

Решения задач из прошлых выпусков

6.1' (выпуск 23, с. 217). Условие. Каждый вечер некоторые дамы дают приём (всего n дам), а остальные ходят на приём к тем дамам, которые в этот вечер принимают. Каково минимальное число вечеров, чтобы каждая дама попала к каждой? (А. Я. Канель-Белов)

Ответ: минимальное натуральное число m , для которого $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor} \geq n$.

Решение. Нам потребуется известная

Лемма Холла (теорема о свадьбах). Предположим, что для любого множества юношей количество девушек, знакомых с кем-либо из них, не меньше, чем количество юношей в этом множестве. Тогда всех юношей можно переженить на знакомых им девушках.

Для каждой дамы рассмотрим множество вечеров, когда она даёт приём. Легко видеть, что эти множества попарно несравнимы по включению. В самом деле, если множество вечеров приёма дамы A есть подмножество такого множества для дамы B , то дама B не смогла побывать в гостях у дамы A . И наоборот: если множества вечеров приёма несравнимы, то каждая дама может побывать у каждой. Поэтому ответ вытекает из следующего факта.

ТЕОРЕМА. Максимальное количество подмножеств m -элементного множества M , попарно несравнимых по включению, равно $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$.

Доказательство. Пример. Достаточно рассмотреть все подмножества мощности $\lfloor m/2 \rfloor$.

Оценка. Достаточно разбить подмножества множества M на $\binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor}$ таких цепочек подмножеств, что в каждой такой цепочке любые два элемента сравнимы по включению. Это обеспечивает следующая лемма. \square

ЛЕММА. а) Пусть $k < m/2$. Тогда к каждому k -элементному подмножеству можно добавить по одному элементу так, чтобы получились попарно различные $(k+1)$ -элементные подмножества.

б) Пусть $k > m/2$. Тогда из каждого k -элементного подмножества можно выбросить по одному элементу так, чтобы получились попарно различные $(k - 1)$ -элементные подмножества.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пункты а) и б) равносильны, ибо подмножества можно заменить их дополнениями.

Доказательство п. а). Назовём k -элементные подмножества «юношами», а $(k + 1)$ -элементные «девушками». Будем считать, что юноша знаком с девушкой, если соответствующее k -элементное множество содержится в соответствующем $(k + 1)$ -элементном.

Каждому k -элементному подмножеству отвечает $m - k$ возможных $(k + 1)$ -элементных подмножеств, получаемых присоединением одного элемента. С другой стороны, каждому $(k + 1)$ -элементному подмножеству отвечает $k + 1$ подмножество из k элементов, которые получаются выбрасыванием одного элемента. При $k \leq m/2$ выполняется неравенство $m - k \geq k + 1$, поэтому легко проверяется выполнение условия леммы Холла, см. выше. \square

(А. Я. Канель-Белов)

11.4''' (выпуск 24, с. 178, задача на исследование). Условие. В меру стыдливый Вася может соврать не более одного раза. Он задумал натуральное число, меньшее чем n . Петя хочет найти задуманное число или поймать Васю на вранье. Петя может задавать Васе вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Каково минимальное необходимое число вопросов? А если Пете надо только определить задуманное число?

РЕШЕНИЕ (частичное). Положим $m = n - 1$. Если Пете надо хотя бы поймать Васю на вранье, то ответ равен k (результат округления $\log_2(m)$ в большую сторону плюс 1). Чтобы этого достичь, Петя действует методом деления пополам, спрашивая про последовательные двоичные цифры задуманного Васей числа, а в конце задаёт контрольный вопрос о чётности суммы двоичных цифр этого числа. То, что за меньшее число вопросов нельзя добиться результата, доказывается стандартным образом. А именно, вначале имеется m возможностей для задуманного числа, каждый ответ делит возможности на две группы — одна отвечает ответу «да», вторая — «нет», одна из этих групп не меньше половины количества возможностей до соответствующего вопроса. Поэтому после $k - 1$ вопросов остаётся не менее одной возможности, т. е. Васю невозможно уличить.

Пусть теперь Пете обязательно надо выяснить задуманное число. Мы сможем решить задачу для $m = 2^{2^\ell - \ell - 1}$. Покажем, что тогда потребуется $k = 2^\ell - 1$ вопросов.

Рассмотрим двоичный куб $[0; 1]^k$. Вершина отвечает последовательности ответов, ей же отвечает (в предположении их правильности) задуманное число, или *кодовая вершина*. Любая вершина либо кодовая, либо отличается от ближайшей кодовой ровно одной координатой. Чтобы восстановить вершину при возможной ложности одного ответа, надо, чтобы две *кодовые вершины* (отвечающие отсутствию вранья) различались хотя бы *тремя координатами*. Задача свелась к такой: показать, что максимальное число m вершин k -мерного куба, попарно отличающихся хотя бы тремя координатами, при $k = 2^\ell - 1$ равно $2^{k-\ell}$.

Каждой кодовой вершине можно сопоставить *шар радиуса 1*, т. е. группу из $k + 1$ вершины — её саму и её соседей. Эти шары не пересекаются, поэтому $m \leq 2^k / (k + 1) = 2^{k-\ell}$.

Осталось показать, что можно найти $2^{k-\ell}$ кодовых вершин. Для этого достаточно разбить все вершины k -мерного куба на шары радиуса 1 по 2^ℓ вершин.

Рассмотрим $2^\ell - 1$ столбцов высоты ℓ — все возможные бинарные столбцы, но без нулевого столбца. Они составляют матрицу (a_{ij}) . Рассмотрим систему уравнений над \mathbb{Z}_2 :

$$\sum_{j=1}^{2^\ell-1} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Решениям этой системы будут отвечать искомые вершины. В самом деле, когда все x_j , кроме одного, равны нулю, система не выполняется, ибо каждый столбец ненулевой. Далее, если две переменные равны 1, а остальные нулю, то получается сумма двух столбцов, не равная нулю, ибо все столбцы попарно различны. Если какие-то два решения системы отличаются одной или двумя координатами, то их разность по модулю 2 тоже является решением и имеет лишь одну или две ненулевые координаты, что, как мы только что установили, невозможно.

Множество решений этой системы есть пространство размерности не меньше $2^\ell - \ell - 1$, и число элементов в нём не меньше чем $2^{2^\ell - \ell - 1} = 2^{k-\ell}$.

Задача для случая $k = 2^\ell - 1$ решена. Для общего случая решение неизвестно. (А. Я. Канель-Белов)

11.9' (выпуск 23, с. 209). Условие. Существует ли вписанная в решётку нечётнозвенная замкнутая ломаная, все звенья которой имеют одинаковую длину? (А. К. Ковальджи)

Ответ: не существует.

Решение. Рассматривая остатки по модулю 4, легко установить следующее:

Пусть $x^2 + y^2 = C$, причём числа x, y целые. Тогда

- а) если C имеет вид $4k + 1$, то одно из чисел x, y нечётное, а другое чётное;
 б) если C имеет вид $4k + 2$, то оба числа x, y нечётны;
 в) число C не может иметь вид $4k + 3$;
 г) если C имеет вид $4k$, то оба числа x, y чётны. \square

Пусть теперь C — квадрат длины звена ломаной. В случае (а) сумма координат вектора, отвечающего звену ломаной, нечётна. Поскольку число звеньев нечётно, сумма координат суммы векторов звеньев нечётна и, стало быть, не нулевая. Поэтому ломаная не может быть замкнутой.

В случае (б) все координаты векторов звеньев нашей ломаной нечётны. Сумма первых координат этих векторов нечётна и не может равняться нулю (как, впрочем, и вторых координат). Тогда и сумма векторов звеньев ломаной не нуль и ломаная не может быть замкнутой.

Случай (в), как указано выше, невозможен. И, наконец, в случае (г) ломаная с половинными длинами звеньев удовлетворяет условию задачи, так что дело завершает спуск. Задача решена.

В своё время её предложил А. К. Ковальджи на суперконкурсе ВМШ при Московском математическом обществе. (А. Я. Канель-Белов)

17.2. Условие. а) Найти 300-ю цифру после запятой числа

$$\sqrt[3]{\underbrace{0,99\dots 99}_{100 \text{ штук}}}$$

б) С помощью калькулятора найти первую цифру числа 2^{10^6} .

(А. Я. Канель-Белов)

РЕШЕНИЕ. а) Нужно найти трёхсотую цифру после запятой в числе $\sqrt[3]{1-x}$, где $x = 10^{-100}$. Разложим в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$(1-x)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3 t^{-8/3},$$

где $t \in (1-x; 1)$.

$$(1-x)^{1/3} < 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 = \underbrace{0,99\dots 99}_{100 \text{ раз}} \underbrace{66\dots 66}_{100 \text{ раз}} 555\dots$$

Пишем грубую оценку на остаточный член: $\frac{5}{81}x^3 t^{-8/3} < \frac{1}{10}x^3$, откуда

$$(1-x)^{1/3} > \underbrace{0,99\dots 99}_{100 \text{ раз}} \underbrace{66\dots 66}_{100 \text{ раз}} \underbrace{55\dots 55}_{100 \text{ раз}} 4\dots$$

ОТВЕТ: 5.

б) Прологарифмируем данное выражение по основанию 10.

$$\lg 2^{1\,000\,000} = 1\,000\,000 \lg 2 =_{(\text{с точностью калькулятора})} 301\,029,9956.$$

Значит, исходное число меньше чем $10 \cdot 10^{301\,029}$. Но оно больше чем $9 \cdot 10^{301\,029}$, так как $\lg 9 < 0,9956$.

Ответ: 9.

(И. В. Митрофанов)

17.4. Условие. \mathcal{A} — отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние (т. е. $|XY| = |\mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)|$ для любых точек X, Y плоскости). Доказать, что \mathcal{A} — отображение плоскости на себя (т. е. каждая точка имеет прообраз при этом отображении).

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3 — вершины равностороннего треугольника со стороной 1. Образы этих трёх точек при \mathcal{A} тоже являются вершинами равностороннего треугольника со стороной 1. Рассмотрим движение h , переводящее $\mathcal{A}(A_1)$ в A_1 , $\mathcal{A}(A_2)$ в A_2 и $\mathcal{A}(A_3)$ в A_3 . Обозначим через \mathcal{B} композицию \mathcal{A} и h , она тоже сохраняет расстояния. Достаточно доказать, что \mathcal{B} — тождественное преобразование. Очевидно, точки A_1, A_2, A_3 под действием \mathcal{B} остаются на месте. Пусть для некоторой точки X плоскости $X \neq \mathcal{B}(X)$. Тогда

$$|\mathcal{B}(X)A_1| = |\mathcal{B}(X)\mathcal{B}(A_1)| = |XA_1|,$$

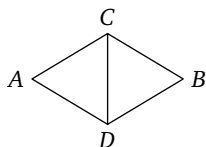
а значит, A_1 лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $X\mathcal{B}(X)$. Аналогично на этом срединном перпендикуляре лежат A_2 и A_3 , но этого быть не может. Противоречие.

(И. Митрофанов)

17.4' (выпуск 23, с. 220). Условие. \mathcal{A} — отображение плоскости в себя, сохраняющее единичные расстояния (если $|XY| = 1$, то $|\mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)| = |XY|$). Доказать, что \mathcal{A} сохраняет все расстояния.

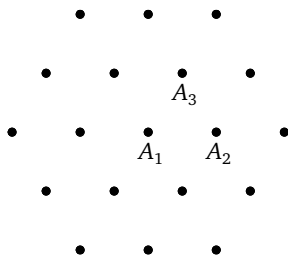
(Фольклор)

Решение. Рассмотрим такую конструкцию (отрезки имеют длину 1):

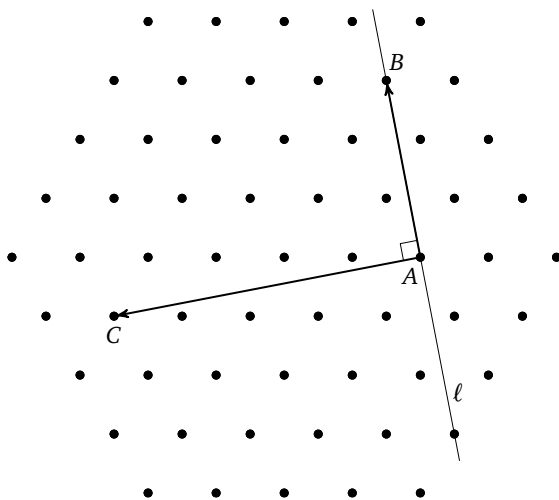


Понятно, что либо $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B)$, либо $|\mathcal{A}(A)\mathcal{A}(B)| = \sqrt{3}$. Таким образом, отображение \mathcal{A} любые две точки на расстоянии $\sqrt{3}$ либо склеивает, либо оставляет на прежнем расстоянии. Рассмотрим треугольник со сторонами $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$. Так как троек точек с попарными расстояниями $(\sqrt{3}, 0, 1)$ или $(0, 0, 1)$ не существует, оба отрезка длины $\sqrt{3}$ должны сохраниться.

Итак, отображение \mathcal{A} сохраняет длины 1 и $\sqrt{3}$. Можно считать, что \mathcal{A} оставляет на месте вершины A_1, A_2, A_3 некоторого треугольника со сторонами $(1, 1, 1)$. Тогда последовательно получаем, что все точки показанной ниже треугольной решётки — неподвижные точки отображения \mathcal{A} .



Докажем, что и все остальные точки плоскости остаются на месте. Предположим, что для какой-то точки X её образ $\mathcal{A}(X) \neq X$, тогда существует прямая ℓ , проходящая через некоторые две точки A и B решётки и разделяющая $\mathcal{A}(X)$ и X .



Поворотная гомотетия с центром в точке A , углом 90° и коэффициентом $\sqrt{3}$ переводит точки решётки в точки решётки (достаточно проверить для двух). Точку B она переводит в некоторую точку C . Не умаляя общности, считаем, что X и C по одну сторону от ℓ .

Существует круг, касающийся прямой ℓ в точке A и содержащий точку X . Без ограничения общности, центр D этого круга — точка решётки и $D = A + kAC$, где k — натуральное число, большее чем 1. Тогда $|DX| < k|AC|$. Поэтому из отрезков с длинами $|AC|$ в количестве k штук и одного отрезка длины $|DX|$ можно сложить многоугольник. А значит, точки D и X можно

соединить k -звенной ломаной с длинами звеньев, равными $|AC|$:

$$|DY_1| = |Y_1Y_2| = \dots = |Y_{k-1}X| = |AC|.$$

Заметим, что \mathcal{A} сохраняет расстояния, равные любому из расстояний между точками решётки, в частности $|AC|$. При отображении \mathcal{A} тогда получим по неравенству многоугольника, что

$$|D\mathcal{A}(X)| \leq |D\mathcal{A}(Y_1)| + |\mathcal{A}(Y_1)\mathcal{A}(Y_2)| + \dots + |\mathcal{A}(Y_{k-1})\mathcal{A}(X)| = k|AC|.$$

Это значит, что $\mathcal{A}(X)$ лежит внутри круга с центром D и радиусом $k|AC| = |AD|$. А тогда мы получаем противоречие с тем, что X и $\mathcal{A}(X)$ находятся по разные стороны от прямой ℓ . (И. Митрофанов)

17.9. Условие. Имеется $2^n - 1$ коробок. В коробке первой величины¹⁾ содержатся две коробки второй величины. В каждой из 2^{k-1} коробок k -й величины содержатся по две коробки $(k+1)$ -й величины. В коробках последней n -й величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх и орлом вниз. Можно ли улучшить эту оценку? (А. Я. Белов)

Решение. Будем считать, что «орёл вверх» — это 1, а «орёл вниз» — это -1 . За одну операцию разрешается поменять все знаки внутри одной из коробок. Нужно доказать, что за $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ операций можно сделать сумму всех 2^{n-1} чисел равной нулю.

Понятно, что при любых действиях сумма остаётся чётной. Пусть общая сумма в какой-то момент времени равна S , а сумма в какой-то коробке равна S_1 . Если $|S_1| \geq |S|$ и $S_1 \cdot S \geq 0$, то назовём эту коробку *значимой*. Например, единственная коробка первой величины значима всегда. Коробка n -й величины значима только если общая сумма монет равна 0.

Лемма. Пусть коробка A — значимая, A содержит коробки следующего размера B_1 и B_2 , B_1 содержит C_1 и C_2 , B_2 содержит C_3 и C_4 . Тогда за не более чем одно действие можно сделать так, чтобы одна из коробок C_i стала значимой.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем общую сумму S положительной. Обозначим через c_i сумму чисел в коробке C_i . Рассмотрим возможные варианты.

1. Пусть все c_i неотрицательны, $0 < S \leq c_1 + c_2 + c_3 + c_4$. Не умаляя общности считаем, что c_1 — наибольшее из c_i (или одно из наибольших, если

¹⁾ Она единственна.

их больше одного), а $c_3 \geq c_4$. Если $S < c_1$, то коробка C_1 уже значимая. Далее рассмотрим подслучаи:

- (а) Пусть $c_2 \geq c_3 + c_4$. Тогда поменяем знаки в C_2 . Общая сумма станет равна $S - 2c_2$. С одной стороны, $S - 2c_2 \leq c_1 + (c_3 + c_4 - c_2) \leq c_1$. С другой стороны, $S - 2c_2 \geq -c_2 + (c_1 - c_2) \geq -c_2$. А значит, либо коробка C_1 , либо коробка C_2 станет значимой (какая из них — зависит от знака получившейся суммы).
- (б) Пусть $c_2 < c_3 + c_4$ и $S \geq c_1 + c_3 + c_4$. Поменяем знаки в B_2 , сумма станет равна $S - 2(c_3 + c_4)$. С одной стороны, получившаяся сумма не превосходит $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 - 2(c_3 + c_4) < c_1$, а с другой стороны, она не меньше чем $c_1 - (c_3 + c_4) \geq -c_3$. Значит, либо C_1 , либо C_3 станет значимой коробкой.
- (в) Пусть $c_2 < c_3 + c_4$ и $c_1 \leq S < c_1 + c_3 + c_4$. Поменяем знаки в C_3 , полученная сумма $S - 2c_3$ будет меньше чем c_1 , но больше чем $-c_3$, опять одна из коробок C_1, C_3 будет значимой.
2. Пусть ровно одно из c_i отрицательное, например c_4 . Тогда $0 < S < c_1 + c_2 + c_3$. Пусть $c_1 \geq c_2 \geq c_3$. Если $S < c_1$, то коробка C_1 уже значимая. В противном случае перевернём C_2 , новая сумма $S - 2c_2$ будет не больше чем c_1 и не меньше чем $-c_2$, одна из соответствующих коробок — значимая. Случаи, когда c_1, c_2, c_3 упорядочены иначе, рассматриваются аналогично.
3. Пусть $0 \leq c_i \leq c_j$, а другие два числа отрицательные. Тогда $0 < S < c_i + c_j$. Если $S < c_i$, то можно ничего не менять, в противном случае поменяем знаки в C_i и придём к случаю 4.
4. Если только одно из чисел c_i неотрицательное, то соответствующая коробка уже значимая.

Лемма доказана. \square

Если $n = 2a$, то, применяя много раз лемму, получим после первого хода значимую коробку 3-го размера, после второго хода 5-го размера и так далее, после $a - 1$ ходов получим значимую коробку $(n - 1)$ -го размера. После этого сумма всех чисел будет или 0, или ± 2 , и за ещё не более чем один ход придём к нужному результату.

Аналогично если $n = 2a + 1$, то не более чем за a ходов получаем значимую коробку уровня n , т. е. нулевую сумму всех чисел.

Так мы доказали оценку даже чуть лучше чем требовалось, а именно $[n/2]$.

Укажем теперь для $n = 2a + 2$ конструкцию, которую нельзя привести к нужному виду менее чем за $a + 1$ операцию. Каждой из 2^{n-1} самых маленьких коробок соответствует двоичный номер, который записывается

как последовательность нулей и единиц $b_1 b_2 \dots b_{2a} b_{2a+1}$. Если нет таких i , что $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$, то напишем в коробке $+1$, иначе напишем $+1$ или -1 в зависимости от значения последнего бита b_{2a+1} .

Какая может при такой расстановке быть сумма чисел в коробке k -го размера? Коробке k -го размера K соответствует бинарная последовательность $b(K)$ длины $k-1$. Если $k = 2a + 1$, то сумма чисел в коробке либо 2, либо 0 — это зависит от того, встречается ли в последовательности кусок $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$. Иначе сумма чисел в K — это удвоенное число коробок $(2a + 1)$ -го размера с суммой 2, содержащихся в K . Очевидно, число таких коробок равно числу способов дополнить $b(K)$ до бинарной последовательности $b_1 \dots b_{2a}$ так, чтобы ни для какого i не было $b_{2i-1} = b_{2i} = 1$. Если такая пара подряд идущих единиц уже встречается в $b(K)$, то число способов, очевидно, равно 0. Пусть k нечётное, тогда нужно заполнить битами $2a - k + 1$ позиций, которые разбиваются на пары, и каждую пару можно заполнить тремя способами (00, 01 и 10). В итоге общее число способов $3^{(2a-k+1)/2}$ и сумма чисел в коробке равна $2 \cdot 3^{(2a-k+1)/2}$. Разбор случая чётного размера коробки аналогичен и оставляется читателю, приведём готовый ответ.

Сумма чисел в коробке $(2a - 2k + 1)$ -го размера может быть равна либо 0, либо $2 \cdot 3^k$. Сумма чисел в коробке $(2a - 2k)$ -го размера равна либо 0, либо $2 \cdot 3^k$, либо $4 \cdot 3^k$. Сумма всех чисел равна $2 \cdot 3^a$.

Заметим, что от порядка операций конечный результат не зависит, так как для каждой монетки важна лишь чётность числа переворачиваний. Поэтому можно считать, что операции выполняются вначале с крупными коробками, а потом с маленькими. Операции с более крупными коробками не меняют абсолютные величины сумм чисел в меньших коробках, а меняют только их знаки. Поэтому можно считать, что при каждой операции сумма чисел меняется на число вида $4 \cdot 3^k$, $8 \cdot 3^k$, 2 или 0. Если сумма изначально была $2 \cdot 3^a$ и стала 0 за m операций, то получаем, что

$$3^a = \pm t_1 \pm t_2 \pm \dots \pm t_m,$$

где каждое из t_i равно 1, 0, $2 \cdot 3^k$ или $4 \cdot 3^k$ для некоторого целого неотрицательного k . Числа такого вида будем называть *базовыми*.

Покажем, что $m \geq a + 1$, индукцией по a . База $a = 1$ очевидна. Переход индукции: $3^a = \pm t_1 \pm t_2 \pm \dots \pm t_m$; слева нечётное число, значит, среди $\{t_i\}$ должна быть хотя бы одна единица.

В сумме $\pm t_1 \pm t_2 \pm \dots \pm t_m$ выделим слагаемые, равные ± 1 , ± 2 и ± 4 . Пусть это $s > 1$ чисел и их сумма равна $3s$. Покажем, что число s можно представить в виде суммы не более чем $s - 1$ базовых чисел. В самом деле, несложно показать, что набор из целых чисел с суммой, делящейся на 3,

можно разбить на группы с суммой, делящейся на 3, так, чтобы в каждой группе было не более чем 3 числа. В данном случае группа содержит не менее двух чисел, так как слагаемые не делятся на 3. А далее несложный перебор: в каждой из групп сумма может быть от -12 до 12 . Если сумма была ± 9 , то было использовано минимум 3 числа, но $\pm 3 = \pm 1 + \pm 2$, т. е. использовано лишь 2 базовых числа. В противном случае сумма чисел в группе — утроенное базовое число. При вычислении s нужно группы (содержащую более одного слагаемого) заменить на это число.

Все оставшиеся t_i делятся на 3, и при делении на 3 снова получаем базовые числа. Значит, число 3^{a-1} представимо в виде суммы $m' < m$ базовых числа. По предположению индукции $m' \geq a$, а значит, $m \geq a + 1$.

(И. Митрофанов)

24.1. Условие. Дан единичный вектор. Разрешается выбрать прямую и заменить вектор его проекцией на эту прямую. С новым вектором можно провести ту же процедуру, и т. д. Прямая каждый раз выбирается заново. Можно ли таким образом развернуть вектор на 180° , потеряв при этом не более 1% от его длины?

(А. Я. Канель-Белов)

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что если при достаточно большом n осуществить последовательно n проекций с углом π/n , то длина получившегося вектора будет сколь угодно близка к длине исходного вектора. При проекции вектора длины L на прямую, образующую угол α с его направлением, получается вектор длины $L \cos \alpha$. Поэтому достаточно установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n = 1, \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\cos \frac{\pi}{n} \right) = 0.$$

Но $\cos x - 1 \sim x^2/2$, $\ln(1+t) \sim t$ при малых x, t . Поэтому

$$n \ln \left(\cos \frac{\pi}{n} \right) \sim -\frac{n(\pi/n)^2}{2} = -\frac{\pi^2}{2n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Задача решена.

Замечание. Это полезный наглядный факт. В частности, данная идея используется в мореплавании. Направление ветра проецируется на нормаль к парусу. Получившийся вектор силы проецируется на направление киля. Поэтому корабль может идти даже под малым углом к направлению против ветра. Выбирая этот угол поочерёдно по обе стороны от направления ветра (делая галсы), корабль может идти и против ветра.

(А. Я. Канель-Белов)

24.6. УСЛОВИЕ. Пусть P_1, \dots, P_k — многочлены от x_1, \dots, x_n , $k < n$,

а) с комплексными, б) с действительными коэффициентами.

Возможно ли равенство многочленов:

$$P_1^2 + \dots + P_k^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2? \quad (\text{Фольклор})$$

а) Ответ: возможно.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся равенством

$$P_1^2 + P_2^2 = (P_1 + iP_2)(P_1 - iP_2).$$

Подберём P_1, P_2 так, что

$$P_1 + iP_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{и} \quad P_1 - iP_2 = 1,$$

т. е. положим

$$P_1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + 1}{2}, \quad P_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1}{2i}.$$

При желании можно добавить $P_3 = \dots = 0$.

б) Ответ: невозможно.

РЕШЕНИЕ. Прежде всего отметим, что многочлены P_i должны иметь первую степень. Действительно, если степень P_i равна нулю и $P_i \neq 0$, то P_i — ненулевая константа и сумма $\sum P_i^2$ не обращается в нуль, в то время как $\sum x_i^2$ в нуль обращается. Если же $\deg(P_i) > 1$ при некотором i , то $\sum P_i^2$ есть многочлен степени > 2 (в вещественном случае коэффициенты при старших членах квадратов всегда положительны) и потому

$$\sum P_i^2 \neq \sum x_i^2.$$

Итак, степени всех многочленов P_i равны 1 и, поскольку

$$\sum_{i=1}^k P_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

свободные члены всех P_i нулевые (иначе при $x_1 = \dots = x_n = 0$ указанная сумма в нуль не обращается).

Множество нулей суммы

$$\sum_{i=1}^k P_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

совпадает с множеством M нулей системы однородных уравнений

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Данное множество есть линейное пространство размерности не меньше $n - k$ и при $n > k$ содержит более одной точки, в отличие от множества нулей квадратичной формы $\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Замечание. Есть такая олимпиадная задача: если многочлен от одной переменной всюду неотрицателен, то он есть сумма квадратов двух многочленов. В то же время всюду положительный многочлен от нескольких переменных может не быть суммой квадратов многочленов от нескольких переменных (построение контрпримера — поучительная задача). Тем не менее, он является суммой квадратов *рациональных функций* (что составляет содержание *семнадцатой проблемы Гильберта*). См. также задачу 1.6 (выпуск 1, с. 194) и её решение в выпуске 5, с. 221–223, а также решение п. (б) в выпуске 10, с. 274. (А. Я. Канель-Белов)

24.8. Условие. а) Какое максимальное число точек можно отметить в единичном трёхмерном кубе так, чтобы все попарные расстояния были строго больше 1? Больше или равны 1? б) Аналогичные вопросы для четырёхмерного куба. (Фольклор)

Ответ: а) Соответственно 7 и 8 точек. б) Соответственно 15 и 17 точек.

Решение. Примеры. а) Ясно, что если отметить 8 вершин куба, то все попарные расстояния будут не меньше 1. Покажем, как отметить 7 точек на расстояниях больше 1. Вначале отмечаем 8 вершин куба, затем выбираем одну вершину P и снимаем с неё метку. Вершины куба разбиваются на 4 слоя — точка P , её соседи, соседи её соседей и противоположная вершина Q . Если точки второго слоя сдвинуть по рёбрам на 10^{-2} в сторону точки P , точки третьего слоя сдвинуть на 10^{-4} в сторону ближайших точек второго слоя, а точку Q сдвинуть на 10^{-6} в сторону одной из вершин третьего слоя, то получится искомый пример.

б) Расстановка 15 точек с попарными расстояниями больше 1 строится аналогично, а если расположить 17 точек в вершинах и центре четырёхмерного куба, то попарные расстояния будут не меньше 1.

Оценки. а) Покажем, что в единичном трёхмерном кубе нельзя расположить больше 8 точек так, чтобы попарные расстояния были не меньше 1. Разобьём куб на 8 равных кубиков. Тогда в каждом будет не более одной отмеченной точки, ибо диагональ кубика равна $\sqrt{3}/2 < 1$ и две точки в него не поместятся.

Пусть в кубе отмечено 8 точек с попарными расстояниями не меньше 1. Рассмотрим отмеченные точки A, B в соседних кубиках. Эти кубики примыкают к ребру E , которое разделяет две грани куба, содержащие грани этих кубиков. Будем считать ребро E вертикальным. Пусть нижняя грань нижнего из кубиков лежит в плоскости XOY . Тогда проекция $|A''B''|$ отрезка AB на плоскость XOY не больше $\sqrt{2}/2$ — диагонали грани кубика. Значит, проекция отрезка AB на ребро E не меньше $\sqrt{2}/2$, ибо

$1 = |AB|^2 = \sqrt{|A'B'|^2 + |A''B''|^2}$. Следовательно, расстояния от точек A, B до ближайших граней не больше $a_1 = 1 - \sqrt{2}/2$. Рассматривая всевозможные пары соседних кубиков, получим, что отмеченные точки живут в кубиках с ребром a_1 при вершинах исходного куба.

Рассматривая эти кубики и рассуждая аналогично, получим, что

$$|A''B''| \leq \sqrt{2}a_1 \quad \text{и} \quad |A'B'| \geq \sqrt{1 - 2a_1^2}.$$

Из этого следует, что наши точки живут в кубиках с ребром

$$a_2 = 1 - \sqrt{1 - 2a_1^2}$$

при вершинах исходного куба, и т. д. Иными словами, зададим последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ рекуррентно. Положим

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{i+1} = 1 - \sqrt{1 - 2a_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

По индукции получаем, что при всех i все отмеченные точки живут в кубиках с ребром a_i при вершинах исходного куба.

При этом a_i убывают и положительны, поэтому они стремятся к некоторому пределу a , для которого

$$a = 1 - \sqrt{1 - 2a^2}.$$

Этому равенству удовлетворяют 0 и $2/3$, но $2/3 > 1/2$, поэтому предел a_i равен нулю и все отмеченные точки лежат в вершинах большого куба — пересечениях семейств кубиков. Следовательно, расположить в кубе 8 точек с попарными расстояниями строго больше 1 нельзя.

б) Разобьём единичный четырёхмерный куб на 16 кубиков с ребром $1/2$. Пусть в кубе отмечено более 16 точек с попарными расстояниями не меньше 1. Если отмеченная точка принадлежит $n > 1$ кубикам, то дадим ей вес $1/n$ в каждом из них. Сумма всех весов равна количеству отмеченных точек. Тогда некоторому кубику отвечает сумма весов больше 1. Значит, в кубике отмечено более одной точки, но это могут быть лишь две противоположные вершины. Если их веса меньше 1, то они не больше $1/2$ и их сумма не больше 1. Следовательно, вес хотя бы одной из вершин равен 1. Но тогда она является вершиной единичного куба, а противоположная вершина кубика — центром куба. В других кубиках можно будет отметить лишь вершины, противоположные центру куба, и всего отмеченных точек будет 17.

Теперь предположим, что в единичном кубе отмечены 16 точек на попарных расстояниях больше 1. Тогда в каждом из подкубиков может быть не более одной отмеченной точки. Если точка принадлежит границе двух

кубиков, то ни в одном из них не может быть другой отмеченной точки, поэтому количество отмеченных точек будет меньше 16. Значит, можно считать, что в каждом кубике выбрано по точке и эта точка не попадает в другие кубики. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что в ε -окрестности общих границ кубиков нет отмеченных точек, т. е. точки отмечены в кубиках с ребром $1/2 - \varepsilon$, прилегающих к вершинам большого куба.

Теперь мы готовы рассуждать, как в п. а). Положим

$$a_1 = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad a_2 = 1 - \sqrt{1 - 3a_1^2}, \quad \dots, \quad a_{i+1} = 1 - \sqrt{1 - 3a_i^2}, \quad \dots$$

Тогда $a_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Рассуждая как в пункте а), получим, что каждая отмеченная точка совпадает с вершиной куба. Но тогда некоторые из их попарных расстояний равны 1 — противоречие.

Для плоскости ситуация аналогична трёхмерному случаю, а для размерностей больше 4 — например, пятимерья — ситуация неизвестна.

(А. Я. Канель-Белов)

24.10. Условие. В k -мерном пространстве отмечены n точек. Разрешается взять прямую, на которой уже лежит не менее t отмеченных точек, отметить любую другую точку на этой прямой и далее повторять эту процедуру. Оказалось, что любую точку пространства можно отметить. При каком наименьшем числе n изначально отмеченных точек это могло случиться? (Число t изначально фиксировано, ответ зависит от t .)

(И. В. Митрофанов, Ф. В. Петров)

Ответ: при $n = C_{k+t-1}^k$.

Решение. Покажем индукцией по k , что если взять $k + t - 1$ гиперплоскостей общего положения и отметить все C_{k+t-1}^k точек их пересечения по k , то любая точка пространства сможет быть отмечена. База $k = 1$ очевидна: это t точек на прямой. Проведём переход к $k > 1$ от $k - 1$. Рассмотрим в k -мерном пространстве любую из проведённых гиперплоскостей. Тогда остальные гиперплоскости высекают на ней $k + t - 2$ гиперплоскостей общего положения размерности $k - 2$, и все их точки пересечения по $k - 1$ отмечены. По предположению индукции можно отметить каждую из точек этих гиперплоскостей. Проведём любую прямую общего положения относительно гиперплоскостей. Они высекают на прямой $k + t - 1$ точек, которые можно отметить, а значит, можно отметить любую точку на этой прямой. Поэтому можно отметить и любую точку всего пространства.

Допустим, что условие задачи выполнено при некотором $n < C_{k+t-1}^k$. Пространство многочленов от k переменных степени не выше $t - 1$ имеет размерность C_{k+t-1}^k (доказывается индукцией по $k + t$). Значит, найдётся такой ненулевой многочлен P степени не выше $t - 1$, который равен нулю

в этих n точках (его коэффициенты определяются из системы однородных линейных уравнений, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных). Если P равен нулю в t точках некоторой прямой, то он равен нулю и во всех точках этой прямой (линейным преобразованием переменных можно превратить P в многочлен степени меньше t от одной переменной, меняющейся вдоль этой прямой). Значит, отмечены могут быть лишь нули многочлена P . Противоречие. (И. В. Митрофанов)