Задачник

(составитель А. Я. Канель-Белов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. *Индекс Хирша* исследователя — это максимальное такое n, что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору? (*А. Я. Канель-Белов*)

2. Известно, что числа $x_1, \ldots, x_N$ удовлетворяют неравенствам:
$$x_1 + x_2 \geqslant 1, \quad x_2 + x_3 \geqslant 2, \quad \ldots, \quad x_N + x_1 \geqslant N.$$
Найдите минимум суммы $S = x_1 + \ldots + x_N$, если а) $N = 2019$; б) $N = 2020$. (*Фольклор*)

3. а) Единичный квадрат разбит на квадратики. Может ли сумма длин сторон квадратиков, пересечённых главной диагональю, быть больше 100?

   б) Единичный квадрат разбит на квадратики в количестве не более 10^{12}. Может ли сумма длин сторон квадратиков, пересечённых главной диагональю, быть больше 100? (*А. Я. Канель-Белов*)

4. Даны такие симметрические матрицы $A_1, \ldots, A_k$ размера $n \times n$ с вещественными коэффициентами, что $\det\left(\sum_{i=1}^k A_i^2\right) = 0$. Докажите, что $\det\left(\sum_{i=1}^k A_i B_i\right) = 0$ для любых матриц $B_1, \ldots, B_k$ размера $n \times n$.

   (*П. Гурбанов*)

5. В треугольнике ABC рассматриваются две изогонально сопряжённые точки P и Q. Проведём через точки P и Q прямые, перпендикулярные биссектрисе угла BAC и пересекающие прямые AB и AC в точках B_P, C_P, B_Q, C_Q соответственно. Пусть также W — середина дуги BCA описанной окружности треугольника ABC. Прямые WP и WQ вторично пересекают описанную окружность в точках P_1 и Q_1. Докажите, что точки P_1 и Q_1 лежат на описанной окружности ω трапеции $B_P B_Q C_Q C_P$.

   (*П. В. Бибиков*)

6. а) Пусть $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — такие вещественные числа, что при любых целых x и y по крайней мере одно из чисел $a_1x+b_1y+c_1$, $a_2x+b_2y+c_2$ целое и чётное. Докажите, что по крайней мере в одной из троек коэффициентов a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 все числа целые. Что получится, если требовать только целочисленность значений одной из линейных форм? (*С. Л. Крупецкий*)

   б) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

   $$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

   рационально. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа рациональные?

   (*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

   в) Пусть a_{ij}, c_i; $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$ — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

   $$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

целое и делится на $n!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа целые?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

7. Докажите, что для всех достаточно больших n справедливо следующее утверждение. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Тогда количество целых чисел m, удовлетворяющих неравенству $|P(m)| < 2019$, не превосходит n. (*А. А. Колчев*)

8. Даны вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$. Для каждого $I \subset \{1, \ldots, n\}$ положим $s(I) = \sum_{i \in I} x_i$. Предположим, что количество значений $s(I)$ при всевозможных I не меньше $1{,}8^n$. Докажите, что количество таких подмножеств $I \subset \{1, \ldots, n\}$, что $s(I) = 2019$, меньше чем $1{,}7^n$.

(*Ф. В. Петров*)

9. Одновременно бросается несколько игральных кубиков. Кубики могут быть несимметричны, и они не обязательно одинаковы. Докажите, что случайная величина «*остаток от общей суммы очков по модулю* 11» не распределена равномерно на числах от 0 до 11.

(*И. В. Митрофанов*)

10. Докажите, что если функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(0; 2\pi)$, то для любого натурального n выполняется неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \geqslant 0.$$

(*Г. Х. Харди — В. В. Рогозинский, предложил С. Н. Асхабов*)

11. Числа $m_1, \ldots, m_k$ свободны от n-х степеней (т. е. не делятся на n-ю степень натурального числа, большего 1). Докажите, что $\sqrt[n]{m_1}, \ldots, \sqrt[n]{m_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Вначале рассмотрите случай $n = 2$.

(*Фольклор*)

12. Докажите, что уравнение $\operatorname{tg}(x) - x = a$ не имеет решений в элементарных функциях. (*А. Я. Канель-Белов*)

Поправка к задаче 17.6

В условии задачи 17.6 (выпуск 17, с. 196) пропущено слово «ненулевые». Приводим правильное условие:

Задача 17.6. Если целые m и n взаимно просты, а числа $x^n + x^{-n}$, $x^m + x^{-m}$ — ненулевые целые, то $x + 1/x$ — тоже целое число ($x \in \mathbb{C}$).

Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и *естественность* задачи. Оно важно в том числе и поэтому. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

Публикуем очередные дополнения к задачам.

В выпуске 1 (с. 193) была опубликована

Задача 1.2 (конец числа). Доказать, что существует бесконечно много таких N, что 2^N оканчивается на N.

Решение В. М. Тихомирова опубликовано в выпуске 5, с. 218. Развитием этой задачи служит (см. выпуск 22, с. 234)

Задача 1.2$'$. *Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на* 36. *Любые крайние справа $k > 1$ цифр образуют такое число N_k, что 2^{N_k} оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична.* (*А. Я. Канель-Белов*)

В связи с этим возникает также

Задача 1.2$''$. *Последовательность цифр бесконечна влево, а справа оканчивается на* 76. *Любые крайние справа k цифр образуют такое число N_k, что N_k^2 оканчивается на N_k. Докажите, что эта последовательность непериодична.* (*Э. М. Джамбетов, А. Я. Канель-Белов*)

В выпуске 3 (с. 232) была опубликована

Задача 3.3. а) Существует ли непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая функциональному уравнению: $f(f(f(x))) = e^{-x}$?

б) Тот же вопрос для разрывной функции.

в) И для функции, имеющей конечное число точек разрыва.

(*К. Мальков*)

Решение А. Канеля см. выпуск 5, с. 227–228. Этой задаче и её обобщениям была посвящена статья В. Викола, А. Апостолова «Функциональные корни» (Математическое просвещение, сер. 3, вып. 9, М: МЦНМО, 2005, с. 194–202).

В этой связи возникает

Задача 3.3′ (на исследование). а) *Пусть* $f: B^3 \to B^3$ — *гомеоморфизм замкнутого единичного шара трёхмерного пространства, обладающий следующими свойствами*:

1) $f(f(x)) = x$ *для любого* $x \in B^3$;
2) $f(x) = x$ *для любой точки* $x \in S^2$, *где* S^2 — *единичная сфера* (*граница* B^3).

Следует ли отсюда, что f — *тождественное отображение*?

б) *Пусть* $f: B^n \to B^n$ — *автоморфизм замкнутого единичного шара пространства* $\mathbb{R}^n$, *обладающий свойствами*:

1) $f(f(x)) = x$ *для любого* $x \in B^n$;
2) f *оставляет неподвижными все точки сферы* S^{n-1} — *границы* B^n.

Следует ли отсюда, что f — *тождественное отображение*?

в) *Пусть* $f: X \to X$ — *инволюция n-мерного компактного связного многообразия с краем, оставляющая неподвижными все точки края* X. *Следует ли отсюда, что* f — *тождественное отображение*?

(*К. Э. Каибханов*)

В выпуске 15 (с. 232) опубликована

Задача 15.2. Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией, отличной от константы? (*Фольклор*)

Решение Г. Юшкова см. выпуск 23, с. 229. С этой задачей перекликается

Задача 15.2′. *Пусть* p, q *и* r — *три простых числа. Укажите три функции* f_1, f_2 *и* f_3 *с минимальными периодами* $1/p$, $1/q$ *и* $1/r$ *соответственно, для которых* $f_1 + f_2 = f_3$ *тождественно.* (*Р. М. Тригуб*)

В выпуске 19 (с. 258) была опубликована

Задача 19.5. Дана непрерывная поверхность без самопересечений. Известно, что на ней есть две точки, расстояние между которыми максимально для всех пар точек данной поверхности. Известно также, что любая её проекция есть круг. Докажите, что эта поверхность — сфера.

(*А. А. Шапиро*)

С ней связана

Задача 19.5′. *Докажите, что если все плоские сечения тела — круги, то это тело — шар.* (*Фольклор*)

В выпуске 23 (с. 215) опубликована

Задача 23.2. а) Монетка подбрасывается до тех пор, пока не выпадет две решки подряд. Уже сделано 9 бросков, и игра ещё не закончена. Какова вероятность, что десятый бросок окажется последним?

(*В. К. Ковальджи*)

Наш читатель, доктор физико-математических наук М. С. Тихов (ННГУ им. Н. И. Лобачевского) обратил внимание, что условие задачи может быть истолковано неоднозначно. В действительности исходы сделанных бросков не следует считать фиксированными. С другой стороны, автор задачи В. К. Ковальджи сформулировал более общий её вариант, который мы и предлагаем читателям:

Задача 23.2′а. *Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадут k решек подряд. Известно, что n бросков не хватило. Какова вероятность, что хватит $n+1$ броска?* (*В. К. Ковальджи*)

М. С. Тихов сообщил также, что он с соавторами опубликовал родственную задачу в статье: *Тихов М. С.*, *Галушкин В. А.*, *Плесков К. Г.* Система контроля технологических процессов на базе ЭВМ // Надежность и контроль качества, 1991, № 2, С. 27–30. Отличие в том, что в последней задаче допускается любое количество испытаний начиная с одного.

В выпуске 23 (с. 216) была также опубликована

Задача 23.4. Докажите, что середины сторон произвольного описанного четырёхугольника, отличного от квадрата, лежат на эллипсе, касающемся вписанной окружности в двух точках (возможно, мнимых).

(*А. А. Заславский*)

С ней связана опубликованная в выпуске 24 (с. 180)

Задача 23.4′. *Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности.* (*Dao Thanh Oai*)

Решения этих задач содержатся в заметке А. А. Заславского «О вписанно-описанных четырёхугольниках, моделях геометрии Лобачевского и „лемме Нилова“» в настоящем выпуске. К ним близка по теме

Задача 23.4″. *Эллипс вписан в выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ и касается сторон AB, CD, EF в их серединах K, L, M. Докажите, что вокруг шестиугольника можно описать кривую второго порядка.* (*М. Корнев*)

В 80-х – начале 90-х годов некоторые задачи ходили в фольклоре, среди школьников и студентов. Часть этого фольклора собрал А. А. Разборов. Характерная черта такого фольклора — слабое различение доступного и недоступного. Но даже недоступное допускает интересные продвижения. Как говорил А. С. Штерн, «математик, работая над крупной проблемой, откусывает от неё какие-то куски». Так что интересны не только полные решения (не всегда доступные), но и частичные продвижения. Ниже приведены образцы этого фольклора. Было бы интересно также опубликовать задачный фольклор иных поколений.

Ф1 Докажите, что в любую выпуклую фигуру площади 1 можно вписать треугольник площади а*) $3/8$; б**) $3\sqrt{3}/4\pi$.

Ф2 Каждый следующий член последовательности $\{a_n\}$ получается из предыдущего добавлением его суммы цифр $s(a_n)$. Докажите, что число чётных членов бесконечно.

Комментарий. Упрощением этого утверждения является задача:

Докажите, что существует бесконечно много таких n, что

$$S(a_n) < \log(\log(\ldots(a_n)\ldots)) \quad (2019\ \textit{раз}).$$

Ф3 Можно ли из числа 3 многократным применением операций $n \to n!$, $n \to [\sqrt{n}]$ получить любое натуральное число?

Ф4 Дан выпуклый k-угольник. В него вписывают n-угольники, где $n < k$. Пусть $T(n)$ — наибольшая площадь таких n-угольников. Докажите, что $T(n-1) + T(n+1) \leqslant 2T(n)$.

Ф5 Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — целые числа, сумма которых равна 1. Для каждого k пусть $T(k)$ — число положительных членов в последовательности

$$B_k,\ B_k + B_{k+1},\ \ldots,\ B_k + B - k + 1 + \ldots + B_n + B_1,\ \ldots,\ B_k + \ldots + B_{k-1}.$$

Докажите, что все $T(k)$ различны.

Ф6 Грабители страны Флатландия должны вывезти из банка чемодан золота. Прямоугольный коридор, по которому им предстоит выбираться, имеет ширину 1 метр. В каком чемодане (произвольной формы, но жёстком) им удастся вывезти наибольшее количество золота?

Ф7 Докажите, что неравенство $|2^x - 3^y| < 100$ имеет только конечное число решений (более сложная задача: докажите, что сумма цифр числа 11^n стремится к бесконечности при $n \to \infty$).

Замечание. Полезно начать размышления со следующей олимпиадной задачи средней сложности:

Найти все натуральные решения неравенства $|2^x - 3^y| \leqslant 6$.

Ф8 Квадрат разбит на k^2 равных квадратиков. Про некоторую ломаную известно, что она проходит через центры всех квадратиков (ломаная может самопересекаться). Каково минимальное число звеньев у этой ломаной?

Ф9 Найдите такие n треугольников, покрывающих единичную окружность, чтобы а) сумма их площадей была наименьшей; б) площадь их объединения была наименьшей.

Ф10 Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (перестройку): взяв пару треугольников ABD и BCD с общей стороной, заменить их на треугольники ABC и ACD. Оцените наименьшее число перестроек, за которое можно перевести любое разбиение в любое.

Ф11 Может ли число, записываемое одними единицами, быть квадратом целого? А кубом?

Ф12 Среди любых $p+1$ попарно различных натуральных чисел можно выбрать два таких числа, что отношение большего из них к их наибольшему общему делителю не меньше $p+1$. Докажите это.

Ф13 Дан такой выпуклый многоугольник M, что длины всех его сторон и диагоналей — целые числа. Дан также квадрат K. Докажите, что есть конечный набор многоугольников, конгруэнтных M, объединение которых содержит K, причём любая точка квадрата, не лежащая на стороне одного из многоугольников, покрыта одним и тем же количеством многоугольников из этого набора.

Ф14 На какое наименьшее число секторов можно разрезать круглый пирог так, чтобы его можно было поровну поделить и между p гостями, и между q гостями?

Ф15 Сколько существует деревьев, все вершины которых — данные k точек?

Ф16 По кругу расставлены числа, сумма которых положительна. Числа X, Y, Z, стоящие подряд, можно заменить на набор $X+Y$, $-Y$, $Y+Z$. Докажите, что при помощи таких операций можно получить единственный набор неотрицательных чисел.

Ф17 Даны n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару точек проведена прямая. Какое минимальное число попарно непараллельных прямых может быть среди них?

Комментарии к задачнику прошлых выпусков

В выпуске 24 (с. 181–184) опубликованы два решения задачи 1.10 (выпуск 1, с. 194), принадлежащие школьникам И. Украинцеву и А. Соколову, и упомянуто решение Д. Ю. Бураго, опубликованное в выпуске 4, с. 220. Отметим, что ещё два решения задачи 1.10 опубликованы Д. Ю. Бураго и В. В. Успенским в выпуске 5, с. 225–227.

Статья А. Ю. Эвнина «Задача о лягушке» (выпуск 24, с. 168–174) содержит решение задачи 23.1 (выпуск 23, с. 215; American Mathematical Contest, 2010).

В выпуске 24, с. 198–199, опубликовано решение задачи 23.7 (авторы задачи Б. И. Каневский, В. А. Сендеров), принадлежащее Л. Радзивиловскому. Фактически в этом решении доказано следующее (более общее) утверждение:

Известно, что все коэффициенты многочлена $P(x)$ равны 0 или 1. Кроме того, если $P(\xi) = 0$, то $P(1/\xi) = 0$ и $\deg(P) + 1$ — простое число. Тогда P не разлагается в произведение многочленов с неотрицательными коэффициентами.

На эту тему см. также: *Райков Д. А.* Об одном свойстве полиномов деления круга // Матем. сб. 1937. Т. 2(44), № 2. С. 379–382.