе. Робот может делать и запоминать следующее*:

1) перемещаться вперёд (в соседнюю клетку);
2) поворачиваться на месте на 90 градусов;
3) ставить флажок в клетку, где находится (если флажок у него есть);
4) проверять наличие флажка в своей клетке;
5) брать флажок из своей клетки.

Наличие у робота флажков (и их количество) оговаривается заранее. Программа состоит из пронумерованного упорядоченного набора инструкций для робота, причём некоторые инструкции могут заключаться в переходе к другой инструкции. Мы будем ставить для робота задачи обхода, состоящие в том, чтобы обойти некоторую область, т. е. побывать в каждой её клетке.

(а) Докажите, что робот с одним флажком не сможет обойти ленту.

(б) Докажите, что робот с тремя флажками может обойти плоскость. Может ли робот с тремя флажками обойти трёхмерное пространство?

(в) Пусть непроходимая для робота линия делит плоскость на полуплоскости. Докажите, что робот с одним флажком может обойти полуплоскость.

(г) Докажите, что робот с одним флажком не может обойти плоскость с разрезами по отрезкам $[-1; 1]$ на осях координат, а с двумя флажками — может.

(д) Докажите, что робот с двумя флажками не может обойти плоскость.

(е) Пусть на ленте написаны буквы русского алфавита. Докажите, что вне зависимости от того, что написано, робот с одним флажком ленту не обойдёт. (*А. В. Анджанс, И. А. Иванов-Погодаев, А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 31 (с. 212) опубликована

Задача 31.14. (а) Можно ли так отметить n точек в единичном квадрате, чтобы в любом прямоугольнике площадью $2/((\sqrt{5}+1)n)$ была отмеченная точка?

(б) Постройте такую ограниченную бесконечную последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, что неравенство $|x_i - x_j| \cdot |i-j| \geqslant 1$ выполнено для каждой пары различных чисел i и j. (*А. В. Анджанс*)

В продолжение темы:

Задача 31.14′. *При каких ε можно так отметить n точек в n-мерном единичном кубе, чтобы в любом параллелепипеде объёма ε была отмеченная точка?* (*В. Н. Темляков*)

В выпуске 32 (с. 180) опубликована

Задача 32.5. Назовём число V *хорошим*, если существуют два выпуклых подмножества X, Y трёхмерного единичного куба объёма V с непересекающимися проекциями на каждую из координатных плоскостей. Найдите супремум множества хороших чисел.

(*Й. Ткадлец, А. Акопян*)

В продолжение темы:

Задача 32.5′. *Дан единичный куб K, прямая l и плоскость P, ортогональная l. Докажите, что длина проекции K на l равна площади проекции K на P.* (*Л. Радзивиловский*)

Решения задач из прошлых выпусков

19.3′ (выпуск 126, с. 272). Условие. а) Докажите, что уравнение

$$(y^2-2x^2)^2=2y^2+x+y$$

неразрешимо в натуральных числах x и y.

б) Докажите, что для каждого целого $c \geqslant 4$ уравнение

$$x(y^2-2x^2)+cx+y+1=0 \qquad (1)$$

имеет не более пяти решений (x, y) в целых числах. (*Н. Н. Осипов*)

Решение. а) Перепишем уравнение в виде

$$(y^2-2x^2-1)^2=4x^2+x+y+1.$$

Если $y<3x$, то имеют место неравенства

$$(2x)^2<4x^2+x+y+1<(2x+1)^2,$$

так что правая часть не может быть точным квадратом.

Пусть $y \geqslant 3x$. Зафиксируем натуральное число x и исследуем функцию

$$F(y)=(y^2-2x^2-1)^2-4x^2-x-y-1$$

при $y \geqslant 3x$. Имеем

$$F(3x)=(7x^2-2x-2)(7x^2+2x)>0.$$

Кроме того,

$$F'(y)=4y(y^2-2x^2-1)-1,$$

и видно, что $F'(y)>0$ при любом $y \geqslant 3x$. Следовательно, функция $F(y)$ является возрастающей при $y \geqslant 3x$. Таким образом, $F(y) \geqslant F(3x)>0$, поэтому уравнение $F(y)=0$ при $y \geqslant 3x$ решений не имеет.

Комментарий. В задаче рассматривается пример диофантова уравнения 4-й степени, для которого не выполнено *стандартное условие*

Рунге (см., например, теорему 1 на с. 262 в монографии [1], однако сам *метод Рунге* работает. Более подробно об этом семействе диофантовых уравнений можно прочитать в статье [2]. Для сравнения: уравнение $(y^2-2x^2)^2=3y^2+x+y$, очень похожее на данное, уже не может быть решено методом Рунге.

Список литературы

[1] *Mordell L. J.* Diophantine equations. London: Academic Press Inc., 1969.

[2] *Osipov N. N.*, *Medvedeva M. I.* An elementary algorithm for solving a diophantine equation of degree four with Runge's condition // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2019. Т. 12, № 3. С. 331–341.

(*Н. Н. Осипов*)

б) Если $x=0$, то $y=-1$. Пусть далее $x\neq 0$. Заменим переменную y на (также целочисленное) k, положив $k=y^2-2x^2+c$. Тогда $y=-kx-1$ и из (1) получаем $x((-kx+1)^2-2x^2+c-k)=0$. Поскольку $x\neq 0$, получаем квадратное уравнение относительно x, из которого находим

$$x=-\frac{k}{k^2-2}\pm\sqrt{\frac{k-c}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}},\quad y=-kx-1.$$

При $|k|\geqslant 2$ и $c\geqslant 4$ имеем

$$\frac{k-c}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}\leqslant\frac{k-4}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}.$$

Но последнее выражение отрицательно при $k\leqslant -2$ и $k\in\{2,3\}$. А если $k\geqslant 4$, то

$$|x|\leqslant\frac{k}{k^2-2}+\sqrt{\frac{k-4}{k^2-2}+\frac{2}{(k^2-2)^2}}<1,$$

что невозможно. Следовательно, $k\in\{0,\pm 1\}$. Рассмотрим оставшиеся случаи.

1. Пусть $k=-1$. Тогда $x=-1\pm\sqrt{c+3}$.
2. При $k=0$ имеем $x=\pm\dfrac{\sqrt{2c+2}}{2}$.
3. Наконец, если $k=1$, то $x=1\pm\sqrt{c+1}$.

В каждом из этих случаев мы получим либо два решения, либо ни одного, при этом только случаи 1 и 2 могут одновременно дать по два целочисленных решения. Если ещё учесть тривиальное решение $(x,y)=(0,-1)$, то всего решений оказывается не более пяти.

Комментарии. I. Уравнение (1) имеет пять решений при $c=2t^2-1$, где $t \geqslant 2$ таково, что число $2t^2+2$ есть точный квадрат. С помощью теории *уравнений Пелля* (см., например, [2]) можно найти, что

$$c \in \{97, 3361, 114241, 3880897, 131836321, \ldots\}.$$

II. В случае $c<0$ утверждение о равномерной ограниченности числа решений уравнения (1) доказать не удалось. Возможно, что это утверждение и неверно, хотя оно выглядит весьма правдоподобным (см. ниже).

При $-10^7 \leqslant c < 0$ с помощью алгоритма из статьи [1] можно найти рекордное значение $c=-1219919$, при котором уравнение (1) имеет семь решений

$$(x, y) \in \{(-782, 1563), (-24, -1105), (0, -1), (1, -1105),$$
$$(1, 1104), (23, -1105), (780, -1561)\}.$$

При $-10^{11} \leqslant c < 0$ других значений c, дающих семь или более решений, нет. Другую интересную статистику можно найти по ссылке `https://dxdy.ru/topic139910.html`.

Отметим, что при $c<0$ для решений (x, y) уравнения (1) справедлива оценка

$$|x| \leqslant 1+\sqrt{\frac{|c|+3}{2}}.$$

Эта оценка является точной для $c=-2t^2+3$, где $t \geqslant 2$, так как одним из решений будет $(x, y)=(-t-1, 2t+1)$. При $t=781$ получим упоминавшееся выше рекордное значение $c=-1219919$.

III. Что ещё можно сказать о числе решений уравнения (1) при $c<0$?

III_1. Поскольку $y+1$ должно делиться на x, любое решение имеет вид

$$(x, y)=(t, st-1), \tag{2}$$

где s, t — некоторые целые числа, $t \neq 0$. Пара (2) будет решением (1) при

$$c=-(s^2-2)t^2+2st-s-1. \tag{3}$$

При условии (3) и $y=st-1$ уравнение (1) имеет три корня относительно x: это

$$x=t, \quad x=\frac{-t \pm \sqrt{t^2-2s}}{2}.$$

Положим $s=(t^2-u^2)/2$, где $u=t+2v$. Тогда

$$c=-4t^4v^2-8t^3v^3-4t^2v^4-4t^2v-4tv^2+2t^2+2tv+2v^2-1. \tag{4}$$

При условии (4) уравнение (1) имеет три решения

$$(t, -2tv(t+v)-1), \quad (v, -2tv(t+v)-1), \quad (-t-v, -2tv(t+v)-1).$$

Вместе с тривиальным решением $(0, -1)$ получим по крайней мере четыре решения. При $t=-9$ и $v=-23$ ($c=-175\,481\,375$) будет шесть решений.

III_2. Рассмотрим условие (3) в частных случаях $t=\pm 1$.

При $t=1$ имеем $c=-s^2+s+1$, где $s=-2v^2-2v$. Вместе с парой $(x, y)=(1, s-1)$ решением уравнения (1) будет и пара $(x, y)=(1, -s)$. Таким образом, при

$$c=-4v^4-8v^3-6v^2-2v+1$$

уравнение (1) имеет не менее пяти решений. При $v=21$ ($c=-854699$) и $v=130$ ($c=-1160117659$) будет шесть решений, а при $v=23$ ($c=-1219919$) — семь.

Аналогично, при $t=-1$ получим $c=-s^2-3s+1$, где $s=-2v^2+2v$. Вместе с парой $(x, y)=(-1, -s-1)$ решением будет и пара $(x, y)=$ $=(-1, s+2)$. Таким образом, при

$$c=-4v^4+8v^3+2v^2-6v+1$$

уравнение (1) имеет не менее пяти решений.

III_3. Рассмотрим теперь условие (3) при $s=\pm 2$.

При $s=2$ получим $c=-2t^2+4t-3$, при этом $(x, y)=(t, 2t-1)$ будет одним из решений уравнения (1). Для упрощения дальнейших формул сделаем замену $t\to t+1$. Тогда $c=-2t^2-1$ и одним из решением будет $(x, y)=(t+1, 2t+1)$. Ясно, что $(x, y)=(-t+1, -2t+1)$ также является решением. Ещё два решения можно искать в виде $(1, y)$, где

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{8t^2+9}}{2}.$$

Существует бесконечно много значений t, при которых оба решения $(1, y)$ будут состоять из целых чисел. Для таких t всего имеется не менее пяти решений. (Можно также искать дополнительную пару решений в виде $(-1, y)$, где

$$y=\frac{1\pm\sqrt{8t^2+17}}{2}.$$

И здесь существует бесконечно много значений t, дающих решения в целых числах.) При $t=18$ ($c=-649$) получим шесть решений.

При $s=-2$ всё аналогично: имеем $c=-2t^2-4t+1$, при этом $(x, y)=(t, -2t-1)$ будет решением (1). После замены $t\to t-1$ полу-

чим $c = -2t^2 + 3$ и $(x, y) = (t - 1, -2t + 1)$. Ещё одно решение — это $(x, y) = (-t - 1, 2t + 1)$. Дополнительную пару решений снова можно найти в виде $(1, y)$ или $(-1, y)$, где

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{8t^2 - 7}}{2} \quad \text{или} \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{8t^2 + 1}}{2}$$

соответственно. При $t = 6$ $(c = -69)$ получим шесть решений.

IV. Рассмотрим аналогичное кубическое диофантово уравнение

$$x(y^2 - 2x^2) + x + y + c = 0, \tag{5}$$

где $c \geqslant 1$. Считая $x \neq 0$, положим $k = y^2 - 2x^2 + 1$. Имеем

$$x = -\frac{ck}{k^2 - 2} \pm \sqrt{\frac{k-1}{k^2-2} + \frac{2c^2}{(k^2-2)^2}}, \quad y = -kx - c. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что если $k \geqslant 2$, то

$$|x| \leqslant c + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}},$$

а если $k \leqslant -2$, то

$$|x| < c + \sqrt{\frac{c^2}{2}}.$$

Для оставшихся значений $k \in \{0, \pm 1\}$ имеем

$$x = \pm\sqrt{\frac{c^2+1}{2}}, \quad x = c \pm \sqrt{2c^2}, \quad x = -c \pm \sqrt{2c^2 + 2}.$$

В итоге приходим к оценке

$$|x| \leqslant c + \sqrt{2c^2 + 2}, \tag{7}$$

которая достигается при $x = -c - \sqrt{2c^2 + 2}$. Оценку (7) можно использовать для отыскания всех решений уравнения (5), однако есть более эффективный алгоритм (см. [1]).

Пусть теперь c таково, что $c^2 = 2t^2 - 1$ для некоторого $t \geqslant 1$, т. е.

$$c \in \{1, 7, 41, 239, 1393, 8119, \ldots\}.$$

Тогда оценка (7) для решений (x, y) уравнения (5) будет точной. Более того, для таких c при $k \in \{-1, 0, 2\}$ все числа (6) оказываются целыми. Это значит, что для указанных значений c уравнение (5) имеет не менее семи решений. Например, при $c = 239$ получаем

$$(x, y) \in \big\{(-577, -816),\ (-408, 577),\ (-169, -239),\ (-70, -99),$$

$$(-3,10),\ (-2,-11),\ (-1,-15),\ (-1,16),\ (0,-239),\ (5,1),$$
$$(7,-8),\ (99,-140),\ (169,-239)\Big\}$$

(всего 13 решений). С помощью компьютера можно убедиться, что это значение c является рекордным по числу решений при $1 \leqslant c \leqslant 10^6$. Неизвестно, будет ли число решений уравнения (5) равномерно ограниченным по c.

V. Заинтересованный читатель может самостоятельно исследовать ещё одно кубическое диофантово уравнение

$$x(y^2-2x^2)+x+cy+1=0. \tag{8}$$

В отличие от уравнений (1) и (5), для уравнения (8) построение быстрого алгоритма решения и получение хороших оценок для решений (x,y) является более сложной задачей (см. аналогичный пример 7 из статьи [1]).

Список литературы

[1] *Osipov N. N.*, *Gulnova B. V.* An algorithmic implementation of Runge's method for cubic diophantine equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2018. Т. 11, № 2. С. 137–147.

[2] *Barbeau E. J.* Pell's equation. New York: Springer-Verlag, 2003.

(*Н. Н. Осипов*)

28.6. Условие. Докажите, что радикальный центр трёх полувписанных окружностей треугольника (т. е. окружностей, которые касаются двух сторон треугольника и его описанной окружности) лежит на прямой OI, где O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности. (*К. В. Козеренко*)

28.6′ (выпуск 29, с. 269). Условие. *Обозначим через Z радикальный центр трёх полувписанных окружностей ω_A, ω_B и ω_C треугольника ABC* (рис. 1). *Пусть T_A, T_B, T_C — точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Рассмотрим следующую инверсию* (*точнее говоря, антиинверсию*) *с полюсом в точке Z: точке X ставится в соответствие такая точка X', что $\overrightarrow{XZ}\cdot\overrightarrow{X'Z}=D$, где D — степень точки Z относительно любой из трёх полувписанных окружностей. Положим* $T'_A=\mathrm{Inv}_Z(T_A)$, $T'_B=\mathrm{Inv}_Z(T_B)$, $T'_C=\mathrm{Inv}_Z(T_C)$.

а) *Докажите, что точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности* (*аналогично для четвёрок точек A, T'_A, T'_B, B и A, T'_A, T'_C, C*), см. рис. 2. *Эти окружности назовём* полуописанными.

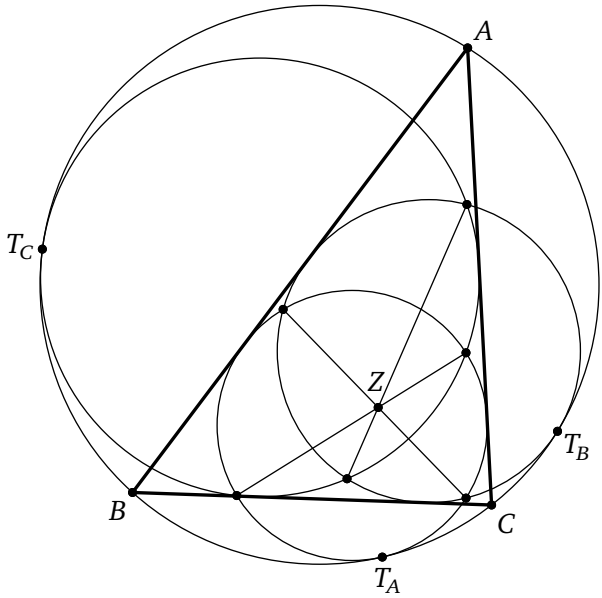


Рис. 1

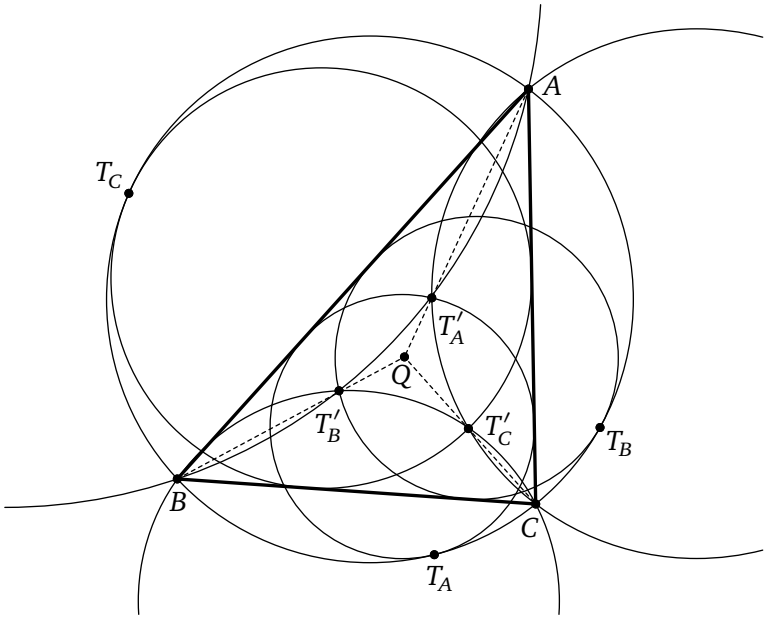


Рис. 2

б) *Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей. Докажите, что точка Q лежит на прямой OI.*

(*К. В. Козеренко*)

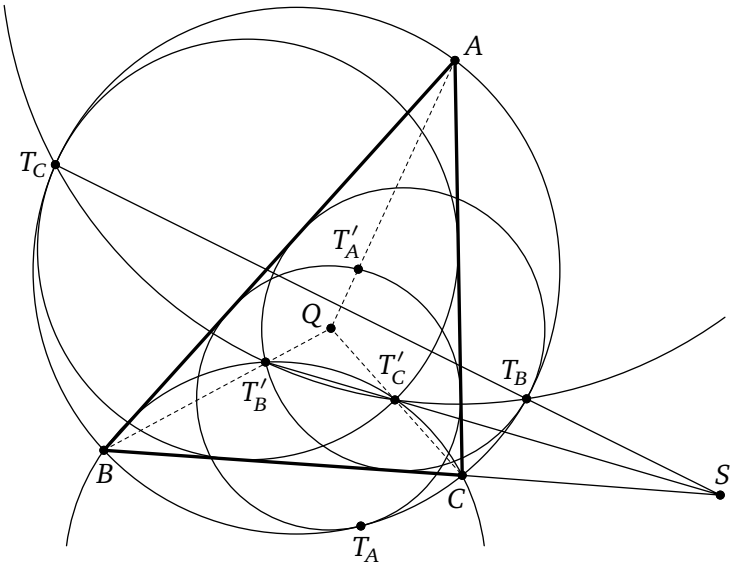


Рис. 3

Решение задач 28.6 и 28.6′. Поскольку $T_BZ \cdot T'_BZ = T_CZ \cdot T'_CZ$, точки T_B, T'_C, T'_B, T_C как симметричные относительно инверсии Inv_Z лежат на одной окружности. Обозначим буквой S точку пересечения прямых T_BT_C и $T'_BT'_C$ (рис. 3). Рассмотрим инверсию с полюсом S и радиусом $\sqrt{ST_B \cdot ST_C}$. Описанную окружность эта инверсия переводит в себя, а полувписанные окружности ω_B и ω_C меняет местами. Следовательно, общая касательная BC этих окружностей проходит через точку S, откуда следует, что

$$ST'_B \cdot ST'_C = ST_B \cdot ST_C = SB \cdot SC,$$

т. е. точки B, T'_B, T'_C, C лежат на одной окружности.

Обозначим через Q радикальный центр трёх полуописанных окружностей (рис. 2). В качестве следствия из теоремы получаем

Утверждение. *Радикальный центр Q является точкой пересечения прямых AT'_A, BT'_B, CT'_C.*

Это утверждение имеет и другую интерпретацию. В самом деле, положим $\Omega' = \mathrm{Inv}_Z(\Omega)$. Заметим, что Ω' является окружностью с центром O', которая касается окружностей ω_A, ω_B и ω_C (рис. 4). Тогда *точка Q является вторым (наряду с точкой Z) полюсом инверсии окружностей Ω и Ω'.*

Отметим при этом, что точки Z, O', Q и центр O окружности Ω лежат на одной прямой.

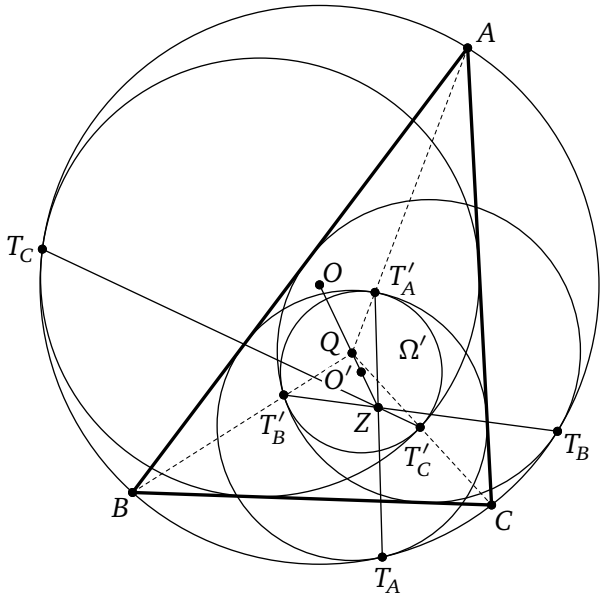


Рис. 4

Но это ещё не все «титулы» точки Q. Рассмотрим композицию гомотетий, первая из которых с центром в точке T'_A переводит окружность Ω' в окружность ω_A, а вторая с центром в точке A переводит ω_A во вписанную окружность ω треугольника ABC. Тогда точка Q, как следует из доказанного утверждения, является центром композиции этих гомотетий, т. е. *центром гомотетии, которая переводит окружность Ω' в окружность ω*.

Наконец, из двух предыдущих утверждений вытекает, что *точка Q является центром гомотетии, которая переводит описанную окружность Ω во вписанную окружность ω*, т. е. точка Q лежит на отрезке OI, где I — центр окружности ω и делит его в отношении $R : r$, считая от точки O

Следствие. *Точки Q, Z и O' лежат на прямой OI* (рис. 5).

Замечания. 1. Утверждение относительно точки Z доказано в [1] исходя из совершенно других соображений. Там же доказано, что

$$\overrightarrow{OZ} : \overrightarrow{ZI} = -2R : r, \quad \overrightarrow{OO'} : \overrightarrow{O'I} = 4R : r, \quad R' = \frac{3Rr}{4R + r},$$

где R, r и R' — радиусы окружностей Ω, ω и Ω' соответственно.

2. Точка J на рис. 5, которая тоже лежит на прямой OI, — это центр гомотетии с положительным коэффициентом, которая переводит окружность Ω в окружность ω.

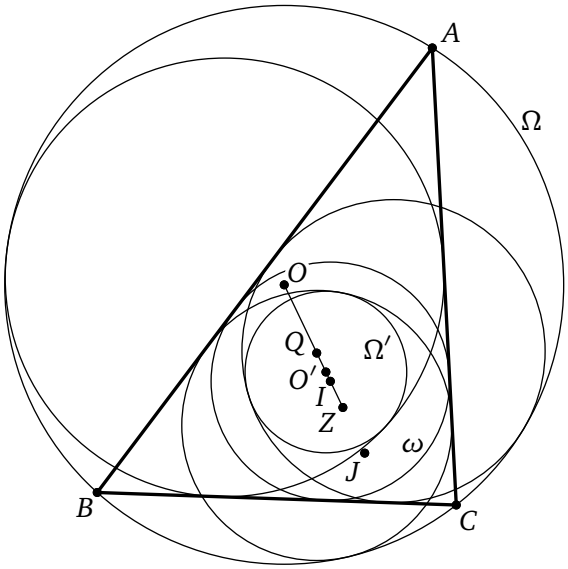


Рис. 5

3. Кроме этих четырёх точек на прямой OI лежат ещё 9 (!!!) замечательных точек:

— центр O_I описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$, где I_A, I_B, I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC;

— ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ где A_1, B_1, C_1 — точки касания окружности ω со сторонами треугольника ABC;

— центры E_W, E^W, E_1 окружностей Эйлера треугольников $W_AW_BW_C$, $W^AW^BW^C$, $A_1B_1C_1$ где W_A, W_B, W_C — точки пересечения биссектрис треугольника ABC с окружностью Ω, а W^A, W^B, W^C — середины сторон треугольника $I_AI_BI_C$;

— точки M_W, M_1 пересечения медиан треугольников $W_AW_BW_C$ и $A_1B_1C_1$;

— и, наконец, ещё два центра гомотетий треугольников $W^AW^BW^C \sim$ $\sim I_AI_BI_C$ и $A_1B_1C_1 \sim I_AI_BI_C$.

Таким образом, на одной прямой «сидят» 14 замечательных точек!

Доказательство этих утверждений мы оставляем читателю.

В заключение отметим ещё один факт. Если вместо вершины A треугольника ABC мы рассмотрим произвольную точку K на окружности Ω, проведём через неё две касательные к окружности ω, которые вторично пересекут Ω в точках L и M, то в силу теоремы Понселе прямая LM тоже будет касательной к окружности ω.

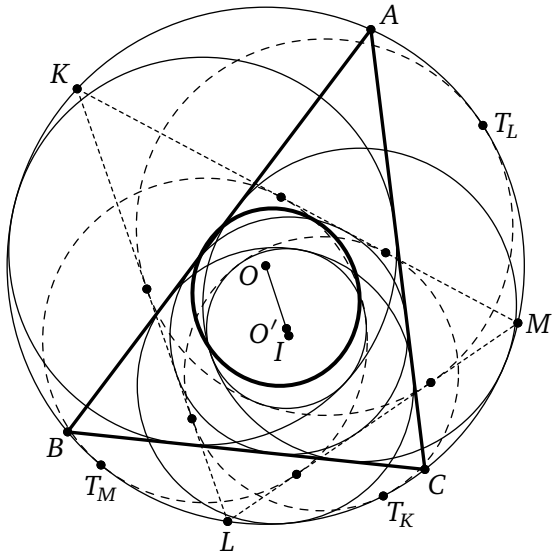


Рис. 6

Пусть теперь точка K движется по окружности Ω. Оказывается, что тогда *центры полувписанных окружностей ω_K, ω_L и ω_M треугольника KLM будут двигаться по эллипсу с фокусами в точках O и O'* (рис. 6).

В самом деле, обозначим через O_K и R_K центр и радиус окружности ω_K соответственно. При движении точки K по окружности Ω окружность Ω' «стоит на месте», следовательно,

$$O'O_K + O_KO = R_K - R' + R - R_K = \text{const},$$

т. е. центр O_K лежит на эллипсе с фокусами O и O'.

Список литературы

[1] *Nguyen K.*, *Salazar J.* On mixtilinear in circles and excircles // Forum Geometricorum. 2006. Vol. 6. P. 1–16.

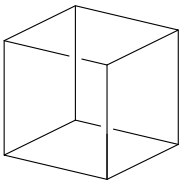
(*К. Козеренко, преподаватель Второй школы*;
К. Мамонов, ученик 9 класса Второй школы, г. Москва)

Опечатки, замеченные в прошлых выпусках

Выпуск	Страница,	строка	Напечатано	Следует читать
30	230	9–8 снизу	O — центр его описанной окружности,	O, H — центр его описанной окружности и его ортоцентр соответственно,
32	184		Задача 3.1’	Задача 3.1″
32	188		Задача 26.4’	Задача 26.4″
32	190	3 снизу	Веерштрасса	Вейерштрасса

ПОПРАВКИ

При публикации статьи А. Б. Скопенкова «Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность» (вып. 32) допущена погрешность в рис. 1 верхнем левом на с. 127. «Невозможный куб» должен выглядеть следующим образом:



В задачнике выпуска 32 на с. 182 подпись к рис. 2 относится в действительности к рис. 1.

Информация для авторов

1. Сборник «Математическое просвещение» предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей, учащихся и всех, кто интересуется математикой. Сборник не публикует существенно новые научные результаты, требующие оценки специалистов. Не публикуются также материалы по текущим вопросам преподавания математики в учебных заведениях.

2. Материалы принимаются по электронной почте на адрес `matpros@yandex.ru` в виде двух файлов (`pdf` и `tex`) с дополнительными файлами рисунков и т. п., если требуется. Допускается присылка статей, набранных в `Word`. При наличии графики в теховском файле необходимо прислать все исходные файлы.

3. Материалы принимаются в чёрно-белом исполнении.

4. Просим авторов кратко пояснять в начале статьи, в чём её цель и почему тема статьи представляет интерес.

5. Редакция благодарна авторам за оформление ссылок на литературу как в предыдущих выпусках, см. `http://www.mccme.ru/free-books/matpros.html`

6. В конце статьи указывается (если у авторов нет возражений):

— фамилия, имя, а также отчество (если есть) полностью,

— место работы/обучения,

— электронный адрес.

7. Авторы задач вместе с условием представляют письменное решение.

8. Авторы опубликованных статей имеют право на 2 экземпляра сборника каждый. Просим обращаться по адресу `matpros@yandex.ru`

Научно-популярное издание

Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 33

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель-Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619–08–30, 647–01–89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Подписано в печать 25.04.2024 г. Формат $70\times100\,{}^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 13. Тираж 500 экз. Заказ №

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 745–80–31.
E-mail: biblio@mccme.ru, http://biblio.mccme.ru