Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Пусть функция $g(x)$ такова, что при всех $x \geqslant 1$ выполняется равенство $g(x)^{g(x)} = x$. Найдите такую элементарную функцию $h(x)$, что $\lim_{x\to\infty}(g(x) - h(x)) = 0$. *(А. Я. Канель-Белов)*

2. а) Людям житья не стало от вампиров. Чтобы спасти поголовье людей, добрый волшебник наложил заклятие: 1) каждую ночь может выходить на охоту только один вампир; 2) если вампир ест человека, то следующим днём он превращается в человека и следующей ночью может быть съеден другим вампиром.

   Вампир готов стать человеком, но риск быть съеденным другим вампиром ему неприемлем, при этом всем известно, что вампиры бесконечно умные и доверяют интеллектуальным качествам своих товарищей. Изначально имеется n вампиров. При каких n вампир выйдет на охоту?

   б) Пусть вампиры умеют организовываться в банды по $n_1, \ldots, n_k$ вампиров. Если банда решает ночью выйти на охоту, то каждый ест по своему человечку и утром они становятся людьми. Число n называется *экологически равновесным* или просто *экологичным*, если никто из вампиров не собирается выйти на охоту.

Рассмотрим игру: имеется n фантиков, разрешается брать по $n_1, \ldots, n_k$ фантиков. Тот, кто не может сделать ход, — проигрывает. Докажите, что множество экологичных чисел в задаче про вампиров совпадает с множеством чисел в задаче о фантиках, проигрышных для начинающих.

(*А. Я. Канель-Белов*)

3. а) Для какого максимального N можно расположить N точек на плоскости, соединить их попарно отрезками и раскрасить отрезки в синий и красный цвет так, чтобы отрезки одного цвета не имели внутренних точек пересечения, а каждый отрезок имел не более одной точки пересечения с отрезком другого цвета?

   б) Вопрос для исследования. Оцените N для k разрешённых точек пересечения с отрезком другого цвета. (*Л. Радзивиловский*)

4. Дана кососимметрическая матрица A. Докажите, что некоторая нетривиальная линейная комбинация её столбцов с неотрицательными коэффициентами образует вектор, все координаты которого неотрицательны.

   (*И. В. Митрофанов*)

5. а) Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий биекцию между точками с неотрицательными целыми координатами и целыми неотрицательными числами? (*Фольклор*)

   б) Задача на исследование. Какова его возможная степень?

   (*И. Г. Царьков*)

   в) Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства.

   (*А. Я. Канель-Белов*)

6. Неправильный октаэдр — это многогранник, в котором шесть вершин и в каждой вершине сходятся 4 треугольные грани. Таким образом, для каждой вершины есть ровно одна вершина, не соединённая с ней ребром. Отрезок, соединяющий вершины, не связанные ребром, назовём диагональю. Дан неправильный выпуклый октаэдр. Докажите, что если существует эллипсоид, касающийся всех рёбер, то диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что если диагонали пересекаются в одной точке, то существует поверхность второго порядка, касающаяся всех рёбер или их продолжений. (*Л. Радзивиловский*)

7. а) Дан равносторонний треугольник и квадрат на плоскости. Доказать, что расстояние между хотя бы одной парой вершин (одна — квадрата, вторая — треугольника) иррационально. (*Фольклор*)

   б) Дан квадрат с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1)$. Существует ли на оси OX точка, расстояния от которой до всех его вершин рациональны? (*Н. С. Келлин*)

8. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные, одинаково ориентированные равнобедренные треугольники ABC', BCA', CAB'. Докажите, что существует коника, касающаяся прямых AB', $B'C$, CA', $A'B$, BC', $C'A$, и найдите геометрическое место центров таких коник. (*А. А. Заславский*)

9. а) Дана решётка R из единичных кубов с целочисленными вершинами. В сечении плоскостью $2016x + 2017y + 2018z = 0$ образуется паркет из многоугольников. Сколько из них различных (с точностью до центральных симметрий и параллельных переносов)?

   б) Что получается в сечении R плоскостью $x + y + z = 0$? В сечении четырёхмерной решётки плоскостью $x + y + z + t = 0$? (*А. Я. Белов*)

10. Пусть $K(n)$ — наибольшее число слагаемых в разложении натурального числа n в сумму таких натуральных чисел, что каждое следующее делится на предыдущее и строго его больше. Докажите, что $K(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. (*Фольклор*)

11. В точках целочисленной прямой случайным и независимым образом расставлены стрелки (направления равновероятны). Рассматривается случайное блуждание, при котором вероятность идти по стрелке 51 %, а против стрелки 49 %. Докажите, что для некоторой константы C расстояние от начальной точки после n шагов не превосходит $C(\ln n)^2$ с вероятностью 0,99. (*Фольклор*)

12. а) Любую ли фигуру из зеркального стекла можно осветить изнутри одной лампочкой?

    б) Любой ли многоугольник из зеркального стекла можно осветить изнутри одной лампочкой? (*Фольклор*)

Дополнение к задачнику

Хорошая задача обычно существует не сама по себе. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

В предыдущем выпуске обсуждалась знаменитая задача о прожекторах. В процессе развития этой темы возникла задача В. В. Произволова о многоугольнике, а также задача о прожекторах на неевклидовой плоскости. Этой теме было посвящено несколько статей в нашем сборнике, а также дополнение к задачнику, опубликованное в предыдущем выпуске.

Сейчас мы публикуем дополнения к другим задачам.

В первом выпуске третьей серии «Математического просвещения» опубликована

Задача 1.2. Доказать, что существует бесконечно много N таких, что 2^N оканчивается на N.

Её развитием служит

Задача 1.2$'$. Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на 36. Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что 2^{N_k} оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична. (*А. Я. Канель-Белов*)

Во втором выпуске опубликована

Задача 2.4. Можно ли числа от 1 до 2^{1000} раскрасить в два цвета так, чтобы не существовало арифметических прогрессий длины 2000, составленных из чисел одного цвета?

Её решение (выпуск 4) основывалось на вероятностном методе. В этой связи возникает

Задача 2.4$'$. Привести явные конструкции в задаче 2.4.
(*А. Я. Канель-Белов*)

Дальнейшем развитием этого сюжета является

Задача 2.4$''$. Можно ли раскрасить более половины (вариант — более 99 %) вершин какого-нибудь правильного n-угольника так, что объединение любых десяти поворотов раскраски не закроет весь n-угольник? Постарайтесь получить по возможности лучшие оценки на n, а также явные конструкции.

В третьем выпуске была опубликована

Задача 3.8. Внутри выпуклого пятиугольника проведены [все] диагонали. Докажите, что они образуют пятиугольник, проективно эквивалентный исходному. (*Д. Любшин*)

В этой связи возникает

Задача 3.8′. Дан выпуклый пятиугольник M. Проводятся все его диагонали и внутри возникаст выпуклый пятиугольник M', с ним продслывается та же процедура, получается пятиугольник M'' и т.д. Можно ли циркулем и линейкой построить точку пересечения всех этих пятиугольников? (*Ф. К. Нилов*)

В десятом выпуске опубликована

Задача 10.11. Последовательность непрерывных функций $\{F_n\}$, где n-я функция зависит от n переменных, называется *средней*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1) Для любого натурального n функция F_n симметрична, однородна (т.е. при перестановке переменных значение F_n не меняется и

$$F_n(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot F_n(x_1, \ldots, x_n)$$

для любых чисел $\lambda, x_1, \ldots, x_n$), кромс того, $F_n(x, \ldots, x) = x$ для любого x, $F_2(1, 0) = 1/2$.

2) Для любых натуральных n и k равенство

$$F_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) = F_{n+k}(x_1, \ldots, x_n, Y, \ldots, Y),$$

где $Y = F_k(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$, выполпепо для любых чисел $x_1, \ldots, x_{n+k}$.

Докажите, что функция F_n есть среднее арифметическое:

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (\textit{А. Я. Канель})$$

В этой связи возникает

Задача 10.11′. Семейство непрерывных симметрических функций $\{F_n\}$ таково, что

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{n-1}(x_1 + x_2, \ldots, x_n) + F_2\left(\frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_1 + x_2}\right) \cdot (x_1 + x_2).$$

При этом все переменные области опрсделсния F_n положитсльны, а их сумма равна 1. Докажите, что

$$F_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \ln(x_1) + \ldots + x_n \cdot \ln(x_n). \qquad (\textit{А. Я. Канель})$$

Представляется целесообразным сперва решить более лёгкую задачу:

Задача 10.11″. Дана строго возрастающая последовательность целых чисел $\{U_n\}$. Известпо, что $U_1 = 1$, $U_2 = 2$ и $U_{mn} = U_m U_n$. Докажите, что $U_k = k$ при всех k.

Задача 10.11‴. Предыдущую задачу можно усилить: требовать выполнения равенства $U_{mn} = U_m U_n$ только при $(m, n) = 1$. (*В. А. Сендеров*)

В выпуске 15 была опубликована

Задача 15.4. Во все точки целочисленной решётки на плоскости вбиты гвозди. На плоскость положили отрезок длины 2011, не задевающий ни одного из этих гвоздей.

а) Можно ли передвинуть отрезок, не задевая ни одного гвоздя, так, чтобы в результате он развернулся на 180°?

б) Существует ли такое начальное положение отрезка, при котором его можно повернуть вокруг некоторой точки на 180° так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

(Авторам неизвестно, верно ли утверждение пункта б) для произвольного начального положения отрезка.) (*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

Эта задача возникла в связи с размышлением над следующим сюжетом:

Задача 15.4′. Каково наименьшее возможное значение площади многоугольника, внутри которого можно развернуть на 180° единичный отрезок? (*Фольклор*)