Хорошо ли мы знаем векторное произведение?

И. Х. Сабитов

Посвящаю светлой памяти
Эрнеста Борисовича Винберга

§ 1. Постановка проблемы

По-видимому, если не у всех, то у многих при изучении в курсе аналитической геометрии понятия векторного произведения двух векторов возникало чувство логического дискомфорта или даже когнитивного диссонанса. По определению в учебниках и справочниках, векторное произведение двух векторов **a** и **b** — это третий *вектор* **c**, ортогональный к обоим сомножителям и направленный так, что если все три вектора отложить из одной точки, то из конца вектора **c** направление *кратчайшего* вращения от первого сомножителя **a** ко второму сомножителю **b** кажется идущим против часовой стрелки, т. е. эта *упорядоченная* тройка векторов **a**, **b** и **c** составляет, как говорят, *правую* тройку векторов, причём такое их взаиморасположение *не зависит* от ориентации выбранного базиса пространства[1]. А про длину вектора **c** говорится, что она *численно* равна площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях (не очень аккуратные авторы и преподаватели даже пропускают слово «численно» и пишут, что его длина равна площади параллелограмма, забывая, что длина и площадь имеют разные размерности, и для этих величин, например, операция сложения не выполнима).

[1] Для понимания важности выбора направления взгляда очень полезно провести такой опыт: нарисуйте на листе бумаги круг, имитирующий циферблат часов, отметьте на нём часовую стрелку, соответствующую её положениям в 12 и 15 часов, и рядом с окружностью нарисуйте жирную стрелку, идущую от 12 к 15 часам. Затем поднимите аккуратно лист вверх, двигая его параллельно исходному положению до тех пор, когда он окажется выше вас, посмотрите на лист снизу — и увидите, что нарисованная стрелка направлена против движения часовой стрелки, хотя векторы стрелок, указывающие 12 и 15 часов, остались на месте!

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 27, 2021 (80–98)

Итак, векторное произведение — это вектор[2)], и его модуль, как длина, должен измеряться в единицах длины. А на следующем же занятии изучается смешанное произведение трёх векторов, в котором векторное произведение двух векторов умножается скалярно на третий вектор и объявляется, что получаем величину, измеряемую в единицах объёма, трактуя длину векторного произведения уже как величину размерности 2, т. е. как площадь!

Возникает ещё один естественный вопрос: пусть мы изменили масштаб и стали измерять длины, скажем, в миллиметрах вместо сантиметров. Тогда длины *всех* векторов в численном выражении изменятся (в данном случае увеличатся) в 10 раз, значит, значения площади изменятся в 100 раз, и длина вектора, являющегося векторным произведением, по определению изменится в 100 раз, а между тем она, как длина *любого* вектора, должна измениться только в 10 раз. В настоящей работе мы хотим выяснить, почему возможны такие противоречия и как их избежать.

§ 2. Векторное произведение и изменение масштаба измерений

Начнём с разбора второго казуса. Пусть у нас сначала единицей измерения был сантиметр и имелся ортонормированный базис единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с правилом векторного произведения $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$, $(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$, $(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$. Пусть есть числовая прямая L с фиксированным положением на ней точки, соответствующей числу 0. Тогда скалярное произведение $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 1$ даёт, по его определению, некоторую точку A на числовой прямой, соответствующую числу 1. Пусть мы изменили масштаб и выбрали, скажем, как единицу измерения миллиметр и, соответственно, базисные единичные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_1$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_3$. Ожидаемый казус появится в том случае, если можно утверждать, что векторные произведения будут определяться по правилам

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_3, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_2. \tag{1}$$

Действительно, тогда будет $\mathbf{e}_1 = 10\tilde{\mathbf{e}}_1$, $\mathbf{e}_2 = 10\tilde{\mathbf{e}}_2$, $\mathbf{e}_3 = 10\tilde{\mathbf{e}}_3$, и получится, что векторное произведение $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = 100\tilde{\mathbf{e}}_3 = 10\mathbf{e}_3$, но оно было равно $\mathbf{e}_3$, т. е. должно было стать равным $10\tilde{\mathbf{e}}_3$. С другой стороны, если мы примем векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ за единичные с выполнением равенств (1), тогда

[2)] В книге [1] в главе 8 векторное произведение $n-1$ векторов в n-мерном пространстве тоже определяется как вектор, имеющий некоторые специальные свойства, которые обобщают свойства, известные из трёхмерного случая.

их скалярные произведения самих на себя будут равны 1, т. е. единице на числовой прямой L будет соответствовать другая точка, отличная от A (а скалярному произведению $\mathbf{e}_1$ на себя будет соответствовать точка со значением 100), следовательно, в рассматриваемом линейном пространстве будет *другое* скалярное произведение. Другими словами, мы просто установили, что инвариантность векторного произведения при изменении базиса имеет место *только* относительно ортогональных преобразований базиса с определителем +1. Таким образом, мы можем сказать, что изменение масштаба измерений в линейном пространстве с данным скалярным произведением означает изменение в этом линейном пространстве введённого в нём скалярного произведения.

§ 3. Вопрос о размерности модуля векторного произведения

Перейдём к вопросу о разных толкованиях размерности модуля векторного произведения векторов. Пусть нам дано трёхмерное евклидово линейное пространство, т. е. в нём введено скалярное произведение $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ с условиями $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) \geqslant 0$ и $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$. В разложении вектора $\mathbf{a}$ по некоторому базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

его координаты a^i, $i = 1, 2, 3$, являются *безразмерными* величинами, а модули базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, геометрически будучи их длинами, измеряются в единицах длины. Пусть размерность некоторого объекта x обозначается[3)] как $]x[$. Всюду дальше считаем, что длины измеряются в сантиметрах, значит, $]|\mathbf{e}_i|[= \text{\textit{см}}$. Для краткости речи размерность модуля вектора будем называть также размерностью вектора, а при записи значения модуля будем указывать при нём его размерность. Значит, для модуля вектора $\mathbf{a}$ будет запись $|\mathbf{a}|$ *см*. Координаты вектора при разложении вида (2) называются *контравариантными* координатами, базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется *контравариантным* базисом, а вектор $\mathbf{a}$ в представлении (2) называется вектором в контравариантном представлении.

[3)] На самом деле общепринятое обозначение размерности $[x]$, но это обозначение нам пригодится позже в другом смысле, поэтому мы выбрали для обозначения размерности другой вариант расположения квадратных скобок; кроме того, поскольку слово «размерность» в математике часто используется как число координат, нужных для описания положения точки в рассматриваемом пространстве, мы будем иногда дополнять численную характеристику физической или геометрической природы объекта выражением «физическая размерность».

Длина этого вектора выражается через его контравариантные координаты по формуле (если базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортонормированный)

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}, \tag{3}$$

или в общем случае

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} a^i a^j},$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j), \tag{4}$$

т. е. размерность $]g_{ij}[= \text{см}^2$, так что размерность $]|a|[= \text{см}$.

Пусть ещё один вектор $\mathbf{b}$ задан контравариантными координатами:

$$\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3. \tag{5}$$

Найдём контравариантные координаты векторного произведения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ по его определению, считая, что у нас базис ортонормированный, т. е. векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичные, взаимно ортогональные и для них

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \quad (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1, \quad (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2.$$

Как мы знаем, должен получиться вектор

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3.$$

Как видим, поскольку контравариантные координаты умножаемых векторов — безразмерные величины, контравариантные координаты их векторного произведения тоже безразмерные, и для толкования модуля векторного произведения действует правило: *численное* значение модуля или длины векторного произведения равно *численному* значению площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, т. е.

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = \left(\frac{|\mathbf{a}|\ \text{см} \cdot |\mathbf{b}|\ \text{см} \cdot |\sin\varphi|}{\text{см}^2}\right) \text{см},$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По размерности $]|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|[= \text{см}$, а коэффициент

$$\frac{|\mathbf{a}|\ \text{см} \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{см} \cdot |\sin\varphi|}{\text{см}^2}$$

как раз и является безразмерным числовым значением площади параллелограмма.

Такое определение векторного произведения используется, например, в интерпретации $\mathbb{R}^3$ как примера *алгебры*, т. е. как линейного пространства с дополнительной операцией умножения векторов, в котором результат векторного произведения может суммироваться с другими векторами по обычному правилу сложения векторов.

§ 4. Ковариантное представление вектора

Однако такое понимание модуля векторного произведения не пригодно для его использования в определении смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ трёх векторов по правилу $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ с последующим толкованием его как объёма построенного на них параллелепипеда, так как объём должен быть величиной размерности *см*^{3}, а при указанном правиле умножения получается величина размерности *см*^{2}. В научной литературе есть другое определение векторного произведения (см., например, книгу [2, с. 36]), дающее для него нужную размерность *см*^{2}, и мы хотим сопоставить его с определением, принятым в учебной литературе.

Напомним вкратце определение векторного произведения в [2] (далее будем называть его определением по Картану). Сначала наряду с контравариантным представлением вектора $\mathbf{a}$ вводится другое его представление, называемое представлением вектора в *ковариантных координатах*, с обозначением $\mathbf{a}^*$. Формальное его определение такое: вводятся так называемые ковариантные базисные векторы $\mathbf{e}^j$ по формулам

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j = g^{i1}\mathbf{e}_1 + g^{i2}\mathbf{e}_2 + g^{i3}\mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где g^{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

(средняя часть в равенстве (6) соответствует краткому обозначению суммирования по правилу Эйнштейна, когда нужно суммировать элементы с одинаковыми верхними и нижними индексами).

После введения ковариантного базиса, ковариантное представление $\mathbf{a}^*$ вектора записывается так:

$$\mathbf{a}^* = a_i\mathbf{e}^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где

$$a_i = g_{ij}a^j = g_{i1}a^1 + g_{i2}a^2 + g_{i3}a^3. \tag{9}$$

В частности, имеем (сейчас индекс $k = 1, 2, 3$ обозначает *номер* вектора)

$$(\mathbf{e}_k)^* = g_{1k}\mathbf{e}^1 + g_{2k}\mathbf{e}^2 + g_{3k}\mathbf{e}^3.$$

Операция $g_{ij}a^j$, после выполнения которой верхний индекс исчез, а появился нижний индекс, называется *операцией опускания* или просто *опусканием* индекса. Отметим, что координаты a_i ковариантного вектора имеют физическую размерность *см*^{2}, а сам ковариантный вектор имеет размерность *см*. Размерность $]\mathbf{e}^j[$ векторов ковариантного базиса равна *см*$^{-1}$.

Рассматривая $\mathbf{e}_i$ в системе (6) как неизвестные, находим, что контравариантные векторы $\mathbf{e}_i$ выражаются через ковариантные векторы $\mathbf{e}^j$ по формулам

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j, \quad i = 1, 2, 3,$$

и при этом контравариантные координаты a^i получаются из ковариантных координат a_i операцией $a^i = g^{ij}a_j$, называемой *операцией поднятия* индекса. Теперь легко проверяется, что если у координат вектора $\mathbf{a}^*$ в (8) поднимем индекс, то получим исходный вектор $\mathbf{a}$, что оправдывает картановское понимание $\mathbf{a}^*$ просто как *другого представления* вектора $\mathbf{a}$.

Так как для скалярного произведения $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ векторов

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$$

имеем равенство

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \sum_{i,j} g_{ij}a^ib^j,$$

с учётом формулы (9) получаем новое представление скалярного произведения

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = a_ib^i = a^ib_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

В частности, для длины вектора $\mathbf{a}$ имеем формулу

$$|\mathbf{a}|^2 = a_ia^i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

(очевидно, в формулах (10) и (11) можно использовать также любые обозначения индекса суммирования, например, вместо i писать k или j, чем мы дальше иногда и будем пользоваться, особенно при рассмотрении двойных сумм).

Теперь разберёмся с физическими размерностями. Коэффициенты g_{ij} как скалярные произведения имеют физическую размерность $]g_{ij}[= \textit{см}^2$. Коэффициенты g^{ij} как элементы обратной к G матрицы имеют физическую размерность $]g^{ij}[= \textit{см}^{-2}$.

Рассмотрим для примера случай ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда

$$g_{ij} = \delta_{ij}\ \textit{см}^2,$$

где δ_{ij} — безразмерный (т. е. числовой) символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Соответственно, матрица G — единичная с $\det G = 1\ \textit{см}^6$. По формуле (6) ковариантный вектор $\mathbf{e}^i$ будет иметь вид $\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$ и поэтому его физическая размерность равна $]\mathbf{e}^i[= \textit{см}^{-1}$. Ковариантный вектор $\mathbf{a}^*$, соответствующий контравариантному вектору $\mathbf{a}$, будет иметь по формуле (9) ковариантные координаты $a_i = g_{ij}a^j$, т. е. они физической размерности *см*^{2}, а сам вектор $\mathbf{a}^*$ имеет физическую размерность $]\mathbf{a}^*[= \text{см}^1$ (заметим, что размерность вектора и в ковариантном, и в контравариантном представлении одна и та же, а именно *см*^{1}).

§ 5. Бивектор и его мера

Далее вводится понятие *бивектора* как упорядоченной пары векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенных от некоторого общего начала, с обозначением бивектора как $[\mathbf{ab}]$. Два бивектора $[\mathbf{ab}]$ и $[\mathbf{cd}]$ считаются равными, если эти пары образуют параллелограммы равной площади, расположенные на одной или параллельных плоскостях и имеющие одинаковую ориентацию (если же одна пара состоит из коллинеарных векторов, то в равном им бивекторе составляющие его векторы тоже должны быть коллинеарными, и в этом случае оба бивектора считаются равными нулю). Считается также, что

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}] = [(-\mathbf{b})\mathbf{a}] = [\mathbf{b}(-\mathbf{a})]. \tag{12}$$

В частности, для бивекторов, задаваемых базисными векторами, имеем

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] = -[\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i]. \tag{13}$$

Бивекторы $[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]$ можно назвать базисными бивекторами, так что в трёхмерном случае существует 3 базисных бивектора $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]$.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют в некотором базисе $\mathbf{e}_i$ представления

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i,$$

то бивектор $[\mathbf{ab}]$ имеет контравариантные координаты[4)]

$$P^{ij} = a^ib^j - a^jb^i \tag{14}$$

и бивектор $[\mathbf{ab}]$ представится в виде

$$[\mathbf{ab}] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} P^{ij}[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] = P^{12}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] + P^{23}[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] + P^{31}[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] \tag{15}$$

(учтены равенства (13)–(14)). В более привычном виде эта формула имеет такую запись:

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] & [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] & [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

---

4) Объяснение появления координат именно такого вида можно прочитать в [2, с. 24]. Кстати, координаты (14) в «Математической энциклопедии», 1977, т. 1, в статье «Бивектор», не совсем удачно названы координатами бивектора *в базисе* $\mathbf{e}_i$, так как бивектор разлагается, как мы видим, не по векторам этого базиса.

Площадь параллелограмма, о котором идёт речь, называется *мерой* бивектора. Выведем формулу для меры m бивектора $[\mathbf{ab}]$. Для её квадрата m^2 с использованием формул (10) и (11) получаем равенства

$$\begin{aligned} m^2 = |\mathbf{a}|^2| \cdot \mathbf{b}|^2 \cdot \sin^2 \varphi = \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \\ = (a_i a^i)(b_j b^j) - (a^i b_i)(a_j b^j) = \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) a^i b^j, \end{aligned} \tag{16}$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Мы видим, что физическая размерность меры m бивектора равна *см*^{2}.

Для меры бивектора полезно иметь и другое представление. Для этого введём *ковариантные* координаты бивектора. По аналогии с (14), используя ковариантные координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, положим

$$P_{ij} = a_i b_j - a_j b_i = \det \begin{pmatrix} \sum\limits_h g_{ih} a^h & \sum\limits_k g_{jk} a^k \\ \sum\limits_h g_{ih} b^h & \sum\limits_k g_{jk} b^k \end{pmatrix} = \sum_{h,k} g_{ih} g_{jk} P^{hk} \tag{17}$$

и назовём выражения P_{ij} ковариантными координатами бивектора $[\mathbf{ab}]$. Используя контравариантные и ковариантные координаты бивектора и учитывая, что

$$\sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) a^i b^j = \sum_{i,j} P_{ij} a^i b^j = \sum_{j,i} P_{ji} a^j b^i = -\sum_{i,j} P_{ij} a^j b^i,$$

формулу (16) для меры бивектора можно представить в виде

$$m^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} P_{ij} P^{ij}, \tag{18}$$

что в трёхмерном случае даёт формулу

$$m^2 = P_{12} P^{12} + P_{31} P^{31} + P_{23} P^{23}. \tag{19}$$

Далее можно ввести операцию сложения бивекторов (фактически она уже введена формулой (15)), скалярное произведение бивекторов, угол между бивекторами и тем самым превратить множество бивекторов в линейное евклидово пространство (предварительно отождествив равные бивекторы между собой или же объявив бивекторы свободными с введённым выше пониманием их равенства). Все эти построения можно осуществить для векторов n-мерного пространства, тогда соответствующее линейное пространство бивекторов будет иметь (топологическую) размерность

$$d = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2},$$

и только в случае $n = 3$ эта размерность совпадает с размерностью того пространства, из векторов которого строятся бивекторы. В силу совпадения размерностей *только* в этом случае рассматриваемое пространство векторов изоморфно построенному пространству бивекторов. Более того, изоморфизм можно построить, сопоставляя каждому бивектору $[\mathbf{ab}]$ вектор, равный классическому векторному произведению $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, причём этот изоморфизм сохраняет меру элементов в следующем смысле: если два бивектора имели равную меру, то соответствующие им векторы тоже имеют равную длину. Но нельзя объявлять, что можно *отождествить* бивектор с соответствующим ему векторным произведением, потому что меры этих объектов имеют *разную* физическую размерность, хотя *численные* значения этих мер и совпадают.

§ 6. Поливекторы и дополнительные векторы

Значит, нужно иметь какое-то другое определение векторного произведения, чтобы оно в скалярном умножении с другим вектором дало величину, физическая размерность которой соответствовала бы размерности объёма. Сначала мы опишем известный векторно-алгебраический подход к построению такого определения, для чего используем понятие дополнительного бивектора.

Общее определение дополнительного поливектора, согласно [2, с. 35], следующее. Пусть в евклидовом векторном n-мерном пространстве введено понятие поливектора или p-вектора A, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ (соответствующее случаю $p = 2$ понятие бивектора нам уже известно, случаю $p > 2$ соответствует упорядоченная совокупность p векторов, расположенных в некотором p-мерном подпространстве, и вместо площади параллелограмма надо говорить об объёме p-мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах, а абсолютная величина объёма и будет мерой этого p-вектора). Тогда *дополнительным к p-вектору A поливектором B* будет $(n-p)$-вектор, для которого:

1) каждый из составляющих его $n-p$ векторов ортогонален к подпространству, натянутому на p векторов рассматриваемого p-вектора;
2) поливекторы A и B имеют равные меры (в одинаковой физической размерности);
3) ориентация пространства, задаваемая векторами p-вектора A и $(n-p)$-вектора B, взятыми с сохранением их общего порядка, положительна, т. е. совпадает с заранее данной ориентацией самого пространства.

Эти определения и условия предполагают, что мера рассматриваемого p-вектора отлична от нуля.

В наиболее интересном для нас случае трёхмерного пространства дополнительный к бивектору A поливектор B на самом деле оказывается *1*-вектором, но с мерой, равной мере данного бивектора. Этот *1*-вектор по определению должен быть ортогонален обоим векторам **a** и **b**, составляющим рассматриваемый бивектор, и мера его должна быть равна площади параллелограмма для бивектора, значит, его координаты должны численно совпасть с координатами векторного произведения[5)] $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Вычисление их — довольно хлопотливое дело, оно сделано в [2, с. 35–36], а мы даём только окончательный результат с проверкой его верности. Утверждается, что искомый дополнительный *1*-вектор **c** имеет контравариантные координаты

$$c^1 = \frac{1}{\sqrt{\det G}} P_{23}, \quad c^2 = \frac{1}{\sqrt{\det G}} P_{31}, \quad c^3 = \frac{1}{\sqrt{\det G}} P_{12}. \tag{20}$$

Как видим из (14), в вычислении контравариантных координат бивектора участвуют контравариантные координаты определяющих его векторов. Выше в (17) мы получили формулу для выражения ковариантных координат бивектора через его контравариантные координаты. Для удобства вычислений перепишем её здесь в виде

$$P_{ij} = \sum_{i,j} g_{im} g_{jk} P^{mk}$$

и выразим контравариантные координаты c^i рассматриваемого *1*-вектора **c** через контравариантные координаты векторов **a** и **b**. Сначала с учётом равенств $P^{ii} = 0$, $P^{ij} = -P^{ji}$ находим ковариантные координаты:

$$\begin{aligned} P_{12} &= G_{33} P^{12} + G_{32} P^{31} + G_{31} P^{23}, \\ P_{31} &= G_{23} P^{12} + G_{22} P^{31} + G_{21} P^{23}, \\ P_{23} &= G_{13} P^{12} + G_{12} P^{31} + G_{11} P^{23}, \end{aligned} \tag{21}$$

где G_{ij} — алгебраические дополнения элементов g_{ij} в матрице G из (7). Подставляя найденные значения ковариантных координат в формулу (20), находим искомые значения контравариантных координат c^i.

---

5) Обращаем внимание, что размерность координат c^i равна *см*, а размерность ковариантного базиса e_i тоже *см*, так что размерность 1-вектора равна *см*^{2}, как и положено. Отметим также, что формулы для c^i внешне полностью совпадают с формулами в § 98 книги [4, с. 469] для ротора n-мерных векторных полей, представленного как бивектор, который, как пишет автор, *лишь* в трёхмерном случае может быть инвариантным образом *истолкован* как вектор. Но автор не пишет, что этот бивектор *является* вектором!

Теперь проверим, что *1*-вектор **c** ортогонален векторам **a** и **b**. Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$. Имеем

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = \sum_{ij} g_{ij}a^i c^j = a^1\sum_j g_{1j}c^j + a^2\sum_j g_{2j}c^j + a^3\sum_j g_{3j}c^j.$$

Убедимся, что эта сумма равна нулю. Действительно, рассмотрим первую сумму. С учётом (21) получаем

$$\begin{aligned} &a^1(g_{11}P_{23} + g_{12}P_{31} + g_{13}P_{12}) = \\ &\quad = a^1\big((g_{11}G_{13} + g_{12}G_{23} + g_{13}G_{33})P^{12} + (g_{11}G_{12} + g_{12}G_{22} + g_{13}G_{32})P^{31} + \\ &\qquad\qquad + (g_{11}G_{11} + g_{12}G_{21} + g_{13}G_{31})P^{23}\big) = a^1 \det GP^{23}. \end{aligned}$$

Вторая и третья суммы равны соответственно $a^2 \det GP^{31}$ и $a^3 \det GP^{12}$. Учитывая значения P^{ij} из (14), в общей сумме получаем

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) = \sqrt{\det G}\cdot\big(a^1(a^2b^3 - a^3b^2) + a^2(a^3b^1 - a^1b^3) + a^3(a^1b^2 - a^2b^1)\big) = 0,$$

что и хотели получить. Аналогично показывается ортогональность векторов **b** и **c**.

Далее проверяем, что мера *1*-вектора **c** равна мере бивектора $[\mathbf{ab}]$. Так как мы сейчас знаем контравариантные координаты *1*-вектора **c**, его меру m можем вычислить по формуле

$$m = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,3} g_{ij}c^i c^j}\,. \tag{22}$$

Используя выражения для P_{ij} из (21), вычисляем подкоренное выражение, представив его в виде

$$\begin{aligned} \sum g_{ij}c^ic^j = \frac{1}{\det G}\Big[&g_{11}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{23} + \\ &+ g_{22}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{31} + \\ &+ g_{33}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{12} + \\ &+ g_{12}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{31} + \\ &+ g_{21}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{23} + \\ &+ g_{13}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{12} + \\ &+ g_{31}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{23} + \\ &+ g_{23}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{12} + \\ &+ g_{32}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{31}\Big]. \end{aligned}$$

Если мы соберём вместе коэффициенты при произведениях вида $P^{mk}P_{st}$, то окажется, что при произведениях $P^{12}P_{12}$, $P^{23}P_{23}$ и $P^{31}P_{31}$ коэффициенты будут равны 1, а в остальных случаях коэффициенты будут равны нулю как суммы произведений элементов одного столбца матрицы G на алгебраические дополнения элементов другого столбца (т. е. то, что некоторые авторы называют «фальшивыми разложениями»). В итоге получим, что введённый *1*-вектор имеет меру

$$m^2 = P^{12}P_{12} + P^{31}P_{31} + P^{23}P_{23},$$

что в точности совпадает с полученной в формуле (19) мерой бивектора, имея ту же физическую размерность $см^2$. Чтобы можно было сравнить этот *1*-вектор с определяемым в учебниках векторным произведением, рассмотрим случай ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда обычное векторное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i$ имеет в этом базисе безразмерные контравариантные координаты

$$P^{23} = a^2b^3 - a^3b^2, \quad P^{31} = a^3b^1 - a^1b^3, \quad P^{12} = a^1b^2 - a^2b^1,$$

а контравариантные координаты *1*-вектора, построенного по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равны согласно (20) и (21) P^{23} *см*, P^{31} *см*, P^{12} *см* (учтено, что $\det G$ имеет физическую размерность $см^6$, а алгебраические дополнения имеют физическую размерность $см^4$). Именно этот вектор фактически и используется при введении смешанного произведения как скалярного произведения векторного произведения двух векторов на третий вектор, с последующим толкованием результата как объёма параллелепипеда.

§ 7. Явные формулы для двух определений векторного произведения

Для чёткого отличения двух определений векторного произведения напишем их явные представления в случае общего ортогонального базиса. Пусть дан ортогональный базис с векторами

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = f\mathbf{e}_1, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = g\mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = h\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — стандартный ортонормированный базис с правой ориентацией, а не равные нулю коэффициенты f, g, h — безразмерные скаляры. Матрица G в этом случае имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

с $g_{11} = f^2\ см^2$, $g_{22} = g^2\ см^2$, $g_{33} = h^2\ см^2$. Пусть базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ тоже правой ориентации, Рассмотрим случай, когда $f > 0$, $g > 0$, $h > 0$. Тогда при вычислении векторного произведения векторов

$$\mathbf{a} = a^1\tilde{\mathbf{e}}_1 + a^2\tilde{\mathbf{e}}_2 + a^3\tilde{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{b} = b^1\tilde{\mathbf{e}}_1 + b^2\tilde{\mathbf{e}}_2 + b^3\tilde{\mathbf{e}}_3$$

как *1*-вектора **c** с учётом формул (20) и (21) получаем

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\big[g_{22}g_{33}(a^2b^3 - a^3b^2)\tilde{\mathbf{e}}_1 + \\ + g_{11}g_{33}(a^3b^1 - a^1b^3)\tilde{\mathbf{e}}_2 + g_{11}g_{22}(a^1b^2 - a^2b^1)\tilde{\mathbf{e}}_3\big]. \quad (23)$$

В то же время, если мы вычислим векторное произведение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ как вектор, получим

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{gh}{f}(a^2b^3 - a^3b^2)\tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{fh}{g}(a^3b^1 - a^1b^3)\tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{fg}{h}(a^1b^2 - a^2b^1)\tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (24)$$

Сравнивая (23) и (24), видим, что в них численные значения коэффициентов совпадают, отличие только в том, что их физическая размерность в (23) равна *см*, а в (24) коэффициенты являются безразмерными величинами[6)]. Значит, при выборе *1*-вектора в качестве векторного произведения базисные векторы векторно умножаются по такому правилу:

$$(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3\cdot \text{\textit{см}}, \quad (\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1\cdot \text{\textit{см}}, \quad (\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2\cdot \text{\textit{см}}. \quad (25)$$

Случай, когда один коэффициент положительный (скажем, $f > 0$), а два отрицательны, рассматривается аналогично. В случае отрицательной ориентации базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ формулы для нахождения векторного произведения получаются из предыдущей формулы умножением на -1, поэтому в итоге оба выражения для векторного произведения оказываются в тех же отношениях, как и для базиса правой ориентации.

Важно ещё отметить следующее наблюдение: если в качестве векторного произведения выбран *1*-вектор, тогда оно (т. е. произведение) оказывается инвариантным относительно изменения масштаба измерения длин (чего не было, как помним, для случая, когда результатом векторного умножения объявлялся вектор). Действительно, пусть все длины измеряются в миллиметрах и пусть выбран ортонормированный базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ из векторов длины 1 *мм*. Положим, согласно (25),

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1\times\tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_3\cdot \text{\textit{мм}}, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_2\times\tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1\cdot \text{\textit{мм}}, \quad (\tilde{\mathbf{e}}_3\times\tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_2\cdot \text{\textit{мм}}. \quad (26)$$

[6)] Заметим, что когда пространство $\mathbf{R}^3$ с векторным произведением векторов приводят в качестве примера линейного пространства со структурой алгебры, то имеют в виду векторное произведение, определяемое именно по правилу (24), так как результатом умножения векторов должен быть вектор из того же пространства.

Тогда прежние базисные векторы имеют представление

$$\mathbf{e}_1 = 10\tilde{\mathbf{e}}_1, \quad \mathbf{e}_2 = 10\tilde{\mathbf{e}}_2, \quad \mathbf{e}_3 = 10\tilde{\mathbf{e}}_3.$$

Для их попарного векторного произведения имеем

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = 100(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = 100\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \textit{мм} = 10\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \textit{см} = \mathbf{e}_3 \cdot \textit{см}$$

(аналогично для остальных пар), т. е. их векторные произведения получаются такими же, какими были до изменения масштаба измерения. Верно и обратное, выбор векторных произведений в «миллиметровом масштабе» в виде (26) не случайный, а приходит от существующего в «сантиметровом масштабе» произведения. Действительно,

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{100}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \frac{1}{100}\mathbf{e}_3 \cdot \textit{см} = \frac{1}{10}\mathbf{e}_3 \cdot \textit{мм} = \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \textit{мм},$$

что согласуется с (26). Значит, можем сказать, что операция векторного произведения в виде взятия *1*-вектора инвариантна не только относительно ортогональных преобразований с определителем $+1$, но она инвариантна и относительно преобразований подобия, чего нет для его «учебного» определения в виде вектора.

§ 8. Векторы не с линейной мерой

Итак, оказалось, что можно предложить *два определения векторного произведения, дающие векторы разной природы*, точнее, разной меры. Если работать с векторами, оставаясь с их представлением только как направленных отрезков и понимая их меру только как длину, то ввести *1*-вектор не удастся, и мы не сможем добиться логически безупречного изложения понятия смешанного произведения. Поэтому основная проблема, которая сейчас возникает, состоит, на наш взгляд, в следующем: как изменить в учебных курсах изложение векторного произведения, не теряя математической строгости и в то же время не усложняя излишне этот материал? **Может, стоит ввести два типа произведения — векторное произведение первого рода и векторное произведение второго рода (подобно тому, как есть интегралы 1-го и 2-го рода по кривым и поверхностям)?** Отличием в них будет превращение координат «обычного» контравариантного векторного произведения из безразмерных величин в величины размерности длины. Тогда мера самого́ векторного произведения получит размерность «линейная единица в квадрате» и его можно будет использовать в смешанном произведении для вычисления объёма параллелепипеда. Одна из возможностей определения векторного произведения состоит именно «в подгонке» его определения под пригодность в использовании смешанного произведения как формулы объёма. Об этом говорил автору Э. Б. Винберг и это сделано в учебном пособии [5, с. 25], следующим образом. *Пусть даны векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$; *назовём их векторным произведением* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ *вектор* $\mathbf{z}$, *такой, что смешанное произведение* $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x})$ *равно* $(\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})$ *для любого вектора* $\mathbf{x}$. При использовании этого определения заранее предполагается, что смешанное произведение трёх векторов уже известно (оно даётся как определитель 3-го порядка из координат умножаемых векторов). Хотя в этой книге и не даётся никакого анализа размерностей используемых выражений, но ясно, что компоненты определяемого таким образом векторного произведения будут иметь размерность вида $\textit{см}^2$ (и поэтому найденное таким образом $\mathbf{z}$ *не будет вектором* в смысле введённого там же ранее на с. 23 определения вектора!). Как видим, даже в учебной литературе есть случаи, когда векторное произведение не представляется некоторым вектором с линейной мерой, а «честно» представляется вектором с квадратичной мерой.

Наверно, многим приходилось объяснять студентам, что бывают векторы, имеющие квадратичную размерность. Они появляются, например, при вычислении давления жидкости на погружённое тело и, соответственно, при выводе закона Архимеда о выталкивающей силе жидкости и газа. Направление этих векторов совпадает с направлением нормали к рассматриваемой площадке, а их мера равна площади площадки. Чтобы оставить за ними название «вектор», для них, как нам кажется, лучше всего предложить название «ареальный вектор» (мы их иногда называли *направленной площадью*[7] или *векторной площадью*, но тогда упор получался на слово «площадь»).

Бывают и случаи векторного произведения векторов с разными физическими размерностями. Примером такого векторного произведения является формула для нахождения вектора скорости точек тела, вращающегося вокруг некоторой оси с постоянной скоростью. Пусть угловая скорость задана как вектор $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{e}_3^0$ с размерностью $]\omega[\,=\gamma_1=\textit{рад}/\textit{с}$, а положение точки задано радиус-вектором

$$\mathbf{r}=x\mathbf{e}_1^0+y\mathbf{e}_2^0+z\mathbf{e}_3^0$$

с размерностями $\gamma_2=\textit{см}$. Тогда формула для определения скорости $\mathbf{v}$ точки, задаваемая векторным произведением $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, приводит к значению

$$\mathbf{v}=\omega(-y\mathbf{e}_1^0+x\mathbf{e}_2^0)\gamma.$$

[7] Но называть их *ориентированной площадью* нельзя, так как ориентированная площадь — это число со знаком.

Так как скорость, очевидно, должна измеряться отношением *длина/время*, коэффициент γ должен быть равен безразмерному числу 1 (если угол поворота выражен в безразмерных радианах, а не в угловых градусах).

§ 9. Физики нам помогут?

Так как проблема с размерностью чаще всего встречается в физике, физики обходят эту трудность простым способом — они считают базисные векторы безразмерными величинами, а все размерности переводят на координаты. Точно так же во многих случаях можно поступать и в геометрии — тогда размерности «сидят» в координатах. Будем считать, что строчки $\{1,0,0\}$, $\{0,1,0\}$, $\{0,0,1\}$ с обозначениями $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$ и их линейные комбинации

$$\mathbf{e}_i = a_i\mathbf{e}_1^0 + b_i\mathbf{e}_2^0 + c_i\mathbf{e}_3^0$$

с безразмерными коэффициентами соответствуют направлениям (эти коэффициенты **можно толковать как безразмерные направляющие косинусы**). Три направления $\mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{e}_3^0$ будем называть *основными*. Базис переводится в любой другой базис с помощью некоторой невырожденной матрицы с безразмерными коэффициентами, **которые можно толковать как безразмерные направляющие косинусы**. Вектором называем любую линейную комбинацию базисных направлений с коэффициентами одной и той же физической размерности, в частности, *базисные векторы* можно толковать как векторы вида $\gamma\mathbf{e}_i^0$, где размерностный коэффициент γ имеет числовое значение 1 и ту размерность, с которой мы хотим работать. Все векторы можно умножать на безразмерные коэффициенты, а сложение возможно только между векторами одинаковой размерности. Скалярное и векторное произведения определены, если они определены для направлений основного базиса. Скалярное произведение для всех векторов определяется по закону билинейности с умножением размерностей сомножителей.

Предложим, *как вариант*, следующее **определение** векторного произведения. Пусть

$$(\mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0) = \gamma\mathbf{e}_3^0, \quad (\mathbf{e}_2^0 \times \mathbf{e}_3^0) = \gamma\mathbf{e}_1^0, \quad (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0) = \gamma\mathbf{e}_2^0$$

с дополнительным условием

$$(\mathbf{e}_i^0 \times \mathbf{e}_j^0) = -(\mathbf{e}_j^0 \times \mathbf{e}_i^0),$$

где γ — коэффициент некоторой размерности, и

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1^0 + a^2\mathbf{e}_2^0 + a^3\mathbf{e}_3^0, \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1^0 + b^2\mathbf{e}_2^0 + b^3\mathbf{e}_3^0$$

— умножаемые векторы размерности соответственно γ_1 и γ_2. Тогда

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2^0\times\mathbf{e}_3^0) & (\mathbf{e}_3^0\times\mathbf{e}_1^0) & (\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \gamma\left[(a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1^0 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2^0 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3^0\right] \qquad (27)$$

с коэффициентами размерности $\gamma\gamma_1\gamma_2$, где коэффициент размерности γ *подбирается* таким образом, чтобы результат векторного умножения имел нужную по смыслу задачи размерность (отметим, что размерности коэффициентов γ_1 и γ_2 уже «сидят» в коэффициентах a и b).

Для векторов, заданных в общем базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, векторное произведение вычисляется по аналогичной формуле

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2) \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

где векторные произведения $(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)$ должны быть предварительно вычислены в том же базисе с учётом матрицы перехода от основного базиса, если мы хотим получить ответ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

В нашем геометрическом случае размерности γ_1 и γ_2 обе равны *см*, а коэффициент γ должен быть размерности *см*$^{-1}$, если хотим, чтобы векторное произведение было вектором, или нулевой размерности, т. е. просто числом 1, если хотим, чтобы векторное произведение было *1*-вектором. В первом случае имеем

$$(\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) = \textit{см}^{-1}\,\mathbf{e}_3^0, \quad (\mathbf{e}_2^0\times\mathbf{e}_3^0) = \textit{см}^{-1}\,\mathbf{e}_1^0, \quad (\mathbf{e}_3^0\times\mathbf{e}_1^0) = \textit{см}^{-1}\,\mathbf{e}_2^0,$$

а во втором случае

$$(\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) = \mathbf{e}_3^0, \quad (\mathbf{e}_2^0\times\mathbf{e}_3^0) = \mathbf{e}_1^0, \quad (\mathbf{e}_3^0\times\mathbf{e}_1^0) = \mathbf{e}_2^0$$

(т. е. можно сказать, что для случая *1*-вектора операция векторного умножения векторов основного базиса кажется более естественной — нулевые размерности слева и справа). Надеемся, после сказанного стало ясно, как объяснить, например, кажущиеся несовпадения размерностей в тождествах в задаче 158 в сборнике [3] (на что обратил моё внимание Е. В. Троицкий) — в них достаточно понимать под векторными произведениями *1*-векторы, а иначе надо говорить о совпадении *численных* значений левых и правых частей.

Сравним эти выводы с классическими формулами. Введём единичные векторы

$$\mathbf{i} = \gamma_1\mathbf{e}_1^0, \quad \mathbf{j} = \gamma_1\mathbf{e}_2^0 \quad \text{и} \quad \mathbf{k} = \gamma_1\mathbf{e}_3^0,$$

где $\gamma_1 = 1$ *см*. Тогда из формулы (27) получим, что

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \gamma\gamma_1^2 \mathbf{e}_3^0 = \gamma\gamma_1 \mathbf{k},$$

и если выберем $\gamma = \gamma_1^{-1} = \text{см}^{-1}$, то придём к классическому соотношению $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{k}$, т. е. результатом векторного умножения будет вектор с линейной мерой. Если же определим γ как скаляр 1, то получим $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = 1\ \text{см}\ \mathbf{k}$, т. е. результатом будет вектор с квадратичной мерой, что соответствует определению *1*-вектора и может быть использовано для толкования смешанного произведения как формулы объёма параллелепипеда. Естественно, для различения этих случаев нужно иметь различные их обозначения (например, можно предложить обозначения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$).

По-видимому, могут встретиться и случаи, когда компоненты вектора имеют разные размерности, но этот экзотический вариант уже выходит за рамки нашего рассмотрения.

§ 10. Подводим итоги

Мы показали, что векторное произведение $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ двух векторов, когда под ним понимается вектор с известными свойствами, отличается от того его понимания, которое используется для представления смешанного произведения $(\mathbf{abc})$ трёх векторов как скалярного произведения вектора $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ с вектором $\mathbf{c}$. А именно, в первом случае модуль векторного произведения имеет размерность единицы длины, а во втором случае считается, что его модуль имеет размерность квадрата длины. Далее, мы показали, что в мировой научной литературе на самом деле уже есть работа, где объясняется, как правильно толковать векторное произведение, которое нужно для представления смешанного произведения как результата скалярного умножения этого векторного произведения на третий вектор. Поэтому мы предлагаем как-то различать эти понятия векторного произведения, введя для них соответственно разные названия, например, векторные произведения 1-го и 2-го рода, и вообще обратить внимание на случаи векторного произведения векторов разных размерностей.

Мы представили только один вариант изложения темы о векторном произведении. Несомненно, могут быть и другие варианты (мы даже знаем, что они есть) как изложения этой темы, так и принципиально других толкований векторного произведения с привлечением других понятий и объектов, таких как сопряжённые пространства, дуальные базисы, внешнее умножение, тензоры и т. д. Тут большой простор как для математически содержательного, так и для методического творчества. Основное, что мы хотели донести до читателя, это существование проблемы, которую мы и обсудили.

Благодарности

Мне приятно иметь возможность выразить благодарность моим коллегам В. А. Зоричу и А. И. Штерну за их живой и конструктивный интерес к теме статьи и студентам К. Гордееву, А. Мусаевой и А. Шабакаевой за внимательное и одобрительное прочтение статьи с указанием обнаруженных ошибок набора.

Список литературы

[1] *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.

[2] *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.; Ижевск: Ижевский Институт компьютерных исследований, 2012.

[3] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю. М. Смирнова. М.: МЦНМО, 2016

[4] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.

[5] *Hsiung Ch.-Ch.* A First Course in Differential Geometry. New York: John Wiley & Sones, 1981.

Иджад Хакович Сабитов, мехмат МГУ
isabitov@mail.ru