Дополнение к задачнику

Хорошая задача ценна своими связями. Наиболее содержательные из них открывают новые сюжеты и темы, в рамках которых возникают новые задачи, открываются новые грани. Именно поэтому их решение обогащает и оказывается столь полезным, помимо чисто интеллектуальной тренировки.

Эстетическое чувство позволяет ощутить богатство связей и естественность задачи. Оно так важно в том числе и по этой причине. Значение математика определяется произведением его «пробивной силы» на эстетическое чувство (впрочем, эти две вещи взаимозависимы).

При публикации дополнения к задачнику нам прежде всего важны эти связи. Разумеется, содержательные и важные связи могут найтись как с классикой, так и с сюжетами, которые находятся в процессе исследования и ещё не получили изящной формулировки.

В выпуске 1 (с. 194, см. решение: выпуск 6, с. 139–140) опубликована

Задача 1.5. Линия делит квадрат на две равные части. Всегда ли она проходит через центр квадрата? Тот же вопрос для куба.

(*А. К. Ковальджи*)

Стиль решения этой задачи непривычен для многих «олимпиадников». Тут дело вовсе не в каком-то трюке. Надо осознать, что значит *две равные части*. Это значит, что *есть движение, переводящее одну часть в другую*. А все типы движений плоскости описаны в теореме Шаля. Далее следует небольшой перебор. (Подробнее — см. решение: «Математическое просвещение», сер. 3, вып. 6, 2002, с. 139–140.) Похожие рассуждения используются и в такой задаче из второй серии «Математического просвещения»:

Вторая серия, выпуск 2, задача Б.9 (см. решение: сер. 2, выпуск 6, с. 345–347). *Правильным n-угольником* (*на плоскости или в пространстве*) называется замкнутая ломаная, состоящая из n равных звеньев и такая, что углы между соседними звеньями все равны между собой.

Известно, что на плоскости правильные n-угольники существуют при любом n. При каких n существуют неплоские правильные многоугольники?
(*В. И. Арнольд*)

В связи с этим возникает

Задача 1.5′. а) *Ломаная делит центрально-симметричную выпуклую фигуру на две равные части. Докажите, что она проходит через её центр.*

б) *Аналогичный вопрос для шаров произвольной размерности, а также для кубов.*

в) *Аналогичный вопрос для центрально-симметричного выпуклого тела произвольной размерности.*

г) *Центрально-симметричная фигура покрыта двумя конгруэнтными частями. Верно ли, что центр лежит на их границе*?
(*А. Я. Канель-Белов, С. В. Маркелов*)

См. А. Я. Белов, С. В. Маркелов, «Разбиения на равные части», `http://www.turgor.ru/problems/zktg/`, а также: Задачи заочного конкурса Турнира Городов // Математическое образование, № 3–4 (6–7), июль–декабрь 1998, с. 142–150.

Решение этих задач может стать темой публикации.

В выпуске 1 (с. 194, см. решение: выпуск 4, с. 220) опубликована

Задача 1.8. а) Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчётным, если для любых двух подмножеств из этого семейства одно строго содержится в другом?

б) Тот же вопрос, если пересечение любых двух множеств в семействе конечно. (*Фольклор*)

В этой связи возникает

Задача 1.8′. *Может ли семейство подмножеств натурального ряда быть несчётным, если пересечение любых двух множеств в семействе состоит из не более чем* 2020 *элементов*? (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 3 (с. 232, см. решение: выпуск 4, с. 223–224) опубликована

Задача 3.2. Пусть $|\varepsilon_i| < 1$ и произведение $\prod(1-\varepsilon_i)$ сходится. Верно ли, что сходится ряд $\sum \varepsilon_i$? (*А. Белов*)

Известна классическая задача:

Пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ сходится. Следует ли из этого, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^3$ сходится?

Обобщением задачи 3.2 и этого классического вопроса служит

Задача 3.2$'$. *Для каких функций* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *выполнено следующее: если ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *сходится, то ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ *тоже сходится?* (*А. Белов*)

В выпуске 4 (с. 217, см. решение: выпуск 7, с. 194–195) опубликована

Задача 4.10. Известно, что ранг коммутатора двух матриц $[A,B]=$ $=AB-BA$ равен единице. Докажите, что матрицы A и B имеют общий собственный вектор. (*Фольклор*)

На международной студенческой олимпиаде IMC-2020 была предложена задача на схожий сюжет (день 1, задача 2):

Задача 4.10$'$. *Пусть A и B — матрицы порядка n с вещественными коэффициентами, E — единичная матрица. Известно, что* $\mathrm{Rk}([AB]+E)=1$, *где E — единичная матрица порядка n. Докажите, что*

$$\mathrm{Tr}((AB)^2)-\mathrm{Tr}(A^2B^2)=\binom{n-1}{2}.$$

(*Рустам Турдибаев, В. И. Романовский*)

В выпуске 5 (с. 217, см. решение: выпуск 8, с. 252–254) опубликована

Задача 5.5. Докажите, что пересечение 10 правильных тетраэдров, вписанных в додекаэдр (вершины тетраэдров являются вершинами додекаэдра), есть икосаэдр. (*А. Я. Белов*)

Она связана с задачей, которую В. А. Сендеров дал на матбое между школами 2 и 179 в 1979 году (см. выпуск 23, с. 217):

Задача 5.5$'$. *Дан додекаэдр. Какое наименьшее число его движений этого додекаэдра нужно взять, чтобы любое движение додекаэдра можно было представить в виде их композиции?* (*Фольклор*)

В этой связи уместно напомнить классику:

Задача 5.5$''$. *Докажите, что группа вращений додекаэдра изоморфна* A_5 (*группе всех чётных перестановок множества из* 5 *элементов*). (*Фольклор*)

В выпуске 6 (с. 133, см. решение: выпуск 8, с. 255) опубликована

Задача 6.1. На пир собрались 100 людоедов, и они стали есть друг друга. Оказалось, что из любых 10 найдётся один, оказавшийся в желудке у другого. Докажите, что найдётся цепочка из 12 вложенных людоедов. (*В. Сендеров*)

Родственная задача 6$'$ опубликована в выпуске 23, с. 217, см. решение выпуск 25, с. 176–177. Продолжением темы служит

Задача 6.1$''$. а) *Натуральные числа от* 1 *до* n *расставляются в ряд в произвольном порядке* (*число* n *фиксировано*). *Расстановка называется* k*-разбиваемой, если в ней можно отметить* k *чисел* (*не обязательно стоящих подряд*), *идущих в порядке убывания. Остальные расстановки называются* k*-хорошими. Докажите, что количество* k*-хороших расстановок не превосходит* $(k-1)^{2n}$.

б) *Докажите, что число* 3*-хороших расстановок есть число Каталана* (https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Каталана).

($\boxed{\text{В. Н. Латышев}}$, *А. Я. Белов*)

В выпуске 8 (с. 247, см. решение: выпуск 9, с. 233) опубликована

Задача 8.8. В граничных клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа. Докажите, что можно дописать числа в остальные клетки таблицы так, чтобы каждое число равнялось среднему арифметическому своих соседей.

(*М. З. Двейрин*)

Приведём более общий факт, который доказывается точно так же:

Задача 8.8$'$. *В конечном графе в некоторых вершинах стоят числа, а некоторые вершины — пустые. Докажите, что все пустые вершины можно заполнить так, чтобы число, стоящее в пустой вершине, равнялось среднему арифметическому его соседей. Если же граф связен, то это осуществляется однозначно.* (Такие расстановки называются *дискретными гармоническими функциями*.)

В выпуске 9 (с. 223, см. решение выпуск 14, с. 277) опубликована

Задача 9.5. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных? (*Фольклор*)

В этой связи возникают следующие вопросы.

Задача 9.5$'$. а) *Существует ли функция, разрывная во всех рациональных точках и непрерывная во всех иррациональных*? (*Фольклор*)

б) *Функция бесконечно дифференцируема во всех рациональных точках. Верно ли, что в какой-то иррациональной точке она также бесконечно дифференцируема? Аналогичный вопрос про* k *раз дифференцируемые функции.* (*А. Белов*)

в) *Производная функции равна нулю во всех рациональных точках. Верно ли, что эта функция — константа*? (*Фольклор*)

В выпуске 12 (с. 235, см. решение: выпуск 14, с. 236–237) опубликована

Задача 12.1. $\cos\alpha = 1/3$. Докажите, что градусная мера угла α иррациональна. (*Фольклор*)

Продолжением темы служит

Задача 12.1′. *Пусть* $\varphi = \operatorname{arctg}(m/n)$. *Докажите неравенство на дробную часть*

$$\left\{\frac{k\cdot\varphi}{\pi}\right\} > \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^k. \qquad (\textit{Л. Радзивиловский})$$

В выпуске 13 (с. 179, см. решение: выпуск 14, с. 270–271, А. А. Заславский «О вычислении объёма n-мерного шара») опубликована

Задача 13.2. К чему стремится объём n-мерного шара радиуса 2008 при $n\to\infty$? (*А. Я. Белов*)

В качестве упражнения к решению советуем найти классический интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$$

С задачей 13.2 связан следующий сюжет:

Задача 13.2′. *Последовательность непрерывных функций* $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ *такова, что*

$$f_{i+1}(x) = \int\limits_0^x f_i(t)\,dt.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2020)$. (*Л. Радзивиловский*)

В выпуске 13 (с. 179–180, см. решение выпуск 20, с. 258–263) опубликована

Задача 13.6. Докажите, что в алгебре матриц порядка n выполняются следующие тождества.

а) Тождество Размыслова:

$$n\cdot\operatorname{Tr}(A)\cdot\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2x_{\sigma(3)}\cdot\ldots\cdot x_{\sigma(n^2-1)}y_{n^2-1}x_{\sigma(n^2)} =$$

$$=\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^{\sigma}Ax_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\cdot\ldots\cdot y_{n^2-1}x_{\sigma(n^2)} +$$

$$+\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}y_1Ax_{\sigma(2)}y_2\cdot\ldots\cdot y_{n^2-1}x_{\sigma(n^2)} +$$

$$+\ldots+\sum_{\sigma\in S_{n^2}}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}y_1x_{\sigma(2)}y_2\cdot\ldots\cdot y_{n^2-1}Ax_{\sigma(n^2)}.$$

б) Тождество Амицура — Левицкого:

$$\sum_{\sigma\in S_{2n}}(-1)^{\sigma}x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot x_{\sigma(2n)}=0.$$

Здесь x_i, y_i, A — произвольные матрицы, S_k — группа перестановок из k элементов, $(-1)^{\sigma}=+1$ для чётных перестановок и $(-1)^{\sigma}=-1$ для нечётных.

С этим сюжетом связана

Задача 13.6′. а) *Пусть A — матрица второго порядка. Тогда*

$$\det(A)=\frac{(\mathrm{Tr}(A))^2-\mathrm{Tr}(A^2)}{2}.$$

б) *Пусть A — матрица n-го порядка. Тогда* $\det(A)$ *есть многочлен с рациональными коэффициентами от величин* $\mathrm{Tr}(A)^k$, $1\leqslant k<n$.

(*Фольклор*)

В выпуске 13 (с. 181) опубликована

Задача 13.10. *k-параллелепипедом* называется прямоугольный параллелепипед, среди рёбер которого имеется не более k различных. Докажите, что если параллелепипед P можно разрезать на k-параллелепипеды, то длины его рёбер порождают векторное пространство размерности не выше k над $\mathbb{Q}$.

(*Л. Радзиviловский, И. Фещенко, Д. Радченко, М. Танцюра*)

Решение см.: *Радзивиловский Л., Радченко Д., Танцюра М., Фещенко И.* Разрезание параллелепипеда на бруски // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 20. М.: МЦНМО, 2016. С. 215–227.

Родственная задача 13.10′ опубликована в выпуске 24 (с. 179, см. решение пп. а), б): настоящий выпуск, с. 254–258.

Продолжением темы служит следующее обобщение задачи Турнира городов (Шестой турнир, весна 1985 г., основной вариант):

Задача 13.10″. а) *Квадрат разбит на прямоугольники.* Цепочкой *называется такое подмножество K множества этих прямоугольников, что существует сторона квадрата A, целиком закрытая проекциями прямоугольников из K, но при этом ни в какую точку не проектируются внутренние точки двух прямоугольников из K. Докажите, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.*

б) *Аналогичная задача для (многомерного) куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки нужно заменить сторону на ребро).* (*А. И. Гольберг, В. А. Гурвич*)

В выпуске 16 (с. 232) опубликована

Задача 16.12. а) Куб $n \times n \times n$ разбит на n^3 единичных кубиков, каждый раскрашен в один из трёх цветов. Докажите, что найдётся одноцветный путь, соединяющий противоположные грани большого кубика. *Соседними* считаются кубики, имеющие хотя бы одну общую точку.

(*Теорема Лебега о покрытиях*)

б) k-мерный куб $n \times n \times \ldots \times n$ разбит на n^k единичных кубиков, каждый раскрашен в один из l цветов. Докажите, что найдётся связный кластер объёма $C(k)n^{k+1-l}$. (*Г. В. Кондаков, А. Я. Белов*)

Продолжением темы служит

Задача 16.12$'$. *Пусть n-мерная сфера единичного радиуса разбита на многоугольники, которые раскрашены в k цветов так, что точки на расстоянии $\pi - 0{,}001$ раскрашены в разные цвета. Тогда найдётся точка, к которой примыкают не менее $n+1$ попарно разноцветных многоугольников.* (*А. Я. Белов, Д. Черкашин, В. Воронов*)

Эта задача связана также со следующей (выпуск 21, с. 273–274):

Задача 21.12. а) Область между двумя параллельными прямыми раскрашена в 2 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета. (*Л. А. Емельянов*)

б) Область между двумя параллельными плоскостями раскрашена в 4 цвета. Докажите, что найдётся отрезок длины 1 с концами одного цвета.

(*А. Я. Белов, Д. Черкашин, В. Воронов*)

В выпуске 17 (с. 196, см. решение: выпуск 20, с. 264–265) опубликована

Задача 17.1. Можно ли в куб достаточно большой размерности с ребром 1 см вложить здание МГУ? (*Ф. Ивлев*)

Продолжением темы служит

Задача 17.1$'$. а) *Найдите минимально возможное n такое, что равносторонний треугольник со стороной* 100 *содержится в n-мерном единичном кубе* $[0, 1]^n$. *Каков максимальный периметр треугольника, лежащего в* 11*-мерном кубе*?

б) *Тот же вопрос для квадрата со стороной* 10.

в) (Задача на исследование.) *Аналогичный вопрос для вложения k-мерного куба в n-мерный.*

г) *Каков максимальный радиус трёхмерного шара, лежащего внутри четырёхмерного куба*? (*Л. Радзиviловский*)

В выпуске 22 (с. 232) опубликована

Задача 22.5. а) Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий биекцию между точками с неотрицательными целыми координатами и целыми неотрицательными числами? (*Фольклор*)

б) (Задача на исследование.) Какова его возможная степень? (*И. Г. Царьков*)

в) Существует ли многочлен второй степени от двух переменных, устанавливающий биекцию между точками с целыми координатами и целыми числами? Аналогичный вопрос для пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

Решение п. а) опубликовано в статье: *Гашков С. Б.* Замечания к задачнику «Математического просвещения» // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 26. М.: МЦНМО, 2020. С. 259–262 (там же обсуждался п. б)). Решение п. в) см. выпуск 26, с. 282–284.

Отметим следующее.

1. В решении п. а) использовалась следующая конструкция:

$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = \binom{\sum_{i=1}^{n} x_i + n - 1}{n} + \binom{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + n - 2}{n-1} + \ldots + x_1. \qquad (1)$$

Важный факт: *если многочлен $Q(x_1, \ldots, x_n)$ принимает целые значения в целых точках, то он есть целочисленная комбинация многочленов вида*

$$Q_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \binom{x_i}{n_{i,\alpha}},$$

где $n_{i,\alpha}$ — степень многочлена Q_α по x_i. Таким образом, хотя коэффициенты многочлена Q могут оказаться нецелыми, они рациональны и знаменатель делит $\prod_{i=1}^{n} n_{i,\alpha}!$ (при $n = 1$ он делит $\deg(Q)!$).

2. То, что степень искомого многочлена не может быть меньше k (т. е. числа переменных), доказывается с помощью асимптотического перехода (см. выпуск 26, с. 261). Подобные рассуждения распространены в науке и в олимпиадной практике. См. *Канель-Белов А. Я.*, *Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2016.

Упражнения. 1. а) Докажите, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^{2020} = C$$

при подходящем C может иметь сколь угодно много решений в целых числах.

1. б) Докажите, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^{2021} = C$$

при бесконечно многих натуральных C не имеет решений в целых числах.

1. в) Известно, что каждое натуральное число представимо в виде суммы l членов возрастающей последовательности $\{a_n\}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^l} \geqslant \frac{1}{l!}.$$

2. Обозначим через $S(y)$ сумму цифр числа y. Докажите, что существует бесконечно много номеров n, таких, что $S(3^n) \geqslant S(3^{n+1})$. Докажите, что существует бесконечно много номеров n, таких, что $S(2^n) > S(2^{n+1})$.

3. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Доказать, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.

См. также подборки, посвящённые асимптотикам, из книг: *Канель-Белов А. Я.*, *Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2016; а также *Канель-Белов А. Я.*, *Трепалин А. С.*, *Ященко И. В.* Олимпиадный ковчег. М.: МЦНМО, 2016.

Родственная задача 22.5′ опубликована в выпуске 26 (с. 273, см. решение: настоящий выпуск, с. 259–260.

В упомянутой работе С. Б. Гашкова был поставлен открытый вопрос, который удалось решить. Сформулируем его в виде задачи:

Задача 22.5′′. а) *Существует ли многочлен от k переменных, устанавливающий инъекцию множества точек с целыми координатами в множество целых чисел*?

б) (Задача на исследование.) *Какова его возможная степень*?

(*С. Б. Гашков*)

В выпуске 23 (с. 216) опубликована

Задача 23.6. Все вершины выпуклого 10^9-угольника имеют целые координаты. Докажите, что его диаметр не меньше 10^{12}.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Задача была предложена на 3 Краснодарском фестивале юных математиков в 1992 году. Следующая задача была на олимпиаде 239 школы г. Санкт-Петербурга в 1998 году.

Задача 23.6′. *Вершины выпуклого $2n$-угольника ($n \geqslant 2$) лежат в узлах целочисленной решётки. Пусть S_n — минимальное возможное значение его площади.*

а) *Докажите, что* $S_n \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

б) *Докажите, что существует положительное число* α *такое, что при всех натуральных* n *выполнено неравенство* $S_n > \alpha \cdot n^3$.

(*С. Иванов*)

Вот задачи на родственный сюжет:

Задача 23.6″. а) (Международная студенческая олимпиада IMC-2020, день 1, задача 3.) *Пусть* $d \geqslant 2$ — *натуральное число. Докажите, что существует константа* $C(d)$ *такая, что для любого центрально-симметричного выпуклого многогранника*[1] $K \subset \mathbb{R}^d$ *и любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *найдётся выпуклый многогранник* $L \subset \mathbb{R}^d$ *с не более чем* $C(d)\varepsilon^{1-d}$ *вершинами, для которого*

$$(1-\varepsilon)K \subseteq L \subseteq K.$$

(*Ф. В. Петров*)

б) *Пусть* P — *многогранник в* $\mathbb{R}^d$ *на* 4^d *вершинах и все вершины имеют целые координаты. Тогда найдутся грань* Γ *и точка* q *во внутренности этой грани такие, что* q *лежит в минимальной решётке, натянутой на вершины* Γ.

(*Д. А. Захаров*)

В выпуске 23 (с. 216) опубликована

Задача 23.10. а) Полицейский ловит Гангстера в городе, представляющем собой квадрат 10×10, разбитый улицами на квадратные клетки — кварталы. Полицейский видит Гангстера, только если на него натыкается, и оба они ездят только по улицам. Скорость Полицейского в 10 000 раз больше скорости Гангстера. Может ли Полицейский поймать Гангстера за ограниченное время?

б) Тот же вопрос, если потребовать, чтобы путь полицейского был *конечнозвенной ломаной*.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Дополнения см. выпуск 24 (с. 180):

Задача 23.10′. По рёбрам правильного октаэдра бегают паук и муха. Паук видит муху, находясь с ней на одном ребре. Сможет ли он её поймать, если скорость паука в 2,5 раза больше скорости мухи? При каком наименьшем соотношении скоростей он может её поймать? (Открытый вопрос.)

Задача 23.10″. (Задача для исследования. Редакции полное решение неизвестно.) Полицейский ловит Гангстера на трёх улицах длиной 1, выходящих из одной точки. Максимальная скорость Полицейского в 2 раза больше максимальной скорости Гангстера, но Полицейский близорук,

[1] В действительности утверждение верно для любого центрально-симметричного выпуклого тела. — *Прим. составителя*.

он видит только часть улицы длиной ε, а Гангстер видит всё вокруг и Полицейского в том числе. Определите, при каких ε Полицейский сможет поймать Гангстера. Рассмотрите тот же вопрос при других соотношениях скоростей. (*По мотивам задачи*: *Задачник «Кванта»*, *М645*, *авторы В. Дринфельд*[2], *В. Соколов*)

Наш читатель К. Э. Каибханов предлагает следующую задачу на близкую тему[3].

Задача 23.10$'''$. *В городе Удираевске сеть дорог устроена так, что с каждого перекрёстка можно попасть на любой другой перекрёсток, а тупиков в городе нет. В начальный момент Неуловимый Джо и двое полицейских находятся на разных перекрёстках, а затем начинают двигаться по дорогам. За один ход Джо перемещается на соседний перекрёсток или остаётся на месте*; *следующим ходом полицейские одновременно перебираются на соседние с ними перекрёстки. Нарисуйте одну из возможных схем дорог города Удираевска, при которой Неуловимый Джо, зная местоположение полицейских, всегда сможет избежать поимки.*

(*К. Э. Каибханов*)

Отметим, что решение задачи для трёх полицейских неизвестно.

В выпуске 25 (с. 167, см. решение: выпуск 26, с. 284) опубликована

Задача 25.1. *Индекс Хирша* исследователя — это максимальное такое n, что учёный имеет не менее n работ, на каждую из которых приходится не менее n ссылок. Хирш утверждает, что учёный с индексом не менее 50 имеет нобелевский уровень. Профессор имеет 10 аспирантов, которых он хочет вывести на нобелевский уровень. Каждый из них раз в месяц публикует статью, ссылаться можно только на ранее опубликованные работы других аспирантов. Какое минимальное число месяцев требуется профессору? (*А. Я. Канель-Белов*)

Имеется задача на литературно схожий сюжет:

Задача 25.1$'$. *Профессор доказывает равносильность n утверждений. Он задаёт своим аспирантам темы диссертационной работы вида*: Докажите, что из утверждения с номером k следует утверждение с номером l. *Нельзя защищать диссертацию, являющуюся прямым логическим*

[2] В. Дринфельд — филдсовский лауреат, один из крупнейших специалистов по квантовой теории поля. Будет замечательно, если кто-то из наших читателей продвинется в этой задаче.

[3] Усложнение задачи того же автора о двух полицейских: см. «Квант», 2008, № 2, с. 23, задача 5. Решение см. «Квант», 2008, № 3, с. 59.

следствием из защищённых ранее. Какое максимальное число аспирантов может защитить профессор? (*Фольклор*)

В выпуске 26 (с. 266, см. решение: настоящий выпуск, с. 266–267. опубликована

Задача 26.4. Пусть $k+2$ точечных птичек в многомерном аффинном пространстве движутся прямолинейно и равномерно. Докажите, что если все эти птички $k+2$ раза оказались в некотором (не обязательно одном и том же) аффинном подпространстве размерности k, то они всё время находятся в некотором (переменном) аффинном подпространстве размерности k. (*А. Я. Канель-Белов*)

Развитием темы служит

Задача 26.4′. а) *Четыре пешехода идут с постоянной скоростью. Известно, что первый и второй встретились со всеми. Докажите, что третий встретился с четвёртым либо их скорости равны.* (*Фольклор*)

б) *Обобщите и решите задачу для случая попадания* $k+1$ *многомерной птички в* $(k-1)$*-мерное подпространство.* (*А. Я. Канель-Белов*)