Решения задач из прошлых выпусков

9.7. Условие. Обозначим через P множество натуральных чисел вида n^k, где $n>1, k>1$. Найти сумму обратных чисел из P, уменьшенных на единицу, т. е.

$$\sum_{x\in P}\frac{1}{x-1}.$$

(*Л. Эйлер*)

Ответ: 1.

Решение. Сначала заметим, что этот ряд сходится, так как

$$\begin{aligned}\sum_{x\in P}\frac{1}{x-1} &< 2\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4^k}+\ldots\right)=\\ &=2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)+\left(\left(\frac{1}{2^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\ldots\right)<\\ &<4\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)<4\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\right)=\\ &=4\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\right)=4.\end{aligned}$$

Для натурального $n>1$ обозначим через $a(n)$ наименьшее натуральное, целая степень которого равна n. Например, $a(6)=6$ и $a(100)=10$. Нетрудно видеть, что $a(n)\notin P$ и если n — степень натурального числа m, не принадлежащего P, то $m=a(n)$.

Обозначим

$$f(z):=\frac{1}{2-1}z^2+\frac{1}{3-1}z^3+\frac{1}{5-1}z^5+\ldots,$$

где суммирование происходит по всем натуральным $k>1$, не принадлежащим P. Этот ряд при $|z|<1$ сходится.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}1+f(z)&=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)z^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots\right)z^3+\ldots=\\ &=1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^2+\ldots+\frac{1}{k}z^{a(k)}+\ldots\end{aligned}$$

Обозначим
$$g(z) := z^2 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{3}z^4 + \frac{1}{4}z^5 + \ldots \quad \text{и} \quad h(z) := g(z) - f(z),$$
т. е.
$$h(z) = \sum_{k\in P} \frac{1}{k-1} z^k.$$

Легко видеть, что все эти ряды сходятся при $|z| < 1$, а кроме того,
$$h(1) = \sum_{k\in P} \frac{1}{k-1} = \lim_{z\to 1-0} h(z).$$
Имеем
$$1 - h(z) = 1 + f(z) - g(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(z^{a(k)} - z^{k+1}). \qquad (*)$$
Покажем, что при $z \to 1-0$ сумма этого ряда стремится к нулю. Положим
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(z^{a(k)} - z^{k+1}) = S_1(z) + S_2(z),$$
где S_1 — сумма по всем $k \in P$, а S_2 — сумма по остальным k.

Сначала разберёмся с $S_1(z)$. Так как ряд
$$\sum_{k\in P} \frac{1}{k-1} < h(1) < \infty,$$
ряды $\sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{a(k)}$ и $\sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{k+1}$ равномерно сходятся на $z \in [0; 1]$. Отсюда
$$\lim_{z\to 1-0} \sum_{k\in P} \frac{1}{k}(z^{a(k)} - z^{k+1}) = \lim_{z\to 1-0} \sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{a(k)} - \lim_{z\to 1-0} \sum_{k\in P} \frac{1}{k} z^{k+1} = \sum_{k\in P} \frac{1}{k} - \sum_{k\in P} \frac{1}{k} = 0.$$

Теперь оценим $S_2(z)$:
$$S_2(z) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}(z^k - z^{k+1}) = \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} z^k (1-z) + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k (1-z),$$
где индекс K, зависящий от z, мы уточним позднее. Имеем
$$\sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} z^k (1-z) < (1-z) \sum_{k=2}^{K} \frac{1}{k} <$$
$$< (1-z)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\Big) < 2(1-z)\log_2(K),$$
$$\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k (1-z) < \frac{1-z}{K}(z^{K+1} + z^{K+2} + \ldots) = \frac{z^{K+1}}{K} < \frac{1}{K}.$$

При $z \to 1-0$ можно подобрать $K = K(z)$ так, чтобы $K(z)$ стремилось к бесконечности, а $(1-z)\log_2 K$ к нулю. Таким образом, $\lim_{z\to 1-0} S_2(z) = 0$.

Итак, предел суммы $(*)$ равен 0, и потому

$$\sum_{x\in P} \frac{1}{x-1} = \lim_{z\to 1-0} h(z) = 1. \qquad (\textit{И. В. Митрофанов})$$

10.12. Условие. Квадрат разбит на треугольники равной площади. Докажите, что их число чётно. (*Фольклор*)

Решение. Эта задача появилась в «American Mathematical Monthly» в 1965 г. (предложена Фредом Ричманом) и решена Паулем Монски в 1970 г. (*Monsky P.* On Dividing a Square into Triangles // Amer. Math. Monthly. 1970. V. 77, № 2. P. 161–164).

Начнём с неформального пояснения идеи. В обычном (вещественном) мире точки A, B, C коллинеарны, если векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ равно нулю. Оно равно площади соответствующего параллелограмма. То же явление наблюдается и в мире, связанном с остатками по модулю 2. В данном случае получается, что тройки вершин треугольников коллинеарны по модулю 2, что противоречит неколлинеарности вершин единичного квадрата. Для установления связи между вещественным миром и миром остатков по модулю 2 нам потребуется 2-адическая норма[1)].

Проведём подробное доказательство. Пусть единичный квадрат разбит на $2n+1$ треугольник равной площади, и пусть вершины квадрата A, B, C, D имеют координаты $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ соответственно. Рассмотрим сначала разбиение на треугольники, удовлетворяющее следующим двум условиям.

1. Разбиение является *триангуляцией*, т. е. любые два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону (иными словами, на сторонах треугольника разбиения нет вершин, кроме вершин данного треугольника.)
2. Все вершины треугольников имеют рациональные координаты.

Мы раскрасим все вершины треугольников в три цвета в зависимости от степеней вхождения двойки в их координаты, а затем воспользуемся известным фактом из комбинаторной топологии.

Если p — простое число, то *p-адической нормой* на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ называется функция $|\cdot|_p$, определённая следующим

[1)] Взаимосвязь между вещественным миром и мирами остатков затронута в статье: *Ковальджи А. К.*, *Канель-Белов А. Я.* Занятия по математике — листки и диалог // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 206–233.

образом. Если рациональное число r представляется в виде $r = p^a \cdot k/m$, где a целое, а числа k и m взаимно просты с p, то положим $|r|_p := p^{-a}$. Также положим $|0|_p := 0$. Несложно проверить, что для любых рациональных x и y выполняется $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$ и $|x+y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$. Из второго свойства следует, что если $|x|_p > |y|_p$, то $|x+y|_p = |x|_p$, этим мы будем пользоваться.

Нам потребуется 2-адическая норма $|\cdot|_2$. Опишем с её помощью, как красить вершины треугольников. Точка с координатами (x, y) красится в

- *белый цвет*, если $|x|_2, |y|_2 < 1$;
- *синий цвет*, если $|x|_2 \geqslant |y_2|$ и $|x|_2 \geqslant 1$;
- *красный цвет*, если $|y|_2 > |x_2|$ и $|y|_2 \geqslant 1$.

Отметим, что вершина A — белая, B — красная, вершины C и D — синие. Кроме того, на отрезке $[AD]$ нет красных точек, на отрезках $[BC]$ и $[CD]$ нет белых, на отрезке $[AB]$ нет синих.

Воспользуемся классической *леммой Шпернера* в следующей формулировке.

Пусть даны многоугольник и его триангуляция, причём все вершины триангуляции покрашены в один из трёх цветов — белый, синий или красный. Тогда совпадают чётности двух чисел: количества треугольников с вершинами трёх цветов и количества отрезков на границе многоугольника, у которых одна вершина синяя, а другая — белая.

В нашей ситуации бело-синие отрезки есть только на отрезке $[AD]$ и их там нечётное количество. Поэтому найдётся хотя бы один треугольник PQR с разноцветными вершинами. Пусть вершина P — белая, Q — синяя, R — красная. Для векторного произведения $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ имеем

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \det\begin{pmatrix} x_Q - x_P & x_R - x_P \\ y_Q - y_P & y_R - y_P \end{pmatrix} = (x_Q - x_P)(y_R - y_P) - (y_Q - y_P)(x_R - x_P).$$

При этом

$$|x_Q - x_P|_2 \geqslant 1, \quad |y_R - y_P|_2 \geqslant 1,$$

так что

$$|(x_Q - x_P)(y_R - y_P)|_2 \geqslant 1.$$

Кроме того,

$$|x_Q - x_P|_2 = |x_Q|_2 \geqslant |y_Q|_2 = |y_Q - y_P|_2$$

и

$$|y_R - y_P|_2 = |y_R|_2 > |x_R|_2 = |x_R - x_P|_2,$$

поэтому

$$|(x_Q - x_P)(y_R - y_P)|_2 > |(y_Q - y_P)(x_R - x_P)|_2.$$

Следовательно,

$$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|_2=|(x_Q-x_P)(y_R-y_P)-(y_Q-y_P)(x_R-x_P)|_2=|(x_Q-x_P)(y_R-y_P)|_2\geqslant 1.$$

Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{PR}$, равна $2/(2n+1)$, т. е. удвоенной площади треугольника. С другой стороны, она равна $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$, так что $|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|_2<1$, что противоречит предыдущему.

Итак, мы решили задачу для триангуляций с рациональными координатами вершин треугольников разбиения. Рассмотрим теперь триангуляцию с произвольными координатами вершин, не обязательно рациональными.

Напомним, что (комплексное) *алгебраическое число* — это число, являющееся корнем какого-то ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

Лемма. *Пусть дана система полиномиальных уравнений с алгебраическими коэффициентами, т. е. набор равенств вида $p_i(z_1,\ldots,z_s)=0$, где p_i — многочлены от переменных $z_1,\ldots,z_s$, коэффициенты которых суть алгебраические числа. Если эта система имеет решение в комплексных числах, то она имеет и решение в алгебраических числах.*

Для доказательства этой леммы нам потребуется

Ослабленная теорема Гильберта о нулях. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле, и пусть $p_1,\ldots,p_k$ — набор полиномов с коэффициентами из K от переменных $z_1,\ldots,z_s$. Тогда следующие два условия эквивалентны.*

1. *Не существует набора $z_1,\ldots,z_s$, обращающего в нуль все многочлены p_i.*
2. *Существует такой набор многочленов $q_1,\ldots,q_k$ с коэффициентами из K, что $p_1q_1+\ldots+p_kq_k=1$.*

Из ослабленной теоремы Гильберта сразу следует наша лемма. Действительно, применим теорему к полю комплексных алгебраических чисел. Если у системы нет алгебраического решения, то можно найти такие многочлены $q_1,\ldots,q_k$ с алгебраическими коэффициентами, чтобы выполнялось условие 2. Но тогда у многочленов $p_1,\ldots,p_k$ не может быть и общего комплексного корня — противоречие.

Вернёмся к нашей триангуляции. Площадь каждого треугольника разбиения — многочлен с рациональными коэффициентами степени не выше 2 от координат вершин триангуляции. Запишем систему, состоящую из всех полученных уравнений. Согласно доказанному, у неё есть решение в алгебраических числах. Заметим, что эти числа не обязаны быть координатами вершин какой-то триангуляции квадрата, в частности потому, что могут не быть действительными. Но так как они удовлетворяют той же системе уравнений, площади треугольников выражаются через них так же, как через координаты вершин.

Неархимедово нормирование — это функция $\|\cdot\|$ на элементах поля или кольца, принимающая положительные значения вне нуля (и нуль в нуле) и такая, что $\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$ и $\|x+y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$. Известно, что *на поле алгебраических чисел существует неархимедово нормирование, являющееся продолжением p-адической нормы* (см. *Ленг С.* «Алгебра», М.: Мир, 1968, с. 339–340). Пользуясь этим, определим 2-адические нормы всех найденных чисел, а затем раскрасим вершины триангуляции в три цвета, действуя так же, как в случае рациональных координат. Таким же образом с помощью леммы Шпернера найдём разноцветный треугольник PQR и снова получим противоречие, рассматривая 2-адические нормы чисел. Поскольку наши алгебраические числа не обязательно являются действительными, несколько теряется геометрический смысл векторного произведения как ориентированной площади параллелограмма. Но доказательство всё равно проходит слово в слово, так как мы работаем именно с алгебраической координатной записью векторного произведения (с многочленом от координат вершин триангуляции).

Наконец, покажем, как модифицировать доказательство, если разбиение на треугольники не является триангуляцией (на сторонах треугольников могут быть вершины других треугольников). Тогда можно «вставить» вырожденные треугольники нулевой площади между треугольниками исходного разбиения, так что получится триангуляция. К системе полиномиальных уравнений добавим условия, что площади новых треугольников равны 0, и будем действовать как раньше. Так как $|0|_2 < 1$, новые треугольники тоже не могут оказаться разноцветными.

(*А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов*)

14.1. Условие. Дано бесконечное периодическое слово W минимального периода n и два его одинаковых подслова длины $n-1$. Докажите, что их начальные буквы находятся на расстоянии, кратном n. (*А. Я. Белов*)

Решение. Заметим, что количество букв каждого сорта в любом периоде одинаково. Следовательно, если мы знаем $n-1$ букву, то оставшаяся буква восстанавливается однозначно. Поэтому участок длины $n-1$ однозначно определяет, вместе с каждой последующей буквой, и весь оставшийся «хвост» слова W. Аналогичные рассуждения справедливы и для начального куска. Следовательно, сдвиг, переводящий подслово в равное ему, продолжается до сдвига всего слова W. Поскольку n — минимальный период слова W, величина этого сдвига кратна n.

(*И. В. Митрофанов*)

Комментарий. Известно, что несовпадающие периодические последовательности периодов m, n соответственно не могут иметь общий кусок длины $m+n-1$. Данный факт имеет большое значение в алгебре (см., например, *Адян С. И.* «Проблема Бёрнсайда и тождества в группах», М.: Наука, 1975; *Ольшанский А. Ю.* «Геометрия определяющих соотношений в группах», М.: Наука, 1989; *Белов А. Я.*, *Борисенко В. В.*, *Латышев В. Н.* «Мономиальные алгебры» (Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и её приложения. Тематический обзор, 2002, вып. 26, с. 35–214)). Соответствующие задачи (автор А. Я. Канель-Белов) были предложены на 16-м Турнире городов: осень 1994 г., основной вариант, задача 5 для 10–11 кл. и задача 5 для 8–9 кл. (*А. Я. Белов*)

14.4. Условие. Докажите, что при любых натуральных $n \geqslant l$ выполняется тождество:

$$\frac{1}{l!}\sum_{\sum_{i=1}^{l} k_i=n;\, k_i\geqslant 1}\frac{1}{k_1\cdot\ldots\cdot k_l}=\sum_{\sum_{i=1}^{l} k_i=n;\, k_i\geqslant 1}\frac{1}{k_1(k_1+k_2)\cdot\ldots\cdot(k_1+\ldots+k_l)}.$$

(*И. Никокошев*)

Решение. Обозначим сумму в левой части $f(n,l)$, а сумму в правой части $g(n,l)$. Можно считать, что $f(n,l)=g(n,l)=0$ при $n<l$. Очевидно, при любом n верно, что $f(n,1)=g(n,1)=1/n$. Тождественное совпадение f и g будет доказано, если мы покажем, что для f и g выполняются одинаковые рекуррентные соотношения:

$$f(n,l)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}f(i,l-1) \quad \text{и} \quad g(n,l)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}g(i,l-1).$$

Рассмотрим бесконечный степенной ряд

$$\frac{1}{l!}\Bigl(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\Bigr)^l.$$

Непосредственно проверяется, что при z^n после раскрытия скобок и приведения подобных будет стоять в точности $f(n,l)$. После дифференцирования по z получим

$$\frac{1}{(l-1)!}\Bigl(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\Bigr)^{l-1}(1+z+z^2+\ldots).$$

С одной стороны, коэффициент при z^{n-1} равен $nf(n,l)$. С другой стороны, так как в выражении

$$\frac{1}{(l-1)!}\Bigl(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots\Bigr)^{l-1}$$

коэффициент при z^k равен $f(k, l-1)$, имеем

$$nf(n,l) = f(1,l-1) + \ldots + f(n-1,l-1).$$

Чтобы получить соотношение на g, заметим, что в определении $g(n,l)$ сумма всех слагаемых с фиксированным значением k_l равна $\frac{1}{n}g(n-k_l, l-1)$. Суммируя по k_l от 1 до $n-1$, получаем нужную формулу.

(*И. В. Митрофанов*)

20.4′ (выпуск 26, с. 272). Условие. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных k, что при всех натуральных n число $k \cdot 2^n + 1$ — составное. (*С. В. Конягин*)

Решение. Эйлер заметил, что $2^{2^5} + 1$ делится на 641: $2^{2^5} + 1 = 641s$, где s взаимно просто с 641. Возьмём такое $k > 1$, что k сравнимо с 1 по модулям 3, 5, 17, 257, $2^{2^4} + 1, s$ и кроме того $k \equiv -1 \pmod{641}$. В силу китайской теоремы об остатках существует бесконечно много таких k.

Тогда числа вида $k \cdot 2^n + 1$ при $n = 1, 2, 4, 8, 16$ делятся на $2^n + 1$ и при этом $k \cdot 2^n + 1 > 2^n + 1$, так что все эти числа составные. При $n = 32$ величина $k \cdot 2^n + 1$ делится на s и больше s. Далее, при $n > 5$ числа вида $k \cdot 2^{2^n} + 1$ делятся на 641. Задача решена.

Комментарий. Гаусс установил, что если число p простое, то правильный p-угольник строится циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда $p = 2^{2^k} + 1$. При $k \leqslant 4$ все числа вида $2^{2^k} + 1$ простые, примеры простых чисел такого вида при $k > 4$ неизвестны.

(*А. Я. Белов*)

21.5. Условие. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что при всяком целом x найдётся такое целое y, что $P(x) = Q(y)$. Докажите, что найдётся такой многочлен R, что $P(x) = Q(R(x))$ при всех x. Что будет, если условие задачи ослабить, т. е. потребовать, чтобы указанное y нашлось для бесконечно многих целых x? (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. Нам потребуется

Предложение 1. *Пусть P, Q — многочлены и $P(x) = Q(y)$. Тогда x разлагается в* ряд Пюизо, *у которого «хвост» (т. е. члены с отрицательными степенями y) сходится в окрестности бесконечности*:

$$x = a_m y^{m/n} + \ldots + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{-k/n}. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k, \quad Q(y) = \sum_{k=0}^{l} d_k y^k.$$

Перепишем равенство $P(x) = Q(y)$ в в виде

$$x \cdot \sqrt[m]{\sum_{k=0}^{m} c_{m-k} x^{-k}} = y^{n/m} \cdot \sqrt[n]{\sum_{l=0}^{n} d_{m-l} y^{-l}}.$$

Сделав замену $y = t^m$ и разделив обе части на подходящие константы, получим равенство вида

$$x \cdot \sqrt[m]{1 + c'_1 x^{-1} + \ldots + c'_m x^{-m}} = \lambda \cdot t^n \cdot \sqrt[n]{1 + d'_1 t^{-m} + \ldots + d'_n t^{-l\cdot m}}.$$

Асимптотическое разложение в окрестности бесконечности сведём к разложению в окрестности нуля, сделав замену $u = x^{-1}$, $v = t^{-1}$. Имеем

$$\frac{u}{\sqrt[m]{1 + c'_1 u + \ldots + c'_m u^m}} = \lambda^{-1} \cdot \frac{v^n}{\sqrt[n]{1 + d'_1 v^m + \ldots + d'_n v^{l\cdot m}}}.$$

Иначе говоря, $F(u) = G(v)$, где F, G — аналитические функции в окрестности нуля, $F(0) = G(0) = 0$, $F'(0) = 1 \neq 0$. Тогда $u = H(v) := F^{(-1)} \circ G(v)$ в окрестности нуля также является аналитической функцией по теореме об обратной функции, причём $H(0) = 0$. Иными словами, для некоторых h_k

$$H(v) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k v^k,$$

причём ряд сходится в окрестности нуля. Пусть $h_1 = \ldots = h_{r-1} = 0$, $h_r \neq 0$ $(r \geqslant 1)$. Подставляя $x = u^{-1}$, $y = v^{-n}$, имеем для некоторых $h'_1, h'_2, \ldots$:

$$x = \frac{y^{r/n}}{1 - (h'_1 y^{-1/n} + h'_2 y^{-2/n} + \ldots +)}.$$

Воспользовавшись при всех достаточно больших x разложением

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^n,$$

сходящимся в окрестности нуля, подставляя $t = h'_1 y^{-1/n} + h'_2 y^{-2/n} + \ldots +$ и раскрывая скобки, получаем равенство (1). Предложение доказано. □

Рассмотрим *оператор конечной разности*

$$f \to \Delta(f)\colon \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Нам понадобится

Лемма 2. (а) *Пусть $k > s$, где k натуральное, s положительное вещественное, $k > s$. Тогда $\Delta^{(k)}(x^s) \to 0$ при $x \to \infty$.*

(б) $\Delta^{(k)}(f) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда f — многочлен степени меньше k.*

(в) *Пусть $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда $\Delta^{(k)}(f(x)) \to 0$ при $x \to \infty$.*

Предложение 3. *Линейная комбинация алгебраических функций есть снова алгебраическая функция. Алгебраическая функция, имеющая бесконечно много нулей, — тождественный нуль.* □

Завершим *решение задачи* 21.5. Пусть $P(x)=Q(y)$, т. е. $y=Q^{(-1)}\circ P(x)$. Тогда

$$y = a_m x^{m/n} + \ldots + a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{-k/n}.$$

Применим лемму 2(в) к «хвосту» под знаком суммы и лемму 2а к остальным слагаемым. Для достаточно больших k имеем $\Delta^{(k)}(y) \to 0$ при $x \to \infty$. Из условия задачи следует, что если x — целое, то $y = L(x) := Q^{(-1)} \circ P(x)$ тоже целое, поэтому $\Delta^{(k)}(L)(x) = 0$ при всех достаточно больших целых x и k. Из предложения 3 получаем $\Delta^{(k)}(L)(x) \equiv 0$ при всех достаточно больших вещественных x и достаточно больших k. Значит, $L(x)$ — многочлен по лемме 2б. Теперь достаточно положить $R = L = Q^{(-1)} \circ P$.

Остаётся показать, что если не требовать целочисленности y *при всех* x, то утверждение задачи перестаёт быть верным. Достаточно заметить, что *уравнение Пелля*, например $2x^2 + 1 = y^2$, имеет бесконечно много целочисленных решений, но при этом $\sqrt{2x^2+1}$ не является многочленом. Задача решена.

Упражнение. Докажите, что если многочлены P и Q принимают целые значения в одних и тех же точках, то либо их сумма, либо их разность есть величина постоянная.

Комментарий. Идея *разностного дифференцирования* активно используется при решении олимпиадных задач. Приведём их подборку.

1. Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы пяти кубов целых чисел. Обобщите это утверждение для 2021-х степеней.
2. Длина n-го прыжка кузнечика равна n^{2021}, а вот направление он может выбирать произвольно. Докажите, что он может посетить все целые точки.
3. Докажите, что отрезок можно раскрасить в красный и синий цвета так, что для любого многочлена степени 2021 интеграл по красной области равен интегралу по синей области.
4. Докажите, что $\sum_{i=1}^{n} x^k$ есть многочлен $(k+1)$-й степени от n.
5. Докажите лемму 2.
6. Если многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ принимает рациональные значения при всех целых значениях переменных, то все его коэффициенты рациональны.

7. Если многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ принимает целые значения при всех целых значениях переменных, то он является линейной комбинацией многочленов вида $\prod_{i=1}^{n} \binom{x_i}{k_i}$.
8. Докажите, что

$$\Delta^{(k)}(f)(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+k-i).$$

(*А. Я. Канель-Белов*)

22.5$''$(а) (выпуск 27, с. 245). Условие. Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий инъекцию множества точек с целыми координатами в множество целых чисел? (*С. Б. Гашков*)

Ответ: существует.

Решение. Возьмём симплекс с целочисленными вершинами $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$, $j = 1, \dots, n+1$, и выберем натуральные числа $n_1 \gg n_2 \gg \dots \gg n_{n+1}$. Нетрудно проверить, что многочлен

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_{ij})^2 \right)^{n_j}$$

обладает нужным свойством (поскольку две различные точки находятся на разном расстоянии хотя бы от одной из вершин симплекса).

Комментарий. Итак, инъекция осуществлена, осуществить сюръекцию несложно (проекция на первую координату), а вот биекция проблематична — см. выпуск 26, с. 259–262, 282–284. (*А. Я. Канель-Белов*)

23.3. Условие. Может ли быть, что три человека, находящиеся на расстоянии 0, 1 и 2 от начала дороги, пройдут, не обгоняя друг друга, до точек, находящихся на расстоянии 1000, 1001 и 1002 от начала дороги так, чтобы последний всё время видел первого, но ни в какой момент не видел второго (дорога идёт в одном направлении по горизонтали, но может подниматься и спускаться)? (*Н. Н. Константинов*)

Ответ: могут.

Решение. Пусть дорога имеет такой вид, как сплошная ломаная на схематическом рис. 1. Три человека вначале находятся в точках A, B, C, а в конце в точках A_1, B_1, C_1. Опишем их движение поэтапно.

1. Первый смещается в точку A'.
2. Третий смещается в точку C'.
3. Второй переходит в точку B_1.

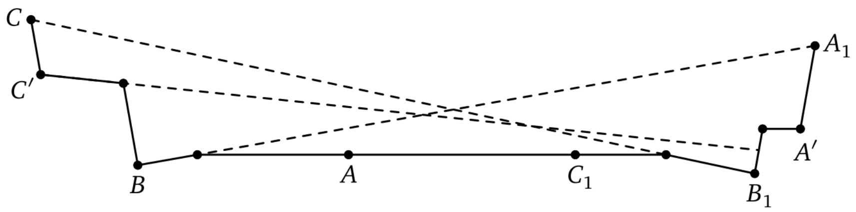

Рис. 1

4. Первый переходит в точку A_1.
5. Наконец, третий переходит в точку C_1.

В любой момент первый и третий видят друг друга, но не видят второго.

(*Н. Н. Константинов. Записал А. Я. Канель-Белов на лекции при отборе на Всесоюзную математическую олимпиаду*)

25.1$'$ (выпуск 27, с. 247–248). Условие. Профессор доказывает равносильность n утверждений. Он задаёт своим аспирантам темы диссертационной работы вида: *Докажите, что из утверждения с номером k следует утверждение с номером l.* Нельзя защищать диссертацию, являющуюся прямым логическим следствием из защищённых ранее. Какое максимальное число аспирантов может защитить профессор? (*Фольклор*)

Ответ: $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$.

Решение. Докажем, что большее количество диссертаций защитить нельзя. Прежде всего заметим, что если имеется не больше n диссертаций, в которых выводилось утверждение A_i или, наоборот, из A_i выводилось некоторое другое утверждение, то, выбросив все такие защиты, получим аналогичную ситуацию с меньшим числом утверждений, так что дело завершает индукция. Итак, пусть для любого A_i количество связанных с ним диссертаций не меньше $n+1$.

Рассмотрим граф с вершинами $A_1, \ldots, A_n$; ребро между A_i и A_j проводится, если были защищены обе диссертации, которые их связывают. Тогда из каждой вершины A_i выходит не менее двух рёбер (иначе количество диссертаций, в которых фигурировало утверждение A_i, не больше n). Следовательно, имеется цикл некоторой длины k. Но это невозможно: ребру можно сопоставить пару противоположных стрелок (защит диссертаций), и среди $2k$ стрелок, отвечающих рёбрам цикла, найдётся последняя по времени. Тогда соответствующая диссертация является следствием из ранее защищённых. Получили противоречие.

(*А. Я. Канель-Белов*)

27.2. Условие. Первоначально во всех целых точках числовой прямой расставлены натуральные числа. На первом шаге между каждыми двумя соседними числами записывается их среднее арифметическое, а исходные числа стираются. На втором шаге с записанными числами проделывается та же операция, и так далее. Оказалось, что все числа, которые мы получаем на каждом шаге, натуральные. Можно ли утверждать, что на некотором шаге все числа равны между собой? (*Фольклор*)

Ответ: нет, это утверждать нельзя.

Решение. Поместим в точку с координатой n число $4(n+c)^2+d$, где c и d — натуральные числа. Тогда между числами $4(n+c)^2+d$ и $4(n+c+1)^2+d$ будет на следующем шаге стоять число

$$\frac{4(n+c)^2+d+4(n+c+1)^2+d}{2}=4\Big(n+c+\frac{1}{2}\Big)^2+d+1.$$

Отметим, что к величине c добавилась константа $1/2$, а к величине d прибавилась константа 1.

Если же провести k таких операций, то произойдёт сдвиг на $k/2$ и добавится константа k. Возникнет расположение чисел $4(n+c+k/2)^2+d+k$. При $d=0$ все эти числа будут натуральными. Задача решена.

27.3. Условие. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение. а) Докажем несколько более сильное утверждение: некоторую фигуру можно выдвинуть, если разрешено двигать фигуры только в одном направлении — назовём его направлением вертикально вверх. Будем считать, что фигура A *накрывает* фигуру B, если фигуру B нельзя параллельно перенести вертикально вверх, не задев фигуры A. Нетрудно убедиться, что тогда фигура B аналогичному выдвижению вверх фигуры A не мешает, в силу выпуклости.

Допустим, ни одну фигуру выдвинуть вертикально вверх нельзя. Тогда для каждой фигуры существует накрывающая. Поскольку фигур конечное число, найдётся такой цикл из фигур, что каждая из них накрывается следующей. Из всех таких циклов возьмём тот, в котором наименьшее число фигур — не меньше трёх, ввиду сказанного выше. Рассмотрим три фигуры из этого цикла: A накрывает B, B накрывает C. Если бы A накрывала C, то цикл можно было бы сократить, что невозможно в силу его минимальности. Значит, в нашем цикле каждая фигура накрывается только следующей за ней фигурой.

Рассмотрим теперь проекции фигур цикла на проведённую над всей конструкцией горизонтальную прямую. Получится система отрезков, каждый из которых имеет общие точки только с двумя отрезками, отвечающими предыдущей и следующей фигурам цикла. Это возможно лишь в случае трёх отрезков. Но тогда некоторая точка покрыта всеми тремя отрезками, т. е. проходящая через неё вертикальная прямая пересекает все три фигуры. Рассмотрим самую верхнюю точку пересечения прямой с этими фигурами. Она принадлежит отрезку, содержащемуся в одной из фигур, и каждая из двух других при движении вверх пересечёт этот отрезок, т. е. по определению она накрыта данной фигурой. Значит, эти три фигуры не образуют цикл. Получили противоречие.

б) Проведём плоскость вне системы шаров. Выберем шар, центр которого ближе всего к плоскости. Ясно, что его можно выдвинуть по направлению к этой плоскости. Это решение непосредственно переносится на случай многомерного пространства.

(*А. Я. Канель-Белов*, *И. А. Иванов-Погодаев*)