Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны

Н. В. Богачёв

Посвящается моему учителю,
Эрнесту Борисовичу Винбергу
(1937–2020)

§ 1. Введение

Теория дискретных групп движений пространств постоянной секционной кривизны (т. е. пространств Евклида $\mathbb{E}^n$, многомерных сфер $\mathbb{S}^n$ или пространств Лобачевского $\mathbb{H}^n$, описанных в § 3) является ярким и активно развивающимся направлением современной математики и соединяет в себе различные её области, такие как геометрия, алгебра, топология, теория чисел и др. В качестве таких групп можно рассматривать группы симметрий многогранников и кристаллов, фундаментальные группы многообразий и пространственных форм, группы целочисленных преобразований Лоренца и пр.

Важной частью теории дискретных групп является разработанная Э. Б. Винбергом теория дискретных групп, порождённых отражениями, в пространствах Лобачевского. Такие группы называют *гиперболическими группами отражений*, хотя они и состоят не только из отражений. Теории групп отражений (не только в пространствах Лобачевского, но и в евклидовых пространствах и на сферах) посвящены статьи в Математическом просвещении под авторством В. О. Бугаенко [4, 5], Э. Б. Винберга [2] и О. В. Шварцмана [3]. К этим группам мы будем неоднократно обращаться в данной статье.

Теория дискретных групп движений является частью более общей теории дискретных подгрупп групп Ли, среди которых большое значение имеют так называемые арифметические дискретные группы. Знаменитый результат Г. А. Маргулиса (за который, в числе прочих, он получил

Филдсовскую премию 1978 года) гласит, что всякая неприводимая решётка (т. е. неприводимая дискретная подгруппа конечного кообъёма) в полупростой группе Ли вещественного ранга > 1 является *арифметической*. Это утверждение для групп ранга $\geqslant 1$ было известно как гипотеза Сельберга и Пятецкого-Шапиро и возникло ещё в 1960-х. Оказалось, что контрпримеры к этой гипотезе для групп Ли ранга 1 нашлись среди дискретных групп движений пространства Лобачевского.

Дискретные группы движений имеют также важное значение в геометрии и топологии, а именно в изучении *гиперболических многообразий и орбифолдов*. *Гиперболическим многообразием* называется гладкое многообразие, которое (грубо говоря) локально выглядит как пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Известно, что всякое гиперболическое многообразие имеет вид $\mathbb{H}^n/\Gamma$, где Γ — дискретная группа движений пространства Лобачевского, свободная от кручения (т. е. без элементов конечного порядка), являющаяся *фундаментальной группой* многообразия M. Гиперболические n-мерные многообразия замечательны тем, что при $n = 2$ (теорема об униформизации) и $n = 3$ (программа геометризации Тёрстона) многие гладкие многообразия имеют именно гиперболическую структуру. А именно, все двумерные ориентируемые поверхности за исключением сферы и тора являются гиперболическими (в силу теоремы Гаусса — Бонне). В случае же трёхмерных многообразий известно, что многообразия вида $\mathbb{S}^3 \setminus K$, где K — узел, являются некомпактными гиперболическими 3-многообразиями за исключением тех случаев, когда K принадлежит классу сателлитных или классу торических узлов. Многообразия такого рода называются дополнениями к узлам (также изучаются и дополнения к зацеплениям). Нужно отметить, что У. Тёрстон нашёл целых 8 «модельных» трёхмерных геометрий, и все они реализуются для различных многообразий в теореме о геометризации. Многие из утверждений в нашей статье, которые верны для классических пространств $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$, верны и для остальных.

В параграфе 2 даются предварительные сведения из теории групп, в частности, групп движений и преобразований. В параграфе 3 обсуждаются *модели трёх пространств постоянной кривизны*, выпуклые многогранники в них, а также полные группы изометрий (или движений) этих пространств. В параграфе 4 даются определения *дискретных групп движений и их фундаментальных областей*, а также приводятся различные примеры. Параграф 5 расскажет читателю про *метод Пуанкаре*, а именно про то, как записать дискретную группу движений в абстрактном виде через образующие (порождающие элементы) и определяющие соотношения. Следующий параграф 6 посвящён *дискретным группам отраже-*

ний и теории Э. Б. Винберга. Наконец, последний параграф 7 является неформальным введением в *теорию арифметических групп* и излагает *алгоритм Винберга* построения фундаментальных областей.

Благодарности

Данная статья написана на основе спецкурса, прочитанного Э. Б. Винбергом на мехмате МГУ весной 2011 года. Автор статьи с удовольствием вспоминает лекции этого курса, побудившие его, тогдашнего студента второго курса, выбрать Э. Б. Винберга своим научным руководителем. Автор выражает ему глубокую благодарность за ценнейшие обсуждения, доброжелательное отношение, постоянную помощь, советы и внимание в течение всего этого времени.

§ 2. Группы движений

Напомним, что *метрическим пространством* называется множество X, снабжённое *функцией расстояния* или *метрикой*, т. е. отображением $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x) \geqslant 0$ для всех $x, y \in X$;
- невырожденность: $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ для всех точек $x, y, z \in X$.

Движением пространства X называется такое биективное отображение $f\colon X \to X$, что $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ для всех $x, y \in X$.

Упражнение 1. Докажите, что сюръективное отображение $f\colon X \to X$, для которого $\rho(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$, является движением.

Совокупность G движений пространства X является *группой*, если

- для всяких $g_1, g_2 \in G$ их композиция $g_1 g_2$ принадлежит G;
- для всякого движения $g \in G$ обратное движение g^{-1} тоже принадлежит G;
- тождественное движение e принадлежит G.

Ясно, что все движения пространства X образуют группу, так называемую *полную группу изометрий*. Её обычно обозначают через $\mathrm{Isom}(X)$.

Ещё со школьной скамьи всем нам хорошо известна аффинная евклидова плоскость $\mathbb{E}^2$, где расстояние между любыми двумя точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ можно вычислить по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Расстояние между точками x и y можно также записать как длину вектора $x-y\in\mathbb{R}^2$ из соответствующего евклидова (т. е. снабжённого положительно определённым скалярным умножением, в данном случае стандартным) векторного пространства $\mathbb{R}^2$, а именно $\rho(x,y)=\sqrt{(x-y,x-y)}$.

Движениями плоскости $\mathbb{E}^2$ являются параллельные переносы, повороты, отражения и их всевозможные композиции. Описание полной группы изометрий $\operatorname{Isom}(\mathbb{E}^2)$ приведено в конце этого параграфа, а группа всех движений $\operatorname{Isom}(\mathbb{E}^n)$ евклидова n-мерного пространства обсуждается в параграфе 3.

Группой движений плоскости является, например, группа поворотов на все углы α вокруг фиксированной точки плоскости (она изоморфна абелевой группе по сложению $(\mathbb{R},+)$), или группа, порождённая поворотом на угол $\pi/4$ (это группа $\mathbb{Z}_4=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$), или группа симметрий правильного n-угольника, известная как группа диэдра D_n. *Ортогональная группа* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\mid A^TA=E\}$, состоящая из вещественных невырожденных матриц, сохраняющих стандартную евклидову структуру, является подгруппой группы $\operatorname{Isom}(\mathbb{E}^n)$ всех движений n-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Ортогональные матрицы, грубо говоря, задают «повороты» и «отражения», оставляющие на месте начало координат. Например, в двумерном случае, т. е. для $n=2$, группа $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ состоит из всех поворотов вокруг начала координат, а также из отражений относительно всех прямых, проходящих через начало координат. Заметим, что *специальная ортогональная группа* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})=\{A\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R})\mid\det(A)=1\}$ является подгруппой индекса 2 в $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ и состоит из преобразований, сохраняющих ориентацию, а именно, из поворотов вокруг начала координат. Как мы отметим чуть ниже, группе $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ до полной группы изометрий $\operatorname{Isom}(\mathbb{E}^n)$ не хватает лишь параллельных переносов (см. § 3).

Группы движений являются частным случаем более общего класса *групп преобразований*. *Орбитой* точки $x\in X$ для группы преобразований G, действующей на пространстве X, называется множество

$$Gx:=\{gx\mid g\in G\},$$

то есть совокупность всех образов элемента x под действием группы G. *Стабилизатором* точки $x\in X$ называется множество всех преобразований, которые оставляют эту точку на месте, т. е. множество

$$G_x:=\{g\in G\mid gx=x\}.$$

Нетрудно проверить, что стабилизатор точки также является группой преобразований, более точно, подгруппой группы G.

Для всякой подгруппы $H<G$ можно рассмотреть множества G/H и $H\backslash G$ левых и правых смежных классов, состоящие из элементов вида

gH и Hg соответственно, где $g \in G$. Число $[G:H] = \mathrm{card}(G/H) = \mathrm{card}(H \backslash G)$ (здесь $\mathrm{card}(A)$ обозначает мощность множества A) называется *индексом* подгруппы H. Следует отметить, что $[G : G_x] = \mathrm{card}(Gx)$.

Подгруппа $H < G$ группы G называется *нормальной*, если для всех $g \in G$ верно, что $gH = Hg$ или, эквивалентно, $gHg^{-1} = H$. В этом случае пишут $H \triangleleft G$.

Разложение группы G в *прямое произведение* своих подгрупп N_1 и N_2 (пишут $G = N_1 \times N_2$) означает, что $G = N_1 N_2$, где обе подгруппы N_1, N_2 являются нормальными подгруппами и их пересечение равно $N_1 \cap N_2 = \{e\}$. Если же только одна из подгрупп является нормальной, скажем, $N \triangleleft G$, и при этом $G = N \cdot H$, где $N \cap H = \{e\}$, то говорят, что группа G раскладывается в *полупрямое произведение* $G = N \rtimes H$.

Если группы заданы с помощью образующих и определяющих соотношений, т. е. $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ (любой элемент из группы G_1 выражается в виде композиции порождающих элементов из S_1, для которых выполняются соотношения из множества R_1) и $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$, то их *свободным произведением* называется группа

$$G_1 * G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle.$$

Пример 1. В коммутативной (абелевой) группе все подгруппы являются нормальными.

Пример 2. Подгруппа индекса 2 всегда является нормальной. *Действительно, пусть $H < G$, и пусть имеется всего два левых смежных класса, H и какой-то gH. Тогда и правых смежных классов всего два: H и Hg^{-1}. Отсюда следует, что левый и правый смежные классы совпадают, поскольку тривиальные классы H (очевидно) совпадают, а нетривиальные представлены в единственном оставшемся экземпляре.*

Упражнение 2. Докажите, что четверная группа Клейна

$$V_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

изоморфная простейшей группе диэдра D_2, является нормальной подгруппой в группе перестановок S_4.

Пример 3. Докажем, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$, где $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Действительно, определитель матриц задаёт гомоморфизм $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, причём $\mathrm{Ker}(\det) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ — нормальная подгруппа, $\mathrm{Im}(\det) = \mathbb{R}^*$. По теореме о гомоморфизме $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$. Также можно отметить, что $\mathbb{R}^* \simeq \{\mathrm{diag}(d, 1, \ldots, 1) \mid d \in \mathbb{R}^*\}$. Ясно, что $\mathrm{diag}(d, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ только при $d = 1$. В силу всего вышесказанного мы получаем требуемое утверждение.

Рассмотрим группу $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ всех движений аффинной евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$. В ней имеется подгруппа $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{E}^2)$ индекса 2, состоящая из всех движений, сохраняющих ориентацию.

Предложение 2.1. *Имеют место следующие разложения*:

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Isom}^+(\mathbb{E}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Группа $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ содержит подгруппу T_2, состоящую из всех параллельных переносов вида $\tau_a\colon x \mapsto x + a$, где $x \in \mathbb{E}^2$ — точки плоскости $\mathbb{E}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ — вектор, принадлежащий евклидову векторному пространству $\mathbb{R}^2$. Очевидно, $T_2 \simeq \mathbb{R}^2$.

Нетрудно убедиться, что всякое движение плоскости можно представить в виде композиции параллельного переноса и «вращения» вокруг начала координат, т. е. $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2) = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^2$. Очевидно также, что $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R}^2$ тривиально, так как нетривиальные параллельные переносы не имеют неподвижных точек.

Остаётся заметить, что для всякого движения $\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$ верно равенство $\gamma\tau_a\gamma^{-1} = \tau_{\gamma a}$ (достаточно применить левую часть к произвольной точке $y = \gamma x$), означающее, что $T_2 \triangleleft \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^2)$.

С учётом того, что параллельные переносы и повороты вокруг фиксированной точки сохраняют ориентацию, мы получаем и второе равенство. □

Пример 4. Композиция двух отражений относительно параллельных прямых на плоскости $\mathbb{E}^2$ порождает так называемую бесконечную группу диэдра D_∞, равную $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

§ 3. Три классические геометрии

Известно, что существуют ровно три вида *пространств постоянной кривизны* — полных односвязных римановых многообразий с постоянной во всех точках секционной кривизной всякого двумерного направления. Это n-мерное пространство Евклида $\mathbb{E}^n$, n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$ и n-мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Кривизна этих пространств равна 0, 1 и -1 соответственно. В этом параграфе (следуя в основном [9] и [8]) мы обсудим модели всех трёх знаменитых геометрий, а также устройство многогранников и полных групп движений в них.

3.1. Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$

Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным евклидовым скалярным умножением $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Метрика в аффинном евклидовом пространстве

$$\mathbb{E}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

задаётся формулой $\rho(x, y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$. Отметим, что (аналогично предложению 2.1)

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n) = T_n \rtimes \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Isom}^+(\mathbb{E}^n) = T_n \rtimes \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),$$

где $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ и $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ — ортогональная и специальная ортогональная группы пространства $\mathbb{R}^n$ соответственно, а $T_n \simeq \mathbb{R}^n$ — группа параллельных переносов в нём. Известно, что всякое движение $\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{E}^n)$ можно представить в виде композиции не более чем $n+1$ отражения относительно гиперплоскостей.

3.2. Сферическое пространство $\mathbb{S}^n$

Модель сферического пространства $\mathbb{S}^n$ получается при рассмотрении пространства

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant j \leqslant n\}$$

с евклидовым скалярным умножением $(x, y) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Положим

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\}.$$

На сфере скалярное умножение задаёт угловую метрику $\cos\rho(x, y) = (x, y)$. Полная группа движений состоит из ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. $\mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n) = \mathrm{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. Известно, что всякое движение $\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{S}^n)$ можно представить в виде композиции не более чем n отражений относительно гиперплоскостей (т. е. относительно сфер коразмерности 1, получившихся сечениями $\mathbb{S}^n$ гиперплоскостями в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящими через начало координат).

3.3. Пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$

Пусть $\mathbb{R}^{n,1}$ — псевдоевклидово пространство Минковского, т. е. векторное пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, снабжённое скалярным умножением

$$(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

сигнатуры $(n, 1)$. Известно, что множество

$$\mathfrak{C} = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x, x) < 0\}$$

является открытым конусом в $\mathbb{R}^{n,1}$ с двумя связными компонентами $\mathfrak{C}^+ = \{x \in \mathfrak{C} \mid x_0 > 0\}$ и $\mathfrak{C}^- = \{x \in \mathfrak{C} \mid x_0 < 0\}$. *Векторной моделью n-мерного*

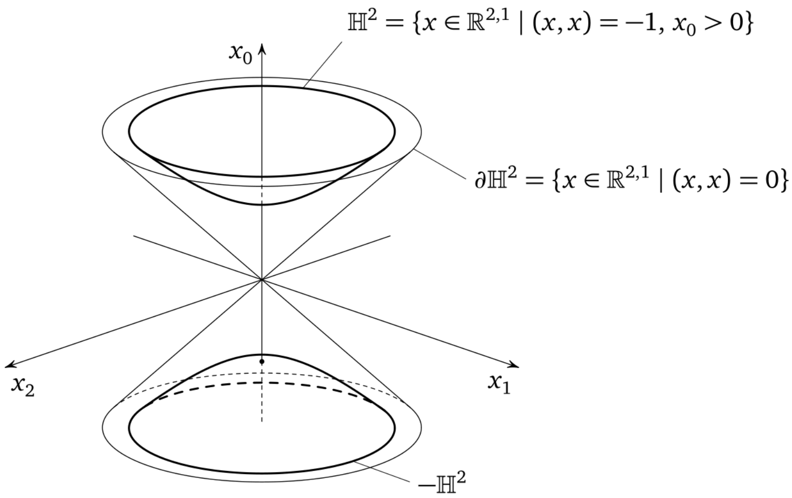

Рис. 1. Гиперболическая плоскость Лобачевского $\mathbb{H}^2$

гиперболического пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ является множество лучей в $\mathfrak{C}^+$, выходящих из начала координат. Лучи, лежащие на границе конуса $\mathfrak{C}^+$, соответствуют *бесконечно удалённым точкам* (или, как говорят, *точкам на абсолюте*) пространства Лобачевского. Иными словами, $\mathbb{H}^n = \mathfrak{C}^+/\mathbb{R}^+$. Можно также сказать, что $\mathbb{H}^n$ — это точки связной компоненты гиперболоида

$$\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid (x,x) = -1,\ x_0 > 0\},$$

лежащей внутри конуса $\mathfrak{C}^+$. Бесконечно удалённые точки соответствуют изотропным точкам пространства Минковского, т. е. таким x, что $(x,x)=0$. Множество бесконечно удалённых точек называют *абсолютом* или (*идеальной*) *границей* пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$ и обозначают через $\partial\mathbb{H}^n$. На рис. 1 изображена векторная модель плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$.

Расстояние в пространстве Лобачевского задаётся скалярным умножением по правилу $\operatorname{ch}\rho(x,y) = -(x,y)$.

Подпространствами (*плоскостями*) пространства Лобачевского являются пересечения подпространств в $\mathbb{R}^{n,1}$ с $\mathbb{H}^n$. В частности, *прямые* (*геодезические*) в $\mathbb{H}^n$ — это сечения гиперболоида двумерными плоскостями, т. е. гиперболы.

Обозначим группу всех ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^{n,1}$ (т. е. группу всех преобразований, сохраняющих скалярное произведение в этом пространстве) через $\mathrm{O}_{n,1}(\mathbb{R})$, а через $\mathrm{PO}_{n,1}(\mathbb{R})$ — её подгруппу индекса 2, состоящую из преобразований, не меняющих местами связные компоненты $\mathfrak{C}^+$ и $\mathfrak{C}^-$. Тогда группа Ли $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) \simeq \mathrm{PO}_{n,1}(\mathbb{R})$ является *полной группой движений пространства Лобачевского* в этой модели. Известно,

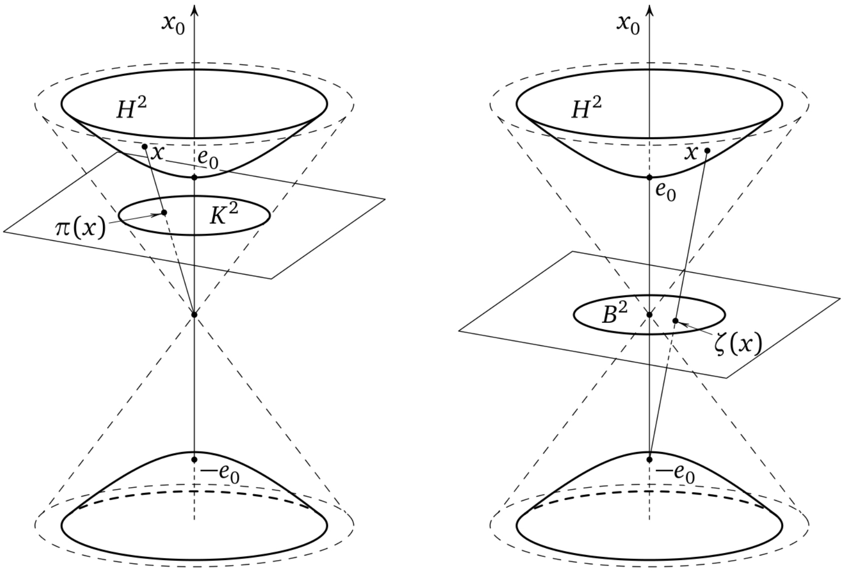

Рис. 2. Проекции $\pi(x)$ и $\zeta(x)$ с гиперболоида
на модели Клейна (слева) и Пуанкаре (справа) в диске

что всякое движение $\gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ можно представить в виде композиции не более чем $n+1$ отражения относительно гиперплоскостей.

Существуют и другие модели пространства Лобачевского. Например, модели Пуанкаре и Клейна в шаре, а также модель Пуанкаре в полупространстве. На рис. 2 изображены проекции с векторной модели на гиперболоиде на модели Клейна и Пуанкаре в диске. Из модели Пуанкаре в диске можно перейти к модели Пуанкаре в полупространстве посредством композиции инверсии и отражения.

Известен следующий факт, который можно доказать как в векторной модели пространства Лобачевского, так и, например, в модели Пуанкаре в шаре: множество точек, равноудалённых от точки $p \in \mathbb{H}^n$ (т. е. гиперболическая сфера), изометрично стандартной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Помимо этого, *орисфера* с центром в бесконечно удалённой точке $p \in \partial\mathbb{H}^n$ (т. е. множество, заданное в векторной модели как $\{x \in \mathbb{H}^n \mid (p, x) = \mathrm{const}\}$), изометрична евклидову пространству $\mathbb{E}^{n-1}$.

Отметим, что пространства Лобачевского $\mathbb{H}^2$ и $\mathbb{H}^3$ иногда удобно задавать следующим образом:

$$\mathbb{H}^2 = \{z = a + bi \in \mathbb{C} \mid b > 0\}, \quad \partial\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\} \cup \infty \simeq \mathbb{S}^1$$

и

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}, \quad \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \infty \simeq \mathbb{S}^2.$$

Модель Пуанкаре в верхнем полупространстве помогает получить следующие полезные факты:

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Более того, пусть $\tau\colon z \mapsto -\bar{z}$, где $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rtimes \langle \tau \rangle, \quad \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rtimes \langle \tau \rangle.$$

Подробнее о геометрии Лобачевского см. [6, 8, 9].

3.4. Многогранники

Здесь и далее мы будем обозначать через $\mathbb{X}^n$ одно из трёх пространств постоянной кривизны: $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n$ или $\mathbb{H}^n$.

Гиперплоскостями в $\mathbb{E}^n$ называются множества вида

$$H_{e,t} = \{x \in \mathbb{E}^n \mid (x, e) + t = 0\},$$

где $e \in \mathbb{R}^n$, $(e, e) > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Гиперплоскости в $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ и $\mathbb{X}^n = \mathbb{H}^n$ определяются как множества вида

$$H_e = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) = 0\},$$

где $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ — такой вектор, что $(e, e) > 0$.

Нормируем для удобства вектор e так, чтобы было $(e, e) = 1$. Определим *отражения* в пространствах $\mathbb{X}^n$ относительно гиперплоскостей. В пространстве $\mathbb{E}^n$ *отражение* относительно гиперплоскости $H_{e,t}$ задаётся по правилу

$$\mathcal{R}_{e,t}(x) = x - 2((e, x) + t)e.$$

В таком случае инвариантная гиперплоскость $H_{e,t}$ называется *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_{e,t}$.

В пространствах $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{H}^n$ отражение относительно гиперплоскости H_e определяется как

$$\mathcal{R}_e(x) = x - 2(e, x)e.$$

В этом случае гиперплоскость H_e также называется *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_e$.

Далее, определим «отрицательное» полупространство

$$H_e^- = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) \leqslant 0\}$$

и «положительное» полупространство

$$H_e^+ = \{x \in \mathbb{X}^n \mid (x, e) \geqslant 0\},$$

на которые H_e разбивает пространство $\mathbb{X}^n$.

Определение 3.1. *Выпуклым многогранником* в пространстве $\mathbb{X}^n$ называется пересечение конечного числа («отрицательных») полупространств, имеющее непустую внутренность. *Обобщённым выпуклым многогранником* называется пересечение такого семейства полупространств (возможно, бесконечного), что любой шар пересекает только конечное число их граничных гиперплоскостей.

Определение 3.2. Обобщённый выпуклый многогранник в $\mathbb{X}^n$ называется *компактным* (или *ограниченным*), если находится внутри какого-то шара, и *многогранником конечного объёма*, если $\mathrm{Vol}_{\mathbb{X}^n}(P) < \infty$.

Из конечности объёма многогранника всегда следует конечность числа его вершин, граней, рёбер и т. д. Заметим, что в случаях $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ из конечности объёма многогранника автоматически вытекает его компактность. В пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$ конечность объёма выпуклого многогранника означает, что он является выпуклой оболочкой конечного числа точек из $\overline{\mathbb{H}}^n = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$. Более точно, выпуклый многогранник конечного объёма является выпуклой оболочкой конечного числа обычных (принадлежащих $\mathbb{H}^n$) и бесконечно удалённых или, эквивалентно, идеальных (принадлежащих $\partial\mathbb{H}^n$) вершин. Компактный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой конечного числа обычных вершин, принадлежащих $\mathbb{H}^n$.

Могут существовать многогранники, все вершины которых лежат на абсолюте. Примером является так называемый идеальный треугольник:

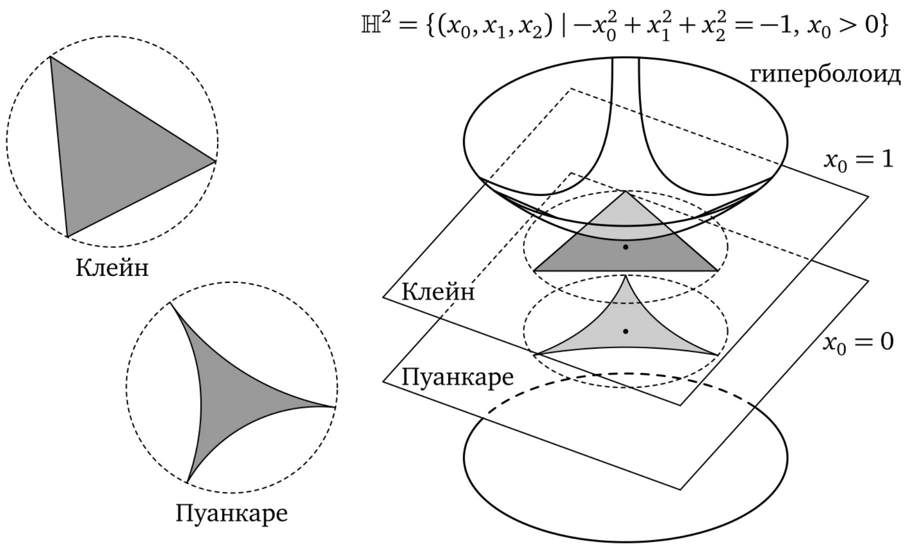

Рис. 3. Идеальный треугольник в $\mathbb{H}^2$ в трёх разных моделях

все три его угла равны нулю. На рис. 3 изображён идеальный треугольник на плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ в трёх разных моделях: в векторной модели на гиперболоиде, в модели Клейна в диске и в модели Пуанкаре в диске.

§ 4. Дискретные группы движений и их фундаментальные области

В этом параграфе приводятся определения и примеры дискретных групп движений и их фундаментальных областей. Изложение следует, в основном, обзору [7], а также книге [9].

При определённых условиях действие группы движений на метрическом пространстве допускает наглядное геометрическое описание при помощи многогранников.

Подмножество $A \subset X$ в метрическом пространстве называется *дискретным*, если для всякой точки $a \in A$ существует шар с центром в этой точке, который не содержит других точек этого множества. Внутренность множества A (т. е. множество всех точек, входящих в A вместе с какой-то своей окрестностью) обозначается через $\mathrm{int}(A)$.

Определение 4.1. Подгруппа $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется *дискретной группой движений*, если все её орбиты Γx дискретны, а стабилизаторы Γ_x конечны.

Поскольку сфера $\mathbb{S}^n$ является компактным многообразием, все дискретные группы движений сферы конечны (поскольку все орбиты конечны).

Определение 4.2. Замкнутая область $D \subseteq \mathbb{X}^n$ называется *фундаментальной областью* дискретной группы движений $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$, если

(1) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma D = \mathbb{X}^n$;
(2) для любых $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ верно, что $\mathrm{int}(\gamma D) \cap \mathrm{int}(\gamma' D) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\gamma = \gamma'$;
(3) для всякой точки $p \in \mathbb{X}^n$ существует такое $\varepsilon > 0$, что открытый метрический шар $B(p, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{X}^n \mid \rho(x, p) < \varepsilon\}$ с центром в точке p и радиусом ε пересекает лишь конечное число областей $\gamma D, \gamma \in \Gamma$.

Если D — фундаментальная область, то говорят, что множества γD, где $\gamma \in \Gamma$, образуют *разбиение* или *замощение* пространства $\mathbb{X}^n$.

Смысл понятия фундаментальной области состоит в том, что это хорошее в топологическом смысле подмножество, содержащее представителей всех орбит группы Γ, причём почти из всех орбит — ровно по одному представителю.

Фундаментальная область дискретной группы движений не является однозначно определённым объектом. В её выборе, как правило, имеется произвол.

Пример 1. Рассмотрим группу параллельных переносов $T_{\{e_1,\dots,e_n\}} \simeq \mathbb{Z}^n$ на целочисленные линейные комбинации некоторого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ в пространстве $\mathbb{E}^n$. Действительно, орбитами всякой точки евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ будут решётки, изоморфные $\mathbb{Z}^n$. Стабилизаторы в этом случае будут тривиальными.

В качестве фундаментальной области группы $T_{\{e_1,\dots,e_n\}}$ можно выбрать параллелепипед, натянутый на базисные векторы в какой-либо точке $\mathbb{R}^n$. Внутренность такого параллелепипеда содержит ровно по одному представителю каждой орбиты группы $T_{\{e_1,\dots,e_n\}}$ в $\mathbb{E}^n$.

Тем не менее фундаментальная область для такой группы не единственна. На рис. 4 представлены две разные фундаментальные области для действия группы $\mathbb{Z}^2$ на плоскости.

На рис. 5 изображена область, которая не является фундаментальной для действия группы $\mathbb{Z}^2$ на плоскости, поскольку соответствующее раз-

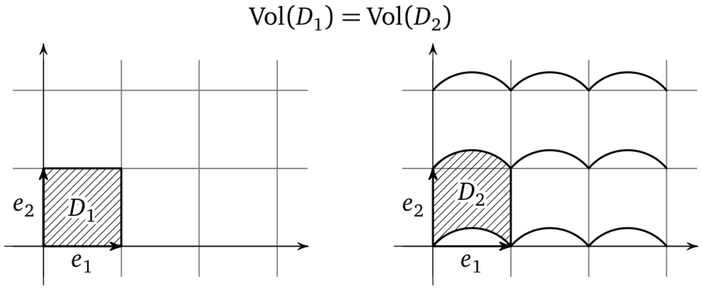

Рис. 4. Фундаментальные области для дискретной группы $\mathbb{Z}^2$

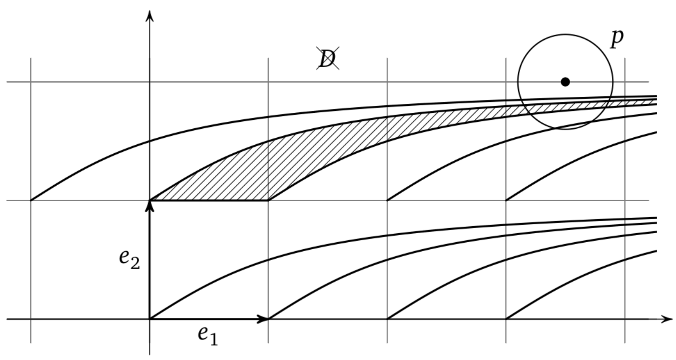

Рис. 5. Область, не фундаментальная для $\mathbb{Z}^2$

биение не удовлетворяет условию локальной конечности (см. определение 4.2, (3)). А именно, данная область представляет из себя фигуру, ограниченную горизонтальным отрезком и двумя ветвями арктангенса, отличающимися друг от друга горизонтальным сдвигом. Нетрудно убедиться, что данная область удовлетворяет условиям (1) и (2) определения 4.2, но окрестность точки p пересекает бесконечное число копий таких областей.

Пример 2. Группы симметрий $\mathrm{Sym}(P)$ многогранников $P \subset \mathbb{E}^n$ или группы симметрий дискретных подмножеств также являются дискретными группами движений в $\mathbb{E}^n$. Например, в качестве фундаментальной области для действия группы симметрий тетраэдра на его поверхности можно выбрать любой из треугольников, на которые его грани разбиваются своими высотами.

Пример 3. Группа S_n, действующая на пространстве $\mathbb{E}^n$ перестановками декартовых координат. В качестве фундаментальной области группы S_n можно выбрать конус $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$.

Определение 4.3. Дискретная группа движений $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется дискретной группой конечного кообъёма (или кристаллографической, или ко-конечной), если её фундаментальная область имеет конечный объём в $\mathbb{X}^n$.

Определение 4.4. Дискретная группа движений $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$ называется кокомпактной, если её фундаментальная область является ограниченным (или компактным) множеством в $\mathbb{X}^n$.

Пусть Γ — дискретная группа движений пространства $\mathbb{X}^n$, и пусть $a \in \mathbb{X}^n$ — такая точка, стабилизатор Γ_a которой тривиален. Для всякого элемента $g \neq 1$ в группе Γ определим полупространство (рис. 6)

$$H_g(a) = \{x \in \mathbb{X}^n \mid \rho(x, a) \leqslant \rho(x, ga)\}.$$

Областью Дирихле с центром в точке a называется множество

$$D(a) = \bigcap_{1 \neq g \in \Gamma} H_g(a).$$

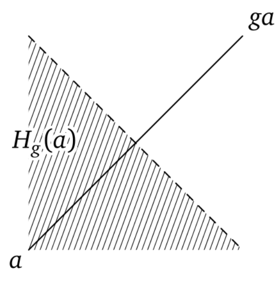

Рис. 6. Полупространство $H_g(a)$

В силу дискретности группы Γ область Дирихле является обобщённым выпуклым многогранником.

Теорема 4.1. *Пусть $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$ — дискретная группа движений, и пусть $\Gamma_a = \{e\}$ для некоторой точки $a \in \mathbb{X}^n$. Тогда область Дирихле $D(a)$ является фундаментальной областью группы Γ.*

Из этой теоремы следует, что всякая дискретная группа движений пространства постоянной кривизны обладает фундаментальной областью, являющейся обобщённым выпуклым многогранником.

§ 5. Определяющие соотношения и метод Пуанкаре

5.1. Метод Пуанкаре

Разбиение пространства на выпуклые многогранники называется *нормальным*, если пересечение любых двух многогранников либо пусто, либо является гранью каждого из них.

Всякое разбиение на выпуклые многогранники можно каноническим образом *нормализовать* путём введения фиктивных граней. А именно, следует объявить гранями всевозможные непустые пересечения многогранников разбиения, не содержащие других таких пересечений той же размерности.

Пусть P — выпуклый фундаментальный многогранник дискретной группы Γ, нормализованный, если необходимо. Многогранники γP, $\gamma \in \Gamma$, будем называть *камерами*. Две камеры называются *смежными*, если их пересечение есть их общая $(n-1)$-мерная грань.

Для каждой $(n-1)$-мерной грани F многогранника P обозначим через s_F движение, переводящее P в многогранник, смежный с ним по грани F. Через F' обозначим прообраз грани F при этом движении, т. е. $F' = s_F^{-1}(F)$. Очевидно, что $s_F s_{F'} = e$ (в этом действительно легко убедиться, используя тот факт, что всякое движение переводит пару смежных камер в пару смежных камер). Движения вида s_F называются *преобразованиями смежности*. Множество преобразований смежности обозначим через S.

Цепью камер называется последовательность камер $P_0, P_1, \ldots, P_k$, где P_i смежна с P_{i+1}. Каждая последовательность $(s_1, \ldots, s_k)$ преобразований смежности однозначно соответствует какой-то цепи камер, а именно, пусть $s_i = s_{F_i}$, и пусть

$$P_0 = P, \quad P_1 = s_1 P, \quad P_2 = s_1 s_2 P, \quad \ldots, \quad P_k = s_1 \ldots s_k P,$$

где грани P_i и P_{i-1} смежны по грани $s_1 \ldots s_{i-1} F_i$ (рис. 7).

Зафиксировав камеру P, заметим, что любую камеру можно соединить с P какой-то цепью. Если же для какой-то цепи $P_0 = P_k = P$, то мы получаем соотношение $s_1 \ldots s_k = e$. Соответствующие таким соотношениям цепи называются *циклами камер*.

С каждой $(n-2)$-мерной гранью F фундаментального многогранника P можно связать цикл обхода вокруг этой грани. Соответствующее этому циклу соотношение $s_1 \ldots s_k = e$ будем называть *соотношением Пуанкаре*.

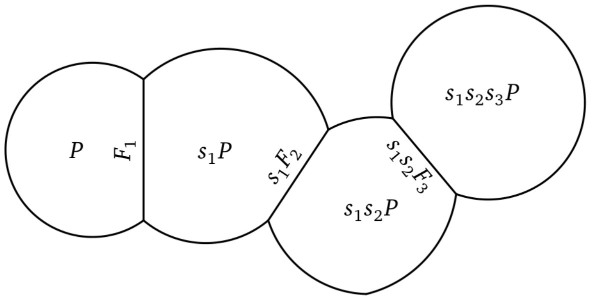

Рис. 7. Цепь (галерея) фундаментальных камер

Соотношения вида $s_F s_{F'} = e$ и соотношения Пуанкаре называются *локальными соотношениями*. Следующая теорема Пуанкаре гласит, что, имея фундаментальный многогранник для дискретной группы движений $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$, мы можем получить представление этой группы посредством образующих и определяющих соотношений.

Теорема 5.1 (А. Пуанкаре). *Пусть Γ — дискретная группа движений пространства X, и пусть P — её фундаментальный многогранник. Тогда группа Γ порождается множеством S всех преобразований смежности, а множество всех локальных соотношений R является множеством определяющих соотношений, т. е.* $\Gamma = \langle S|R \rangle$.

5.2. Модулярная группа

Рассмотрим один показательный пример дискретной группы движений плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$, а именно, модулярную группу $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, состоящую из преобразований вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad-bc=1, \tag{1}$$

в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Если добавить к этой группе отражение (комплексное сопряжение со знаком минус) $\tau\colon z \mapsto -\bar{z}$, то мы получим расширенную модулярную группу $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes \langle \tau \rangle$. Эта группа Γ (помимо преобразований типа (1)) содержит также движения вида

$$z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad-bc=-1. \tag{2}$$

Как показано в [2], Γ порождается отражениями, и её фундаментальной областью служит треугольник T с одной бесконечно удалённой вершиной, задаваемый в модели Пуанкаре неравенствами (рис. 8)

$$|\mathrm{Re}\, z| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |z| \geqslant 1.$$

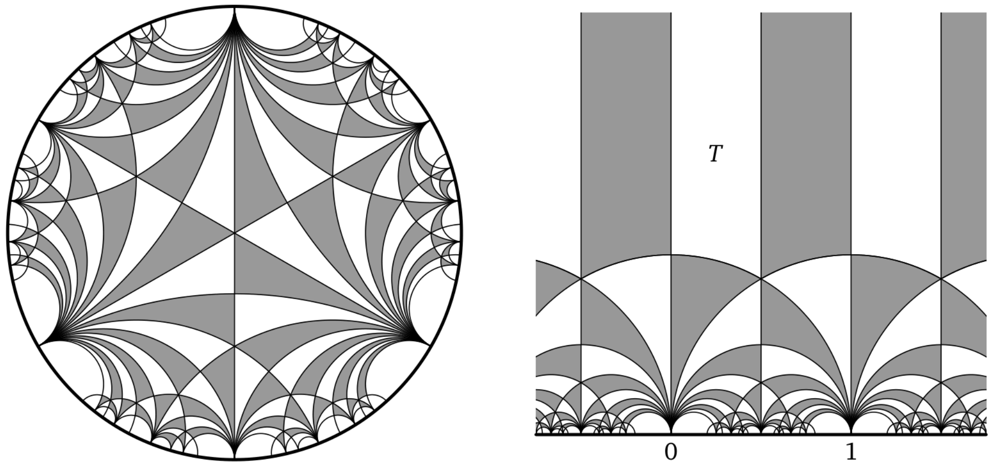

Рис. 8. Замощение плоскости Лобачевского фундаментальными треугольниками группы $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes \langle\tau\rangle$ в моделях Пуанкаре в диске (слева) и в верхней полуплоскости (справа)

Углы треугольника T равны $\pi/2, \pi/3$ и 0. Отражения относительно его сторон имеют вид

$$\tau : z \mapsto -\bar{z}, \quad \tau_1 : z \mapsto 1 - \bar{z}, \quad \tau_2 : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

В силу того, что $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rtimes \langle\tau\rangle$, можно убедиться, что фундаментальной областью для группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ будет служить треугольник $T \cup \tau(T)$ с углами $\pi/3, \pi/3$ и 0.

Более того, метод Пуанкаре и более аккуратный геометрический анализ данной картины позволяет понять, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ порождается преобразованиями $\tau \circ \tau_2$ (центральная симметрия в точке i) и поворотом $\tau_2 \circ \tau_1$ на угол $2\pi/3$ вокруг точки $1/2 + i\sqrt{3}/2$, между которыми нет соотношения. Из этого вытекает следующий нетривиальный факт:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3,$$

где $*$ обозначает свободное произведение групп.

§ 6. Группы отражений и многогранники Кокстера

Дискретная группа движений, порождённая отражениями в гиперплоскостях в пространстве $\mathbb{X}^n$, называется *группой отражений*.

Дискретные группы отражений представляют особый интерес благодаря простому комбинаторному строению своих фундаментальных многогранников. Для их описания мы воспользуемся *методом Пуанкаре* (см.

теорему 5.1). Пусть Γ — группа отражений, а P — её фундаментальный (обобщённый выпуклый) многогранник. Заметим, что все преобразования смежности в данном случае удовлетворяют соотношению $s^2 = e$. Остаётся посмотреть на обход вокруг произвольной $(n-2)$-мерной грани. Всякая такая грань F является пересечением двух $(n-1)$-мерных граней H_1 и H_2. Заметим, что композиция отражений s_1 и s_2 относительно этих граней является поворотом относительно грани F. Поскольку группа дискретна, этот поворот $s_1 s_2$ имеет конечный порядок, т. е. выполняется соотношение $(s_1 s_2)^m = e$. Более того, в этом случае двугранный угол между гиперплоскостями H_1 и H_2 равен π/m, так как иначе появилось бы какое-то зеркало отражения, разрезающее фундаментальный многогранник P на части, что невозможно.

Обобщённый выпуклый многогранник P называется *многогранником Коксетера*, если всякие две гиперплоскости H_i и H_j, ограничивающие P, либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij}, где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geqslant 2$.

Известен следующий результат, восходящий ещё к Г. Коксетеру. Однако первое доказательство этой теоремы в общем виде для всех пространств постоянной кривизны принадлежит, по всей видимости, Э. Б. Винбергу.

Теорема 6.1. *Всякая дискретная группа отражений в пространстве $\mathbb{X}^n$ порождается отражениями относительно стенок (граней) какого-то многогранника Коксетера.*

И наоборот, если P — обобщённый многогранник Коксетера в пространстве $\mathbb{X}^n$, то группа, порождённая отражениями относительно его граней, является дискретной, и многогранник P является её фундаментальной областью.

Следует заметить, что все максимальные дискретные группы отражений конечного кообъёма в $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ были классифицированы Г. Кокстером в 1933 году (см. об этом работу [4]). Эти группы отражений описываются в виде так называемых параболических и эллиптических схем Коксетера. В силу сказанного в параграфе 3, стабилизатор обычной вершины многогранника Коксетера в $\mathbb{H}^n$ является конечной сферической группой отражений, а стабилизатор бесконечно удалённой вершины — евклидовой группой отражений. Это соображение позволяет описывать и гиперболические многогранники Коксетера в виде диаграмм/схем Коксетера, а именно, глядя на схему Коксетера многогранника P, можно определить, является ли он компактным или многогранником конечного объёма, или не является.

Ещё одним следствием применения метода Пуанкаре к группам отражений является их абстрактная запись через образующие и определяющие соотношения, а именно, мы получаем, что

$$\Gamma = \left\langle s_1, \ldots, s_k \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = e \ \ \forall\, i, j = 1, \ldots, k \right\rangle.$$

Это приводит нас к следующему понятию. *Абстрактной группой Кокстера* называется группа Γ с фиксированной системой образующих S и определяющими соотношениями вида $s^2 = e$ и $(ss')^{m(s,s')} = e$ для произвольных различных $s, s' \in S$, где $m(s, s') \in \{2, 3, 4, \ldots, +\infty\}$.

Алгебраически это записывается так:

$$\Gamma = \langle s \in S \mid s^2 = (ss')^{m(s,s')} = e \rangle.$$

Но далеко не всякая абстрактная группа Кокстера является дискретной группой отражений одного из трёх пространств постоянной кривизны. Линейные представления групп Кокстера были классифицированы Э. Б. Винбергом в 1971 году с помощью так называемого конуса Титса (Ж. Титс первым построил некоторое классическое представление группы Кокстера и показал, что фундаментальной областью будет некоторый многогранный конус). Об этом можно прочитать в работе [3].

Рассмотрим некоторые примеры замощений плоскости Лобачевского. На плоскости Лобачевского бесконечно много треугольников Кокстера, так же как и многоугольников. Треугольники Кокстера с углами π/k, π/l, π/m можно задавать такими тройками чисел (k, l, m), что

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1.$$

На рис. 9 представлены замощения плоскости Лобачевского треугольниками типов $(3, 3, 4)$ и $(2, 4, 6)$.

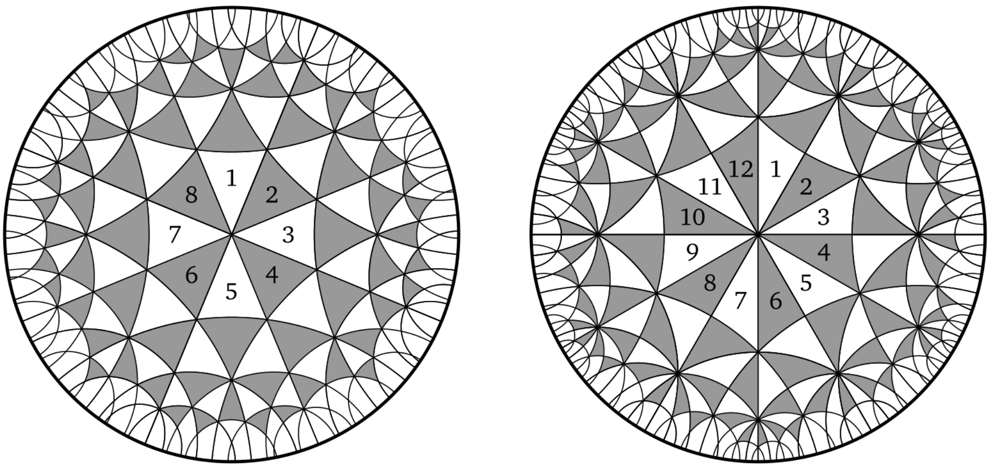

Рис. 9. Замощения плоскости Лобачевского треугольниками типа $(3, 3, 4)$ (слева) и $(2, 4, 6)$ (справа)

Рис. 10. Проекция замощения плоскости Лобачевского из модели на гиперболоиде в модели Пуанкаре (слева) и Клейна (справа) в диске

На рис. 10 представлена проекция замощения плоскости Лобачевского треугольниками типа $(3,3,4)$ из модели на гиперболоиде в модели Пуанкаре и Клейна в диске.

Следующая теорема позволяет изучать подгруппы, порождённые отражениями, в дискретных группах движений. Оказывается, если в какой-то группе движений подгруппа, порождённая всеми отражениями, имеет фундаментальный многогранник Кокстера с большим количеством симметрий, то это даёт много информации об исходной группе движений.

Теорема 6.2 (Э. Б. Винберг). *Пусть* $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{X}^n)$ — *дискретная группа движений, и пусть* Γ_R — *её подгруппа, порождённая всеми отражениями, входящими в* Γ. *Обозначим через* P_R *фундаментальный многогранник* (*Кокстера*) *группы* Γ_R. *Тогда* $\Gamma_R \lhd \Gamma$ *и* $\Gamma = \Gamma_R \rtimes \Delta$, *где* $\Delta = \Gamma \cap \mathrm{Sym}(P_R)$.

Последняя теорема означает, в частности, что если Γ является дискретной группой конечного кообъёма, а её подгруппа отражений является подгруппой конечного индекса (т. е. у P_R конечная группа симметрий), то и многогранник P_R имеет конечный объём.

Это простое соображение нам понадобится для рассмотрения *арифметических групп отражений*, которым мы посвятим следующий параграф. Они заслуживают даже отдельной статьи.

§ 7. Арифметические группы и алгоритм Винберга

Известен общий способ построения арифметических дискретных подгрупп в полупростых группах Ли, но мы ограничимся некоторым простейшим, хотя и наглядным, случаем.

Пусть $f(x)$ — квадратичная форма с целыми коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющая сигнатуру $(n,1)$. Рассмотрим группу целочисленных линейных преобразований, сохраняющих эту форму:

$$\mathrm{O}(f,\mathbb{Z}) = \left\{ A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}) \mid f(x) = f(Ax) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \right\}.$$

Эта группа будет являться также группой целочисленных автоморфизмов Лоренцевой решётки $L = \mathbb{Z}^{n+1}$, снабжённой целочисленным скалярным умножением $(\cdot,\cdot)$, для которого $(x,x) = f(x)$. Поскольку форма $f(x)$ имеет сигнатуру $(n,1)$, над полем $\mathbb{R}$ она эквивалентна стандартной форме $f_n(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$. В силу этого одну из связных компонент гиперболоида $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = -1\}$ можно отождествить с пространством Лобачевского $\mathbb{H}^n$, причём группа $\mathrm{O}(f,\mathbb{Z})$ сохраняет обе компоненты этого гиперболоида. Рассмотрим подгруппу $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$ индекса 2 в группе $\mathrm{O}(f,\mathbb{Z})$, состоящую из преобразований, оставляющих компоненту $\mathbb{H}^n$ на месте. Таким образом, мы получили дискретную группу $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$ движений пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$. Более того, согласно теореме Б. А. Венкова, группа $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$ всегда является дискретной группой движений конечного кообъёма! Группы вида $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$ и все соизмеримые с ними подгруппы $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ называются *арифметическими*.

В группе $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$ можно рассмотреть подгруппу, порождённую всеми отражениями относительно гиперплоскостей в пространстве. Несократимый вектор $e \in L$ называется k-корнем, если $2(e,x) \in k\mathbb{Z}$ для всех $x \in L$, где $k = (e,e) > 0$. Всякий k-корень задаёт k-отражение

$$\mathscr{R}_e(x) = x - \frac{2(e,x)}{f(e)}e.$$

Ясно, что $2(e,x)/f(e) \in \mathbb{Z}$, поскольку отражение принадлежит группе $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$. Обозначим такую подгруппу отражений через $R(f)$. Если $R(f)$ является подгруппой конечного индекса в $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$, то она является *арифметической группой отражений*, а квадратичная форма f называется *рефлективной*. Более того, если квадратичная форма f изотропна, т. е. $f(v) = 0$ для некоторого ненулевого $v \in \mathbb{Z}^{n+1}$, то фундаментальные многогранники групп $\mathrm{PO}(f,\mathbb{Z})$ и $R(f)$ будут некомпактными.

Например, с помощью подходящей замены базиса можно показать, что группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ является арифметической. Более того, известно, что всякая некокомпактная арифметическая подгруппа в $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ соизмерима с $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

В 1967 году, всё в той же фундаментальной работе [1], Э. Б. Винберг доказал критерий арифметичности для дискретных групп, порождённых отражениями в гранях многогранника Кокстера конечного объёма. Оказывается, что для определения арифметичности достаточно посмотреть на схему Кокстера (или на матрицу Грама) этого многогранника P.

В 1972 году Э. Б. Винберг предложил алгоритм, последовательно строящий фундаментальный многогранник для любой дискретной группы отражений в $\mathbb{H}^n$. Этот алгоритм очень удобно применять к группам вида $R(f)$, поскольку для них имеется техническая возможность перебирать все отражения.

Попробуем применить этот алгоритм для квадратичной формы

$$f(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$$

и построим с помощью общей теории Винберга фундаментальные области для групп $\Gamma' = \mathrm{PO}(f, \mathbb{Z})$ и $\Gamma = R(f)$.

Следуя алгоритму Винберга, сперва выбираем базисную точку, например, $v_0 = (1, 0, 0)$. Заметим, что $f(v_0) = -1$, т. е. $v_0 \in \mathbb{H}^2$. Стабилизатор Γ_{v_0} точки v_0 является группой $\mathrm{O}(2, \mathbb{Z})$, которая в свою очередь является конечной группой Кокстера типа B_2. Она действует на плоскости $\mathbb{R}^2$ перестановками базисных векторов с точностью до знака. Фундаментальный конус для Γ_{v_0} можно выбрать следующим образом: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$.

Следовательно, его можно ограничить прямыми, внешние нормали к которым суть векторы $e_1 = (0, 0, -1)$, $e_2 = (0, -1, 1)$.

Отметим, что вектор $e = (k_0, k_1, k_2)$ является k-корнем только в случае $k = (e, e) = 1$ или 2.

На следующем шаге алгоритма Винберга нужно найти такой корень $e = (k_0, k_1, k_2)$, что $k_1 \geqslant k_2 \geqslant 0$, $k_0 > 0$ и расстояние $\rho(H_e, v_0)$ — минимальное среди всех возможных. Из формул гиперболической геометрии следует, что

$$\operatorname{sh}^2 \rho(v_0, H_e) = \frac{(v_0, e)^2}{(e, e)} = \frac{k_0^2}{k}.$$

Эта величина минимальна при минимальном значении числителя и максимальном значении знаменателя. Данные соображения позволяют найти третий корень: $e_3 = (1, 1, 1)$. Полученная система нормалей e_1, e_2, e_3 задаёт треугольник Кокстера на плоскости Лобачевского с углами $\pi/2$, $\pi/4$ и 0 с одной бесконечно удалённой вершиной, но конечной площади. Значит, алгоритм завершён, и фундаментальная область для группы $\Gamma = R(f)$ найдена. Более того, из теоремы 6.2 следует, что группа $\Gamma' = \mathrm{PO}(f, \mathbb{Z})$ совпадает с Γ.

Заметим, что для нерефлективных квадратичных форм алгоритм Винберга никогда не завершится (т. е. рефлективность формы является необходимым и достаточным условием остановки алгоритма), но известны некоторые комбинаторные методы, позволяющие показать нерефлективность формы, глядя лишь на первые найденные грани фундаментального многогранника.

Список литературы

[1] *Винберг Э. Б.* Дискретные группы, порождённые отражениями, в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1967. Т. 72(114), № 3. С. 471–488.

[2] *Винберг Э. Б.* Калейдоскопы и группы отражений // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 45–63.

[3] *Шварцман О. В.* Группы отражений и группы Кокстера // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 64–81.

[4] *Бугаенко В. О.* Классификация многогранников Кокстера // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 82–106.

[5] *Бугаенко В. О.* Правильные многогранники // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 7. М.: МЦНМО, 2003. С. 107–115.

[6] *Сосинский А. Б.* Об эквивалентности трёх моделей плоскости Лобачевского // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 25. М.: МЦНМО, 2020. С. 38–47.

[7] *Винберг Э. Б., Шварцман О. В.* Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Геометрия-2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 29. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 147–259.

[8] *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Геометрия-2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 29. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 5–146.

[9] *Ratcliffe John G.* Foundations of Hyperbolic Manifolds. New York: Springer, 2019. (Graduate Texts in Mathematics; Vol. 149).

Николай Владимирович Богачёв, Сколтех, МФТИ

nvbogach@mail.ru