Задачник

(составители А. Я. Канель-Белов, И. В. Митрофанов)

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными для читателей «Математического просвещения», в том числе для сильных школьников, интересующихся математикой.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. Мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи указывается автор (уточнения со стороны читателей приветствуются).

На базе решения трудной задачи неоднократно появлялась научная статья (в том числе у школьника), а также доклад на конференции (школьной или взрослой). Так что призываем присылать решения опубликованных задач. Составители задачника помогут с публикациями и докладами на конференциях.

1. Можно ли заполнить 99 % пространства попарно непересекающимися шарами? (Имеется в виду заполненная доля объёма шара, радиус которого стремится к бесконечности.)

   (*А. К. Ковальджи, А. Я. Канель-Белов*)

2. Первоначально во всех целых точках числовой прямой расставлены натуральные числа. На первом шаге между каждыми двумя соседними числами записывается их среднее арифметическое, а исходные

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 27, 2021 (233–236)

числа стираются. На втором шаге с записанными числами проделывается та же операция, и так далее. Оказалось, что все числа, которые мы получаем на каждом шаге, натуральные. Можно ли утверждать, что на некотором шаге все числа равны между собой? (*Фольклор*)

3. а) На столе лежит несколько выпуклых фигур. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не трогая остальных. (Здесь и далее будем считать, что фигуру/тело можно *выдвинуть* из системы тел, если можно параллельно перенести данную фигуру/тело на любое расстояние от системы так, чтобы по ходу переноса не были задеты другие фигуры/тела системы.)

   б) В пространстве расположено несколько шаров. Докажите, что один из них можно выдвинуть. Аналогичный вопрос для n-мерного пространства. (*А. Я. Канель-Белов*)

4. *Дробно-кубическое отображение* — это отображение вида
$$z \to \frac{a_1z^3 + b_1z^2 + c_1z + d_1}{a_2z^3 + b_2z^2 + c_2z + d_2}.$$
   Всегда ли его можно представить в виде композиции отображений вида $z \to z^2$, $z \to z^3$, $z \to az + b$, $z \to 1/z$? (*А. Я. Канель-Белов*)

5. а) Для любых ли длин биссектрис существует треугольник с такими биссектрисами и однозначно ли определяется?

   б) Можно ли построить треугольник по трём биссектрисам циркулем и линейкой? (*Фольклор*)

6. Назовём матрицу *нильпотентной*, если некоторая её степень равна нулю.

   а) Докажите, что любая матрица с нулевым следом есть сумма нильпотентных матриц. Каково минимальное их число, достаточное для любой такой матрицы? (*Л. Радзивиловский*)

   б) Докажите, что любая матрица с нулевым следом представима в виде суммы 22 матриц с нулевым квадратом. (Можно ли уменьшить число 22, редакции не известно). (*М. Брезар*)

7. Найдите предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\ln\, n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \ln k.$$
   (*Ф. В. Петров*)

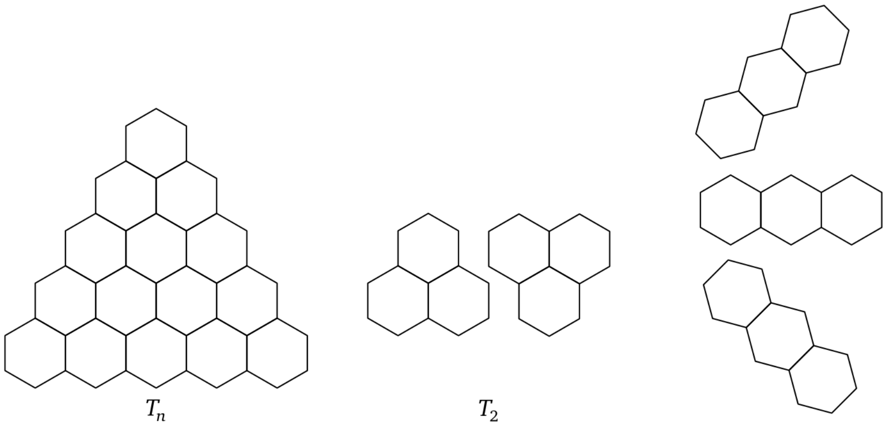

Рис. 1

8. Из $\binom{n}{2}$ правильных шестиугольников составили треугольную доску T_n со стороной n (рис. 1).

   а) Докажите, что её нельзя разбить на ряды из троек правильных шестиугольников, стоящих в ряд.

   б) Докажите, что её можно разбить на доски T_2 из троек шестиугольников тогда и только тогда, когда $n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$.

   Допустим, что мы можем класть плитки из вещества или антивещества. Если плитка из вещества целиком лежит на плитке из антивещества или наоборот, то они аннигилируют. Можно ли замостить T_n в этом случае так, чтобы после аннигиляции каждая клетка была покрыта ровно по разу?

   в) Докажите, что T_n замощается досками T_2 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \not\equiv 1 \pmod{3}$.

   г) Докажите, что T_n замощается палочками с рис. 1 (с возможным использованием антивещества) в точности тогда, когда $n \equiv 0, 8 \pmod{9}$.

   (*Дж. Х. Конвей, Дж. К. Лагариас*)

9. Многочлен $p(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$p(x+1) - p(x) = x^{100} \quad \text{при всех } x.$$

   Докажите, что $p(1-t) - p(t) \geqslant 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1/2$. (*Д. Клюев*)

10. Даны числа $1, 2, \ldots, \lfloor e \cdot n! \rfloor$. Докажите, что их нельзя разбить на n классов так, чтобы ни в одном классе не выполнялось равенство $a = b + c$.

   (*И. Шур*)

11. *Плотность в последовательности* членов с данным свойством равна пределу при $n \to \infty$ их плотности среди первых n членов последовательности.

а) Пусть $s_{10}(n)$ — сумма по модулю 10 десятичных цифр числа n. Число n назовём *k-хорошим*, если $s_{10}(n) = s_{10}(n+k)$. Докажите, что плотность количества k-хороших чисел в последовательности $s_{10}(n)$ заключена между $9/11$ и $10/11$.

б) *Слово Фибоначчи* получается как предел при $n \to \infty$ последовательности слов S_n, где $S_0 = 0$, $S_1 = 01$, $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ при $n > 1$, т. е. S_n получается приписыванием S_{n-1} слева к S_{n-2}. Если сдвинуть слово Фибоначчи по себе на k позиций, то возникают *рассогласования*: 0 наезжает на 1 или наоборот. Докажите, что для любого k плотность рассогласования в слове Фибоначчи существует и при подходящем выборе k может быть сколь угодно малой.

в) *Слово Трибоначчи* получается из 1 последовательным применением подстановок $1 \to 12$, $2 \to 23$, $3 \to 1$ и переходом к пределу по расширяющейся последовательности подслов: 1213121121312. Докажите, что для любого k плотность рассогласования существует и при подходящем выборе k может быть сколь угодно малой.

(*А. Я. Канель-Белов, Ю. Л. Притыкин, А. Л. Семенов*)

12. а) Укажите полную систему инвариантов обычного кубика Рубика (т. е. опишите, из каких начальных конфигураций можно его собрать).

б) Укажите полную систему инвариантов кубика Рубика с ребром n.

в) Исследуйте многомерный аналог данной задачи.

(*А. Я. Канель-Белов*)

Поправки к задачнику предыдущих выпусков

1. Приводим уточнённое условие задачи 25.6, п. (в):

Задача 25.6. в) Пусть a_{ij}, c_i, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,n$, — такие вещественные числа, что при любых целых x_j по крайней мере одно из чисел вида

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i$$

целое и делится на $k!$. Верно ли, что по крайней мере в одном из наборов коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i$ все числа целые?

(*С. Л. Крупецкий, А. Я. Канель-Белов*)

2. Автором задачи 26.6, п. (в) является А.Я.Канель-Белов.