О задаче 22.1

А. С. Милевский

В «Математическом просвещении» (выпуск 22, с. 231) опубликована задача 22.1:

Пусть функция $g(x)$ такова, что при всех $x \geqslant 1$ выполняется равенство $g(x)^{g(x)} = x$. Найдите такую элементарную функцию $h(x)$, что

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)-h(x))=0.$$

В решении этой задачи, опубликованном в «Математическом просвещении» (выпуск 23, с. 235), содержится ошибка. В последней строке решения написано:

$$\left|\ln x-\left(\ln x-\frac{\ln x\ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\right)\right|\to 0\quad \text{при } x\to\infty.$$

Но в действительности

$$\left|\frac{\ln x\ln\ln\ln x}{\ln\ln x}\right|\to +\infty\quad \text{при } x\to\infty.$$

Скорее всего, для функции $g(x)$ невозможно построить требуемую аддитивную асимптотику с элементарной функцией h. Получается лишь мультипликативная асимптотика вида

$$h(x)(1+o(1))\quad \text{при } x\to\infty.$$

На самом деле рассматриваемая задача приводит к так называемой функции Ламберта $W(z)$, которая является решением уравнения

$$W(z)e^{W(z)}=z,$$

откуда

$$g(x)=e^{W(\ln x)}.$$

Асимптотика функции $W(z)$ при $z\to\infty$ известна[1, p. 349], но не даёт решения задачи.

Список литературы

[1] *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E.* On the Lambert *W* function // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5, № 4. P. 329–359.

Александр Станиславович Милевский, МИИТ
a_s_mi@mail.ru