М. В. Новокрещенов

Ещё раз о магических квадратах и кубах, их тайнах невероятных и очевидных

Электронное издание

УДК 511
ББК 22.13
Н74

Новокрещенов М. В.
Ещё раз о магических квадратах
и кубах, их тайнах невероятных
и очевидных.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2025.
298 с.
ISBN 978-5-4439-3405-1

Книга представляет собой исследование по магическим квадратам и кубам с анализом закономерностей, присущих этому виду числовых конструкций. В качестве основы исследования использованы свойства нечётности/чётности магических сумм и значений чисел, из которых эти суммы образованы. При этом показаны возможности применения при исследовании как систем линейных уравнений, так и систем степенных уравнений, соответствующих заданным числовым наборам. Рассмотрены также особенности магических квадратов в зависимости от расположения пар симметричных чисел. Показан сам процесс исследования и нахождения первопричин, обуславливающих свойства магических квадратов и кубов. Приведены многочисленные примеры магических квадратов и кубов, а также даны методики и приёмы получения магических квадратов и кубов различных типов.

Книга может заинтересовать любознательных читателей, склонных к аналитическому типу мышления, преподавателей и учеников старших классов, любителей математических загадок, стремящихся к расширению своего кругозора.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел.: (499) 241–08–04, сайт: http://www.mccme.ru

© М. В. Новокрещенов, 2025
© МЦНМО, 2025

ISBN 978-5-4439-3405-1

СОДЕРЖАНИЕ

	Предисловие.	3
Глава 1.	Магические квадраты третьего порядка.	4
Глава 2.	Магические кубы третьего порядка.	8
Глава 3.	Магические квадраты четвёртого порядка.	14
Глава 4.	Магические кубы четвёртого порядка.	104
Глава 5.	Магические квадраты пятого порядка.	230

Нам тайны нераскрытые раскрыть пора –

Лежат без пользы тайны, как в копилке …

В. С. Высоцкий (из песни «Марш студентов-физиков»).

Предисловие.

Под магическим квадратом (МК) обычно понимается квадратная таблица, состоящая из ячеек, в которых расположены числа, при этом сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и каждой диагонали одинакова и равна магической сумме (МС). Количество ячеек стороны МК считается порядком МК, при этом обзор начинается с квадратов третьего порядка.

Если в ячейках располагаются натуральные числа 1; 2; … n^2, то такой МК считается классическим (традиционным). Анализ именно классических МК и представляет наибольший интерес для любителей, которых увлекает магия МК, которым не жалко потратить часть своего драгоценного времени на увлекательное исследование закономерностей МК, кто готов погрузиться в загадочный и удивительный мир чисел.

Однако может возникнуть вопрос. Ну а зачем тратить время и усилия на возню с числами? Это же не несёт никакой практической пользы, зачем и кому это нужно?

Ну что можно на это ответить?

Можно сказать, что познание мира, в том числе через отражение его в числах, расширяет кругозор человечества, а как и когда конкретное знание будет использовано нельзя предугадать, но, вполне возможно, что в будущем что-то будет востребовано.

Ещё есть мнение, что всё, что можно было исследовать и описать уже исследовано и описано и ничего существенно нового выяснить уже невозможно.

Но даже если это и так, что совсем не факт, то всё равно, могут быть полезны и новые подходы к решению, и новые методики, и взгляд на задачу с неожиданной стороны.

Но, в любом случае, процесс исследования увлекателен и сам по себе (для любознательных) и тот, кому это интересно, получит удовольствие следуя за мыслью в процессе поиска особенностей и закономерностей, которым подчиняется этот загадочный мир чисел.

Глава 1. Магические квадраты третьего порядка.

1.1 МК третьего порядка (3х3) исследованы ещё в глубокой древности и достаточно досконально. Но это не мешает рассмотреть особенности этих МК с целью определения наиболее эффективных методик их получения и анализа для использования этих методик в дальнейшей работе с магическими квадратами более высоких уровней.

1.2 Общий вид МК третьего порядка показан в Табл. 1.2.1. Здесь под неизвестными X_1; X_2 …. X_8; X_9 подразумеваются набор чисел 1; 2; … 8; 9, расположенных так, что их сумма в каждой строке, в каждом столбце и в каждой диагонали равна магической сумме.

X_1	X_2	X_3
X_4	X_5	X_6
X_7	X_8	X_9

Табл.1.2.1

Магическую сумму можно найти путём деления суммы всех чисел на количество строк (столбцов): МС = $\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{3}$ = 15.

Значение числа X_5 можно найти из уравнений:

$(X_1 + X_5 + X_9) + (X_2 + X_5 + X_8) + (X_3 + X_5 + X_7) + (X_4 + X_5 + X_6) = 15*4 = 60;$

$3X_5 + (X_1 + X_9) + (X_2 + X_8) + (X_3 + X_7) + (X_4 + X_5 + X_6) = 60;$

$3X_5 + (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9) = 60;$

$3X_5 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 60;$

$3X_5 + 45 = 60;\quad 3X_5 = 15;\quad X_5 = 5;$

1.3 Для определения значений остальных неизвестных можно воспользоваться элементарным подбором. Для этого вида МК такой приём вполне приемлем, но к нему стоит прибегать только в самом крайнем случае, так как он не позволяет отработать наиболее оптимальные методики анализа и построения МК, да и пользоваться таким методом как-то не солидно. И, самое главное, такое определение конкретных вариантов расположения чисел не представляют особой ценности, так как истинную ценность для человеческого разума, на самом деле, представляет поиск

закономерностей в тех или иных явлениях, выяснение источников, обуславливающих эти закономерности, познание самой сути предмета исследования.

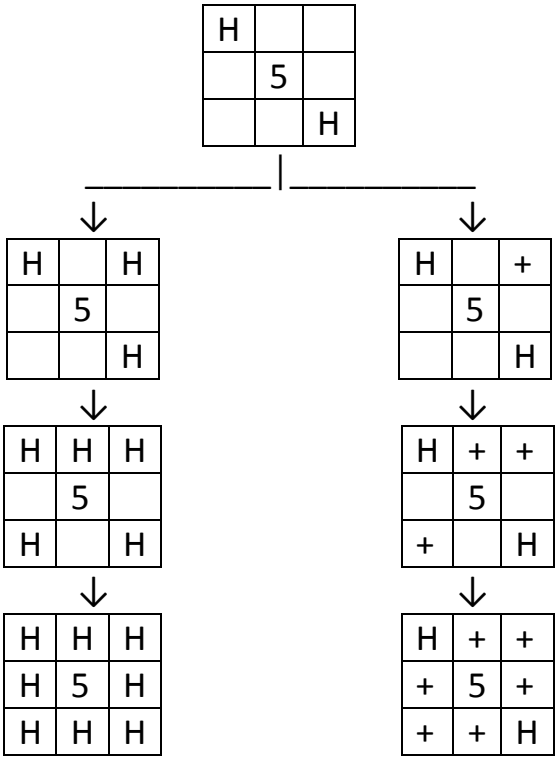
Ну и как же тогда двигаться дальше?

Оказывается, есть смысл воспользоваться свойством нечётности/чётности магической суммы, а также тех чисел, из которых она непосредственно состоит. Действительно, в каждой ячейке число может быть либо нечётным, либо чётным, а это существенно меньше всего набора чисел МК, при этом соотношение нечётных и чётных чисел должно соответствовать нечётности/чётности магической суммы, а также общее количество как нечётных, так и чётных чисел должно соответствовать их количеству в наборе чисел для МК. Правда количество подлежащих анализу вариантов может стать довольно большим, но это вполне искупается упрощением самого процесса анализа.

1.4 Итак, предположим, что, хотя бы в одной из угловых ячеек МК находится нечётное число, тогда МК можно повернуть вокруг центральной ячейки с числом 5 так, что это нечётное число будет находится в левой верхней угловой ячейке (то есть будем считать, что X_1 – нечётно).

При этом надо иметь ввиду, что повороты МК вокруг оси симметрии, а также зеркальные отображения МК относительно любой из осей симметрии не дают новых вариантов МК, а дают лишь неварианты исходного МК.

Теперь, исходя из наличия в левой верхней ячейке нечётного числа, определим предполагаемые варианты размещения нечётных (н) и чётных (+) чисел в остальных ячейках, с учётом обеспечения нечётности каждой магической суммы (последовательность процесса отображена в Вар.1.4.1 и Вар.1.4.2):

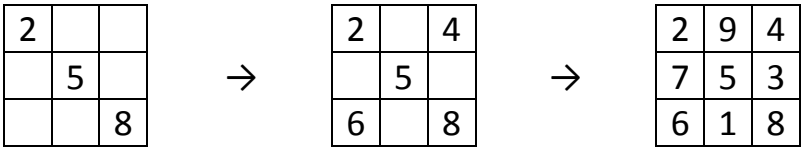


Вар.1.4.1 Вар.1.4.2

Анализ Вар.1.4.1 и Вар.1.4.2 (то есть констатация факта получения девяти и трёх нечётных чисел вместо пяти) показывает, что предположение о возможности расположения в любой из угловых ячеек МК третьего порядка нечётного числа не соответствует действительности, а значит в угловых ячейках таких МК могут находится только чётные числа.

А если предположить, что в угловых ячейках МК третьего порядка находятся чётные числа, то аналогичный процесс заполнения ячеек приведёт уже к положительному результату (читатель может убедиться в этом самостоятельно).

Исходя из этого можно считать, что в левой верхней угловой ячейке находится число 2 (это обеспечивается возможностью поворота МК вокруг центральной ячейки с числом 5), а в правой верхней угловой ячейке находится число 4 (это обеспечивается возможностью зеркального отображения относительно диагонали с числами 2, 5, 8), а остальные значения получаются вычислением при обеспечении соответствия сумм магическим (процесс показан в Вар.1.4.3 → Вар.1.4.4):



Вар.1.4.3 Вар.1.4.4

Таким образом, оказывается, можно получить единственно возможный вариант МК третьего порядка.

1.5 Теперь присмотримся к полученному магическому квадрату (Вар. 1.4.4).

Глядя на него можно заметить, что в центральной ячейке и в ячейках относительно центральной ячейки числа располагаются не как-попало.

В центральной ячейке находится число 5, которое является центром симметрии для всего набора чисел МК, а в ячейках, противоположных относительно центральной, находятся пары чисел, симметрично расположенные на числовой оси относительно числа 5, такие числа в дальнейшем будем называть симметричными.

То есть, требование к обеспечению одинаковой суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях, непостижимым образом привело к расстановке чисел в квадратной таблице с соблюдением полной симметрии в их расположении.

Оказывается, природа предпочитает симметрию даже в этом случае.

Ну что тут можно сказать?

Когда экономисты не могут внятно объяснить какие-то процессы в экономике, то они просто ссылаются на некую «невидимую руку рынка», дескать это она всё регулирует.

По аналогии и мы, при отсутствии понятного объяснения каких-то явлений в мире чисел, можем ссылаться на «невидимую руку симметрии» (шутка).

Теперь, уже получив некоторый опыт, можно приступить к рассмотрению магических кубов третьего порядка.

Глава 2. Магические кубы третьего порядка.

2.1 Общий вид магического куба третьего порядка (3x3x3) показан в виде фронтальных слоёв в Табл. 2.1.1, Табл. 2.1.2, Табл. 2.1.3. Здесь под неизвестными X_1, X_2, …. X_{26}, X_{27} подразумеваются набор чисел 1, 2 … 26, 27 расположенных так, что их сумма в каждой строке, в каждом столбце, и в каждой из четырёх больших диагоналей равна магической сумме, при этом в диагоналях граней магическая сумма не предусматривается, так как это приведёт к наличию в некоторых ячейках одинаковых чисел (из-за отсутствия магических сумм в диагоналях граней эти кубы можно считать условно магическими).

X_1	X_2	X_3
X_4	X_5	X_6
X_7	X_8	X_9

Табл.2.1.1

X_{10}	X_{11}	X_{12}
X_{13}	X_{14}	X_{15}
X_{16}	X_{17}	X_{18}

Табл.2.1.2

X_{19}	X_{20}	X_{21}
X_{22}	X_{23}	X_{24}
X_{25}	X_{26}	X_{27}

Табл.2.1.3

Магическую сумму можно найти путём деления суммы всех чисел на общее количество строк (столбцов): МС = $\frac{1+2+\cdots+26+27}{9}$ = 42.

2.2 Как же двигаться дальше? Здесь так просто как в случае с магическим квадратом разобраться уже не получится. Даже непонятно с какой стороны можно подойти к поиску подходящего решения. В подобных случаях лучше всего максимально математически формализовать задачу.

Прежде всего необходимо использовать базовую систему уравнений для МК, то есть воспользоваться системой уравнений для сумм чисел в каждой строке, в каждом столбце и каждой диагонали МК.

Можно поочерёдно из каждого уравнения определять какое-либо неизвестное и подставлять его выражение в оставшиеся уравнения и так, до тех пор, пока все уравнения не будут использованы.

Можно использовать и другие варианты решения для системы линейных уравнений.

А если есть возможность, то воспользоваться какой-либо компьютерной программой для поиска корней системы линейных уравнений.

Таким образом, в рассматриваемом случае, через четыре независимые переменные, найдём выражения для остальных переменных (зависимых от

них). Получим выражения для чисел в слоях в соответствии с Табл.2.2.1, Табл.2.2.2, Табл.2.2.3:

X_1	$-X_{26}+28$	$-X_1+X_{26}+14$
$-X_1-X_5+X_9+X_{26}+14$	X_5	$X_1-X_9-X_{26}+28$
$X_5-X_9-X_{26}+28$	$-X_5+X_{26}+14$	X_9

Табл.2.2.1

$-X_1+X_9+14$	$-X_5+2X_{26}$	$X_1+X_5-X_9-2X_{26}+28$
$2X_1+X_5-2X_9-2X_{26}+28$	14	$-2X_1-X_5+2X_9+2X_{26}$
$-X_1-X_5+X_9+2X_{26}$	$X_5-2X_{26}+28$	X_1-X_9+14

Табл.2.2.2

$-X_9+28$	$X_5-X_{26}+14$	$-X_5+X_9+X_{26}$
$-X_1+X_9+X_{26}$	$-X_5+28$	$X_1+X_5-X_9-X_{26}+14$
$X_1-X_{26}+14$	X_{26}	$-X_1+28$

Табл.2.2.3

Теперь, сопоставляя выражения для чисел, симметричных относительно центральной ячейки с числом 14, можно увидеть, что это симметричные числа, так как сумма их выражений равна 28 ($X_1+X_{27}=28$, $X_2+X_{26}=28$, … $X_{12}+X_{16}=28$, $X_{13}+X_{15}=28$).

Таким образом, «невидимая рука симметрии», снова расставила числа симметрично относительно центра симметрии (в этом случае относительно числа 14).

Дополнительно можно убедиться в существовании некоторых определённых соотношений, так $X_1+X_7=X_5+X_6$, $X_1+X_4=X_8+X_9$ и т. п. Действительно:

$X_1+X_7=(X_5-X_9-X_{26}+28)=X_1+X_5-X_9-X_{26}+28$.

$X_5+X_6=X_5+(X_1-X_9-X_{26}+28)=X_1+X_5-X_9-X_{26}+28$.

$X_1+X_4=X_1+(-X_1-X_5+X_9+X_{26}+14)=-X_5+X_9+X_{26}+14$.

$X_8+X_9=X_9+(-X_5+X_{26}+14)=-X_5+X_9+X_{26}+14$.

2.3 Перед тем как продолжить анализ необходимо решить, как исключить из рассмотрения варианты, получаемые поворотами и

зеркальными отображениями куба относительно осей симметрии (невариантны)?

На первом этапе этого можно добиться путём ограничения на размещение определённого числа в некоторых группах ячеек. Каким образом?

Заметим, что если число 1 находится в узлах пространственной решётки (в ячейках, расположенных на пересечении рёбер куба), то путём невариантных преобразований (поворотами и отображениями) его можно переместить в ячейку с неизвестным X_1.

Если же число 1 находится в ячейках на средине рёбер, то путём невариантных преобразований (поворотами и отображениями) его можно переместить в ячейку с неизвестным X_2.

Если же число 1 находится в ячейках в центре граней, то путём невариантных преобразований (поворотами и отображениями) его можно переместить в ячейку с неизвестным X_5.

Следовательно, ограничившись значением числа 1 для неизвестных X_1, X_2, X_5 можно исключить из рассмотрения невариантны, связанные с расположением числа 1 в остальных ячейках.

2.4 Для поиска значений оставшихся неизвестных требуются дополнительные уравнения. Это при том, что все значения для неизвестных мы знаем (это установленный набор чисел для магического куба), но какое значение для какого неизвестного подходит, к сожалению, неясно.

В качестве дополнительных уравнений можно воспользоваться суммами различных степеней и произведений значений всего набора чисел магического куба. В рассматриваемом случае целесообразнее всего использовать следующие разновидности уравнений:

Сумма квадратов разностей пар симметричных чисел:

$(X_1–X_{27})^2+(X_2–X_{26})^2+ … +(X_{12}–X_{16})^2+(X_{13}–X_{15})^2=$
$=(27–1)^2+(26–2)^2+ … +(16–12)^2+(15–13)^2.$

Сумма произведений квадратов пар симметричных чисел:

$X_1^2*X_{27}^2+X_2^2*X_{26}^2 + … + X_{12}^2*X_{16}^2+X_{13}^2*X_{15}^2=27^2*1+26^2*2^2+ … +16^2*12^2+15^2*13^2.$

Сумма произведений квадратов разностей пар на произведения квадратов этих же пар симметричных чисел:

$(X_1–X_{27})^2*X_1^2*X_{27}^2+(X_2–X_{26})^2*X_2^2*X_{26}^2$ +…+ $(X_{12}–X_{16})^2*X_{12}^2*X_{16}^2+(X_{13}–X_{15})^2*X_{13}^2*X_{15}^2=$
$=(27–1)^2*27^2+(26–2)^2*26^2*2^2+$ … $+(16–12)^2*16^2*12^2+(15–13)^2*15^2*13^2$.

Решить такую систему степенных уравнений в ручном варианте практически нереальная задача, но есть компьютерные программы, которые с этим отлично справляются, можно воспользоваться любой из них (если какая-то из них у читателя есть в наличии). Существуют методики поиска решения без использования степенных уравнений (путём перебора возможных соотношений по нечётности/чётности оставшихся независимых переменных и другие приёмы), но они весьма трудоёмкие и требуют массу времени (хотя в дальнейшем ими также придётся воспользоваться).

2.5 Решение системы дополнительных уравнений при $X_1=1$ даст шесть вариантов, при которых набор чисел магического куба соответствует установленному. Однако анализ этих вариантов свидетельствует о том, что пять из них являются невариантами одного из них. Таким образом существует единственный вариант магического куба при $X_1=1$ (Вар. 2.5.1, Вар. 2.5.2, Вар. 2.5.3):

1	23	18
17	3	22
24	16	2

Вар.2.5.1

15	7	20
19	14	9
8	21	13

Вар.2.5.2

26	12	4
6	25	11
10	5	27

Вар.2.5.3

2.6 Решение системы дополнительных уравнений при $X_2=1$ не даст ни одного варианта, при котором набор чисел магического куба соответствует установленному.

Это может показаться странным, так как при оставшихся трёх независимых переменных и достаточно большом количестве значений для них (25*24*23=13800), количество возможных вариантов должно бы быть в конце концов отличным от нулевого.

Однако, в данном случае, такая логика неприменима.

Дело в том, что для магических числовых конструкций обязательно исполнение сопутствующих ограничений.

В рассматриваемом случае необходимо соблюдение равенства:

$X_{12}+X_{15}=X_{16}+X_{17}$:

$X_{12}+X_{15}=(X_1+X_5-X_9-2X_{26}+28) + (-2X_1-X_5+2X_9+2X_{26}) =-X_1+X_9+28;$

$X_{16}+X_{17} = (-X_1-X_5+X_9+2X_{26}) + (X_5-2X_{26}+28) =-X_1+X_9+28;$

При этом если $X_{12}=1$, то $X_{16}=27$, то есть требуемое равенство ($X_{12}+X_{15}=X_{16}+X_{17}$) становится невыполнимым (1+26<27+2).

2.7 Решение системы дополнительных уравнений при $X_5=1$ даст, двадцать четыре варианта, при которых набор чисел магического куба соответствует установленному. Однако анализ этих вариантов свидетельствует о том, что оригинальными из них являются только три варианта (Вар.2.7.1, Вар.2.7.2, Вар.2.7.3), (Вар. 2.7.4, Вар.2.7.5, Вар.2.7.6), (Вар.2.7.7, Вар.2.7.8, Вар.2.7.9), все остальные будут их невариантами.

2	24	16
18	1	23
22	17	3

Вар.2.7.1

15	7	20
19	14	9
8	21	13

Вар.2.7.2

25	11	6
5	27	10
12	4	26

Вар.2.7.3

4	26	12
18	1	23
20	15	7

Вар.2.7.4

17	3	22
19	14	9
6	25	11

Вар.2.7.5

21	13	8
5	27	10
16	2	24

Вар.2.7.6

6	26	10
17	1	24
19	15	8

Вар.2.7.7

16	3	23
21	14	7
5	25	12

Вар.2.7.8

20	13	9
4	27	11
18	2	22

Вар.2.7.9

Отображать итоговую информацию по полученным вариантам можно не только в развёрнутом, но и в сокращённом виде.

При этом для независимых переменных задаётся ряд значений, а для остальных переменных, значения вычисляются в соответствии с указанными выражениями.

Именно в таком виде продублируем имеющуюся информацию, задав значения независимых переменных в Табл.2.7.1, с учётом получения

значений остальных переменных в соответствии с выражениями для них согласно Табл.2.2.1, Табл.2.2.2, Табл.2.2.3.

Кто-то может возразить против представления информации в таком виде из-за необходимости самостоятельного подсчёта выражений, но можно же задать их в Excel и получать требуемые значения чисел автоматически.

№ п/п	X_1	X_5	X_9	X_{26}
1	1	3	2	5
2	2	1	3	4
3	4	1	7	2
4	6	1	8	2

Табл.2.7.1

Таким образом существует всего четыре магических куба третьего порядка.

2.8 Надо отметить, что закономерность в расстановке нечётных и чётных чисел в магических кубах третьего порядка проявляется уже не так отчётливо, как это было для магических квадратов третьего порядка.

Так нечётными могут быть только значения переменных X_5, X_{11}, X_{13}, X_{15}, X_{17}, X_{23}, для остальных же переменных эта особенность уже не гарантируется.

А вот симметричность расположения чисел в квадратах и кубах третьего порядка проявляется наиболее ярко.

В более же высоких порядках таких числовых образований это явление уже проявляется менее заметно, постепенно переходя от полной упорядоченности ко всё большему преобладанию хаоса в расстановке чисел. Убедиться в этом можно будет уже в процессе исследования магических квадратов четвёртого порядка, к чему мы сейчас непосредственно и приступим.

Глава 3. Магические квадраты четвёртого порядка.

3.1 МК четвёртого порядка (4x4) тоже исследованы давным-давно, есть примеры, известно количество этих МК, есть разные истории, связанные с ними, но нет никакой классификации, нет исчерпывающих методик получения, не описано никаких закономерностей и особенностей, и, самое главное, никем не описан процесс исследования этих МК. Вот этот пробел мы и постараемся сейчас устранить.

3.2 Общий вид МК четвёртого порядка показан в Табл. 3.2.1. Здесь под неизвестными X_1; X_2 …. X_{15}; X_{16} подразумеваются набор чисел 1; 2; … 15; 16, расположенных так, что их сумма в каждой строке, в каждом столбце и каждой диагонали равна магической сумме.

	A	B	C	D
1	X_1	X_2	X_3	X_4
2	X_5	X_6	X_7	X_8
3	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
4	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}

Табл. 3.2.1

Символы в верхней строке (A, B, C, D) дают нумерацию столбцов МК, числа в левом столбце (1, 2, 3, 4) дают нумерацию строк МК, а выражение типа B2 даёт нумерацию ячейки на пересечении столбца B и строки 2 (использование такой системы нумерации вызвано необходимостью более детального исследования взаимосвязей между числами в ячейках, по сравнению с аналогичным процессом в МК третьего порядка).

3.3 Магическую сумму можно найти путём деления суммы всех чисел на количество строк (столбцов):

$$МС = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16}{4} = 34.$$

3.4 Если, использовав базовые уравнения для МС, исключить максимально возможное количество неизвестных, выразив их через некоторые независимые переменные (выразить все числа МК через семь из них), то МК Табл. 3.2.1 можно преобразовать в МК Табл.3.4.1:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	X_6	X_7	$-X_5-X_6-X_7+34$
$-X_1+X_4-X_5+X_7+X_{10}$	X_{10}	$-X_6-X_7-X_{10}+34$	$X_1-X_4+X_5+X_6-X_{10}$
$-X_4-X_7-X_{10}+34$	$-X_2-X_6-X_{10}+34$	$X_1+X_2+X_4+X_6+X_{10}-34$	$-X_1+X_7+X_{10}$

Табл.3.4.1

3.5 Теперь можно убедиться в некоторых интересных особенностях МК 4x4, а именно:

— Сумма четырёх угловых чисел (ячейки A1, D1, A4, D4) равна магической, действительно:

$X_1+ X_4+ X_{13}+ X_{16} = X_1+ X_4+ (-X_4-X_7-X_{10}+34) + (-X_1+X_7+X_{10}) =34.$

— Сумма четырёх внутренних диагональных чисел (ячейки B2, C2, B3, C3) тоже равна магической, действительно:

$X_6+ X_7+ X_{10}+ X_{11} = X_6+ X_7+ X_{10} + (-X_6-X_7-X_{10}+34) =34.$

—Сумма четырёх не диагональных чисел столбцов B и C (ячейки B1, C1, B4, C4) тоже равна магической, действительно:

$X_2+ X_3+ X_{14}+ X_{15} = X_2 + (-X_1-X_2-X_4+34) + (-X_2-X_6-X_{10}+34) +$

$+ (X_1+X_2+X_4+X_6+X_{10}-34) =34.$

—Сумма четырёх не диагональных чисел строк 2 и 3 (ячейки A2, D2, A3, D3) тоже равна магической, действительно:

$X_5+ X_8+ X_9+ X_{12} = X_5+ (-X_5-X_6-X_7+34) + (-X_1+X_4-X_5+X_7+X_{10}) +$

$+ (X_1-X_4+X_5+X_6-X_{10}) =34.$

—Суммы пар внешних угловых чисел и внутренних, перпендикулярных им (ячейки A1, D4 и C2, B3), (ячейки D1, A4 и B2, C3) равны, действительно:

$X_1+X_{16}=X_7+X_{10}$; $X_1+ (-X_1+X_7+X_{10})= X_7+X_{10}$;

$X_4+X_{13}=X_6+X_{11}$; $X_4+ (-X_4-X_7-X_{10}+34)= X_6+(-X_6-X_7-X_{10}+34)= -X_7-X_{10}+34.$

—Суммы внешних и внутренних пар чисел строк и столбцов (ячейки A1, D1 и B4, C4), (ячейки B1, C1 и A4, D4), (ячейки A2, D2 и B3, C3), (ячейки B2, C2 и A3, D3), (ячейки A1, A4 и D2, D3), (ячейки A2, A3 и D1, D4), (ячейки B1, B4 и C2, C3), (ячейки B2, B3 и C1, C4) равны, действительно:

$X_1+X_4= (-X_2-X_6-X_{10}+34) + (X_1+X_2+X_4+X_6+X_{10}-34) = X_1+ X_4;$

$X_2+ (-X_1-X_2-X_4+34) = (-X_4-X_7-X_{10}+34) + (-X_1+X_7+X_{10}) = -X_1-X_4+34;$

$X_5+ (-X_5-X_6-X_7+34) = X_{10}+ (-X_6-X_7-X_{10}+34) = -X_6-X_7+34;$

$X_6+X_7= (-X_1+X_4-X_5+X_7+X_{10}) + (X_1-X_4+X_5+X_6-X_{10}) = X_6+ X_7;$

$X_1+ (-X_4-X_7-X_{10}+34)= (-X_5-X_6-X_7+34)+(X_1-X_4+X_5+X_6-X_{10})= X_1-X_4-X_7-X_{10}+34$;

$X_5+ (-X_1+X_4-X_5+X_7+X_{10}) =X_4+ (-X_1+X_7+X_{10})= -X_1+X_4+X_7+X_{10}$;

$X_2+ (-X_2-X_6-X_{10}+34)=X_7+ (-X_6-X_7-X_{10}+34)= -X_6-X_{10}+34$;

$X_6+X_{10}= (-X_1-X_2-X_4+34)+ (X_1+X_2+X_4+X_6+X_{10}-34)= X_6+ X_{10}$.

3.6 Есть ещё четвёрки ячеек (не совпадающие с магическими четвёрками; это A1, B1, A2, B2 и C3, D3, C4, D4; C1, D1, C2, D2 и A3, B3, A4, B4;

A1, C1, A2, C2 и B3, D3, B4, D4; B1, D1, B2, D2 и A3, C3, A4, C4, а также другие аналогичные пары четвёрок), для сумм чисел в которых соответственно выполняются равенства:

$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 = X_{11} + X_{12} + X_{15} + X_{16}$;
$X_3 + X_4 + X_7 + X_8 = X_9 + X_{10} + X_{13} + X_{14}$;
$X_1 + X_3 + X_5 + X_7 = X_{10} + X_{12} + X_{14} + X_{16}$;
$X_2 + X_4 + X_6 + X_8 = X_9 + X_{11} + X_{13} + X_{15}$;
$X_1 + X_2 + X_9 + X_{10} = X_7 + X_8 + X_{15} + X_{16}$;
$X_3 + X_4 + X_{11} + X_{12} = X_5 + X_6 + X_{13} + X_{14}$;
$X_1 + X_3 + X_9 + X_{11} = X_6 + X_8 + X_{14} + X_{16}$;
$X_2 + X_4 + X_{10} + X_{12} = X_5 + X_7 + X_{13} + X_{15}$;

Это также можно проверить подстановкой в эти равенства выражений для зависимых неизвестных из Табл. 3.4.1

Можно найти и другие равенства среди чисел МК, но так как они не будут задействованы в процессе анализа, то на их описание время тратить не будем.

3.7 Для МК 4х4 кроме невариантных преобразований, которые не создают других МК, отличающихся от исходного, возможны преобразования, при которых МК хоть и отличаются от исходного, но наборы чисел, которые создают магические суммы, не изменяются (то есть изменяется только взаимное расположение чисел в строках, столбцах и диагоналях). И для того, чтобы в этом убедиться, нет необходимости знать конкретные значения чисел в ячейках, вполне достаточно оперировать выражениями для этих чисел. Такие преобразования будем считать тождественными преобразованиями (ТП).

3.8 Например таким будет преобразование, при котором меняются местами ячейки с числами первой строки со второй строкой и третьей строки с четвёртой строкой, а затем, аналогично, первого столбца с вторым столбцом и третьего столбца с четвёртым столбцом в соответствии с Табл.3.8.1:

X_1	X_2	X_3	X_4	↓		X_5	X_6	X_7	X_8		X_6	X_5	X_8	X_7
X_5	X_6	X_7	X_8	↑	→	X_1	X_2	X_3	X_4	→	X_2	X_1	X_4	X_3
X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	↓		X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}		X_{14}	X_{13}	X_{16}	X_{15}
X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	↑		X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}		X_{10}	X_9	X_{12}	X_{11}

Табл.3.8.1

3.9 Или преобразование с аналогичной перестановкой второй и третьей строк и второго и третьего столбцов в соответствии с Табл.4.9.1:

X_1	X_2	X_3	X_4
X_5	X_6	X_7	X_8
X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}

↓ → ↑

X_1	X_2	X_3	X_4
X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
X_5	X_6	X_7	X_8
X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}

→ ← →

X_1	X_3	X_2	X_4
X_9	X_{11}	X_{10}	X_{12}
X_5	X_7	X_6	X_8
X_{13}	X_{15}	X_{14}	X_{16}

Табл.3.9.1

3.10 Возможны и другие тождественные преобразования (и комбинации преобразований), которые могут быть использованы в каком-либо конкретном случае для получения необходимого результата.

3.11 Но существует ещё одно преобразование, которое свойственно и другим МК, так как оно носит универсальный характер. Для МК 4х4 его можно сформулировать следующим образом:

Если в каждой ячейке МК вместо имеющегося числа поместить число $y_i=17-x_i$, то такой МК тоже будет магическим, действительно, магическая сумма не изменится:

(17-x) + (17-y) + (17-k) + (17-z) =68-(x+y+k+z)=68-34=34;

Набор чисел МК тоже не изменится, действительно:

(17-1), (17-2)….. (17-15), (17-16)=16, 15….2, 1.

А вот чётность чисел МК изменится: в той ячейке, где число было нечётным, число станет чётным, а там, где было чётное число, будет уже нечётное число. Такое преобразование будем считать универсальным преобразованием (УП).

3.12 Воспользовавшись выражениями для чисел, в соответствии с Табл.3.4.1 можно заметить и другие особенности МК 4х4, но так как в приведённом процессе исследования МК в их использовании необходимости не возникло, то предлагаю читателю самому найти, описать и применить эти особенности для исследования МК 4х4.

3.13 Теперь, вооружившись начальной теоретической базой, можно приступить и к более детальному исследованию МК 4х4. Начнём по порядку. Уже удалось выяснить, что сумма чисел в угловых ячейках A1, D1, A4, D4 равна магической (п. 4.5), то есть:

$X_1+ X_4+ X_{13}+ X_{16}=34$.

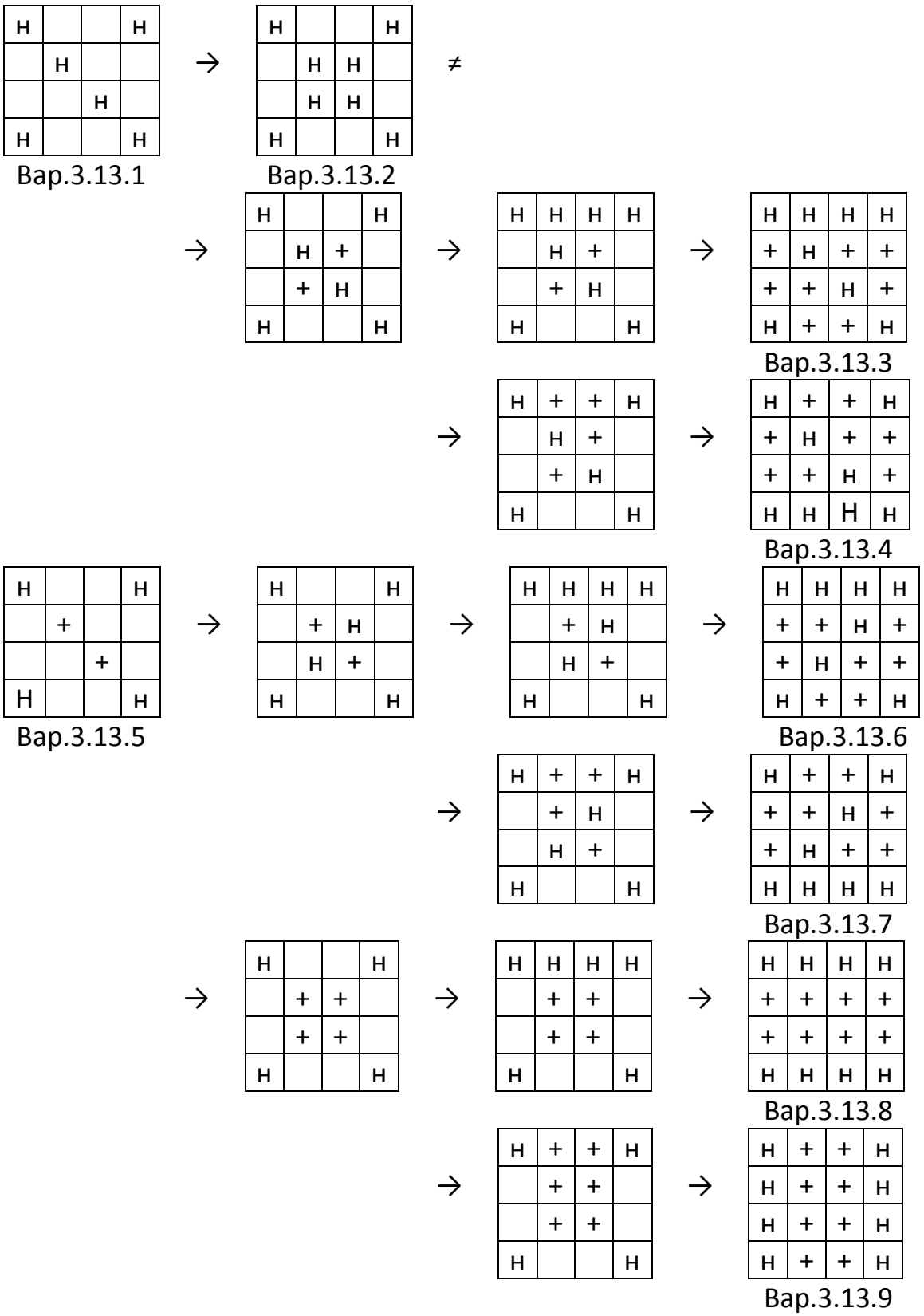
В общем случае такое число можно получить или из четырёх нечётных, или из четырёх чётных, или из двух нечётных и двух чётных чисел. Но попытка получить МК с четырьмя нечётными или четырьмя чётными числами в этих ячейках не увенчается успехом. Вот и попытаемся убедиться в том, что магическая сумма в ячейках A1, D1, A4, D4 может состоять только из

двух нечётных и двух чётных чисел. Убеждаться в этом будем методом от противного, то есть предположим, что в этих ячейках могут располагаться четыре нечётных (чётных) числа и анализируя варианты расположения нечётных и чётных чисел в остальных ячейках придём к противоречию, которое обусловлено этим предположением.

При размещении чисел будем стремиться к обеспечению чётности сумм в четвёрках ячеек с МС, с учётом возможности всего двух вариантов числа в любой ячейке (нечётное/чётное), чётности суммы пары нечётных чисел и необходимости получения требуемого количества чисел каждого типа чётности в конечном варианте квадрата (по восемь).

После размещения чисел каждый полученный вариант проанализируем на наличие противоречий требованиям к МК.

Схема последовательности расстановки нечётных и чётных чисел в квадратах от исходных вариантов до итоговых приведена ниже (Вар.3.13.1 … Вар.3.13.9):



3.14 Расстановка чисел Вар.3.13.2 исключает получение МК потому, что сумма чисел в диагональных ячейках должна равняться 68 (34+34), но в рассматриваемом варианте она равна 64 (1+3+ … +13+15).

Расстановка чисел Вар.3.13.3, Вар.3.13.4, Вар.3.16.6, Вар.3.13.7, исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках второй и третьей строк нечётна, а должна быть чётной (34).

Расстановка чисел Вар.3.13.8, исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках первой и четвёртой строк должна равняться 68 (34+34), но в рассматриваемом варианте она равна 64 (1+3+ … +13+15).

Расстановка чисел Вар.3.13.9, исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках первого и четвёртого столбцов должна равняться 68 (34+34), но в рассматриваемом варианте она равна 64 (1+3+ … +13+15).

Таким образом, предположение о возможности расположения, в ячейках A1, D1, A4, D4 магического квадрата четырёх нечётных чисел, привело к противоречию во всех вариантах, то есть МК с четырьмя нечётными числами в ячейках A1, D1, A4, D4 не существует.

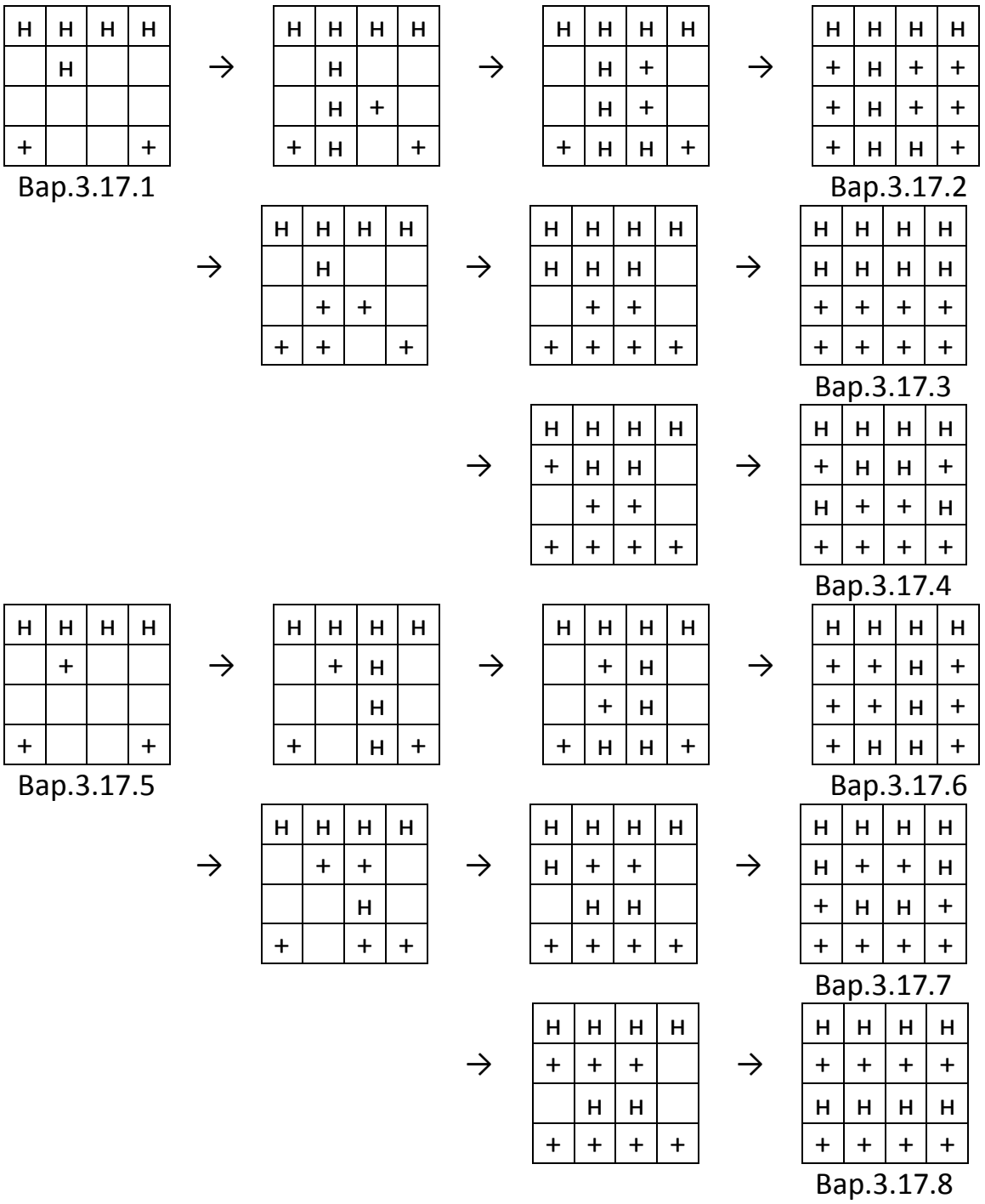
3.15 Хорошо, но может быть в ячейках A1, D1, A4, D4 можно расположить четыре чётных числа? Однако, в этом случае, после использования универсального преобразования (п. 4.11) такое предположение привело бы к утверждению о возможности существования МК с четырьмя нечётными числами в рассматриваемых ячейках. Но это противоречит предыдущему выводу, а значит такой вариант тоже невозможен.

Следовательно, остаётся единственно возможный вариант: в ячейках A1, D1, A4, D4 магического квадрата могут располагаться только по два нечётных и два чётных числа.

3.16 Но тогда в ячейках B2, C2, B3, C3 магических квадратов тоже не могут находиться четыре нечётных или четыре чётных числа. Иначе, в этом случае, после использования тождественного преобразования (п. 3.8, Табл.3.8.1), такое предположение привело бы к утверждению о возможности существования МК с четырьмя нечётными (чётными) числами в ячейках A1, D1, A4, D4. Но это противоречит предыдущему выводу, а значит такой вариант тоже невозможен.

А, может быть, утверждение о невозможности расположения четырёх нечётных (чётных) чисел справедливо и для чисел в ячейках каждой строки и каждого столбца МК? Убедиться в этом тоже необходимо.

3.17 Предположим, что в первой строке могут располагаться четыре нечётных (чётных) числа (ячейки A1, B1, C1, D1), тогда, с учётом уже найденной закономерности (необходимость размещения по два нечётных и два чётных числа в четвёрках внешних и внутренних диагональных ячеек), получим следующую схему последовательности расстановки нечётных и чётных чисел в квадратах от исходных вариантов до итоговых (Вар.3.17.1 … Вар.3.17.8):



3.18 Расстановка чисел Вар.3.17.2 исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках второй и третьей строк нечётна, а должна быть чётной (34).

Расстановка чисел Вар.3.17.3, исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках первой и второй строк должна равняться 68 (34+34), но в рассматриваемом варианте она равна 64 (1+3+ … +13+15).

Расстановка чисел Вар.3.17.4 исключает получение МК потому, что приводит к нечётности суммы из двух нечётных чисел, что невозможно. Действительно, в этом варианте сумма чисел в ячейках B2, C2, A3, D3 равна

30 (1+3+ … +13+15-34), но при этом она должна состоять из двух равных сумм (30/2=15) двух пар нечётных чисел, так как сумма чисел в ячейках B2 и C2 должна быть равна сумме чисел в ячейках A3 и D3.

По аналогичной причине невозможно получение МК и при расстановке чисел согласно Вар.3.17.7.

Расстановка чисел Вар.3.17.6 исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках второй и третьей строк нечётна, а должна быть чётной (34).

Расстановка чисел Вар.3.17.8, исключает получение МК потому, что сумма чисел в ячейках первой и третьей строк должна равняться 68 (34+34), но в рассматриваемом варианте она равна 64 (1+3+ … +13+15).

Таким образом, предположение о возможности расположения, в ячейках A1, B1, C1, D1 магического квадрата четырёх нечётных чисел, привело к противоречию во всех вариантах, то есть МК с четырьмя нечётными числами в ячейках A1, B1, C1, D1 не существует.

3.19 Хорошо, но может быть в ячейках A1, B1, C1, D1 можно расположить четыре чётных числа? Однако, в этом случае, после использования универсального преобразования (п. 3.11) такое предположение привело бы к утверждению о возможности существования МК с четырьмя нечётными числами в рассматриваемых ячейках. Но это противоречит предыдущему выводу, а значит такой вариант тоже невозможен.

Следовательно, остаётся единственно возможный вариант: в ячейках A1, B1, C1, D1 магического квадрата могут располагаться только по два нечётных и два чётных числа.

А учитывая то, что строки и столбцы МК равнозначны (да и повторить приведённые рассуждения для любого варианта не составляет труда), следует вывод: в ячейках любой строки и любого столбца МК могут располагаться только по два чётных и два нечётных числа.

3.20 Логично предположить, что для ячеек B1, C1, B4, C4 и A2, D2, A3, D3, тоже содержащих магические суммы, также справедливо утверждение о двух нечётных и двух чётных числах. Действительно, попытка расположить в них четыре нечётных (или чётных) числа, при соблюдении вывода п.3.19, приведёт к необходимости размещения четырех нечётных (чётных) чисел в ячейках A1, D1, A4, D4, что противоречит выводу п.3.15.

3.21 Теперь, основываясь на заключениях п.3.13 … п.3.20 приходим к итоговому выводу:

Во внешних угловых ячейках (A1, D1, A4, D4), внутренних угловых ячейках (B2, C2, B3, C3), ячейках каждой строки и каждого столбца, а также в ячейках (B1, C1, B4, C4) и (A2, D2, A3, D3) любого МК может находиться

только по два нечётных и два чётных числа, причём сумма чисел в каждой такой четвёрке ячеек равна магической сумме (34).

Назовём этот вывод проще: «правило двух нечётных и двух чётных чисел» или сокращённо: «правило двух …».

3.22 Ну а что же можно сказать о числах в диагональных ячейках? По аналогии можно было бы предположить, что и для них действует «правило двух …». Но, увы, подтвердить такое предположение никак не удастся. Ну, конечно, в этих ячейках могут находиться по два нечётных и два чётных числа, но это не обязательно, ничто не запрещает расположению в этих ячейках также и четырёх нечётных или четырёх чётных чисел. Но значит ли это, что количество нечётных и чётных чисел в ячейках одной диагонали никак не связано с количеством нечётных и чётных чисел в ячейках другой диагонали (например, четыре нечётных числа в одной диагонали и два нечётных числа в другой диагонали)?

Ничего подобного. Квадраты не зря названы магическими, в них всё взаимосвязано и переплетено.

Необходимо обратить внимание на то, что диагональные ячейки образуют собой ещё и четвёрку внешних угловых ячеек (A1, D1, A4, D4) с магической суммой и четвёрку внутренних угловых ячеек (B2, C2, B3, C3) с магической суммой, для которых «правило двух …» как раз действует, а значит в восьми диагональных ячейках обязательно должны находиться четыре нечётных и четыре чётных числа.

Из этого следует, что, если в ячейках одной диагонали будут находиться четыре нечётных числа, то в ячейках второй диагонали должны находиться четыре чётных числа, а если в ячейках одной диагонали будут находиться два нечётных и два чётных числа, то в ячейках второй диагонали тоже должны находиться два нечётных и два чётных числа.

Вот такие интересные особенности присущи классическим магическим квадратам четвёртого порядка и убедиться в их существовании оказалось можно путём достаточно несложных, вполне понятных (даже элементарных) рассуждений.

МК с четырьмя нечётными числами в ячейках одной диагонали и четырьмя чётными числами в ячейках другой диагонали будем считать нетипичными (НТП МК), в отличии от типичных (по умолчанию) МК, у которых в ячейках каждой диагонали располагается по два нечётных и по два чётных числа.

3.23 А дальше что? Особенность нечётности/чётности чисел и магических сумм в виде «правила двух …» можно использовать, но вряд ли это существенно поможет при исследовании МК.

Ну разделим МК на варианты по расположению нечётных и чётных чисел, но это даст только одно дополнительное уравнение для каждого из

вариантов и позволит исключить всего одно неизвестное, так ведь останется ещё шесть переменных. А это ещё слишком много для определения значений оставшихся неизвестных.

Хорошо бы как-то преобразовать МК так, чтобы появилась возможность снова воспользоваться особенностью нечётности/чётности чисел и сумм. Оказывается, что такая возможность существует.

Обратим внимание на то, что если к каждому нечётному числу исходного МК прибавить по единице, а затем каждое число МК разделить на два, то получится новый квадрат, с новыми нечётными и чётными числами и суммами чисел в четвёрках ячеек, в которых до этого преобразования сумма чисел была магической. Далее, для полученного квадрата, можно снова выполнить описанное преобразование. Ну и с этим квадратом, опять же, выполнить такую процедуру ещё раз.

Результат таких преобразований можно проанализировать, рассмотрев этапы этих действий в Табл.3.23.1:

A {	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
+	1		1		1		1		1		1		1		1		
=	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16	16	/2
B {=	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	
+	1	1			1	1			1	1			1	1			
=	2	2	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6	8	8	8	8	/2
C {=	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	
+	1	1	1	1					1	1	1	1					
=	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	/2
D {=	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	

Табл.3.23.1

Здесь, в строке А, расположены все числа исходного МК, который будет одновременно считаться МК первого уровня.

В строке ниже, под нечётными числами, стоят единицы, которые добавляются к этим нечётным числам.

В следующей строке показана полученная в результате этого действия сумма (для тех чисел, к которым добавилось по единице), а также стоят чётные числа первой строки.

В строке В расположены числа, полученные в результате деления на 2 каждого числа предыдущей строки. Причём каждое из этих чисел будет находиться в той же ячейке, что и число ему предшествующее.

Квадрат с числами, возникший после такого преобразования будет считаться квадратом второго уровня.

После проведения с этим квадратом аналогичного преобразования будет получен уже квадрат третьего уровня, в соответствующих ячейках которого уже будут расположены числа, показанные в строке С.

Ну и после следующего аналогичного преобразования будет получен квадрат четвёртого уровня, в соответствующих ячейках которого будут находиться числа, показанные в строке D.

Будем считать такую последовательность преобразований (Табл.3.23.1) базовым циклом, а каждую ступень цикла с увеличением значений нечётных чисел на единицу и последующим делением всех чисел пополам, будем считать методом уменьшения номиналов.

3.24 Итак, что же можно сказать о полученном квадрате второго уровня, в чём заключается его отличие от исходного МК?

Изменился общий набор чисел, на место натуральных чисел от единицы до шестнадцати пришли числа 1, 1, 2, 2 …. 7, 7, 8, 8 (строка В Табл.3.23.1). Изменилась величина суммы чисел, расположенных в ячейках, в которых в исходном МК сумма чисел была равна магической сумме, вместо 34, учитывая «правило двух …», она станет равной (34+2)/2=18, причём если в исходном МК в диагональных ячейках находилось по два нечётных и по два чётных числа, то свойства получившегося квадрата будут аналогичны свойствам исходного МК, то есть получившийся МК тоже будет магическим, только немного изменённым. Но тогда для такого типа МК должно выполняться «правило двух …», с учётом измененного набора применяемых чисел (1, 1, 2, 2 …. 7, 7, 8, 8) и изменённой магической суммы (18). Убедиться в этом можно проведя процесс исследования аналогичный выполненному в п.3.13…п.3.21.

Ну а справедливо ли «правило двух …» для квадратов второго уровня, полученных после преобразования нетипичных МК? Не очевидно. Тем более, что полученные квадраты будут уже не совсем магическими из-за несоответствия сумм чисел в четвёрках ячеек диагоналей магической сумме (19 и 17 вместо 18).

Придётся заняться выяснением этого вопроса.

3.25 Но, предварительно, обратим внимание, что нетипичные МК можно разделить на виды, по моменту появления нетипичности.

Те МК, у которых в исходном квадрате в ячейках одной диагонали размещены четыре нечётных числа, а в ячейках второй диагонали размещены четыре чётных числа, будем считать нетипичными МК первого вида.

Те МК, у которых в исходном квадрате в диагональных ячейках размещены по два нечётных и по два чётных числа, а уже в квадрате второго

уровня в ячейках одной диагонали размещены четыре нечётных числа, а в ячейках второй диагонали размещены четыре чётных числа, будем считать нетипичными МК второго вида.

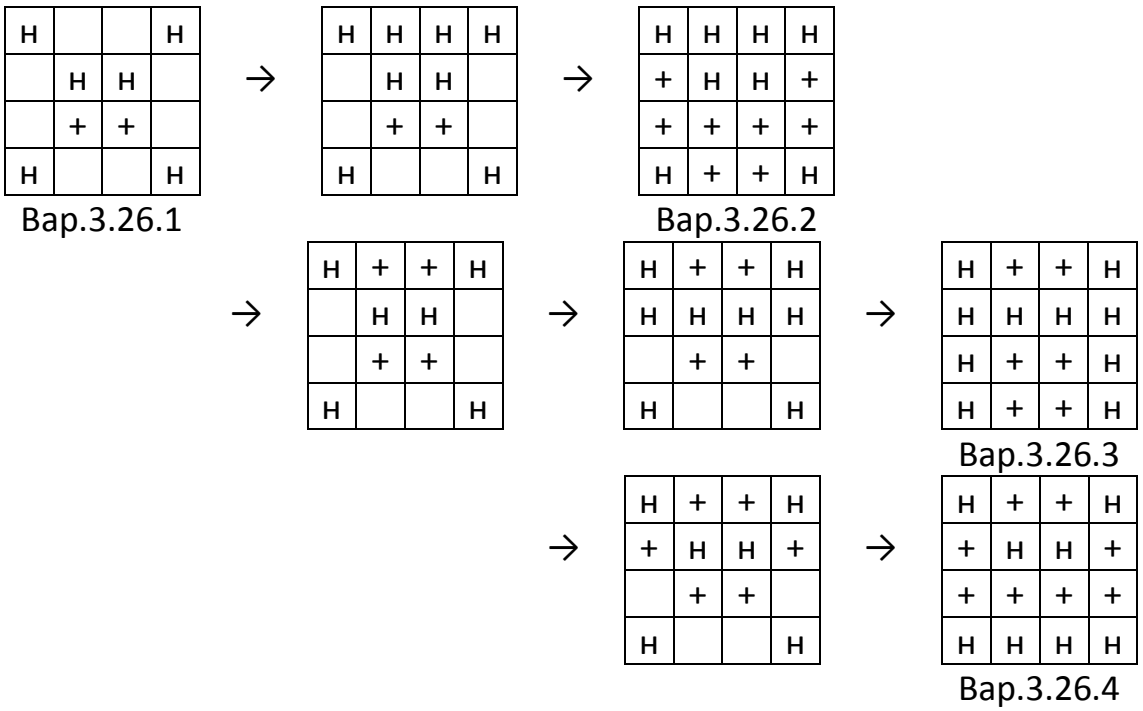
Те МК, у которых в исходном квадрате и квадрате второго уровня в диагональных ячейках размещены по два нечётных и по два чётных числа, а уже в квадрате третьего уровня в ячейках одной диагонали размещены четыре нечётных числа, а в ячейках второй диагонали размещены четыре чётных числа, будем считать нетипичными МК третьего вида.

Ну и будем иметь ввиду, что нетипичных МК четвёртого вида не существует, так как если в диагональных ячейках квадратов первых трёх уровней размещалось по два нечётных и по два чётных числа, то в квадрате четвёртого уровня, соответствующую магическую сумму (6), получить из четырёх нечётных или четырёх чётных чисел невозможно (1+1+1+1=4<6; 2+2+2+2=8>6), то есть она может быть получена только из двух нечётных и двух чётных чисел (1+1+2+2).

Так что выяснять, выполняется ли «правило двух …» придётся для каждого из видов нетипичных МК.

Воспользуемся уже опробованной методикой исследования (п.3.13 … п.3.21), но принимая во внимание нечётность сумм в четвёрках диагональных ячеек [(34+4)/2=19 в диагонали A1-D4 и 34/2=17 в диагонали D1-A4].

3.26 Предположим, что в ячейках A1, D1, A4, D4 квадратов второго уровня, полученных от исходных нетипичных МК первого вида, могут располагаться четыре нечётных (чётных) числа. Тогда получим следующую схему последовательности расстановки нечётных и чётных чисел (без учёта инвариантов, но с учётом необходимости наличия третьего нечётного числа в диагонали, если в ней уже расположены два нечётных числа) в квадратах от исходных вариантов до итоговых (Вар.3.26.1 … Вар.3.26.4):



3.27 Разглядеть какие-либо противоречия в расстановке чисел Вар.3.26.2 не представляется возможным, значит придётся провести его дальнейший анализ. Для этого выразим зависимые неизвестные в соответствующем исходном МК через независимые переменные, воспользовавшись в дополнение к базовым уравнениям МК ещё и уравнением для нечётных чисел в квадрате второго уровня Вар.3.26.2:

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_6+X_7+X_{13}+X_{16}=1+2+5+6+9+10+13+14=60$, получим выражения для чисел согласно Табл.3.27.1:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	$X_1+X_4-X_7-8$	X_7	$-X_1-X_4-X_5+42$
$-X_1+X_4-X_5+X_7+X_{10}$	X_{10}	$-X_1-X_4-X_{10}+42$	$2X_1+X_5-X_7-X_{10}-8$
$-X_4-X_7-X_{10}+34$	$-X_1-X_2-X_4+X_7-X_{10}+42$	$2X_1+X_2+2X_4-X_7+X_{10}-42$	$-X_1+X_7+X_{10}$

Табл.3.27.1

Чтобы продолжить анализ определим варианты расстановки чисел в этом квадрате.

В соответствии с принятым условием в ячейках A1, B2, C3, D4 находятся нечётные числа, а в ячейках D1, C2, B3, A4 находятся чётные числа. Для определения признака нечётности у остальных чисел переберём все сочетания по нему у чисел в ячейках B1 и A2 (+/+, +/н, н/+, н/н) и, воспользовавшись выражениями Табл.3.27.1, получим варианты расстановки чисел в исходном МК, соответствующие Вар.3.26.2 квадрата второго уровня.

Для упрощения процесса определения признака нечётности\чётности выражений в ячейках можно каждое нечётное число для независимых переменных в вариантах представить в виде числа 1 (это будет влиять на конечное значение выражения в ячейке по нечётности также, как и реальное значение нечётного числа), а каждое чётное – в виде числа 0 (с соответствующим влиянием на чётность выражения для числа в ячейке), а после подстановки их в выражения Табл.3.27.1 полученные значения отслеживать только на предмет нечётности\чётности, и, таким образом, получать варианты расстановки нечётных и чётных чисел в соответствующих исходных квадратах (Вар.3.27.1, Вар.3.27.2, Вар.3.27.3, Вар.3.27.4):

н	+	н	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	н	+	н

Вар.3.27.1

н	+	н	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	н	+	н

Вар.3.27.2

н	н	+	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	+	н	н

Вар.3.27.3

н	н	+	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	н	н

Вар.3.27.4

Теперь, сопоставляя варианты расстановки чисел в исходном МК и в квадрате второго уровня можно продолжить дальнейший анализ для поиска противоречий.

3.28 Сочетание Вар.3.27.1→ Вар.3.26.2 приведёт к следующим соотношениям (Вар.3.28.1):

н	+	н	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	н	+	н

Вар.3.27.1 →

н	н	н	н
+	н	н	+
+	+	+	+
н	+	+	н

Вар.3.26.2 →

$н_н$	$+_н$	$н_н$	$+_н$
$+_+$	$н_н$	$+_н$	$н_+$
$н_+$	$+_+$	$н_+$	$+_+$
$+_н$	$н_+$	$+_+$	$н_н$

Вар.3.28.1

Воспользовавшись дополнительными уравнениями для одинаковых видов перехода:

$X_1+X_3+X_6+X_{16}=1+5+9+13=28$;

$X_5+X_{10}+X_{12}+X_{15}=4+8+12+16=40$;

$X_8+X_9+X_{11}+X_{14}=3+7+11+15=36$, получим выражения для чисел исходного МК согласно Табл.3.28.1 (такой способ получения дополнительных уравнений будем считать методом использования одноимённых сочетаний при уровневых переходах).

X_1	$X_3-X_6+X_{15}-2$	X_3	$-X_1-2X_3+X_6-X_{15}+36$
$-X_1-X_3-X_{15}+38$	X_6	$-2X_3-X_{15}+28$	$X_1+3X_3-X_6+2X_{15}-32$
$-X_1-2X_3+26$	$X_3-X_6+X_{15}$	X_3+6	$X_1+X_6-X_{15}+2$
$X_1+3X_3+X_{15}-30$	$-2X_3+X_6-2X_{15}+36$	X_{15}	$-X_1-X_3-X_6+28$

Табл.3.28.1

Увидеть какие-либо противоречия в выражениях для чисел Табл.3.28.1 также не представляется возможным. Что же делать?

Можно, конечно, перейти к расстановке чисел в квадрате третьего уровня и, воспользовавшись полученными соотношениями, продолжить поиск противоречий, но это процесс длительный и трудоёмкий.

Можно для каждого из видов перехода получить уравнение для сумм квадратов чисел, соответствующих этому переходу, найти корни полученной системы уравнений и убедиться, что они не соответствуют установленному для МК набору чисел, но этот путь не обладает наглядностью.

В данном случае лучше перебрать все сочетания чисел 1, 5, 9, 13 в ячейках A1, C1, B2, и, подставив их в выражения для чисел согласно Табл.3.28.1 зафиксировать проявившиеся противоречия. При этом надо иметь ввиду, что для числа в ячейке C1 (X_3), значение 13 непригодно, так как при этом значение числа в ячейке C3 (X_{11}) будет равно 19 (X_3+6), что неприемлемо. Также надо иметь ввиду, что при $X_3=1$, X_1 должно быть больше девяти, так как в противном случае

$X_{13макс.}=X_1+3X_3+X_{15}-30=9+3+16-30=-2$, что неприемлемо.

С учётом этих ограничений получим и проанализируем предполагаемые варианты.

При $X_3=1$, $X_1=13$, $X_6=5$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.2:

13	$X_{15}-6$	1	$-X_{15}+26$
$-X_{15}+24$	5	$-X_{15}+26$	$2X_{15}-21$
11	$X_{15}-4$	7	$-X_{15}+20$
$X_{15}-14$	$-2X_{15}+39$	X_{15}	9

Табл.3.28.2

Здесь $X_4=-X_{15}+26=X_7$, что неприемлемо.

При $X_3=1$, $X_1=13$, $X_6=9$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.3:

13	X_{15}-10	1	-X_{15}+30
-X_{15}+24	9	-X_{15}+26	2X_{15}-25
11	X_{15}-8	7	-X_{15}+24
X_{15}-14	-2X_{15}+43	X_{15}	5

Табл.3.28.3

Здесь X_5=-X_{15}+24=X_{12}, что неприемлемо.

При X_3=5, X_1=1, X_6=9 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.4:

1	X_{15}-6	5	-X_{15}+34
-X_{15}+32	9	-X_{15}+18	2X_{15}-25
15	X_{15}-4	11	-X_{15}+12
X_{15}-14	-2X_{15}+35	X_{15}	13

Табл.3.28.4

Здесь $X_{4мин.}$=-X_{15}+34=-16+34=18, что неприемлемо.

При X_3=5, X_1=1, X_6=13 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.5:

1	X_{15}-10	5	-X_{15}+38
-X_{15}+32	13	-X_{15}+18	2X_{15}-29
15	X_{15}-8	11	-X_{15}+16
X_{15}-14	-2X_{15}+39	X_{15}	9

Табл.3.28.5

Здесь $X_{4мин.}$=-X_{15}+38=-16+38=22, что неприемлемо.

При X_3=5, X_1=9, X_6=1 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.6:

9	X_{15}+2	5	-X_{15}+18
-X_{15}+24	1	-X_{15}+18	2X_{15}-9
7	X_{15}+4	11	-X_{15}+12
X_{15}-6	-2X_{15}+27	X_{15}	13

Табл.3.28.6

Здесь X_4=-X_{15}+18=X_7, что неприемлемо.

При X_3=5, X_1=9, X_6=13 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.7:

9	X_{15}-10	5	-X_{15}+30
-X_{15}+24	13	-X_{15}+18	2X_{15}-21
7	X_{15}-8	11	-X_{15}+24
X_{15}-6	-2X_{15}+39	X_{15}	1

Табл.3.28.7

Здесь X_5=-X_{15}+24=X_{12}, что неприемлемо.

При X_3=5, X_1=13, X_6=1 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.8:

13	X_{15}+2	5	-X_{15}+14
-X_{15}+20	1	-X_{15}+18	2X_{15}-5
3	X_{15}+4	11	-X_{15}+16
X_{15}-2	-2X_{15}+27	X_{15}	9

Табл.3.28.8

Здесь X_8+X_{14}=2X_{15}-5+(-2X_{15}+27)=22=7+15, так как для чисел этого вида перехода (3, 7, 11, 15) по другому такую сумму получить невозможно. Соответственно X_{15} можно получить либо из уравнения 2X_{15}-5=7, X_{15}=6; либо из уравнения 2X_{15}-5=15, X_{15}=10.

Найденные корни не соответствуют типу перехода для переменного X_{15} (4, 8, 12, 16).

При X_3=5, X_1=13, X_6=1 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.9:

13	X_{15}-6	5	-X_{15}+22
-X_{15}+20	9	-X_{15}+18	2X_{15}-13
3	X_{15}-4	11	-X_{15}+24
X_{15}-2	-2X_{15}+35	X_{15}	1

Табл.3.28.9

Здесь по аналогии с Табл.3.28.8 получим: 2X_{15}-13=7, X_{15}=10 или 2X_{15}-13=15, X_{15}=14.

Найденные корни не соответствуют типу перехода для переменного X_{15} (4, 8, 12, 16).

При X_3=9, X_1=1, X_6=5 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.10:

1	$X_{15}+2$	9	$-X_{15}+22$
$-X_{15}+28$	5	$-X_{15}+10$	$2X_{15}-9$
7	$X_{15}+4$	15	$-X_{15}+8$
$X_{15}-2$	$-2X_{15}+23$	X_{15}	13

Табл.3.28.10

Здесь $X_5+X_{10}=(-X_{15}+28)+(X_{15}+4)=32>16+12$, что неприемлемо.

При $X_3=9$, $X_1=1$, $X_6=13$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.11:

1	$X_{15}-6$	9	$-X_{15}+30$
$-X_{15}+28$	13	$-X_{15}+10$	$2X_{15}-17$
7	$X_{15}-4$	15	$-X_{15}+16$
$X_{15}-2$	$-2X_{15}+31$	X_{15}	5

Табл.3.28.11

Здесь $X_5+X_{15}=(-X_{15}+28)+X_{15}=28=16+12$.

Но при этих значениях $X_7=(-X_{15}+10)<0$, что неприемлемо.

При $X_3=9$, $X_1=5$, $X_6=1$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.12:

5	$X_{15}+6$	9	$-X_{15}+14$
$-X_{15}+24$	1	$-X_{15}+10$	$2X_{15}-1$
3	$X_{15}+8$	15	$-X_{15}+8$
$X_{15}+2$	$-2X_{15}+19$	X_{15}	13

Табл.3.28.12

Здесь $X_5+X_{10}=(-X_{15}+24)+(X_{15}+8)=32>16+12$, что неприемлемо.

При $X_3=9$, $X_1=5$, $X_6=13$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.13:

5	$X_{15}-6$	9	$-X_{15}+26$
$-X_{15}+24$	13	$-X_{15}+10$	$2X_{15}-13$
3	$X_{15}-4$	15	$-X_{15}+20$
$X_{15}+2$	$-2X_{15}+31$	X_{15}	1

Табл.3.28.13

Здесь $X_5+X_{15}=(-X_{15}+24)+X_{15}=24=16+8$.

Но при $X_{15}=16$, $X_7=(-X_{15}+10)=-6$, что неприемлемо.

А при $X_{15}=8$, $X_2=(X_{15}-6)=2=X_7=(-X_{15}+10)$, что тоже неприемлемо.

При X_3=9, X_1=13, X_6=1 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.14:

13	X_{15}+6	9	-X_{15}+6
-X_{15}+16	1	-X_{15}+10	2X_{15}+7
-5	X_{15}+8	15	-X_{15}+16
X_{15}+10	-2X_{15}+19	X_{15}	5

Табл.3.28.14

Здесь X_9=-5, что неприемлемо.

При X_3=9, X_1=13, X_6=5 получим выражения для чисел согласно Табл.3.28.15:

13	X_{15}+2	9	-X_{15}+10
-X_{15}+16	5	-X_{15}+10	2X_{15}+3
-5	X_{15}+4	15	-X_{15}+20
X_{15}+10	-2X_{15}+23	X_{15}	1

Табл.3.28.15

Здесь X_9=-5, что неприемлемо.

Таким образом все предполагаемые варианты, следующие из сочетания Вар.3.27.1→ Вар.3.26.2→ Вар.3.28.1 ведут к противоречию, следовательно, сочетание, соответствующее видам перехода согласно Вар.3.27.1→ Вар.3.26.2→ Вар.3.28.1 не даст магических квадратов.

3.29 Сочетание Вар.3.27.2→ Вар.3.26.2 приведёт к следующим соотношениям (Вар.3.29.1):

н	+	н	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	н	+	н

Вар.3.27.2 →

н	н	н	н
+	н	н	+
+	+	+	+
н	+	+	н

Вар.3.26.2 →

$н_н$	$+_н$	$н_н$	$+_н$
$н_+$	$н_н$	$+_н$	$+_+$
$+_+$	$+_+$	$н_+$	$н_+$
$+_н$	$н_+$	$+_+$	$н_н$

Вар.3.29.1

Воспользовавшись дополнительными уравнениями для одинаковых видов перехода:

$X_1+X_3+X_6+X_{16}=1+5+9+13=28$;

$X_8+X_9+X_{10}+X_{15}=4+8+12+16=40$;

$X_5+X_{11}+X_{12}+X_{14}=3+7+11+15=36$, получим выражения для чисел исходного МК согласно Табл.3.29.1:

X_1	$X_3-X_6+X_{15}-2$	X_3	$-X_1-2X_3+X_6-X_{15}+36$
$-X_1-X_6+X_{15}+15$	X_6	$-2X_3-X_{15}+28$	X_1+2X_3-9
$X_1-3X_3+X_6-2X_{15}+49$	$X_3-X_6+X_{15}$	X_3+6	$X_1+X_3+X_{15}-21$
$X_1+3X_3+X_{15}-30$	$-2X_3+X_6-2X_{15}+36$	X_{15}	$-X_1-X_3-X_6+28$

Табл.3.29.1

В данном случае можно сразу увидеть, что значение X_8 при любом значении X_1 (1, 5, 9, 13) не соответствуют типу перехода для переменной X_8 (4, 8, 12, 16), так как $X_8=X_1+2X_3-9$ при значениях X_1 (1, 5, 9, 13) не кратно четырём.

Таким образом все предполагаемые варианты, следующие из сочетания Вар.3.27.2→ Вар.3.26.2→ Вар.3.29.1 ведут к противоречию, следовательно, сочетание, соответствующее видам перехода согласно Вар.3.27.2→ Вар.3.26.2→ Вар.3.29.1 не даст магических квадратов.

3.30 Сочетание Вар.3.27.3→ Вар.3.26.2 приведёт к следующим соотношениям (Вар.3.30.1):

н	н	+	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	+	н	н

Вар.3.27.3

→

н	н	н	н
+	н	н	+
+	+	+	+
н	+	+	н

Вар.3.26.2

→

$н_н$	$н_н$	$+_н$	$+_н$
$+_+$	$н_н$	$+_н$	$н_+$
$н_+$	$+_+$	$н_+$	$+_+$
$+_н$	$+_+$	$н_+$	$н_н$

Вар.3.30.1

Воспользовавшись дополнительными уравнениями для одинаковых видов перехода:

$X_1+X_2+X_6+X_{16}=1+5+9+13=28$;

$X_5+X_{10}+X_{12}+X_{14}=4+8+12+16=40$;

$X_8+X_9+X_{11}+X_{15}=3+7+11+15=36$, получим выражения для чисел исходного МК согласно Табл.3.30.1:

X_1	X_2	$-X_1-X_2+X_8+13$	$-X_8+21$
$-X_1+21$	X_6	$X_1-X_6-X_8+13$	X_8
$-X_2-X_6-X_8+28$	$-X_1-X_2+X_8+15$	X_2+6	$X_1+X_2+X_6-15$
$X_2+X_6+X_8-15$	$X_1-X_6-X_8+19$	X_6+2	$-X_1-X_2-X_6+28$

Табл.3.30.1

Снова воспользуемся перебором сочетаний чисел 1, 5, 9, 13 в ячейках A1, B1, B2 с подстановкой их в выражения для чисел согласно Табл.3.30.1 с фиксацией проявившихся противоречий. При этом будем иметь ввиду, что для числа в ячейке A1 (X_1), значение 1 непригодно, так как при этом значение

числа в ячейке A2 (X_5) будет равно 20 ($-X_1+21$), что неприемлемо. Также будем иметь ввиду, X_2 должно быть меньше 13, так как в противном случае

$X_{11}=X_2+6=13+6=19$, что неприемлемо.

С учётом этих ограничений получим и проанализируем предполагаемые варианты.

При $X_1=5$, $X_2=1$, $X_6=9$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.2:

5	1	X_8+7	$-X_8+21$
16	9	$-X_8+9$	X_8
$-X_8+18$	X_8+9	7	0
X_8-5	$-X_8+15$	11	13

Табл.3.30.2

Здесь $X_{12}=0$, что неприемлемо.

При $X_1=5$, $X_2=1$, $X_6=13$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.3:

5	1	X_8+7	$-X_8+21$
16	13	$-X_8+5$	X_8
$-X_8+14$	X_8+9	7	4
X_8-1	$-X_8+11$	15	9

Табл.3.30.3

Здесь $X_7+X_{13}=(-X_8+5)+(X_8-1)=4<(2+6)$, что неприемлемо.

При $X_1=5$, $X_2=9$, $X_6=1$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.4:

5	9	X_8-1	$-X_8+21$
16	1	$-X_8+17$	X_8
$-X_8+18$	X_8+1	15	0
X_8-5	$-X_8+23$	3	13

Табл.3.30.4

Здесь $X_{12}=0$, что неприемлемо.

При $X_1=5$, $X_2=9$, $X_6=13$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.5:

5	9	X_8-1	-X_8+21
16	13	-X_8+5	X_8
-X_8+6	X_8+1	15	12
X_8+7	-X_8+11	3	1

Табл.3.30.5

Здесь $X_8+X_9=X_8+(-X_8+6)=6<(3+7)$, что неприемлемо.

При $X_1=9$, $X_2=1$, $X_6=5$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.6:

9	1	X_8+3	-X_8+21
12	5	-X_8+17	X_8
-X_8+22	X_8+5	7	0
X_8-9	-X_8+23	7	13

Табл.3.30.6

Здесь $X_{12}=0$, что неприемлемо.

При $X_1=9$, $X_2=1$, $X_6=13$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.7:

9	1	X_8+3	-X_8+21
12	13	-X_8+9	X_8
-X_8+14	X_8+5	7	8
X_8-1	-X_8+15	15	5

Табл.3.30.7

Здесь для X_8 свободны только два значения 3 и 11 (7 и 15 заняты).
Но при $X_8=3$, получим $X_4=-X_8+21=-3+21=18$, что неприемлемо.
А при $X_8=11$, получим $X_7=-X_8+9=-11+9=-2$, что неприемлемо.

При $X_1=9$, $X_2=5$, $X_6=1$ получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.8:

9	5	X_8-1	-X_8+21
12	1	-X_8+21	X_8
-X_8+22	X_8+1	11	0
X_8-9	-X_8+27	3	13

Табл.3.30.8

Здесь $X_{12}=0$, что неприемлемо.

При X_1=9, X_2=5, X_6=13 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.9:

9	5	X_8-1	-X_8+21
12	13	-X_8+9	X_8
-X_8+10	X_8+1	11	12
X_8+3	-X_8+15	15	1

Табл.3.30.9

Здесь X_5=X_{12}=12, что неприемлемо.

При X_1=13, X_2=1, X_6=5 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.10:

13	1	X_8-1	-X_8+21
8	5	-X_8+21	X_8
-X_8+22	X_8+1	7	4
X_8-9	-X_8+27	7	9

Табл.3.30.10

Здесь X_{11}=X_{15}=7, что неприемлемо.

При X_1=13, X_2=1, X_6=9 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.11:

13	1	X_8-1	-X_8+21
8	9	-X_8+17	X_8
-X_8+18	X_8+1	7	8
X_8-5	-X_8+23	11	5

Табл.3.30.11

Здесь X_5=X_{12}=8, что неприемлемо.

При X_1=13, X_2=5, X_6=1 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.12:

13	5	X_8-5	-X_8+21
8	1	-X_8+25	X_8
-X_8+22	X_8-3	11	4
X_8-9	-X_8+31	3	9

Табл.3.30.12

Здесь для X_8 свободны только два значения 7 и 15 (3 и 11 заняты).

Но при X_8=7, получим $X_{13}=X_8-9=7-9=-2$, что неприемлемо.
А при X_8=15, получим $X_3=X_8-5=10=X_7=-X_8+25=10$, что неприемлемо.

При X_1=13, X_2=5, X_6=9 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.13:

13	5	X_8-5	-X_8+21
8	9	-X_8+17	X_8
-X_8+14	X_8-3	11	12
X_8-1	-X_8+23	11	1

Табл.3.30.13

Здесь $X_{11}=X_{15}$=11, что неприемлемо.

При X_1=13, X_2=9, X_6=1 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.14:

13	9	X_8-9	-X_8+21
8	1	-X_8+25	X_8
-X_8+18	X_8-7	15	8
X_8-5	-X_8+31	3	5

Табл.3.30.14

Здесь $X_5=X_{12}$=8, что неприемлемо.

При X_1=13, X_2=9, X_6=5 получим выражения для чисел согласно Табл.3.30.15:

13	9	X_8-9	-X_8+21
8	5	-X_8+21	X_8
-X_8+14	X_8-7	15	12
X_8-1	-X_8+27	7	1

Табл.3.30.15

Здесь $X_4=X_7$=-X_8+21, что неприемлемо.

Таким образом все предполагаемые варианты, следующие из сочетания Вар.3.27.3→ Вар.3.26.2→ Вар.3.30.1 ведут к противоречию, следовательно, сочетание, соответствующее видам перехода согласно Вар.3.27.3→ Вар.3.26.2→ Вар.3.30.1 не даст магических квадратов.

3.31 Сочетание Вар.3.27.4→ Вар.3.26.2 не требует дополнительного анализа.

н	н	+	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	н	н

Вар.3.27.4

→

н	н	н	н
+	н	н	+
+	+	+	+
н	+	+	н

Вар.3.26.2

Здесь, для констатации противоречия достаточно обратить внимание на то, что в исходном МК сумма чисел в ячейках A1, B1, A2, B2 должна быть равна 32 [(1+3+5+7+9+11+13+15)/2], соответственно, в квадрате второго уровня она должна быть равна 18 [(32+4)/2], но в действительности эта сумма нечётна (Вар.3.26.2). Следовательно, квадрат с расстановкой чисел согласно Вар.3.27.4 не может быть исходным для квадрата с расстановкой чисел согласно Вар.3.26.2.

Таким образом, ни один вариант исходного нетипичного МК первого вида, не смог привести к квадрату второго уровня с расстановкой чисел согласно Вар.3.26.2, следовательно, от магического квадрата невозможно получить квадрат второго уровня с расстановкой чисел в соответствии с Вар.3.28.2.

3.32 Расстановка чисел в квадрате второго уровня согласно Вар.3.26.3 не может быть получена после преобразования МК, так как содержит десять нечётных чисел (должно быть восемь нечётных чисел).

Расстановка чисел согласно Вар.3.28.4 путём невариантного и тождественного преобразований может быть сведена к уже рассмотренной расстановке чисел Вар.3.26.2 и, соответственно, тоже не может быть получена после преобразования МК.

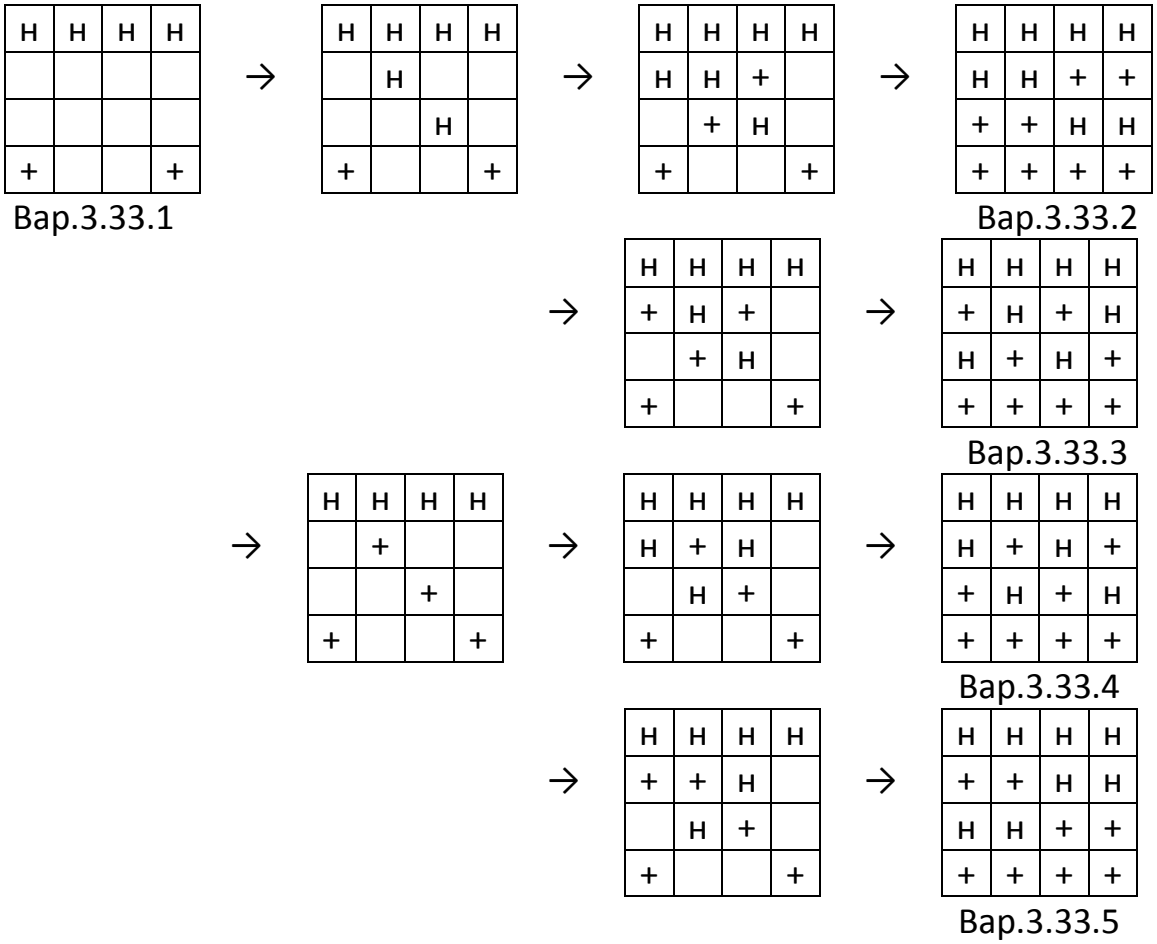
Таким образом, предположение о возможности расположения в ячейках A1, D1, A4, D4 квадрата второго уровня, полученного из нетипичного МК, четырёх нечётных чисел, привело к противоречию, то есть не существует, в том числе и нетипичных МК, у которых в квадрате второго уровня в ячейках A1, B1, C1, D1 находилось бы четыре нечётных числа.

Далее, повторив рассуждения п.3.15 и п.3.16, приходим к выводу:
В квадратах второго уровня, полученных от нетипичных МК, для чисел в ячейках A1, D1, A4, D4 и чисел в ячейках B2, C2, B3, C3 «правило двух …» также справедливо.

Разумеется, необходимо проверить действует ли это правило в отношении чисел строк и столбцов?

3.33 Предположим, что в ячейках A1, B1, C1, D1 квадратов второго уровня, полученных от исходных нетипичных МК первого вида, могут располагаться четыре нечётных (чётных) числа. Тогда получим следующую схему последовательности расстановки нечётных и чётных чисел (без учёта

инвариантов, но с учётом вывода п.3.32) в квадратах от исходных вариантов до итоговых (Вар.3.33.1 … Вар.3.33.5):



3.34 Разглядеть какие-либо противоречия в расстановке чисел Вар.3.33.2 не представляется возможным, значит придётся провести его дальнейший анализ. Для этого выразим зависимые неизвестные в соответствующем исходном МК через независимые переменные, воспользовавшись в дополнение к базовым уравнениям МК ещё и уравнением для нечётных чисел в квадрате второго уровня Вар.3.33.2:

$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_{11}+X_{12}=1+2+5+6+9+10+13+14=60$, получим выражения для чисел согласно Табл.3.34.1:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	X_6	$X_1+X_4-2X_5-X_6+2X_{16}-8$	$-X_1-X_4+X_5-2X_{16}+42$
$X_4-X_5+X_{16}$	$-X_4+2X_5+X_6-X_{16}+8$	$-X_1-X_6-X_{16}+34$	$X_1-X_5+X_{16}-8$
$-X_1-X_4-X_{16}+34$	$-X_2+X_4-2X_5-2X_6+X_{16}+26$	$X_1+X_2+2X_5+2X_6-X_{16}-26$	X_{16}

Табл.3.34.1

Чтобы продолжить анализ надо определить варианты расстановки чисел в этом квадрате.

В соответствии с принятым условием в ячейках A1, B2, C3, D4 находятся нечётные числа, а в ячейках D1, C2, B3, A4 находятся чётные числа. Для определения признака нечётности у остальных чисел переберём все сочетания по нему у чисел в ячейках B1 и A2 (+/+, +/н, н/+, н/н) и, воспользовавшись выражениями Табл.3.34.1, получим варианты расстановки чисел в исходном МК, соответствующие Вар.3.33.2 квадрата второго уровня.

Для упрощения процесса определения признака нечётности\чётности можно каждое нечётное число в вариантах представить в виде числа 1, а каждое чётное – в виде числа 0, а после подстановки их в выражения Табл.3.27.1 полученные значения отслеживать только на предмет нечётности\чётности, и, таким образом, получать варианты расстановки нечётных и чётных чисел в соответствующих исходных квадратах (Вар.3.34.1, Вар.3.34.2, Вар.3.34.3, Вар.3.34.4):

н	+	н	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	н	+	н

Вар.3.34.1

н	+	н	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	н	+	н

Вар.3.34.2

н	н	+	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	+	н	н

Вар.3.34.3

н	н	+	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	н	н

Вар.3.34.4

Теперь, сопоставляя варианты расстановки чисел в исходном МК и в квадрате второго уровня можно продолжить дальнейший анализ для поиска противоречий.

3.35 Сочетание Вар.3.34.1→ Вар.3.33.2 не требует дополнительного анализа.

н	+	н	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	н	+	н

Вар.3.34.1

→

н	н	н	н
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	+	+

Вар.3.33.2

Здесь, для констатации противоречия достаточно обратить внимание на то, что в исходном МК сумма чисел в ячейках A1, C1, A3, C3 должна быть равна 32 [(1+3+5+7+9+11+13+15)/2], соответственно, в квадрате второго уровня она должна быть равна 18 [(32+4)/2], но в действительности эта сумма нечётна (Вар.3.33.2). Следовательно, квадрат с расстановкой чисел

согласно Вар.3.34.1 не может быть исходным для квадрата с расстановкой чисел согласно Вар.3.33.2.

3.36 Сочетание Вар.3.34.2→ Вар.3.33.2 приведёт к соотношениям согласно Вар.3.36.1:

н	+	н	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	н	+	н

Вар.3.34.2 →

н	н	н	н
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	+	+

Вар.3.33.2 →

$н_н$	$+_н$	$н_н$	$+_н$
$н_н$	$н_н$	$+_+$	$+_+$
$+_+$	$+_+$	$н_н$	$н_н$
$+_+$	$н_+$	$+_+$	$н_+$

Вар.3.36.1

Однако, МК с расстановкой чисел согласно Вар.3.34.2 не может быть исходным для квадрата с расстановкой чисел согласно Вар.3.33.2 потому, что количество чисел, соответствующих нечётному числу в исходном МК, которые преобразуются в нечётные числа квадрата второго уровня ($н_н$) должно равняться четырём, а равно шести (Вар.3.36.1, ячейки A1, C1, A2, B2, C3, D3).

3.37 Сочетание Вар.3.34.3→ Вар.3.33.2 приведёт к соотношениям согласно Вар.3.37.1:

н	н	+	+
+	н	+	н
н	+	н	+
+	+	н	н

Вар.3.34.3 →

н	н	н	н
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	+	+

Вар.3.33.2 →

$н_н$	$н_н$	$+_н$	$+_н$
$+_н$	$н_н$	$+_+$	$н_+$
$н_+$	$+_+$	$н_н$	$+_н$
$+_+$	$+_+$	$н_+$	$н_+$

Вар.3.37.1

Воспользовавшись дополнительными уравнениями для одинаковых видов перехода:

$X_1+X_2+X_6+X_{11}=1+5+9+13=28$;

$X_7+X_{10}+X_{13}+X_{14}=4+8+12+16=40$;

$X_8+X_9+X_{15}+X_{16}=3+7+11+15=36$, получим выражения для чисел исходного МК согласно Табл.3.37.1:

X_1	$-X_1+X_7+X_{10}-6$	$X_{13}+6$	$-X_7-X_{10}-X_{13}+34$
$-X_1+X_{10}-X_{13}+13$	$X_1-X_{10}+X_{13}$	X_7	$-X_7+21$
$-X_{10}+21$	X_{10}	$-X_1-X_7-X_{13}+34$	$X_1+X_7+X_{13}-21$
X_{13}	$-X_7-X_{10}-X_{13}+40$	X_1-6	$-X_1+X_7+X_{10}$

Табл.3.37.1

Здесь можно заметить, что $X_7+X_8=X_7+(-X_7+21)=21$, при этом после перехода от исходного МК в квадрат второго уровня сумма этих чисел будет равна:
(21+1)/2=11, но в соответствии с расстановкой чисел согласно Вар.3.33.2 эта сумма чётна, следовательно, МК с расстановкой чисел согласно Вар.3.34.3 не может быть исходным для квадрата с расстановкой чисел согласно Вар.3.33.2.

3.38 Сочетание Вар.3.34.4→ Вар.3.33.2 приведёт к соотношениям согласно Вар.3.38.1:

н	н	+	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	н	н

Вар.3.34.4 →

н	н	н	н
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	+	+

Вар.3.33.2 →

$н_н$	$н_н$	$+_н$	$+_н$
$н_н$	$н_н$	$+_+$	$+_+$
$+_+$	$+_+$	$н_н$	$н_н$
$+_+$	$+_+$	$н_+$	$н_+$

Вар.3.38.1

Однако, МК с расстановкой чисел согласно Вар.3.34.4 не может быть исходным для квадрата с расстановкой чисел согласно Вар.3.33.2 потому, что количество чисел, соответствующих нечётному числу в исходном МК, которые преобразуются в нечётные числа квадрата второго уровня ($н_н$) должно равняться четырём, а равно шести (Вар.3.38.1, ячейки A1, B1, A2, B2, C3, D3).

Расстановки чисел согласно Вар.3.33.3, Вар.3.33.4, Вар.3.33.5 путём невариантных и тождественных преобразований могут быть сведены к уже рассмотренной расстановке чисел Вар.3.33.2 и, соответственно, тоже не могут быть получены после преобразования МК.

Таким образом, предположение о возможности расположения в ячейках A1, B1, C1, D1 квадрата второго уровня, полученного из нетипичного МК, четырёх нечётных чисел, привело к противоречию, то есть не существует, в том числе и нетипичных МК, у которых в квадрате второго уровня в ячейках A1, B1, C1, D1 находилось бы четыре нечётных числа.

Хорошо, но может быть в ячейках A1, D1, A4, D4 можно расположить четыре чётных числа? Однако, в этом случае, можно воспользоваться универсальным преобразованием и тогда, этот вариант сведётся к уже рассмотренному варианту с четырьмя нечётными числами, а значит такой вариант тоже невозможен.

Следовательно, остаётся единственно возможный вариант: в квадрате второго уровня, в том числе и нетипичного МК, в ячейках A1, B1, C1, D1 могут располагаться только два нечётных и два чётных числа, то есть, даже для

нетипичного МК, для чисел в ячейках A1, B1, C1, D1 выполняется «правило двух …».

А так как все строки и столбцы в МК абсолютно равнозначны, то полученные выводы справедливы для всех строк и столбцов.

Ну тогда и для ячеек B1, C1, B4, C4 и A2, D2, A3, D3 тоже справедливо такое утверждение потому, что попытка расположить в них четыре нечётных (или чётных) числа, при соблюдении полученных выводов, приведёт к необходимости размещения четырёх нечётных (чётных) чисел в ячейках A1, D1, A4, D4, что, как уже удалось выяснить, недопустимо.

Соответственно приходим к выводу:
В квадратах второго уровня, полученных как от типичных, так и от нетипичных МК, «правило двух …» также соблюдается.

3.39 Логично предположить, что и для квадратов третьего уровня «правило двух …» также справедливо, но, всё равно, это утверждение требует проверки.

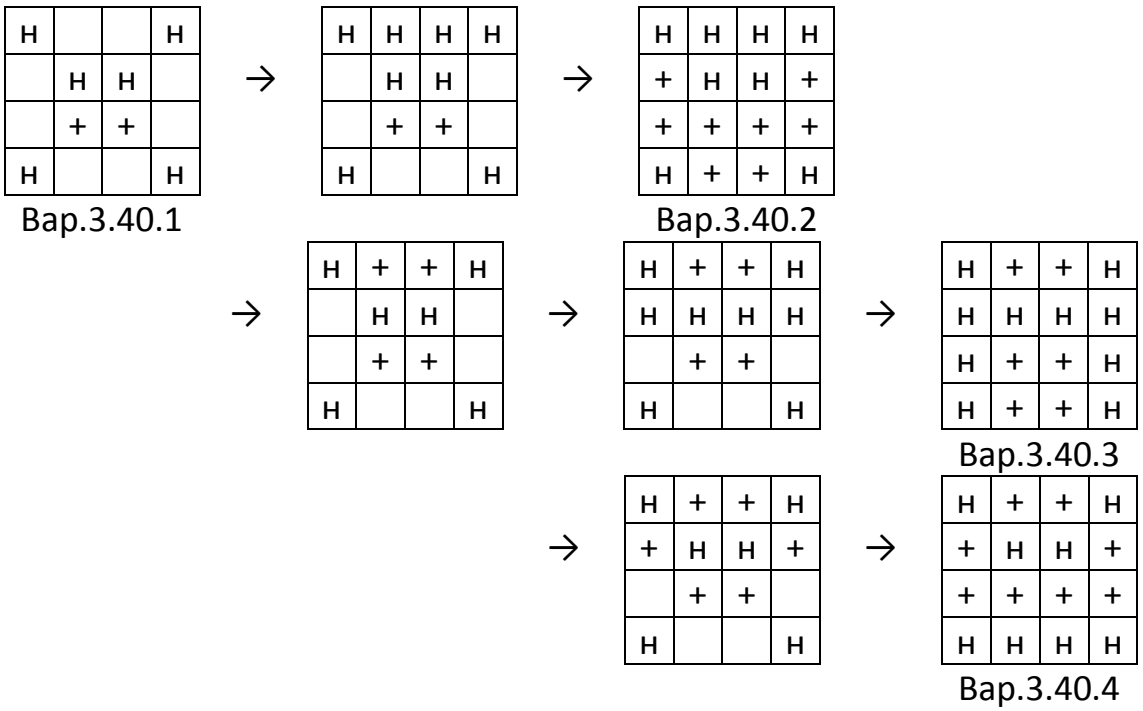
Причём проверять надо это предположение как для нетипичных МК с нетипичностью первого вида, так и для нетипичных МК с нетипичностью второго вида (для типичных МК любого уровня это правило подтверждается также как для исходных МК).

Тут, правда, надо учесть, что если у МК с нетипичностью первого вида в диагонали с четырьмя нечётными числами после преобразования, в квадрате второго уровня, будет находиться одно нечётное и три чётных числа, то сумма чисел в этой диагонали в квадрате третьего уровня будет равна 10 {[(34+4)/2+1]/2} и, соответственно, во второй диагонали сумма чисел также будет равна 10 {[34/2+3]/2}, то есть квадрат становится вторично типичным и проверка правила для него будет аналогична такой проверке для исходного МК, следовательно проверка требуется только для квадратов третьего уровня с суммой чисел в первой диагонали равной 11 {[(34+4)/2+3]/2} и суммой чисел во второй диагонали равной 9 {[34/2+1]/2}.

Одновременно заметим, что и у МК с нетипичностью второго вида, сумма чисел в соответствующей диагонали в квадрате третьего уровня также будет равна 11 [(18+4)/2], а во второй диагонали – 9 (18/2).

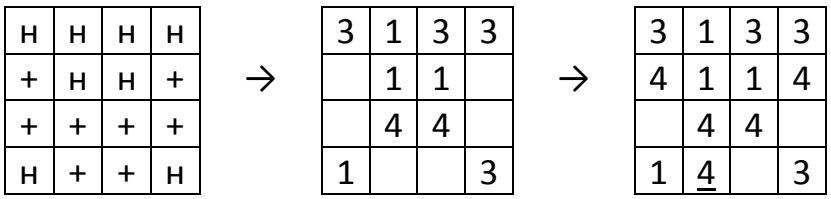
Вот с учётом этих обстоятельств и выполним проверку.

3.40 Предположим, что в ячейках A1, D1, A4, D4 квадратов третьего уровня, могут располагаться четыре нечётных (чётных) числа. Тогда получим следующую схему последовательности расстановки нечётных и чётных чисел (без учёта инвариантов, но с учётом необходимости наличия третьего нечётного числа в диагонали, если в ней уже расположены два нечётных числа) в квадратах от исходных вариантов до итоговых (Вар.3.40.1 … Вар.3.40.4):



3.41 При анализе Вар.3.40.2 обратим внимание на то, что в данном случае магическую сумму (10) из нечётных чисел (1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3) можно получить в единственном наборе 1+3+3+3, соответственно набор чисел для оставшейся четвёрки ячеек (B1, C1, B2, C2) будет 1+1+1+3, при этом в ячейках B1, C1, не могут находится числа 1+1, так как при этом получить магическую сумму (10) из нечётных чисел в первой строке получить невозможно.

Таким образом расстановка чисел сведётся к Вар.3.41.2, что неприемлемо, так как количество четвёрок (5) превышает их допустимое количество (4), значит Вар.3.40.2 не даст магических квадратов.



3.42 Расстановка чисел в квадрате третьего уровня согласно Вар.3.40.3 не может быть получена после преобразования МК, так как содержит десять нечётных чисел (должно быть восемь нечётных чисел).

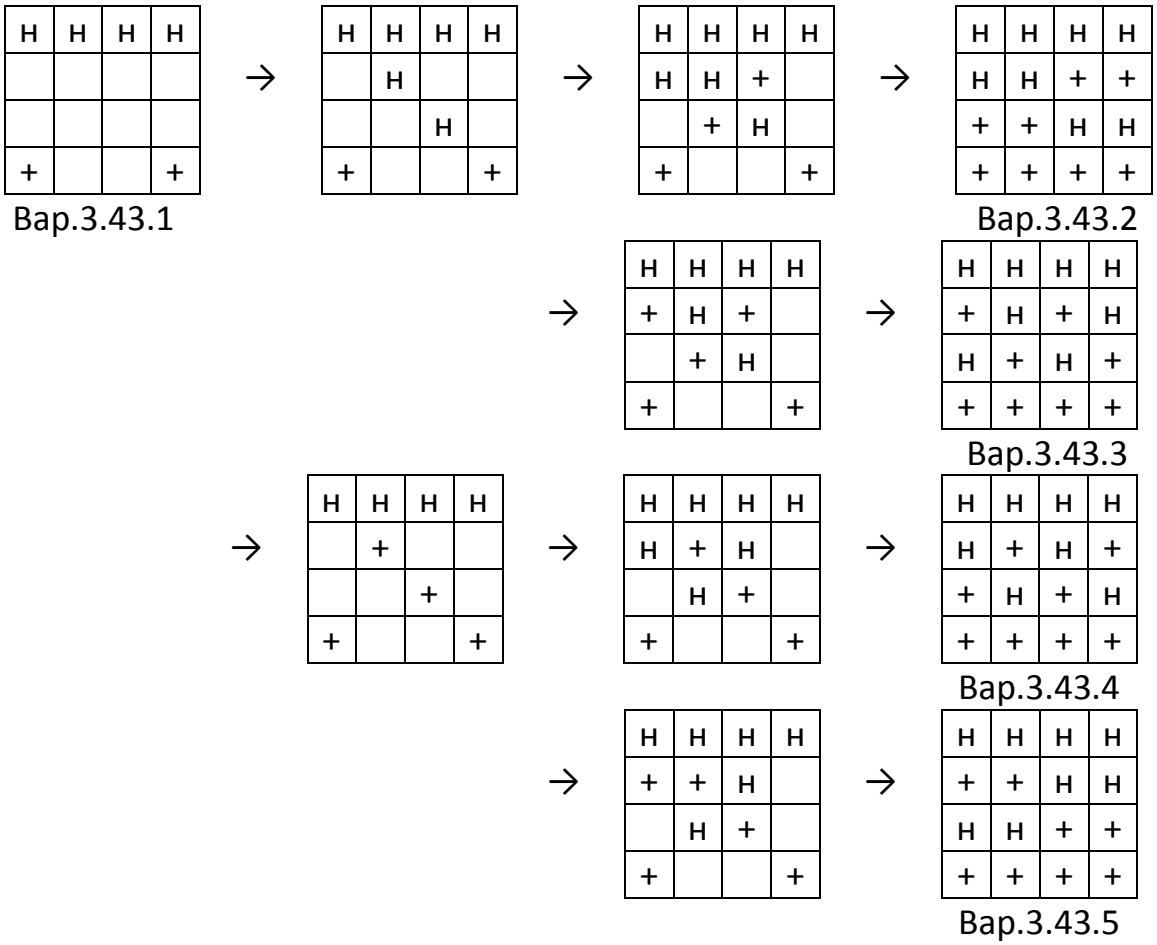
Расстановка чисел согласно Вар.3.40.4 путём невариантного и тождественного преобразований может быть сведена к уже рассмотренной расстановке чисел Вар.3.40.2 и, соответственно, тоже не может быть получена после преобразования МК.

Таким образом, предположение о существовании МК, квадрат третьего уровня которого содержит четыре нечётных числа в ячейках A1, D1, A4, D4, не соответствует действительности.

Далее, повторив рассуждения п.3.15 и п.3.16, приходим к выводу:
В квадратах третьего уровня, полученных от нетипичных МК, для чисел в ячейках A1, D1, A4, D4 и чисел в ячейках B2, C2, B3, C3 «правило двух …» также справедливо.

Разумеется, необходимо проверить действует ли это правило в отношении чисел строк и столбцов?

3.43 Предположим, что в ячейках A1, B1, C1, D1 квадратов третьего уровня, могут располагаться четыре нечётных (чётных) числа. Тогда получим следующую схему последовательности расстановки нечётных и чётных чисел (без учёта инвариантов, но с учётом вывода п.3.42) в квадратах от исходных вариантов до итоговых (Вар.3.43.1 … Вар.3.43.5):



3.44 При анализе Вар.3.43.2 обратим внимание на то, что в данном случае магическую сумму (10) из нечётных чисел (1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3) можно получить в единственном наборе 1+3+3+3, соответственно набор чисел для оставшейся четвёрки ячеек (A2, B2, C2, D3) будет 1+1+1+3, при этом в ячейках

A1, B2, не могут находится числа 1+1 или 1+3 так как при этом получить необходимую сумму (11) в ячейках диагонали A1- D4 получить невозможно.

Также в ячейке D1 не может находиться число 3, так как при этом в ячейках A1, D1, A4, D4 либо невозможно будет получить магическую сумму, либо общее количество чисел 3 станет больше четырёх.

Таким образом расстановка чисел сведётся к Вар.3.44.1, с числом 0 в ячейке B4, что неприемлемо (Вар.3.43.2→ Вар.3.44.1):

н	н	н	н
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	+	+

→

3	3	3	1
1	3		
		1	1
			4

→

3	3	3	1
1	3		4
4	4	1	1
			4

→

3	3	3	1
1	3		4
4	4	1	1
	0		4

Вар.3.43.2 Вар.3.44.1

Расстановки чисел согласно Вар.3.43.3, Вар.3.43.4, Вар.3.43.5 путём невариантных и тождественных преобразований могут быть сведены к уже рассмотренной расстановке чисел Вар.3.43.2 и, соответственно, тоже не могут быть получены после преобразования МК.

Таким образом, предположение о возможности расположения в ячейках A1, B1, C1, D1 квадрата третьего уровня, полученного из нетипичного МК, четырёх нечётных чисел, привело к противоречию, то есть не существует, в том числе и нетипичных МК, у которых в квадрате третьего уровня в ячейках A1, B1, C1, D1 находилось бы четыре нечётных числа.

Хорошо, но может быть в ячейках A1, D1, A4, D4 можно расположить четыре чётных числа? Однако, в этом случае, можно воспользоваться универсальным преобразованием и тогда, этот вариант сведётся к уже рассмотренному варианту с четырьмя нечётными числами, а значит такой вариант тоже невозможен.

Следовательно, остаётся единственно возможный вариант: в квадрате третьего уровня, в ячейках A1, B1, C1, D1 могут располагаться только два нечётных и два чётных числа, то есть, даже для нетипичного МК, для чисел в ячейках A1, B1, C1, D1 выполняется «правило двух …».

А так как все строки и столбцы в МК абсолютно равнозначны, то полученные выводы справедливы для всех строк и столбцов.

Ну тогда и для ячеек B1, C1, B4, C4 и A2, D2, A3, D3 тоже справедливо такое утверждение потому, что попытка расположить в них четыре нечётных (или чётных) числа, при соблюдении полученных выводов, приведёт к необходимости размещения четырёх нечётных (чётных) чисел в ячейках A1, D1, A4, D4, что, как уже удалось выяснить, недопустимо.

Соответственно приходим к выводу:
В квадратах третьего уровня, полученных как от типичных, так и от нетипичных МК, «правило двух …» также соблюдается.

Ну вот, удалось убедиться, что во внешних угловых ячейках (A1, D1, A4, D4), внутренних угловых ячейках (B2, C2, B3, C3), ячейках каждой строки и каждого столбца, а также в ячейках (B1, C1, B4, C4) и (A2, D2, A3, D3) любого МК может находиться только по два нечётных и два чётных числа, причём это правило («правило двух … ») справедливо для квадратов любого уровня, полученных от магических квадратов.

Это правило можно назвать базовым для МК четвёртого порядка.

И это на самом деле не может не вызвать удивления. Ну почему, разбиение последовательности чисел на четвёрки в виде квадратной таблицы с одинаковыми суммами, привело к такой особенности? Почему соблюдение чётности магических сумм должно обеспечиваться именно парами нечётных и чётных чисел, а четвёрки чисел одинаковой чётности для этого не годятся?

Во дела, надо же на что оказывается способна эта «невидимая рука симметрии».

Можно ещё отметить интересную особенность, обусловленную «правилом двух … ».

Оказывается, в типичных МК, в любой ячейке, имеющееся там число можно при помощи определённых преобразований изменить на любое нужное число, при одновременном соответствующем изменении других чисел так, что магические свойства и типичность МК не изменятся.

Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим преобразования чисел с получением на месте любого из них числа 1 (Табл.3.44.1… Табл.3.44.8):

A {	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B {	+1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	- 1
C {	=2	**1**	4	3	6	5	8	7	10	9	10	11	14	13	16	15

Табл.3.44.1

A {	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B {	+2	+ 2	- 2	- 2	+ 2	+ 2	- 2	- 2	+ 2	+ 2	- 2	- 2	+ 2	+ 2	- 2	- 2
C {	=3	4	**1**	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14

Табл.3.44.2

A {	1	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B {	+2	+ 2	- 2	- 2	+ 2	+ 2	- 2	- 2	+ 2	+ 2	- 2	- 2	+ 2	+ 2	- 2	- 2
C {	=3	4	1	**2**	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14

D { +1 -1 + 1 - 1 + 1 - 1 +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1
E { =4 3 2 **1** 8 7 6 5 12 11 10 9 16 15 14 13

Табл.3.44.3

A { 1 2 3 4 **5** 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
B { +4 + 4 + 4+ 4 - 4 - 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 - 4
C { =5 6 7 8 **1** 2 3 4 13 14 15 16 9 10 11 12

Табл.3.44.4

A { 1 2 3 4 5 **6** 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
B { +4 + 4 + 4+ 4 - 4 - 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 - 4
C { =5 6 7 8 1 **2** 3 4 13 14 15 16 9 10 11 12
D { +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1
E { =6 5 8 7 2 **1** 4 3 14 13 16 15 10 9 12 11

Табл.3.44.5

A { 1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12 13 14 15 16
B { +4 + 4 + 4+ 4 - 4 - 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 - 4
C { =5 6 7 8 1 2 **3** 4 13 14 15 16 9 10 11 12
D { +2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2
E { =7 8 5 6 3 4 **1** 2 15 16 13 14 11 12 9 10

Табл.3.44.6

A { 1 2 3 4 5 6 7 **8** 9 10 11 12 13 14 15 16
B { +4 + 4 + 4+ 4 - 4 - 4 - 4 - 4 + 4 + 4 + 4 + 4 - 4 - 4 - 4 - 4
C { =5 6 7 8 1 2 3 **4** 13 14 15 16 9 10 11 12
D { +2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2
E { =7 8 5 6 3 4 1 **2** 15 16 13 14 11 12 9 10
F { +1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1
G {= 8 7 6 5 4 4 2 **1** 16 15 14 13 12 12 10 9

Табл.3.44.7

A { 1 2 3 4 5 6 7 8 **9** 10 11 12 13 14 15 16
B { +8 + 8 + 8+ 8 + 8 + 8 + 8 + 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8
C { =9 10 11 12 13 14 15 16 **1** 2 3 4 5 6 7 8

Табл.3.44.8

Переход от чисел 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 на единицу можно выполнить продолжением действий над Табл.3.44.8 повторяя преобразования, приведённые в Табл.3.44.1 … Табл.3.44.7.

Анализируя результаты каждого из преобразований можно увидеть, что не изменяются ни наборы чисел в МК, ни соотношения между нечётными и чётными числами, ни магические суммы в соответствующих четвёрках ячеек (каждая пара нечётных чисел увеличивается на такую же сумму, на какую уменьшается каждая пара чётных чисел).

Рассмотренные преобразования МК без непосредственной перестановки чисел, будем считать статическими преобразованиями, в отличии от динамических, например, тождественных преобразований, когда перемещаются числа целых строк и столбцов.

К статическому относится и универсальное преобразование, когда каждое число ячейки заменяется разницей между числом 17 и имеющимся числом.

Возможность статических преобразований поможет в процессе дальнейшего исследования МК.

Ну да ладно, с нечётными\чётными числами более-менее разобрались, а что же с симметричными числами, невозможно же представить, что «невидимая рука симметрии…» не оказала бы своего влияния на их расстановку?

С этим обстоятельством тоже неплохо бы разобраться.

Ну так и займёмся же этим.

3.45 Ну а как можно выяснить особенности расстановки симметричных чисел в магических квадратах четвёртого порядка?

В магических квадратах и кубах третьего порядка всё выяснялось автоматически. В единственном варианте МК всё было и так наглядно, а в магических кубах третьего порядка увидеть расстановку симметричных чисел можно было простым суммированием выражений для пар чисел в соответствующих ячейках.

А в МК четвёртого порядка никаким суммированием выражений для пар чисел согласно Табл.3.4.1 определить расположение симметричных чисел, увы, не удастся (аналогичным образом можно определить только четвёрки чисел с магической суммой).

Если же произвольно перебирать все сочетания пар чисел, то количество предполагаемых вариантов, которые потребуется рассмотреть, превысит все разумные пределы (15-после первого шага, 15*13=195-после второго шага и так далее).

Неужели ситуация безнадёжна?

А вот и нет, оказывается можно оптимизировать процесс перебора так, что это позволит добиться приемлемого результата.

Дело в том, что если начинать перебор с пары ячеек, входящих в четвёрку ячеек с магической суммой, то сразу определится и вторая пара ячеек с магической суммой, так как магическая сумма для МК четвёртого

порядка (34) состоит из сумм двух пар симметричных чисел (17+17). Это даст как дополнительное уравнение для переменных (x+y=17), так и исключит из дальнейшего перебора сразу четыре ячейки. Кроме того, в тех четвёрках ячеек с магической суммой, в которых нет двух пар симметричных чисел, должны находиться четыре числа, среди которых вообще нет симметричных чисел.

Дальнейшие действия также можно вести с учётом всех нюансов МК четвёртого порядка.

Вот и приступим к увлекательному процессу поиска вариантов расстановки симметричных чисел в МК четвёртого порядка.

3.46 Начнём с самого простого варианта размещения первой пары симметричных чисел.

Рассмотрим группу МК с размещением пары симметричных чисел в одной из диагоналей МК. При этом первое число пары путём невариантных и тождественных преобразований можно переместить в ячейку A1, а второе число переместить в ячейку B2 (при этом на общую схему размещения пар симметричных чисел такое преобразование существенного влияния не окажет), соответственно вторая пара симметричных чисел (как дополняющая первую пару до МС) будет размещаться в ячейках C3 и D4 (Вар.3.46.1, Вар.3.46.2), а варианты размещения третьей пары симметричных чисел приведены в Вар.3.46.3, Вар.3.46.4, Вар.3.46.5:

A			
	a		

→

A			
	a		
		Б	
			б

→

A	≠	≠	B
?	a		≠
?		Б	≠
≠	?	?	б

→

A			B
	a	в	
		Б	
			б

Вар.3.46.1 Вар.3.46.2 Вар.3.46.3 Вар.3.46.4

→

A			B
	a		
	?	Б	
			б

Вар.3.46.5

Здесь прописными буквами русского алфавита обозначены первые числа пары симметричных чисел, а строчными буквами русского алфавита обозначены вторые числа пары симметричных чисел.

Пару для числа B нельзя расположить в ячейках B1, C1 (Вар.3.46.3), так как это требует размещения пары для числа A в первой строке, но «a» уже находится в ячейке B2.

Пару для числа В нельзя расположить в ячейках D2, D3 (Вар.3.46.3), так как это требует размещения пары для числа «б» в четвёртом столбце, но Б уже находится в ячейке С3.

Пару для числа В нельзя расположить в ячейке А4 (Вар.3.46.3), так как это требует размещения пары для числа А в ячейке D4, но «а» уже находится в ячейке В2.

Пару для числа В нельзя расположить в ячейках А2, А3, В4, С4 (Вар.3.46.3), так как при этом противоположные числа пар симметричных чисел попадут в разные пары одинаковых сумм ($X_1+X_4=X_{14}+X_{15}$, $X_4+X_{16}=X_5+X_9$), а согласно п.3.44 они могут быть преобразованы в пару симметричных чисел 1, 16 (МК с парой симметричных чисел в ячейках диагонали однозначно типичные из-за разной чётности симметричных чисел), которые исключают возможность равенства этих сумм (1+15≠16+2).

Пару для числа В нельзя расположить в ячейке В3 (Вар.3.46.5), так как при этом выражения для чисел с учётом дополнительных уравнений ($X_1+X_6=17$, $X_4+X_{10}=17$) примут вид согласно Табл.3.46.1, из которой следует:

$X_2=X_{15}$ и $X_5=X_{12}$, что недопустимо.

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	$-X_1+17$	X_7	$X_1-X_5-X_7+17$
$-X_1-X_5+X_7+17$	$-X_4+17$	$X_1+X_4-X_7$	X_5
$-X_7+17$	$X_1-X_2+X_4$	X_2	$-X_1-X_4+X_7+17$

Табл.3.46.1

Поэтому для продолжения исследования пригоден только вариант с размещением третьей пары симметричных чисел в ячейках D1 и С2 (Вар.3.46.4) и размещением четвёртой пары симметричных чисел в ячейках В3 и А4. Тогда, после учёта дополнительных уравнений $X_1+X_6=17$ и $X_4+X_7=17$ получим выражения для чисел полученного МК согласно Табл.3.46.2:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	$-X_1+17$	$-X_4+17$	$X_1+X_4-X_5$
$-X_1-X_5+X_{10}+17$	$-X_4+17$	$X_1+X_4-X_{10}$	$-X_4+X_5-X_{10}+17$
$-X_{10}+17$	$X_1-X_2-X_{10}+17$	$X_2+X_4+X_{10}-17$	$-X_1-X_4+X_{10}+17$

Табл.3.46.2

Теперь, если проанализировать выражения для чисел в Табл.3.46.2, то можно заметить, что появились дополнительные четвёрки ячеек, в которых сумма чисел рана магической:

$X_2+X_3+X_5+X_8=34$;

$X_2+X_5+X_9+X_{14}=34$;

$X_4+X_7+X_{11}+X_{16}=34$;

$X_{10}+X_{11}+X_{13}+X_{16}=34$.

Воспользовавшись этим обстоятельством можно отдельно рассмотреть квадраты с числами в ячейках B1, C1, A2, D2, не содержащими симметричных чисел и содержащими две пары симметричных чисел.

Для первого случая дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел будет выглядеть в соответствии с общей схемой, представленной в Вар.3.46.6 … Вар.3.46.15):

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
	Г	Б	
г	≠		б

Вар.3.46.6 →

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
д	Г	Б	
г	≠	≠	б

Вар.3.46.7 →

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
д	Г	Б	е
г			б

→

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
д	Г	Б	е
г	ж	з	б

Вар.3.46.8

→

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
д	Г	Б	е
г	з	ж	б

Вар.3.46.9

→

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
	Г	Б	д
г	≠	≠	б

Вар.3.46.10 →

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
е	Г	Б	д
г			б

→

А	Д	Е	В
Ж	А	в	З
е	Г	Б	д
г	Ж	з	б

Вар.3.46.11

→

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
е	Г	Б	д
г	з	ж	б

Вар.3.46.12

→

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
	Г	Б	
г	е	д	б

Вар.3.46.13 →

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
≠	Г	Б	ж
г	е	д	б

Вар.3.46.14 →

А	Д	Е	В
Ж	а	в	З
з	Г	Б	ж
г	е	д	б

Вар.3.46.15

Теперь более детально проанализируем получившуюся схему.

Для Вар.3.46.6 число, симметричное числу Д, нельзя разместить в ячейке B4 из-за наличия несимметричных чисел в ячейках B2 и B3.

Для Вар.3.46.7 и Вар.3.46.10 число, симметричное числу Е, нельзя разместить в ячейках B4 и C4 из-за уже занятого числа, симметричного числу

Д (в ячейке A3 или D3), что не даст получить две пары симметричных чисел в ячейках B1, C1, B4, C4.

Выражения для чисел Вар.3.46.8, Вар.3.46.9 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_9=17$, $X_3+X_{12}=17$ примут вид согласно Табл.3.46.3:

X_1	X_2	$-X_2+17$	$-X_1+17$
X_5	$-X_1+17$	X_1	$-X_5+17$
$-X_2+17$	$X_1-X_2+X_5$	$-X_1+X_2-X_5+17$	X_2
$-X_1+X_2-X_5+17$	$-X_5+17$	X_5	$X_1-X_2+X_5$

Табл.3.46.3

Здесь есть одинаковые числа ($X_7=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.46.11, Вар.3.46.12 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_{12}=17$, $X_3+X_9=17$ примут вид согласно Табл.3.46.4:

X_1	X_2	$-X_2+17$	$-X_1+17$
X_5	$-X_1+17$	X_1	$-X_5+17$
X_2	$X_1+X_2+X_5-17$	$-X_1-X_2-X_5+34$	$-X_2+17$
$-X_1-X_2-X_5+34$	$-2X_2-X_5+34$	$2X_2+X_5-17$	$X_1+X_2+X_5-17$

Табл.3.46.4

Здесь есть одинаковые числа ($X_7=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Для Вар.3.46.14 число, симметричное числу Ж, нельзя разместить в ячейке A3 из-за наличия несимметричных чисел в ячейках A1 и A4.

Выражения для чисел Вар.3.46.15 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_{15}=17$, $X_5+X_{12}=17$ примут вид согласно Табл.3.46.5:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
$-X_2+17$	$-X_1+17$	$-X_4+17$	$X_1+X_2+X_4-17$
$-X_1-X_2-X_4+34$	$-2X_2-X_4+34$	$X_1+2X_2+2X_4-34$	X_2
$2X_2+X_4-17$	$X_1+X_2+X_4-17$	$-X_2+17$	$-X_1-2X_2-2X_4+51$

Табл.3.46.5

Здесь есть одинаковые числа ($X_{12}=X_2$ и др.), что неприемлемо.

Для группы квадратов с двумя парами симметричных чисел в ячейках B1, C1, A2, D2, эти пары можно расставить тремя разными способами (Вар.3.46.16, Вар.3.46.17, Вар.3.46.21).

Дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел будет выглядеть в соответствии с общей схемой, представленной в Вар.3.46.17 … Вар.3.46.24):

А	Д	д	В
Е	а	в	е
	Г	Б	
г			б

≠

Вар.3.46.16

А	Д	Е	В
е	а	в	д
	Г	Б	
г			б

→

А	Д	Е	В
е	а	в	д
Ж	Г	Б	≠
г			б

→

А	Д	Е	В
е	а	в	д
Ж	Г	Б	
г	ж		б

→

А	Д	Е	В
е	а	в	д
Ж	Г	Б	З
г	ж	з	б

Вар.3.46.17 Вар.3.46.18 Вар.3.46.19

→

А	Д	Е	В
е	а	в	д
Ж	Г	Б	
г		ж	б

→

А	Д	Е	В
е	а	в	Д
Ж	Г	Б	З
г	з	ж	Б

Вар.3.46.20

А	Д	Е	В
д	а	в	е
	Г	Б	
г			б

→

А	Д	Е	В
д	а	в	е
Ж	Г	Б	≠
г			б

→

А	Д	Е	В
д	а	в	е
Ж	Г	Б	
г		ж	б

→

А	Д	Е	В
д	а	в	е
Ж	Г	Б	З
г	з	ж	б

Вар.3.46.21 Вар.3.46.22 Вар.3.46.23

→

А	Д	Е	В
д	а	в	е
Ж	Г	Б	
г	ж		б

→

А	Д	Е	В
д	а	в	Е
Ж	Г	Б	З
г	ж	з	Б

Вар.3.46.24

Теперь более детально проанализируем получившуюся схему.

Для Вар.3.46.16 дальнейшая расстановка пар симметричных чисел не имеет смысла из-за наличия несимметричных чисел в ячейках A1 и D1, что противоречит размещению пары симметричных чисел в ячейках B1 и C1.

Для Вар.3.46.18 и Вар.3.46.22 число, симметричное числу Ж, нельзя разместить в ячейке D3 из-за наличия несимметричных чисел в ячейках B3 и C3.

Выражения для чисел Вар.3.46.19 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_8=17$, $X_9+X_{14}=17$ примут вид согласно Табл.3.46.6:

X_1	X_2	X_2	$-X_1-2X_2+34$
$-X_2+17$	$-X_1+17$	X_1+2X_2-17	$-X_2+17$
$-X_1+X_2+X_{10}$	X_{10}	$-2X_2-X_{10}+34$	$X_1+X_2-X_{10}$
$-X_{10}+17$	$X_1-X_2-X_{10}+17$	$-X_1-X_2+X_{10}+17$	$2X_2+X_{10}-17$

Табл.3.46.6

Здесь $X_3=X_2$, что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.46.20 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_8=17$, $X_9+X_{15}=17$ примут вид согласно Табл.3.46.7:

X_1	X_2	$-X_5+17$	$-X_1-X_2+X_5+17$
X_5	$-X_1+17$	$X_1+X_2-X_5$	$-X_2+17$
$-X_5+17$	X_1	$-X_1-X_2+X_5+17$	X_2
$-X_1+17$	$-X_2+17$	X_5	$X_1+X_2-X_5$

Табл.3.46.7

Здесь есть одинаковые числа ($X_{10}=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.46.23 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_5=17$, $X_9+X_{15}=17$ примут вид согласно Табл.3.46.8:

X_1	X_2	$-X_2-2X_{14}+34$	$-X_1+2X_{14}$
$-X_2+17$	$-X_1+17$	$X_1-2X_{14}+17$	$X_2+2X_{14}-17$
$-X_{14}+17$	$X_1-X_2-X_{14}+17$	$-X_1+X_2+3X_{14}-17$	$-X_{14}+17$
$-X_1+X_2+X_{14}$	X_{14}	X_{14}	$X_1-X_2-3X_{14}+34$

Табл.3.46.8

Здесь $X_{15}=X_{14}$, что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.46.24 после использования дополнительных уравнений: $X_2+X_5=17$, $X_9+X_{14}=17$ примут вид согласно Табл.3.46.9:

X_1	$-X_1+X_7+X_8$	$-X_8+17$	$-X_7+17$
$X_1-X_7-X_8+17$	$-X_1+17$	X_7	X_8
$-2X_1+X_7+X_8+X_{10}$	X_{10}	$X_1-X_7-X_{10}+17$	$X_1-X_8-X_{10}+17$
$-X_{10}+17$	$2X_1-X_7-X_8-X_{10}+17$	$-X_1+X_8+X_{10}$	$-X_1+X_7+X_{10}$

Табл.3.46.9

Здесь обнаружить противоречия уже не удастся.

Таким образом только один вариант (Вар.3.46.24), из всех предполагаемых вариантов расстановки симметричных чисел, следующих из Вар.3.46.1, не привёл к противоречию, следовательно, для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.46.24 и займёмся поиском первой группы магических квадратов.

3.47 Но перед этим надо как-то определиться с отсечением невариантов.

С этой целью можно, прежде всего, ограничиться рассмотрением расположения конкретного числа, например, единицы, только в конкретных ячейках. Например, анализировать только варианты с расположением единицы в ячейках A1, B1, A2, B2.

Действительно, если в МК единица находится в ячейках A1, D1, A4, D4, то зеркальными отображениями относительно сторон квадрата её можно переместить в ячейку A1, без изменения схемы расстановки чисел.

Аналогично, если в МК единица находится в ячейках B1, C1, B4, C4, то зеркальными отображениями относительно сторон квадрата её можно переместить в ячейку B1, без изменения схемы расстановки чисел.

А если единица в МК находится в ячейках A2, D2, D3, A3, то зеркальными отображениями относительно сторон квадрата её можно переместить в ячейку A2, без изменения схемы расстановки

А если единица в МК находится в ячейках B2, C2, B3, C3, то зеркальными отображениями относительно сторон квадрата её можно переместить в ячейку B2, без изменения схемы расстановки чисел.

Кроме того, при расстановке симметричных чисел согласно Вар.3.46.24 существует симметрия и относительно диагоналей квадрата, то есть расположение числа 1 в ячейке A2 также приведёт к невариантам по отношению к МК с расположением единицы в ячейке B1, следовательно, для группы МК с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.46.24 необходимо ограничиться рассмотрением МК с числом 1 в ячейках A1, B1, B2.

Но и при размещении числа 1 в ячейках A1 и B2, из-за симметрии относительно диагонали по ячейкам A1-D4, половина решений даст невариантны МК. Чтобы учесть это обстоятельство необходимо либо отслеживать значения чисел непосредственно, либо ввести дополнительный параметр, который будет указывать на зеркальные варианты. Для этой цели можно использовать сумму произведений зеркально расположенных чисел с разными коэффициентами в следующем виде:

$X_2*X_5+2X_3*X_9+3X_4*X_{13}+4X_7*X_{10}+5X_8*X_{14}+6X_{12}*X_{15}=C$.

3.48 Для определения конкретных значений чисел в МК требуются три дополнительных уравнения (для нахождения трёх оставшихся независимых переменных в Табл.3.46.9).

В качестве дополнительных уравнений можно воспользоваться суммами различных степеней и суммами произведений пар симметричных чисел всего набора чисел магического квадрата. В рассматриваемом случае целесообразнее всего использовать следующие разновидности уравнений:

Сумма квадратов разностей пар симметричных чисел:

$(X_1–X_6)^2+(X_2–X_5)^2+ … +(X_{12}–X_{15})^2+(X_{11}–X_{16})^2=$
$=(16–1)^2+(15–2)^2+ … +(10–7)^2+(9–8)^2.$

Сумма произведений квадратов пар симметричных чисел:

$X_1^2*X_6^2+X_2^2*X_5^2 + … + X_{12}^2*X_{15}^2+X_{11}^2*X_{16}^2=16^2*1+15^2*2^2+ … +10^2*7^2+9^2*8^2.$

Сумма произведений квадратов разностей пар на произведения квадратов этих же пар симметричных чисел:

$(X_1–X_6)^2*X_1^2*X_6^2+(X_2–X_5)^2*X_2^2*X_5^2 +…+ (X_{12}–X_{15})^2*X_{12}^2*X_{15}^2+(X_{11}–X_{16})^2*X_{11}^2*X_{16}^2=$
$=(16–1)^2*16^2+(15–2)^2*15^2*2^2+ … +(10–7)^2*10^2*7^2+(9–8)^2*9^2*8^2.$

Решить такую систему степенных уравнений в ручном варианте практически нереальная задача, но есть компьютерные программы, которые с этим отлично справляются, можно воспользоваться любой из них (если какая-то из них у читателя есть в наличии). Существуют методики поиска решения без использования степенных уравнений, но они весьма трудоёмкие и требуют массу времени (хотя в дальнейшем ими также придётся воспользоваться).

Полученные значения, не соответствующие установленному набору чисел, а также неварианты, просто исключим из итоговой информации.

3.49 Отобразить итоговую информацию лучше не в виде конкретных МК, так как при этом сложно увидеть взаимосвязи и отличия между вариантами. Гораздо лучше использовать табличную форму отображения, когда числа МК определяются выражениями (соответствующими структуре), при этом для определённых чисел задаётся ряд значений, а значения остальных вычисляются в соответствии с этими выражениями.

Именно в таком виде и представим первую партию полученных магических квадратов. Здесь Табл.3.46.9, соответствующая расстановке

симметричных чисел согласно Вар.3.46.24, определяет выражения для чисел МК, а Табл.3.49.1 содержит ряд значений (при X_1=1), задающих варианты МК.

X_1	$-X_1+X_7+X_8$	$-X_8+17$	$-X_7+17$
$X_1-X_7-X_8+17$	$-X_1+17$	X_7	X_8
$-2X_1+X_7+X_8+X_{10}$	X_{10}	$X_1-X_7-X_{10}+17$	$X_1-X_8-X_{10}+17$
$-X_{10}+17$	$2X_1-X_7-X_8-X_{10}+17$	$-X_1+X_8+X_{10}$	$-X_1+X_7+X_{10}$

Табл.3.46.9

№ п/п	X_1	X_7	X_8	X_{10}	X_{14}^*
1	1	2	3	5	9
2	1	2	3	9	5
3	1	2	5	3	9
4	1	2	5	9	3
5	1	2	9	3	5
6	1	2	9	5	3
7	1	3	2	5	9
8	1	3	2	9	5
9	1	5	2	3	9
10	1	5	2	9	3
11	1	9	2	3	5
12	1	9	2	5	3

Табл.3.49.1

Анализируя полученные значения можно заметить, что все они представляют собой размещённые в ячейках C2, D2, B3, B4 в различных сочетаниях числа 2, 3, 5, 9 (в Табл.3.49.1 приведены значения без учёта зеркальных невариантов относительно диагонали A1- D4).

Для получения МК с единицей в ячейке B2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться универсальным преобразованием, при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК.

В Табл.3.49.2 и Табл.3.49.3 приведены значения для получения магических квадратов с числом 1 в ячейке B1.

$-X_2+X_7+X_8$	X_2	$-X_8+17$	$-X_7+17$
$-X_2+17$	$X_2-X_7-X_8+17$	X_7	X_8
X_9	$-2X_2+X_7+X_8+X_9$	$X_2-X_7-X_9+17$	$X_2-X_8-X_9+17$
$2X_2-X_7-X_8-X_9+17$	$-X_9+17$	$-X_2+X_8+X_9$	$-X_2+X_7+X_9$

Табл.3.49.2

№ п/п	X_2	X_7	X_8	X_9	X_{13}^*
1	1	2	3	5	9
2	1	2	3	9	5
3	1	2	5	3	9
4	1	2	5	9	3
5	1	2	9	3	5
6	1	2	9	5	3
7	1	3	2	5	9
8	1	3	2	9	5
9	1	5	2	3	9
10	1	5	2	9	3
11	1	9	2	3	5
12	1	9	2	5	3
13	1	3	5	2	9
14	1	3	9	2	5
15	1	5	3	2	9
16	1	5	9	2	3
17	1	9	3	2	5
18	1	9	5	2	3
19	1	3	5	9	2
20	1	3	9	5	2
21	1	5	3	9	2
22	1	5	9	3	2
23	1	9	3	5	2
24	1	9	5	3	2

Табл.3.49.3

Анализируя полученные значения можно заметить, что все они представляют собой размещённые в ячейках C2, D2, A3, A4 в различных сочетаниях числа 2, 3, 5, 9 (вариантов в два раза больше чем при X_1=1, из-за отсутствия симметрии группы МК при X_2=1 относительно диагональных ячеек).

Таким образом общее количество МК с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.46.24 составит:

12+12+24=48 шт.

3.50 Следующий вариант размещения пары симметричных чисел в диагонали (Вар.3.50.1) приведёт к расстановке всех симметричных чисел в МК согласно Вар.3.50.2.

А			
		а	

→

А	Е	Д	В
Ж	Б	Г	З
д	в	а	е
г	з	ж	б

Вар.3.50.1 Вар.3.50.2

Чтобы прийти к такому выводу достаточно обратить внимание на возможность перехода от расстановки чисел согласно Вар.3.46.1 к расстановке чисел согласно Вар.3.50.1 при помощи преобразования в соответствии с п.3.9.

Следовательно, все магические квадраты с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.50.2 можно получить при помощи преобразования каждого МК, полученного для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.46.24, при помощи преобразования в соответствии с п.3.9.

Таким образом количество МК согласно Вар.3.50.2 будет равно 48, а общее количество МК двух этих рассмотренных групп будет равно 96 (48+48).

3.51 Следующий вариант размещения пары симметричных чисел в одной диагонали (Вар.3.51.1) приведёт к размещению пар симметричных чисел во всех диагональных ячейках согласно Вар.3.51.4 (из учёта магической суммы в ячейках A1, D1, A4, D4 и в диагональных ячейках):

А			
			а

→

А			Б
б			а

→

А			Б
	В		
		в	
б			а

→

А			Б
	В	Г	
	г	в	
б			а

Вар.3.51.1 Вар.3.51.2 Вар.3.51.3 Вар.3.51.4

Теперь, для определения расстановки остальных пар симметричных чисел в свободных ячейках (Вар.3.51.4) можно применить уже использованную методику, и читатель вправе сделать это самостоятельно (при желании), но проще воспользоваться тождественным (в этом случае) преобразованием и получить искомую расстановку от Вар.3.46.24 перестановкой второй и четвёртой строк с последующей перестановкой второго и четвёртого столбцов (Вар.3.46.24 → Вар.3.51.5).

Невозможность существования других вариантов расстановки симметричных чисел (кроме Вар.3.51.5) подтверждается также как показано в применённой выше методике.

А	Д	Е	В
д	а	в	Е
Ж	Г	Б	З
г	ж	з	Б

→

А	Д	Е	В
г	ж	з	Б
Ж	Г	Б	З
д	а	в	Е

→

А	В	Е	Д
г	Б	з	ж
Ж	З	Б	Г
д	Е	в	а

Вар.3.46.24 Вар.3.51.5

3.52 Для определения конкретных значений чисел в МК при расстановке симметричных чисел согласно Вар.4.51.5, снова можно воспользоваться методикой, приведённой в п.3.48.

Однако, все магические квадраты с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.51.5 можно получить при помощи преобразования каждого МК, полученного для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.46.24, при помощи преобразования в соответствии с п.3.51.

Следовательно, при размещении числа 1 в ячейке А1 получим варианты МК в соответствии с Табл.3.52.1 и Табл.3.52.2:

X_1	$-2X_1+X_8+X_{12}+X_{14}$	$-X_{14}+17$	$X_1-X_8-X_{12}+17$
$-X_{12}+17$	$X_1-X_8-X_{14}+17$	$-X_1+X_{12}+X_{14}$	X_8
$-X_8+17$	$X_1-X_{12}-X_{14}+17$	$-X_1+X_8+X_{14}$	X_{12}
$-X_1+X_8+X_{12}$	X_{14}	$2X_1-X_8-X_{12}-X_{14}+17$	$-X_1+17$

Табл.3.52.1

№ п/п	X_1	X_8	X_{12}	X_{14}	X_{15}^*
1	1	2	3	5	9
2	1	2	3	9	5
3	1	2	5	3	9
4	1	2	5	9	3
5	1	2	9	3	5
6	1	2	9	5	3
7	1	3	2	5	9
8	1	3	2	9	5
9	1	5	2	3	9
10	1	5	2	9	3
11	1	9	2	3	5
12	1	9	2	5	3

Табл.3.52.2

Анализируя полученные значения можно заметить, что все они представляют собой размещённые в ячейках D2, D3, B4, C4 в различных

сочетаниях числа 2, 3, 5, 9 (в Табл.3.52.1 приведены значения без учёта зеркальных невариантов относительно диагонали A1- D4).

Для получения МК с единицей в ячейке B2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться преобразованием п. 3.8 (одновременной перестановкой первой и второй, а также третьей и четвёртой строк с последующей перестановкой первого и второго, а также третьего и четвёртого столбцов) группы МК с X_1=1, при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК.

В Табл.3.52.3 и Табл.3.52.4 приведены значения для получения магических квадратов с числом 1 в ячейке B1.

$-2X_2+X_7+X_{11}+X_{13}$	X_2	$X_2-X_7-X_{11}+17$	$-X_{13}+17$
$X_2-X_7-X_{13}+17$	$-X_{11}+17$	X_7	$-X_2+X_{11}+X_{13}$
$X_2-X_{11}-X_{13}+17$	$-X_7+17$	X_{11}	$-X_2+X_7+X_{13}$
X_{13}	$-X_2+X_7+X_{11}$	$-X_2+17$	$2X_2-X_7-X_{11}-X_{13}+17$

Табл.3.52.3

№ п/п	X_2	X_7	X_{11}	X_{13}	X_{16}^*
1	1	2	3	5	9
2	1	2	3	9	5
3	1	2	5	3	9
4	1	2	5	9	3
5	1	2	9	3	5
6	1	2	9	5	3
7	1	3	2	5	9
8	1	3	2	9	5
9	1	5	2	3	9
10	1	5	2	9	3
11	1	9	2	3	5
12	1	9	2	5	3
13	1	3	5	2	9
14	1	3	9	2	5
15	1	5	3	2	9
16	1	5	9	2	3
17	1	9	3	2	5
18	1	9	5	2	3
19	1	3	5	9	2
20	1	3	9	5	2

21	1	5	3	9	2
22	1	5	9	3	2
23	1	9	3	5	2
24	1	9	5	3	2

Табл.3.52.4

Анализируя полученные значения можно заметить, что все они представляют собой размещённые в ячейках C2, C3, A4, D4 в различных сочетаниях числа 2, 3, 5, 9 (вариантов в два раза больше чем при X_1=1, из-за отсутствия симметрии группы МК при X_2=1 относительно диагональных ячеек).

Таким образом общее количество МК с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.51.5 составит 48 шт. (12+12+24), а общее количество МК трёх рассмотренных групп будет равно 144 (96+48).

Ещё можно отметить, что все МК трёх рассмотренных вариантов с симметричными числами в любой из диагоналей, являются типичными МК (так как любая пара симметричных чисел в квадрате любого уровня даёт пару чисел разной чётности) и все они могут быть получены разным сочетанием чисел 2, 3, 5, 9 в определённых ячейках (в зависимости от расположения числа 1).

Чем это обусловлено?

Можно, конечно, сослаться на особую любовь «невидимой руки симметрии» к числам 2, 3, 5, 9, но это будет слишком примитивно. На самом деле это лишь суммарное проявление всех ограничений на расположение чисел в соответствии как с «правилом двух …», так и с необходимостью выполнения равенств, приведённых в п.3.5 и п.3.6.

3.53 Перед рассмотрением вариантов МК, не содержащих симметричных чисел в какой-либо из диагоналей, необходимо рассмотреть особенности ещё одного класса квадратов, которые могут быть получены при помощи преобразований Табл.3.44.1… Табл.3.44.8 из нетипичных МК (для типичных МК эти преобразования дадут снова типичные МК).

Дело в том, что некоторые из преобразований Табл.3.44.1… Табл.3.44.8 нетипичных МК приведут к квадратам, у которых сумма чисел в четвёрках диагональных ячеек станет отличаться от магической, однако остальные магические суммы при этом сохраняться, в том числе суммы чисел в ячейках A1, D1, A4, D4 и в ячейках B2, C2, B3, C3 (соответственно сумма чисел в восьми диагональных ячейках будет равна 68). Такие квадраты, можно сказать почти магические, будем называть диагонально-суммируемыми магическими квадратами (ДСМК). Нетрудно заметить, что множество обычных МК будет частью множества ДСМК.

Для исследования свойств ДСМК, стандартно выразим максимально возможное количество чисел через некоторые независимые переменные из них. Получим выражения для чисел согласно Табл.3.53.1:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	X_6	X_7	$-X_5-X_6-X_7+34$
X_9	X_{10}	$-X_6-X_7-X_{10}+34$	$X_6+X_7-X_9$
$-X_1-X_5-X_9+34$	$-X_2-X_6-X_{10}+34$	$X_1+X_2+X_4+X_6+X_{10}-34$	$-X_4+X_5+X_9$

Табл.3.53.1

Теперь, воспользовавшись выражениями для чисел, можно убедиться, что, как и для магических квадратов, для ДСМК также выполняются равенства сумм пар чисел в ячейках A1, D1 и B4, C4, в ячейках B1, C1 и A4, D4, в ячейках A2, D2 и B3, C3, в ячейках B2, C2 и A3, D3, в ячейках A1, A4 и D2, D3, в ячейках A2, A3 и D1, D4, в ячейках B1, B4 и C2, C3, в ячейках B2, B3 и C1, C4.

А что это нам даёт?

Это свидетельствует о том, что даже для нетипичных МК любого вида, в разных парах рассмотренных ячеек, не могут находиться симметричные числа.

Действительно, если бы это было возможно, то после преобразований Табл.3.44.1… Табл.3.44.8, в разных парах рассмотренных сумм, удалось бы перейти к числам 1 и 16, что говорит о противоречии, так как обеспечить равенство этих сумм в таком случае никак не удастся (1+15≠16+2).

3.54 Теперь рассмотрим МК, которые ни в одной из диагоналей не содержат симметричных чисел, но содержат хотя бы одну пару симметричных чисел среди всех диагональных ячеек. При этом первое число пары путём невариантных и тождественных преобразований можно переместить в ячейку A1, а второе число переместить либо в ячейку D1 (Вар.3.54.1), либо в ячейку C2 (Вар.3.54.2):

А			а
	Б		
		В	
			Г

Вар.3.54.1

А			
	Б	а	
		В	
			Г

Вар.3.54.2

Дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел для Вар.3.54.1 (в части пары для числа Б) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.3 и Вар.3.54.4:

А			а
	Б		
		В	
г			Г

→

А	Д	д	а
	Б		
≠	≠	В	≠
г	Е	е	Г

Вар.3.54.3 Вар.3.54.4

Для Вар.3.54.4 число, симметричное числу Б, нельзя разместить в ячейках A3 и D3 в соответствии с выводом п.3.53.

Также для Вар.3.54.4 число, симметричное числу Б, нельзя разместить в ячейке B3 из-за наличия несимметричных чисел в ячейках B1 и B4.

При размещении симметричных чисел в ячейках A2 и B2, дальнейший процесс размещения симметричных чисел будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.5 … Вар.3.54.7:

А	Д	д	а
б	Б		
		В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
	≠	В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
в		В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
в	З	В	з
г	Е	е	Г

Вар.3.54.5 Вар.3.54.6

→

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
		В	в
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
З	з	В	в
г	Е	е	Г

Вар.3.54.7

Выражения для чисел Вар.3.54.6 после использования дополнительных уравнений: $X_5+X_6=17$, $X_9+X_{11}=17$ примут вид согласно Табл.3.54.1:

17/2	X_2	$-X_2+17$	17/2
$-X_6+17$	X_6	X_7	$-X_7+17$
$X_6+X_7+X_{10}-17$	X_{10}	$-X_6-X_7-X_{10}+34$	$-X_{10}+17$
$-X_7-X_{10}+51/2$	$-X_2-X_6-X_{10}+34$	$X_2+X_6+X_{10}-17$	$X_7+X_{10}-17/2$

Табл.3.54.1

Здесь есть дробные числа ($X_1=17/2$ и др.), что неприемлемо.

При расстановке пар симметричных чисел согласно Вар.3.54.7 найти какое-либо противоречие невозможно, поэтому снова воспользуемся методикой, приведённой в п.3.48, для получения конкретных МК.

Однако, для значения $X_1=1$, получить конкретные МК не удастся. Дело в том, что, если задать значения чисел в соответствии с расстановкой

симметричных чисел согласно Вар.3.54.7 (Табл.3.54.2), то, воспользовавшись выражениями для чисел можно увидеть, что:

$(X_{10}+X_{12})=(-X_2-X_6+X_{15}+17)+(-X_2+X_6+X_{15}+2X_{16}-17)=$
$(-2X_2+2X_{15}+2X_{16})=2X_1=(1+3)_{мин}$, то есть $X_{1мин.}=4/2=2\neq1$.

$-X_2+X_{15}+X_{16}$	X_2	$-X_2+17$	$X_2-X_{15}-X_{16}+17$
$-X_6+17$	X_6	$X_6+2X_{16}-17$	$-X_6-2X_{16}+34$
$X_2+X_6-X_{15}$	$-X_2-X_6+X_{15}+17$	$X_2-X_6-X_{15}-2X_{16}+34$	$-X_2+X_6+X_{15}+2X_{16}-17$
$-X_{16}+17$	$-X_{15}+17$	X_{15}	X_{16}

Табл.3.54.2

При $X_2=1$, необходимые значения чисел для получения МК можно определить в соответствии с выражениями в Табл.3.54.2 и Табл.3.54.3.

№ п/п	X_2	X_6	X_{15}	X_{16}
1	1	4	2	9
2	1	4	2	11
3	1	6	2	7
4	1	8	2	11
5	1	10	2	5
6	1	12	2	9
7	1	14	2	5
8	1	14	2	7
9	1	4	3	9
10	1	7	3	6
11	1	12	3	9
12	1	15	3	6
13	1	6	5	10
14	1	8	5	10
15	1	13	5	3
16	1	15	5	3
17	1	10	9	5
18	1	10	9	6
19	1	11	9	4
20	1	12	9	6
21	1	13	9	3
22	1	14	9	5
23	1	15	9	3
24	1	15	9	4

Табл.3.54.3

Анализируя полученную информацию можно заметить, что X_{15} принимает уже известные значения 2, 3, 5, 9, что касается остальных независимых переменных, то разглядеть чёткую закономерность для их значений весьма сомнительно.

При X_6=1, необходимые значения чисел для получения МК можно определить в соответствии с выражениями в Табл.3.54.4 и Табл.3.54.5.

$X_6-X_9-X_{13}+17$	$-X_6+X_9+X_{15}$	$X_6-X_9-X_{15}+17$	$-X_6+X_9+X_{13}$
$-X_6+17$	X_6	$X_6-2X_{13}+17$	$-X_6+2X_{13}$
X_9	$-X_9+17$	$-2X_6+X_9+2X_{13}$	$2X_6-X_9-2X_{13}+17$
X_{13}	$-X_{15}+17$	X_{15}	$-X_{13}+17$

Табл.3.54.4

№ п/п	X_6	X_9	X_{13}	X_{15}
1	1	2	3	7
2	1	2	3	9
3	1	2	5	3
4	1	2	5	13
5	1	2	7	5
6	1	2	7	11
7	1	3	5	2
8	1	3	5	13
9	1	5	2	4
10	1	5	2	9
11	1	9	2	4
12	1	9	2	5
13	1	9	3	2
14	1	9	3	7
15	1	9	4	3
16	1	9	4	6

Табл.3.54.5

Анализируя полученную информацию также можно заметить, что X_9 принимает уже известные значения 2, 3, 5, 9, что касается остальных независимых переменных, то понять закономерность для их значений тоже не представляется возможным.

Для получения МК с единицей в ячейке А2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто

воспользоваться универсальным преобразованием группы МК с X_6=1, при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК.

Таким образом общее количество МК с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.54.7 составит 56 шт. (24+16+16), а общее количество МК четырёх рассмотренных групп будет равно 200 (144+56).

Сразу же целесообразно рассмотреть и тождественно равноценный вариант расстановки симметричных чисел в ячейках МК (Вар.3.54.8), который можно получить из Вар.3.54.7 путём тождественного преобразования п.3.8 (одновременной перестановкой первой и второй, а также третьей и четвёртой строк с одновременной перестановкой первого и второго, а также третьего и четвёртого столбцов):

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
З	з	В	в
г	Е	е	Г

Вар.3.54.7

→

Б	б	ж	Ж
Д	А	а	д
Е	г	Г	е
з	З	в	В

Вар.3.54.8

Следовательно, все магические квадраты с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.54.8 можно получить при помощи преобразования каждого МК, полученного для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.54.7, при помощи преобразования в соответствии с п.3.8.

Таким образом общее количество МК пяти рассмотренных групп будет равно 256 (200+56).

Аналогично целесообразно одновременно рассмотреть и тождественно равноценные варианты расстановки симметричных чисел в ячейках МК (Вар.3.54.9, Вар.3.54.10), которые можно получить из Вар.3.54.7 и Вар.3.54.8 путём тождественного преобразования п.3.9 (перестановкой второй и третьей строк с одновременной перестановкой второго третьего столбцов):

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
З	з	В	в
г	Е	е	Г

Вар.3.54.7

→

А	д	Д	а
З	В	з	в
б	Ж	Б	ж
г	е	Е	Г

Вар.3.54.9

Б	б	ж	Ж
Д	А	а	д
Е	г	Г	е
з	З	в	В

Вар.3.54.8

→

Б	ж	б	Ж
Е	Г	г	е
Д	а	А	д
з	в	З	В

Вар.3.54.10

Следовательно, все магические квадраты с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.54.9 можно получить при помощи преобразования каждого МК, полученного для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.54.7, при помощи преобразования в соответствии с п.3.8, а магические квадраты с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.54.10 можно получить при помощи преобразования каждого МК, полученного для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.54.8, тоже при помощи преобразования в соответствии с п.3.8,

Таким образом общее количество МК семи рассмотренных групп будет равно 368 (256+56+56).

При размещении симметричных чисел в ячейках B2 и C2 (Вар.3.54.4), дальнейший процесс размещения симметричных чисел будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.4 → Вар.3.54.11:

А	Д	д	а
	Б		
		В	
г	Е	е	Г

Вар.3.54.4

→

А	Д	д	а
	Б	б	
		В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
Ж	Б	б	ж
	в	В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
Ж	Б	б	ж
З	в	В	з
г	Е	е	Г

Вар.3.54.11

Выражения для чисел Вар.3.54.11 после использования дополнительных уравнений $X_1+X_4=17$, $X_6+X_7=17$ примут вид согласно Табл.3.54.6:

X_1	X_2	$-X_2+17$	$-X_1+17$
$-X_8+17$	$-X_7+17$	X_7	X_8
$-2X_1+X_7+X_8+X_{10}$	X_{10}	$-X_{10}+17$	$2X_1-X_7-X_8-X_{10}+17$
$X_1-X_7-X_{10}+17$	$-X_2+X_7-X_{10}+17$	$X_2-X_7+X_{10}$	$-X_1+X_7+X_{10}$

Табл.3.54.6

Из Табл.3.54.6 видно, что независимых переменных в рассматриваемом случае пять, а дополнительных степенных уравнений всего три (п.3.8), поэтому, чтобы не усложнять систему уравнений, целесообразнее

одновременно с указанием расположения числа 1, перебирать все возможные варианты размещения числа 2.

Для расположения числа 1 в ячейке A1 определим ячейки, в которых размещение числа 2 приведёт к противоречию требованиям к МК (Вар.3.54.12):

1			16
≠	≠		
≠		≠	
≠			≠

Вар.3.54.12

Здесь (Вар.3.54.12), отмечены ячейки, в которых расположение числа 2 не даст получить магическую сумму совместно с числом 1 в ячейках первого столбца и в ячейках диагонали A1- D4 (A2, A3, A4, B2, C3, D4), так как число 16 уже находится в ячейке D1.

Для остальных случаев (при расположении числа 1 в ячейке A1 и расположении числа 2 в ячейках B1, C1, C2, D2, B3, D3, B4, C4) варианты МК определятся значениями, указанными в Табл.3.54.6 и Табл.3.54.7:

№ п/п	X_1	X_2	X_7	X_8	X_{10}	X_{12}^*
1	1	4	2	3	5	9
2	1	10	2	3	5	9
3	1	4	2	3	9	5
4	1	6	2	3	9	5
5	1	6	2	5	3	9
6	1	10	2	5	3	9
7	1	4	2	5	9	3
8	1	6	2	5	9	3
9	1	6	2	9	3	5
10	1	10	2	9	3	5
11	1	4	2	9	5	3
12	1	10	2	9	5	3
13	1	4	3	2	5	9
14	1	11	3	2	5	9
15	1	4	3	2	9	5
16	1	7	3	2	9	5
17	1	6	5	2	3	9
18	1	13	5	2	3	9

19	1	6	5	2	9	3
20	1	7	5	2	9	3
21	1	10	9	2	3	5
22	1	13	9	2	3	5
23	1	10	9	2	5	3
24	1	11	9	2	5	3
25	1	7	3	5	2	9
26	1	11	3	5	2	9
27	1	7	3	9	2	5
28	1	11	3	9	2	5
29	1	7	5	3	2	9
30	1	13	5	3	2	9
31	1	7	5	9	2	3
32	1	13	5	9	2	3
33	1	11	9	3	2	5
34	1	13	9	3	2	5
35	1	11	9	5	2	3
36	1	13	9	5	2	3
37	1	4	3	5	9	2
38	1	7	3	5	9	2
39	1	4	3	9	5	2
40	1	11	3	9	5	2
41	1	6	5	3	9	2
42	1	7	5	3	9	2
43	1	6	5	9	3	2
44	1	13	5	9	3	2
45	1	10	9	3	5	2
46	1	11	9	3	5	2
47	1	10	9	5	3	2
48	1	13	9	5	3	2
49	1	6	2	3	4	10
50	1	9	2	3	4	10
51	1	6	2	10	4	3
52	1	9	2	10	4	3
53	1	8	4	3	2	10
54	1	11	4	3	2	10
55	1	8	4	10	2	3
56	1	11	4	10	2	3
57	1	5	6	2	8	3

58	1	10	6	2	8	3
59	1	7	8	2	6	3
60	1	12	8	2	6	3
61	1	5	6	3	8	2
62	1	10	6	3	8	2
63	1	7	8	3	6	2
64	1	12	8	3	6	2
65	1	3	4	2	8	5
66	1	10	4	2	8	5
67	1	7	8	2	4	5
68	1	14	8	2	4	5
69	1	3	4	5	8	2
70	1	10	4	5	8	2
71	1	7	8	5	4	2
72	1	14	8	5	4	2
73	1	3	4	2	6	7
74	1	5	6	2	4	7
75	1	12	4	2	6	7
76	1	14	6	2	4	7
77	1	3	4	7	6	2
78	1	12	4	7	6	2
79	1	5	6	7	4	2
80	1	14	6	7	4	2
81	1	2	3	4	7	5
82	1	11	3	4	7	5
83	1	2	3	5	7	4
84	1	11	3	5	7	4
85	1	6	7	4	3	5
86	1	15	7	4	3	5
87	1	6	7	5	3	4
88	1	15	7	5	3	4

Табл.3.54.7

Анализируя полученные значения (Табл.3.54.7), можно отметить несколько интересных особенностей.

Прежде всего, количество МК этой группы значительно превышает количество МК с предыдущими вариантами расстановки симметричных чисел.

Так количество МК с любыми сочетаниями чисел 2, 3, 5, 9 в ячейках C2, D2, B3, D3 (48 шт., строки 1-48) в два раза больше (2x24) чем для любой

группы типичных МК. Это связано с появившейся возможностью перемещения пар чисел X_2, X_3 с X_{14}, X_{15}, и X_5, X_8 с X_9, X_{12}.

Кроме того, предопределённая сумма чисел в этих ячейках ($X_7+X_8+X_{10}+X_{12}=X_7+X_8+X_{10}+2X_1-X_7-X_8-X_{10}+17=2X_1+17=19$), представлена здесь не только в ранее встречающемся варианте (2+3+5+9=19), но и в других вариантах (2+3+4+10, строки 49-56), (2+3+6+8, строки 57-64), (2+4+5+8, строки 65-72), (2+4+6+7, строки 73-80), (3+4+5+7, строки 81-88), но не в любых сочетаниях.

Для получения МК с единицей в ячейке B2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться преобразованием п. 4.8 (одновременной перестановкой первой и второй, а также третьей и четвёртой строк с одновременной перестановкой первого и второго, а также третьего и четвёртого столбцов), при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК, таким образом от МК Табл.3.54.7 будет получено ещё 88 МК рассматриваемого типа.

Для расположения числа 1 в ячейке B1 определим ячейки, в которых размещение числа 2 приведёт к противоречию требованиям к МК (Вар.3.54.10):

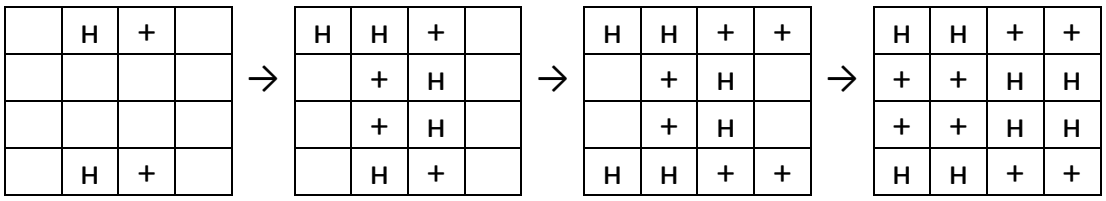
	1	16	
	≠		
	≠		
	≠	≠	

Вар.3.54.13

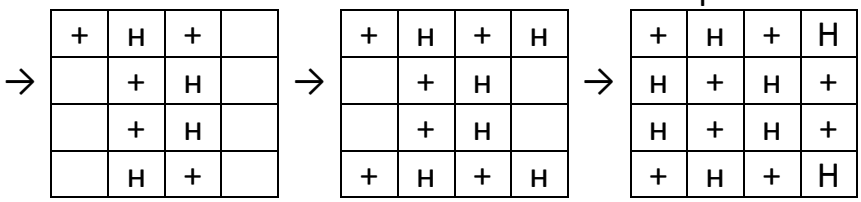
Здесь (Вар.3.54.13), отмечены ячейки, в которых расположение числа 2 не даст получить магическую сумму совместно с числом 1 в ячейках второго столбца (B2, B3, B4), так как число 16 уже находится в ячейке D1.

В ячейке C4 число 2 тоже не может быть расположено.

Чтобы в этом убедиться определим варианты расположения нечётных и чётных чисел при расположении числа 1 в ячейке B1 и числа 2 ячейке C4 (Вар.3.54.14, Вар.3.54.15, Вар.3.54.16):



Вар.3.54.14 Вар.3.54.15



Вар.3.54.16

Для Вар.3.54.15 получим выражения для чисел согласно Табл.3.54.8:

X_7	1	16	$-X_7+17$
$-X_8+17$	$-X_7+17$	X_7	X_8
X_8+1	X_7+1	$-X_7+16$	$-X_8+16$
$-X_7+16$	15	2	X_7+1

Табл.3.54.8

Здесь есть одинаковые числа ($X_1=X_7$ и др.), что неприемлемо.

Для Вар.3.54.16 получим выражения для чисел согласно Табл.3.54.9:

X_7+1	1	16	$-X_7+16$
$-X_8+17$	$-X_7+17$	X_7	X_8
X_8-1	X_7+1	$-X_7+16$	$-X_8+18$
$-X_7+17$	15	2	X_7

Табл.3.54.9

Здесь есть одинаковые числа ($X_{16}=X_7$ и др.), что неприемлемо.

Для остальных случаев (при расположении числа 1 в ячейке B1 и расположении числа 2 в ячейках A1, D1, A2, C2, D2, A3, C3, D3, A4, D4) варианты МК определятся значениями, указанными в Табл.3.54.10 и Табл.3.54.11:

$(X_7+X_8-X_9-X_{11}+17)/2$	X_2	$-X_2+17$	$(-X_7-X_8+X_9+X_{11}+17)/2$
$-X_8+17$	$-X_7+17$	X_7	X_8
X_9	$-X_{11}+17$	X_{11}	$-X_9+17$
$(-X_7+X_8-X_9+X_{11}+17)/2$	$-X_2+X_7+X_{11}$	$X_2-X_7-X_{11}+17$	$(X_7-X_8+X_9-X_{11}+17)/2$

Табл.3.54.10

№ п/п	X_2	X_7	X_8	X_9	X_{11}	X_5^*	X_{12}^*
1	1	2	12	14	9	5	3
2	1	2	3	5	9	14	12
3	1	2	8	14	5	9	3
4	1	2	3	9	5	14	8
5	1	2	5	3	9	12	14
6	1	2	14	12	9	3	5
7	1	2	8	12	3	9	5
8	1	2	5	9	3	12	8
9	1	2	14	8	5	3	9
10	1	2	9	3	5	8	14
11	1	2	9	5	3	8	12
12	1	2	12	8	3	5	9
13	1	3	2	5	9	15	12
14	1	3	12	15	9	5	2
15	1	3	2	9	5	15	82
16	1	3	8	15	5	9	2
17	1	5	2	3	9	15	14
18	1	5	14	15	9	3	2
19	1	5	2	9	3	15	8
20	1	5	8	15	3	9	2
21	1	9	2	3	5	15	14
22	1	9	14	15	5	3	2
23	1	9	2	5	3	15	12
24	1	9	12	15	3	5	2
25	1	3	5	2	9	12	15
26	1	3	15	12	9	2	5
27	1	3	15	8	5	2	9
28	1	3	9	2	5	8	15
29	1	5	15	14	9	2	3
30	1	5	3	2	9	14	15
31	1	5	9	2	3	8	15
32	1	5	15	8	3	2	9
33	1	9	15	14	5	2	3
34	1	9	3	2	5	14	15
35	1	9	15	12	3	2	5
36	1	9	5	2	3	12	15
37	1	3	8	12	2	9	5

38	1	3	5	9	2	12	8
39	1	3	9	5	2	8	12
40	1	3	12	8	2	5	9
41	1	5	8	14	2	9	3
42	1	5	3	9	2	14	8
43	1	5	9	3	2	8	14
44	1	5	14	8	2	3	9
45	1	9	12	14	2	5	3
46	1	9	3	5	2	14	12
47	1	9	14	12	2	3	5
48	1	9	5	3	2	12	14
49	1	5	15	11	10	2	6
50	1	10	15	11	5	2	6
51	1	10	2	6	5	15	11
52	1	5	2	6	10	15	11
53	1	10	6	2	5	11	15
54	1	5	6	2	10	11	15
55	1	10	11	15	5	6	2
56	1	5	11	15	10	6	2
57	1	9	3	11	4	14	6
58	1	9	6	14	4	11	3
59	1	4	11	3	9	6	14
60	1	4	14	6	9	3	11
61	1	4	6	14	9	11	3
62	1	4	3	11	9	14	6
63	1	9	11	3	4	6	14
64	1	9	14	6	4	3	11

Табл.3.54.11

Анализируя полученные значения (Табл.3.54.11), можно отметить как сходство, так и существенные отличия от значений предыдущей таблицы (Табл.3.54.7).

Так количество МК с любыми сочетаниями чисел 2, 3, 5, 9 в ячейках A2, C2, D2, A3, C3, D3 (48 шт., строки 1-48, с учётом возможности перемещений пар чисел в ячейках A2, D2 и A3, D3), в таблицах совпадает, но указать конкретную четвёрку ячеек с предопределённой суммой (19), через выражения для чисел, не получается. Также отсутствуют МК, с этой суммой, в конкретной четвёрке ячеек из других наборов чисел (2+3+4+10), (2+3+6+8), (2+4+5+8), (2+4+6+7), (3+4+5+7). Но появились варианты МК с другими

наборами чисел в определённых ячейках (2, 5, 6, 10, 11, 15 строки 49-56), (3, 4, 6, 9, 11, 14 строки 57-64), но не во всех сочетаниях.

Для получения МК с единицей в ячейке A2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться преобразованием п. 3.8 (одновременной перестановкой первой и второй, а также третьей и четвёртой строк с одновременной перестановкой первого и второго, а также третьего и четвёртого столбцов), при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК, таким образом от МК Табл.3.54.11 будет получено ещё 64 МК рассматриваемого типа.

Таким образом общее количество МК восьми рассмотренных групп будет равно 672 (368+88+88+64+64).

При размещении симметричных чисел в ячейках B2 и D2 (Вар.3.54.15), дальнейший процесс размещения симметричных чисел будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.17 → Вар.3.54.19:

А	Д	д	а
	Б		
		В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
	Б		б
	≠	В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
Ж	Б	ж	б
в		В	
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	а
Ж	Б	ж	б
в	З	В	з
г	Е	е	Г

Вар.3.54.17 Вар.3.54.18

→

А	Д	д	а
Ж	Б	ж	б
		В	в
г	Е	е	Г

→

А	Д	д	А
Ж	Б	ж	б
З	з	В	в
Г	Е	Е	Г

Вар.3.54.19

Расстановка симметричных чисел Вар.3.54.18 уже рассмотрена в качестве Вар.3.54.9. то есть МК, соответствующие этой расстановке симметричных чисел, уже учтены в общем количестве МК.

Выражения для чисел Вар.3.54.19 после использования дополнительных уравнений $X_6+X_8=17$, $X_9+X_{10}=17$ примут вид согласно Табл.3.54.12:

X_1	X_2	$-X_2+17$	$-X_1+17$
X_5	X_6	$-X_6+17$	$-X_5+17$
$-X_1-X_5+51/2$	$X_1+X_5-17/2$	$-X_1-X_6+51/2$	$X_1+X_6-17/2$
17/2	$-X_1-X_2-X_5-X_6+85/2$	$X_1+X_2+X_5+X_6-51/2$	17/2

Табл.3.54.12

Здесь есть дробные числа (X_{13}=17/2 и др.), что неприемлемо.

Для Вар.3.54.2 дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел (в части пары для числа Г) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.20:

А			
	Б	а	
		В	
			Г

→

А	≠	≠	≠
≠	Б	а	
≠		В	
≠			Г

Вар.3.54.2 Вар.3.54.20

Для Вар.3.54.20 число, симметричное числу Г, нельзя разместить в ячейках B1, C1, A2, A3 в соответствии с выводом п.3.53.

Также число, симметричное числу Г, нельзя разместить в ячейках D1 и A4 из-за невозможности размещения пары для числа А в ячейках D1 (A2), так как такое число уже находится в ячейке C2.

При размещении пары для числа Г в ячейке B3, то есть при использовании дополнительных уравнений $X_1+X_7=17$ и $X_{10}+X_{16}=17$ выражения для чисел примут вид согласно Табл.3.54.13:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	X_6	$-X_1+17$	$X_1-X_5-X_6+17$
$-X_1+X_4-X_5+17$	X_1	$-X_6+17$	$-X_4+X_5+X_6$
$-X_4+17$	$-X_1-X_2-X_6+34$	$2X_1+X_2+X_4+X_6-34$	$-X_1+17$

Табл.3.54.13

Здесь есть одинаковые числа ($X_{10}=X_1$ и др.), что неприемлемо.

При размещении второй пары симметричных чисел в ячейках D2 и D4, дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел (в части пар для чисел Б, В и др.) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.21 … Вар.3.54.26:

А		≠	Д
≠	Б	а	г
≠	≠	В	д
		≠	Г

→

А	б	≠	Д
≠	Б	а	г
≠	Е	В	д
	е	≠	Г

→

А	б	Ж	Д
	Б	а	г
	Е	В	д
в	е	≠	Г

→

А	б	Ж	Д
ж	Б	а	г
З	Е	В	д
в	е	з	Г

Вар.3.54.21

Вар.3.54.22

→

А	б	Ж	Д
З	Б	а	г
ж	Е	В	д
в	е	з	Г

Вар.3.54.23

→

А	≠	≠	Д
≠	Б	а	г
≠	≠	В	д
б	≠	≠	Г

Вар.3.54.24

→

А	Е	≠	Д
≠	Б	а	г
≠	е	В	д
	б	≠	Г

→

А	Е	Ж	Д
	Б	а	г
	е	В	д
в	б	≠	Г

→

А	Е	Ж	Д
ж	Б	а	г
З	е	В	д
в	б	з	Г

Вар.3.54.25

→

А	Е	Ж	Д
З	Б	а	г
ж	е	В	д
в	б	з	Г

Вар.3.54.26

Выражения для чисел Вар.3.54.22 после использования дополнительных уравнений $X_8+X_{16}=17$, $X_2+X_6=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.14:

X_1	$-4X_1+3X_{10}+17$	$5X_1-4X_{10}$	$-2X_1+X_{10}+17$
$-5X_1+4X_{10}+17$	$4X_1-3X_{10}$	$-X_1+17$	$2X_1-X_{10}$
$X_1-2X_{10}+17$	X_{10}	$-3X_1+2X_{10}+17$	$2X_1-X_{10}$
$3X_1-2X_{10}$	$-X_{10}+17$	$-X_1+2X_{10}$	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.14

Здесь есть одинаковые числа ($X_8=X_{12}=2X_1-X_{10}$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.23 после использования дополнительных уравнений $X_8+X_{16}=17$, $X_2+X_6=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_9=17$ примут вид согласно Табл.3.54.15:

X_1	$-X_1+17$	$-X_1+2X_{10}$	$X_1-2X_{10}+17$
$-2X_1+X_{10}+17$	X_1	$-X_1+17$	$2X_1-X_{10}$
$X_1-2X_{10}+17$	X_{10}	$-X_{10}+17$	$-X_1+2X_{10}$
X_{10}	$-X_{10}+17$	$2X_1-X_{10}$	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.15

Здесь есть одинаковые числа ($X_6=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Для Вар.3.54.24 ни одна из свободных ячеек непригодна для размещения числа, симметричного числу В.

Выражения для чисел Вар.3.54.25 после использования дополнительных уравнений $X_8+X_{16}=17$, $X_2+X_{10}=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.16:

X_1	$-X_1+17$	$-X_4+17$	X_4
X_4	$-X_4+17$	$-X_1+17$	X_1
$-X_1+17$	X_1	X_4	$-X_4+17$
$-X_4+17$	X_4	X_1	$-X_1+17$

Табл.3.54.16

Здесь есть одинаковые числа ($X_8=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.26 после использования дополнительных уравнений $X_8+X_{16}=17$, $X_2+X_{10}=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_9=17$ примут вид согласно Табл.3.54.17:

X_1	X_2	$-X_1-2X_2+34$	X_2
$-3X_1-2X_2+51$	$2X_1+X_2-17$	$-X_1+17$	$2X_1+X_2-17$
X_1+2X_2-17	$-X_2+17$	$-X_1+17$	$-X_2+17$
X_1	$-2X_1-X_2+34$	$3X_1+2X_2-34$	$-2X_1-X_2+34$

Табл.3.54.17

Здесь есть одинаковые числа ($X_4=X_2$ и др.), что неприемлемо.

При размещении второй пары симметричных чисел в ячейках D3 и D4, дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел (в части пар для чисел Б, В и др.) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.27 … Вар.3.54.32:

А		≠	Д
≠	Б	а	д
≠	≠	В	г
		≠	Г

→

А	б	≠	Д
≠	Б	а	д
≠	Е	В	г
	е	≠	Г

→

А	б	Ж	Д
	Б	а	д
	Е	В	г
в	е	≠	Г

→

А	б	Ж	Д
ж	Б	а	д
З	Е	В	г
в	е	з	Г

Вар.3.54.27

Вар.3.54.28

→

А	б	Ж	Д
З	Б	а	Д
Ж	Е	В	Г
в	е	з	Г

Вар.3.54.29

→

А	≠	≠	Д
≠	Б	а	д
≠	≠	В	г
б	≠	≠	Г

Вар.3.54.30

→

А	Е	≠	Д
≠	Б	а	д
≠	е	В	г
	б	≠	Г

→

А	Е	Ж	Д
	Б	а	д
	е	В	г
в	б	≠	Г

→

А	Е	Ж	Д
ж	Б	а	д
З	е	В	г
в	б	з	Г

Вар.3.54.31

→

А	Е	Ж	Д
З	Б	а	д
Ж	е	В	г
в	б	З	Г

Вар.3.54.32

Выражения для чисел Вар.3.54.28 после использования дополнительных уравнений $X_{12}+X_{16}=17$, $X_2+X_6=17$, $X_{11}+X_{13}=17$ примут вид согласно Табл.3.54.18:

X_1	X_2	$-3X_1-2X_2+2X_{10}+34$	$2X_1+X_2-2X_{10}$
$3X_1+2X_2-2X_{10}-17$	$-X_2+17$	$-X_1+17$	$-2X_1-X_2+2X_{10}+17$
$-3X_1-X_2+X_{10}+34$	X_{10}	$X_1+X_2-X_{10}$	$2X_1-X_{10}$
$-X_1-X_2+X_{10}+17$	$-X_{10}+17$	$3X_1+X_2-X_{10}-17$	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.18

Здесь (Табл.3.54.18) обнаружить противоречия невозможно, а значит надо найти МК, соответствующие рассматриваемой расстановке симметричных чисел.

Так как, в данном случае, расстановка симметричных чисел не изменится только лишь при отражении схемы относительно горизонтальной

оси симметрии, проходящей между второй и третьей строками, то необходимо рассмотреть варианты с размещением числа 1 в ячейках A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1, D2, при этом не все эти варианты дадут приемлемые решения из-за ограничений на размещение чисел по величинам (так при $X_1=1$ невозможно обеспечить равенство $X_1+X_{16}=X_7+X_{10}$), но непригодные значения можно просто отбросить.

Однако остаются ещё пара независимых переменных, что требует дополнительных уравнений.

В качестве дополнительных уравнений можно воспользоваться суммами различных степеней и суммами произведений пар симметричных чисел всего набора чисел магического квадрата. В рассматриваемом случае целесообразнее всего использовать следующие разновидности уравнений:

Сумма квадратов разностей пар симметричных чисел:

$$(X_1–X_7)^2+(X_2–X_6)^2+ \dots +(X_{11}–X_{13})^2+(X_{12}–X_{16})^2=$$
$$=(16–1)^2+(15–2)^2+ \dots +(10–7)^2+(9–8)^2.$$

Сумма произведений квадратов пар симметричных чисел:

$$X_1^2*X_7^2+X_2^2*X_6^2 + \dots + X_{11}^2*X_{13}^2+X_{12}^2*X_{16}^2=16^2*1+15^2*2^2+ \dots +10^2*7^2+9^2*8^2.$$

Полученные значения независимых переменных (приемлемые) приведены в Табл.3.54.19:

№ п/п	X_1	X_2	X_{10}	X_4^*	X_6^*	X_8^*
1	8	1	2			
2	12	1	9			
3	8	13	14	1		
4	12	7	15	1		
5	9	16	15		1	
6	5	16	8		1	
7	9	4	3			1
8	5	10	2			1

Табл.3.54.19

Таким образом общее количество МК девяти рассмотренных групп будет равно 680 (672+8).

Выражения для чисел Вар.3.54.29 после использования дополнительных уравнений $X_{12}+X_{16}=17$, $X_2+X_6=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_9=17$ примут вид согласно Табл.3.54.20:

X_1	X_2	X_1	$-2X_1-X_2+34$
$-X_1+17$	$-X_2+17$	$-X_1+17$	$2X_1+X_2-17$
$-X_1+17$	$2X_1+X_2-17$	$-X_1+17$	$-X_2+17$
X_1	$-2X_1-X_2+34$	X_1	X_2

Табл.3.54.20

Здесь есть одинаковые числа ($X_3=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Для Вар.3.54.30 ни одна из свободных ячеек непригодна для размещения числа, симметричного числу В.

Выражения для чисел Вар.3.54.31 после использования дополнительных уравнений $X_{12}+X_{16}=17$, $X_6+X_{14}=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.21:

X_1	X_2	$-3X_1-4X_2+68$	$2X_1+3X_2-34$
$3X_1+4X_2-51$	$-X_2+17$	$-X_1+17$	$-2X_1-3X_2+51$
$-3X_1-2X_2+51$	$-X_2+17$	X_1+2X_2-17	$2X_1+X_2-17$
$-X_1-2X_2+34$	X_2	$3X_1+2X_2-34$	$-2X_1-X_2+34$

Табл.3.54.21

Здесь есть одинаковые числа ($X_{14}=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.32 после использования дополнительных уравнений $X_{12}+X_{16}=17$, $X_6+X_{14}=17$, $X_{11}+X_{13}=17$, $X_3+X_9=17$ примут вид согласно Табл.3.54.22:

X_1	X_2	$-X_2+17$	$-X_1+17$
$-3X_1-2X_2+51$	$3X_1+2X_2-34$	$-X_1+17$	X_1
X_2	$-X_2+17$	$-2X_1-X_2+34$	$2X_1+X_2-17$
$2X_1+X_2-17$	$-3X_1-2X_2+51$	$3X_1+2X_2-34$	$-2X_1-X_2+34$

Табл.3.54.22

Здесь есть одинаковые числа ($X_8=X_1$ и др.), что неприемлемо.

При размещении второй пары симметричных чисел в ячейках B4 и D4, дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел (в части пар для чисел Б, В и др.) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.33 … Вар.3.54.37:

А	≠	≠	
≠	Б	а	≠
≠	≠	В	≠
Д	г	д	Г

→

А	≠	≠	б
≠	Б	а	≠
	≠	В	
Д	г	д	Г

→

А	Ж	≠	б
	Б	а	
в	Е	В	е
Д	г	д	Г

→

А	Ж	З	б
ж	Б	а	з
в	Е	В	е
Д	г	д	Г

Вар.3.54.33 Вар.3.54.34

→

А	Ж	З	б
з	Б	а	ж
в	Е	В	е
Д	г	д	Г

Вар.3.54.35

→

А	Ж	≠	б
	Б	а	
е	Е	В	в
Д	г	д	Г

→

А	Ж	З	б
ж	Б	а	з
е	Е	В	в
Д	г	д	Г

Вар.3.54.36

→

А	Ж	З	б
з	Б	а	ж
е	Е	В	в
Д	г	д	Г

Вар.3.54.37

Выражения для чисел Вар.3.54.34 после использования дополнительных уравнений $X_{14}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_9+X_{11}=17$, $X_2+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.23:

X_1	$-X_1+17$	$-X_1+17$	X_1
X_1	$-X_1+17$	$-X_1+17$	X_1
$-2X_1+X_{10}+17$	X_{10}	$2X_1-X_{10}$	$-X_{10}+17$
$-X_{10}+17$	$2X_1-X_{10}$	X_{10}	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.23

Здесь есть одинаковые числа ($X_4=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.35 после использования дополнительных уравнений $X_{14}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_9+X_{11}=17$ примут вид согласно Табл.3.54.24:

X_1	X_2	$-3X_1-2X_2+51$	$2X_1+X_2-17$
$3X_1+2X_2-34$	$-2X_1-X_2+34$	$-X_1+17$	$-X_2+17$
$-3X_1-X_2+X_{10}+34$	X_{10}	$3X_1+X_2-X_{10}-17$	$-X_{10}+17$
$-X_1-X_2-X_{10}+34$	$2X_1-X_{10}$	$X_1+X_2+X_{10}-17$	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.24

Здесь (Табл.3.54.24) обнаружить противоречия невозможно, а значит надо найти МК, соответствующие рассматриваемой схеме расстановки симметричных чисел.

Так как, в данном случае, расстановка симметричных чисел не изменится только лишь при отражении схемы относительно вертикальной оси симметрии, проходящей между вторым и третьим столбцами, то необходимо рассмотреть варианты с размещением числа 1 в ячейках A1, A2, A3, A4, B1, B2, B1, B2, при этом не все эти варианты дадут приемлемые решения из-за ограничений на размещение чисел по величинам (так при $X_1=1$ невозможно обеспечить равенство $X_1+X_{16}=X_7+X_{10}$), но непригодные значения можно просто отбросить.

Однако остаются ещё пара независимых переменных, что требует дополнительных уравнений.

В качестве дополнительных уравнений можно воспользоваться суммами различных степеней и суммами произведений пар симметричных чисел всего набора чисел магического квадрата. В рассматриваемом случае целесообразнее всего использовать следующие разновидности уравнений:

Сумма квадратов разностей пар симметричных чисел:

$(X_1–X_7)^2+(X_2–X_8)^2+ … +(X_{13}–X_{15})^2+(X_{14}–X_{16})^2=$
$=(16–1)^2+(15–2)^2+ … +(10–7)^2+(9–8)^2.$

Сумма произведений квадратов пар симметричных чисел:

$X_1^2*X_7^2+X_2^2*X_8^2 + … + X_{13}^2*X_{15}^2+X_{14}^2*X_{16}^2=16^2*1+15^2*2^2+ … +10^2*7^2+9^2*8^2.$

Полученные значения независимых переменных (приемлемые) приведены в Табл.3.54.25:

№ п/п	X_1	X_2	X_{10}	X_9^*	X_{13}^*	X_{14}^*
1	8	11	2	1		
2	12	6	9	1		
3	4	14	1			
4	7	12	1			
5	12	6	15		1	
6	8	11	14		1	
7	4	14	7			1
8	7	12	13			1

Табл.3.54.25

Таким образом общее количество МК десяти рассмотренных групп будет равно 688 (680+8).

Расстановка пар симметричных чисел последних двух рассмотренных групп МК может вызвать недоумение, настолько она не соответствует представлению о симметрии. Придётся считать эти варианты некоторого рода исключениями, тем более, что количество таких МК весьма незначительно.

Но вернёмся к анализу оставшихся вариантов расстановки симметричных чисел.

Выражения для чисел Вар.3.54.36 после использования дополнительных уравнений $X_{14}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_{11}+X_{12}=17$, $X_2+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.26:

X_1	X_2	$-3X_1-2X_2+51$	$2X_1+X_2-17$
$-X_2+17$	$-2X_1-X_2+34$	$-X_1+17$	$3X_1+2X_2-34$
X_2	$-X_2+17$	$3X_1+2X_2-34$	$-3X_1-2X_2+51$
$-X_1+17$	$2X_1+X_2-17$	X_1	$-2X_1-X_2+34$

Табл.3.54.26

Здесь есть одинаковые числа ($X_9=X_2$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.37 после использования дополнительных уравнений $X_{14}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_{11}+X_{12}=17$, $X_2+X_8=17$ примут вид согласно Табл.3.54.27:

X_1	$-3X_1+2X_{10}+17$	$3X_1-4X_{10}+17$	$-X_1+2X_{10}$
$-3X_1+4X_{10}$	$X_1-2X_{10}+17$	$-X_1+17$	$3X_1-2X_{10}$
$-X_{10}+17$	X_{10}	X_{10}	$-X_{10}+17$
$2X_1-3X_{10}+17$	$2X_1-X_{10}$	$-2X_1+3X_{10}$	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.27

Здесь есть одинаковые числа ($X_{11}=X_{10}$ и др.), что неприемлемо.

При размещении второй пары симметричных чисел в ячейках C4 и D4, дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел (в части пар для чисел Б, В и др.) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.54.38 … Вар.3.54.42:

А	≠	≠	
≠	Б	а	≠
≠	≠	В	≠
Д	д	г	Г

→

А	≠	≠	б
≠	Б	а	≠
	≠	В	
Д	д	г	Г

→

А	Ж	≠	б
	Б	а	
в	Е	В	е
Д	д	г	Г

→

А	Ж	З	б
ж	Б	а	з
в	Е	В	е
Д	д	г	Г

Вар.3.54.38

Вар.3.54.39

→

А	Ж	З	б
з	Б	а	ж
в	Е	В	е
Д	д	г	Г

Вар.3.54.40

→

А	Ж	≠	б
	Б	а	
Е	е	В	в
Д	д	г	Г

→

А	Ж	З	Б
ж	Б	а	З
Е	е	В	В
Д	д	г	Г

Вар.3.54.41

→

А	Ж	З	б
з	Б	А	ж
Е	е	В	в
Д	д	Г	Г

Вар.3.54.42

Выражения для чисел Вар.3.54.39 после использования дополнительных уравнений $X_{15}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_9+X_{11}=17$, $X_2+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.28:

X_1	X_1-2X_4+17	$-2X_1+X_4+17$	X_4
$-X_1+2X_4$	$-X_4+17$	$-X_1+17$	$2X_1-X_4$
$-X_1+17$	X_4	X_1	$-X_4+17$
X_1-2X_4+17	$-X_1+2X_4$	$2X_1-X_4$	$-2X_1+X_4+17$

Табл.3.54.28

Здесь есть одинаковые числа ($X_{10}=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.40 после использования дополнительных уравнений $X_{15}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_9+X_{11}=17$, $X_2+X_8=17$ примут вид согласно Табл.3.54.29:

X_1	$-3X_1+2X_{15}+17$	$3X_1-4X_{15}+17$	$-X_1+2X_{15}$
$-3X_1+4X_{15}$	$X_1-2X_{15}+17$	$-X_1+17$	$3X_1-2X_{15}$
$2X_1-3X_{15}+17$	$2X_1-X_{15}$	$-2X_1+3X_{15}$	$-2X_1+X_{15}+17$
$-X_{15}+17$	X_{15}	X_{15}	$-X_{15}+17$

Табл.3.54.29

Здесь есть одинаковые числа ($X_{14}=X_{15}$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.41 после использования дополнительных уравнений $X_{15}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_{11}+X_{12}=17$, $X_2+X_5=17$ примут вид согласно Табл.3.54.30:

X_1	$X_1-2X_{10}+17$	$-3X_1+2X_{10}+17$	X_1
$-X_1+2X_{10}$	$-X_1+17$	$-X_1+17$	$3X_1-2X_{10}$
$-X_{10}+17$	X_{10}	$2X_1-X_{10}$	$-2X_1+X_{10}+17$
$-X_{10}+17$	X_{10}	$2X_1-X_{10}$	$-2X_1+X_{10}+17$

Табл.3.54.30

Здесь есть одинаковые числа ($X_4=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.54.42 после использования дополнительных уравнений $X_{15}+X_{16}=17$, $X_4+X_6=17$, $X_{11}+X_{12}=17$, $X_2+X_8=17$ примут вид согласно Табл.3.54.31:

X_1	$-X_1+17$	$-X_4+17$	X_4
X_4	$-X_4+17$	$-X_1+17$	X_1
$-X_1+17$	X_1	X_4	$-X_4+17$
$-X_4+17$	X_4	X_1	$-X_1+17$

Табл.3.54.31

Здесь есть одинаковые числа ($X_4=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Таким образом завершено рассмотрение вариантов, содержащих хотя бы одну пару симметричных чисел в составе всех диагональных ячеек.

3.55 Теперь рассмотрим МК, которые в составе всех диагональных ячеек не содержат ни одной пары симметричных чисел, но содержат хотя бы одну пару симметричных чисел в ячейках хотя бы одной из строк (или столбцов). При этом можно считать (с учётом невариантных и тождественных преобразований), что такая пара расположена в первой строке, а первое число этой пары расположено в ячейке А1. Второе же число пары может располагаться либо в ячейке В1 (Вар.3.55.1), либо в ячейке С1 (Вар.3.55.2

А	а		Б
	В	Г	
	Д	Е	
Ж			З

Вар.3.55.1

А		а	Б
	В	Г	
	Д	Е	
Ж			З

Вар.3.55.2

Дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел для Вар.3.55.1 (в части пары для числа Ж) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.55.3 и Вар.3.55.4:

А	а	б	Б
	В	Г	
	Д	Е	
Ж			З

Вар.3.55.3

→

А	а	б	Б
≠	В	Г	≠
≠	Д	Е	≠
Ж			З

Вар.3.55.4

Для Вар.3.54.4 число, симметричное числу Ж, нельзя разместить в ячейках А2 и А3 из-за несвободной пары для числа А (уже находится в ячейке В1).

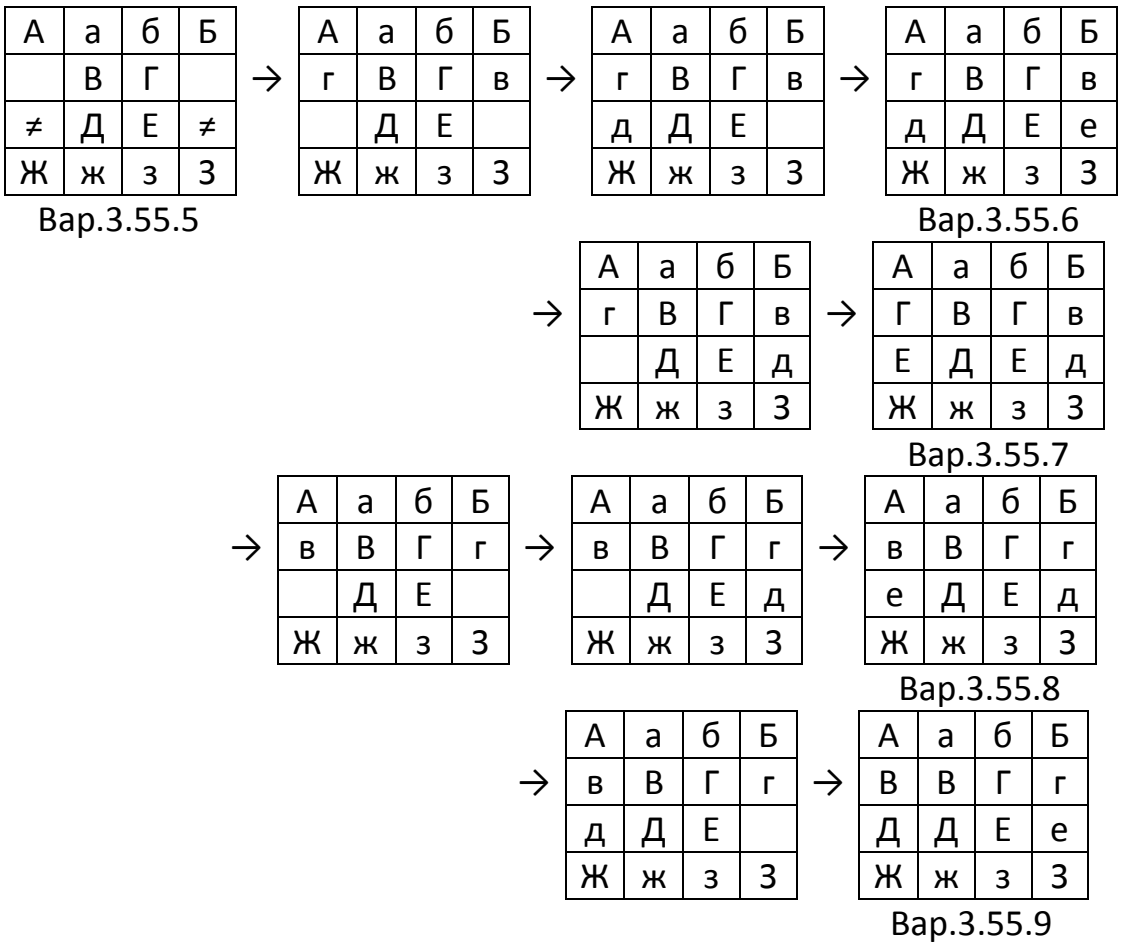
Также число, симметричное числу Ж, нельзя разместить в ячейках D2 и D3 в соответствии с выводом п.3.53.

Также число, симметричное числу Ж, нельзя разместить в ячейке С3, потому что после использования дополнительных уравнений $X_1+X_2=17$ и $X_{13}+X_{15}=17$ выражения для чисел примут вид в соответствии с Табл.3.55.1 из чего можно будет убедиться, что $X_7=X_6$, что неприемлемо:

X_1	$-X_1+17$	$-X_4+17$	X_4
X_5	X_6	X_6	$-X_5-2X_6+34$
$-X_1+X_4-X_5+X_6+X_{10}$	X_{10}	$-2X_6-X_{10}+34$	$X_1-X_4+X_5+X_6-X_{10}$
$-X_4-X_6-X_{10}+34$	$X_1-X_6-X_{10}+17$	$X_4+X_6+X_{10}-17$	$-X_1+X_6+X_{10}$

Табл.3.55.1

При размещении же пары симметричных чисел в ячейках А4 и В4, дальнейший процесс размещения пар симметричных чисел (в части пар для чисел В, Е и др.) будет выглядеть в соответствии со схемой, представленной в Вар.3.55.5 … Вар.3.55.9:



Выражения для чисел Вар.3.55.6 после использования дополнительных уравнений $X_1+X_2=17$, $X_{13}+X_{14}=17$, $X_6+X_8=17$, $X_9+X_{10}=17$ примут вид согласно Табл.3.55.2:

X_1	$-X_1+17$	$-X_1-2X_5+2X_{10}+17$	$X_1+2X_5-2X_{10}$
X_5	$-X_5+17$	$-X_5+17$	X_5
$-X_{10}+17$	X_{10}	$2X_5-X_{10}$	$-2X_5+X_{10}+17$
$-X_1-X_5+X_{10}+17$	$X_1+X_5-X_{10}$	$X_1+X_5-X_{10}$	$-X_1-X_5+X_{10}+17$

Табл.3.55.2

Здесь есть одинаковые числа ($X_8=X_5$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.55.7 после использования дополнительных уравнений $X_1+X_2=17$, $X_{13}+X_{14}=17$, $X_6+X_8=17$, $X_9+X_{11}=17$ примут вид согласно Табл.3.55.3:

X_1	$-X_1+17$	$-X_4+17$	X_4
X_5	$-X_1+X_4-X_5+17$	$-X_5+17$	$X_1-X_4+X_5$
$-X_5+17$	$X_1-X_4+X_5$	X_5	$-X_1+X_4-X_5+17$
$-X_1+17$	X_1	X_4	$-X_4+17$

Табл.3.55.3

Здесь есть одинаковые числа ($X_{14}=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.55.8 после использования дополнительных уравнений $X_1+X_2=17$, $X_{13}+X_{14}=17$, $X_5+X_6=17$, $X_9+X_{11}=17$ примут вид согласно Табл.3.55.4:

X_1	$-X_1+17$	$-X_1+17$	X_1
X_5	$-X_5+17$	$X_5-2X_{10}+17$	$-X_5+2X_{10}$
$-X_{10}+17$	X_{10}	X_{10}	$-X_{10}+17$
$-X_1-X_5+X_{10}+17$	$X_1+X_5-X_{10}$	$X_1-X_5+X_{10}$	$-X_1+X_5-X_{10}+17$

Табл.3.55.4

Здесь есть одинаковые числа ($X_4=X_1$ и др.), что неприемлемо.

Выражения для чисел Вар.3.55.9 после использования дополнительных уравнений $X_1+X_2=17$, $X_{13}+X_{14}=17$, $X_5+X_6=17$ примут вид согласно Табл.3.55.5:

X_1	$-X_1+17$	$-X_1+X_{10}+X_{12}$	$X_1-X_{10}-X_{12}+17$
$-X_1+X_{10}+X_{14}$	$X_1-X_{10}-X_{14}+17$	$-X_1+X_{12}+X_{14}$	$X_1-X_{12}-X_{14}+17$
$-X_{10}+17$	X_{10}	$-X_{12}+17$	X_{12}
$-X_{14}+17$	X_{14}	$2X_1-X_{10}-X_{12}-X_{14}+17$	$-2X_1+X_{10}+X_{12}+X_{14}$

Табл.3.55.5

Здесь (Табл.3.55.5) обнаружить противоречия невозможно, а значит надо найти МК, соответствующие рассматриваемой расстановке симметричных чисел.

Так как, в данном случае, расстановка симметричных чисел не изменяется как при отражении схемы относительно вертикальной оси симметрии, проходящей между вторым и третьим столбцами, так и при отражении схемы относительно горизонтальной оси симметрии, проходящей между второй и третьей строками, то достаточно рассмотреть варианты с размещением числа 1 в ячейках A1, A2, B1, B2.

Для определения конкретных значений чисел в МК ещё требуются три дополнительных уравнения (для нахождения трёх оставшихся независимых переменных в Табл.3.55.5).

В качестве дополнительных уравнений можно воспользоваться суммами различных степеней и суммами произведений пар симметричных чисел всего набора чисел магического квадрата. В рассматриваемом случае целесообразнее всего использовать следующие разновидности уравнений:

Сумма квадратов разностей пар симметричных чисел:

$(X_1–X_2)^2+(X_3–X_4)^2+ … + (X_{13}–X_{14})^2+(X_{15}–X_{16})^2=$
$=(16–1)^2+(15–2)^2+ … +(10–7)^2+(9–8)^2.$

Сумма произведений квадратов пар симметричных чисел:

$X_1^2*X_2^2+X_3^2*X_4^2 + … + X_{13}^2*X_{14}^2+X_{15}^2*X_{16}^2=16^2*1+15^2*2^2+ … +10^2*7^2+9^2*8^2.$

Сумма произведений квадратов разностей пар на произведения квадратов этих же пар симметричных чисел:

$(X_1–X_2)^2*X_1^2*X_2^2+(X_3–X_4)^2*X_3^2*X_4^2 +…+ (X_{13}–X_{14})^2*X_{13}^2*X_{14}^2+(X_{15}–X_{16})^2*X_{15}^2*X_{16}^2=$
$=(16–1)^2*16^2+(15–2)^2*15^2*2^2+ … +(10–7)^2*10^2*7^2+(9–8)^2*9^2*8^2.$

Полученные значения, не соответствующие установленному набору чисел, просто исключим из итоговой информации.

В Табл.3.55.6 приведены значения для получения магических квадратов с числом 1 в ячейке А1 в соответствии с выражениями для чисел согласно Табл.3.55.5.

№ п/п	X_1	X_{10}	X_{12}	X_{14}	X_{15}^*
1	1	2	3	5	9
2	1	2	3	9	5
3	1	2	5	3	9
4	1	2	5	9	3
5	1	2	9	3	5
6	1	2	9	5	3
7	1	3	2	5	9
8	1	3	2	9	5
9	1	5	2	3	9
10	1	5	2	9	3
11	1	9	2	3	5
12	1	9	2	5	3
13	1	3	5	2	9
14	1	3	9	2	5
15	1	5	3	2	9
16	1	5	9	2	3
17	1	9	3	2	5
18	1	9	5	2	3
19	1	3	5	9	2
20	1	3	9	5	2

21	1	5	3	9	2
22	1	5	9	3	2
23	1	9	3	5	2
24	1	9	5	3	2

Табл.3.55.6

Анализируя полученные значения можно заметить, что все они представляют собой размещённые в ячейках B3, D3, B4, C4 в различных сочетаниях числа 2, 3, 5, 9.

Для получения МК с единицей в ячейке B1 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться универсальным преобразованием, при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК, таким образом от МК Табл.3.55.6 будет получено ещё 24 МК рассматриваемого типа.

Для получения МК с единицей в ячейке B2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться преобразованием п. 3.8 (одновременной перестановкой первой и второй, а также третьей и четвёртой строк с одновременной перестановкой первого и второго, а также третьего и четвёртого столбцов), при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК, таким образом от МК Табл.3.55.6 будет получено ещё 24 МК рассматриваемого типа.

Для получения МК с единицей в ячейке A2 не обязательно повторять полный процесс поиска значений соответствующих чисел, можно просто воспользоваться универсальным преобразованием МК, полученного в результате предыдущего преобразования, при этом не изменятся ни схема расстановки симметричных чисел, ни свойства МК, таким образом от МК Табл.3.55.6 будет получено ещё 24 МК рассматриваемого типа.

Таким образом общее количество МК с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.55.9 составит 784 (688+24+24+24+24).

Схема расстановки симметричных чисел Вар.3.55.2 (Вар.3.55.10) не требует детального анализа, так как может быть получена из схемы Вар.3.55.1 путём тождественного преобразования п.3.9 (перестановкой второй и третьей строк с одновременной перестановкой второго третьего столбцов):

А	а		Б
	В	Г	
	Д	Е	
Ж			З

Вар.3.55.1

→

А	б	а	Б
д	Е	Д	е
в	Г	В	г
Ж	з	ж	З

Вар.3.55.10

Следовательно, все магические квадраты с расстановкой симметричных чисел согласно Вар.3.55.2 можно получить при помощи преобразования каждого МК, полученного для расстановки симметричных чисел согласно Вар.3.55.1, при помощи преобразования в соответствии с п.3.9.

А общее количество МК двенадцати найденных схем расстановки симметричных чисел будет равно 880 (784+24+24+24+24).

Таким образом завершено рассмотрение вариантов МК, содержащих хотя бы одну пару симметричных чисел в составе всех диагональных ячеек или содержащих хотя бы одну пару симметричных чисел в ячейках хотя бы одной из строк (или столбцов).

3.56 Осталось рассмотреть МК, которые не содержат ни одной пары симметричных чисел как в составе всех диагональных ячеек, так и в составе любой из строк или любого из столбцов.

Но попытка получить вариант такой схемы расстановки симметричных чисел (Вар.3.56.1 → Вар.3.56.2) не даст результата.

А			Б
	В	Г	
	Д	Е	
Ж			З

Вар.3.56.1

→

А	≠	≠	Б
≠	В	Г	≠
≠	Д	Е	≠
Ж	≠	≠	З

Вар.3.56.2

Действительно, число (а), симметричное числу А, не должно располагаться в ячейках B1, C1, A2, A3, чтобы не возникла пара в строке или столбце, а в ячейках D2, D3. B4, C4 оно не должно располагаться в соответствии с выводом п.3.53.

Таким образом, других схем расстановки симметричных чисел, кроме найденных двенадцати, не существует.

3.57 По результатам анализа МК четвёртого порядка осталось подвести итоги.

Наиболее важными можно считать следующие выводы:

— Базовым для анализа МК можно считать учёт нечётности\чётности магических сумм и чисел, из которых они состоят.

— Любая четвёрка ячеек, содержащих магическую сумму (кроме диагональных) содержит по два нечётных и два чётных числа (причём даже после преобразования МК в квадраты нижних уровней).

— Существуют различного вида преобразования (тождественные, универсальное и др.), при которых МК изменяются при сохранении магических свойств;

— Группировка МК по схемам расстановки симметричных чисел (чисел с суммой равной 17) упрощает процесс анализа и классификации МК.

— Расстановка пар симметричных чисел не произвольна, а подчинена закономерностям. Для МК четвёртого порядка существует всего двенадцать следующих схем расстановки пар симметричных чисел:

А	Д	Е	В
д	а	в	Е
Ж	Г	Б	З
г	ж	з	Б

Вар.3.46.24 (48 МК)
Табл.3.46.9, 3.49.1,
Табл.3.49.2, 3.49.3.

А	Е	Д	В
Ж	Б	Г	З
д	в	а	е
г	з	ж	б

Вар.3.50.2 (48 МК)

А	Д	Е	В
Ж	Б	Г	З
з	г	б	ж
в	е	д	а

Вар.3.51.24 (48 МК)
Табл.3.52.1, 3.52.2
Табл.3.52.3, 3.52.4.

А	Д	д	а
б	Б	Ж	ж
З	з	В	в
г	Е	е	Г

Вар.3.54.7 (56 МК)
Табл.3.54.2, 3.54.3
Табл.3.54.4, 3.54.5

Б	б	ж	Ж
Д	А	а	д
Е	г	Г	е
з	З	в	В

Вар.3.54.8 (56 МК)

А	д	Д	а
З	В	з	в
б	Ж	Б	ж
г	е	Е	Г

Вар.3.54.9 (56 МК)

Б	ж	б	Ж
Е	Г	г	е
Д	а	А	д
з	в	З	В

Вар.3.54.10 (56 МК)

А	Д	д	а
Ж	Б	б	ж
З	в	В	з
г	Е	е	Г

Вар.3.54.11(304МК)
Табл.3.54.6, 3.54.7
Табл.3.54.10, 3.54.11

А	б	Ж	Д
ж	Б	а	д
З	Е	В	г
в	е	з	Г

Вар.3.54.28 (8 МК)
Табл.3.54.18,3.54.19

А	Ж	З	б
з	Б	а	ж
в	Е	В	е
Д	г	д	Г

Вар.3.54.35 (8 МК)
Табл.3.54.24,3.54.25

А	а	б	Б
В	В	Г	г
Д	Д	Е	е
Ж	ж	з	З

Вар.3.55.9 (96 МК)
Табл.3.55.5, 3.55.6

А	б	а	Б
д	Е	Д	е
в	Г	В	г
Ж	з	ж	З

Вар.3.55.10 (96 МК)

Таким образом всего существует 880 МК четвёртого порядка (4х4), которые можно разделить на двенадцать групп, по вариантам расстановки симметричных чисел (Вар.3.46.24, Вар.3.50.2, Вар.3.51.24, Вар.3.54.7, Вар.3.54.8, Вар.3.54.9, Вар.3.54.10, Вар.3.54.11, Вар.3.54.28, Вар.3.54.35, Вар.3.55.9, Вар.3.55.10).

Если же не разделять МК по группам и ограничиться только тождественно различными вариантами, то всё разнообразие МК четвёртого порядка можно представить при помощи Табл.3.56.1 и Табл.3.56.2 в виде 220 вариантов:

X_1	X_2	$-X_1-X_2-X_4+34$	X_4
X_5	X_6	X_7	$-X_5-X_6-X_7+34$
$-X_1-X_5-X_{13}+34$	$-X_4-X_7-X_{13}+34$	$X_4-X_6+X_{13}$	$X_1+X_5+X_6+X_7+X_{13}-34$
X_{13}	$-X_2+X_4-X_6+X_7+X_{13}$	$X_1+X_2+X_6-X_7-X_{13}$	$-X_1-X_4-X_{13}+34$

Табл.3.56.1

№ п/п	X_1	X_4	X_{13}	X_6	X_7	X_2	X_5
1	1	4	13	6	7	15	12
2	1	4	13	7	6	14	12
3	1	4	14	6	7	16	11
4	1	4	14	8	5	13	12
5	1	4	15	7	6	16	10
6	1	4	15	8	5	13	12
7	1	4	15	9	8	16	6
8	1	4	15	9	8	16	12
9	1	4	16	8	5	14	10
10	1	4	16	8	5	14	11
11	1	4	16	8	5	15	10
12	1	4	16	8	5	15	11
13	1	4	16	9	6	14	7
14	1	4	16	9	6	14	12
15	1	4	16	9	6	15	7
16	1	4	16	9	6	15	12
17	1	6	11	4	7	15	14
18	1	6	11	7	4	12	14
19	1	6	12	4	7	16	13
20	1	6	12	8	3	11	14
21	1	6	15	7	4	16	10
22	1	6	15	8	3	11	14
23	1	6	16	8	3	12	10
24	1	6	16	8	3	12	13
25	1	6	16	8	3	15	10
26	1	6	16	8	3	15	13
27	1	6	16	9	4	12	7

28	1	6	16	9	4	12	14
29	1	6	16	9	4	15	7
30	1	6	16	9	4	15	14
31	1	7	10	4	6	14	15
32	1	7	10	6	4	12	15
33	1	7	12	4	6	16	13
34	1	7	12	8	2	10	15
35	1	7	14	6	4	16	11
36	1	7	14	8	2	10	15
37	1	7	16	8	2	12	11
38	1	7	16	8	2	12	13
39	1	7	16	8	2	14	11
40	1	7	16	8	2	14	13
41	1	8	10	4	5	13	16
42	1	8	10	5	4	11	16
43	1	8	10	5	4	14	16
44	1	8	10	6	3	11	16
45	1	8	11	4	5	13	16
46	1	8	11	7	2	10	16
47	1	8	12	4	5	14	15
48	1	8	12	4	5	15	14
49	1	8	12	5	4	16	14
50	1	8	12	6	3	10	16
51	1	8	12	6	3	15	16
52	1	8	13	6	3	11	16
53	1	8	13	7	2	10	16
54	1	8	14	6	3	12	15
55	1	8	14	6	3	15	12
56	1	8	14	7	2	12	16
57	1	8	14	7	2	13	16
58	1	8	14	10	7	16	4
59	1	8	14	10	7	16	15
60	1	8	15	7	2	12	14
61	1	8	15	7	2	14	12
62	1	8	15	9	4	12	16
63	1	8	15	11	6	16	4
64	1	8	15	11	6	16	14
65	1	8	16	10	3	12	6
66	1	8	16	10	3	12	15

67	1	8	16	10	3	13	6
68	1	8	16	10	3	13	15
69	1	8	16	11	4	10	5
70	1	8	16	11	4	10	14
71	1	8	16	11	4	15	5
72	1	8	16	11	4	15	14
73	1	10	15	11	4	16	6
74	1	10	15	12	3	7	14
75	1	10	16	12	3	8	6
76	1	10	16	12	3	8	13
77	1	10	16	12	3	15	6
78	1	10	16	12	3	15	13
79	1	11	14	10	4	16	7
80	1	11	14	12	2	6	15
81	1	11	16	12	2	8	7
82	1	11	16	12	2	8	13
83	1	11	16	12	2	14	7
84	1	11	16	12	2	14	13
85	1	12	13	10	3	7	16
86	1	12	13	11	2	6	16
87	1	12	14	10	3	8	15
88	1	12	14	10	3	15	8
89	1	12	14	11	2	8	16
90	1	12	14	11	2	13	16
91	1	12	15	11	2	8	14
92	1	12	15	11	2	14	8
93	1	12	15	13	4	16	8
94	1	12	15	13	4	16	10
95	1	12	16	13	2	7	8
96	1	12	16	13	2	7	11
97	1	12	16	13	2	14	8
98	1	12	16	13	2	14	11
99	1	13	16	14	2	8	7
100	1	13	16	14	2	8	11
101	1	13	16	14	2	12	7
102	1	13	16	14	2	12	11
103	1	14	15	13	2	8	12
104	1	14	15	13	2	12	8
105	2	3	13	5	8	15	12

106	2	3	13	7	6	14	11
107	2	3	14	5	8	16	11
108	2	3	14	8	5	13	11
109	2	3	15	7	6	13	9
110	2	3	15	7	6	13	12
111	2	3	15	7	6	16	9
112	2	3	15	7	6	16	12
113	2	3	16	7	6	14	11
114	2	3	16	8	5	15	9
115	2	3	16	9	8	14	5
116	2	3	16	9	8	14	11
117	2	5	11	3	8	15	14
118	2	5	11	7	4	12	13
119	2	5	12	3	8	16	13
120	2	5	12	8	3	11	13
121	2	5	15	7	4	11	9
122	2	5	15	7	4	11	14
123	2	5	15	7	4	16	9
124	2	5	15	7	4	16	14
125	2	5	16	7	4	12	13
126	2	5	16	8	3	15	9
127	2	7	9	3	6	14	15
128	2	7	9	4	5	11	15
129	2	7	9	4	5	14	15
130	2	7	9	5	4	12	15
131	2	7	11	3	6	13	16
132	2	7	11	3	6	16	13
133	2	7	11	5	4	9	15
134	2	7	11	5	4	16	15
135	2	7	12	3	6	14	15
136	2	7	13	4	5	15	11
137	2	7	13	5	4	11	16
138	2	7	13	5	4	16	11
139	2	7	13	6	3	9	15
140	2	7	13	6	3	16	15
141	2	7	13	9	8	15	3
142	2	7	13	9	8	15	16
143	2	7	14	5	4	12	15
144	2	7	15	6	3	11	12

145	2	7	15	6	3	11	13
146	2	7	15	9	4	11	5
147	2	7	15	9	4	11	16
148	2	7	15	9	4	14	5
149	2	7	15	9	4	14	16
150	2	7	16	10	3	11	15
151	2	7	16	11	6	10	3
152	2	7	16	11	6	10	13
153	2	8	9	3	5	13	16
154	2	8	9	5	3	11	16
155	2	8	11	3	5	15	14
156	2	8	13	5	3	15	12
157	2	9	15	11	4	7	5
158	2	9	15	11	4	7	14
159	2	9	15	11	4	16	5
160	2	9	15	11	4	16	14
161	2	9	16	11	4	8	13
162	2	9	16	12	3	15	5
163	2	11	13	9	4	7	16
164	2	11	13	9	4	16	7
165	2	11	13	10	3	5	15
166	2	11	13	10	3	16	15
167	2	11	14	9	4	8	15
168	2	11	15	10	3	7	8
169	2	11	15	10	3	7	13
170	2	11	16	13	4	6	7
171	2	11	16	13	4	6	9
172	2	12	13	9	3	15	8
173	3	5	10	6	4	12	13
174	3	5	14	6	4	10	9
175	3	5	14	6	4	10	15
176	3	5	14	6	4	16	9
177	3	5	14	6	4	16	15
178	3	5	16	6	4	12	13
179	3	6	9	5	4	12	14
180	3	6	10	4	5	9	14
181	3	6	10	4	5	16	14
182	3	6	13	5	4	10	16
183	3	6	13	5	4	16	10

184	3	6	13	9	8	14	2
185	3	6	13	9	8	14	16
186	3	6	14	4	5	13	10
187	3	6	14	4	5	13	15
188	3	6	14	5	4	12	9
189	3	6	14	5	4	12	16
190	3	6	15	5	4	12	14
191	3	6	16	10	7	11	2
192	3	6	16	10	7	11	13
193	3	9	14	10	4	6	5
194	3	9	14	10	4	6	15
195	3	9	14	10	4	16	5
196	3	9	14	10	4	16	15
197	3	9	16	10	4	8	13
198	3	10	13	9	4	6	16
199	3	10	13	9	4	16	6
200	3	10	13	11	6	14	2
201	3	10	13	11	6	14	16
202	3	10	14	9	4	8	5
203	3	10	14	9	4	8	16
204	3	10	15	9	4	8	14
205	4	5	14	9	8	12	1
206	4	5	14	9	8	12	15
207	4	5	15	9	8	12	1
208	4	5	15	9	8	12	14
209	4	9	13	10	5	6	3
210	4	9	13	10	5	6	16
211	4	9	13	10	5	15	3
212	4	9	13	10	5	15	16
213	4	9	14	11	6	8	1
214	4	9	14	11	6	8	15
215	5	9	12	10	6	4	3
216	5	9	12	10	6	4	15
217	5	9	12	10	6	16	3
218	5	9	12	10	6	16	15
219	5	10	11	9	6	4	16
220	5	10	11	9	6	16	4

Табл.3.56.2

От представленных вариантов, путём тождественного преобразования (одновременной перестановкой строк второй с третьей и столбцов второго с третьим) можно получить ещё 220 вариантов МК, а от полученных 440 вариантов, путём другого тождественного преобразования (одновременной перестановкой строк первой с второй, третьей с четвёртой и столбцов первого с вторым, третьего с четвёртым) можно получить ещё 440 вариантов, таким образом получится опять же 880 вариантов МК четвёртого порядка.

Необходимо отметить, что основная информация о МК третьего и четвёртого порядков (и о кубах третьего порядка) уже давно известна и приведена во многих источниках, а рассмотренные выше особенности только дополняют общую картину и детализируют некоторые интересные нюансы.

А вот дальнейшие разработки этой темы носят уже весьма фрагментарный характер (специфические варианты, ограниченные группы) и не претендуют на общую полноту.

В этом направлении работы ещё непочатый край, а образно говоря тут не только «пахать да пахать», да тут ещё и «конь не валялся».

Ещё многие исследователи могут попробовать свои силы в попытке открыть какие-то из тайн магических числовых образований, ну и мне, надеюсь, удастся чего-то добиться в этом направлении, чем я непосредственно сейчас и займусь.

Глава 4. Магические кубы четвёртого порядка.

4.1 Общий вид магического куба четвёртого порядка в виде последовательных фронтальных слоёв показан в Табл. 4.1.1 … Табл. 4.1.4.

Здесь под неизвестными X_1; X_2 …. X_{63}; X_{64} подразумеваются набор чисел 1; 2; … 63; 64:

	A	B	C	D
1	X_1	X_2	X_3	X_4
2	X_5	X_6	X_7	X_8
3	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
4	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}

Табл. 4.1.1

	E	F	G	H
5	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
6	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}
7	X_{25}	X_{26}	X_{27}	X_{28}
8	X_{29}	X_{30}	X_{31}	X_{32}

Табл. 4.1.2

	I	J	K	L
9	X_{33}	X_{34}	X_{35}	X_{36}
10	X_{37}	X_{38}	X_{39}	X_{40}
11	X_{41}	X_{42}	X_{43}	X_{44}
12	X_{45}	X_{46}	X_{47}	X_{48}

Табл. 4.1.3

	M	N	O	P
13	X_{49}	X_{50}	X_{51}	X_{52}
14	X_{53}	X_{54}	X_{55}	X_{56}
15	X_{57}	X_{58}	X_{59}	X_{60}
16	X_{61}	X_{62}	X_{63}	X_{64}

Табл. 4.1.4

Символы в верхней строке (A, B, …) дают нумерацию столбцов МК, числа в левом столбце (1, 2, …) дают нумерацию строк куба, а выражение типа B2 даёт нумерацию ячейки на пересечении столбца B и строки 2

4.2 Магическую сумму можно найти путём деления суммы всех чисел на количество строк (столбцов):

$$МС = \frac{1+2+ \dots +63+64}{16} = 130.$$

4.3 Если, использовав базовые уравнения для МС в каждом слое (включая магические суммы в каждой из диагоналей каждого слоя и в каждой из пространственных диагоналей куба), исключить максимально возможное количество неизвестных, выразив их через некоторые независимые переменные, то можно увидеть наличие одинаковых чисел в наборе чисел магического куба, что неприемлемо, так как нарушает одно из основных условий для магических числовых образований.

При этом отказаться от использования магических сумм в каждой из больших диагоналей куба неприемлемо, так как тогда пропадёт пространственная ориентация числовой конструкции.

Остаётся, также, как и в случае с магическим кубом третьего порядка, ограничить использование диагональных равенств для каждого из слоёв, то есть вместо использования уравнений с магической суммой для каждой из диагоналей каждого слоя (фронтального, горизонтального, профильного) использовать уравнения для общей суммы чисел в двух диагоналях каждого из слоёв (равной 260), при использовании равенства с магической суммой (130) для каждой их пространственных диагоналей. Таким образом каждый из слоёв будет представлен диагонально-суммируемым магическим квадратом (ДСМК, п.3.53).

Сразу можно отметить, что для куба четвёртого порядка справедливы как универсальное преобразование, так и тождественные преобразования с взаимным одновременным перемещением крайних слоёв (двух с каждой стороны по всем трём координатам), а также взаимным одновременным перемещением внутренних слоёв (тоже по трём координатам), при этом набор чисел в каждой из пространственных диагоналей не изменяется.

Использование ДСМК в каждом слое магического куба позволит получить выражения для шестидесяти четырёх неизвестных значений чисел куба через семнадцать независимых переменных, что кажется просто запредельной величиной для дальнейшего исследования.

Однако, не стоит отчаиваться.

Для начала, по аналогии, убедимся, что почти все (за исключением диагональных) особенности МК четвёртого порядка свойственны и каждому слою магического куба четвёртого порядка, при этом можно увидеть и четвёрки ячеек с магическими суммами в разных слоях куба, а также и равенства пар чисел в разных слоях. Подтверждается это при помощи сопоставления выражений для чисел, в чём читатель может убедиться самостоятельно, после использования базовых уравнений, задав через семнадцать независимых переменных (можно по предлагаемому варианту Табл. 4.3.1), все остальные числа в ячейках магического куба:

$X_3=-X_1-X_2-X_4+130;$
$X_8=-X_5-X_6-X_7+130;$
$X_9=-X_1-X_5-X_{13}+130;$
$X_{11}=-X_6-X_7-X_{10}+130;$
$X_{12}=X_1+X_5+X_6+X_7+X_{13}-130;$
$X_{14}=-X_2-X_6-X_{10}+130;$
$X_{15}=X_1+X_2+X_4+X_6+X_{10}-130;$
$X_{16}=-X_1-X_4-X_{13}+130;$

$X_{20}=-X_{17}-X_{18}-X_{19}+130;$
$X_{23}=-X_{1}-X_{4}-X_{22}+130;$
$X_{24}=-X_{1}-X_{4}-X_{21}+130;$
$X_{26}=-X_{1}-X_{13}-X_{22}+130;$
$X_{27}=2X_{1}+X_{4}+X_{13}+X_{22}-130;$
$X_{28}=-X_{1}-X_{4}-X_{25}+130;$
$X_{29}=-X_{17}-X_{21}-X_{25}+130;$
$X_{30}=X_{1}+X_{13}-X_{18};$
$X_{31}=-X_{1}-X_{13}-X_{19}+130;$
$X_{32}=X_{17}+X_{18}+X_{19}+X_{21}+X_{25}-130;$
$X_{33}=-X_{1}-X_{17}-X_{49}+130;$
$X_{35}=-X_{18}-X_{19}-X_{34}+130;$
$X_{36}=X_{1}+X_{17}+X_{18}+X_{19}+X_{49}-130;$
$X_{38}=-X_{1}-X_{22}-X_{49}+130;$
$X_{39}=2X_{1}+X_{4}+X_{22}+X_{49}-130;$
$X_{40}=-X_{1}-X_{4}-X_{37}+130;$
$X_{41}=-X_{21}-X_{25}-X_{37}+130;$
$X_{42}=2X_{1}+X_{13}+X_{22}+X_{49}-130;$
$X_{43}=-3X_{1}-X_{4}-X_{13}-X_{22}-X_{49}+260;$
$X_{44}=X_{1}+X_{4}+X_{21}+X_{25}+X_{37}-130;$
$X_{45}=X_{1}+X_{17}+X_{21}+X_{25}+X_{49}-130;$
$X_{46}=-X_{1}-X_{13}-X_{34}+130;$
$X_{47}=X_{1}+X_{13}+X_{18}+X_{19}+X_{34}-130;$
$X_{48}=-X_{1}-X_{17}-X_{18}-X_{19}-X_{21}-X_{25}-X_{49}+260;$
$X_{50}=-X_{2}-X_{18}-X_{34}+130;$
$X_{51}=X_{1}+X_{2}+X_{4}+X_{18}+X_{34}-130;$
$X_{52}=-X_{1}-X_{4}-X_{49}+130;$
$X_{53}=-X_{5}-X_{21}-X_{37}+130;$
$X_{54}=X_{1}-X_{6}+X_{49};$
$X_{55}=-X_{1}-X_{7}-X_{49}+130;$
$X_{56}=X_{5}+X_{6}+X_{7}+X_{21}+X_{37}-130;$
$X_{57}=X_{1}+X_{5}+X_{13}+X_{21}+X_{37}-130;$
$X_{58}=-X_{1}-X_{10}-X_{49}+130;$
$X_{59}=X_{1}+X_{6}+X_{7}+X_{10}+X_{49}-130;$
$X_{60}=-X_{1}-X_{5}-X_{6}-X_{7}-X_{13}-X_{21}-X_{37}+260;$
$X_{61}=-X_{1}-X_{13}-X_{49}+130;$
$X_{62}=X_{2}+X_{6}+X_{10}+X_{18}+X_{34}-130;$
$X_{63}=-X_{1}-X_{2}-X_{4}-X_{6}-X_{10}-X_{18}-X_{34}+260;$
$X_{64}=2X_{1}+X_{4}+X_{13}+X_{49}-130;$

Табл. 4.3.1

4.4 Теперь можно попытаться заняться поиском закономерностей расположения нечётных и чётных чисел.

Если возможность расположения в любом слое по восемь нечётных и чётных чисел не вызывает сомнений, то возможность расположения в каком-либо слое шести (десяти), четырёх (двенадцати), двух (четырнадцати) и ноля (шестнадцати) нечётных чисел требует рассмотрения (нечётное же количество нечётных чисел неприемлемо, так как противоречит чётной сумме чисел слоя). Рассматривая варианты расположения нечётных и чётных чисел необходимо учитывать, что в каждом слое магической (чётной) должна быть не только сумма чисел в каждой строке и каждом столбце, но и в четвёрках угловых, внутренних и боковых ячеек слоя (что подтверждается суммированием выражений для чисел в этих ячейках), а также в четвёрках ячеек каждой пространственной диагонали и в восьми ячейках каждой пары диагоналей каждого слоя.

Предварительно надо определиться с непротиворечивыми вариантами расположения разного количества нечётных чисел в одном слое.

Для не кратного четырём количества нечётных чисел в слое ни одного непротиворечивого варианта их расположения в слое получить невозможно.

Таким образом рассмотрения требуют сочетания с шестнадцатью, двенадцатью, восемью и четырьмя нечётными числами (или с отсутствием нечётных чисел) в слоях магического куба.

Однако, при попытке такого исследования, ощутимого результата получить не удастся.

Можно, правда, убедиться, что в магическом кубе четвёртого порядка не может быть не только двух параллельных слоёв с одними нечётными (или чётными, с учётом универсального преобразования) числами, но и не может быть одного слоя со всеми нечётными числами и второго, параллельного слоя, со всеми чётными числами.

Но этого слишком мало для поиска закономерностей и получения конкретных вариантов магических кубов.

4.5 Приведённая попытка исследования магического куба четвёртого порядка путём логического анализа свидетельствует о бесперспективности такого подхода ввиду его сложности и трудоёмкости.

Но если даже поиск общих закономерностей находится под вопросом, то на что же тогда можно рассчитывать в деле получения конкретных вариантов магических кубов?

Воспользоваться решением систем степенных уравнений явно не получиться, так как уже при системе из трёх степенных уравнений, квадратного, четвёртой степени и шестой степени (нечётные степени для системы не годятся), времени для получения решения может понадобиться столько, что дождаться решения станет весьма проблематично, а при

большем количестве независимых переменных программа вообще может отказаться от поиска решения, показав соответствующую заставку.

Ну так что же тогда, тупик?

Конечно же, нет.

Всегда остаётся путь банального сплошного перебора всех существующих вариантов. Конечно, времени для такого перебора может потребоваться тоже достаточно много, но при этом есть возможность постепенного пошагового перехода между значениями каких-либо переменных (выбор которых будет гарантировать наиболее оптимальный результат). Разумеется, перебором должна заняться компьютерная программа, иначе жизни не хватит для получения чего-либо определённого.

Я не буду приводить ни листингов используемых программ, ни даже языка, на котором они написаны и не потому, что это представляет какую-то ценность.

Дело в том, что дотошный читатель может и сам попробовать свои силы в этом увлекательном процессе и перепроверить (или опровергнуть) правильность моих выводов (что одинаково полезно). Тому же читателю, которому не принципиально знание этой, довольно-таки специфической темы, будет вполне достаточно ознакомиться с полученным результатом и уже по его анализу прийти к определённому заключению.

4.6 Но перед тем, как приступить к получению конкретных вариантов магических кубов, целесообразно убедиться, что магические суммы в них, также, как и в МК четвёртого порядка, подчиняются «правилу двух …», то есть могут состоять только из двух нечётных и двух чётных чисел.

Для этого придётся создать вариант программы, который позволит подтвердить это предположение.

С этой целью в варианте программы необходимо ввести проверку на соответствие по признаку чётности/нечётности числа последующего числу предыдущему, что исключит получение вариантов кубов с магическими суммами из чисел с разным признаком чётности.

После выполнения перебора такой программой, ни одного варианта куба с какой-либо магической суммой из четырёх чисел одинаковой чётности получено не будет.

Тут надо обратить внимание на справедливость этого утверждения не только для магических сумм в каждом из слоёв, но и для всех магических сумм, которые определены для четвёрок ячеек по всему объёму магического куба (что подтверждено суммированием соответствующих выражений для чисел в этих ячейках).

Но самое интересное, что при этом удастся убедиться, что этому правилу соответствуют и магические суммы из чисел в каждой пространственной диагонали куба, то есть для пространственной числовой

структуры «правило двух …» является абсолютно базовым, в отличии от магического квадрата четвёртого порядка (где для диагональных сумм допускается исключение, что ведёт к наличию нетипичных МК).

Но что нам это даёт? О, это открывает замечательные возможности!

Из этого положения следует возможность получения магических кубов четвёртого порядка разного уровня по методике п.3.23 (увеличением нечётных чисел на 1 с последующим делением каждого числа на 2), при этом уровней получится шесть (130+2)/2=66, (66+2)/2=34, (34+20/2=18, (18+2)/2=10, (10+2)/2=6.

Также открывается возможность преобразования по типу Табл.3.44.1… Табл.3.44.8, то есть в магическом кубе, без перемещения чисел и без изменения схемы расстановки симметричных чисел, путём статических преобразований, оказывается возможным вариант перехода от числа, расположенного в ячейке к числу, любого (необходимого) значения.

А из этого, в свою очередь, следует запрет на размещение пары симметричных чисел в разных парах одинаковых сумм, так как любая пара симметричных чисел может быть преобразована в пару 1-64, при которой получить соответствующие одинаковые суммы невозможно (1+63<64+2).

Далее, обратим внимание, что с учётом невариантных и тождественных преобразований, для числа 1 достаточно рассмотреть всего три варианта расположения, это ячейки A1, B1, B2 (в узле куба, на ребре куба и внутри слоя куба).

При расположении числа 1 в ячейке A1, дальнейшее отсечение невариантов и разбиение на группы целесообразно выполнить при помощи вариантов размещения числа 64.

Так как для числа 1 все три слоя, в которых оно расположена (фронтальном, горизонтальном и профильном) равноценны, то можно ограничиться рассмотрением его размещения в одном из них (фронтальном), при этом ячейки B4, C4, D2, D3 исключаются, так как попадают в пары с одинаковой суммой $X_1+X_4=X_{14}+X_{15}$, $X_1+X_{13}=X_8+X_{12}$, а ячейки B2, C3, D4 исключаются потому, что попадают в пары с одинаковой суммой $X_1+X_{49}=X_6+X_{54}$, $X_1+X_{49}=X_{11}+X_{59}$, $X_1+X_{49}=X_{16}+X_{64}$.

Таким образом в первом фронтальном слое, для размещения числа 64 (с учётом симметрии относительно диагонали A1-D4), остаются только ячейки B1, C1, D1, C2.

Затем, размещением числа 64 в оставшихся слоях в ячейках F6, F7, F8, G6, G7, G8, H6, H7, H8, K10, K11, K12, L10, L11, L12, P14, P15, P16, будут отсечены невариантны с ячейками, находящимися по другую сторону от плоскости с диагональю A1-P16.

Ну и с точки зрения очерёдности будем придерживаться принципа перехода от более простых к более сложным для анализа вариантам расстановки чисел.

Вот теперь, после выполнения всех подготовительных операций, пора бы и приступить к получению конкретных магических кубов.

Однако, попытку получения магических кубов на такой основе, вряд ли можно будет признать удачной.

Варианты, конечно, будут получены, но их будет столько, что о каком-либо их разумном анализе вряд ли можно будет и предположить. Да и количество схем расстановки симметричных чисел будет столь велико, что увидеть закономерности их расположения будет также весьма затруднительно. Чтобы облегчить процесс анализа придётся воспользоваться дополнительными исходными ограничениями (но они также ограничат и многообразие рассматриваемых вариантов магических кубов).

4.7 Но какими же соображениями при этом желательно руководствоваться?

Мне представляется, что лучше всего для этой цели подойдут дополнительные требования по расположению чисел в противоположных слоях куба.

Дело в том, что наличие магических сумм в пространственных диагоналях куба недостаточно для существенного влияния «невидимой руки симметрии» на объёмную ориентацию чисел в кубе. А значит надо определённым образом посодействовать «его величеству симметрии».

Для этой цели лучше всего, по моему мнению, в дополнение к базовым использовать следующие уравнения:

$X_1+X_6+X_{11}+X_{16}+X_{52}+X_{55}+X_{58}+X_{61}=260;$
$X_{17}+X_{22}+X_{27}+X_{32}+X_{36}+X_{39}+X_{42}+X_{45}=260;$
$X_1+X_{18}+X_{35}+X_{52}+X_{16}+X_{31}+X_{46}+X_{61}=260;$
$X_5+X_{22}+X_{39}+X_{56}+X_{12}+X_{27}+X_{42}+X_{57}=260;$
$X_1+X_{21}+X_{41}+X_{61}+X_{16}+X_{28}+X_{40}+X_{52}=260;$
$X_2+X_{22}+X_{42}+X_{62}+X_{15}+X_{27}+X_{39}+X_{51}=260;$

Тогда диагонально-суммируемыми станут и противоположные слои куба, то есть кубы, соответствующие этим уравнениям можно будет считать диагонально-суммируемым магическими квадрато-кубами (ДСМКК).

Исследованием именно таких числовых конструкций целесообразно и ограничиться. В них оптимально сочетаются и свойства симметрии, и достаточное разнообразие.

Такой группе магических кубов удобнее дать имя Кубы4гр1, что можно расшифровать как: Выборка из кубов четвёртого порядка под первым номером.

С учётом сказанного все числа куба можно будет выразить через одиннадцать независимых чисел куба (X_1, X_2, X_4, X_5, X_6, X_7, X_{13}, X_{17}, X_{18}, X_{22}, X_{49}) следующим образом (Табл. 4.7.1):

$X_3=-X_1-X_2-X_4+130;$
$X_8=-X_5-X_6-X_7+130;$
$X_9=-X_1-X_5-X_{13}+130;$
$X_{10}=-2X_1-X_4-X_7-X_{13}-2X_{49}+260;$
$X_{11}=2X_1+X_4-X_6+X_{13}+2X_{49}-130;$
$X_{12}=X_1+X_5+X_6+X_7+X_{13}-130;$
$X_{14}=2X_1-X_2+X_4-X_6+X_7+X_{13}+2X_{49}-130;$
$X_{15}=-X_1+X_2+X_6-X_7-X_{13}-2X_{49}+130;$
$X_{16}=-X_1-X_4-X_{13}+130;$
$X_{19}=2X_2+X_6-X_7-2X_{13}+X_{18}+2X_{22}-2X_{49};$
$X_{20}=-2X_2-X_6+X_7+2X_{13}-X_{17}-2X_{18}-2X_{22}+2X_{49}+130;$
$X_{21}=-3X_1-X_2-X_5-X_6-X_{17}-X_{18}-3X_{22}+390;$
$X_{23}=-X_1-X_4-X_{22}+130;$
$X_{24}=4X_1+X_2+X_4+X_5+X_6+X_{17}+X_{18}+3X_{22}-390;$
$X_{25}=-X_1-X_2-X_4+X_5+X_7+X_{13}-X_{17}-X_{18}-X_{22}+130;$
$X_{26}=-X_1-X_{13}-X_{22}+130;$
$X_{27}=2X_1+X_4+X_{13}+X_{22}-130;$
$X_{28}=X_2-X_5-X_7-X_{13}+X_{17}+X_{18}+X_{22};$
$X_{29}=4X_1+2X_2+X_4+X_6-X_7-X_{13}+X_{17}+2X_{18}+4X_{22}-390;$
$X_{30}=X_1+X_{13}-X_{18};$
$X_{31}=-X_1-2X_2-X_6+X_7+X_{13}-X_{18}-2X_{22}+2X_{49}+130;$
$X_{32}=-4X_1-X_4-X_{13}-X_{17}-2X_{22}-2X_{49}+390;$
$X_{33}=-X_1-X_{17}-X_{49}+130;$
$X_{34}=-2X_1-2X_2-X_4-X_6+X_7-X_{18}-2X_{22}+X_{49}+260;$
$X_{35}=2X_1+X_4+2X_{13}-X_{18}+X_{49}-130;$
$X_{36}=X_1+2X_2+X_6-X_7-2X_{13}+X_{17}+2X_{18}+2X_{22}-X_{49}-130;$
$X_{37}=-X_1+X_2-X_4-X_5-X_7-2X_{13}+X_{17}+X_{18}+X_{22}-X_{49}+130;$
$X_{38}=-X_1-X_{22}-X_{49}+130;$
$X_{39}=2X_1+X_4+X_{22}+X_{49}-130;$
$X_{40}=-X_2+X_5+X_7+2X_{13}-X_{17}-X_{18}-X_{22}+X_{49};$
$X_{41}=5X_1+X_2+2X_4+X_5+X_6+X_{13}+X_{17}+X_{18}+3X_{22}+X_{49}-520;$
$X_{42}=2X_1+X_{13}+X_{22}+X_{49}-130;$
$X_{43}=-3X_1-X_4-X_{13}-X_{22}-X_{49}+260;$
$X_{44}=-4X_1-X_2-X_4-X_5-X_6-X_{13}-X_{17}-X_{18}-3X_{22}-X_{49}+520;$

$X_{45}=-3X_1-2X_2-X_4-X_6+X_7+X_{13}-X_{17}-2X_{18}-4X_{22}+X_{49}+390;$
$X_{46}=X_1+2X_2+X_4+X_6-X_7-X_{13}+X_{18}+2X_{22}-X_{49}-130;$
$X_{47}=-X_1-X_4-X_{13}+X_{18}-X_{49}+130;$
$X_{48}=3X_1+X_4+X_{13}+X_{17}+2X_{22}+X_{49}-260;$
$X_{50}=2X_1+X_2+X_4+X_6-X_7+2X_{22}-X_{49}-130;$
$X_{51}=-X_1-X_2-X_6+X_7-2X_{22}+X_{49}+130;$
$X_{52}=-X_1-X_4-X_{49}+130;$
$X_{53}=4X_1+X_4+X_5+X_6+X_7+2X_{13}+2X_{22}+X_{49}-390;$
$X_{54}=X_1-X_6+X_{49};$
$X_{55}=-X_1-X_7-X_{49}+130;$
$X_{56}=-4X_1-X_4-X_5-2X_{13}-2X_{22}-X_{49}+390;$
$X_{57}=-3X_1-X_4-X_5-X_6-X_7-X_{13}-2X_{22}-X_{49}+390;$
$X_{58}=X_1+X_4+X_7+X_{13}+X_{49}-130;$
$X_{59}=-X_1-X_4+X_6-X_{13}-X_{49}+130;$
$X_{60}=3X_1+X_4+X_5+X_{13}+2X_{22}+X_{49}-260;$
$X_{61}=-X_1-X_{13}-X_{49}+130;$
$X_{62}=-4X_1-X_2-2X_4-X_{13}-2X_{22}-X_{49}+390;$
$X_{63}=3X_1+X_2+X_4+X_{13}+2X_{22}+X_{49}-260;$
$X_{64}=2X_1+X_4+X_{13}+X_{49}-130;$

Табл. 4.7.1

Ну вот, уже на этой основе и продолжим дальнейшее исследование.

4.8 Однако, для сочетания $X_1=1$, $X_2=64$, программа не найдёт ни одного магического куба.

Это просто невероятно, при девяти оставшихся независимых переменных (из 62 чисел), не найти ни одного варианта магического куба, такое даже трудно представить. И это при том, что без использования этих шести дополнительных уравнений, можно получить тьму-тьмущую магических кубов с сочетанием $X_1=1$, $X_2=64$ (один пример приведён в виде фронтальных слоёв Вар.4.8.1, Вар.4.8.2, Вар.4.8.3, Вар.4.8.4):

1	64	49	16
47	17	30	36
26	40	43	21
56	9	8	57

Вар.4.8.1

31	20	45	34
2	62	51	15
55	11	6	58
42	37	28	23

Вар.4.8.2

38	41	24	27
59	7	10	54
14	50	63	3
19	32	33	46

Вар.4.8.3

60	5	12	53
22	44	39	25
35	29	18	48
13	52	61	4

Вар.4.8.4

А значит, достижение определённого наличия симметрии ведёт к существенному сокращению количества магических кубов, соответствующих такой симметрии.

Хотя из приведённого примера всё же видно, что частично симметрия присутствует и в нём. Так дополнительно проявились следующие равенства, непредусмотренные базовыми уравнениями:

$X_{13}+X_{14}=65$, $X_{17}+X_{20}=65$, $X_{33}+X_{36}=65$, $X_{49}+X_{50}=65$, $X_{61}+X_{62}=65$.

Не даст ни одного магического куба также обработка сочетаний $X_1=1$ и $X_3=64$; $X_1=1$ и $X_5=64$; $X_1=1$ и $X_9=64$.

4.9 А вот для сочетания $X_1=1$, $X_4=64$ программа найдёт 1440 вариантов магических кубов.

При их анализе можно заметить, что симметричные числа в любом фронтальном слое каждого из этих вариантов расположены строго определённым образом (Вар.4.9.1):

А	Б	б	а
В	Г	г	в
Д	Е	е	д
Ж	З	з	ж

Вар.4.9.1

Удивительно, но размещение пары симметричных чисел всего в двух ячейках определило схему расстановки остальных симметричных чисел в оставшихся 62 ячейках магического куба, вот что творит эта «невидимая рука симметрии».

Воспользовавшись этой особенностью можно дополнительно исключить ещё две независимые переменные.

Тогда оставшиеся числа куба (при $X_1=1$, $X_4=64$) можно будет выразить через семь независимых переменных чисел куба (X_2, X_5, X_6, X_{13}, X_{17}, X_{22}, X_{49}) следующим образом (Табл. 4.9.1):

$X_1=1;$
$X_3=-X_2+65;$
$X_4=64;$
$X_7=-X_6+65;$
$X_8=-X_5+65;$
$X_9=-X_5-X_{13}+129;$
$X_{10}=X_6-X_{13}-2X_{49}+129;$
$X_{11}=-X_6+X_{13}+2X_{49}-64;$
$X_{12}=X_5+X_{13}-64;$
$X_{14}=-X_2-2X_6+X_{13}+2X_{49}+1;$
$X_{15}=X_2+2X_6-X_{13}-2X_{49}+64;$
$X_{16}=-X_{13}+65;$

$X_{18}=-X_2-X_6+X_{13}-X_{22}+X_{49}+65;$
$X_{19}=X_2+X_6-X_{13}+X_{22}-X_{49};$
$X_{20}=-X_{17}+65;$
$X_{21}=-X_5-X_{13}-X_{17}-2X_{22}-X_{49}+322;$
$X_{23}=-X_{22}+65;$
$X_{24}=X_5+X_{13}+X_{17}+2X_{22}+X_{49}-257;$
$X_{25}=X_5-X_{17}-X_{49}+65;$
$X_{26}=-X_{13}-X_{22}+129;$
$X_{27}=X_{13}+X_{22}-64;$
$X_{28}=-X_5+X_{17}+X_{49};$
$X_{29}=X_{13}+X_{17}+2X_{22}+2X_{49}-257;$
$X_{30}=X_2+X_6+X_{22}-X_{49}-64;$
$X_{31}=-X_2-X_6-X_{22}+X_{49}+129;$
$X_{32}=-X_{13}-X_{17}-2X_{22}-2X_{49}+322;$
$X_{33}=-X_{17}-X_{49}+129;$
$X_{34}=-X_2-X_6-X_{13}-X_{22}+194;$
$X_{35}=X_2+X_6+X_{13}+X_{22}-129;$
$X_{36}=X_{17}+X_{49}-64;$
$X_{37}=-X_5-X_{13}+X_{17}+65;$
$X_{38}=-X_{22}-X_{49}+129;$
$X_{39}=X_{22}+X_{49}-64;$
$X_{40}=X_5+X_{13}-X_{17};$
$X_{41}=X_5+2X_{13}+X_{17}+2X_{22}+2X_{49}-322;$
$X_{42}=X_{13}+X_{22}+X_{49}-128;$
$X_{43}=-X_{13}-X_{22}-X_{49}+193;$
$X_{44}=-X_5-2X_{13}-X_{17}-2X_{22}-2X_{49}+387;$
$X_{45}=-X_{13}-X_{17}-2X_{22}-X_{49}+258;$
$X_{46}=X_2+X_6+X_{22}-65;$
$X_{47}=-X_2-X_6-X_{22}+130;$
$X_{48}=X_{13}+X_{17}+2X_{22}+X_{49}-193;$
$X_{50}=X_2+2X_6+2X_{22}-X_{49}-129;$
$X_{51}=-X_2-2X_6-2X_{22}+X_{49}+194;$
$X_{52}=-X_{49}+65;$
$X_{53}=X_5+2X_{13}+2X_{22}+X_{49}-257;$
$X_{54}=-X_6+X_{49}+1;$
$X_{55}=X_6-X_{49}+64;$
$X_{56}=-X_5-2X_{13}-2X_{22}-X_{49}+322;$
$X_{57}=-X_5-X_{13}-2X_{22}-X_{49}+258;$
$X_{58}=-X_6+X_{13}+X_{49};$
$X_{59}=X_6-X_{13}-X_{49}+65;$
$X_{60}=X_5+X_{13}+2X_{22}+X_{49}-193;$

X_{61}=-X_{13}-X_{49}+129;
X_{62}=-X_2-X_{13}-2X_{22}-X_{49}+258;
X_{63}=X_2+X_{13}+2X_{22}+X_{49}-193;
X_{64}=X_{13}+X_{49}-64;

Табл. 4.9.1

Разумеется, это не изменит ни общее количество (1440) магических кубов, ни их состав.

Для того чтобы представить полученную группу магических кубов в табличном виде, определять все 1440 сочетаний независимых переменных необязательно, достаточно определить 720 исходных вариантов, а остальные 720 вариантов получить от них тождественным преобразованием (одновременной перестановкой средних фронтальных, профильных и горизонтальных слоёв).

Соответствующие сочетания 720 исходных вариантов независимых переменных приведены в Табл. 4.9.2, зависимые же переменные определяются в соответствии с Табл. 4.9.1.

№ п/п	X_{49}	X_{13}	X_{22}	X_6	X_2	X_5	X_{17}
1	16	52	62	8	27	31	55
2	16	52	62	8	27	31	59
3	16	52	62	8	27	47	55
4	16	52	62	8	27	47	59
5	16	52	62	8	43	31	55
6	16	52	62	8	43	31	59
7	16	52	62	8	43	47	55
8	16	52	62	8	43	47	59
9	16	52	62	12	23	31	55
10	16	52	62	12	23	31	59
11	16	52	62	12	23	47	55
12	16	52	62	12	23	47	59
13	16	52	62	12	39	31	55
14	16	52	62	12	39	31	59
15	16	52	62	12	39	47	55
16	16	52	62	12	39	47	59
17	16	54	60	8	29	31	55
18	16	54	60	8	29	31	61
19	16	54	60	8	29	47	55
20	16	54	60	8	29	47	61
21	16	54	60	8	45	31	55
22	16	54	60	8	45	31	61
23	16	54	60	8	45	47	55
24	16	54	60	8	45	47	61
25	16	54	60	14	23	31	55

26	16	54	60	14	23	31	61
27	16	54	60	14	23	47	55
28	16	54	60	14	23	47	61
29	16	54	60	14	39	31	55
30	16	54	60	14	39	31	61
31	16	54	60	14	39	47	55
32	16	54	60	14	39	47	61
33	16	55	60	8	29	30	54
34	16	55	60	8	29	30	61
35	16	55	60	8	29	46	54
36	16	55	60	8	29	46	61
37	16	55	60	8	45	30	54
38	16	55	60	8	45	30	61
39	16	55	60	8	45	46	54
40	16	55	60	8	45	46	61
41	16	55	60	15	22	30	54
42	16	55	60	15	22	30	61
43	16	55	60	15	22	46	54
44	16	55	60	15	22	46	61
45	16	55	60	15	38	30	54
46	16	55	60	15	38	30	61
47	16	55	60	15	38	46	54
48	16	55	60	15	38	46	61
49	16	58	56	12	29	31	59
50	16	58	56	12	29	31	61
51	16	58	56	12	29	47	59
52	16	58	56	12	29	47	61
53	16	58	56	12	45	31	59
54	16	58	56	12	45	31	61
55	16	58	56	12	45	47	59
56	16	58	56	12	45	47	61
57	16	58	56	14	27	31	59
58	16	58	56	14	27	31	61
59	16	58	56	14	27	47	59
60	16	58	56	14	27	47	61
61	16	58	56	14	43	31	59
62	16	58	56	14	43	31	61
63	16	58	56	14	43	47	59
64	16	58	56	14	43	47	61
65	16	59	56	12	29	30	58
66	16	59	56	12	29	30	61
67	16	59	56	12	29	46	58
68	16	59	56	12	29	46	61
69	16	59	56	12	45	30	58
70	16	59	56	12	45	30	61
71	16	59	56	12	45	46	58
72	16	59	56	12	45	46	61
73	16	59	56	15	26	30	58
74	16	59	56	15	26	30	61
75	16	59	56	15	26	46	58

76	16	59	56	15	26	46	61
77	16	59	56	15	42	30	58
78	16	59	56	15	42	30	61
79	16	59	56	15	42	46	58
80	16	59	56	15	42	46	61
81	16	61	56	14	27	28	58
82	16	61	56	14	27	28	59
83	16	61	56	14	27	44	58
84	16	61	56	14	27	44	59
85	16	61	56	14	43	28	58
86	16	61	56	14	43	28	59
87	16	61	56	14	43	44	58
88	16	61	56	14	43	44	59
89	16	61	56	15	26	28	58
90	16	61	56	15	26	28	59
91	16	61	56	15	26	44	58
92	16	61	56	15	26	44	59
93	16	61	56	15	42	28	58
94	16	61	56	15	42	28	59
95	16	61	56	15	42	44	58
96	16	61	56	15	42	44	59
97	24	44	62	8	27	31	47
98	24	44	62	8	27	31	59
99	24	44	62	8	27	55	47
100	24	44	62	8	27	55	59
101	24	44	62	8	51	31	47
102	24	44	62	8	51	31	59
103	24	44	62	8	51	55	47
104	24	44	62	8	51	55	59
105	24	44	62	20	15	31	47
106	24	44	62	20	15	31	59
107	24	44	62	20	15	55	47
108	24	44	62	20	15	55	59
109	24	44	62	20	39	31	47
110	24	44	62	20	39	31	59
111	24	44	62	20	39	55	47
112	24	44	62	20	39	55	59
113	24	46	60	8	29	31	47
114	24	46	60	8	29	31	61
115	24	46	60	8	29	55	47
116	24	46	60	8	29	55	61
117	24	46	60	8	53	31	47
118	24	46	60	8	53	31	61
119	24	46	60	8	53	55	47
120	24	46	60	8	53	55	61
121	24	46	60	22	15	31	47
122	24	46	60	22	15	31	61
123	24	46	60	22	15	55	47
124	24	46	60	22	15	55	61
125	24	46	60	22	39	31	47

126	24	46	60	22	39	31	61
127	24	46	60	22	39	55	47
128	24	46	60	22	39	55	61
129	24	47	60	8	29	30	46
130	24	47	60	8	29	30	61
131	24	47	60	8	29	54	46
132	24	47	60	8	29	54	61
133	24	47	60	8	53	30	46
134	24	47	60	8	53	30	61
135	24	47	60	8	53	54	46
136	24	47	60	8	53	54	61
137	24	47	60	23	14	30	46
138	24	47	60	23	14	30	61
139	24	47	60	23	14	54	46
140	24	47	60	23	14	54	61
141	24	47	60	23	38	30	46
142	24	47	60	23	38	30	61
143	24	47	60	23	38	54	46
144	24	47	60	23	38	54	61
145	24	58	48	20	29	31	59
146	24	58	48	20	29	31	61
147	24	58	48	20	29	55	59
148	24	58	48	20	29	55	61
149	24	58	48	20	53	31	59
150	24	58	48	20	53	31	61
151	24	58	48	20	53	55	59
152	24	58	48	20	53	55	61
153	24	58	48	22	27	31	59
154	24	58	48	22	27	31	61
155	24	58	48	22	27	55	59
156	24	58	48	22	27	55	61
157	24	58	48	22	51	31	59
158	24	58	48	22	51	31	61
159	24	58	48	22	51	55	59
160	24	58	48	22	51	55	61
161	24	59	48	20	29	30	58
162	24	59	48	20	29	30	61
163	24	59	48	20	29	54	58
164	24	59	48	20	29	54	61
165	24	59	48	20	53	30	58
166	24	59	48	20	53	30	61
167	24	59	48	20	53	54	58
168	24	59	48	20	53	54	61
169	24	59	48	23	26	30	58
170	24	59	48	23	26	30	61
171	24	59	48	23	26	54	58
172	24	59	48	23	26	54	61
173	24	59	48	23	50	30	58
174	24	59	48	23	50	30	61
175	24	59	48	23	50	54	58

176	24	59	48	23	50	54	61
177	24	61	48	22	27	28	58
178	24	61	48	22	27	28	59
179	24	61	48	22	27	52	58
180	24	61	48	22	27	52	59
181	24	61	48	22	51	28	58
182	24	61	48	22	51	28	59
183	24	61	48	22	51	52	58
184	24	61	48	22	51	52	59
185	24	61	48	23	26	28	58
186	24	61	48	23	26	28	59
187	24	61	48	23	26	52	58
188	24	61	48	23	26	52	59
189	24	61	48	23	50	28	58
190	24	61	48	23	50	28	59
191	24	61	48	23	50	52	58
192	24	61	48	23	50	52	59
193	28	40	62	12	23	31	47
194	28	40	62	12	23	31	55
195	28	40	62	12	23	59	47
196	28	40	62	12	23	59	55
197	28	40	62	12	51	31	47
198	28	40	62	12	51	31	55
199	28	40	62	12	51	59	47
200	28	40	62	12	51	59	55
201	28	40	62	20	15	31	47
202	28	40	62	20	15	31	55
203	28	40	62	20	15	59	47
204	28	40	62	20	15	59	55
205	28	40	62	20	43	31	47
206	28	40	62	20	43	31	55
207	28	40	62	20	43	59	47
208	28	40	62	20	43	59	55
209	28	46	56	12	29	31	47
210	28	46	56	12	29	31	61
211	28	46	56	12	29	59	47
212	28	46	56	12	29	59	61
213	28	46	56	12	57	31	47
214	28	46	56	12	57	31	61
215	28	46	56	12	57	59	47
216	28	46	56	12	57	59	61
217	28	46	56	26	15	31	47
218	28	46	56	26	15	31	61
219	28	46	56	26	15	59	47
220	28	46	56	26	15	59	61
221	28	46	56	26	43	31	47
222	28	46	56	26	43	31	61
223	28	46	56	26	43	59	47
224	28	46	56	26	43	59	61
225	28	47	56	12	29	30	46

226	28	47	56	12	29	30	61
227	28	47	56	12	29	58	46
228	28	47	56	12	29	58	61
229	28	47	56	12	57	30	46
230	28	47	56	12	57	30	61
231	28	47	56	12	57	58	46
232	28	47	56	12	57	58	61
233	28	47	56	27	14	30	46
234	28	47	56	27	14	30	61
235	28	47	56	27	14	58	46
236	28	47	56	27	14	58	61
237	28	47	56	27	42	30	46
238	28	47	56	27	42	30	61
239	28	47	56	27	42	58	46
240	28	47	56	27	42	58	61
241	28	54	48	20	29	31	55
242	28	54	48	20	29	31	61
243	28	54	48	20	29	59	55
244	28	54	48	20	29	59	61
245	28	54	48	20	57	31	55
246	28	54	48	20	57	31	61
247	28	54	48	20	57	59	55
248	28	54	48	20	57	59	61
249	28	54	48	26	23	31	55
250	28	54	48	26	23	31	61
251	28	54	48	26	23	59	55
252	28	54	48	26	23	59	61
253	28	54	48	26	51	31	55
254	28	54	48	26	51	31	61
255	28	54	48	26	51	59	55
256	28	54	48	26	51	59	61
257	28	55	48	20	29	30	54
258	28	55	48	20	29	30	61
259	28	55	48	20	29	58	54
260	28	55	48	20	29	58	61
261	28	55	48	20	57	30	54
262	28	55	48	20	57	30	61
263	28	55	48	20	57	58	54
264	28	55	48	20	57	58	61
265	28	55	48	27	22	30	54
266	28	55	48	27	22	30	61
267	28	55	48	27	22	58	54
268	28	55	48	27	22	58	61
269	28	55	48	27	50	30	54
270	28	55	48	27	50	30	61
271	28	55	48	27	50	58	54
272	28	55	48	27	50	58	61
273	28	61	48	26	23	24	54
274	28	61	48	26	23	24	55
275	28	61	48	26	23	52	54

276	28	61	48	26	23	52	55
277	28	61	48	26	51	24	54
278	28	61	48	26	51	24	55
279	28	61	48	26	51	52	54
280	28	61	48	26	51	52	55
281	28	61	48	27	22	24	54
282	28	61	48	27	22	24	55
283	28	61	48	27	22	52	54
284	28	61	48	27	22	52	55
285	28	61	48	27	50	24	54
286	28	61	48	27	50	24	55
287	28	61	48	27	50	52	54
288	28	61	48	27	50	52	55
289	30	40	60	14	23	31	47
290	30	40	60	14	23	31	55
291	30	40	60	14	23	61	47
292	30	40	60	14	23	61	55
293	30	40	60	14	53	31	47
294	30	40	60	14	53	31	55
295	30	40	60	14	53	61	47
296	30	40	60	14	53	61	55
297	30	40	60	22	15	31	47
298	30	40	60	22	15	31	55
299	30	40	60	22	15	61	47
300	30	40	60	22	15	61	55
301	30	40	60	22	45	31	47
302	30	40	60	22	45	31	55
303	30	40	60	22	45	61	47
304	30	40	60	22	45	61	55
305	30	44	56	14	27	31	47
306	30	44	56	14	27	31	59
307	30	44	56	14	27	61	47
308	30	44	56	14	27	61	59
309	30	44	56	14	57	31	47
310	30	44	56	14	57	31	59
311	30	44	56	14	57	61	47
312	30	44	56	14	57	61	59
313	30	44	56	26	15	31	47
314	30	44	56	26	15	31	59
315	30	44	56	26	15	61	47
316	30	44	56	26	15	61	59
317	30	44	56	26	45	31	47
318	30	44	56	26	45	31	59
319	30	44	56	26	45	61	47
320	30	44	56	26	45	61	59
321	30	47	56	14	27	28	44
322	30	47	56	14	27	28	59
323	30	47	56	14	27	58	44
324	30	47	56	14	27	58	59
325	30	47	56	14	57	28	44

326	30	47	56	14	57	28	59
327	30	47	56	14	57	58	44
328	30	47	56	14	57	58	59
329	30	47	56	29	12	28	44
330	30	47	56	29	12	28	59
331	30	47	56	29	12	58	44
332	30	47	56	29	12	58	59
333	30	47	56	29	42	28	44
334	30	47	56	29	42	28	59
335	30	47	56	29	42	58	44
336	30	47	56	29	42	58	59
337	30	52	48	22	27	31	55
338	30	52	48	22	27	31	59
339	30	52	48	22	27	61	55
340	30	52	48	22	27	61	59
341	30	52	48	22	57	31	55
342	30	52	48	22	57	31	59
343	30	52	48	22	57	61	55
344	30	52	48	22	57	61	59
345	30	52	48	26	23	31	55
346	30	52	48	26	23	31	59
347	30	52	48	26	23	61	55
348	30	52	48	26	23	61	59
349	30	52	48	26	53	31	55
350	30	52	48	26	53	31	59
351	30	52	48	26	53	61	55
352	30	52	48	26	53	61	59
353	30	55	48	22	27	28	52
354	30	55	48	22	27	28	59
355	30	55	48	22	27	58	52
356	30	55	48	22	27	58	59
357	30	55	48	22	57	28	52
358	30	55	48	22	57	28	59
359	30	55	48	22	57	58	52
360	30	55	48	22	57	58	59
361	30	55	48	29	20	28	52
362	30	55	48	29	20	28	59
363	30	55	48	29	20	58	52
364	30	55	48	29	20	58	59
365	30	55	48	29	50	28	52
366	30	55	48	29	50	28	59
367	30	55	48	29	50	58	52
368	30	55	48	29	50	58	59
369	30	59	48	26	23	24	52
370	30	59	48	26	23	24	55
371	30	59	48	26	23	54	52
372	30	59	48	26	23	54	55
373	30	59	48	26	53	24	52
374	30	59	48	26	53	24	55
375	30	59	48	26	53	54	52

376	30	59	48	26	53	54	55
377	30	59	48	29	20	24	52
378	30	59	48	29	20	24	55
379	30	59	48	29	20	54	52
380	30	59	48	29	20	54	55
381	30	59	48	29	50	24	52
382	30	59	48	29	50	24	55
383	30	59	48	29	50	54	52
384	30	59	48	29	50	54	55
385	31	40	60	15	22	30	46
386	31	40	60	15	22	30	54
387	31	40	60	15	22	61	46
388	31	40	60	15	22	61	54
389	31	40	60	15	53	30	46
390	31	40	60	15	53	30	54
391	31	40	60	15	53	61	46
392	31	40	60	15	53	61	54
393	31	40	60	23	14	30	46
394	31	40	60	23	14	30	54
395	31	40	60	23	14	61	46
396	31	40	60	23	14	61	54
397	31	40	60	23	45	30	46
398	31	40	60	23	45	30	54
399	31	40	60	23	45	61	46
400	31	40	60	23	45	61	54
401	31	44	56	15	26	30	46
402	31	44	56	15	26	30	58
403	31	44	56	15	26	61	46
404	31	44	56	15	26	61	58
405	31	44	56	15	57	30	46
406	31	44	56	15	57	30	58
407	31	44	56	15	57	61	46
408	31	44	56	15	57	61	58
409	31	44	56	27	14	30	46
410	31	44	56	27	14	30	58
411	31	44	56	27	14	61	46
412	31	44	56	27	14	61	58
413	31	44	56	27	45	30	46
414	31	44	56	27	45	30	58
415	31	44	56	27	45	61	46
416	31	44	56	27	45	61	58
417	31	46	56	15	26	28	44
418	31	46	56	15	26	28	58
419	31	46	56	15	26	59	44
420	31	46	56	15	26	59	58
421	31	46	56	15	57	28	44
422	31	46	56	15	57	28	58
423	31	46	56	15	57	59	44
424	31	46	56	15	57	59	58
425	31	46	56	29	12	28	44

426	31	46	56	29	12	28	58
427	31	46	56	29	12	59	44
428	31	46	56	29	12	59	58
429	31	46	56	29	43	28	44
430	31	46	56	29	43	28	58
431	31	46	56	29	43	59	44
432	31	46	56	29	43	59	58
433	31	52	48	23	26	30	54
434	31	52	48	23	26	30	58
435	31	52	48	23	26	61	54
436	31	52	48	23	26	61	58
437	31	52	48	23	57	30	54
438	31	52	48	23	57	30	58
439	31	52	48	23	57	61	54
440	31	52	48	23	57	61	58
441	31	52	48	27	22	30	54
442	31	52	48	27	22	30	58
443	31	52	48	27	22	61	54
444	31	52	48	27	22	61	58
445	31	52	48	27	53	30	54
446	31	52	48	27	53	30	58
447	31	52	48	27	53	61	54
448	31	52	48	27	53	61	58
449	31	54	48	23	26	28	52
450	31	54	48	23	26	28	58
451	31	54	48	23	26	59	52
452	31	54	48	23	26	59	58
453	31	54	48	23	57	28	52
454	31	54	48	23	57	28	58
455	31	54	48	23	57	59	52
456	31	54	48	23	57	59	58
457	31	54	48	29	20	28	52
458	31	54	48	29	20	28	58
459	31	54	48	29	20	59	52
460	31	54	48	29	20	59	58
461	31	54	48	29	51	28	52
462	31	54	48	29	51	28	58
463	31	54	48	29	51	59	52
464	31	54	48	29	51	59	58
465	31	58	48	27	22	24	52
466	31	58	48	27	22	24	54
467	31	58	48	27	22	55	52
468	31	58	48	27	22	55	54
469	31	58	48	27	53	24	52
470	31	58	48	27	53	24	54
471	31	58	48	27	53	55	52
472	31	58	48	27	53	55	54
473	31	58	48	29	20	24	52
474	31	58	48	29	20	24	54
475	31	58	48	29	20	55	52

476	31	58	48	29	20	55	54
477	31	58	48	29	51	24	52
478	31	58	48	29	51	24	54
479	31	58	48	29	51	55	52
480	31	58	48	29	51	55	54
481	40	58	32	36	45	47	59
482	40	58	32	36	45	47	61
483	40	58	32	36	45	55	59
484	40	58	32	36	45	55	61
485	40	58	32	36	53	47	59
486	40	58	32	36	53	47	61
487	40	58	32	36	53	55	59
488	40	58	32	36	53	55	61
489	40	58	32	38	43	47	59
490	40	58	32	38	43	47	61
491	40	58	32	38	43	55	59
492	40	58	32	38	43	55	61
493	40	58	32	38	51	47	59
494	40	58	32	38	51	47	61
495	40	58	32	38	51	55	59
496	40	58	32	38	51	55	61
497	40	59	32	36	45	46	58
498	40	59	32	36	45	46	61
499	40	59	32	36	45	54	58
500	40	59	32	36	45	54	61
501	40	59	32	36	53	46	58
502	40	59	32	36	53	46	61
503	40	59	32	36	53	54	58
504	40	59	32	36	53	54	61
505	40	59	32	39	42	46	58
506	40	59	32	39	42	46	61
507	40	59	32	39	42	54	58
508	40	59	32	39	42	54	61
509	40	59	32	39	50	46	58
510	40	59	32	39	50	46	61
511	40	59	32	39	50	54	58
512	40	59	32	39	50	54	61
513	40	61	32	38	43	44	58
514	40	61	32	38	43	44	59
515	40	61	32	38	43	52	58
516	40	61	32	38	43	52	59
517	40	61	32	38	51	44	58
518	40	61	32	38	51	44	59
519	40	61	32	38	51	52	58
520	40	61	32	38	51	52	59
521	40	61	32	39	42	44	58
522	40	61	32	39	42	44	59
523	40	61	32	39	42	52	58
524	40	61	32	39	42	52	59
525	40	61	32	39	50	44	58

526	40	61	32	39	50	44	59
527	40	61	32	39	50	52	58
528	40	61	32	39	50	52	59
529	44	54	32	36	45	47	55
530	44	54	32	36	45	47	61
531	44	54	32	36	45	59	55
532	44	54	32	36	45	59	61
533	44	54	32	36	57	47	55
534	44	54	32	36	57	47	61
535	44	54	32	36	57	59	55
536	44	54	32	36	57	59	61
537	44	54	32	42	39	47	55
538	44	54	32	42	39	47	61
539	44	54	32	42	39	59	55
540	44	54	32	42	39	59	61
541	44	54	32	42	51	47	55
542	44	54	32	42	51	47	61
543	44	54	32	42	51	59	55
544	44	54	32	42	51	59	61
545	44	55	32	36	45	46	54
546	44	55	32	36	45	46	61
547	44	55	32	36	45	58	54
548	44	55	32	36	45	58	61
549	44	55	32	36	57	46	54
550	44	55	32	36	57	46	61
551	44	55	32	36	57	58	54
552	44	55	32	36	57	58	61
553	44	55	32	43	38	46	54
554	44	55	32	43	38	46	61
555	44	55	32	43	38	58	54
556	44	55	32	43	38	58	61
557	44	55	32	43	50	46	54
558	44	55	32	43	50	46	61
559	44	55	32	43	50	58	54
560	44	55	32	43	50	58	61
561	44	61	32	42	39	40	54
562	44	61	32	42	39	40	55
563	44	61	32	42	39	52	54
564	44	61	32	42	39	52	55
565	44	61	32	42	51	40	54
566	44	61	32	42	51	40	55
567	44	61	32	42	51	52	54
568	44	61	32	42	51	52	55
569	44	61	32	43	38	40	54
570	44	61	32	43	38	40	55
571	44	61	32	43	38	52	54
572	44	61	32	43	38	52	55
573	44	61	32	43	50	40	54
574	44	61	32	43	50	40	55
575	44	61	32	43	50	52	54

576	44	61	32	43	50	52	55
577	46	52	32	38	43	47	55
578	46	52	32	38	43	47	59
579	46	52	32	38	43	61	55
580	46	52	32	38	43	61	59
581	46	52	32	38	57	47	55
582	46	52	32	38	57	47	59
583	46	52	32	38	57	61	55
584	46	52	32	38	57	61	59
585	46	52	32	42	39	47	55
586	46	52	32	42	39	47	59
587	46	52	32	42	39	61	55
588	46	52	32	42	39	61	59
589	46	52	32	42	53	47	55
590	46	52	32	42	53	47	59
591	46	52	32	42	53	61	55
592	46	52	32	42	53	61	59
593	46	55	32	38	43	44	52
594	46	55	32	38	43	44	59
595	46	55	32	38	43	58	52
596	46	55	32	38	43	58	59
597	46	55	32	38	57	44	52
598	46	55	32	38	57	44	59
599	46	55	32	38	57	58	52
600	46	55	32	38	57	58	59
601	46	55	32	45	36	44	52
602	46	55	32	45	36	44	59
603	46	55	32	45	36	58	52
604	46	55	32	45	36	58	59
605	46	55	32	45	50	44	52
606	46	55	32	45	50	44	59
607	46	55	32	45	50	58	52
608	46	55	32	45	50	58	59
609	46	59	32	42	39	40	52
610	46	59	32	42	39	40	55
611	46	59	32	42	39	54	52
612	46	59	32	42	39	54	55
613	46	59	32	42	53	40	52
614	46	59	32	42	53	40	55
615	46	59	32	42	53	54	52
616	46	59	32	42	53	54	55
617	46	59	32	45	36	40	52
618	46	59	32	45	36	40	55
619	46	59	32	45	36	54	52
620	46	59	32	45	36	54	55
621	46	59	32	45	50	40	52
622	46	59	32	45	50	40	55
623	46	59	32	45	50	54	52
624	46	59	32	45	50	54	55
625	47	52	32	39	42	46	54

626	47	52	32	39	42	46	58
627	47	52	32	39	42	61	54
628	47	52	32	39	42	61	58
629	47	52	32	39	57	46	54
630	47	52	32	39	57	46	58
631	47	52	32	39	57	61	54
632	47	52	32	39	57	61	58
633	47	52	32	43	38	46	54
634	47	52	32	43	38	46	58
635	47	52	32	43	38	61	54
636	47	52	32	43	38	61	58
637	47	52	32	43	53	46	54
638	47	52	32	43	53	46	58
639	47	52	32	43	53	61	54
640	47	52	32	43	53	61	58
641	47	54	32	39	42	44	52
642	47	54	32	39	42	44	58
643	47	54	32	39	42	59	52
644	47	54	32	39	42	59	58
645	47	54	32	39	57	44	52
646	47	54	32	39	57	44	58
647	47	54	32	39	57	59	52
648	47	54	32	39	57	59	58
649	47	54	32	45	36	44	52
650	47	54	32	45	36	44	58
651	47	54	32	45	36	59	52
652	47	54	32	45	36	59	58
653	47	54	32	45	51	44	52
654	47	54	32	45	51	44	58
655	47	54	32	45	51	59	52
656	47	54	32	45	51	59	58
657	47	58	32	43	38	40	52
658	47	58	32	43	38	40	54
659	47	58	32	43	38	55	52
660	47	58	32	43	38	55	54
661	47	58	32	43	53	40	52
662	47	58	32	43	53	40	54
663	47	58	32	43	53	55	52
664	47	58	32	43	53	55	54
665	47	58	32	45	36	40	52
666	47	58	32	45	36	40	54
667	47	58	32	45	36	55	52
668	47	58	32	45	36	55	54
669	47	58	32	45	51	40	52
670	47	58	32	45	51	40	54
671	47	58	32	45	51	55	52
672	47	58	32	45	51	55	54
673	52	61	32	50	39	40	46
674	52	61	32	50	39	40	47
675	52	61	32	50	39	44	46

676	52	61	32	50	39	44	47
677	52	61	32	50	43	40	46
678	52	61	32	50	43	40	47
679	52	61	32	50	43	44	46
680	52	61	32	50	43	44	47
681	52	61	32	51	38	40	46
682	52	61	32	51	38	40	47
683	52	61	32	51	38	44	46
684	52	61	32	51	38	44	47
685	52	61	32	51	42	40	46
686	52	61	32	51	42	40	47
687	52	61	32	51	42	44	46
688	52	61	32	51	42	44	47
689	54	59	32	50	39	40	44
690	54	59	32	50	39	40	47
691	54	59	32	50	39	46	44
692	54	59	32	50	39	46	47
693	54	59	32	50	45	40	44
694	54	59	32	50	45	40	47
695	54	59	32	50	45	46	44
696	54	59	32	50	45	46	47
697	54	59	32	53	36	40	44
698	54	59	32	53	36	40	47
699	54	59	32	53	36	46	44
700	54	59	32	53	36	46	47
701	54	59	32	53	42	40	44
702	54	59	32	53	42	40	47
703	54	59	32	53	42	46	44
704	54	59	32	53	42	46	47
705	55	58	32	51	38	40	44
706	55	58	32	51	38	40	46
707	55	58	32	51	38	47	44
708	55	58	32	51	38	47	46
709	55	58	32	51	45	40	44
710	55	58	32	51	45	40	46
711	55	58	32	51	45	47	44
712	55	58	32	51	45	47	46
713	55	58	32	53	36	40	44
714	55	58	32	53	36	40	46
715	55	58	32	53	36	47	44
716	55	58	32	53	36	47	46
717	55	58	32	53	43	40	44
718	55	58	32	53	43	40	46
719	55	58	32	53	43	47	44
720	55	58	32	53	43	47	46

Табл. 4.9.2

Одновременно, по аналогии с магическими квадратами, можно отметить наличие ячеек с фиксированными суммами ($X_{55}+X_{56}+X_{58}+X_{60}=193$, $X_{53}+X_{54}+X_{57}+X_{59}=67$ и др.), но из-за разнообразия и количества возможных вариантов использовать эти особенности весьма сложно.

Таким образом, схема расстановки симметричных чисел Вар.4.9.1, с учётом возможности перемещения числа 1 в внутренние ячейки, путём тождественного преобразования (перестановкой наружного и соседнего слоёв по трём координатам), даст 2880 вариантов магических кубов из группы Кубы4гр1

4.10 Для сочетания $X_1=1$, $X_6=64$ ни одного магического куба получить не удастся.

Это обусловлено расположением максимально удалённых симметричных чисел (1 и 64) в разных частях одинаковых сумм:

$X_1+X_{49}=X_6+X_{54}=X_6+(X_1-X_6+X_{49})=X_1+X_{49}$, (Табл. 4.7.1), то есть

$X_1+X_{49}\neq X_6+X_{54}$, так как $1+63<64+2$.

Сочетание $X_1=1$, $X_7=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{58}=X_7+X_{64}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{58} и X_{64}) Табл. 4.7.1:

$X_1+X_{58}=X_1+(X_1+X_4+X_7+X_{13}+X_{49}-130)=2X_1+X_4+X_7+X_{13}+X_{49}-130$;

$X_7+X_{64}=X_7+(2X_1+X_4+X_{13}+X_{49}-130)=2X_1+X_4+X_7+X_{13}+X_{49}-130$.

Сочетание $X_1=1$, $X_8=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{13}=X_8+X_{12}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_8 и X_{12}) Табл. 4.7.1:

$X_8+X_{12}=(-X_5-X_6-X_7+130)+(X_1+X_5+X_6+X_7+X_{13}-130;)=X_1+X_{13}$.

Сочетание $X_1=1$, $X_{10}=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{55}=X_{10}+X_{64}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{58} и X_{64}) Табл. 4.7.1:

$X_1+X_{55}=X_1+(-X_1-X_7-X_{49}+130)=-X_7-X_{49}+130$;

$X_{10}+X_{64}=(-2X_1-X_4-X_7-X_{13}-2X_{49}+260)+(2X_1+X_4+X_{13}+X_{49}-130)=-X_7-X_{49}+130$.

Сочетание $X_1=1$, $X_{11}=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{49}=X_{11}+X_{59}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{11} и X_{59}) Табл. 4.7.1:

$X_{11}+X_{59}=(2X_1+X_4-X_6+X_{13}+2X_{49}-130)+(-X_1-X_4+X_6-X_{13}-X_{49}+130)=X_1+X_{49}$.

Сочетание $X_1=1$, $X_{12}=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{13}=X_8+X_{12}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_8

и X_{12}) Табл. 4.7.1:

$X_8+X_{12}=(-X_5-X_6-X_7+130)+(X_1+X_5+X_6+X_7+X_{13}-130)=X_1+X_{13}$.

Сочетание $X_1=1$, $X_{13}=64$ даст только невариантны магических кубов, соответствующих сочетанию $X_1=1$, $X_4=64$.

Сочетания $X_1=1$ и $X_{14}=64$; $X_1=1$ и $X_{15}=64$ также не дадут ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_4=X_{15}+X_{16}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{14} и X_{15}) Табл. 4.7.1:

$X_{14}+X_{15}=(2X_1-X_2+X_4-X_6+X_7+X_{13}+2X_{49}-130)+(-X_1+X_2+X_6-X_7-X_{13}-2X_{49}+130)=X_1+X_4$.

Сочетание $X_1=1$, $X_{16}=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{49}=X_{16}+X_{64}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{16} и X_{64}) Табл. 4.7.1:

$X_{16}+X_{64}=(-X_1-X_4-X_{13}+130)+(2X_1+X_4+X_{13}+X_{49}-130)=X_1+X_{49}$.

Сочетания с расположением числа 1 в ячейке A1 и числа 64 в ячейках первого (верхнего) горизонтального слоя, а также в ячейках первого профильного слоя (содержащего ячейку A1), дадут только невариантны магических кубов, уже полученных при рассмотрении первого фронтального слоя (содержащего ячейку A1), так как все эти три слоя (содержащие ячейку A1) абсолютно идентичны относительно ячейки A1 (числа 1).

4.11 А вот для сочетания $X_1=1$, $X_{22}=64$ программа найдёт 4320 вариантов магических кубов.

Но этот массив не однороден (в отличии от сочетания $X_1=1$, $X_4=64$), в нём можно выделить две больших группы (по схемам расстановки симметричных чисел).

Первой (2160 вариантов) будет группа магических кубов с следующей схемой расстановки симметричных чисел (Табл. 4.11.1):

$X_1+X_{22}=X_2+X_{21}=X_3+X_{24}=X_4+X_{23}=65$;
$X_5+X_{18}=X_6+X_{17}=X_7+X_{20}=X_8+X_{19}=65$;
$X_9+X_{30}=X_{10}+X_{29}=X_{11}+X_{32}=X_{12}+X_{31}=65$;
$X_{13}+X_{26}=X_{14}+X_{25}=X_{15}+X_{28}=X_{16}+X_{27}=65$;
$X_{33}+X_{54}=X_{34}+X_{53}=X_{35}+X_{56}=X_{36}+X_{55}=65$;
$X_{37}+X_{50}=X_{38}+X_{49}=X_{39}+X_{52}=X_{40}+X_{51}=65$;
$X_{41}+X_{62}=X_{42}+X_{61}=X_{43}+X_{64}=X_{44}+X_{63}=65$;
$X_{45}+X_{58}=X_{46}+X_{57}=X_{47}+X_{60}=X_{48}+X_{59}=65$.

Табл. 4.11.1

Здесь симметрия проявляется наиболее ярко. В каждом кубике, состоящем из восьми ячеек (содержащем ячейку угла куба), симметричные

числа располагаются строго по четырём пространственным диагоналям кубиков, создавая восемь однотипных конструкций в объёме магического куба. Картина просто впечатляющая.

Воспользовавшись особенностью расстановки симметричных чисел можно дополнительно исключить три независимые переменные.

Тогда оставшиеся числа куба (при $X_1=1$, $X_{22}=64$) можно будет выразить через шесть независимых чисел куба (X_2, X_4, X_5, X_6, X_{49}, X_{64}) следующим образом (Табл. 4.11.2):

$X_1=1;$
$X_3=-X_2-X_4+129;$
$X_7=X_2+X_4-X_5-X_{64}+1;$
$X_8=-X_2-X_4-X_6+X_{64}+129;$
$X_9=X_4-X_5+X_{49}-X_{64}+1;$
$X_{10}=-X_2-X_4+X_5-X_{49}+129;$
$X_{11}=-X_6+X_{49}+X_{64};$
$X_{12}=X_2+X_6-X_{49};$
$X_{13}=-X_4-X_{49}+X_{64}+128;$
$X_{14}=X_4-X_5-X_6+X_{49}+1;$
$X_{15}=X_5+X_6-X_{49};$
$X_{16}=X_{49}-X_{64}+1;$
$X_{17}=-X_6+65;$
$X_{18}=-X_5+65;$
$X_{19}=X_2+X_4+X_6-X_{64}-64;$
$X_{20}=-X_2-X_4+X_5+X_{64}+64;$
$X_{21}=-X_2+65;$
$X_{22}=64;$
$X_{23}=-X_4+65;$
$X_{24}=X_2+X_4-64;$
$X_{25}=-X_4+X_5+X_6-X_{49}+64;$
$X_{26}=X_4+X_{49}-X_{64}-63;$
$X_{27}=-X_{49}+X_{64}+64;$
$X_{28}=-X_5-X_6+X_{49}+65;$
$X_{29}=X_2+X_4-X_5+X_{49}-64;$
$X_{30}=-X_4+X_5-X_{49}+X_{64}+64;$
$X_{31}=-X_2-X_6+X_{49}+65;$
$X_{32}=X_6-X_{49}-X_{64}+65;$
$X_{33}=X_6-X_{49}+64;$
$X_{34}=-X_2-X_6+X_{49}-X_{64}+66;$
$X_{35}=-X_4+X_5-X_{49}+2X_{64}+63;$
$X_{36}=X_2+X_4-X_5+X_{49}-X_{64}-63;$

$X_{37}=-X_5-X_6+X_{49}-X_{64}+66;$
$X_{38}=-X_{49}+65;$
$X_{39}=X_4+X_{49}-64;$
$X_{40}=-X_4+X_5+X_6-X_{49}+X_{64}+63;$
$X_{41}=X_2+X_4+X_{64}-65;$
$X_{42}=-X_4+X_{64}+64;$
$X_{43}=-X_{64}+65;$
$X_{44}=-X_2-X_{64}+66;$
$X_{45}=-X_2-X_4+X_5+65;$
$X_{46}=X_2+X_4+X_6-65;$
$X_{47}=-X_5-X_{64}+66;$
$X_{48}=-X_6+X_{64}+64;$
$X_{50}=X_5+X_6-X_{49}+X_{64}-1;$
$X_{51}=X_4-X_5-X_6+X_{49}-X_{64}+2;$
$X_{52}=-X_4-X_{49}+129;$
$X_{53}=X_2+X_6-X_{49}+X_{64}-1;$
$X_{54}=-X_6+X_{49}+1;$
$X_{55}=-X_2-X_4+X_5-X_{49}+X_{64}+128;$
$X_{56}=X_4-X_5+X_{49}-2X_{64}+2;$
$X_{57}=-X_2-X_4-X_6+130;$
$X_{58}=X_2+X_4-X_5;$
$X_{59}=X_6-X_{64}+1;$
$X_{60}=X_5+X_{64}-1;$
$X_{61}=X_4-X_{64}+1;$
$X_{62}=-X_2-X_4-X_{64}+130;$
$X_{63}=X_2+X_{64}-1;$

Табл. 4.11.2

Воспользовавшись рассматриваемой особенностью расположения симметричных чисел можно от одного магического куба получить другие магические кубы, комбинируя размещение вокруг первой восьмёрки ячеек (A1, A2, B1, B2, E5, E6, F5, F6) других восьмёрок ячеек, примыкающих к углам куба, в разных сочетаниях, хотя, чтобы найти требуемые комбинации, нужно постараться.

Гораздо проще для получения других магических кубов воспользоваться взаимными перестановками целых слоёв, не содержащих ячеек с заданными числами ($X_1=1$, $X_{22}=64$), то есть двух фронтальных (третьего и четвёртого) слоёв, или двух горизонтальных (нижних) слоёв, или двух профильных (левых крайних) слоёв, или комбинаций таких попарных перестановок (при этом сохранится как расположение чисел 1 и 64, так и вся схема расстановки симметричных чисел). Действительно, при этом в любом

слое магическая сумма не изменяется, а в больших диагоналях суммы будут магическими исходя из выражений для чисел, определённых в Табл. 4.11.2.

Так при перестановке третьего и четвёртого фронтальных слоёв для диагональных ячеек суммы будут определяться следующим образом:

$X_1+X_{22}+X_{59}+X_{48}=1+64+(X_6-X_{64}+1)+(-X_6+X_{64}+64)=130.$

$X_{13}+X_{26}+X_{55}+X_{36}=(-X_4-X_{49}+X_{64}+128)+(X_4+X_{49}-X_{64}-63)+(-X_2-X_4+X_5-X_{49}+X_{64}+128)+(X_2+X_4-X_5+X_{49}-X_{64}-63)=128-63+128-63=130.$

$X_{33}+X_{54}+X_{27}+X_{16}=(X_6-X_{49}+64)+(-X_6+X_{49}+1)+(-X_{49}+X_{64}+64)+(X_{49}-X_{64}+1)=130.$

$X_4+X_{23}+X_{58}+X_{45}=(X_4)+(-X_4+65)+(X_2+X_4-X_5)+(-X_2-X_4+X_5+65)=65+65=130.$

Аналогично можно убедиться в тождественности остальных послойных перестановок.

Соответственно, с учётом возможности таких преобразований, нет смысла приводить все варианты (2160) магических кубов, соответствующих рассматриваемой схеме расстановки симметричных чисел, а достаточно дать значения независимых переменных для некоторой исходной группы магических кубов.

В Табл. 4.11.3 приведены значения независимых переменных для такой исходной группы магических кубов (при $X_{49}>X_4$ и $X_{64}>X_{43}$), а значения зависимых переменных должны определяться в соответствии с выражениями в Табл. 4.11.2.

№ п/п	X_{64}	X_4	X_{49}	X_6	X_2	X_5
1	33	40	58	41	28	20
2	33	40	58	41	30	22
3	33	40	58	42	27	20
4	33	40	58	42	29	22
5	33	40	58	49	28	12
6	33	40	58	49	30	14
7	33	40	58	50	27	12
8	33	40	58	50	29	14
9	33	40	59	41	28	20
10	33	40	59	41	31	23
11	33	40	59	43	26	20
12	33	40	59	43	29	23
13	33	40	59	49	28	12
14	33	40	59	49	31	15
15	33	40	59	51	26	12

16	33	40	59	51	29	15
17	33	40	60	42	27	20
18	33	40	60	42	31	24
19	33	40	60	43	26	20
20	33	40	60	43	30	24
21	33	40	60	50	27	12
22	33	40	60	50	31	16
23	33	40	60	51	26	12
24	33	40	60	51	30	16
25	33	40	61	41	30	22
26	33	40	61	41	31	23
27	33	40	61	45	26	22
28	33	40	61	45	27	23
29	33	40	61	49	30	14
30	33	40	61	49	31	15
31	33	40	61	53	26	14
32	33	40	61	53	27	15
33	33	40	62	42	29	22
34	33	40	62	42	31	24
35	33	40	62	45	26	22
36	33	40	62	45	28	24
37	33	40	62	50	29	14
38	33	40	62	50	31	16
39	33	40	62	53	26	14
40	33	40	62	53	28	16
41	33	40	63	43	29	23
42	33	40	63	43	30	24
43	33	40	63	45	27	23
44	33	40	63	45	28	24
45	33	40	63	51	29	15
46	33	40	63	51	30	16
47	33	40	63	53	27	15
48	33	40	63	53	28	16
49	33	44	54	37	24	20
50	33	44	54	37	30	26
51	33	44	54	38	23	20
52	33	44	54	38	29	26
53	33	44	54	49	24	8
54	33	44	54	49	30	14
55	33	44	54	50	23	8
56	33	44	54	50	29	14
57	33	44	55	37	24	20
58	33	44	55	37	31	27
59	33	44	55	39	22	20
60	33	44	55	39	29	27
61	33	44	55	49	24	8
62	33	44	55	49	31	15
63	33	44	55	51	22	8
64	33	44	55	51	29	15
65	33	44	56	38	23	20

66	33	44	56	38	31	28
67	33	44	56	39	22	20
68	33	44	56	39	30	28
69	33	44	56	50	23	8
70	33	44	56	50	31	16
71	33	44	56	51	22	8
72	33	44	56	51	30	16
73	33	44	61	37	30	26
74	33	44	61	37	31	27
75	33	44	61	45	22	26
76	33	44	61	45	23	27
77	33	44	61	49	30	14
78	33	44	61	49	31	15
79	33	44	61	57	22	14
80	33	44	61	57	23	15
81	33	44	62	38	29	26
82	33	44	62	38	31	28
83	33	44	62	45	22	26
84	33	44	62	45	24	28
85	33	44	62	50	29	14
86	33	44	62	50	31	16
87	33	44	62	57	22	14
88	33	44	62	57	24	16
89	33	44	63	39	29	27
90	33	44	63	39	30	28
91	33	44	63	45	23	27
92	33	44	63	45	24	28
93	33	44	63	51	29	15
94	33	44	63	51	30	16
95	33	44	63	57	23	15
96	33	44	63	57	24	16
97	33	46	52	35	24	22
98	33	46	52	35	28	26
99	33	46	52	36	23	22
100	33	46	52	36	27	26
101	33	46	52	49	24	8
102	33	46	52	49	28	12
103	33	46	52	50	23	8
104	33	46	52	50	27	12
105	33	46	55	35	24	22
106	33	46	55	35	31	29
107	33	46	55	39	20	22
108	33	46	55	39	27	29
109	33	46	55	49	24	8
110	33	46	55	49	31	15
111	33	46	55	53	20	8
112	33	46	55	53	27	15
113	33	46	56	36	23	22
114	33	46	56	36	31	30
115	33	46	56	39	20	22

116	33	46	56	39	28	30
117	33	46	56	50	23	8
118	33	46	56	50	31	16
119	33	46	56	53	20	8
120	33	46	56	53	28	16
121	33	46	59	35	28	26
122	33	46	59	35	31	29
123	33	46	59	43	20	26
124	33	46	59	43	23	29
125	33	46	59	49	28	12
126	33	46	59	49	31	15
127	33	46	59	57	20	12
128	33	46	59	57	23	15
129	33	46	60	36	27	26
130	33	46	60	36	31	30
131	33	46	60	43	20	26
132	33	46	60	43	24	30
133	33	46	60	50	27	12
134	33	46	60	50	31	16
135	33	46	60	57	20	12
136	33	46	60	57	24	16
137	33	46	63	39	27	29
138	33	46	63	39	28	30
139	33	46	63	43	23	29
140	33	46	63	43	24	30
141	33	46	63	53	27	15
142	33	46	63	53	28	16
143	33	46	63	57	23	15
144	33	46	63	57	24	16
145	33	47	52	34	24	23
146	33	47	52	34	28	27
147	33	47	52	36	22	23
148	33	47	52	36	26	27
149	33	47	52	49	24	8
150	33	47	52	49	28	12
151	33	47	52	51	22	8
152	33	47	52	51	26	12
153	33	47	54	34	24	23
154	33	47	54	34	30	29
155	33	47	54	38	20	23
156	33	47	54	38	26	29
157	33	47	54	49	24	8
158	33	47	54	49	30	14
159	33	47	54	53	20	8
160	33	47	54	53	26	14
161	33	47	56	36	22	23
162	33	47	56	36	30	31
163	33	47	56	38	20	23
164	33	47	56	38	28	31
165	33	47	56	51	22	8

166	33	47	56	51	30	16
167	33	47	56	53	20	8
168	33	47	56	53	28	16
169	33	47	58	34	28	27
170	33	47	58	34	30	29
171	33	47	58	42	20	27
172	33	47	58	42	22	29
173	33	47	58	49	28	12
174	33	47	58	49	30	14
175	33	47	58	57	20	12
176	33	47	58	57	22	14
177	33	47	60	36	26	27
178	33	47	60	36	30	31
179	33	47	60	42	20	27
180	33	47	60	42	24	31
181	33	47	60	51	26	12
182	33	47	60	51	30	16
183	33	47	60	57	20	12
184	33	47	60	57	24	16
185	33	47	62	38	26	29
186	33	47	62	38	28	31
187	33	47	62	42	22	29
188	33	47	62	42	24	31
189	33	47	62	53	26	14
190	33	47	62	53	28	16
191	33	47	62	57	22	14
192	33	47	62	57	24	16
193	33	48	52	34	23	24
194	33	48	52	34	27	28
195	33	48	52	35	22	24
196	33	48	52	35	26	28
197	33	48	52	50	23	8
198	33	48	52	50	27	12
199	33	48	52	51	22	8
200	33	48	52	51	26	12
201	33	48	54	34	23	24
202	33	48	54	34	29	30
203	33	48	54	37	20	24
204	33	48	54	37	26	30
205	33	48	54	50	23	8
206	33	48	54	50	29	14
207	33	48	54	53	20	8
208	33	48	54	53	26	14
209	33	48	55	35	22	24
210	33	48	55	35	29	31
211	33	48	55	37	20	24
212	33	48	55	37	27	31
213	33	48	55	51	22	8
214	33	48	55	51	29	15
215	33	48	55	53	20	8

216	33	48	55	53	27	15
217	33	48	58	34	27	28
218	33	48	58	34	29	30
219	33	48	58	41	20	28
220	33	48	58	41	22	30
221	33	48	58	50	27	12
222	33	48	58	50	29	14
223	33	48	58	57	20	12
224	33	48	58	57	22	14
225	33	48	59	35	26	28
226	33	48	59	35	29	31
227	33	48	59	41	20	28
228	33	48	59	41	23	31
229	33	48	59	51	26	12
230	33	48	59	51	29	15
231	33	48	59	57	20	12
232	33	48	59	57	23	15
233	33	48	61	37	26	30
234	33	48	61	37	27	31
235	33	48	61	41	22	30
236	33	48	61	41	23	31
237	33	48	61	53	26	14
238	33	48	61	53	27	15
239	33	48	61	57	22	14
240	33	48	61	57	23	15
241	33	52	61	37	30	26
242	33	52	61	37	31	27
243	33	52	61	41	30	22
244	33	52	61	41	31	23
245	33	52	61	53	14	26
246	33	52	61	53	15	27
247	33	52	61	57	14	22
248	33	52	61	57	15	23
249	33	52	62	38	29	26
250	33	52	62	38	31	28
251	33	52	62	42	29	22
252	33	52	62	42	31	24
253	33	52	62	53	14	26
254	33	52	62	53	16	28
255	33	52	62	57	14	22
256	33	52	62	57	16	24
257	33	52	63	39	29	27
258	33	52	63	39	30	28
259	33	52	63	43	29	23
260	33	52	63	43	30	24
261	33	52	63	53	15	27
262	33	52	63	53	16	28
263	33	52	63	57	15	23
264	33	52	63	57	16	24
265	33	54	59	35	28	26

266	33	54	59	35	31	29
267	33	54	59	41	28	20
268	33	54	59	41	31	23
269	33	54	59	51	12	26
270	33	54	59	51	15	29
271	33	54	59	57	12	20
272	33	54	59	57	15	23
273	33	54	60	36	27	26
274	33	54	60	36	31	30
275	33	54	60	42	27	20
276	33	54	60	42	31	24
277	33	54	60	51	12	26
278	33	54	60	51	16	30
279	33	54	60	57	12	20
280	33	54	60	57	16	24
281	33	54	63	39	27	29
282	33	54	63	39	28	30
283	33	54	63	45	27	23
284	33	54	63	45	28	24
285	33	54	63	51	15	29
286	33	54	63	51	16	30
287	33	54	63	57	15	23
288	33	54	63	57	16	24
289	33	55	58	34	28	27
290	33	55	58	34	30	29
291	33	55	58	41	28	20
292	33	55	58	41	30	22
293	33	55	58	50	12	27
294	33	55	58	50	14	29
295	33	55	58	57	12	20
296	33	55	58	57	14	22
297	33	55	60	36	26	27
298	33	55	60	36	30	31
299	33	55	60	43	26	20
300	33	55	60	43	30	24
301	33	55	60	50	12	27
302	33	55	60	50	16	31
303	33	55	60	57	12	20
304	33	55	60	57	16	24
305	33	55	62	38	26	29
306	33	55	62	38	28	31
307	33	55	62	45	26	22
308	33	55	62	45	28	24
309	33	55	62	50	14	29
310	33	55	62	50	16	31
311	33	55	62	57	14	22
312	33	55	62	57	16	24
313	33	56	58	34	27	28
314	33	56	58	34	29	30
315	33	56	58	42	27	20

316	33	56	58	42	29	22
317	33	56	58	49	12	28
318	33	56	58	49	14	30
319	33	56	58	57	12	20
320	33	56	58	57	14	22
321	33	56	59	35	26	28
322	33	56	59	35	29	31
323	33	56	59	43	26	20
324	33	56	59	43	29	23
325	33	56	59	49	12	28
326	33	56	59	49	15	31
327	33	56	59	57	12	20
328	33	56	59	57	15	23
329	33	56	61	37	26	30
330	33	56	61	37	27	31
331	33	56	61	45	26	22
332	33	56	61	45	27	23
333	33	56	61	49	14	30
334	33	56	61	49	15	31
335	33	56	61	57	14	22
336	33	56	61	57	15	23
337	33	58	63	43	23	29
338	33	58	63	43	24	30
339	33	58	63	45	23	27
340	33	58	63	45	24	28
341	33	58	63	51	15	29
342	33	58	63	51	16	30
343	33	58	63	53	15	27
344	33	58	63	53	16	28
345	33	59	62	42	22	29
346	33	59	62	42	24	31
347	33	59	62	45	22	26
348	33	59	62	45	24	28
349	33	59	62	50	14	29
350	33	59	62	50	16	31
351	33	59	62	53	14	26
352	33	59	62	53	16	28
353	33	60	61	41	22	30
354	33	60	61	41	23	31
355	33	60	61	45	22	26
356	33	60	61	45	23	27
357	33	60	61	49	14	30
358	33	60	61	49	15	31
359	33	60	61	53	14	26
360	33	60	61	53	15	27

Табл. 4.11.3

Второй (2160 вариантов) будет группа магических кубов с следующей схемой расстановки симметричных чисел (Табл. 4.11.4):

$X_1+X_{22}=X_2+X_{41}=X_3+X_{44}=X_4+X_{23}=65;$
$X_5+X_{35}=X_6+X_{32}=X_7+X_{29}=X_8+X_{34}=65;$
$X_9+X_{47}=X_{10}+X_{20}=X_{11}+X_{17}=X_{12}+X_{46}=65;$
$X_{13}+X_{26}=X_{14}+X_{37}=X_{15}+X_{40}=X_{16}+X_{27}=65;$
$X_{18}+X_{56}=X_{19}+X_{53}=X_{21}+X_{62}=X_{24}+X_{63}=65;$
$X_{25}+X_{50}=X_{28}+X_{51}=X_{30}+X_{60}=X_{31}+X_{57}=65;$
$X_{33}+X_{59}=X_{36}+X_{58}=X_{38}+X_{49}=X_{39}+X_{52}=65;$
$X_{42}+X_{61}=X_{43}+X_{64}=X_{45}+X_{55}=X_{48}+X_{54}=65.$

Табл. 4.11.4

Здесь симметрия тоже проявляется, но уже не настолько ярко как в предыдущей группе. К тому же, различие пространственной ориентации пар в больших диагоналях куба и остальных пар симметричных чисел, создаёт иллюзию неполного совершенства числовой конструкции.

Воспользовавшись особенностью расстановки симметричных чисел в этом случае, также можно дополнительно исключить три независимые переменные.

Тогда оставшиеся числа куба (при $X_1=1$, $X_{22}=64$) можно будет выразить через шесть независимых чисел куба (X_2, X_4, X_5, X_7, X_{13}, X_{64}) следующим образом (Табл. 4.11.5):

$X_1=1;$
$X_3=-X_2-X_4+129;$
$X_6=-X_2-X_4-X_5-X_{13}+194;$
$X_8=X_2+X_4-X_7+X_{13}-64;$
$X_9=-X_5-X_{13}+129;$
$X_{10}=X_4-X_7+X_{13}-2X_{64}+2;$
$X_{11}=X_2+X_5+2X_{64}-66;$
$X_{12}=-X_2-X_4+X_7+65;$
$X_{14}=X_5+X_7+2X_{64}-66;$
$X_{15}=X_4-X_5-X_7-2X_{64}+67;$
$X_{16}=-X_4-X_{13}+129;$
$X_{17}=-X_2-X_5-2X_{64}+131;$
$X_{18}=X_5+X_{13}+X_{64}-65;$
$X_{19}=X_2+X_4-X_7-X_{64}+1;$
$X_{20}=-X_4+X_7-X_{13}+2X_{64}+63;$
$X_{21}=X_2+X_4+X_{64}-65;$
$X_{22}=64;$
$X_{23}=-X_4+65;$

$X_{24}=-X_2-X_{64}+66;$
$X_{25}=-X_4+X_5+X_7+X_{64}-1;$
$X_{26}=-X_{13}+65;$
$X_{27}=X_4+X_{13}-64;$
$X_{28}=-X_5-X_7-X_{64}+130;$
$X_{29}=-X_7+65;$
$X_{30}=-X_5-X_{64}+66;$
$X_{31}=-X_2-X_4+X_7-X_{13}+X_{64}+128;$
$X_{32}=X_2+X_4+X_5+X_{13}-129;$
$X_{33}=X_2+X_4+X_5+X_{13}+X_{64}-130;$
$X_{34}=-X_2-X_4+X_7-X_{13}+129;$
$X_{35}=-X_5+65;$
$X_{36}=-X_7-X_{64}+66;$
$X_{37}=-X_5-X_7-2X_{64}+131;$
$X_{38}=X_4+X_{13}-X_{64}-63;$
$X_{39}=-X_{13}+X_{64}+64;$
$X_{40}=-X_4+X_5+X_7+2X_{64}-2;$
$X_{41}=-X_2+65;$
$X_{42}=-X_4+X_{64}+64;$
$X_{43}=-X_{64}+65;$
$X_{44}=X_2+X_4-64;$
$X_{45}=-X_4+X_7-X_{13}+X_{64}+64;$
$X_{46}=X_2+X_4-X_7;$
$X_{47}=X_5+X_{13}-64;$
$X_{48}=-X_2-X_5-X_{64}+130;$
$X_{49}=-X_4-X_{13}+X_{64}+128;$
$X_{50}=X_4-X_5-X_7-X_{64}+66;$
$X_{51}=X_5+X_7+X_{64}-65;$
$X_{52}=X_{13}-X_{64}+1;$
$X_{53}=-X_2-X_4+X_7+X_{64}+64;$
$X_{54}=X_2+X_5+X_{64}-65;$
$X_{55}=X_4-X_7+X_{13}-X_{64}+1;$
$X_{56}=-X_5-X_{13}-X_{64}+130;$
$X_{57}=X_2+X_4-X_7+X_{13}-X_{64}-63;$
$X_{58}=X_7+X_{64}-1;$
$X_{59}=-X_2-X_4-X_5-X_{13}-X_{64}+195;$
$X_{60}=X_5+X_{64}-1;$
$X_{61}=X_4-X_{64}+1;$
$X_{62}=-X_2-X_4-X_{64}+130;$
$X_{63}=X_2+X_{64}-1;$

Табл. 4.11.5

В рассматриваемом случае найти варианты послойных перестановок, без изменения схемы расстановки симметричных чисел, с сохранением магических свойств куба, к сожалению, не удаётся, поэтому придётся представить все 2160 вариантов магических кубов этой группы.

В Табл. 4.11.6 приведены значения независимых переменных для этой группы магических кубов (при $X_{49}>X_4$), а значения зависимых переменных должны определяться в соответствии с выражениями в Табл. 4.11.5.

№ п/п	X_{64}	X_{13}	X_4	X_5	X_7	X_2
1	2	16	52	53	27	31
2	2	16	52	53	43	47
3	2	16	52	55	27	29
4	2	16	52	55	43	45
5	2	16	52	57	23	31
6	2	16	52	57	39	47
7	2	16	52	59	23	29
8	2	16	52	59	39	45
9	2	16	54	51	29	31
10	2	16	54	51	45	47
11	2	16	54	55	29	27
12	2	16	54	55	45	43
13	2	16	54	57	23	31
14	2	16	54	57	39	47
15	2	16	54	61	23	27
16	2	16	54	61	39	43
17	2	16	56	51	31	29
18	2	16	56	51	47	45
19	2	16	56	53	31	27
20	2	16	56	53	47	43
21	2	16	56	59	23	29
22	2	16	56	59	39	45
23	2	16	56	61	23	27
24	2	16	56	61	39	43
25	2	24	44	45	27	31
26	2	24	44	45	51	55
27	2	24	44	47	27	29
28	2	24	44	47	51	53
29	2	24	44	57	15	31
30	2	24	44	57	39	55
31	2	24	44	59	15	29
32	2	24	44	59	39	53
33	2	24	46	43	29	31
34	2	24	46	43	53	55
35	2	24	46	47	29	27
36	2	24	46	47	53	51

37	2	24	46	57	15	31
38	2	24	46	57	39	55
39	2	24	46	61	15	27
40	2	24	46	61	39	51
41	2	24	48	43	31	29
42	2	24	48	43	55	53
43	2	24	48	45	31	27
44	2	24	48	45	55	51
45	2	24	48	59	15	29
46	2	24	48	59	39	53
47	2	24	48	61	15	27
48	2	24	48	61	39	51
49	2	28	40	45	23	31
50	2	28	40	45	51	59
51	2	28	40	47	23	29
52	2	28	40	47	51	57
53	2	28	40	53	15	31
54	2	28	40	53	43	59
55	2	28	40	55	15	29
56	2	28	40	55	43	57
57	2	28	46	39	29	31
58	2	28	46	39	57	59
59	2	28	46	47	29	23
60	2	28	46	47	57	51
61	2	28	46	53	15	31
62	2	28	46	53	43	59
63	2	28	46	61	15	23
64	2	28	46	61	43	51
65	2	28	48	39	31	29
66	2	28	48	39	59	57
67	2	28	48	45	31	23
68	2	28	48	45	59	51
69	2	28	48	55	15	29
70	2	28	48	55	43	57
71	2	28	48	61	15	23
72	2	28	48	61	43	51
73	2	30	40	43	23	31
74	2	30	40	43	53	61
75	2	30	40	47	23	27
76	2	30	40	47	53	57
77	2	30	40	51	15	31
78	2	30	40	51	45	61
79	2	30	40	55	15	27
80	2	30	40	55	45	57
81	2	30	44	39	27	31
82	2	30	44	39	57	61
83	2	30	44	47	27	23
84	2	30	44	47	57	53
85	2	30	44	51	15	31
86	2	30	44	51	45	61

87	2	30	44	59	15	23
88	2	30	44	59	45	53
89	2	30	48	39	31	27
90	2	30	48	39	61	57
91	2	30	48	43	31	23
92	2	30	48	43	61	53
93	2	30	48	55	15	27
94	2	30	48	55	45	57
95	2	30	48	59	15	23
96	2	30	48	59	45	53
97	2	32	40	43	23	29
98	2	32	40	43	55	61
99	2	32	40	45	23	27
100	2	32	40	45	55	59
101	2	32	40	51	15	29
102	2	32	40	51	47	61
103	2	32	40	53	15	27
104	2	32	40	53	47	59
105	2	32	44	39	27	29
106	2	32	44	39	59	61
107	2	32	44	45	27	23
108	2	32	44	45	59	55
109	2	32	44	51	15	29
110	2	32	44	51	47	61
111	2	32	44	57	15	23
112	2	32	44	57	47	55
113	2	32	46	39	29	27
114	2	32	46	39	61	59
115	2	32	46	43	29	23
116	2	32	46	43	61	55
117	2	32	46	53	15	27
118	2	32	46	53	47	59
119	2	32	46	57	15	23
120	2	32	46	57	47	55
121	2	40	28	29	43	47
122	2	40	28	29	51	55
123	2	40	28	31	43	45
124	2	40	28	31	51	53
125	2	40	28	57	15	47
126	2	40	28	57	23	55
127	2	40	28	59	15	45
128	2	40	28	59	23	53
129	2	40	30	27	45	47
130	2	40	30	27	53	55
131	2	40	30	31	45	43
132	2	40	30	31	53	51
133	2	40	30	57	15	47
134	2	40	30	57	23	55
135	2	40	30	61	15	43
136	2	40	30	61	23	51

137	2	40	32	27	47	45
138	2	40	32	27	55	53
139	2	40	32	29	47	43
140	2	40	32	29	55	51
141	2	40	32	59	15	45
142	2	40	32	59	23	53
143	2	40	32	61	15	43
144	2	40	32	61	23	51
145	2	44	24	29	39	47
146	2	44	24	29	51	59
147	2	44	24	31	39	45
148	2	44	24	31	51	57
149	2	44	24	53	15	47
150	2	44	24	53	27	59
151	2	44	24	55	15	45
152	2	44	24	55	27	57
153	2	44	30	23	45	47
154	2	44	30	23	57	59
155	2	44	30	31	45	39
156	2	44	30	31	57	51
157	2	44	30	53	15	47
158	2	44	30	53	27	59
159	2	44	30	61	15	39
160	2	44	30	61	27	51
161	2	44	32	23	47	45
162	2	44	32	23	59	57
163	2	44	32	29	47	39
164	2	44	32	29	59	51
165	2	44	32	55	15	45
166	2	44	32	55	27	57
167	2	44	32	61	15	39
168	2	44	32	61	27	51
169	2	46	24	27	39	47
170	2	46	24	27	53	61
171	2	46	24	31	39	43
172	2	46	24	31	53	57
173	2	46	24	51	15	47
174	2	46	24	51	29	61
175	2	46	24	55	15	43
176	2	46	24	55	29	57
177	2	46	28	23	43	47
178	2	46	28	23	57	61
179	2	46	28	31	43	39
180	2	46	28	31	57	53
181	2	46	28	51	15	47
182	2	46	28	51	29	61
183	2	46	28	59	15	39
184	2	46	28	59	29	53
185	2	46	32	23	47	43
186	2	46	32	23	61	57

187	2	46	32	27	47	39
188	2	46	32	27	61	53
189	2	46	32	55	15	43
190	2	46	32	55	29	57
191	2	46	32	59	15	39
192	2	46	32	59	29	53
193	2	48	24	27	39	45
194	2	48	24	27	55	61
195	2	48	24	29	39	43
196	2	48	24	29	55	59
197	2	48	24	51	15	45
198	2	48	24	51	31	61
199	2	48	24	53	15	43
200	2	48	24	53	31	59
201	2	48	28	23	43	45
202	2	48	28	23	59	61
203	2	48	28	29	43	39
204	2	48	28	29	59	55
205	2	48	28	51	15	45
206	2	48	28	51	31	61
207	2	48	28	57	15	39
208	2	48	28	57	31	55
209	2	48	30	23	45	43
210	2	48	30	23	61	59
211	2	48	30	27	45	39
212	2	48	30	27	61	55
213	2	48	30	53	15	43
214	2	48	30	53	31	59
215	2	48	30	57	15	39
216	2	48	30	57	31	55
217	2	52	16	29	39	55
218	2	52	16	29	43	59
219	2	52	16	31	39	53
220	2	52	16	31	43	57
221	2	52	16	45	23	55
222	2	52	16	45	27	59
223	2	52	16	47	23	53
224	2	52	16	47	27	57
225	2	52	30	15	53	55
226	2	52	30	15	57	59
227	2	52	30	31	53	39
228	2	52	30	31	57	43
229	2	52	30	45	23	55
230	2	52	30	45	27	59
231	2	52	30	61	23	39
232	2	52	30	61	27	43
233	2	52	32	15	55	53
234	2	52	32	15	59	57
235	2	52	32	29	55	39
236	2	52	32	29	59	43

237	2	52	32	47	23	53
238	2	52	32	47	27	57
239	2	52	32	61	23	39
240	2	52	32	61	27	43
241	2	54	16	27	39	55
242	2	54	16	27	45	61
243	2	54	16	31	39	51
244	2	54	16	31	45	57
245	2	54	16	43	23	55
246	2	54	16	43	29	61
247	2	54	16	47	23	51
248	2	54	16	47	29	57
249	2	54	28	15	51	55
250	2	54	28	15	57	61
251	2	54	28	31	51	39
252	2	54	28	31	57	45
253	2	54	28	43	23	55
254	2	54	28	43	29	61
255	2	54	28	59	23	39
256	2	54	28	59	29	45
257	2	54	32	15	55	51
258	2	54	32	15	61	57
259	2	54	32	27	55	39
260	2	54	32	27	61	45
261	2	54	32	47	23	51
262	2	54	32	47	29	57
263	2	54	32	59	23	39
264	2	54	32	59	29	45
265	2	56	16	27	39	53
266	2	56	16	27	47	61
267	2	56	16	29	39	51
268	2	56	16	29	47	59
269	2	56	16	43	23	53
270	2	56	16	43	31	61
271	2	56	16	45	23	51
272	2	56	16	45	31	59
273	2	56	28	15	51	53
274	2	56	28	15	59	61
275	2	56	28	29	51	39
276	2	56	28	29	59	47
277	2	56	28	43	23	53
278	2	56	28	43	31	61
279	2	56	28	57	23	39
280	2	56	28	57	31	47
281	2	56	30	15	53	51
282	2	56	30	15	61	59
283	2	56	30	27	53	39
284	2	56	30	27	61	47
285	2	56	30	45	23	51
286	2	56	30	45	31	59

287	2	56	30	57	23	39
288	2	56	30	57	31	47
289	2	58	16	23	43	59
290	2	58	16	23	45	61
291	2	58	16	31	43	51
292	2	58	16	31	45	53
293	2	58	16	39	27	59
294	2	58	16	39	29	61
295	2	58	16	47	27	51
296	2	58	16	47	29	53
297	2	58	24	15	51	59
298	2	58	24	15	53	61
299	2	58	24	31	51	43
300	2	58	24	31	53	45
301	2	58	24	39	27	59
302	2	58	24	39	29	61
303	2	58	24	55	27	43
304	2	58	24	55	29	45
305	2	58	32	15	59	51
306	2	58	32	15	61	53
307	2	58	32	23	59	43
308	2	58	32	23	61	45
309	2	58	32	47	27	51
310	2	58	32	47	29	53
311	2	58	32	55	27	43
312	2	58	32	55	29	45
313	2	60	16	23	43	57
314	2	60	16	23	47	61
315	2	60	16	29	43	51
316	2	60	16	29	47	55
317	2	60	16	39	27	57
318	2	60	16	39	31	61
319	2	60	16	45	27	51
320	2	60	16	45	31	55
321	2	60	24	15	51	57
322	2	60	24	15	55	61
323	2	60	24	29	51	43
324	2	60	24	29	55	47
325	2	60	24	39	27	57
326	2	60	24	39	31	61
327	2	60	24	53	27	43
328	2	60	24	53	31	47
329	2	60	30	15	57	51
330	2	60	30	15	61	55
331	2	60	30	23	57	43
332	2	60	30	23	61	47
333	2	60	30	45	27	51
334	2	60	30	45	31	55
335	2	60	30	53	27	43
336	2	60	30	53	31	47

337	2	62	16	23	45	57
338	2	62	16	23	47	59
339	2	62	16	27	45	53
340	2	62	16	27	47	55
341	2	62	16	39	29	57
342	2	62	16	39	31	59
343	2	62	16	43	29	53
344	2	62	16	43	31	55
345	2	62	24	15	53	57
346	2	62	24	15	55	59
347	2	62	24	27	53	45
348	2	62	24	27	55	47
349	2	62	24	39	29	57
350	2	62	24	39	31	59
351	2	62	24	51	29	45
352	2	62	24	51	31	47
353	2	62	28	15	57	53
354	2	62	28	15	59	55
355	2	62	28	23	57	45
356	2	62	28	23	59	47
357	2	62	28	43	29	53
358	2	62	28	43	31	55
359	2	62	28	51	29	45
360	2	62	28	51	31	47
361	3	16	52	53	26	30
362	3	16	52	53	42	46
363	3	16	52	54	26	29
364	3	16	52	54	42	45
365	3	16	52	57	22	30
366	3	16	52	57	38	46
367	3	16	52	58	22	29
368	3	16	52	58	38	45
369	3	16	55	50	29	30
370	3	16	55	50	45	46
371	3	16	55	54	29	26
372	3	16	55	54	45	42
373	3	16	55	57	22	30
374	3	16	55	57	38	46
375	3	16	55	61	22	26
376	3	16	55	61	38	42
377	3	16	56	50	30	29
378	3	16	56	50	46	45
379	3	16	56	53	30	26
380	3	16	56	53	46	42
381	3	16	56	58	22	29
382	3	16	56	58	38	45
383	3	16	56	61	22	26
384	3	16	56	61	38	42
385	3	24	44	45	26	30
386	3	24	44	45	50	54

387	3	24	44	46	26	29
388	3	24	44	46	50	53
389	3	24	44	57	14	30
390	3	24	44	57	38	54
391	3	24	44	58	14	29
392	3	24	44	58	38	53
393	3	24	47	42	29	30
394	3	24	47	42	53	54
395	3	24	47	46	29	26
396	3	24	47	46	53	50
397	3	24	47	57	14	30
398	3	24	47	57	38	54
399	3	24	47	61	14	26
400	3	24	47	61	38	50
401	3	24	48	42	30	29
402	3	24	48	42	54	53
403	3	24	48	45	30	26
404	3	24	48	45	54	50
405	3	24	48	58	14	29
406	3	24	48	58	38	53
407	3	24	48	61	14	26
408	3	24	48	61	38	50
409	3	28	40	45	22	30
410	3	28	40	45	50	58
411	3	28	40	46	22	29
412	3	28	40	46	50	57
413	3	28	40	53	14	30
414	3	28	40	53	42	58
415	3	28	40	54	14	29
416	3	28	40	54	42	57
417	3	28	47	38	29	30
418	3	28	47	38	57	58
419	3	28	47	46	29	22
420	3	28	47	46	57	50
421	3	28	47	53	14	30
422	3	28	47	53	42	58
423	3	28	47	61	14	22
424	3	28	47	61	42	50
425	3	28	48	38	30	29
426	3	28	48	38	58	57
427	3	28	48	45	30	22
428	3	28	48	45	58	50
429	3	28	48	54	14	29
430	3	28	48	54	42	57
431	3	28	48	61	14	22
432	3	28	48	61	42	50
433	3	31	40	42	22	30
434	3	31	40	42	53	61
435	3	31	40	46	22	26
436	3	31	40	46	53	57

437	3	31	40	50	14	30
438	3	31	40	50	45	61
439	3	31	40	54	14	26
440	3	31	40	54	45	57
441	3	31	44	38	26	30
442	3	31	44	38	57	61
443	3	31	44	46	26	22
444	3	31	44	46	57	53
445	3	31	44	50	14	30
446	3	31	44	50	45	61
447	3	31	44	58	14	22
448	3	31	44	58	45	53
449	3	31	48	38	30	26
450	3	31	48	38	61	57
451	3	31	48	42	30	22
452	3	31	48	42	61	53
453	3	31	48	54	14	26
454	3	31	48	54	45	57
455	3	31	48	58	14	22
456	3	31	48	58	45	53
457	3	32	40	42	22	29
458	3	32	40	42	54	61
459	3	32	40	45	22	26
460	3	32	40	45	54	58
461	3	32	40	50	14	29
462	3	32	40	50	46	61
463	3	32	40	53	14	26
464	3	32	40	53	46	58
465	3	32	44	38	26	29
466	3	32	44	38	58	61
467	3	32	44	45	26	22
468	3	32	44	45	58	54
469	3	32	44	50	14	29
470	3	32	44	50	46	61
471	3	32	44	57	14	22
472	3	32	44	57	46	54
473	3	32	47	38	29	26
474	3	32	47	38	61	58
475	3	32	47	42	29	22
476	3	32	47	42	61	54
477	3	32	47	53	14	26
478	3	32	47	53	46	58
479	3	32	47	57	14	22
480	3	32	47	57	46	54
481	3	40	28	29	42	46
482	3	40	28	29	50	54
483	3	40	28	30	42	45
484	3	40	28	30	50	53
485	3	40	28	57	14	46
486	3	40	28	57	22	54

487	3	40	28	58	14	45
488	3	40	28	58	22	53
489	3	40	31	26	45	46
490	3	40	31	26	53	54
491	3	40	31	30	45	42
492	3	40	31	30	53	50
493	3	40	31	57	14	46
494	3	40	31	57	22	54
495	3	40	31	61	14	42
496	3	40	31	61	22	50
497	3	40	32	26	46	45
498	3	40	32	26	54	53
499	3	40	32	29	46	42
500	3	40	32	29	54	50
501	3	40	32	58	14	45
502	3	40	32	58	22	53
503	3	40	32	61	14	42
504	3	40	32	61	22	50
505	3	44	24	29	38	46
506	3	44	24	29	50	58
507	3	44	24	30	38	45
508	3	44	24	30	50	57
509	3	44	24	53	14	46
510	3	44	24	53	26	58
511	3	44	24	54	14	45
512	3	44	24	54	26	57
513	3	44	31	22	45	46
514	3	44	31	22	57	58
515	3	44	31	30	45	38
516	3	44	31	30	57	50
517	3	44	31	53	14	46
518	3	44	31	53	26	58
519	3	44	31	61	14	38
520	3	44	31	61	26	50
521	3	44	32	22	46	45
522	3	44	32	22	58	57
523	3	44	32	29	46	38
524	3	44	32	29	58	50
525	3	44	32	54	14	45
526	3	44	32	54	26	57
527	3	44	32	61	14	38
528	3	44	32	61	26	50
529	3	47	24	26	38	46
530	3	47	24	26	53	61
531	3	47	24	30	38	42
532	3	47	24	30	53	57
533	3	47	24	50	14	46
534	3	47	24	50	29	61
535	3	47	24	54	14	42
536	3	47	24	54	29	57

537	3	47	28	22	42	46
538	3	47	28	22	57	61
539	3	47	28	30	42	38
540	3	47	28	30	57	53
541	3	47	28	50	14	46
542	3	47	28	50	29	61
543	3	47	28	58	14	38
544	3	47	28	58	29	53
545	3	47	32	22	46	42
546	3	47	32	22	61	57
547	3	47	32	26	46	38
548	3	47	32	26	61	53
549	3	47	32	54	14	42
550	3	47	32	54	29	57
551	3	47	32	58	14	38
552	3	47	32	58	29	53
553	3	48	24	26	38	45
554	3	48	24	26	54	61
555	3	48	24	29	38	42
556	3	48	24	29	54	58
557	3	48	24	50	14	45
558	3	48	24	50	30	61
559	3	48	24	53	14	42
560	3	48	24	53	30	58
561	3	48	28	22	42	45
562	3	48	28	22	58	61
563	3	48	28	29	42	38
564	3	48	28	29	58	54
565	3	48	28	50	14	45
566	3	48	28	50	30	61
567	3	48	28	57	14	38
568	3	48	28	57	30	54
569	3	48	31	22	45	42
570	3	48	31	22	61	58
571	3	48	31	26	45	38
572	3	48	31	26	61	54
573	3	48	31	53	14	42
574	3	48	31	53	30	58
575	3	48	31	57	14	38
576	3	48	31	57	30	54
577	3	52	16	29	38	54
578	3	52	16	29	42	58
579	3	52	16	30	38	53
580	3	52	16	30	42	57
581	3	52	16	45	22	54
582	3	52	16	45	26	58
583	3	52	16	46	22	53
584	3	52	16	46	26	57
585	3	52	31	14	53	54
586	3	52	31	14	57	58

587	3	52	31	30	53	38
588	3	52	31	30	57	42
589	3	52	31	45	22	54
590	3	52	31	45	26	58
591	3	52	31	61	22	38
592	3	52	31	61	26	42
593	3	52	32	14	54	53
594	3	52	32	14	58	57
595	3	52	32	29	54	38
596	3	52	32	29	58	42
597	3	52	32	46	22	53
598	3	52	32	46	26	57
599	3	52	32	61	22	38
600	3	52	32	61	26	42
601	3	55	16	26	38	54
602	3	55	16	26	45	61
603	3	55	16	30	38	50
604	3	55	16	30	45	57
605	3	55	16	42	22	54
606	3	55	16	42	29	61
607	3	55	16	46	22	50
608	3	55	16	46	29	57
609	3	55	28	14	50	54
610	3	55	28	14	57	61
611	3	55	28	30	50	38
612	3	55	28	30	57	45
613	3	55	28	42	22	54
614	3	55	28	42	29	61
615	3	55	28	58	22	38
616	3	55	28	58	29	45
617	3	55	32	14	54	50
618	3	55	32	14	61	57
619	3	55	32	26	54	38
620	3	55	32	26	61	45
621	3	55	32	46	22	50
622	3	55	32	46	29	57
623	3	55	32	58	22	38
624	3	55	32	58	29	45
625	3	56	16	26	38	53
626	3	56	16	26	46	61
627	3	56	16	29	38	50
628	3	56	16	29	46	58
629	3	56	16	42	22	53
630	3	56	16	42	30	61
631	3	56	16	45	22	50
632	3	56	16	45	30	58
633	3	56	28	14	50	53
634	3	56	28	14	58	61
635	3	56	28	29	50	38
636	3	56	28	29	58	46

637	3	56	28	42	22	53
638	3	56	28	42	30	61
639	3	56	28	57	22	38
640	3	56	28	57	30	46
641	3	56	31	14	53	50
642	3	56	31	14	61	58
643	3	56	31	26	53	38
644	3	56	31	26	61	46
645	3	56	31	45	22	50
646	3	56	31	45	30	58
647	3	56	31	57	22	38
648	3	56	31	57	30	46
649	3	59	16	22	42	58
650	3	59	16	22	45	61
651	3	59	16	30	42	50
652	3	59	16	30	45	53
653	3	59	16	38	26	58
654	3	59	16	38	29	61
655	3	59	16	46	26	50
656	3	59	16	46	29	53
657	3	59	24	14	50	58
658	3	59	24	14	53	61
659	3	59	24	30	50	42
660	3	59	24	30	53	45
661	3	59	24	38	26	58
662	3	59	24	38	29	61
663	3	59	24	54	26	42
664	3	59	24	54	29	45
665	3	59	32	14	58	50
666	3	59	32	14	61	53
667	3	59	32	22	58	42
668	3	59	32	22	61	45
669	3	59	32	46	26	50
670	3	59	32	46	29	53
671	3	59	32	54	26	42
672	3	59	32	54	29	45
673	3	60	16	22	42	57
674	3	60	16	22	46	61
675	3	60	16	29	42	50
676	3	60	16	29	46	54
677	3	60	16	38	26	57
678	3	60	16	38	30	61
679	3	60	16	45	26	50
680	3	60	16	45	30	54
681	3	60	24	14	50	57
682	3	60	24	14	54	61
683	3	60	24	29	50	42
684	3	60	24	29	54	46
685	3	60	24	38	26	57
686	3	60	24	38	30	61

687	3	60	24	53	26	42
688	3	60	24	53	30	46
689	3	60	31	14	57	50
690	3	60	31	14	61	54
691	3	60	31	22	57	42
692	3	60	31	22	61	46
693	3	60	31	45	26	50
694	3	60	31	45	30	54
695	3	60	31	53	26	42
696	3	60	31	53	30	46
697	3	63	16	22	45	57
698	3	63	16	22	46	58
699	3	63	16	26	45	53
700	3	63	16	26	46	54
701	3	63	16	38	29	57
702	3	63	16	38	30	58
703	3	63	16	42	29	53
704	3	63	16	42	30	54
705	3	63	24	14	53	57
706	3	63	24	14	54	58
707	3	63	24	26	53	45
708	3	63	24	26	54	46
709	3	63	24	38	29	57
710	3	63	24	38	30	58
711	3	63	24	50	29	45
712	3	63	24	50	30	46
713	3	63	28	14	57	53
714	3	63	28	14	58	54
715	3	63	28	22	57	45
716	3	63	28	22	58	46
717	3	63	28	42	29	53
718	3	63	28	42	30	54
719	3	63	28	50	29	45
720	3	63	28	50	30	46
721	5	16	54	51	26	28
722	5	16	54	51	42	44
723	5	16	54	52	26	27
724	5	16	54	52	42	43
725	5	16	54	57	20	28
726	5	16	54	57	36	44
727	5	16	54	58	20	27
728	5	16	54	58	36	43
729	5	16	55	50	27	28
730	5	16	55	50	43	44
731	5	16	55	52	27	26
732	5	16	55	52	43	42
733	5	16	55	57	20	28
734	5	16	55	57	36	44
735	5	16	55	59	20	26
736	5	16	55	59	36	42

737	5	16	56	50	28	27
738	5	16	56	50	44	43
739	5	16	56	51	28	26
740	5	16	56	51	44	42
741	5	16	56	58	20	27
742	5	16	56	58	36	43
743	5	16	56	59	20	26
744	5	16	56	59	36	42
745	5	24	46	43	26	28
746	5	24	46	43	50	52
747	5	24	46	44	26	27
748	5	24	46	44	50	51
749	5	24	46	57	12	28
750	5	24	46	57	36	52
751	5	24	46	58	12	27
752	5	24	46	58	36	51
753	5	24	47	42	27	28
754	5	24	47	42	51	52
755	5	24	47	44	27	26
756	5	24	47	44	51	50
757	5	24	47	57	12	28
758	5	24	47	57	36	52
759	5	24	47	59	12	26
760	5	24	47	59	36	50
761	5	24	48	42	28	27
762	5	24	48	42	52	51
763	5	24	48	43	28	26
764	5	24	48	43	52	50
765	5	24	48	58	12	27
766	5	24	48	58	36	51
767	5	24	48	59	12	26
768	5	24	48	59	36	50
769	5	30	40	43	20	28
770	5	30	40	43	50	58
771	5	30	40	44	20	27
772	5	30	40	44	50	57
773	5	30	40	51	12	28
774	5	30	40	51	42	58
775	5	30	40	52	12	27
776	5	30	40	52	42	57
777	5	30	47	36	27	28
778	5	30	47	36	57	58
779	5	30	47	44	27	20
780	5	30	47	44	57	50
781	5	30	47	51	12	28
782	5	30	47	51	42	58
783	5	30	47	59	12	20
784	5	30	47	59	42	50
785	5	30	48	36	28	27
786	5	30	48	36	58	57

787	5	30	48	43	28	20
788	5	30	48	43	58	50
789	5	30	48	52	12	27
790	5	30	48	52	42	57
791	5	30	48	59	12	20
792	5	30	48	59	42	50
793	5	31	40	42	20	28
794	5	31	40	42	51	59
795	5	31	40	44	20	26
796	5	31	40	44	51	57
797	5	31	40	50	12	28
798	5	31	40	50	43	59
799	5	31	40	52	12	26
800	5	31	40	52	43	57
801	5	31	46	36	26	28
802	5	31	46	36	57	59
803	5	31	46	44	26	20
804	5	31	46	44	57	51
805	5	31	46	50	12	28
806	5	31	46	50	43	59
807	5	31	46	58	12	20
808	5	31	46	58	43	51
809	5	31	48	36	28	26
810	5	31	48	36	59	57
811	5	31	48	42	28	20
812	5	31	48	42	59	51
813	5	31	48	52	12	26
814	5	31	48	52	43	57
815	5	31	48	58	12	20
816	5	31	48	58	43	51
817	5	32	40	42	20	27
818	5	32	40	42	52	59
819	5	32	40	43	20	26
820	5	32	40	43	52	58
821	5	32	40	50	12	27
822	5	32	40	50	44	59
823	5	32	40	51	12	26
824	5	32	40	51	44	58
825	5	32	46	36	26	27
826	5	32	46	36	58	59
827	5	32	46	43	26	20
828	5	32	46	43	58	52
829	5	32	46	50	12	27
830	5	32	46	50	44	59
831	5	32	46	57	12	20
832	5	32	46	57	44	52
833	5	32	47	36	27	26
834	5	32	47	36	59	58
835	5	32	47	42	27	20
836	5	32	47	42	59	52

837	5	32	47	51	12	26
838	5	32	47	51	44	58
839	5	32	47	57	12	20
840	5	32	47	57	44	52
841	5	40	30	27	42	44
842	5	40	30	27	50	52
843	5	40	30	28	42	43
844	5	40	30	28	50	51
845	5	40	30	57	12	44
846	5	40	30	57	20	52
847	5	40	30	58	12	43
848	5	40	30	58	20	51
849	5	40	31	26	43	44
850	5	40	31	26	51	52
851	5	40	31	28	43	42
852	5	40	31	28	51	50
853	5	40	31	57	12	44
854	5	40	31	57	20	52
855	5	40	31	59	12	42
856	5	40	31	59	20	50
857	5	40	32	26	44	43
858	5	40	32	26	52	51
859	5	40	32	27	44	42
860	5	40	32	27	52	50
861	5	40	32	58	12	43
862	5	40	32	58	20	51
863	5	40	32	59	12	42
864	5	40	32	59	20	50
865	5	46	24	27	36	44
866	5	46	24	27	50	58
867	5	46	24	28	36	43
868	5	46	24	28	50	57
869	5	46	24	51	12	44
870	5	46	24	51	26	58
871	5	46	24	52	12	43
872	5	46	24	52	26	57
873	5	46	31	20	43	44
874	5	46	31	20	57	58
875	5	46	31	28	43	36
876	5	46	31	28	57	50
877	5	46	31	51	12	44
878	5	46	31	51	26	58
879	5	46	31	59	12	36
880	5	46	31	59	26	50
881	5	46	32	20	44	43
882	5	46	32	20	58	57
883	5	46	32	27	44	36
884	5	46	32	27	58	50
885	5	46	32	52	12	43
886	5	46	32	52	26	57

887	5	46	32	59	12	36
888	5	46	32	59	26	50
889	5	47	24	26	36	44
890	5	47	24	26	51	59
891	5	47	24	28	36	42
892	5	47	24	28	51	57
893	5	47	24	50	12	44
894	5	47	24	50	27	59
895	5	47	24	52	12	42
896	5	47	24	52	27	57
897	5	47	30	20	42	44
898	5	47	30	20	57	59
899	5	47	30	28	42	36
900	5	47	30	28	57	51
901	5	47	30	50	12	44
902	5	47	30	50	27	59
903	5	47	30	58	12	36
904	5	47	30	58	27	51
905	5	47	32	20	44	42
906	5	47	32	20	59	57
907	5	47	32	26	44	36
908	5	47	32	26	59	51
909	5	47	32	52	12	42
910	5	47	32	52	27	57
911	5	47	32	58	12	36
912	5	47	32	58	27	51
913	5	48	24	26	36	43
914	5	48	24	26	52	59
915	5	48	24	27	36	42
916	5	48	24	27	52	58
917	5	48	24	50	12	43
918	5	48	24	50	28	59
919	5	48	24	51	12	42
920	5	48	24	51	28	58
921	5	48	30	20	42	43
922	5	48	30	20	58	59
923	5	48	30	27	42	36
924	5	48	30	27	58	52
925	5	48	30	50	12	43
926	5	48	30	50	28	59
927	5	48	30	57	12	36
928	5	48	30	57	28	52
929	5	48	31	20	43	42
930	5	48	31	20	59	58
931	5	48	31	26	43	36
932	5	48	31	26	59	52
933	5	48	31	51	12	42
934	5	48	31	51	28	58
935	5	48	31	57	12	36
936	5	48	31	57	28	52

937	5	54	16	27	36	52
938	5	54	16	27	42	58
939	5	54	16	28	36	51
940	5	54	16	28	42	57
941	5	54	16	43	20	52
942	5	54	16	43	26	58
943	5	54	16	44	20	51
944	5	54	16	44	26	57
945	5	54	31	12	51	52
946	5	54	31	12	57	58
947	5	54	31	28	51	36
948	5	54	31	28	57	42
949	5	54	31	43	20	52
950	5	54	31	43	26	58
951	5	54	31	59	20	36
952	5	54	31	59	26	42
953	5	54	32	12	52	51
954	5	54	32	12	58	57
955	5	54	32	27	52	36
956	5	54	32	27	58	42
957	5	54	32	44	20	51
958	5	54	32	44	26	57
959	5	54	32	59	20	36
960	5	54	32	59	26	42
961	5	55	16	26	36	52
962	5	55	16	26	43	59
963	5	55	16	28	36	50
964	5	55	16	28	43	57
965	5	55	16	42	20	52
966	5	55	16	42	27	59
967	5	55	16	44	20	50
968	5	55	16	44	27	57
969	5	55	30	12	50	52
970	5	55	30	12	57	59
971	5	55	30	28	50	36
972	5	55	30	28	57	43
973	5	55	30	42	20	52
974	5	55	30	42	27	59
975	5	55	30	58	20	36
976	5	55	30	58	27	43
977	5	55	32	12	52	50
978	5	55	32	12	59	57
979	5	55	32	26	52	36
980	5	55	32	26	59	43
981	5	55	32	44	20	50
982	5	55	32	44	27	57
983	5	55	32	58	20	36
984	5	55	32	58	27	43
985	5	56	16	26	36	51
986	5	56	16	26	44	59

987	5	56	16	27	36	50
988	5	56	16	27	44	58
989	5	56	16	42	20	51
990	5	56	16	42	28	59
991	5	56	16	43	20	50
992	5	56	16	43	28	58
993	5	56	30	12	50	51
994	5	56	30	12	58	59
995	5	56	30	27	50	36
996	5	56	30	27	58	44
997	5	56	30	42	20	51
998	5	56	30	42	28	59
999	5	56	30	57	20	36
1000	5	56	30	57	28	44
1001	5	56	31	12	51	50
1002	5	56	31	12	59	58
1003	5	56	31	26	51	36
1004	5	56	31	26	59	44
1005	5	56	31	43	20	50
1006	5	56	31	43	28	58
1007	5	56	31	57	20	36
1008	5	56	31	57	28	44
1009	5	61	16	20	42	58
1010	5	61	16	20	43	59
1011	5	61	16	28	42	50
1012	5	61	16	28	43	51
1013	5	61	16	36	26	58
1014	5	61	16	36	27	59
1015	5	61	16	44	26	50
1016	5	61	16	44	27	51
1017	5	61	24	12	50	58
1018	5	61	24	12	51	59
1019	5	61	24	28	50	42
1020	5	61	24	28	51	43
1021	5	61	24	36	26	58
1022	5	61	24	36	27	59
1023	5	61	24	52	26	42
1024	5	61	24	52	27	43
1025	5	61	32	12	58	50
1026	5	61	32	12	59	51
1027	5	61	32	20	58	42
1028	5	61	32	20	59	43
1029	5	61	32	44	26	50
1030	5	61	32	44	27	51
1031	5	61	32	52	26	42
1032	5	61	32	52	27	43
1033	5	62	16	20	42	57
1034	5	62	16	20	44	59
1035	5	62	16	27	42	50
1036	5	62	16	27	44	52

1037	5	62	16	36	26	57
1038	5	62	16	36	28	59
1039	5	62	16	43	26	50
1040	5	62	16	43	28	52
1041	5	62	24	12	50	57
1042	5	62	24	12	52	59
1043	5	62	24	27	50	42
1044	5	62	24	27	52	44
1045	5	62	24	36	26	57
1046	5	62	24	36	28	59
1047	5	62	24	51	26	42
1048	5	62	24	51	28	44
1049	5	62	31	12	57	50
1050	5	62	31	12	59	52
1051	5	62	31	20	57	42
1052	5	62	31	20	59	44
1053	5	62	31	43	26	50
1054	5	62	31	43	28	52
1055	5	62	31	51	26	42
1056	5	62	31	51	28	44
1057	5	63	16	20	43	57
1058	5	63	16	20	44	58
1059	5	63	16	26	43	51
1060	5	63	16	26	44	52
1061	5	63	16	36	27	57
1062	5	63	16	36	28	58
1063	5	63	16	42	27	51
1064	5	63	16	42	28	52
1065	5	63	24	12	51	57
1066	5	63	24	12	52	58
1067	5	63	24	26	51	43
1068	5	63	24	26	52	44
1069	5	63	24	36	27	57
1070	5	63	24	36	28	58
1071	5	63	24	50	27	43
1072	5	63	24	50	28	44
1073	5	63	30	12	57	51
1074	5	63	30	12	58	52
1075	5	63	30	20	57	43
1076	5	63	30	20	58	44
1077	5	63	30	42	27	51
1078	5	63	30	42	28	52
1079	5	63	30	50	27	43
1080	5	63	30	50	28	44
1081	9	16	58	51	22	24
1082	9	16	58	51	38	40
1083	9	16	58	52	22	23
1084	9	16	58	52	38	39
1085	9	16	58	53	20	24
1086	9	16	58	53	36	40

1087	9	16	58	54	20	23
1088	9	16	58	54	36	39
1089	9	16	59	50	23	24
1090	9	16	59	50	39	40
1091	9	16	59	52	23	22
1092	9	16	59	52	39	38
1093	9	16	59	53	20	24
1094	9	16	59	53	36	40
1095	9	16	59	55	20	22
1096	9	16	59	55	36	38
1097	9	16	60	50	24	23
1098	9	16	60	50	40	39
1099	9	16	60	51	24	22
1100	9	16	60	51	40	38
1101	9	16	60	54	20	23
1102	9	16	60	54	36	39
1103	9	16	60	55	20	22
1104	9	16	60	55	36	38
1105	9	28	46	39	22	24
1106	9	28	46	39	50	52
1107	9	28	46	40	22	23
1108	9	28	46	40	50	51
1109	9	28	46	53	8	24
1110	9	28	46	53	36	52
1111	9	28	46	54	8	23
1112	9	28	46	54	36	51
1113	9	28	47	38	23	24
1114	9	28	47	38	51	52
1115	9	28	47	40	23	22
1116	9	28	47	40	51	50
1117	9	28	47	53	8	24
1118	9	28	47	53	36	52
1119	9	28	47	55	8	22
1120	9	28	47	55	36	50
1121	9	28	48	38	24	23
1122	9	28	48	38	52	51
1123	9	28	48	39	24	22
1124	9	28	48	39	52	50
1125	9	28	48	54	8	23
1126	9	28	48	54	36	51
1127	9	28	48	55	8	22
1128	9	28	48	55	36	50
1129	9	30	44	39	20	24
1130	9	30	44	39	50	54
1131	9	30	44	40	20	23
1132	9	30	44	40	50	53
1133	9	30	44	51	8	24
1134	9	30	44	51	38	54
1135	9	30	44	52	8	23
1136	9	30	44	52	38	53

1137	9	30	47	36	23	24
1138	9	30	47	36	53	54
1139	9	30	47	40	23	20
1140	9	30	47	40	53	50
1141	9	30	47	51	8	24
1142	9	30	47	51	38	54
1143	9	30	47	55	8	20
1144	9	30	47	55	38	50
1145	9	30	48	36	24	23
1146	9	30	48	36	54	53
1147	9	30	48	39	24	20
1148	9	30	48	39	54	50
1149	9	30	48	52	8	23
1150	9	30	48	52	38	53
1151	9	30	48	55	8	20
1152	9	30	48	55	38	50
1153	9	31	44	38	20	24
1154	9	31	44	38	51	55
1155	9	31	44	40	20	22
1156	9	31	44	40	51	53
1157	9	31	44	50	8	24
1158	9	31	44	50	39	55
1159	9	31	44	52	8	22
1160	9	31	44	52	39	53
1161	9	31	46	36	22	24
1162	9	31	46	36	53	55
1163	9	31	46	40	22	20
1164	9	31	46	40	53	51
1165	9	31	46	50	8	24
1166	9	31	46	50	39	55
1167	9	31	46	54	8	20
1168	9	31	46	54	39	51
1169	9	31	48	36	24	22
1170	9	31	48	36	55	53
1171	9	31	48	38	24	20
1172	9	31	48	38	55	51
1173	9	31	48	52	8	22
1174	9	31	48	52	39	53
1175	9	31	48	54	8	20
1176	9	31	48	54	39	51
1177	9	32	44	38	20	23
1178	9	32	44	38	52	55
1179	9	32	44	39	20	22
1180	9	32	44	39	52	54
1181	9	32	44	50	8	23
1182	9	32	44	50	40	55
1183	9	32	44	51	8	22
1184	9	32	44	51	40	54
1185	9	32	46	36	22	23
1186	9	32	46	36	54	55

1187	9	32	46	39	22	20
1188	9	32	46	39	54	52
1189	9	32	46	50	8	23
1190	9	32	46	50	40	55
1191	9	32	46	53	8	20
1192	9	32	46	53	40	52
1193	9	32	47	36	23	22
1194	9	32	47	36	55	54
1195	9	32	47	38	23	20
1196	9	32	47	38	55	52
1197	9	32	47	51	8	22
1198	9	32	47	51	40	54
1199	9	32	47	53	8	20
1200	9	32	47	53	40	52
1201	9	44	30	23	38	40
1202	9	44	30	23	50	52
1203	9	44	30	24	38	39
1204	9	44	30	24	50	51
1205	9	44	30	53	8	40
1206	9	44	30	53	20	52
1207	9	44	30	54	8	39
1208	9	44	30	54	20	51
1209	9	44	31	22	39	40
1210	9	44	31	22	51	52
1211	9	44	31	24	39	38
1212	9	44	31	24	51	50
1213	9	44	31	53	8	40
1214	9	44	31	53	20	52
1215	9	44	31	55	8	38
1216	9	44	31	55	20	50
1217	9	44	32	22	40	39
1218	9	44	32	22	52	51
1219	9	44	32	23	40	38
1220	9	44	32	23	52	50
1221	9	44	32	54	8	39
1222	9	44	32	54	20	51
1223	9	44	32	55	8	38
1224	9	44	32	55	20	50
1225	9	46	28	23	36	40
1226	9	46	28	23	50	54
1227	9	46	28	24	36	39
1228	9	46	28	24	50	53
1229	9	46	28	51	8	40
1230	9	46	28	51	22	54
1231	9	46	28	52	8	39
1232	9	46	28	52	22	53
1233	9	46	31	20	39	40
1234	9	46	31	20	53	54
1235	9	46	31	24	39	36
1236	9	46	31	24	53	50

1237	9	46	31	51	8	40
1238	9	46	31	51	22	54
1239	9	46	31	55	8	36
1240	9	46	31	55	22	50
1241	9	46	32	20	40	39
1242	9	46	32	20	54	53
1243	9	46	32	23	40	36
1244	9	46	32	23	54	50
1245	9	46	32	52	8	39
1246	9	46	32	52	22	53
1247	9	46	32	55	8	36
1248	9	46	32	55	22	50
1249	9	47	28	22	36	40
1250	9	47	28	22	51	55
1251	9	47	28	24	36	38
1252	9	47	28	24	51	53
1253	9	47	28	50	8	40
1254	9	47	28	50	23	55
1255	9	47	28	52	8	38
1256	9	47	28	52	23	53
1257	9	47	30	20	38	40
1258	9	47	30	20	53	55
1259	9	47	30	24	38	36
1260	9	47	30	24	53	51
1261	9	47	30	50	8	40
1262	9	47	30	50	23	55
1263	9	47	30	54	8	36
1264	9	47	30	54	23	51
1265	9	47	32	20	40	38
1266	9	47	32	20	55	53
1267	9	47	32	22	40	36
1268	9	47	32	22	55	51
1269	9	47	32	52	8	38
1270	9	47	32	52	23	53
1271	9	47	32	54	8	36
1272	9	47	32	54	23	51
1273	9	48	28	22	36	39
1274	9	48	28	22	52	55
1275	9	48	28	23	36	38
1276	9	48	28	23	52	54
1277	9	48	28	50	8	39
1278	9	48	28	50	24	55
1279	9	48	28	51	8	38
1280	9	48	28	51	24	54
1281	9	48	30	20	38	39
1282	9	48	30	20	54	55
1283	9	48	30	23	38	36
1284	9	48	30	23	54	52
1285	9	48	30	50	8	39
1286	9	48	30	50	24	55

1287	9	48	30	53	8	36
1288	9	48	30	53	24	52
1289	9	48	31	20	39	38
1290	9	48	31	20	55	54
1291	9	48	31	22	39	36
1292	9	48	31	22	55	52
1293	9	48	31	51	8	38
1294	9	48	31	51	24	54
1295	9	48	31	53	8	36
1296	9	48	31	53	24	52
1297	9	58	16	23	36	52
1298	9	58	16	23	38	54
1299	9	58	16	24	36	51
1300	9	58	16	24	38	53
1301	9	58	16	39	20	52
1302	9	58	16	39	22	54
1303	9	58	16	40	20	51
1304	9	58	16	40	22	53
1305	9	58	31	8	51	52
1306	9	58	31	8	53	54
1307	9	58	31	24	51	36
1308	9	58	31	24	53	38
1309	9	58	31	39	20	52
1310	9	58	31	39	22	54
1311	9	58	31	55	20	36
1312	9	58	31	55	22	38
1313	9	58	32	8	52	51
1314	9	58	32	8	54	53
1315	9	58	32	23	52	36
1316	9	58	32	23	54	38
1317	9	58	32	40	20	51
1318	9	58	32	40	22	53
1319	9	58	32	55	20	36
1320	9	58	32	55	22	38
1321	9	59	16	22	36	52
1322	9	59	16	22	39	55
1323	9	59	16	24	36	50
1324	9	59	16	24	39	53
1325	9	59	16	38	20	52
1326	9	59	16	38	23	55
1327	9	59	16	40	20	50
1328	9	59	16	40	23	53
1329	9	59	30	8	50	52
1330	9	59	30	8	53	55
1331	9	59	30	24	50	36
1332	9	59	30	24	53	39
1333	9	59	30	38	20	52
1334	9	59	30	38	23	55
1335	9	59	30	54	20	36
1336	9	59	30	54	23	39

1337	9	59	32	8	52	50
1338	9	59	32	8	55	53
1339	9	59	32	22	52	36
1340	9	59	32	22	55	39
1341	9	59	32	40	20	50
1342	9	59	32	40	23	53
1343	9	59	32	54	20	36
1344	9	59	32	54	23	39
1345	9	60	16	22	36	51
1346	9	60	16	22	40	55
1347	9	60	16	23	36	50
1348	9	60	16	23	40	54
1349	9	60	16	38	20	51
1350	9	60	16	38	24	55
1351	9	60	16	39	20	50
1352	9	60	16	39	24	54
1353	9	60	30	8	50	51
1354	9	60	30	8	54	55
1355	9	60	30	23	50	36
1356	9	60	30	23	54	40
1357	9	60	30	38	20	51
1358	9	60	30	38	24	55
1359	9	60	30	53	20	36
1360	9	60	30	53	24	40
1361	9	60	31	8	51	50
1362	9	60	31	8	55	54
1363	9	60	31	22	51	36
1364	9	60	31	22	55	40
1365	9	60	31	39	20	50
1366	9	60	31	39	24	54
1367	9	60	31	53	20	36
1368	9	60	31	53	24	40
1369	9	61	16	20	38	54
1370	9	61	16	20	39	55
1371	9	61	16	24	38	50
1372	9	61	16	24	39	51
1373	9	61	16	36	22	54
1374	9	61	16	36	23	55
1375	9	61	16	40	22	50
1376	9	61	16	40	23	51
1377	9	61	28	8	50	54
1378	9	61	28	8	51	55
1379	9	61	28	24	50	38
1380	9	61	28	24	51	39
1381	9	61	28	36	22	54
1382	9	61	28	36	23	55
1383	9	61	28	52	22	38
1384	9	61	28	52	23	39
1385	9	61	32	8	54	50
1386	9	61	32	8	55	51

1387	9	61	32	20	54	38
1388	9	61	32	20	55	39
1389	9	61	32	40	22	50
1390	9	61	32	40	23	51
1391	9	61	32	52	22	38
1392	9	61	32	52	23	39
1393	9	62	16	20	38	53
1394	9	62	16	20	40	55
1395	9	62	16	23	38	50
1396	9	62	16	23	40	52
1397	9	62	16	36	22	53
1398	9	62	16	36	24	55
1399	9	62	16	39	22	50
1400	9	62	16	39	24	52
1401	9	62	28	8	50	53
1402	9	62	28	8	52	55
1403	9	62	28	23	50	38
1404	9	62	28	23	52	40
1405	9	62	28	36	22	53
1406	9	62	28	36	24	55
1407	9	62	28	51	22	38
1408	9	62	28	51	24	40
1409	9	62	31	8	53	50
1410	9	62	31	8	55	52
1411	9	62	31	20	53	38
1412	9	62	31	20	55	40
1413	9	62	31	39	22	50
1414	9	62	31	39	24	52
1415	9	62	31	51	22	38
1416	9	62	31	51	24	40
1417	9	63	16	20	39	53
1418	9	63	16	20	40	54
1419	9	63	16	22	39	51
1420	9	63	16	22	40	52
1421	9	63	16	36	23	53
1422	9	63	16	36	24	54
1423	9	63	16	38	23	51
1424	9	63	16	38	24	52
1425	9	63	28	8	51	53
1426	9	63	28	8	52	54
1427	9	63	28	22	51	39
1428	9	63	28	22	52	40
1429	9	63	28	36	23	53
1430	9	63	28	36	24	54
1431	9	63	28	50	23	39
1432	9	63	28	50	24	40
1433	9	63	30	8	53	51
1434	9	63	30	8	54	52
1435	9	63	30	20	53	39
1436	9	63	30	20	54	40

1437	9	63	30	38	23	51
1438	9	63	30	38	24	52
1439	9	63	30	50	23	39
1440	9	63	30	50	24	40
1441	17	24	58	43	14	16
1442	17	24	58	43	38	40
1443	17	24	58	44	14	15
1444	17	24	58	44	38	39
1445	17	24	58	45	12	16
1446	17	24	58	45	36	40
1447	17	24	58	46	12	15
1448	17	24	58	46	36	39
1449	17	24	59	42	15	16
1450	17	24	59	42	39	40
1451	17	24	59	44	15	14
1452	17	24	59	44	39	38
1453	17	24	59	45	12	16
1454	17	24	59	45	36	40
1455	17	24	59	47	12	14
1456	17	24	59	47	36	38
1457	17	24	60	42	16	15
1458	17	24	60	42	40	39
1459	17	24	60	43	16	14
1460	17	24	60	43	40	38
1461	17	24	60	46	12	15
1462	17	24	60	46	36	39
1463	17	24	60	47	12	14
1464	17	24	60	47	36	38
1465	17	28	54	39	14	16
1466	17	28	54	39	42	44
1467	17	28	54	40	14	15
1468	17	28	54	40	42	43
1469	17	28	54	45	8	16
1470	17	28	54	45	36	44
1471	17	28	54	46	8	15
1472	17	28	54	46	36	43
1473	17	28	55	38	15	16
1474	17	28	55	38	43	44
1475	17	28	55	40	15	14
1476	17	28	55	40	43	42
1477	17	28	55	45	8	16
1478	17	28	55	45	36	44
1479	17	28	55	47	8	14
1480	17	28	55	47	36	42
1481	17	28	56	38	16	15
1482	17	28	56	38	44	43
1483	17	28	56	39	16	14
1484	17	28	56	39	44	42
1485	17	28	56	46	8	15
1486	17	28	56	46	36	43

1487	17	28	56	47	8	14
1488	17	28	56	47	36	42
1489	17	30	52	39	12	16
1490	17	30	52	39	42	46
1491	17	30	52	40	12	15
1492	17	30	52	40	42	45
1493	17	30	52	43	8	16
1494	17	30	52	43	38	46
1495	17	30	52	44	8	15
1496	17	30	52	44	38	45
1497	17	30	55	36	15	16
1498	17	30	55	36	45	46
1499	17	30	55	40	15	12
1500	17	30	55	40	45	42
1501	17	30	55	43	8	16
1502	17	30	55	43	38	46
1503	17	30	55	47	8	12
1504	17	30	55	47	38	42
1505	17	30	56	36	16	15
1506	17	30	56	36	46	45
1507	17	30	56	39	16	12
1508	17	30	56	39	46	42
1509	17	30	56	44	8	15
1510	17	30	56	44	38	45
1511	17	30	56	47	8	12
1512	17	30	56	47	38	42
1513	17	31	52	38	12	16
1514	17	31	52	38	43	47
1515	17	31	52	40	12	14
1516	17	31	52	40	43	45
1517	17	31	52	42	8	16
1518	17	31	52	42	39	47
1519	17	31	52	44	8	14
1520	17	31	52	44	39	45
1521	17	31	54	36	14	16
1522	17	31	54	36	45	47
1523	17	31	54	40	14	12
1524	17	31	54	40	45	43
1525	17	31	54	42	8	16
1526	17	31	54	42	39	47
1527	17	31	54	46	8	12
1528	17	31	54	46	39	43
1529	17	31	56	36	16	14
1530	17	31	56	36	47	45
1531	17	31	56	38	16	12
1532	17	31	56	38	47	43
1533	17	31	56	44	8	14
1534	17	31	56	44	39	45
1535	17	31	56	46	8	12
1536	17	31	56	46	39	43

1537	17	32	52	38	12	15
1538	17	32	52	38	44	47
1539	17	32	52	39	12	14
1540	17	32	52	39	44	46
1541	17	32	52	42	8	15
1542	17	32	52	42	40	47
1543	17	32	52	43	8	14
1544	17	32	52	43	40	46
1545	17	32	54	36	14	15
1546	17	32	54	36	46	47
1547	17	32	54	39	14	12
1548	17	32	54	39	46	44
1549	17	32	54	42	8	15
1550	17	32	54	42	40	47
1551	17	32	54	45	8	12
1552	17	32	54	45	40	44
1553	17	32	55	36	15	14
1554	17	32	55	36	47	46
1555	17	32	55	38	15	12
1556	17	32	55	38	47	44
1557	17	32	55	43	8	14
1558	17	32	55	43	40	46
1559	17	32	55	45	8	12
1560	17	32	55	45	40	44
1561	17	52	30	15	38	40
1562	17	52	30	15	42	44
1563	17	52	30	16	38	39
1564	17	52	30	16	42	43
1565	17	52	30	45	8	40
1566	17	52	30	45	12	44
1567	17	52	30	46	8	39
1568	17	52	30	46	12	43
1569	17	52	31	14	39	40
1570	17	52	31	14	43	44
1571	17	52	31	16	39	38
1572	17	52	31	16	43	42
1573	17	52	31	45	8	40
1574	17	52	31	45	12	44
1575	17	52	31	47	8	38
1576	17	52	31	47	12	42
1577	17	52	32	14	40	39
1578	17	52	32	14	44	43
1579	17	52	32	15	40	38
1580	17	52	32	15	44	42
1581	17	52	32	46	8	39
1582	17	52	32	46	12	43
1583	17	52	32	47	8	38
1584	17	52	32	47	12	42
1585	17	54	28	15	36	40
1586	17	54	28	15	42	46

1587	17	54	28	16	36	39
1588	17	54	28	16	42	45
1589	17	54	28	43	8	40
1590	17	54	28	43	14	46
1591	17	54	28	44	8	39
1592	17	54	28	44	14	45
1593	17	54	31	12	39	40
1594	17	54	31	12	45	46
1595	17	54	31	16	39	36
1596	17	54	31	16	45	42
1597	17	54	31	43	8	40
1598	17	54	31	43	14	46
1599	17	54	31	47	8	36
1600	17	54	31	47	14	42
1601	17	54	32	12	40	39
1602	17	54	32	12	46	45
1603	17	54	32	15	40	36
1604	17	54	32	15	46	42
1605	17	54	32	44	8	39
1606	17	54	32	44	14	45
1607	17	54	32	47	8	36
1608	17	54	32	47	14	42
1609	17	55	28	14	36	40
1610	17	55	28	14	43	47
1611	17	55	28	16	36	38
1612	17	55	28	16	43	45
1613	17	55	28	42	8	40
1614	17	55	28	42	15	47
1615	17	55	28	44	8	38
1616	17	55	28	44	15	45
1617	17	55	30	12	38	40
1618	17	55	30	12	45	47
1619	17	55	30	16	38	36
1620	17	55	30	16	45	43
1621	17	55	30	42	8	40
1622	17	55	30	42	15	47
1623	17	55	30	46	8	36
1624	17	55	30	46	15	43
1625	17	55	32	12	40	38
1626	17	55	32	12	47	45
1627	17	55	32	14	40	36
1628	17	55	32	14	47	43
1629	17	55	32	44	8	38
1630	17	55	32	44	15	45
1631	17	55	32	46	8	36
1632	17	55	32	46	15	43
1633	17	56	28	14	36	39
1634	17	56	28	14	44	47
1635	17	56	28	15	36	38
1636	17	56	28	15	44	46

1637	17	56	28	42	8	39
1638	17	56	28	42	16	47
1639	17	56	28	43	8	38
1640	17	56	28	43	16	46
1641	17	56	30	12	38	39
1642	17	56	30	12	46	47
1643	17	56	30	15	38	36
1644	17	56	30	15	46	44
1645	17	56	30	42	8	39
1646	17	56	30	42	16	47
1647	17	56	30	45	8	36
1648	17	56	30	45	16	44
1649	17	56	31	12	39	38
1650	17	56	31	12	47	46
1651	17	56	31	14	39	36
1652	17	56	31	14	47	44
1653	17	56	31	43	8	38
1654	17	56	31	43	16	46
1655	17	56	31	45	8	36
1656	17	56	31	45	16	44
1657	17	58	24	15	36	44
1658	17	58	24	15	38	46
1659	17	58	24	16	36	43
1660	17	58	24	16	38	45
1661	17	58	24	39	12	44
1662	17	58	24	39	14	46
1663	17	58	24	40	12	43
1664	17	58	24	40	14	45
1665	17	58	31	8	43	44
1666	17	58	31	8	45	46
1667	17	58	31	16	43	36
1668	17	58	31	16	45	38
1669	17	58	31	39	12	44
1670	17	58	31	39	14	46
1671	17	58	31	47	12	36
1672	17	58	31	47	14	38
1673	17	58	32	8	44	43
1674	17	58	32	8	46	45
1675	17	58	32	15	44	36
1676	17	58	32	15	46	38
1677	17	58	32	40	12	43
1678	17	58	32	40	14	45
1679	17	58	32	47	12	36
1680	17	58	32	47	14	38
1681	17	59	24	14	36	44
1682	17	59	24	14	39	47
1683	17	59	24	16	36	42
1684	17	59	24	16	39	45
1685	17	59	24	38	12	44
1686	17	59	24	38	15	47

1687	17	59	24	40	12	42
1688	17	59	24	40	15	45
1689	17	59	30	8	42	44
1690	17	59	30	8	45	47
1691	17	59	30	16	42	36
1692	17	59	30	16	45	39
1693	17	59	30	38	12	44
1694	17	59	30	38	15	47
1695	17	59	30	46	12	36
1696	17	59	30	46	15	39
1697	17	59	32	8	44	42
1698	17	59	32	8	47	45
1699	17	59	32	14	44	36
1700	17	59	32	14	47	39
1701	17	59	32	40	12	42
1702	17	59	32	40	15	45
1703	17	59	32	46	12	36
1704	17	59	32	46	15	39
1705	17	60	24	14	36	43
1706	17	60	24	14	40	47
1707	17	60	24	15	36	42
1708	17	60	24	15	40	46
1709	17	60	24	38	12	43
1710	17	60	24	38	16	47
1711	17	60	24	39	12	42
1712	17	60	24	39	16	46
1713	17	60	30	8	42	43
1714	17	60	30	8	46	47
1715	17	60	30	15	42	36
1716	17	60	30	15	46	40
1717	17	60	30	38	12	43
1718	17	60	30	38	16	47
1719	17	60	30	45	12	36
1720	17	60	30	45	16	40
1721	17	60	31	8	43	42
1722	17	60	31	8	47	46
1723	17	60	31	14	43	36
1724	17	60	31	14	47	40
1725	17	60	31	39	12	42
1726	17	60	31	39	16	46
1727	17	60	31	45	12	36
1728	17	60	31	45	16	40
1729	17	61	24	12	38	46
1730	17	61	24	12	39	47
1731	17	61	24	16	38	42
1732	17	61	24	16	39	43
1733	17	61	24	36	14	46
1734	17	61	24	36	15	47
1735	17	61	24	40	14	42
1736	17	61	24	40	15	43

1737	17	61	28	8	42	46
1738	17	61	28	8	43	47
1739	17	61	28	16	42	38
1740	17	61	28	16	43	39
1741	17	61	28	36	14	46
1742	17	61	28	36	15	47
1743	17	61	28	44	14	38
1744	17	61	28	44	15	39
1745	17	61	32	8	46	42
1746	17	61	32	8	47	43
1747	17	61	32	12	46	38
1748	17	61	32	12	47	39
1749	17	61	32	40	14	42
1750	17	61	32	40	15	43
1751	17	61	32	44	14	38
1752	17	61	32	44	15	39
1753	17	62	24	12	38	45
1754	17	62	24	12	40	47
1755	17	62	24	15	38	42
1756	17	62	24	15	40	44
1757	17	62	24	36	14	45
1758	17	62	24	36	16	47
1759	17	62	24	39	14	42
1760	17	62	24	39	16	44
1761	17	62	28	8	42	45
1762	17	62	28	8	44	47
1763	17	62	28	15	42	38
1764	17	62	28	15	44	40
1765	17	62	28	36	14	45
1766	17	62	28	36	16	47
1767	17	62	28	43	14	38
1768	17	62	28	43	16	40
1769	17	62	31	8	45	42
1770	17	62	31	8	47	44
1771	17	62	31	12	45	38
1772	17	62	31	12	47	40
1773	17	62	31	39	14	42
1774	17	62	31	39	16	44
1775	17	62	31	43	14	38
1776	17	62	31	43	16	40
1777	17	63	24	12	39	45
1778	17	63	24	12	40	46
1779	17	63	24	14	39	43
1780	17	63	24	14	40	44
1781	17	63	24	36	15	45
1782	17	63	24	36	16	46
1783	17	63	24	38	15	43
1784	17	63	24	38	16	44
1785	17	63	28	8	43	45
1786	17	63	28	8	44	46

1787	17	63	28	14	43	39
1788	17	63	28	14	44	40
1789	17	63	28	36	15	45
1790	17	63	28	36	16	46
1791	17	63	28	42	15	39
1792	17	63	28	42	16	40
1793	17	63	30	8	45	43
1794	17	63	30	8	46	44
1795	17	63	30	12	45	39
1796	17	63	30	12	46	40
1797	17	63	30	38	15	43
1798	17	63	30	38	16	44
1799	17	63	30	42	15	39
1800	17	63	30	42	16	40
1801	33	40	58	27	14	16
1802	33	40	58	27	22	24
1803	33	40	58	28	14	15
1804	33	40	58	28	22	23
1805	33	40	58	29	12	16
1806	33	40	58	29	20	24
1807	33	40	58	30	12	15
1808	33	40	58	30	20	23
1809	33	40	59	26	15	16
1810	33	40	59	26	23	24
1811	33	40	59	28	15	14
1812	33	40	59	28	23	22
1813	33	40	59	29	12	16
1814	33	40	59	29	20	24
1815	33	40	59	31	12	14
1816	33	40	59	31	20	22
1817	33	40	60	26	16	15
1818	33	40	60	26	24	23
1819	33	40	60	27	16	14
1820	33	40	60	27	24	22
1821	33	40	60	30	12	15
1822	33	40	60	30	20	23
1823	33	40	60	31	12	14
1824	33	40	60	31	20	22
1825	33	44	54	23	14	16
1826	33	44	54	23	26	28
1827	33	44	54	24	14	15
1828	33	44	54	24	26	27
1829	33	44	54	29	8	16
1830	33	44	54	29	20	28
1831	33	44	54	30	8	15
1832	33	44	54	30	20	27
1833	33	44	55	22	15	16
1834	33	44	55	22	27	28
1835	33	44	55	24	15	14
1836	33	44	55	24	27	26

1837	33	44	55	29	8	16
1838	33	44	55	29	20	28
1839	33	44	55	31	8	14
1840	33	44	55	31	20	26
1841	33	44	56	22	16	15
1842	33	44	56	22	28	27
1843	33	44	56	23	16	14
1844	33	44	56	23	28	26
1845	33	44	56	30	8	15
1846	33	44	56	30	20	27
1847	33	44	56	31	8	14
1848	33	44	56	31	20	26
1849	33	46	52	23	12	16
1850	33	46	52	23	26	30
1851	33	46	52	24	12	15
1852	33	46	52	24	26	29
1853	33	46	52	27	8	16
1854	33	46	52	27	22	30
1855	33	46	52	28	8	15
1856	33	46	52	28	22	29
1857	33	46	55	20	15	16
1858	33	46	55	20	29	30
1859	33	46	55	24	15	12
1860	33	46	55	24	29	26
1861	33	46	55	27	8	16
1862	33	46	55	27	22	30
1863	33	46	55	31	8	12
1864	33	46	55	31	22	26
1865	33	46	56	20	16	15
1866	33	46	56	20	30	29
1867	33	46	56	23	16	12
1868	33	46	56	23	30	26
1869	33	46	56	28	8	15
1870	33	46	56	28	22	29
1871	33	46	56	31	8	12
1872	33	46	56	31	22	26
1873	33	47	52	22	12	16
1874	33	47	52	22	27	31
1875	33	47	52	24	12	14
1876	33	47	52	24	27	29
1877	33	47	52	26	8	16
1878	33	47	52	26	23	31
1879	33	47	52	28	8	14
1880	33	47	52	28	23	29
1881	33	47	54	20	14	16
1882	33	47	54	20	29	31
1883	33	47	54	24	14	12
1884	33	47	54	24	29	27
1885	33	47	54	26	8	16
1886	33	47	54	26	23	31

1887	33	47	54	30	8	12
1888	33	47	54	30	23	27
1889	33	47	56	20	16	14
1890	33	47	56	20	31	29
1891	33	47	56	22	16	12
1892	33	47	56	22	31	27
1893	33	47	56	28	8	14
1894	33	47	56	28	23	29
1895	33	47	56	30	8	12
1896	33	47	56	30	23	27
1897	33	48	52	22	12	15
1898	33	48	52	22	28	31
1899	33	48	52	23	12	14
1900	33	48	52	23	28	30
1901	33	48	52	26	8	15
1902	33	48	52	26	24	31
1903	33	48	52	27	8	14
1904	33	48	52	27	24	30
1905	33	48	54	20	14	15
1906	33	48	54	20	30	31
1907	33	48	54	23	14	12
1908	33	48	54	23	30	28
1909	33	48	54	26	8	15
1910	33	48	54	26	24	31
1911	33	48	54	29	8	12
1912	33	48	54	29	24	28
1913	33	48	55	20	15	14
1914	33	48	55	20	31	30
1915	33	48	55	22	15	12
1916	33	48	55	22	31	28
1917	33	48	55	27	8	14
1918	33	48	55	27	24	30
1919	33	48	55	29	8	12
1920	33	48	55	29	24	28
1921	33	52	46	15	22	24
1922	33	52	46	15	26	28
1923	33	52	46	16	22	23
1924	33	52	46	16	26	27
1925	33	52	46	29	8	24
1926	33	52	46	29	12	28
1927	33	52	46	30	8	23
1928	33	52	46	30	12	27
1929	33	52	47	14	23	24
1930	33	52	47	14	27	28
1931	33	52	47	16	23	22
1932	33	52	47	16	27	26
1933	33	52	47	29	8	24
1934	33	52	47	29	12	28
1935	33	52	47	31	8	22
1936	33	52	47	31	12	26

1937	33	52	48	14	24	23
1938	33	52	48	14	28	27
1939	33	52	48	15	24	22
1940	33	52	48	15	28	26
1941	33	52	48	30	8	23
1942	33	52	48	30	12	27
1943	33	52	48	31	8	22
1944	33	52	48	31	12	26
1945	33	54	44	15	20	24
1946	33	54	44	15	26	30
1947	33	54	44	16	20	23
1948	33	54	44	16	26	29
1949	33	54	44	27	8	24
1950	33	54	44	27	14	30
1951	33	54	44	28	8	23
1952	33	54	44	28	14	29
1953	33	54	47	12	23	24
1954	33	54	47	12	29	30
1955	33	54	47	16	23	20
1956	33	54	47	16	29	26
1957	33	54	47	27	8	24
1958	33	54	47	27	14	30
1959	33	54	47	31	8	20
1960	33	54	47	31	14	26
1961	33	54	48	12	24	23
1962	33	54	48	12	30	29
1963	33	54	48	15	24	20
1964	33	54	48	15	30	26
1965	33	54	48	28	8	23
1966	33	54	48	28	14	29
1967	33	54	48	31	8	20
1968	33	54	48	31	14	26
1969	33	55	44	14	20	24
1970	33	55	44	14	27	31
1971	33	55	44	16	20	22
1972	33	55	44	16	27	29
1973	33	55	44	26	8	24
1974	33	55	44	26	15	31
1975	33	55	44	28	8	22
1976	33	55	44	28	15	29
1977	33	55	46	12	22	24
1978	33	55	46	12	29	31
1979	33	55	46	16	22	20
1980	33	55	46	16	29	27
1981	33	55	46	26	8	24
1982	33	55	46	26	15	31
1983	33	55	46	30	8	20
1984	33	55	46	30	15	27
1985	33	55	48	12	24	22
1986	33	55	48	12	31	29

1987	33	55	48	14	24	20
1988	33	55	48	14	31	27
1989	33	55	48	28	8	22
1990	33	55	48	28	15	29
1991	33	55	48	30	8	20
1992	33	55	48	30	15	27
1993	33	56	44	14	20	23
1994	33	56	44	14	28	31
1995	33	56	44	15	20	22
1996	33	56	44	15	28	30
1997	33	56	44	26	8	23
1998	33	56	44	26	16	31
1999	33	56	44	27	8	22
2000	33	56	44	27	16	30
2001	33	56	46	12	22	23
2002	33	56	46	12	30	31
2003	33	56	46	15	22	20
2004	33	56	46	15	30	28
2005	33	56	46	26	8	23
2006	33	56	46	26	16	31
2007	33	56	46	29	8	20
2008	33	56	46	29	16	28
2009	33	56	47	12	23	22
2010	33	56	47	12	31	30
2011	33	56	47	14	23	20
2012	33	56	47	14	31	28
2013	33	56	47	27	8	22
2014	33	56	47	27	16	30
2015	33	56	47	29	8	20
2016	33	56	47	29	16	28
2017	33	58	40	15	20	28
2018	33	58	40	15	22	30
2019	33	58	40	16	20	27
2020	33	58	40	16	22	29
2021	33	58	40	23	12	28
2022	33	58	40	23	14	30
2023	33	58	40	24	12	27
2024	33	58	40	24	14	29
2025	33	58	47	8	27	28
2026	33	58	47	8	29	30
2027	33	58	47	16	27	20
2028	33	58	47	16	29	22
2029	33	58	47	23	12	28
2030	33	58	47	23	14	30
2031	33	58	47	31	12	20
2032	33	58	47	31	14	22
2033	33	58	48	8	28	27
2034	33	58	48	8	30	29
2035	33	58	48	15	28	20
2036	33	58	48	15	30	22

2037	33	58	48	24	12	27
2038	33	58	48	24	14	29
2039	33	58	48	31	12	20
2040	33	58	48	31	14	22
2041	33	59	40	14	20	28
2042	33	59	40	14	23	31
2043	33	59	40	16	20	26
2044	33	59	40	16	23	29
2045	33	59	40	22	12	28
2046	33	59	40	22	15	31
2047	33	59	40	24	12	26
2048	33	59	40	24	15	29
2049	33	59	46	8	26	28
2050	33	59	46	8	29	31
2051	33	59	46	16	26	20
2052	33	59	46	16	29	23
2053	33	59	46	22	12	28
2054	33	59	46	22	15	31
2055	33	59	46	30	12	20
2056	33	59	46	30	15	23
2057	33	59	48	8	28	26
2058	33	59	48	8	31	29
2059	33	59	48	14	28	20
2060	33	59	48	14	31	23
2061	33	59	48	24	12	26
2062	33	59	48	24	15	29
2063	33	59	48	30	12	20
2064	33	59	48	30	15	23
2065	33	60	40	14	20	27
2066	33	60	40	14	24	31
2067	33	60	40	15	20	26
2068	33	60	40	15	24	30
2069	33	60	40	22	12	27
2070	33	60	40	22	16	31
2071	33	60	40	23	12	26
2072	33	60	40	23	16	30
2073	33	60	46	8	26	27
2074	33	60	46	8	30	31
2075	33	60	46	15	26	20
2076	33	60	46	15	30	24
2077	33	60	46	22	12	27
2078	33	60	46	22	16	31
2079	33	60	46	29	12	20
2080	33	60	46	29	16	24
2081	33	60	47	8	27	26
2082	33	60	47	8	31	30
2083	33	60	47	14	27	20
2084	33	60	47	14	31	24
2085	33	60	47	23	12	26
2086	33	60	47	23	16	30

2087	33	60	47	29	12	20
2088	33	60	47	29	16	24
2089	33	61	40	12	22	30
2090	33	61	40	12	23	31
2091	33	61	40	16	22	26
2092	33	61	40	16	23	27
2093	33	61	40	20	14	30
2094	33	61	40	20	15	31
2095	33	61	40	24	14	26
2096	33	61	40	24	15	27
2097	33	61	44	8	26	30
2098	33	61	44	8	27	31
2099	33	61	44	16	26	22
2100	33	61	44	16	27	23
2101	33	61	44	20	14	30
2102	33	61	44	20	15	31
2103	33	61	44	28	14	22
2104	33	61	44	28	15	23
2105	33	61	48	8	30	26
2106	33	61	48	8	31	27
2107	33	61	48	12	30	22
2108	33	61	48	12	31	23
2109	33	61	48	24	14	26
2110	33	61	48	24	15	27
2111	33	61	48	28	14	22
2112	33	61	48	28	15	23
2113	33	62	40	12	22	29
2114	33	62	40	12	24	31
2115	33	62	40	15	22	26
2116	33	62	40	15	24	28
2117	33	62	40	20	14	29
2118	33	62	40	20	16	31
2119	33	62	40	23	14	26
2120	33	62	40	23	16	28
2121	33	62	44	8	26	29
2122	33	62	44	8	28	31
2123	33	62	44	15	26	22
2124	33	62	44	15	28	24
2125	33	62	44	20	14	29
2126	33	62	44	20	16	31
2127	33	62	44	27	14	22
2128	33	62	44	27	16	24
2129	33	62	47	8	29	26
2130	33	62	47	8	31	28
2131	33	62	47	12	29	22
2132	33	62	47	12	31	24
2133	33	62	47	23	14	26
2134	33	62	47	23	16	28
2135	33	62	47	27	14	22
2136	33	62	47	27	16	24

2137	33	63	40	12	23	29
2138	33	63	40	12	24	30
2139	33	63	40	14	23	27
2140	33	63	40	14	24	28
2141	33	63	40	20	15	29
2142	33	63	40	20	16	30
2143	33	63	40	22	15	27
2144	33	63	40	22	16	28
2145	33	63	44	8	27	29
2146	33	63	44	8	28	30
2147	33	63	44	14	27	23
2148	33	63	44	14	28	24
2149	33	63	44	20	15	29
2150	33	63	44	20	16	30
2151	33	63	44	26	15	23
2152	33	63	44	26	16	24
2153	33	63	46	8	29	27
2154	33	63	46	8	30	28
2155	33	63	46	12	29	23
2156	33	63	46	12	30	24
2157	33	63	46	22	15	27
2158	33	63	46	22	16	28
2159	33	63	46	26	15	23
2160	33	63	46	26	16	24

Табл. 4.11.6

Таким образом, в итоге, три схемы расстановки симметричных чисел, с учётом возможности перемещения числа 1 в внутренние ячейки, путём тождественного преобразования (перестановкой наружного и соседнего слоёв по трём координатам), дадут 11520 (2880+2160+2160+2160+2160) вариантов магических кубов из группы Кубы4гр1

4.12 Сочетание $X_1=1$, $X_{23}=64$ не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{13}=X_{23}+X_{27}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{23} и X_{27}) Табл. 4.7.1:

$X_{23}+X_{27}=(-X_1-X_4-X_{22}+130)+(2X_1+X_4+X_{13}+X_{22}-130)=X_1+X_{13}$;

Сочетание $X_1=1$, $X_{24}=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_4=X_{21}+X_{24}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{21} и X_{24}) Табл. 4.7.1:

$X_{21}+X_{24}=(-3X_1-X_2-X_5-X_6-X_{17}-X_{18}-3X_{22}+390)+(4X_1+X_2+X_4+X_5+X_6+X_{17}+X_{18}+3X_{22}-390)=X_1+X_4$;

Сочетания $X_1=1$, $X_{26}=64$ и $X_1=1$, $X_{27}=64$ также не дадут ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_4=X_{26}+X_{27}$, которое следует из выражений для зависимых переменных (X_{26} и X_{27}) Табл. 4.7.1:
г$X_{26}+X_{27}=(-X_1-X_{13}-X_{22}+130)+(2X_1+X_4+X_{13}+X_{22}-130)=X_1+X_4$.

4.13 Для сочетания $X_1=1$, $X_{28}=64$ программа найдёт 1440 вариантов магических кубов.

Но этот массив также не однороден и в нём можно выделить две группы.

Первой (720 вариантов) будет группа магических кубов с следующей схемой расстановки симметричных чисел:

$X_1+X_{28}=X_2+X_{27}=X_3+X_{26}=X_4+X_{25}=65;$
$X_5+X_{33}=X_6+X_{34}=X_7+X_{35}=X_8+X_{36}=65;$
$X_9+X_{45}=X_{10}+X_{46}=X_{11}+X_{47}=X_{12}+X_{48}=65;$
$X_{13}+X_{24}=X_{14}+X_{23}=X_{15}+X_{22}=X_{16}+X_{21}=65;$
$X_{17}+X_{53}=X_{18}+X_{54}=X_{19}+X_{55}=X_{20}+X_{56}=65;$
$X_{29}+X_{57}=X_{30}+X_{58}=X_{31}+X_{59}=X_{32}+X_{60}=65;$
$X_{37}+X_{64}=X_{38}+X_{63}=X_{39}+X_{62}=X_{40}+X_{61}=65;$
$X_{41}+X_{52}=X_{42}+X_{51}=X_{43}+X_{50}=X_{44}+X_{49}=65.$

Табл. 4.13.1

Сказать, что здесь имеется существенная симметрия нельзя, но определённый порядок в расстановке симметричных чисел явно присутствует.

Воспользовавшись особенностью расстановки симметричных чисел можно дополнительно исключить четыре независимые переменные.

Тогда оставшиеся числа куба (при $X_1=1$, $X_{28}=64$) можно будет выразить через пять независимых чисел куба (X_2, X_5, X_{13}, X_{22}, X_{64}) следующим образом (Табл. 4.13.2):

$X_1=1;$
$X_3=X_{13}+X_{22}-64;$
$X_4=-X_2-X_{13}-X_{22}+193;$
$X_6=X_2-X_5+X_{64};$
$X_7=-X_5-X_{13}-X_{22}-X_{64}+194;$
$X_8=-X_2+X_5+X_{13}+X_{22}-64;$
$X_9=-X_5-X_{13}+129;$
$X_{10}=-X_2+X_5+X_{13}-X_{64}+1;$
$X_{11}=X_5+X_{22}+X_{64}-65;$
$X_{12}=X_2-X_5-X_{22}+65;$
$X_{14}=-X_2-X_{13}+129;$
$X_{15}=-X_{22}+65;$

$X_{16}=X_2+X_{22}-64;$
$X_{17}=-X_2+X_5-X_{22}-X_{64}+129;$
$X_{18}=-X_5-X_{22}+129;$
$X_{19}=X_2-X_5-X_{13}+65;$
$X_{20}=X_5+X_{13}+2X_{22}+X_{64}-193;$
$X_{21}=-X_2-X_{22}+129;$
$X_{23}=X_2+X_{13}-64;$
$X_{24}=-X_{13}+65;$
$X_{25}=X_2+X_{13}+X_{22}-128;$
$X_{26}=-X_{13}-X_{22}+129;$
$X_{27}=-X_2+65;$
$X_{28}=64;$
$X_{29}=X_2-X_5-X_{13}+X_{22}+X_{64};$
$X_{30}=X_5+X_{13}+X_{22}-128;$
$X_{31}=-X_2+X_5+64;$
$X_{32}=-X_5-2X_{22}-X_{64}+194;$
$X_{33}=-X_5+65;$
$X_{34}=-X_2+X_5-X_{64}+65;$
$X_{35}=X_5+X_{13}+X_{22}+X_{64}-129;$
$X_{36}=X_2-X_5-X_{13}-X_{22}+129;$
$X_{37}=-X_{64}+65;$
$X_{38}=-X_2-2X_{22}-X_{64}+194;$
$X_{39}=-X_{13}+X_{22}+X_{64};$
$X_{40}=X_2+X_{13}+X_{22}+X_{64}-129;$
$X_{41}=-X_{13}+X_{64}+64;$
$X_{42}=X_2+X_{13}+2X_{22}+X_{64}-193;$
$X_{43}=-X_{22}-X_{64}+129;$
$X_{44}=-X_2-X_{22}-X_{64}+130;$
$X_{45}=X_5+X_{13}-64;$
$X_{46}=X_2-X_5-X_{13}+X_{64}+64;$
$X_{47}=-X_5-X_{22}-X_{64}+130;$
$X_{48}=-X_2+X_5+X_{22};$
$X_{49}=X_2+X_{22}+X_{64}-65;$
$X_{50}=X_{22}+X_{64}-64;$
$X_{51}=-X_2-X_{13}-2X_{22}-X_{64}+258;$
$X_{52}=X_{13}-X_{64}+1;$
$X_{53}=X_2-X_5+X_{22}+X_{64}-64;$
$X_{54}=X_5+X_{22}-64;$
$X_{55}=-X_2+X_5+X_{13};$
$X_{56}=-X_5-X_{13}-2X_{22}-X_{64}+258;$
$X_{57}=-X_2+X_5+X_{13}-X_{22}-X_{64}+65;$

$X_{58}=-X_5-X_{13}-X_{22}+193;$
$X_{59}=X_2-X_5+1;$
$X_{60}=X_5+2X_{22}+X_{64}-129;$
$X_{61}=-X_2-X_{13}-X_{22}-X_{64}+194;$
$X_{62}=X_{13}-X_{22}-X_{64}+65;$
$X_{63}=X_2+2X_{22}+X_{64}-129;$

Табл. 4.13.2

В Табл. 4.13.3 приведены значения независимых переменных (а значения остальных чисел определяются в соответствии с Табл. 4.13.2 при $X_1=1$, $X_{28}=64$).

№ п/п	X_{64}	X_{13}	X_{22}	X_5	X_2
1	4	32	62	39	47
2	4	32	62	39	55
3	4	32	62	43	47
4	4	32	62	43	59
5	4	32	62	51	55
6	4	32	62	51	59
7	4	32	63	38	46
8	4	32	63	38	54
9	4	32	63	42	46
10	4	32	63	42	58
11	4	32	63	50	54
12	4	32	63	50	58
13	4	48	62	23	31
14	4	48	62	23	55
15	4	48	62	27	31
16	4	48	62	27	59
17	4	48	62	51	55
18	4	48	62	51	59
19	4	48	63	22	30
20	4	48	63	22	54
21	4	48	63	26	30
22	4	48	63	26	58
23	4	48	63	50	54
24	4	48	63	50	58
25	4	56	62	15	31
26	4	56	62	15	47
27	4	56	62	27	31
28	4	56	62	27	59
29	4	56	62	43	47
30	4	56	62	43	59
31	4	56	63	14	30
32	4	56	63	14	46
33	4	56	63	26	30

34	4	56	63	26	58
35	4	56	63	42	46
36	4	56	63	42	58
37	4	60	62	15	31
38	4	60	62	15	47
39	4	60	62	23	31
40	4	60	62	23	55
41	4	60	62	39	47
42	4	60	62	39	55
43	4	60	63	14	30
44	4	60	63	14	46
45	4	60	63	22	30
46	4	60	63	22	54
47	4	60	63	38	46
48	4	60	63	38	54
49	6	32	60	39	47
50	6	32	60	39	55
51	6	32	60	45	47
52	6	32	60	45	61
53	6	32	60	53	55
54	6	32	60	53	61
55	6	32	63	36	44
56	6	32	63	36	52
57	6	32	63	42	44
58	6	32	63	42	58
59	6	32	63	50	52
60	6	32	63	50	58
61	6	48	60	23	31
62	6	48	60	23	55
63	6	48	60	29	31
64	6	48	60	29	61
65	6	48	60	53	55
66	6	48	60	53	61
67	6	48	63	20	28
68	6	48	63	20	52
69	6	48	63	26	28
70	6	48	63	26	58
71	6	48	63	50	52
72	6	48	63	50	58
73	6	56	60	15	31
74	6	56	60	15	47
75	6	56	60	29	31
76	6	56	60	29	61
77	6	56	60	45	47
78	6	56	60	45	61
79	6	56	63	12	28
80	6	56	63	12	44
81	6	56	63	26	28
82	6	56	63	26	58
83	6	56	63	42	44

84	6	56	63	42	58
85	6	62	60	15	31
86	6	62	60	15	47
87	6	62	60	23	31
88	6	62	60	23	55
89	6	62	60	39	47
90	6	62	60	39	55
91	6	62	63	12	28
92	6	62	63	12	44
93	6	62	63	20	28
94	6	62	63	20	52
95	6	62	63	36	44
96	6	62	63	36	52
97	7	32	60	38	46
98	7	32	60	38	54
99	7	32	60	45	46
100	7	32	60	45	61
101	7	32	60	53	54
102	7	32	60	53	61
103	7	32	62	36	44
104	7	32	62	36	52
105	7	32	62	43	44
106	7	32	62	43	59
107	7	32	62	51	52
108	7	32	62	51	59
109	7	48	60	22	30
110	7	48	60	22	54
111	7	48	60	29	30
112	7	48	60	29	61
113	7	48	60	53	54
114	7	48	60	53	61
115	7	48	62	20	28
116	7	48	62	20	52
117	7	48	62	27	28
118	7	48	62	27	59
119	7	48	62	51	52
120	7	48	62	51	59
121	7	56	60	14	30
122	7	56	60	14	46
123	7	56	60	29	30
124	7	56	60	29	61
125	7	56	60	45	46
126	7	56	60	45	61
127	7	56	62	12	28
128	7	56	62	12	44
129	7	56	62	27	28
130	7	56	62	27	59
131	7	56	62	43	44
132	7	56	62	43	59
133	7	63	60	14	30

134	7	63	60	14	46
135	7	63	60	22	30
136	7	63	60	22	54
137	7	63	60	38	46
138	7	63	60	38	54
139	7	63	62	12	28
140	7	63	62	12	44
141	7	63	62	20	28
142	7	63	62	20	52
143	7	63	62	36	44
144	7	63	62	36	52
145	10	32	56	43	47
146	10	32	56	43	59
147	10	32	56	45	47
148	10	32	56	45	61
149	10	32	56	57	59
150	10	32	56	57	61
151	10	32	63	36	40
152	10	32	63	36	52
153	10	32	63	38	40
154	10	32	63	38	54
155	10	32	63	50	52
156	10	32	63	50	54
157	10	48	56	27	31
158	10	48	56	27	59
159	10	48	56	29	31
160	10	48	56	29	61
161	10	48	56	57	59
162	10	48	56	57	61
163	10	48	63	20	24
164	10	48	63	20	52
165	10	48	63	22	24
166	10	48	63	22	54
167	10	48	63	50	52
168	10	48	63	50	54
169	10	60	56	15	31
170	10	60	56	15	47
171	10	60	56	29	31
172	10	60	56	29	61
173	10	60	56	45	47
174	10	60	56	45	61
175	10	60	63	8	24
176	10	60	63	8	40
177	10	60	63	22	24
178	10	60	63	22	54
179	10	60	63	38	40
180	10	60	63	38	54
181	10	62	56	15	31
182	10	62	56	15	47
183	10	62	56	27	31

184	10	62	56	27	59
185	10	62	56	43	47
186	10	62	56	43	59
187	10	62	63	8	24
188	10	62	63	8	40
189	10	62	63	20	24
190	10	62	63	20	52
191	10	62	63	36	40
192	10	62	63	36	52
193	11	32	56	42	46
194	11	32	56	42	58
195	11	32	56	45	46
196	11	32	56	45	61
197	11	32	56	57	58
198	11	32	56	57	61
199	11	32	62	36	40
200	11	32	62	36	52
201	11	32	62	39	40
202	11	32	62	39	55
203	11	32	62	51	52
204	11	32	62	51	55
205	11	48	56	26	30
206	11	48	56	26	58
207	11	48	56	29	30
208	11	48	56	29	61
209	11	48	56	57	58
210	11	48	56	57	61
211	11	48	62	20	24
212	11	48	62	20	52
213	11	48	62	23	24
214	11	48	62	23	55
215	11	48	62	51	52
216	11	48	62	51	55
217	11	60	56	14	30
218	11	60	56	14	46
219	11	60	56	29	30
220	11	60	56	29	61
221	11	60	56	45	46
222	11	60	56	45	61
223	11	60	62	8	24
224	11	60	62	8	40
225	11	60	62	23	24
226	11	60	62	23	55
227	11	60	62	39	40
228	11	60	62	39	55
229	11	63	56	14	30
230	11	63	56	14	46
231	11	63	56	26	30
232	11	63	56	26	58
233	11	63	56	42	46

234	11	63	56	42	58
235	11	63	62	8	24
236	11	63	62	8	40
237	11	63	62	20	24
238	11	63	62	20	52
239	11	63	62	36	40
240	11	63	62	36	52
241	13	32	56	42	44
242	13	32	56	42	58
243	13	32	56	43	44
244	13	32	56	43	59
245	13	32	56	57	58
246	13	32	56	57	59
247	13	32	60	38	40
248	13	32	60	38	54
249	13	32	60	39	40
250	13	32	60	39	55
251	13	32	60	53	54
252	13	32	60	53	55
253	13	48	56	26	28
254	13	48	56	26	58
255	13	48	56	27	28
256	13	48	56	27	59
257	13	48	56	57	58
258	13	48	56	57	59
259	13	48	60	22	24
260	13	48	60	22	54
261	13	48	60	23	24
262	13	48	60	23	55
263	13	48	60	53	54
264	13	48	60	53	55
265	13	62	56	12	28
266	13	62	56	12	44
267	13	62	56	27	28
268	13	62	56	27	59
269	13	62	56	43	44
270	13	62	56	43	59
271	13	62	60	8	24
272	13	62	60	8	40
273	13	62	60	23	24
274	13	62	60	23	55
275	13	62	60	39	40
276	13	62	60	39	55
277	13	63	56	12	28
278	13	63	56	12	44
279	13	63	56	26	28
280	13	63	56	26	58
281	13	63	56	42	44
282	13	63	56	42	58
283	13	63	60	8	24

284	13	63	60	8	40
285	13	63	60	22	24
286	13	63	60	22	54
287	13	63	60	38	40
288	13	63	60	38	54
289	18	32	48	51	55
290	18	32	48	51	59
291	18	32	48	53	55
292	18	32	48	53	61
293	18	32	48	57	59
294	18	32	48	57	61
295	18	32	63	36	40
296	18	32	63	36	44
297	18	32	63	38	40
298	18	32	63	38	46
299	18	32	63	42	44
300	18	32	63	42	46
301	18	56	48	27	31
302	18	56	48	27	59
303	18	56	48	29	31
304	18	56	48	29	61
305	18	56	48	57	59
306	18	56	48	57	61
307	18	56	63	12	16
308	18	56	63	12	44
309	18	56	63	14	16
310	18	56	63	14	46
311	18	56	63	42	44
312	18	56	63	42	46
313	18	60	48	23	31
314	18	60	48	23	55
315	18	60	48	29	31
316	18	60	48	29	61
317	18	60	48	53	55
318	18	60	48	53	61
319	18	60	63	8	16
320	18	60	63	8	40
321	18	60	63	14	16
322	18	60	63	14	46
323	18	60	63	38	40
324	18	60	63	38	46
325	18	62	48	23	31
326	18	62	48	23	55
327	18	62	48	27	31
328	18	62	48	27	59
329	18	62	48	51	55
330	18	62	48	51	59
331	18	62	63	8	16
332	18	62	63	8	40
333	18	62	63	12	16

334	18	62	63	12	44
335	18	62	63	36	40
336	18	62	63	36	44
337	19	32	48	50	54
338	19	32	48	50	58
339	19	32	48	53	54
340	19	32	48	53	61
341	19	32	48	57	58
342	19	32	48	57	61
343	19	32	62	36	40
344	19	32	62	36	44
345	19	32	62	39	40
346	19	32	62	39	47
347	19	32	62	43	44
348	19	32	62	43	47
349	19	56	48	26	30
350	19	56	48	26	58
351	19	56	48	29	30
352	19	56	48	29	61
353	19	56	48	57	58
354	19	56	48	57	61
355	19	56	62	12	16
356	19	56	62	12	44
357	19	56	62	15	16
358	19	56	62	15	47
359	19	56	62	43	44
360	19	56	62	43	47
361	19	60	48	22	30
362	19	60	48	22	54
363	19	60	48	29	30
364	19	60	48	29	61
365	19	60	48	53	54
366	19	60	48	53	61
367	19	60	62	8	16
368	19	60	62	8	40
369	19	60	62	15	16
370	19	60	62	15	47
371	19	60	62	39	40
372	19	60	62	39	47
373	19	63	48	22	30
374	19	63	48	22	54
375	19	63	48	26	30
376	19	63	48	26	58
377	19	63	48	50	54
378	19	63	48	50	58
379	19	63	62	8	16
380	19	63	62	8	40
381	19	63	62	12	16
382	19	63	62	12	44
383	19	63	62	36	40

384	19	63	62	36	44
385	21	32	48	50	52
386	21	32	48	50	58
387	21	32	48	51	52
388	21	32	48	51	59
389	21	32	48	57	58
390	21	32	48	57	59
391	21	32	60	38	40
392	21	32	60	38	46
393	21	32	60	39	40
394	21	32	60	39	47
395	21	32	60	45	46
396	21	32	60	45	47
397	21	56	48	26	28
398	21	56	48	26	58
399	21	56	48	27	28
400	21	56	48	27	59
401	21	56	48	57	58
402	21	56	48	57	59
403	21	56	60	14	16
404	21	56	60	14	46
405	21	56	60	15	16
406	21	56	60	15	47
407	21	56	60	45	46
408	21	56	60	45	47
409	21	62	48	20	28
410	21	62	48	20	52
411	21	62	48	27	28
412	21	62	48	27	59
413	21	62	48	51	52
414	21	62	48	51	59
415	21	62	60	8	16
416	21	62	60	8	40
417	21	62	60	15	16
418	21	62	60	15	47
419	21	62	60	39	40
420	21	62	60	39	47
421	21	63	48	20	28
422	21	63	48	20	52
423	21	63	48	26	28
424	21	63	48	26	58
425	21	63	48	50	52
426	21	63	48	50	58
427	21	63	60	8	16
428	21	63	60	8	40
429	21	63	60	14	16
430	21	63	60	14	46
431	21	63	60	38	40
432	21	63	60	38	46
433	25	32	48	50	52

434	25	32	48	50	54
435	25	32	48	51	52
436	25	32	48	51	55
437	25	32	48	53	54
438	25	32	48	53	55
439	25	32	56	42	44
440	25	32	56	42	46
441	25	32	56	43	44
442	25	32	56	43	47
443	25	32	56	45	46
444	25	32	56	45	47
445	25	60	48	22	24
446	25	60	48	22	54
447	25	60	48	23	24
448	25	60	48	23	55
449	25	60	48	53	54
450	25	60	48	53	55
451	25	60	56	14	16
452	25	60	56	14	46
453	25	60	56	15	16
454	25	60	56	15	47
455	25	60	56	45	46
456	25	60	56	45	47
457	25	62	48	20	24
458	25	62	48	20	52
459	25	62	48	23	24
460	25	62	48	23	55
461	25	62	48	51	52
462	25	62	48	51	55
463	25	62	56	12	16
464	25	62	56	12	44
465	25	62	56	15	16
466	25	62	56	15	47
467	25	62	56	43	44
468	25	62	56	43	47
469	25	63	48	20	24
470	25	63	48	20	52
471	25	63	48	22	24
472	25	63	48	22	54
473	25	63	48	50	52
474	25	63	48	50	54
475	25	63	56	12	16
476	25	63	56	12	44
477	25	63	56	14	16
478	25	63	56	14	46
479	25	63	56	42	44
480	25	63	56	42	46
481	34	48	32	51	55
482	34	48	32	51	59
483	34	48	32	53	55

484	34	48	32	53	61
485	34	48	32	57	59
486	34	48	32	57	61
487	34	48	63	20	24
488	34	48	63	20	28
489	34	48	63	22	24
490	34	48	63	22	30
491	34	48	63	26	28
492	34	48	63	26	30
493	34	56	32	43	47
494	34	56	32	43	59
495	34	56	32	45	47
496	34	56	32	45	61
497	34	56	32	57	59
498	34	56	32	57	61
499	34	56	63	12	16
500	34	56	63	12	28
501	34	56	63	14	16
502	34	56	63	14	30
503	34	56	63	26	28
504	34	56	63	26	30
505	34	60	32	39	47
506	34	60	32	39	55
507	34	60	32	45	47
508	34	60	32	45	61
509	34	60	32	53	55
510	34	60	32	53	61
511	34	60	63	8	16
512	34	60	63	8	24
513	34	60	63	14	16
514	34	60	63	14	30
515	34	60	63	22	24
516	34	60	63	22	30
517	34	62	32	39	47
518	34	62	32	39	55
519	34	62	32	43	47
520	34	62	32	43	59
521	34	62	32	51	55
522	34	62	32	51	59
523	34	62	63	8	16
524	34	62	63	8	24
525	34	62	63	12	16
526	34	62	63	12	28
527	34	62	63	20	24
528	34	62	63	20	28
529	35	48	32	50	54
530	35	48	32	50	58
531	35	48	32	53	54
532	35	48	32	53	61
533	35	48	32	57	58

534	35	48	32	57	61
535	35	48	62	20	24
536	35	48	62	20	28
537	35	48	62	23	24
538	35	48	62	23	31
539	35	48	62	27	28
540	35	48	62	27	31
541	35	56	32	42	46
542	35	56	32	42	58
543	35	56	32	45	46
544	35	56	32	45	61
545	35	56	32	57	58
546	35	56	32	57	61
547	35	56	62	12	16
548	35	56	62	12	28
549	35	56	62	15	16
550	35	56	62	15	31
551	35	56	62	27	28
552	35	56	62	27	31
553	35	60	32	38	46
554	35	60	32	38	54
555	35	60	32	45	46
556	35	60	32	45	61
557	35	60	32	53	54
558	35	60	32	53	61
559	35	60	62	8	16
560	35	60	62	8	24
561	35	60	62	15	16
562	35	60	62	15	31
563	35	60	62	23	24
564	35	60	62	23	31
565	35	63	32	38	46
566	35	63	32	38	54
567	35	63	32	42	46
568	35	63	32	42	58
569	35	63	32	50	54
570	35	63	32	50	58
571	35	63	62	8	16
572	35	63	62	8	24
573	35	63	62	12	16
574	35	63	62	12	28
575	35	63	62	20	24
576	35	63	62	20	28
577	37	48	32	50	52
578	37	48	32	50	58
579	37	48	32	51	52
580	37	48	32	51	59
581	37	48	32	57	58
582	37	48	32	57	59
583	37	48	60	22	24

584	37	48	60	22	30
585	37	48	60	23	24
586	37	48	60	23	31
587	37	48	60	29	30
588	37	48	60	29	31
589	37	56	32	42	44
590	37	56	32	42	58
591	37	56	32	43	44
592	37	56	32	43	59
593	37	56	32	57	58
594	37	56	32	57	59
595	37	56	60	14	16
596	37	56	60	14	30
597	37	56	60	15	16
598	37	56	60	15	31
599	37	56	60	29	30
600	37	56	60	29	31
601	37	62	32	36	44
602	37	62	32	36	52
603	37	62	32	43	44
604	37	62	32	43	59
605	37	62	32	51	52
606	37	62	32	51	59
607	37	62	60	8	16
608	37	62	60	8	24
609	37	62	60	15	16
610	37	62	60	15	31
611	37	62	60	23	24
612	37	62	60	23	31
613	37	63	32	36	44
614	37	63	32	36	52
615	37	63	32	42	44
616	37	63	32	42	58
617	37	63	32	50	52
618	37	63	32	50	58
619	37	63	60	8	16
620	37	63	60	8	24
621	37	63	60	14	16
622	37	63	60	14	30
623	37	63	60	22	24
624	37	63	60	22	30
625	41	48	32	50	52
626	41	48	32	50	54
627	41	48	32	51	52
628	41	48	32	51	55
629	41	48	32	53	54
630	41	48	32	53	55
631	41	48	56	26	28
632	41	48	56	26	30
633	41	48	56	27	28

634	41	48	56	27	31
635	41	48	56	29	30
636	41	48	56	29	31
637	41	60	32	38	40
638	41	60	32	38	54
639	41	60	32	39	40
640	41	60	32	39	55
641	41	60	32	53	54
642	41	60	32	53	55
643	41	60	56	14	16
644	41	60	56	14	30
645	41	60	56	15	16
646	41	60	56	15	31
647	41	60	56	29	30
648	41	60	56	29	31
649	41	62	32	36	40
650	41	62	32	36	52
651	41	62	32	39	40
652	41	62	32	39	55
653	41	62	32	51	52
654	41	62	32	51	55
655	41	62	56	12	16
656	41	62	56	12	28
657	41	62	56	15	16
658	41	62	56	15	31
659	41	62	56	27	28
660	41	62	56	27	31
661	41	63	32	36	40
662	41	63	32	36	52
663	41	63	32	38	40
664	41	63	32	38	54
665	41	63	32	50	52
666	41	63	32	50	54
667	41	63	56	12	16
668	41	63	56	12	28
669	41	63	56	14	16
670	41	63	56	14	30
671	41	63	56	26	28
672	41	63	56	26	30
673	49	56	32	42	44
674	49	56	32	42	46
675	49	56	32	43	44
676	49	56	32	43	47
677	49	56	32	45	46
678	49	56	32	45	47
679	49	56	48	26	28
680	49	56	48	26	30
681	49	56	48	27	28
682	49	56	48	27	31
683	49	56	48	29	30

684	49	56	48	29	31
685	49	60	32	38	40
686	49	60	32	38	46
687	49	60	32	39	40
688	49	60	32	39	47
689	49	60	32	45	46
690	49	60	32	45	47
691	49	60	48	22	24
692	49	60	48	22	30
693	49	60	48	23	24
694	49	60	48	23	31
695	49	60	48	29	30
696	49	60	48	29	31
697	49	62	32	36	40
698	49	62	32	36	44
699	49	62	32	39	40
700	49	62	32	39	47
701	49	62	32	43	44
702	49	62	32	43	47
703	49	62	48	20	24
704	49	62	48	20	28
705	49	62	48	23	24
706	49	62	48	23	31
707	49	62	48	27	28
708	49	62	48	27	31
709	49	63	32	36	40
710	49	63	32	36	44
711	49	63	32	38	40
712	49	63	32	38	46
713	49	63	32	42	44
714	49	63	32	42	46
715	49	63	48	20	24
716	49	63	48	20	28
717	49	63	48	22	24
718	49	63	48	22	30
719	49	63	48	26	28
720	49	63	48	26	30

Табл. 4.13.3

Второй (720 вариантов) будет группа магических кубов с следующей схемой расстановки симметричных чисел:

$X_1+X_{28}=X_2+X_{39}=X_3+X_{38}=X_4+X_{25}=65;$
$X_5+X_{33}=X_6+X_{30}=X_7+X_{31}=X_8+X_{36}=65;$
$X_9+X_{45}=X_{10}+X_{18}=X_{11}+X_{19}=X_{12}+X_{48}=65;$
$X_{13}+X_{24}=X_{14}+X_{43}=X_{15}+X_{42}=X_{16}+X_{21}=65;$
$X_{17}+X_{53}=X_{20}+X_{56}=X_{22}+X_{51}=X_{23}+X_{50}=65;$

$X_{26}+X_{63}=X_{27}+X_{62}=X_{29}+X_{57}=X_{32}+X_{60}=65;$
$X_{34}+X_{58}=X_{35}+X_{59}=X_{37}+X_{64}=X_{40}+X_{61}=65;$
$X_{41}+X_{52}=X_{44}+X_{49}=X_{46}+X_{54}=X_{47}+X_{55}=65.$

Табл. 4.13.4

Здесь симметрия тоже не примечательная, но явно присутствует.

Воспользовавшись особенностью расстановки симметричных чисел можно дополнительно исключить четыре независимые переменные.

Тогда оставшиеся числа куба (при $X_1=1$, $X_{28}=64$) можно будет выразить через пять независимых чисел куба (X_5, X_{13}, X_{18}, X_{22}, X_{64}) следующим образом (Табл. 4.13.5):

$X_1=1;$
$X_2=X_{13}-X_{22}-X_{64}+65;$
$X_3=X_5+X_{18}+2X_{22}-129;$
$X_4=-X_5-X_{13}-X_{18}-X_{22}+X_{64}+193;$
$X_6=-X_{13}+X_{18}+64;$
$X_7=-X_5-X_{22}-X_{64}+130;$
$X_8=X_{13}-X_{18}+X_{22}+X_{64}-64;$
$X_9=-X_5-X_{13}+129;$
$X_{10}=-X_{18}+65;$
$X_{11}=X_5+X_{13}+X_{22}+X_{64}-129;$
$X_{12}=X_{18}-X_{22}-X_{64}+65;$
$X_{14}=X_{22}+X_{64}-64;$
$X_{15}=-X_5-X_{13}-X_{18}-2X_{22}+258;$
$X_{16}=X_5+X_{18}+X_{22}-X_{64}-64;$
$X_{17}=-X_{18}-X_{22}+129;$
$X_{19}=-X_5-X_{13}-X_{22}-X_{64}+194;$
$X_{20}=X_5+X_{13}+2X_{22}+X_{64}-193;$
$X_{21}=-X_5-X_{18}-X_{22}+X_{64}+129;$
$X_{23}=X_5+X_{13}+X_{18}-X_{64}-64;$
$X_{24}=-X_{13}+65;$
$X_{25}=X_5+X_{13}+X_{18}+X_{22}-X_{64}-128;$
$X_{26}=-X_{13}-X_{22}+129;$
$X_{27}=-X_5-X_{18}+X_{64}+65;$
$X_{28}=64;$
$X_{29}=-X_{13}+X_{18}+X_{22};$
$X_{30}=X_{13}-X_{18}+1;$
$X_{31}=X_5+X_{22}+X_{64}-65;$
$X_{32}=-X_5-2X_{22}-X_{64}+194;$
$X_{33}=-X_5+65;$

$X_{34}=X_5+X_{22}-64;$
$X_{35}=X_{13}-X_{18}+X_{64};$
$X_{36}=-X_{13}+X_{18}-X_{22}-X_{64}+129;$
$X_{37}=-X_{64}+65;$
$X_{38}=-X_5-X_{18}-2X_{22}+194;$
$X_{39}=-X_{13}+X_{22}+X_{64};$
$X_{40}=X_5+X_{13}+X_{18}+X_{22}-129;$
$X_{41}=-X_{13}+X_{64}+64;$
$X_{42}=X_5+X_{13}+X_{18}+2X_{22}-193;$
$X_{43}=-X_{22}-X_{64}+129;$
$X_{44}=-X_5-X_{18}-X_{22}+130;$
$X_{45}=X_5+X_{13}-64;$
$X_{46}=-X_5-X_{13}-X_{22}+193;$
$X_{47}=X_{18}-X_{64}+1;$
$X_{48}=-X_{18}+X_{22}+X_{64};$
$X_{49}=X_5+X_{18}+X_{22}-65;$
$X_{50}=-X_5-X_{13}-X_{18}+X_{64}+129;$
$X_{51}=-X_{22}+65;$
$X_{52}=X_{13}-X_{64}+1;$
$X_{53}=X_{18}+X_{22}-64;$
$X_{54}=X_5+X_{13}+X_{22}-128;$
$X_{55}=-X_{18}+X_{64}+64;$
$X_{56}=-X_5-X_{13}-2X_{22}-X_{64}+258;$
$X_{57}=X_{13}-X_{18}-X_{22}+65;$
$X_{58}=-X_5-X_{22}+129;$
$X_{59}=-X_{13}+X_{18}-X_{64}+65;$
$X_{60}=X_5+2X_{22}+X_{64}-129;$
$X_{61}=-X_5-X_{13}-X_{18}-X_{22}+194;$
$X_{62}=X_5+X_{18}-X_{64};$
$X_{63}=X_{13}+X_{22}-64;$

Табл. 4.13.5

В Табл. 4.13.6 приведены значения независимых переменных (а значения остальных чисел определяются в соответствии с Табл. 4.13.5 при $X_1=1$, $X_{28}=64$).

№ п/п	X_{64}	X_{13}	X_{22}	X_5	X_{18}
1	4	32	62	39	12
2	4	32	62	39	20
3	4	32	62	43	8
4	4	32	62	43	20
5	4	32	62	51	8
6	4	32	62	51	12
7	4	32	63	38	12
8	4	32	63	38	20
9	4	32	63	42	8
10	4	32	63	42	20
11	4	32	63	50	8
12	4	32	63	50	12
13	4	48	62	23	12
14	4	48	62	23	36
15	4	48	62	27	8
16	4	48	62	27	36
17	4	48	62	51	8
18	4	48	62	51	12
19	4	48	63	22	12
20	4	48	63	22	36
21	4	48	63	26	8
22	4	48	63	26	36
23	4	48	63	50	8
24	4	48	63	50	12
25	4	56	62	15	20
26	4	56	62	15	36
27	4	56	62	27	8
28	4	56	62	27	36
29	4	56	62	43	8
30	4	56	62	43	20
31	4	56	63	14	20
32	4	56	63	14	36
33	4	56	63	26	8
34	4	56	63	26	36
35	4	56	63	42	8
36	4	56	63	42	20
37	4	60	62	15	20
38	4	60	62	15	36
39	4	60	62	23	12
40	4	60	62	23	36
41	4	60	62	39	12
42	4	60	62	39	20
43	4	60	63	14	20
44	4	60	63	14	36
45	4	60	63	22	12
46	4	60	63	22	36
47	4	60	63	38	12

48	4	60	63	38	20
49	6	32	60	39	14
50	6	32	60	39	22
51	6	32	60	45	8
52	6	32	60	45	22
53	6	32	60	53	8
54	6	32	60	53	14
55	6	32	63	36	14
56	6	32	63	36	22
57	6	32	63	42	8
58	6	32	63	42	22
59	6	32	63	50	8
60	6	32	63	50	14
61	6	48	60	23	14
62	6	48	60	23	38
63	6	48	60	29	8
64	6	48	60	29	38
65	6	48	60	53	8
66	6	48	60	53	14
67	6	48	63	20	14
68	6	48	63	20	38
69	6	48	63	26	8
70	6	48	63	26	38
71	6	48	63	50	8
72	6	48	63	50	14
73	6	56	60	15	22
74	6	56	60	15	38
75	6	56	60	29	8
76	6	56	60	29	38
77	6	56	60	45	8
78	6	56	60	45	22
79	6	56	63	12	22
80	6	56	63	12	38
81	6	56	63	26	8
82	6	56	63	26	38
83	6	56	63	42	8
84	6	56	63	42	22
85	6	62	60	15	22
86	6	62	60	15	38
87	6	62	60	23	14
88	6	62	60	23	38
89	6	62	60	39	14
90	6	62	60	39	22
91	6	62	63	12	22
92	6	62	63	12	38
93	6	62	63	20	14
94	6	62	63	20	38
95	6	62	63	36	14
96	6	62	63	36	22
97	7	32	60	38	15

98	7	32	60	38	23
99	7	32	60	45	8
100	7	32	60	45	23
101	7	32	60	53	8
102	7	32	60	53	15
103	7	32	62	36	15
104	7	32	62	36	23
105	7	32	62	43	8
106	7	32	62	43	23
107	7	32	62	51	8
108	7	32	62	51	15
109	7	48	60	22	15
110	7	48	60	22	39
111	7	48	60	29	8
112	7	48	60	29	39
113	7	48	60	53	8
114	7	48	60	53	15
115	7	48	62	20	15
116	7	48	62	20	39
117	7	48	62	27	8
118	7	48	62	27	39
119	7	48	62	51	8
120	7	48	62	51	15
121	7	56	60	14	23
122	7	56	60	14	39
123	7	56	60	29	8
124	7	56	60	29	39
125	7	56	60	45	8
126	7	56	60	45	23
127	7	56	62	12	23
128	7	56	62	12	39
129	7	56	62	27	8
130	7	56	62	27	39
131	7	56	62	43	8
132	7	56	62	43	23
133	7	63	60	14	23
134	7	63	60	14	39
135	7	63	60	22	15
136	7	63	60	22	39
137	7	63	60	38	15
138	7	63	60	38	23
139	7	63	62	12	23
140	7	63	62	12	39
141	7	63	62	20	15
142	7	63	62	20	39
143	7	63	62	36	15
144	7	63	62	36	23
145	10	32	56	43	14
146	10	32	56	43	26
147	10	32	56	45	12

148	10	32	56	45	26
149	10	32	56	57	12
150	10	32	56	57	14
151	10	32	63	36	14
152	10	32	63	36	26
153	10	32	63	38	12
154	10	32	63	38	26
155	10	32	63	50	12
156	10	32	63	50	14
157	10	48	56	27	14
158	10	48	56	27	42
159	10	48	56	29	12
160	10	48	56	29	42
161	10	48	56	57	12
162	10	48	56	57	14
163	10	48	63	20	14
164	10	48	63	20	42
165	10	48	63	22	12
166	10	48	63	22	42
167	10	48	63	50	12
168	10	48	63	50	14
169	10	60	56	15	26
170	10	60	56	15	42
171	10	60	56	29	12
172	10	60	56	29	42
173	10	60	56	45	12
174	10	60	56	45	26
175	10	60	63	8	26
176	10	60	63	8	42
177	10	60	63	22	12
178	10	60	63	22	42
179	10	60	63	38	12
180	10	60	63	38	26
181	10	62	56	15	26
182	10	62	56	15	42
183	10	62	56	27	14
184	10	62	56	27	42
185	10	62	56	43	14
186	10	62	56	43	26
187	10	62	63	8	26
188	10	62	63	8	42
189	10	62	63	20	14
190	10	62	63	20	42
191	10	62	63	36	14
192	10	62	63	36	26
193	11	32	56	42	15
194	11	32	56	42	27
195	11	32	56	45	12
196	11	32	56	45	27
197	11	32	56	57	12

198	11	32	56	57	15
199	11	32	62	36	15
200	11	32	62	36	27
201	11	32	62	39	12
202	11	32	62	39	27
203	11	32	62	51	12
204	11	32	62	51	15
205	11	48	56	26	15
206	11	48	56	26	43
207	11	48	56	29	12
208	11	48	56	29	43
209	11	48	56	57	12
210	11	48	56	57	15
211	11	48	62	20	15
212	11	48	62	20	43
213	11	48	62	23	12
214	11	48	62	23	43
215	11	48	62	51	12
216	11	48	62	51	15
217	11	60	56	14	27
218	11	60	56	14	43
219	11	60	56	29	12
220	11	60	56	29	43
221	11	60	56	45	12
222	11	60	56	45	27
223	11	60	62	8	27
224	11	60	62	8	43
225	11	60	62	23	12
226	11	60	62	23	43
227	11	60	62	39	12
228	11	60	62	39	27
229	11	63	56	14	27
230	11	63	56	14	43
231	11	63	56	26	15
232	11	63	56	26	43
233	11	63	56	42	15
234	11	63	56	42	27
235	11	63	62	8	27
236	11	63	62	8	43
237	11	63	62	20	15
238	11	63	62	20	43
239	11	63	62	36	15
240	11	63	62	36	27
241	13	32	56	42	15
242	13	32	56	42	29
243	13	32	56	43	14
244	13	32	56	43	29
245	13	32	56	57	14
246	13	32	56	57	15
247	13	32	60	38	15

248	13	32	60	38	29
249	13	32	60	39	14
250	13	32	60	39	29
251	13	32	60	53	14
252	13	32	60	53	15
253	13	48	56	26	15
254	13	48	56	26	45
255	13	48	56	27	14
256	13	48	56	27	45
257	13	48	56	57	14
258	13	48	56	57	15
259	13	48	60	22	15
260	13	48	60	22	45
261	13	48	60	23	14
262	13	48	60	23	45
263	13	48	60	53	14
264	13	48	60	53	15
265	13	62	56	12	29
266	13	62	56	12	45
267	13	62	56	27	14
268	13	62	56	27	45
269	13	62	56	43	14
270	13	62	56	43	29
271	13	62	60	8	29
272	13	62	60	8	45
273	13	62	60	23	14
274	13	62	60	23	45
275	13	62	60	39	14
276	13	62	60	39	29
277	13	63	56	12	29
278	13	63	56	12	45
279	13	63	56	26	15
280	13	63	56	26	45
281	13	63	56	42	15
282	13	63	56	42	29
283	13	63	60	8	29
284	13	63	60	8	45
285	13	63	60	22	15
286	13	63	60	22	45
287	13	63	60	38	15
288	13	63	60	38	29
289	18	32	48	51	22
290	18	32	48	51	26
291	18	32	48	53	20
292	18	32	48	53	26
293	18	32	48	57	20
294	18	32	48	57	22
295	18	32	63	36	22
296	18	32	63	36	26
297	18	32	63	38	20

298	18	32	63	38	26
299	18	32	63	42	20
300	18	32	63	42	22
301	18	56	48	27	22
302	18	56	48	27	50
303	18	56	48	29	20
304	18	56	48	29	50
305	18	56	48	57	20
306	18	56	48	57	22
307	18	56	63	12	22
308	18	56	63	12	50
309	18	56	63	14	20
310	18	56	63	14	50
311	18	56	63	42	20
312	18	56	63	42	22
313	18	60	48	23	26
314	18	60	48	23	50
315	18	60	48	29	20
316	18	60	48	29	50
317	18	60	48	53	20
318	18	60	48	53	26
319	18	60	63	8	26
320	18	60	63	8	50
321	18	60	63	14	20
322	18	60	63	14	50
323	18	60	63	38	20
324	18	60	63	38	26
325	18	62	48	23	26
326	18	62	48	23	50
327	18	62	48	27	22
328	18	62	48	27	50
329	18	62	48	51	22
330	18	62	48	51	26
331	18	62	63	8	26
332	18	62	63	8	50
333	18	62	63	12	22
334	18	62	63	12	50
335	18	62	63	36	22
336	18	62	63	36	26
337	19	32	48	50	23
338	19	32	48	50	27
339	19	32	48	53	20
340	19	32	48	53	27
341	19	32	48	57	20
342	19	32	48	57	23
343	19	32	62	36	23
344	19	32	62	36	27
345	19	32	62	39	20
346	19	32	62	39	27
347	19	32	62	43	20

348	19	32	62	43	23
349	19	56	48	26	23
350	19	56	48	26	51
351	19	56	48	29	20
352	19	56	48	29	51
353	19	56	48	57	20
354	19	56	48	57	23
355	19	56	62	12	23
356	19	56	62	12	51
357	19	56	62	15	20
358	19	56	62	15	51
359	19	56	62	43	20
360	19	56	62	43	23
361	19	60	48	22	27
362	19	60	48	22	51
363	19	60	48	29	20
364	19	60	48	29	51
365	19	60	48	53	20
366	19	60	48	53	27
367	19	60	62	8	27
368	19	60	62	8	51
369	19	60	62	15	20
370	19	60	62	15	51
371	19	60	62	39	20
372	19	60	62	39	27
373	19	63	48	22	27
374	19	63	48	22	51
375	19	63	48	26	23
376	19	63	48	26	51
377	19	63	48	50	23
378	19	63	48	50	27
379	19	63	62	8	27
380	19	63	62	8	51
381	19	63	62	12	23
382	19	63	62	12	51
383	19	63	62	36	23
384	19	63	62	36	27
385	21	32	48	50	23
386	21	32	48	50	29
387	21	32	48	51	22
388	21	32	48	51	29
389	21	32	48	57	22
390	21	32	48	57	23
391	21	32	60	38	23
392	21	32	60	38	29
393	21	32	60	39	22
394	21	32	60	39	29
395	21	32	60	45	22
396	21	32	60	45	23
397	21	56	48	26	23

398	21	56	48	26	53
399	21	56	48	27	22
400	21	56	48	27	53
401	21	56	48	57	22
402	21	56	48	57	23
403	21	56	60	14	23
404	21	56	60	14	53
405	21	56	60	15	22
406	21	56	60	15	53
407	21	56	60	45	22
408	21	56	60	45	23
409	21	62	48	20	29
410	21	62	48	20	53
411	21	62	48	27	22
412	21	62	48	27	53
413	21	62	48	51	22
414	21	62	48	51	29
415	21	62	60	8	29
416	21	62	60	8	53
417	21	62	60	15	22
418	21	62	60	15	53
419	21	62	60	39	22
420	21	62	60	39	29
421	21	63	48	20	29
422	21	63	48	20	53
423	21	63	48	26	23
424	21	63	48	26	53
425	21	63	48	50	23
426	21	63	48	50	29
427	21	63	60	8	29
428	21	63	60	8	53
429	21	63	60	14	23
430	21	63	60	14	53
431	21	63	60	38	23
432	21	63	60	38	29
433	25	32	48	50	27
434	25	32	48	50	29
435	25	32	48	51	26
436	25	32	48	51	29
437	25	32	48	53	26
438	25	32	48	53	27
439	25	32	56	42	27
440	25	32	56	42	29
441	25	32	56	43	26
442	25	32	56	43	29
443	25	32	56	45	26
444	25	32	56	45	27
445	25	60	48	22	27
446	25	60	48	22	57
447	25	60	48	23	26

448	25	60	48	23	57
449	25	60	48	53	26
450	25	60	48	53	27
451	25	60	56	14	27
452	25	60	56	14	57
453	25	60	56	15	26
454	25	60	56	15	57
455	25	60	56	45	26
456	25	60	56	45	27
457	25	62	48	20	29
458	25	62	48	20	57
459	25	62	48	23	26
460	25	62	48	23	57
461	25	62	48	51	26
462	25	62	48	51	29
463	25	62	56	12	29
464	25	62	56	12	57
465	25	62	56	15	26
466	25	62	56	15	57
467	25	62	56	43	26
468	25	62	56	43	29
469	25	63	48	20	29
470	25	63	48	20	57
471	25	63	48	22	27
472	25	63	48	22	57
473	25	63	48	50	27
474	25	63	48	50	29
475	25	63	56	12	29
476	25	63	56	12	57
477	25	63	56	14	27
478	25	63	56	14	57
479	25	63	56	42	27
480	25	63	56	42	29
481	34	48	32	51	38
482	34	48	32	51	42
483	34	48	32	53	36
484	34	48	32	53	42
485	34	48	32	57	36
486	34	48	32	57	38
487	34	48	63	20	38
488	34	48	63	20	42
489	34	48	63	22	36
490	34	48	63	22	42
491	34	48	63	26	36
492	34	48	63	26	38
493	34	56	32	43	38
494	34	56	32	43	50
495	34	56	32	45	36
496	34	56	32	45	50
497	34	56	32	57	36

498	34	56	32	57	38
499	34	56	63	12	38
500	34	56	63	12	50
501	34	56	63	14	36
502	34	56	63	14	50
503	34	56	63	26	36
504	34	56	63	26	38
505	34	60	32	39	42
506	34	60	32	39	50
507	34	60	32	45	36
508	34	60	32	45	50
509	34	60	32	53	36
510	34	60	32	53	42
511	34	60	63	8	42
512	34	60	63	8	50
513	34	60	63	14	36
514	34	60	63	14	50
515	34	60	63	22	36
516	34	60	63	22	42
517	34	62	32	39	42
518	34	62	32	39	50
519	34	62	32	43	38
520	34	62	32	43	50
521	34	62	32	51	38
522	34	62	32	51	42
523	34	62	63	8	42
524	34	62	63	8	50
525	34	62	63	12	38
526	34	62	63	12	50
527	34	62	63	20	38
528	34	62	63	20	42
529	35	48	32	50	39
530	35	48	32	50	43
531	35	48	32	53	36
532	35	48	32	53	43
533	35	48	32	57	36
534	35	48	32	57	39
535	35	48	62	20	39
536	35	48	62	20	43
537	35	48	62	23	36
538	35	48	62	23	43
539	35	48	62	27	36
540	35	48	62	27	39
541	35	56	32	42	39
542	35	56	32	42	51
543	35	56	32	45	36
544	35	56	32	45	51
545	35	56	32	57	36
546	35	56	32	57	39
547	35	56	62	12	39

548	35	56	62	12	51
549	35	56	62	15	36
550	35	56	62	15	51
551	35	56	62	27	36
552	35	56	62	27	39
553	35	60	32	38	43
554	35	60	32	38	51
555	35	60	32	45	36
556	35	60	32	45	51
557	35	60	32	53	36
558	35	60	32	53	43
559	35	60	62	8	43
560	35	60	62	8	51
561	35	60	62	15	36
562	35	60	62	15	51
563	35	60	62	23	36
564	35	60	62	23	43
565	35	63	32	38	43
566	35	63	32	38	51
567	35	63	32	42	39
568	35	63	32	42	51
569	35	63	32	50	39
570	35	63	32	50	43
571	35	63	62	8	43
572	35	63	62	8	51
573	35	63	62	12	39
574	35	63	62	12	51
575	35	63	62	20	39
576	35	63	62	20	43
577	37	48	32	50	39
578	37	48	32	50	45
579	37	48	32	51	38
580	37	48	32	51	45
581	37	48	32	57	38
582	37	48	32	57	39
583	37	48	60	22	39
584	37	48	60	22	45
585	37	48	60	23	38
586	37	48	60	23	45
587	37	48	60	29	38
588	37	48	60	29	39
589	37	56	32	42	39
590	37	56	32	42	53
591	37	56	32	43	38
592	37	56	32	43	53
593	37	56	32	57	38
594	37	56	32	57	39
595	37	56	60	14	39
596	37	56	60	14	53
597	37	56	60	15	38

598	37	56	60	15	53
599	37	56	60	29	38
600	37	56	60	29	39
601	37	62	32	36	45
602	37	62	32	36	53
603	37	62	32	43	38
604	37	62	32	43	53
605	37	62	32	51	38
606	37	62	32	51	45
607	37	62	60	8	45
608	37	62	60	8	53
609	37	62	60	15	38
610	37	62	60	15	53
611	37	62	60	23	38
612	37	62	60	23	45
613	37	63	32	36	45
614	37	63	32	36	53
615	37	63	32	42	39
616	37	63	32	42	53
617	37	63	32	50	39
618	37	63	32	50	45
619	37	63	60	8	45
620	37	63	60	8	53
621	37	63	60	14	39
622	37	63	60	14	53
623	37	63	60	22	39
624	37	63	60	22	45
625	41	48	32	50	43
626	41	48	32	50	45
627	41	48	32	51	42
628	41	48	32	51	45
629	41	48	32	53	42
630	41	48	32	53	43
631	41	48	56	26	43
632	41	48	56	26	45
633	41	48	56	27	42
634	41	48	56	27	45
635	41	48	56	29	42
636	41	48	56	29	43
637	41	60	32	38	43
638	41	60	32	38	57
639	41	60	32	39	42
640	41	60	32	39	57
641	41	60	32	53	42
642	41	60	32	53	43
643	41	60	56	14	43
644	41	60	56	14	57
645	41	60	56	15	42
646	41	60	56	15	57
647	41	60	56	29	42

648	41	60	56	29	43
649	41	62	32	36	45
650	41	62	32	36	57
651	41	62	32	39	42
652	41	62	32	39	57
653	41	62	32	51	42
654	41	62	32	51	45
655	41	62	56	12	45
656	41	62	56	12	57
657	41	62	56	15	42
658	41	62	56	15	57
659	41	62	56	27	42
660	41	62	56	27	45
661	41	63	32	36	45
662	41	63	32	36	57
663	41	63	32	38	43
664	41	63	32	38	57
665	41	63	32	50	43
666	41	63	32	50	45
667	41	63	56	12	45
668	41	63	56	12	57
669	41	63	56	14	43
670	41	63	56	14	57
671	41	63	56	26	43
672	41	63	56	26	45
673	49	56	32	42	51
674	49	56	32	42	53
675	49	56	32	43	50
676	49	56	32	43	53
677	49	56	32	45	50
678	49	56	32	45	51
679	49	56	48	26	51
680	49	56	48	26	53
681	49	56	48	27	50
682	49	56	48	27	53
683	49	56	48	29	50
684	49	56	48	29	51
685	49	60	32	38	51
686	49	60	32	38	57
687	49	60	32	39	50
688	49	60	32	39	57
689	49	60	32	45	50
690	49	60	32	45	51
691	49	60	48	22	51
692	49	60	48	22	57
693	49	60	48	23	50
694	49	60	48	23	57
695	49	60	48	29	50
696	49	60	48	29	51
697	49	62	32	36	53

698	49	62	32	36	57
699	49	62	32	39	50
700	49	62	32	39	57
701	49	62	32	43	50
702	49	62	32	43	53
703	49	62	48	20	53
704	49	62	48	20	57
705	49	62	48	23	50
706	49	62	48	23	57
707	49	62	48	27	50
708	49	62	48	27	53
709	49	63	32	36	53
710	49	63	32	36	57
711	49	63	32	38	51
712	49	63	32	38	57
713	49	63	32	42	51
714	49	63	32	42	53
715	49	63	48	20	53
716	49	63	48	20	57
717	49	63	48	22	51
718	49	63	48	22	57
719	49	63	48	26	51
720	49	63	48	26	53

Табл. 4.13.6

Таким образом, пять схем расстановки симметричных чисел, с учётом возможности перемещения числа 1 в внутренние ячейки, путём тождественного преобразования (перестановкой наружного и соседнего слоёв по трём координатам), дадут 14400 (11520+720+720+720+720) вариантов магических кубов из группы Кубы4гр1

4.14 Сочетание $X_1=1$, $X_{30}=64$ не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_{13}=X_{18}+X_{30}$, которое следует из выражения для зависимой переменной (X_{30}) Табл. 4.7.1:

$X_{18}+X_{30}=X_{18}+(X_1+X_{13}-X_{18};)=X_1+X_{13}$;

Сочетание $X_1=1$, $X_{31}=64$ даст только неварианты магических кубов, соответствующих сочетанию $X_1=1$, $X_{28}=64$ (как симметричные относительно плоскости симметрии (X_1, X_{49}, X_{16}, X_{64}).

Для сочетания $X_1=1$, $X_{32}=64$ программа не найдёт ни одного магического куба.

Сочетание $X_1=1$, $X_{39}=64$ также не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:

$X_1+X_4=X_{38}+X_{39}$, которое следует из выражений для зависимых переменных

(X_{38} и X_{39}) Табл. 4.7.1:
$X_{38}+X_{39}=(-X_1-X_{22}-X_{49}+130)+(2X_1+X_4+X_{22}+X_{49}-130)=X_1+X_4$;

4.15 Сочетание $X_1=1$, $X_{40}=64$ тождественно равноценно сочетанию $X_1=1$, $X_{28}=64$ (при помощи перестановки двух внутренних фронтальных горизонтальных и профильных слоёв), поэтому даст две группы магических кубов с двумя соответствующими схемами расстановки симметричных чисел (см. п. 4.13).

Таким образом, семь схем расстановки симметричных чисел, с учётом возможности перемещения числа 1 в внутренние ячейки, путём тождественного преобразования (перестановкой наружного и соседнего слоёв по трём координатам), дадут 17280 (14400+720+720+720+720) вариантов магических кубов из группы Кубы4гр1.

4.16 Сочетание $X_1=1$, $X_{43}=64$ тождественно равноценно сочетанию $X_1=1$, $X_{22}=64$ (при помощи перестановки двух внутренних фронтальных горизонтальных и профильных слоёв), поэтому даст две группы магических кубов с двумя соответствующими схемами расстановки симметричных чисел (см. п. 4.11).

Таким образом, девять схем расстановки симметричных чисел, с учётом возможности перемещения числа 1 в внутренние ячейки, путём тождественного преобразования (перестановкой наружного и соседнего слоёв по трём координатам), дадут 25920 (17280+2160+2160+2160+2160) вариантов магических кубов из группы Кубы4гр1.

4.17 Сочетание $X_1=1$, $X_{44}=64$ не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:
$X_1+X_4=X_{41}+X_{44}$, которое следует из выражения для зависимых переменных (X_{41} и X_{44}) Табл. 4.7.1:
$X_{41}+X_{44}=(5X_1+X_2+2X_4+X_5+X_6+X_{13}+X_{17}+X_{18}+3X_{22}+X_{49}-520)+(-4X_1-X_2-X_4-X_5-X_6-X_{13}-X_{17}-X_{18}-3X_{22}-X_{49}+520)=X_1+X_4$;

Сочетание $X_1=1$, $X_{47}=64$ не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:
$X_1+X_{13}=X_{35}+X_{47}$, которое следует из выражения для зависимых переменных (X_{35} и X_{47}) Табл. 4.7.1:
$X_{35}+X_{47}=(2X_1+X_4+2X_{13}-X_{18}+X_{49}-130)+(-X_1-X_4-X_{13}+X_{18}-X_{49}+130)=X_1+X_{13}$;

Для сочетаний $X_1=1$ и $X_{48}=64$, $X_1=1$ и $X_{56}=64$, $X_1=1$ и $X_{60}=64$, программа не найдёт ни одного магического куба.

Сочетание $X_1=1$, $X_{64}=64$ не даст ни одного магического куба, так как невозможно выполнение установленного равенства:
$X_1+X_4=X_{61}+X_{64}$, которое следует из выражения для зависимых переменных (X_{61} и X_{64}) Табл. 4.7.1:
$X_{61}+X_{64}=(-X_1-X_{13}-X_{49}+130)+(2X_1+X_4+X_{13}+X_{49}-130)=X_1+X_4$;

4.18 Таким образом выяснилось, что для ограниченного в соответствии с п.4.7 массива магических кубов, существует всего девять схем расстановки симметричных чисел.

Одновременно выяснилось, что расположению числа 1 в ячейке A1, соответствует 12960 вариантов магических кубов.

Ещё 12960 вариантов магических кубов можно получить из них путём тождественного преобразования - одновременной перестановкой пар слоёв (крайнего и соседнего) по всем трём координатам, при этом число 1 переместится в ячейку F6, то есть количество магических кубов возрастёт до 25920 вариантов.

Кроме того, для каждой из девяти схем расстановки симметричных чисел, путём статического преобразования по типу Табл.3.44.1… Табл.3.44.8, от любого варианта с числом 1 в ячейке A1, можно получить вариант магического куба с числом 1 в ячейке B1 и с числом 1 в ячейке B2.

Можно также при расположении числа 1 в любой из ячеек получить магические кубы при вариантах размещения числа 64 в других ячейках, применив уже использованную методику (п.4.9…п.4.17).

Но это особого интереса не представляет (для меня) пытливый же читатель вполне вправе заняться этим процессом.

Дело в том, что новых схем расстановки симметричных чисел обнаружить не удастся (иначе статический переход к числу 1 в ячейке A1 привёл бы к дополнительной схеме расстановки симметричных чисел).

Заниматься этим с точки зрения нахождения суммарного количества вариантов рассматриваемой группы магических кубов тоже не имеет особого смысла, так как выполнение такого объёма работы ради этой цели вряд ли целесообразно. Тем более, что диапазон искомого количества вариантов уже понятен, он будет от 51840 (25920+12960+12960), до 77760 (25920+25920+25920 – что получиться в случае потери симметрии при размещении числа 1 в ячейках B1 и B2).

Да, конечно, здесь рассмотрена лишь часть из общего (не ограниченного в соответствии с п.4.7) массива магических кубов четвёртого порядка, но читатель может сам продолжить процесс исследования и найти ответы на интересующие его вопросы относительно всего массива магических кубов четвёртого порядка.

Мне же кажется более интересным перейти к рассмотрению методики получения магических числовых структур (квадратов и кубов) четвёртого порядка без применения компьютерных программ перебора и систем степенных уравнений, ограничившись только использованием систем линейных уравнений.

Но разве такая возможность существует?

Да, и это обусловлено уникальным свойством магических числовых структур четвёртого порядка, сформулированным ранее как «правило двух …» и возможностью получения дополнительных линейных уравнений при использовании метода одноимённых сочетаний при уровневых переходах.

Правда, при этом процесс становится более длительным и трудоёмким, и совсем перебора избежать не удастся, но зато он становится более простым и понятным.

4.19 В качестве примера рассмотрим методику получения некого магического квадрата четвёртого порядка.

Предварительно необходимо определиться, к какой схеме расстановки симметричных чисел он будет принадлежать и в какой ячейке будет находится число 1.

Пусть схема расстановки симметричных чисел соответствует Вар.4.19.1, а число 1 находится в ячейке А1.

А	Д	д	а
Ж	Б	б	ж
З	в	В	з
г	Е	е	Г

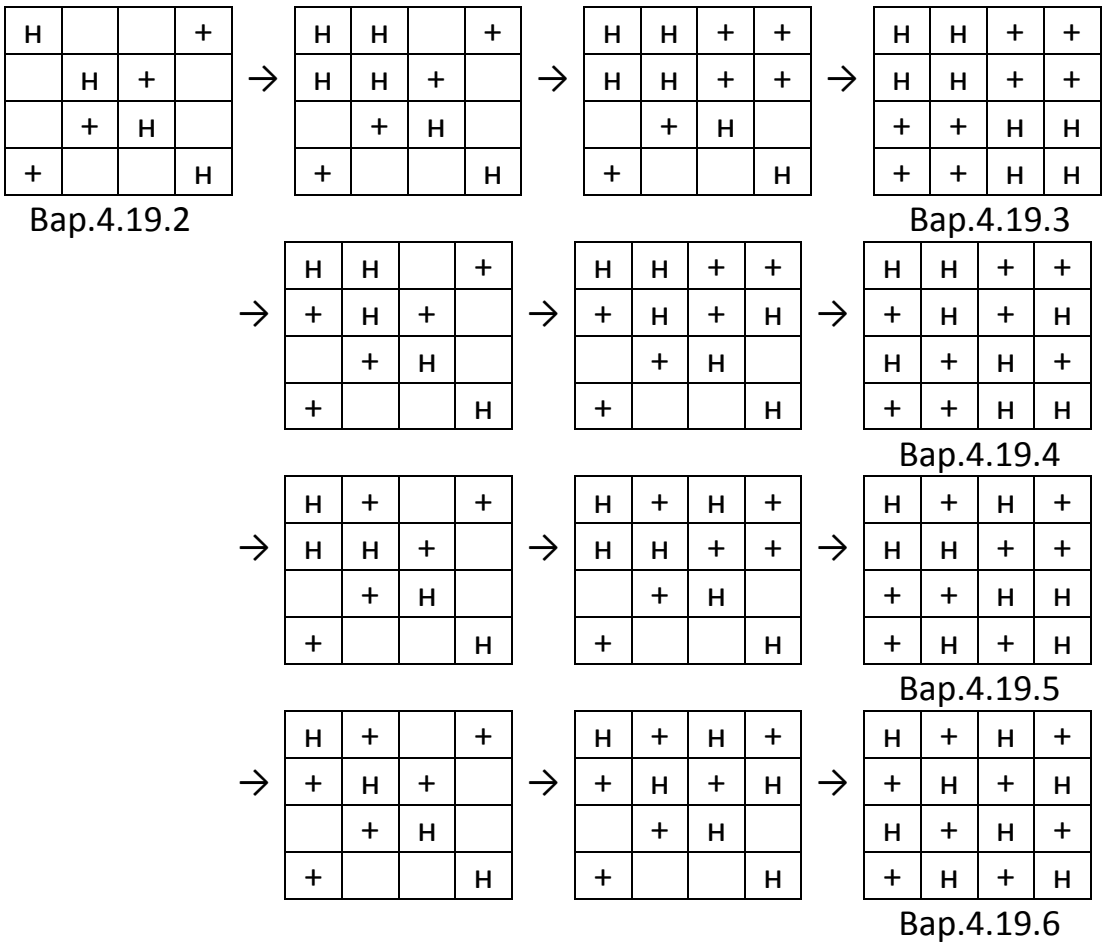
Вар.4.19.1

Тогда, воспользовавшись базовыми уравнениями, и с учётом принятых условий, выражения для чисел можно привести к виду, показанному в Табл.4.19.1:

1	X_2	$-X_2+17$	16
X_5	X_6	$-X_6+17$	$-X_5+17$
$-X_5-X_6-X_{11}+49$	$-X_{11}+17$	X_{11}	$X_5+X_6+X_{11}-32$
$X_6+X_{11}-16$	$-X_2-X_6+X_{11}+17$	$X_2+X_6-X_{11}$	$-X_6-X_{11}+33$

Табл.4.19.1

Далее определимся с расстановкой нечётных и чётных чисел, начав с размещения четырёх нечётных чисел в ячейках первой диагонали и комбинируя варианты их размещения в ячейках В1 и А2 (Вар.4.19.2 … Вар.4.19.6):



Выбрав для продолжения анализа первый вариант (Вар.4.19.3) и воспользовавшись дополнительным уравнением для суммы нечётных чисел:

$X_1+X_2+X_5+X_6+X_{11}+X_{12}+X_{15}+X_{16}=1+3+5+7+9+11+13+15=64$

выражения для чисел можно будет привести к виду, показанному в Табл.4.19.2:

1	X_2	$-X_2+17$	16
$-X_2-X_6+31$	X_6	$-X_6+17$	X_2+X_6-14
$X_2+X_{10}+1$	X_{10}	$-X_{10}+17$	$-X_2-X_{10}+16$
$X_6-X_{10}+1$	$-X_2-X_6-X_{10}+34$	$X_2+X_6+X_{10}-17$	$-X_6+X_{10}+16$

Табл.4.19.2

Далее для продолжения анализа придётся обратиться к соответствующему квадрату второго уровня.

С учётом выявленных соотношений, выражения для чисел в квадрате второго уровня можно привести к виду, показанному в Табл.4.19.3:

1	X_2	$-X_2+9$	8
$-X_2-X_6+17$	X_6	$-X_6+9$	X_2+X_6-8
X_2+X_{10}	X_{10}	$-X_{10}+9$	$-X_2-X_{10}+9$
X_6-X_{10}	$-X_2-X_6-X_{10}+18$	$X_2+X_6+X_{10}-9$	$-X_6+X_{10}+9$

Табл.4.19.3

В рассматриваемом случае варианты расстановки нечётных и чётных чисел будем определять, представляя чётные независимые переменные (X_2, X_6, X_{10}) в виде числа 0 (так как они не изменяют признак нечётности/чётности суммы), а нечётные – в виде числа 1 и отслеживая нечётность/чётность остальных чисел в соответствии с выражениями согласно Табл.4.19.3.

При этом варианты можно представить в виде размещения двух чисел 0 в четвёрке ячеек B1, B2, B3, B4 по примеру:
(X_2=0, X_6=0); (X_2=0, X_{10}=0); (X_2=0, X_{14}=0); (X_6=0, X_{10}=0); (X_6=0, X_{14}=0); (X_{10}=0, X_{14}=0).

Получим следующие варианты:

	0			→	1	0	9	8	→	1	0	1	0	→	н	+	н	+
	0				7	0	9	8		1	0	1	0		н	+	н	+
	1				1	1	8	8		1	1	0	0		н	н	+	+
	1				1	7	8	0		1	1	0	0		н	н	+	+

Вар.4.19.7 Вар.4.19.8

	0			→	1	0	9	8	→	1	0	1	0	→	н	+	н	+
	1				6	1	8	7		0	1	0	1		+	н	+	н
	0				0	0	9	9		0	0	1	1		+	+	н	н
	1				1	7	8	8		1	1	0	0		н	н	+	+

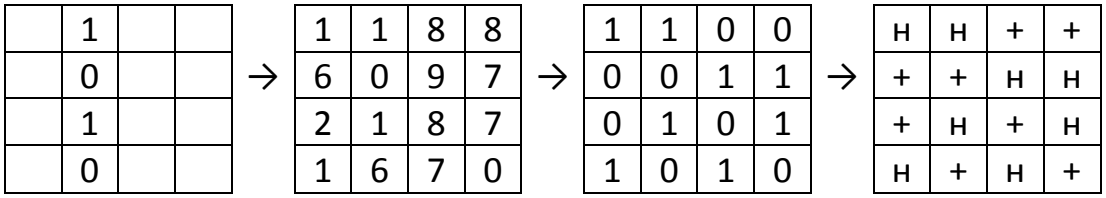
Вар.4.19.9 Вар.4.19.10

	0			→	1	0	9	8	→	1	0	1	0	→	н	+	н	+
	1				6	1	8	7		0	1	0	1		+	н	+	н
	1				1	1	8	8		1	1	0	0		н	н	+	+
	0				0	6	7	9		0	0	1	1		+	+	н	н

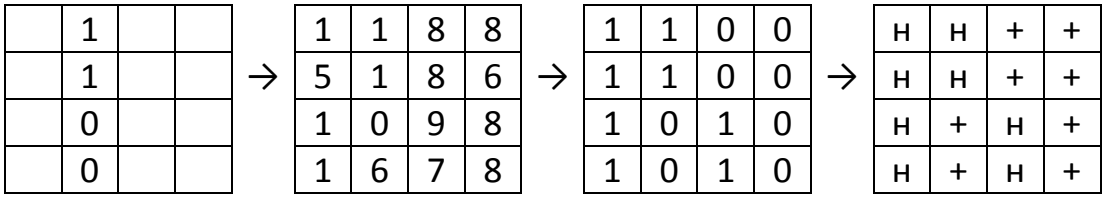
Вар.4.19.11 Вар.4.19.12

	1			→	1	1	8	8	→	1	1	0	0	→	н	н	+	+
	0				6	0	9	7		0	0	1	1		+	+	н	н
	0				1	0	9	8		1	0	1	0		н	+	н	+
	1				0	7	8	9		0	1	0	1		+	н	+	н

Вар.4.19.13 Вар.4.19.14



Вар.4.19.15 Вар.4.19.16

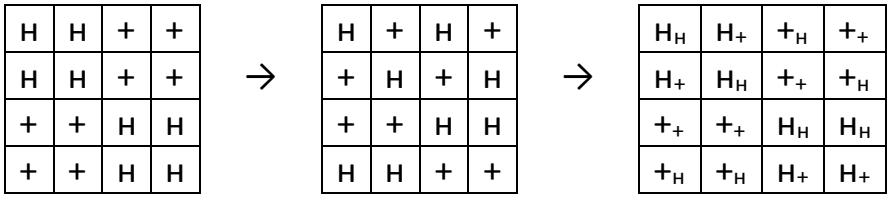


Вар.4.19.17 Вар.4.19.18

Можно сразу отметить что Вар.4.19.8 и Вар.4.19.18 непригодны для дальнейшего анализа, так в первом столбце содержат по четыре нечётных числа, что противоречит «правилу двух … ».

Остальные варианты расстановки чисел в квадрате второго уровня необходимо сопоставить с вариантом расстановки чисел в квадрате первого уровня Вар.4.19.3.

Для пары Вар.4.19.3 → Вар.4.19.10 получим:



Вар.4.19.3 Вар.4.19.10 Вар.4.19.19

Воспользовавшись дополнительными уравнениями для однотипных видов перехода:

$X_1+X_6+X_{11}+X_{12}=1+5+9+13=28$;

$X_2+X_5+X_{15}+X_{16}=3+7+11+15=36$,

получим выражения для чисел исходного МК согласно Табл.4.19.4:

1	1	16	16
$-2X_{10}+35$	$2X_{10}-5$	$-2X_{10}+22$	$2X_{10}-18$
$X_{10}+2$	X_{10}	$-X_{10}+17$	$-X_{10}+15$
$X_{10}-4$	$-3X_{10}+38$	$3X_{10}-21$	$-X_{10}+21$

Табл.4.19.4

Здесь присутствуют одинаковые числа, что противоречит требованиям к магическому квадрату.

Для пары Вар.4.19.3 → Вар.4.19.12 получим:

н	н	+	+
н	н	+	+
+	+	н	н
+	+	н	н

Вар.4.19.3 →

н	+	н	+
+	н	+	н
н	н	+	+
+	+	н	н

Вар.4.19.12 →

$н_н$	$н_+$	$+_н$	$+_+$
$н_+$	$н_н$	$+_+$	$+_н$
$+_н$	$+_н$	$н_+$	$н_+$
$+_+$	$+_+$	$н_н$	$н_н$

Вар.4.19.20

Воспользовавшись дополнительным уравнением для однотипного вида перехода:

$X_1+X_6+X_{15}+X_{16}=1+5+9+13=28$;

получим выражения для чисел исходного МК согласно Табл.4.19.5:

1	X_2	$-X_2+17$	16
$2X_{10}+3$	$-X_2-2X_{10}+28$	$X_2+2X_{10}-11$	$-2X_{10}+14$
$X_2+X_{10}+1$	X_{10}	$-X_{10}+17$	$-X_2-X_{10}+16$
$-X_2-3X_{10}+29$	$X_{10}+6$	$-X_{10}+11$	$X_2+3X_{10}-12$

Табл.4.19.5

Для дальнейшего анализа целесообразнее перейти к использованию числовых значений.

Так как для X_{15}, принадлежащего к типу перехода $н_н$, допустимы только значения 5, 9, 13 (1 – занято в ячейке A1), то рассмотрим варианты с каждым из этих значений.

Для $X_{15}=5$ ($X_{10}=6$) выражения для чисел примут вид согласно Табл.4.19.6:

1	X_2	$-X_2+17$	16
15	$-X_2+16$	X_2+1	2
X_2+7	6	11	$-X_2+10$
$-X_2+11$	12	5	X_2+6

Табл.4.19.6

Так как для X_2, принадлежащего к типу перехода $н_+$, допустимы только значения 3, 7 (11 – занято в ячейке C3, 15 – занято в ячейке A2), то их использование даст Вар.4.19.21 и Вар.4.19.22:

1	3	14	16
15	13	4	2
10	6	11	7
8	12	5	9

Вар.4.19.21

1	7	10	16
15	9	8	2
14	6	11	3
4	12	5	13

Вар.4.19.22

Полученные квадраты магические.

Таким образом удалось убедиться в пригодности рассмотренной методики для получения магических квадратов без использования систем степенных уравнений, а также сплошного компьютерного перебора всего набора чисел для МК.

Самое интересное заключается в том, что, получив единственный вариант для конкретной схемы расстановки симметричных чисел, можно будет получить все варианты МК для этой схемы расстановки чисел (кроме определённых нетипичных МК), а магические кубы, для соответствующей схемы расстановки симметричных чисел, можно будет получить вообще все, так как для них нет исключений в части справедливости «правила двух … » для магических сумм в диагональных ячейках.

Конечно, для получения всего массива магических квадратов, такая методика нерациональна, но для получения каких-либо вариантов она вполне допустима.

Однако, я оставляю это утверждение на выбор читателя.

На этом я собираюсь закончить анализ числовых структур четвёртого порядка (кто хочет, может продолжить и открыть ещё много чего интересного), ну а я перейду к исследованию числовых структур пятого порядка, они тоже скрывают массу магических загадок и тайн.

Глава 5. Магические квадраты пятого порядка.

5.1 МК пятого порядка (5х5), по сравнению с МК четвёртого порядка, исследованы не так подробно, рассмотрены только отдельные их группы, нет полного анализа, нет не то что детальных методик их получения, нет даже понятия (достоверного) об их приблизительном количестве. Тем интереснее разобраться со всеми тайнами МК этого класса.

5.2 Общий вид МК пятого порядка приведён в Табл. 5.2.1. Здесь под неизвестными X_1; X_2 …. X_{24}; X_{25} подразумеваются числа 1; 2; … 24; 25 расположенные так, что их сумма в каждой строке, в каждом столбце и каждой диагонали равна магической сумме.

	A	B	C	D	E
1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
3	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
4	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
5	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	X_{25}

Табл. 5.2.1

Символы в верхней строке (A, B, C, D, E) дают нумерацию столбцов МК, числа в левом столбце (1, 2, 3, 4, 5) дают нумерацию строк МК, а выражение типа B2 даёт нумерацию ячейки на пересечении столбца B и строки 2.

6.3 Магическую сумму можно найти путём деления суммы всех чисел на количество строк (столбцов):

$$\text{МС} = \frac{1+2+\ \dots\ +24+25}{5} = 65.$$

5.4 Если, использовав уравнения для МС (базовые уравнения для сумм чисел в пятёрках ячеек строк, столбцов и диагоналей), исключить максимально возможное количество неизвестных, выразив их через некоторые независимые переменные, то МК Табл. 5.2.1 можно преобразовать в МК Табл.5.4.1:

X_1	X_2	X_3	$-X_1-X_2-X_3-X_5+65$	X_5
$-X_7-X_8-X_9-X_{10}+65$	X_7	X_8	X_9	X_{10}
X_{11}	X_{12}	X_{13}	$-X_{11}-X_{12}-X_{13}-X_{15}+65$	X_{15}
X_{16}*	X_{17}*	$-X_3-X_8-X_{13}-X_{23}+65$	$-X_1-X_7-X_{13}-X_{25}+65$	$-X_5-X_{10}-X_{15}-X_{25}+65$
X_{21}*	X_{22}*	X_{23}	X_{24}*	X_{25}

Табл.5.4.1

X_{16}*=X_5+X_7+X_8+X_9+X_{10}+X_{25}+(X_3-X_{11}+3X_{13}+X_{15}+X_{23}-195)/2;
X_{17}*=X_1-X_9+X_{25}+(X_3+X_{11}+X_{13}+X_{15}+X_{23}-65)/2;
X_{21}*=-X_1-X_5-X_{25}+(-X_3-X_{11}-3X_{13}-X_{15}-X_{23}+195)/2;
X_{22}*=-X_1-X_2-X_7+X_9-X_{12}-X_{25}+(-X_3-X_{11}-X_{13}-X_{15}-X_{23}+195)/2;
X_{24}*=2X_1+X_2+X_3+X_5+X_7-X_9+X_{11}+X_{12}+2X_{13}+X_{15}+X_{25}-130;

Теперь понятно, почему с МК пятого порядка всё не так просто, у него же в выражениях для чисел задействовано четырнадцать независимых переменных, это на семь больше, чем для МК четвёртого порядка, что предполагает сотни миллионов вариантов (275305224 варианта если верить Ричарду Шрёппелю).

Невозможно также разглядеть и каких-либо нештатных магических сумм (в дополнение к базовым), а также одинаковых сумм в каких-либо наборах ячеек, есть, правда, требования по делимости некоторых сумм.

Так можно утверждать, что сумма (X_3-X_{11}+3X_{13}+X_{15}+X_{23} -195) должна быть чётной (как и аналогичные, так как наличие числа 2 в знаменателе соответствующих выражений требует делимости выражения числителя на 2 для отсутствия дробных чисел среди чисел квадрата), а также есть определённые суммы (связанные с 3X_{13}), которые должны быть кратны трём (для исключения дробности соответствующих неизвестных).

При таком количестве независимых переменных (14) поиску приемлемых вариантов не поможет использование системы степенных уравнений, так как решение соответствующей системы уравнений не под силу и компьютеру.

В определённой степени помогло бы разделение массива на группы по схемам расстановки симметричных чисел, но как найти эти схемы, да и их количество, похоже, весьма велико.

Остаётся компьютерный перебор сочетаний значений чисел в ячейках, но это трудный, сложный (с точки зрения разработки программ перебора) и длительный процесс (из-за необходимости анализа огромного количества возможных вариантов), но другого пути просто не видно.

Но и этот путь требует какой-то методики иначе в предполагаемы сотнях миллионов вариантов найти какие-либо закономерности просто нереально.

Чтобы получить хотя бы представление об МК пятого порядка целесообразно предварительно рассмотреть некоторые группы МК с самыми интересными схемами расстановки симметричных чисел.

5.5 В качестве одной из таких групп можно рассмотреть МК со схемой расстановкой симметричных чисел по периметру МК (согласно Вар.5.5.1):

А	Б	В	Г	Д
б	а	в	д	г
Е	е	13	Ж	ж
З	И	К	Л	М
и	з	к	м	л

Вар.5.5.1

Если использовать дополнительные уравнения для пар симметричных чисел, то выражения для переменных Табл.5.4.1 примут вид в соответствии с Табл.5.5.1:

X_1	X_2	X_3	$-X_1-X_2-X_3-X_5+65$	X_5
$-X_2+26$	$-X_1+26$	$-X_3+26$	$-X_5+26$	$X_1+X_2+X_3+X_5-39$
X_{11}	$-X_{11}+26$	13	X_{14}*	X_{15}*
X_{16}*	X_{17}*	$-X_{23}+26$	$-X_{25}+26$	X_{20}
X_{21}*	X_{22}*	X_{23}	$-X_{20}+26$	X_{25}

Табл.5.5.1

X_{14}*=$X_1+X_2+X_3+2X_5+X_{20}+X_{25}-78$;
X_{15}*=$-X_1-X_2-X_3-2X_5-X_{20}-X_{25}+104$;
X_{16}*=$13+(-X_1+X_2-X_{11}-X_{20}+X_{23}+X_{25}/2$;
X_{17}*=$(X_1-X_2+X_{11}-X_{20}+X_{23}+X_{25}/2$;
X_{21}*=$26+(-X_1+X_2-X_{11}+X_{20}-X_{23}-X_{25}/2$;
X_{22}*=$13+(X_1-X_2+X_{11}+X_{20}-X_{23}-X_{25}/2$;

Отсюда видно, что сумма ($X_1-X_2+X_{11}-X_{20}+X_{23}+X_{25}$) должна быть чётной.

Также можно заметить, что кроме стандартных тождественных преобразований с одновременной перестановкой симметричных строк и столбцов, аналогичный результат (преобразование МК) можно получить и путём одновременной перестановки крайних (смежных) строк или столбцов (без изменения схемы расстановки симметричных чисел).

Так тождественными преобразованиями будут перестановки первой и второй строк, или четвёртой и пятой строк, или первого и второго столбцов, или четвёртого и пятого столбцов. В справедливости этого утверждения можно убедиться проверкой соответствующих сумм после перестановок.

Воспользовавшись этим обстоятельством можно при помощи невариантных и тождественных преобразований переместить число 1 из ячеек B1, A2, B2, D1, E1, D2, E2, A4, B4, A5, B5, D4, E4, D5, E5 в ячейку A1, а также из ячеек C2, A3, B3, D3, E3, C4, C5 переместить число 1 в ячейку C1, то есть достаточно получить МК с числом 1 в ячейках A1 и C1, а уже от них получить МК с числом 1 в других ячейках.

Одновременно, учитывая симметрию МК относительно первой диагонали (A1-E5), для X_2 достаточно перебрать значения меньше 13, так как значения X_2 больше 13 будут соответствовать зеркальному отображению МК относительно первой диагонали.

Кроме того, учитывая сохранение свойств рассматриваемой группы МК при перестановке четвёртой и пятой строк, или четвёртого и пятого столбцов, а также при одновременной сумме этих перестановок (4 и 5 строк и 4 и 5 столбцов), достаточно представить только одну четвёртую часть МК (при $X_{25}<X_{19}$, $X_{24}+X_{25}<X_{19}+X_{20}$, $X_{20}+X_{25}<X_{19}+X_{24}$), а остальные три типа МК получить при помощи этих преобразований.

В Табл. 5.5.2 приведены значения независимых переменных для такой исходной группы магических квадратов, полученных компьютерным перебором (при $X_{25}<X_{19}$, $X_{24}+X_{25}<X_{19}+X_{20}$, $X_{20}+X_{25}<X_{19}+X_{24}$), а значения зависимых переменных должны определяться в соответствии с выражениями в Табл. 5.5.1.

№ п/п	X_1	X_{25}	X_2	X_{20}	X_5	X_{11}	X_{23}	X_3
1	1	2	3	17	22	14	15	21
2	1	2	4	10	23	19	14	20
3	1	2	4	12	21	17	18	20
4	1	2	4	12	23	10	21	19
5	1	2	4	14	21	20	17	23
6	1	2	4	15	23	18	12	20
7	1	2	4	16	19	12	15	23
8	1	2	4	16	19	14	21	23
9	1	2	4	16	23	15	12	18
10	1	2	4	16	23	19	14	20
11	1	2	4	17	23	12	20	16
12	1	2	4	18	20	12	21	23
13	1	2	4	18	20	14	15	23
14	1	2	4	18	23	12	21	17
15	1	2	4	18	23	14	15	17
16	1	2	5	10	22	9	15	19
17	1	2	5	10	22	15	9	23
18	1	2	5	11	20	19	14	22
19	1	2	5	11	20	19	18	22
20	1	2	5	11	22	9	16	18
21	1	2	5	11	22	16	9	23
22	1	2	5	11	23	7	18	22
23	1	2	5	11	23	19	10	22
24	1	2	5	12	22	19	15	17
25	1	2	5	16	22	11	23	17
26	1	2	5	17	22	14	11	19
27	1	2	5	17	23	15	16	14

28	1	2	5	17	23	15	20	14
29	1	2	5	17	23	19	16	22
30	1	2	5	17	23	19	20	22
31	1	2	5	18	20	9	19	23
32	1	2	5	19	22	12	15	17
33	1	2	5	19	22	14	23	17
34	1	2	6	8	21	19	12	22
35	1	2	6	8	23	12	9	19
36	1	2	6	8	23	12	21	19
37	1	2	6	10	23	7	14	18
38	1	2	6	12	19	8	17	23
39	1	2	6	12	19	15	10	22
40	1	2	6	12	19	21	16	22
41	1	2	6	12	21	11	22	18
42	1	2	6	12	23	22	11	19
43	1	2	6	14	18	10	21	23
44	1	2	6	14	18	16	11	23
45	1	2	6	14	22	8	23	21
46	1	2	6	15	23	22	14	16
47	1	2	6	16	17	11	18	22
48	1	2	6	16	17	15	14	22
49	1	2	6	16	19	15	22	18
50	1	2	6	16	23	21	12	18
51	1	2	6	18	22	16	11	19
52	1	2	6	18	23	9	22	16
53	1	2	6	18	23	17	12	16
54	1	2	7	9	20	8	15	23
55	1	2	7	9	20	21	12	22
56	1	2	7	9	22	23	18	20
57	1	2	7	11	22	23	12	18
58	1	2	7	11	22	23	20	18
59	1	2	7	15	18	22	21	23
60	1	2	7	15	20	9	18	16
61	1	2	7	15	20	18	9	23
62	1	2	7	15	21	23	12	20
63	1	2	7	17	21	23	14	20
64	1	2	7	17	21	23	22	20
65	1	2	7	17	22	15	18	12
66	1	2	7	17	23	21	12	16
67	1	2	7	21	22	16	15	17
68	1	2	8	5	23	10	14	22
69	1	2	8	6	21	10	15	23
70	1	2	8	6	21	16	9	23
71	1	2	8	6	23	9	12	22
72	1	2	8	10	20	14	7	21
73	1	2	8	14	21	10	23	15
74	1	2	8	14	21	16	9	15
75	1	2	8	14	21	23	10	20
76	1	2	8	15	23	22	16	12
77	1	2	8	16	22	6	21	19

78	1	2	8	16	23	9	20	12
79	1	2	8	16	23	19	12	22
80	1	2	8	16	23	21	14	22
81	1	2	8	17	21	16	20	12
82	1	2	8	20	21	9	22	16
83	1	2	8	20	23	17	16	12
84	1	2	8	20	23	17	22	12
85	1	2	8	20	23	19	14	16
86	1	2	8	22	19	12	21	17
87	1	2	8	22	19	14	23	17
88	1	2	8	22	20	14	19	15
89	1	2	8	22	20	14	19	21
90	1	2	8	22	21	16	17	15
91	1	2	9	5	22	14	19	23
92	1	2	9	5	23	15	8	22
93	1	2	9	5	23	15	20	22
94	1	2	9	6	22	15	21	23
95	1	2	9	7	22	8	11	21
96	1	2	9	7	22	20	21	23
97	1	2	9	7	23	11	22	18
98	1	2	9	7	23	15	6	18
99	1	2	9	8	20	15	7	21
100	1	2	9	8	20	15	7	23
101	1	2	9	8	22	11	23	19
102	1	2	9	8	22	11	23	21
103	1	2	9	11	19	23	10	22
104	1	2	9	11	22	8	21	23
105	1	2	9	11	22	8	23	21
106	1	2	9	15	23	19	14	10
107	1	2	9	16	20	7	23	21
108	1	2	9	18	16	11	21	19
109	1	2	9	18	22	15	21	23
110	1	2	9	19	14	16	21	23
111	1	2	9	19	16	15	22	18
112	1	2	9	19	20	15	18	12
113	1	2	9	19	21	23	14	16
114	1	2	9	19	21	23	22	20
115	1	2	9	20	14	15	19	23
116	1	2	9	20	16	11	23	21
117	1	2	9	21	18	14	19	15
118	1	2	9	21	22	16	23	19
119	1	2	9	21	23	15	20	18
120	1	2	9	21	23	19	16	14
121	1	2	10	4	23	17	8	20
122	1	2	10	5	23	14	20	22
123	1	2	10	6	22	14	21	23
124	1	2	10	6	23	8	15	17
125	1	2	10	7	21	8	12	22
126	1	2	10	11	23	8	20	22
127	1	2	10	11	23	20	8	22

128	1	2	10	14	17	7	20	22
129	1	2	10	14	17	19	8	22
130	1	2	10	14	22	6	21	15
131	1	2	10	14	22	20	7	15
132	1	2	10	15	23	20	12	22
133	1	2	10	18	14	20	15	23
134	1	2	10	18	15	19	12	22
135	1	2	10	18	21	19	12	22
136	1	2	10	20	19	21	12	18
137	1	2	10	20	19	23	14	18
138	1	2	10	20	21	23	22	14
139	1	2	10	22	18	20	15	19
140	1	2	10	22	18	20	23	21
141	1	2	10	22	19	20	15	17
142	1	2	10	22	21	20	23	15
143	1	2	11	5	20	12	17	23
144	1	2	11	5	20	18	9	23
145	1	2	11	5	20	18	19	23
146	1	2	11	5	23	9	12	20
147	1	2	11	7	21	17	6	18
148	1	2	11	7	22	12	21	23
149	1	2	11	7	22	20	23	21
150	1	2	11	9	18	10	21	23
151	1	2	11	9	20	10	23	19
152	1	2	11	9	22	10	21	23
153	1	2	11	9	23	7	18	14
154	1	2	11	9	23	19	6	14
155	1	2	11	17	16	21	12	18
156	1	2	11	17	19	21	16	12
157	1	2	11	17	19	21	20	12
158	1	2	11	17	22	16	19	23
159	1	2	11	19	14	22	21	23
160	1	2	11	21	14	20	17	23
161	1	2	11	21	18	20	17	23
162	1	2	11	21	20	22	23	19
163	1	2	11	21	22	20	23	17
164	1	2	12	7	21	16	6	22
165	1	2	12	8	19	17	6	22
166	1	2	12	8	21	19	6	16
167	1	2	12	9	23	22	6	18
168	1	2	12	10	19	9	22	18
169	1	2	12	10	21	7	18	22
170	1	2	12	10	21	19	6	22
171	1	2	12	10	21	23	8	22
172	1	2	12	15	19	22	8	16
173	1	2	12	15	23	22	16	8
174	1	2	12	16	19	22	9	15
175	1	2	12	16	22	18	17	23
176	1	2	12	16	22	20	11	21
177	1	2	12	16	23	18	17	7

178	1	2	12	18	16	22	11	19
179	1	2	12	18	23	22	15	9
180	1	2	12	19	21	16	18	22
181	1	2	12	20	15	19	18	16
182	1	2	12	20	18	22	17	23
183	1	2	12	20	18	22	21	23
184	1	2	12	20	21	16	19	9
185	1	2	12	22	16	18	19	15
186	1	2	12	22	20	18	19	11
187	1	2	12	23	19	20	22	18
188	1	3	2	14	21	16	18	22
189	1	3	2	15	22	12	17	19
190	1	3	2	16	21	12	20	22
191	1	3	2	17	22	12	15	21
192	1	3	4	7	24	9	14	20
193	1	3	4	7	24	14	9	21
194	1	3	4	10	21	18	14	20
195	1	3	4	11	20	10	17	21
196	1	3	4	11	20	18	17	21
197	1	3	4	11	21	10	17	19
198	1	3	4	11	21	18	17	19
199	1	3	4	15	20	7	18	24
200	1	3	4	15	20	19	12	24
201	1	3	4	15	20	21	18	24
202	1	3	4	15	24	7	18	16
203	1	3	4	15	24	19	12	16
204	1	3	4	15	24	21	18	16
205	1	3	4	17	20	19	14	24
206	1	3	4	17	24	19	14	16
207	1	3	4	17	24	19	14	20
208	1	3	5	6	24	14	9	19
209	1	3	5	7	22	10	14	20
210	1	3	5	7	22	12	18	20
211	1	3	5	7	22	14	10	20
212	1	3	5	7	22	18	12	20
213	1	3	5	7	24	16	20	18
214	1	3	5	7	24	20	16	18
215	1	3	5	8	24	22	15	19
216	1	3	5	9	22	12	10	18
217	1	3	5	9	22	12	20	18
218	1	3	5	9	24	8	14	16
219	1	3	5	9	24	20	12	16
220	1	3	5	9	24	20	18	16
221	1	3	5	11	19	14	10	22
222	1	3	5	11	19	20	16	22
223	1	3	5	11	24	12	8	16
224	1	3	5	11	24	22	18	16
225	1	3	5	14	20	18	19	17
226	1	3	5	14	24	15	8	16
227	1	3	5	15	17	10	20	24

228	1	3	5	15	17	16	12	24
229	1	3	5	15	17	16	14	22
230	1	3	5	15	18	14	10	24
231	1	3	5	15	22	12	8	20
232	1	3	5	15	24	20	10	18
233	1	3	5	16	18	12	17	19
234	1	3	5	16	18	14	15	19
235	1	3	5	16	24	6	19	17
236	1	3	5	16	24	20	11	17
237	1	3	5	17	16	12	18	24
238	1	3	5	17	16	14	20	24
239	1	3	5	17	18	16	24	22
240	1	3	5	17	24	8	22	16
241	1	3	5	17	24	22	18	16
242	1	3	5	18	19	9	22	24
243	1	3	5	18	20	7	16	22
244	1	3	5	18	20	19	24	22
245	1	3	5	18	22	12	11	17
246	1	3	5	19	20	8	16	22
247	1	3	5	19	20	18	22	24
248	1	3	5	19	20	18	24	22
249	1	3	5	19	22	8	16	20
250	1	3	5	19	22	18	24	20
251	1	3	5	19	24	12	16	20
252	1	3	5	20	22	10	15	19
253	1	3	5	20	24	14	15	17
254	1	3	6	7	24	15	22	18
255	1	3	6	7	24	21	10	22
256	1	3	6	9	24	7	12	16
257	1	3	6	9	24	19	22	16
258	1	3	6	9	24	22	21	19
259	1	3	6	10	19	8	14	22
260	1	3	6	10	19	14	8	24
261	1	3	6	10	21	12	22	18
262	1	3	6	11	19	12	9	21
263	1	3	6	15	22	24	21	19
264	1	3	6	16	19	12	24	18
265	1	3	6	16	21	8	24	22
266	1	3	6	17	16	11	22	24
267	1	3	6	17	16	15	12	24
268	1	3	6	17	22	15	18	12
269	1	3	6	17	24	21	12	18
270	1	3	6	17	24	22	21	19
271	1	3	6	18	15	14	16	24
272	1	3	6	18	19	22	16	24
273	1	3	6	19	18	9	22	24
274	1	3	6	19	18	17	12	24
275	1	3	6	19	22	8	17	15
276	1	3	6	19	22	8	17	21
277	1	3	6	19	24	9	22	16

278	1	3	6	19	24	17	12	16
279	1	3	6	21	22	12	15	19
280	1	3	6	21	24	14	17	15
281	1	3	7	4	24	10	15	21
282	1	3	7	4	24	18	9	21
283	1	3	7	5	22	10	14	20
284	1	3	7	5	22	10	14	24
285	1	3	7	5	24	16	20	18
286	1	3	7	5	24	16	20	22
287	1	3	7	8	20	22	17	21
288	1	3	7	8	22	24	17	21
289	1	3	7	9	21	18	24	22
290	1	3	7	9	21	24	18	22
291	1	3	7	9	24	6	16	22
292	1	3	7	9	24	16	6	22
293	1	3	7	10	20	9	8	22
294	1	3	7	10	21	15	6	24
295	1	3	7	11	21	14	8	16
296	1	3	7	11	22	10	20	14
297	1	3	7	11	24	10	20	12
298	1	3	7	12	22	24	11	17
299	1	3	7	12	22	24	21	17
300	1	3	7	14	20	24	11	21
301	1	3	7	14	24	5	20	16
302	1	3	7	14	24	21	8	16
303	1	3	7	15	17	22	12	24
304	1	3	7	15	18	24	14	22
305	1	3	7	15	22	10	24	14
306	1	3	7	15	24	6	22	16
307	1	3	7	15	24	20	8	16
308	1	3	7	16	22	21	14	24
309	1	3	7	16	24	6	21	15
310	1	3	7	16	24	20	9	15
311	1	3	7	16	24	22	15	21
312	1	3	7	17	15	10	20	24
313	1	3	7	17	15	16	14	22
314	1	3	7	17	20	16	8	22
315	1	3	7	17	21	8	20	24
316	1	3	7	17	21	16	20	12
317	1	3	7	17	21	22	20	24
318	1	3	7	17	22	10	20	24
319	1	3	7	17	22	16	8	20
320	1	3	7	17	24	8	20	12
321	1	3	7	17	24	16	14	22
322	1	3	7	17	24	22	20	12
323	1	3	7	18	20	24	15	21
324	1	3	7	18	21	9	24	22
325	1	3	7	18	22	14	17	11
326	1	3	7	18	22	15	10	14
327	1	3	7	18	24	21	12	16

328	1	3	7	20	22	10	17	21
329	1	3	7	20	22	16	11	17
330	1	3	7	20	24	16	17	11
331	1	3	7	21	22	12	16	20
332	1	3	7	21	24	12	20	16
333	1	3	7	21	24	14	22	16
334	1	3	8	7	20	9	10	24
335	1	3	8	7	20	10	9	21
336	1	3	8	7	22	21	20	24
337	1	3	8	7	24	14	5	17
338	1	3	8	7	24	21	22	20
339	1	3	8	7	24	22	21	17
340	1	3	8	9	20	7	10	22
341	1	3	8	9	20	10	7	21
342	1	3	8	9	20	19	24	22
343	1	3	8	9	22	12	5	19
344	1	3	8	9	22	21	24	20
345	1	3	8	9	22	24	21	19
346	1	3	8	9	24	5	16	20
347	1	3	8	11	24	7	16	12
348	1	3	8	12	19	24	10	22
349	1	3	8	14	17	22	10	24
350	1	3	8	15	17	22	21	19
351	1	3	8	15	22	21	12	24
352	1	3	8	17	15	10	19	21
353	1	3	8	17	20	11	24	14
354	1	3	8	17	20	15	10	14
355	1	3	8	17	20	19	10	24
356	1	3	8	17	22	11	20	24
357	1	3	8	17	22	15	20	10
358	1	3	8	17	24	10	19	21
359	1	3	8	17	24	15	20	22
360	1	3	8	17	24	19	10	12
361	1	3	8	17	24	21	22	20
362	1	3	8	19	15	10	17	21
363	1	3	8	19	20	9	24	22
364	1	3	8	19	20	15	16	12
365	1	3	8	19	20	17	10	22
366	1	3	8	19	21	14	17	11
367	1	3	8	19	22	9	24	14
368	1	3	8	19	22	17	10	14
369	1	3	8	19	22	21	24	20
370	1	3	8	19	24	15	16	20
371	1	3	8	20	17	22	16	24
372	1	3	8	20	21	22	24	16
373	1	3	8	21	24	14	19	17
374	1	3	8	21	24	17	16	12
375	1	3	8	21	24	17	22	12
376	1	3	9	4	24	12	19	21
377	1	3	9	5	20	10	14	24

378	1	3	9	5	20	12	18	24
379	1	3	9	5	20	16	8	24
380	1	3	9	5	24	8	14	16
381	1	3	9	5	24	16	22	20
382	1	3	9	6	21	11	8	24
383	1	3	9	6	24	7	12	16
384	1	3	9	6	24	22	21	19
385	1	3	9	7	21	12	22	18
386	1	3	9	7	21	12	22	24
387	1	3	9	7	21	14	6	18
388	1	3	9	7	21	14	6	24
389	1	3	9	7	21	22	20	18
390	1	3	9	7	21	22	20	24
391	1	3	9	7	21	24	10	20
392	1	3	9	7	21	24	10	22
393	1	3	9	8	19	11	22	24
394	1	3	9	8	19	15	6	24
395	1	3	9	8	20	22	21	19
396	1	3	9	8	24	6	15	21
397	1	3	9	10	21	15	4	20
398	1	3	9	11	21	4	16	20
399	1	3	9	11	21	6	18	24
400	1	3	9	11	21	8	22	24
401	1	3	9	11	21	10	22	14
402	1	3	9	11	21	16	4	20
403	1	3	9	11	21	18	6	24
404	1	3	9	11	21	22	8	24
405	1	3	9	11	21	22	10	14
406	1	3	9	11	22	10	20	12
407	1	3	9	11	22	20	10	12
408	1	3	9	12	22	16	5	15
409	1	3	9	14	16	7	20	24
410	1	3	9	14	16	19	8	24
411	1	3	9	14	16	22	11	21
412	1	3	9	14	21	7	20	24
413	1	3	9	14	21	19	8	24
414	1	3	9	14	24	22	11	21
415	1	3	9	15	18	22	12	16
416	1	3	9	15	19	18	6	22
417	1	3	9	15	19	24	12	16
418	1	3	9	15	20	10	24	14
419	1	3	9	15	20	16	8	14
420	1	3	9	15	22	10	24	12
421	1	3	9	15	22	16	8	12
422	1	3	9	15	24	20	8	12
423	1	3	9	15	24	22	12	10
424	1	3	9	16	19	5	20	22
425	1	3	9	16	24	22	11	19
426	1	3	9	18	19	11	24	14
427	1	3	9	18	20	16	21	11

428	1	3	9	18	21	11	20	24
429	1	3	9	18	21	11	24	12
430	1	3	9	18	24	10	21	19
431	1	3	9	18	24	19	12	10
432	1	3	9	19	15	20	12	24
433	1	3	9	19	15	22	14	24
434	1	3	9	19	16	12	24	18
435	1	3	9	19	20	22	24	14
436	1	3	9	19	21	14	18	10
437	1	3	9	19	21	14	18	24
438	1	3	9	19	21	20	24	12
439	1	3	9	19	21	20	24	22
440	1	3	9	19	21	24	22	14
441	1	3	9	19	21	24	22	20
442	1	3	9	19	22	8	20	12
443	1	3	9	19	24	20	12	16
444	1	3	9	19	24	22	14	16
445	1	3	9	20	18	24	15	21
446	1	3	9	20	19	15	18	12
447	1	3	9	20	22	24	21	15
448	1	3	9	21	16	22	18	24
449	1	3	9	21	16	22	20	24
450	1	3	9	21	19	8	22	20
451	1	3	9	21	19	16	22	24
452	1	3	9	21	20	8	22	16
453	1	3	9	22	16	11	20	18
454	1	3	9	22	16	15	24	18
455	1	3	9	22	20	16	15	21
456	1	3	9	22	20	19	24	14
457	1	3	9	22	21	15	16	20
458	1	3	10	4	21	14	18	24
459	1	3	10	5	22	15	20	24
460	1	3	10	5	24	9	14	22
461	1	3	10	5	24	19	20	22
462	1	3	10	7	20	9	8	22
463	1	3	10	11	21	4	17	19
464	1	3	10	15	18	5	20	22
465	1	3	10	15	18	7	24	22
466	1	3	10	15	18	19	6	22
467	1	3	10	15	22	5	20	14
468	1	3	10	15	22	7	24	14
469	1	3	10	15	22	19	6	14
470	1	3	10	15	24	19	14	22
471	1	3	10	15	24	19	20	22
472	1	3	10	17	20	19	8	22
473	1	3	10	18	15	24	14	22
474	1	3	10	18	19	24	22	14
475	1	3	10	19	14	9	20	22
476	1	3	10	19	18	9	20	14
477	1	3	10	19	18	20	9	21

478	1	3	10	19	21	20	9	15
479	1	3	10	21	18	20	11	19
480	1	3	10	21	18	24	15	19
481	1	3	10	21	19	20	11	17
482	1	3	10	21	19	24	15	17
483	1	3	10	21	20	19	24	12
484	1	3	11	4	24	20	19	21
485	1	3	11	5	19	12	18	24
486	1	3	11	5	22	12	18	24
487	1	3	11	5	24	8	12	20
488	1	3	11	5	24	18	22	20
489	1	3	11	6	19	9	12	24
490	1	3	11	7	20	12	22	24
491	1	3	11	7	21	20	22	24
492	1	3	11	7	22	8	16	14
493	1	3	11	7	22	10	20	14
494	1	3	11	7	22	18	6	14
495	1	3	11	7	24	8	16	12
496	1	3	11	7	24	10	20	12
497	1	3	11	7	24	18	6	12
498	1	3	11	8	24	6	17	19
499	1	3	11	8	24	6	19	17
500	1	3	11	8	24	7	16	12
501	1	3	11	8	24	22	5	17
502	1	3	11	10	17	7	18	24
503	1	3	11	10	17	19	6	24
504	1	3	11	10	19	9	24	20
505	1	3	11	10	19	17	4	20
506	1	3	11	10	24	12	21	9
507	1	3	11	12	22	21	10	24
508	1	3	11	14	16	22	9	19
509	1	3	11	14	20	24	7	17
510	1	3	11	14	24	10	19	21
511	1	3	11	14	24	21	8	10
512	1	3	11	14	24	22	9	19
513	1	3	11	16	21	7	24	14
514	1	3	11	16	22	17	18	24
515	1	3	11	16	24	19	12	20
516	1	3	11	16	24	20	21	7
517	1	3	11	17	16	24	12	18
518	1	3	11	17	20	24	10	14
519	1	3	11	17	21	6	22	14
520	1	3	11	17	21	8	24	20
521	1	3	11	17	21	16	22	24
522	1	3	11	17	21	24	14	22
523	1	3	11	17	22	20	8	12
524	1	3	11	17	22	24	14	10
525	1	3	11	17	24	20	12	8
526	1	3	11	17	24	22	14	8
527	1	3	11	18	14	19	10	22

528	1	3	11	18	14	22	21	19
529	1	3	11	18	19	9	20	12
530	1	3	11	18	19	21	12	24
531	1	3	11	18	20	16	19	9
532	1	3	11	19	12	20	16	24
533	1	3	11	19	16	24	12	20
534	1	3	11	19	18	10	24	14
535	1	3	11	19	18	24	22	14
536	1	3	11	19	20	10	24	12
537	1	3	11	19	20	24	22	12
538	1	3	11	19	21	8	22	12
539	1	3	11	19	21	10	24	20
540	1	3	11	19	21	20	24	10
541	1	3	11	19	21	24	22	20
542	1	3	11	20	12	19	16	24
543	1	3	11	20	14	18	19	17
544	1	3	11	20	18	9	22	14
545	1	3	11	20	21	19	24	10
546	1	3	11	20	24	18	19	17
547	1	3	11	21	17	22	18	24
548	1	3	11	21	17	22	20	24
549	1	3	11	21	19	24	22	14
550	1	3	11	21	19	24	22	20
551	1	3	11	21	22	24	18	14
552	1	3	11	21	22	24	20	14
553	1	3	11	21	24	20	16	12
554	1	3	11	21	24	20	22	12
555	1	3	11	22	18	24	17	19
556	1	3	11	22	19	21	24	20
557	1	3	12	5	20	11	10	24
558	1	3	12	7	18	17	6	24
559	1	3	12	7	20	10	21	17
560	1	3	12	7	20	18	5	17
561	1	3	12	7	22	21	24	20
562	1	3	12	7	24	22	5	17
563	1	3	12	8	17	10	20	24
564	1	3	12	9	22	19	8	24
565	1	3	12	11	18	7	20	24
566	1	3	12	11	18	21	6	24
567	1	3	12	11	24	9	22	10
568	1	3	12	15	20	21	10	24
569	1	3	12	15	24	10	21	19
570	1	3	12	15	24	21	10	8
571	1	3	12	17	22	11	24	20
572	1	3	12	17	24	22	15	7
573	1	3	12	18	21	16	24	22
574	1	3	12	21	18	17	20	24
575	1	3	12	21	24	19	22	10
576	1	4	2	10	23	17	12	20
577	1	4	2	10	23	17	18	20

578	1	4	2	12	21	16	11	23
579	1	4	2	14	23	10	11	19
580	1	4	2	14	23	11	10	20
581	1	4	2	15	23	18	12	20
582	1	4	2	16	23	15	12	18
583	1	4	2	16	23	17	12	20
584	1	4	2	17	23	8	16	20
585	1	4	2	18	20	12	21	23
586	1	4	2	18	23	10	15	19
587	1	4	2	18	23	16	21	19
588	1	4	3	7	24	11	10	20
589	1	4	3	7	24	11	18	20
590	1	4	3	7	24	12	9	21
591	1	4	3	7	24	18	11	21
592	1	4	3	7	24	18	17	21
593	1	4	3	9	24	11	20	18
594	1	4	3	9	24	16	21	19
595	1	4	3	9	24	20	11	21
596	1	4	3	11	20	19	18	24
597	1	4	3	15	18	9	16	24
598	1	4	3	15	18	17	20	24
599	1	4	3	15	24	7	18	16
600	1	4	3	15	24	16	9	19
601	1	4	3	17	24	16	11	19
602	1	4	3	17	24	19	20	16
603	1	4	3	17	24	20	15	19
604	1	4	5	6	24	15	7	23
605	1	4	5	6	24	15	19	17
606	1	4	5	6	24	19	11	17
607	1	4	5	7	20	9	14	24
608	1	4	5	7	20	14	9	23
609	1	4	5	7	24	20	9	23
610	1	4	5	10	24	23	11	17
611	1	4	5	11	23	7	8	20
612	1	4	5	12	24	9	23	15
613	1	4	5	14	20	11	7	23
614	1	4	5	15	16	9	18	24
615	1	4	5	15	18	23	16	24
616	1	4	5	15	19	23	20	24
617	1	4	5	17	19	11	18	16
618	1	4	5	17	19	15	14	16
619	1	4	5	17	19	23	18	24
620	1	4	5	17	24	8	23	15
621	1	4	5	17	24	16	15	23
622	1	4	5	19	23	11	12	20
623	1	4	5	19	23	11	24	20
624	1	4	5	19	23	15	16	12
625	1	4	5	19	23	15	20	12
626	1	4	5	19	24	14	11	17
627	1	4	6	8	19	9	10	24

628	1	4	6	10	19	9	8	24
629	1	4	6	10	21	15	24	18
630	1	4	6	10	24	8	21	23
631	1	4	6	12	18	10	9	21
632	1	4	6	14	16	8	17	23
633	1	4	6	14	19	9	10	18
634	1	4	6	14	19	11	24	18
635	1	4	6	14	19	24	21	23
636	1	4	6	14	23	7	18	24
637	1	4	6	14	24	16	9	23
638	1	4	6	16	15	9	18	24
639	1	4	6	16	23	9	18	24
640	1	4	6	17	19	16	8	24
641	1	4	6	18	15	9	16	24
642	1	4	6	18	16	12	17	19
643	1	4	6	18	16	14	15	19
644	1	4	6	18	19	9	14	16
645	1	4	6	18	19	11	12	16
646	1	4	6	18	19	17	24	16
647	1	4	6	18	19	24	17	23
648	1	4	6	18	23	9	24	14
649	1	4	6	18	24	16	9	15
650	1	4	6	21	15	12	16	24
651	1	4	7	5	20	10	15	23
652	1	4	7	5	20	18	9	23
653	1	4	7	5	23	11	8	24
654	1	4	7	5	23	15	20	24
655	1	4	7	5	24	11	8	16
656	1	4	7	5	24	15	20	16
657	1	4	7	9	18	20	21	23
658	1	4	7	9	23	11	24	16
659	1	4	7	9	24	6	15	23
660	1	4	7	9	24	11	20	12
661	1	4	7	9	24	12	5	15
662	1	4	7	9	24	15	8	12
663	1	4	7	11	20	24	9	23
664	1	4	7	11	21	9	8	16
665	1	4	7	15	16	14	9	21
666	1	4	7	15	23	17	12	10
667	1	4	7	15	24	6	17	21
668	1	4	7	17	14	18	21	23
669	1	4	7	17	20	11	24	14
670	1	4	7	17	20	24	11	21
671	1	4	7	17	23	5	18	14
672	1	4	7	17	23	15	20	24
673	1	4	7	21	18	12	17	15
674	1	4	7	21	20	10	17	23
675	1	4	7	21	23	11	24	16
676	1	4	7	21	23	15	12	16
677	1	4	7	21	24	14	15	17

678	1	4	8	6	19	10	9	23
679	1	4	8	6	21	23	10	24
680	1	4	8	9	21	12	6	16
681	1	4	8	10	21	23	24	20
682	1	4	8	12	20	10	23	15
683	1	4	8	12	21	3	16	20
684	1	4	8	12	24	6	23	15
685	1	4	8	12	24	10	23	11
686	1	4	8	14	15	21	10	24
687	1	4	8	16	17	23	24	20
688	1	4	8	16	20	24	9	21
689	1	4	8	16	23	12	21	9
690	1	4	8	16	23	17	6	14
691	1	4	8	16	24	6	23	15
692	1	4	8	17	21	24	10	20
693	1	4	8	20	17	15	12	16
694	1	4	8	20	17	24	21	23
695	1	4	8	20	21	19	24	12
696	1	4	8	20	23	9	24	14
697	1	4	8	20	23	14	19	9
698	1	4	8	20	23	17	10	14
699	1	4	8	20	24	16	21	9
700	1	4	9	5	19	11	18	24
701	1	4	9	5	24	16	23	19
702	1	4	9	5	24	20	19	23
703	1	4	9	7	18	20	21	23
704	1	4	9	7	21	15	24	18
705	1	4	9	7	24	6	11	21
706	1	4	9	7	24	20	21	23
707	1	4	9	8	20	11	5	19
708	1	4	9	8	24	19	21	11
709	1	4	9	10	20	15	3	21
710	1	4	9	11	20	5	14	16
711	1	4	9	11	20	16	3	21
712	1	4	9	11	20	24	7	23
713	1	4	9	14	24	11	19	23
714	1	4	9	14	24	23	11	21
715	1	4	9	15	21	19	12	10
716	1	4	9	15	23	19	20	8
717	1	4	9	15	23	19	20	24
718	1	4	9	16	20	5	19	23
719	1	4	9	18	20	19	23	11
720	1	4	9	18	24	11	23	19
721	1	4	9	18	24	15	19	21
722	1	4	9	19	18	11	24	14
723	1	4	9	19	18	24	11	21
724	1	4	9	19	24	8	21	11
725	1	4	9	20	18	7	21	23
726	1	4	9	21	20	16	23	11
727	1	4	10	5	23	18	6	14

728	1	4	10	5	23	20	8	24
729	1	4	10	6	23	24	21	19
730	1	4	10	6	24	18	23	21
731	1	4	10	8	21	24	23	19
732	1	4	10	11	23	24	6	14
733	1	4	10	12	21	23	8	24
734	1	4	10	14	23	5	18	20
735	1	4	10	14	23	24	9	11
736	1	4	10	14	24	18	11	7
737	1	4	10	17	19	24	8	20
738	1	4	10	18	12	20	21	23
739	1	4	10	18	19	11	24	12
740	1	4	10	18	19	23	12	24
741	1	4	10	18	20	24	9	19
742	1	4	10	18	21	14	23	9
743	1	4	10	18	23	24	21	19
744	1	4	10	18	24	20	9	11
745	1	4	10	20	14	18	21	17
746	1	4	10	20	14	24	15	23
747	1	4	10	20	18	24	11	19
748	1	4	10	20	19	24	11	17
749	1	4	10	20	21	24	23	19
750	1	4	10	21	19	20	24	12
751	1	4	11	5	23	9	6	18
752	1	4	11	5	24	20	23	17
753	1	4	11	7	24	20	3	17
754	1	4	11	9	16	8	19	23
755	1	4	11	9	19	5	14	18
756	1	4	11	9	24	14	21	23
757	1	4	11	9	24	19	20	8
758	1	4	11	17	14	10	23	19
759	1	4	11	17	19	21	14	10
760	1	4	11	19	14	9	20	18
761	1	4	11	19	14	20	9	23
762	1	4	11	19	17	21	16	12
763	1	4	11	19	17	21	20	12
764	1	4	11	19	18	9	20	12
765	1	4	11	19	18	20	9	23
766	1	4	11	19	23	9	20	18
767	1	4	11	21	20	19	24	10
768	1	4	11	21	20	24	23	19
769	1	4	11	21	24	18	23	9
770	1	4	12	6	21	9	10	24
771	1	4	12	6	21	23	8	24
772	1	4	12	6	23	10	17	11
773	1	4	12	6	23	21	24	18
774	1	4	12	8	19	6	15	17
775	1	4	12	8	23	10	15	9
776	1	4	12	8	23	11	16	24
777	1	4	12	8	23	15	20	24

778	1	4	12	8	23	16	21	9
779	1	4	12	9	23	20	10	8
780	1	4	12	9	23	20	10	24
781	1	4	12	10	19	6	17	15
782	1	4	12	10	23	15	20	24
783	1	4	12	11	21	18	6	24
784	1	4	12	15	21	10	18	24
785	1	4	12	15	21	18	10	24
786	1	4	12	16	15	8	21	17
787	1	4	12	16	15	9	24	18
788	1	4	12	16	23	9	24	18
789	1	4	12	16	23	11	24	8
790	1	4	12	16	24	8	21	17
791	1	4	12	16	24	20	17	5
792	1	4	12	17	23	10	24	18
793	1	4	12	20	21	16	17	7
794	1	5	2	8	23	12	10	20
795	1	5	2	9	23	10	11	19
796	1	5	2	9	23	18	15	19
797	1	5	2	10	23	6	14	22
798	1	5	2	11	20	18	17	23
799	1	5	2	15	20	10	17	19
800	1	5	2	16	19	12	18	20
801	1	5	2	16	23	8	22	20
802	1	5	2	17	23	10	11	19
803	1	5	2	19	22	12	15	17
804	1	5	2	19	22	12	15	23
805	1	5	2	19	23	16	15	17
806	1	5	3	6	24	9	10	22
807	1	5	3	6	24	10	11	19
808	1	5	3	6	24	14	9	19
809	1	5	3	6	24	16	17	19
810	1	5	3	6	24	17	18	22
811	1	5	3	7	22	8	14	24
812	1	5	3	7	22	10	18	24
813	1	5	3	7	22	14	8	24
814	1	5	3	7	22	18	10	24
815	1	5	3	8	22	17	20	24
816	1	5	3	8	24	7	10	22
817	1	5	3	8	24	16	19	17
818	1	5	3	9	20	12	10	22
819	1	5	3	9	20	18	16	22
820	1	5	3	9	22	6	14	24
821	1	5	3	9	22	20	10	24
822	1	5	3	9	24	14	6	22
823	1	5	3	9	24	14	22	18
824	1	5	3	11	19	14	10	22
825	1	5	3	11	19	20	16	24
826	1	5	3	12	20	16	11	19
827	1	5	3	12	24	7	22	20

828	1	5	3	12	24	8	19	15
829	1	5	3	12	24	16	9	15
830	1	5	3	14	24	16	9	15
831	1	5	3	14	24	22	19	17
832	1	5	3	15	17	16	12	24
833	1	5	3	15	17	18	14	24
834	1	5	3	15	20	12	8	24
835	1	5	3	15	20	22	18	24
836	1	5	3	15	24	20	10	18
837	1	5	3	16	22	18	19	15
838	1	5	3	16	24	7	18	22
839	1	5	3	16	24	20	11	19
840	1	5	3	17	19	14	20	18
841	1	5	3	17	20	18	24	22
842	1	5	3	17	22	8	20	24
843	1	5	3	17	22	20	18	24
844	1	5	3	17	24	16	12	22
845	1	5	3	18	19	11	24	22
846	1	5	3	19	17	14	22	24
847	1	5	3	19	20	8	16	24
848	1	5	3	19	22	12	16	24
849	1	5	3	19	22	14	20	24
850	1	5	3	19	24	14	22	20
851	1	5	3	20	22	14	17	15
852	1	5	3	20	22	14	19	15
853	1	5	3	20	24	16	17	15
854	1	5	3	20	24	16	19	15
855	1	5	4	6	23	10	12	18
856	1	5	4	7	20	9	12	24
857	1	5	4	7	20	10	11	23
858	1	5	4	7	20	11	18	24
859	1	5	4	7	20	17	18	24
860	1	5	4	7	20	18	11	23
861	1	5	4	7	23	10	11	17
862	1	5	4	7	23	18	11	17
863	1	5	4	7	24	9	12	16
864	1	5	4	7	24	11	18	16
865	1	5	4	7	24	17	18	16
866	1	5	4	9	19	20	15	23
867	1	5	4	10	23	14	24	18
868	1	5	4	10	23	24	14	20
869	1	5	4	11	18	12	9	23
870	1	5	4	11	18	20	17	23
871	1	5	4	12	23	8	24	20
872	1	5	4	14	19	10	20	18
873	1	5	4	15	16	9	18	24
874	1	5	4	15	16	17	12	24
875	1	5	4	15	16	19	18	24
876	1	5	4	15	20	9	18	16
877	1	5	4	15	20	17	12	16

878	1	5	4	15	20	19	18	16
879	1	5	4	16	17	8	12	24
880	1	5	4	19	20	10	11	23
881	1	5	4	19	23	10	11	17
882	1	5	4	20	19	8	16	24
883	1	5	6	8	23	24	14	16
884	1	5	6	9	18	11	22	24
885	1	5	6	9	24	14	3	19
886	1	5	6	9	24	15	8	12
887	1	5	6	9	24	22	23	19
888	1	5	6	11	17	12	7	23
889	1	5	6	12	17	10	8	22
890	1	5	6	12	23	8	22	24
891	1	5	6	12	23	24	22	16
892	1	5	6	16	19	4	18	24
893	1	5	6	17	16	14	11	19
894	1	5	6	17	18	19	22	16
895	1	5	6	17	24	22	19	11
896	1	5	6	17	24	22	23	19
897	1	5	6	19	16	15	22	18
898	1	5	6	19	18	24	15	23
899	1	5	7	8	24	6	11	23
900	1	5	7	9	18	10	6	24
901	1	5	7	9	23	8	24	20
902	1	5	7	9	23	16	24	14
903	1	5	7	9	23	22	24	20
904	1	5	7	9	23	24	18	14
905	1	5	7	10	18	11	24	22
906	1	5	7	10	20	4	11	23
907	1	5	7	10	22	3	12	20
908	1	5	7	10	22	23	24	20
909	1	5	7	11	17	6	12	22
910	1	5	7	11	17	12	6	22
911	1	5	7	11	22	8	16	12
912	1	5	7	11	22	10	20	12
913	1	5	7	11	22	16	8	12
914	1	5	7	11	22	20	10	12
915	1	5	7	12	16	6	15	23
916	1	5	7	12	16	15	6	24
917	1	5	7	12	17	11	6	22
918	1	5	7	12	23	15	6	24
919	1	5	7	12	24	3	18	16
920	1	5	7	12	24	6	15	23
921	1	5	7	12	24	23	6	16
922	1	5	7	14	18	6	15	17
923	1	5	7	15	18	22	12	16
924	1	5	7	15	20	10	24	14
925	1	5	7	15	22	10	24	12
926	1	5	7	15	23	22	18	10
927	1	5	7	15	23	22	18	24

928	1	5	7	15	24	22	12	10
929	1	5	7	16	14	8	17	23
930	1	5	7	16	14	22	17	23
931	1	5	7	16	22	14	9	11
932	1	5	7	17	15	8	16	20
933	1	5	7	17	15	14	10	20
934	1	5	7	17	16	20	22	18
935	1	5	7	17	20	24	10	22
936	1	5	7	17	22	6	16	12
937	1	5	7	17	22	8	16	24
938	1	5	7	17	22	14	10	24
939	1	5	7	17	22	24	16	12
940	1	5	7	17	23	20	22	10
941	1	5	7	18	22	23	24	20
942	1	5	7	18	24	16	9	11
943	1	5	7	20	16	23	14	24
944	1	5	7	20	16	23	22	24
945	1	5	7	20	18	24	15	23
946	1	5	8	6	23	16	22	24
947	1	5	8	7	22	9	6	24
948	1	5	8	7	22	23	20	24
949	1	5	8	7	24	10	23	15
950	1	5	8	7	24	14	3	15
951	1	5	8	9	22	24	7	23
952	1	5	8	9	24	19	20	10
953	1	5	8	10	23	22	24	14
954	1	5	8	11	19	22	23	17
955	1	5	8	12	17	4	16	24
956	1	5	8	12	17	16	4	24
957	1	5	8	14	15	6	16	22
958	1	5	8	14	15	16	6	24
959	1	5	8	15	22	23	12	24
960	1	5	8	15	23	22	19	9
961	1	5	8	16	23	12	20	24
962	1	5	8	17	14	7	16	22
963	1	5	8	17	14	24	15	23
964	1	5	8	17	19	24	23	15
965	1	5	8	19	23	16	9	11
966	1	5	8	19	23	24	17	11
967	1	5	8	19	24	22	23	17
968	1	5	9	6	18	10	7	23
969	1	5	9	6	18	22	19	23
970	1	5	9	6	23	15	2	18
971	1	5	9	6	24	10	7	23
972	1	5	9	6	24	22	19	23
973	1	5	9	7	18	10	6	22
974	1	5	9	7	22	10	24	18
975	1	5	9	7	22	14	2	18
976	1	5	9	7	23	8	6	22
977	1	5	9	7	23	10	8	12

978	1	5	9	7	23	16	24	14
979	1	5	9	7	23	22	20	24
980	1	5	9	7	23	24	22	20
981	1	5	9	7	24	4	12	16
982	1	5	9	7	24	8	22	20
983	1	5	9	8	19	11	4	20
984	1	5	9	8	19	11	24	20
985	1	5	9	8	20	12	3	19
986	1	5	9	8	24	10	7	11
987	1	5	9	8	24	16	23	11
988	1	5	9	10	23	19	2	18
989	1	5	9	11	24	4	16	12
990	1	5	9	12	18	3	16	22
991	1	5	9	12	19	15	4	16
992	1	5	9	14	23	15	6	10
993	1	5	9	14	23	15	6	22
994	1	5	9	15	18	22	10	14
995	1	5	9	15	20	10	24	12
996	1	5	9	15	23	4	18	12
997	1	5	9	15	23	12	20	24
998	1	5	9	15	23	24	8	12
999	1	5	9	16	19	23	8	24
1000	1	5	9	16	22	24	7	15
1001	1	5	9	18	12	10	19	23
1002	1	5	9	18	12	11	22	24
1003	1	5	9	18	20	23	22	24
1004	1	5	9	18	24	19	22	20
1005	1	5	9	18	24	23	10	12
1006	1	5	9	19	14	10	20	18
1007	1	5	9	19	14	20	22	18
1008	1	5	9	19	16	6	22	24
1009	1	5	9	19	16	20	8	24
1010	1	5	9	19	18	24	10	22
1011	1	5	9	19	23	12	22	8
1012	1	5	9	19	23	24	20	10
1013	1	5	9	19	24	10	20	8
1014	1	5	9	19	24	20	22	8
1015	1	5	9	20	22	23	24	18
1016	1	5	10	7	18	9	6	22
1017	1	5	10	7	18	17	24	22
1018	1	5	10	7	22	9	6	14
1019	1	5	10	7	22	17	24	14
1020	1	5	10	7	23	4	11	17
1021	1	5	10	8	17	6	12	22
1022	1	5	10	9	22	19	24	12
1023	1	5	10	15	14	9	24	22
1024	1	5	10	15	14	17	6	22
1025	1	5	10	15	18	9	24	14
1026	1	5	10	15	18	17	6	14
1027	1	5	10	15	24	19	12	22

1028	1	5	10	17	22	15	20	24
1029	1	5	10	17	24	23	12	8
1030	1	5	10	18	23	12	24	20
1031	1	5	10	19	12	9	18	22
1032	1	5	10	19	14	11	24	18
1033	1	5	10	19	14	24	11	23
1034	1	5	10	19	23	24	15	9
1035	1	5	10	20	19	24	22	12
1036	1	5	11	6	18	24	7	23
1037	1	5	11	6	22	24	7	23
1038	1	5	11	6	24	22	3	17
1039	1	5	11	6	24	22	23	19
1040	1	5	11	7	23	8	22	14
1041	1	5	11	7	23	8	22	20
1042	1	5	11	7	23	18	2	14
1043	1	5	11	7	23	18	2	20
1044	1	5	11	7	23	22	24	14
1045	1	5	11	7	23	22	24	20
1046	1	5	11	9	23	6	12	22
1047	1	5	11	9	23	6	22	14
1048	1	5	11	9	23	14	20	8
1049	1	5	11	9	23	16	22	24
1050	1	5	11	9	23	18	24	10
1051	1	5	11	9	23	20	2	14
1052	1	5	11	9	23	24	4	14
1053	1	5	11	10	23	9	14	24
1054	1	5	11	10	23	17	22	24
1055	1	5	11	12	20	3	18	16
1056	1	5	11	12	23	9	24	10
1057	1	5	11	12	23	17	4	10
1058	1	5	11	14	19	3	20	18
1059	1	5	11	14	22	16	7	23
1060	1	5	11	16	12	20	9	23
1061	1	5	11	16	20	12	23	9
1062	1	5	11	16	22	14	23	7
1063	1	5	11	16	22	17	20	24
1064	1	5	11	17	18	10	24	12
1065	1	5	11	17	19	24	6	18
1066	1	5	11	17	23	12	24	20
1067	1	5	11	17	23	14	22	6
1068	1	5	11	17	23	16	20	22
1069	1	5	11	17	23	24	12	8
1070	1	5	11	17	23	24	14	20
1071	1	5	11	17	24	22	14	6
1072	1	5	11	18	20	24	7	17
1073	1	5	11	18	23	7	24	14
1074	1	5	11	19	16	8	20	14
1075	1	5	11	19	17	24	8	20
1076	1	5	11	19	20	24	8	16
1077	1	5	11	19	22	12	24	8

1078	1	5	11	19	23	18	14	6
1079	1	5	11	19	23	18	14	20
1080	1	5	11	19	23	24	20	8
1081	1	5	11	19	23	24	20	18
1082	1	5	11	20	18	24	9	19
1083	1	5	11	20	23	9	24	14
1084	1	5	12	6	17	8	10	24
1085	1	5	12	6	23	22	8	10
1086	1	5	12	6	23	22	24	18
1087	1	5	12	7	20	18	3	15
1088	1	5	12	7	20	22	23	15
1089	1	5	12	7	20	23	22	24
1090	1	5	12	7	22	9	10	24
1091	1	5	12	7	22	23	8	24
1092	1	5	12	7	22	23	24	20
1093	1	5	12	7	23	10	11	9
1094	1	5	12	7	24	11	8	22
1095	1	5	12	7	24	11	10	8
1096	1	5	12	7	24	18	3	11
1097	1	5	12	7	24	22	23	11
1098	1	5	12	7	24	23	22	20
1099	1	5	12	9	20	19	2	22
1100	1	5	12	9	24	19	18	6
1101	1	5	12	9	24	23	4	18
1102	1	5	12	11	22	23	10	24
1103	1	5	12	11	24	7	22	10
1104	1	5	12	11	24	7	22	18
1105	1	5	12	15	20	19	10	8
1106	1	5	12	15	24	19	10	20
1107	1	5	12	17	22	11	18	6
1108	1	5	12	17	24	7	22	10
1109	1	5	12	17	24	19	10	6
1110	1	5	12	18	11	10	20	22
1111	1	5	12	18	11	20	10	24
1112	1	5	12	18	23	16	22	20
1113	1	5	12	19	20	17	16	24
1114	1	5	12	19	22	17	24	20
1115	1	6	2	8	21	9	14	22
1116	1	6	2	8	21	11	10	22
1117	1	6	2	8	21	17	16	22
1118	1	6	2	12	19	9	18	22
1119	1	6	2	12	19	15	10	22
1120	1	6	2	12	23	19	8	22
1121	1	6	2	14	18	16	11	23
1122	1	6	2	14	21	22	17	23
1123	1	6	2	14	22	8	23	21
1124	1	6	2	14	23	7	10	18
1125	1	6	2	14	23	19	22	18
1126	1	6	2	15	23	16	8	22
1127	1	6	2	16	21	17	22	18

1128	1	6	2	16	23	21	18	22
1129	1	6	2	18	22	12	11	17
1130	1	6	2	18	22	12	11	23
1131	1	6	2	18	23	16	11	17
1132	1	6	3	7	24	21	10	22
1133	1	6	3	9	21	11	22	24
1134	1	6	3	11	19	17	22	24
1135	1	6	3	11	21	7	8	24
1136	1	6	3	11	24	4	17	21
1137	1	6	3	11	24	5	10	18
1138	1	6	3	11	24	9	22	16
1139	1	6	3	11	24	22	9	19
1140	1	6	3	15	22	19	24	18
1141	1	6	3	15	24	4	17	19
1142	1	6	3	15	24	22	21	19
1143	1	6	3	17	18	16	21	19
1144	1	6	3	17	19	5	16	24
1145	1	6	3	17	19	11	22	18
1146	1	6	3	17	19	21	12	24
1147	1	6	3	17	24	5	16	18
1148	1	6	3	17	24	21	12	18
1149	1	6	3	17	24	22	15	19
1150	1	6	3	19	18	11	24	22
1151	1	6	3	19	21	11	12	16
1152	1	6	3	19	21	11	12	24
1153	1	6	3	19	22	8	17	15
1154	1	6	3	19	22	18	21	15
1155	1	6	3	19	24	9	22	16
1156	1	6	4	7	23	14	8	16
1157	1	6	4	8	19	21	14	24
1158	1	6	4	8	21	23	14	24
1159	1	6	4	10	19	23	14	24
1160	1	6	4	11	21	14	8	16
1161	1	6	4	12	17	11	8	24
1162	1	6	4	12	17	21	18	24
1163	1	6	4	14	16	8	17	23
1164	1	6	4	14	16	18	11	23
1165	1	6	4	14	23	7	8	16
1166	1	6	4	16	15	9	18	24
1167	1	6	4	16	15	17	12	24
1168	1	6	4	16	15	19	18	24
1169	1	6	4	17	21	12	8	24
1170	1	6	4	18	21	7	12	16
1171	1	6	4	18	21	19	24	16
1172	1	6	4	19	21	10	12	24
1173	1	6	5	7	22	24	15	23
1174	1	6	5	9	22	24	19	23
1175	1	6	5	9	23	19	24	22
1176	1	6	5	11	17	7	10	24
1177	1	6	5	11	17	19	22	24

1178	1	6	5	11	24	3	14	16
1179	1	6	5	11	24	14	3	17
1180	1	6	5	11	24	23	22	16
1181	1	6	5	12	22	3	11	19
1182	1	6	5	12	24	23	7	17
1183	1	6	5	14	24	3	17	19
1184	1	6	5	15	19	3	14	22
1185	1	6	5	15	22	9	8	14
1186	1	6	5	15	22	9	24	14
1187	1	6	5	15	22	24	9	19
1188	1	6	5	15	22	24	23	19
1189	1	6	5	16	18	7	15	17
1190	1	6	5	16	22	11	7	23
1191	1	6	5	17	14	18	19	23
1192	1	6	5	17	22	24	11	19
1193	1	6	5	17	24	18	19	23
1194	1	6	5	18	16	9	15	19
1195	1	6	5	18	22	9	11	23
1196	1	6	5	19	17	23	14	24
1197	1	6	5	19	22	9	24	14
1198	1	6	7	9	23	5	12	24
1199	1	6	7	11	16	5	14	24
1200	1	6	7	11	16	14	5	23
1201	1	6	7	11	23	5	14	24
1202	1	6	7	11	24	14	5	23
1203	1	6	7	15	17	5	14	18
1204	1	6	7	15	22	3	16	14
1205	1	6	7	15	22	16	3	17
1206	1	6	7	17	22	24	23	21
1207	1	6	8	7	23	16	2	22
1208	1	6	8	9	23	16	24	12
1209	1	6	8	10	24	4	21	17
1210	1	6	8	10	24	12	21	9
1211	1	6	8	10	24	14	7	9
1212	1	6	8	10	24	22	3	17
1213	1	6	8	11	19	14	4	16
1214	1	6	8	12	15	5	16	24
1215	1	6	8	12	22	24	7	23
1216	1	6	8	12	23	19	2	16
1217	1	6	8	14	21	10	23	11
1218	1	6	8	14	24	4	17	11
1219	1	6	8	15	19	24	10	14
1220	1	6	8	16	14	24	11	23
1221	1	6	8	19	23	16	14	22
1222	1	6	9	7	18	14	3	21
1223	1	6	9	7	22	8	5	23
1224	1	6	9	7	22	8	23	21
1225	1	6	9	7	22	24	21	23
1226	1	6	9	7	23	15	2	14
1227	1	6	9	8	22	7	23	21

1228	1	6	9	10	22	5	23	19
1229	1	6	9	11	24	19	22	8
1230	1	6	9	12	24	15	7	23
1231	1	6	9	14	22	5	15	23
1232	1	6	9	14	22	15	5	23
1233	1	6	9	15	14	5	16	22
1234	1	6	9	15	14	16	5	23
1235	1	6	9	15	22	18	3	19
1236	1	6	9	19	12	15	10	22
1237	1	6	9	19	12	16	11	21
1238	1	6	9	19	21	11	18	24
1239	1	6	9	19	21	15	22	24
1240	1	6	10	8	24	4	17	19
1241	1	6	10	9	23	12	22	24
1242	1	6	10	12	24	4	17	19
1243	1	6	10	14	17	8	23	15
1244	1	6	10	14	17	18	5	15
1245	1	6	10	18	22	12	19	23
1246	1	6	10	18	22	14	21	23
1247	1	6	10	18	23	24	11	9
1248	1	6	10	19	17	24	8	22
1249	1	6	11	7	16	22	5	23
1250	1	6	11	7	21	9	22	14
1251	1	6	11	7	21	17	2	14
1252	1	6	11	7	22	24	21	23
1253	1	6	11	7	22	24	23	21
1254	1	6	11	7	23	9	22	12
1255	1	6	11	7	23	17	2	12
1256	1	6	11	9	16	24	5	23
1257	1	6	11	9	19	3	14	18
1258	1	6	11	17	14	24	7	23
1259	1	6	11	17	18	24	5	19
1260	1	6	11	17	18	24	7	23
1261	1	6	11	17	21	19	22	24
1262	1	6	11	17	22	12	19	23
1263	1	6	11	17	22	14	21	23
1264	1	6	11	19	22	18	23	21
1265	1	6	12	8	17	5	16	24
1266	1	6	12	8	19	5	16	24
1267	1	6	12	8	21	23	22	24
1268	1	6	12	8	23	11	10	24
1269	1	6	12	10	21	19	2	22
1270	1	6	12	10	24	18	19	5
1271	1	6	12	10	24	18	19	23
1272	1	6	12	16	11	21	8	24
1273	1	6	12	16	11	22	9	23
1274	1	6	12	16	21	11	18	24
1275	1	6	12	16	21	15	22	24
1276	1	6	12	16	22	18	21	23
1277	1	6	12	18	17	10	23	11

1278	1	6	12	18	21	19	24	22
1279	1	6	12	18	23	22	15	5
1280	1	6	12	18	23	22	19	5
1281	1	7	2	10	23	12	22	18
1282	1	7	2	11	22	12	5	23
1283	1	7	2	11	22	20	21	23
1284	1	7	2	12	21	20	16	18
1285	1	7	2	14	23	20	22	18
1286	1	7	2	15	21	4	17	23
1287	1	7	2	15	21	20	9	23
1288	1	7	2	15	23	4	17	21
1289	1	7	2	15	23	20	9	21
1290	1	7	2	17	21	20	11	23
1291	1	7	3	9	21	14	20	18
1292	1	7	3	9	21	20	14	18
1293	1	7	3	9	22	6	8	24
1294	1	7	3	9	22	8	6	24
1295	1	7	3	9	24	12	22	16
1296	1	7	3	9	24	22	12	16
1297	1	7	3	10	24	5	8	20
1298	1	7	3	10	24	18	21	15
1299	1	7	3	11	18	10	20	22
1300	1	7	3	11	20	4	12	24
1301	1	7	3	11	22	14	24	18
1302	1	7	3	11	24	4	14	16
1303	1	7	3	12	18	10	9	21
1304	1	7	3	12	18	20	17	21
1305	1	7	3	12	24	22	21	17
1306	1	7	3	14	20	21	8	24
1307	1	7	3	14	22	8	21	15
1308	1	7	3	14	24	6	21	15
1309	1	7	3	14	24	21	8	20
1310	1	7	3	15	16	20	18	24
1311	1	7	3	15	18	10	24	22
1312	1	7	3	15	21	4	18	24
1313	1	7	3	15	21	6	22	24
1314	1	7	3	15	21	20	8	24
1315	1	7	3	15	22	20	24	18
1316	1	7	3	15	24	4	18	16
1317	1	7	3	15	24	6	22	16
1318	1	7	3	15	24	20	8	16
1319	1	7	3	16	22	6	9	21
1320	1	7	3	16	22	24	17	21
1321	1	7	3	16	24	6	21	15
1322	1	7	3	17	16	8	12	24
1323	1	7	3	17	16	18	22	24
1324	1	7	3	17	21	6	10	22
1325	1	7	3	17	21	20	24	22
1326	1	7	3	17	22	6	10	18
1327	1	7	3	17	22	6	16	24

1328	1	7	3	17	22	20	12	24
1329	1	7	3	17	22	20	24	18
1330	1	7	3	17	24	12	10	22
1331	1	7	3	17	24	22	20	16
1332	1	7	3	18	15	9	16	24
1333	1	7	3	18	15	17	20	24
1334	1	7	3	18	17	11	22	20
1335	1	7	3	18	20	5	16	24
1336	1	7	3	18	20	21	12	24
1337	1	7	3	18	22	6	17	15
1338	1	7	3	18	22	14	9	15
1339	1	7	3	18	22	20	21	15
1340	1	7	3	18	24	9	16	22
1341	1	7	3	18	24	16	9	15
1342	1	7	3	18	24	17	20	22
1343	1	7	3	18	24	22	15	17
1344	1	7	4	9	24	3	12	20
1345	1	7	4	9	24	14	23	15
1346	1	7	4	11	17	10	21	23
1347	1	7	4	11	17	18	21	23
1348	1	7	4	11	20	3	14	24
1349	1	7	4	11	20	5	8	24
1350	1	7	4	11	20	10	21	17
1351	1	7	4	11	20	18	21	17
1352	1	7	4	11	20	23	8	24
1353	1	7	4	11	24	3	14	16
1354	1	7	4	11	24	5	8	16
1355	1	7	4	11	24	23	8	16
1356	1	7	4	15	16	14	9	21
1357	1	7	4	15	20	10	5	23
1358	1	7	4	15	23	10	5	17
1359	1	7	4	17	23	6	11	21
1360	1	7	5	9	22	8	10	14
1361	1	7	5	9	22	18	20	14
1362	1	7	5	9	24	4	8	20
1363	1	7	5	9	24	8	10	12
1364	1	7	5	9	24	18	20	12
1365	1	7	5	10	20	3	12	24
1366	1	7	5	10	20	14	23	17
1367	1	7	5	10	24	12	3	15
1368	1	7	5	11	22	2	12	20
1369	1	7	5	11	22	12	2	20
1370	1	7	5	11	23	18	24	14
1371	1	7	5	11	23	24	18	14
1372	1	7	5	14	15	9	22	24
1373	1	7	5	14	16	24	17	23
1374	1	7	5	14	22	2	15	17
1375	1	7	5	14	22	24	23	17
1376	1	7	5	14	24	3	16	20
1377	1	7	5	14	24	23	8	20

1378	1	7	5	15	16	12	8	20
1379	1	7	5	15	16	22	18	20
1380	1	7	5	15	18	14	4	24
1381	1	7	5	15	20	2	16	22
1382	1	7	5	15	20	24	8	22
1383	1	7	5	15	22	2	16	20
1384	1	7	5	15	22	10	6	14
1385	1	7	5	15	22	24	8	20
1386	1	7	5	15	22	24	20	14
1387	1	7	5	15	23	10	6	22
1388	1	7	5	15	23	24	20	22
1389	1	7	5	15	24	14	4	18
1390	1	7	5	16	14	8	17	23
1391	1	7	5	16	18	20	23	17
1392	1	7	5	16	22	11	6	14
1393	1	7	5	16	24	8	17	23
1394	1	7	5	17	14	10	20	22
1395	1	7	5	17	14	20	16	22
1396	1	7	5	17	20	4	14	16
1397	1	7	5	17	20	24	12	16
1398	1	7	5	17	22	24	20	14
1399	1	7	5	17	23	4	14	20
1400	1	7	5	17	23	8	10	22
1401	1	7	5	17	23	10	20	24
1402	1	7	5	17	23	20	16	24
1403	1	7	5	17	23	24	12	20
1404	1	7	5	18	20	23	12	24
1405	1	7	5	18	22	24	11	17
1406	1	7	6	8	23	24	16	14
1407	1	7	6	9	22	8	3	21
1408	1	7	6	9	24	5	8	22
1409	1	7	6	9	24	22	21	23
1410	1	7	6	11	16	5	12	24
1411	1	7	6	11	16	21	22	24
1412	1	7	6	15	23	24	9	21
1413	1	7	6	16	17	24	12	18
1414	1	7	6	17	16	21	22	18
1415	1	7	6	17	21	4	15	23
1416	1	7	6	17	21	24	11	23
1417	1	7	6	17	24	15	10	22
1418	1	7	6	17	24	21	16	22
1419	1	7	6	18	21	24	22	14
1420	1	7	8	9	20	3	16	24
1421	1	7	8	9	20	10	23	15
1422	1	7	8	9	20	14	3	15
1423	1	7	8	9	21	10	3	15
1424	1	7	8	9	22	24	5	23
1425	1	7	8	9	24	3	16	20
1426	1	7	8	9	24	10	23	11
1427	1	7	8	9	24	14	3	11

1428	1	7	8	10	21	6	22	24
1429	1	7	8	11	20	5	10	14
1430	1	7	8	11	20	21	24	14
1431	1	7	8	11	24	3	16	12
1432	1	7	8	11	24	3	16	20
1433	1	7	8	11	24	14	5	9
1434	1	7	8	11	24	14	5	23
1435	1	7	8	11	24	22	21	9
1436	1	7	8	11	24	22	21	23
1437	1	7	8	17	22	21	20	24
1438	1	7	8	17	23	6	15	21
1439	1	7	8	17	23	16	5	11
1440	1	7	9	8	16	5	12	24
1441	1	7	9	8	21	3	10	22
1442	1	7	9	8	21	15	2	14
1443	1	7	9	8	23	15	2	12
1444	1	7	9	10	23	5	22	20
1445	1	7	9	10	24	14	5	23
1446	1	7	9	11	18	4	14	16
1447	1	7	9	11	20	8	24	14
1448	1	7	9	11	20	16	2	14
1449	1	7	9	11	22	8	24	12
1450	1	7	9	11	22	16	2	12
1451	1	7	9	11	23	22	2	14
1452	1	7	9	11	23	24	4	20
1453	1	7	9	11	24	4	14	10
1454	1	7	9	12	21	3	22	18
1455	1	7	9	12	21	23	2	18
1456	1	7	9	12	23	11	22	8
1457	1	7	9	12	23	11	22	24
1458	1	7	9	12	23	15	6	8
1459	1	7	9	12	23	15	6	24
1460	1	7	9	14	15	3	16	22
1461	1	7	9	14	20	16	5	11
1462	1	7	9	14	24	6	15	21
1463	1	7	9	15	21	2	20	16
1464	1	7	9	15	21	2	20	18
1465	1	7	9	15	21	4	24	16
1466	1	7	9	15	21	4	24	18
1467	1	7	9	15	21	20	2	16
1468	1	7	9	15	21	20	2	18
1469	1	7	9	15	21	24	4	16
1470	1	7	9	15	21	24	4	18
1471	1	7	9	15	24	4	18	10
1472	1	7	9	15	24	18	4	10
1473	1	7	9	16	22	3	18	12
1474	1	7	9	16	22	24	5	15
1475	1	7	9	16	23	5	24	14
1476	1	7	9	18	22	20	21	23
1477	1	7	10	9	20	3	18	22

1478	1	7	10	9	22	24	3	21
1479	1	7	10	9	24	11	6	8
1480	1	7	10	11	17	4	21	23
1481	1	7	10	11	18	3	20	22
1482	1	7	10	11	18	23	2	22
1483	1	7	10	11	22	3	20	14
1484	1	7	10	11	22	23	2	14
1485	1	7	10	15	20	3	18	22
1486	1	7	10	15	22	5	24	18
1487	1	7	10	15	23	24	5	17
1488	1	7	10	17	18	3	20	22
1489	1	7	10	17	18	20	3	21
1490	1	7	10	17	21	20	3	15
1491	1	7	10	17	22	3	20	14
1492	1	7	10	18	17	24	6	22
1493	1	7	11	8	20	3	12	16
1494	1	7	11	8	20	4	17	23
1495	1	7	11	8	21	9	22	12
1496	1	7	11	8	21	17	2	12
1497	1	7	11	9	22	12	20	8
1498	1	7	11	9	22	16	6	8
1499	1	7	11	9	24	10	12	6
1500	1	7	11	10	23	9	12	24
1501	1	7	11	10	23	17	24	8
1502	1	7	11	10	24	9	12	6
1503	1	7	11	12	21	17	6	8
1504	1	7	11	14	17	3	18	16
1505	1	7	11	14	20	4	17	23
1506	1	7	11	14	20	9	24	10
1507	1	7	11	14	20	10	23	9
1508	1	7	11	14	20	17	4	10
1509	1	7	11	14	23	5	16	8
1510	1	7	11	14	23	9	24	20
1511	1	7	11	14	23	17	4	20
1512	1	7	11	16	14	8	23	17
1513	1	7	11	16	21	3	20	18
1514	1	7	11	16	22	20	3	17
1515	1	7	11	16	24	8	23	17
1516	1	7	11	17	14	8	22	16
1517	1	7	11	17	14	22	8	16
1518	1	7	11	17	16	8	24	14
1519	1	7	11	17	16	24	8	14
1520	1	7	11	17	23	4	20	12
1521	1	7	11	17	23	4	20	14
1522	1	7	11	17	23	6	24	12
1523	1	7	11	17	23	6	24	14
1524	1	7	11	17	23	20	4	12
1525	1	7	11	17	23	20	4	14
1526	1	7	11	17	23	24	6	12
1527	1	7	11	17	23	24	6	14

1528	1	7	12	9	15	22	3	21
1529	1	7	12	9	20	5	16	24
1530	1	7	12	9	20	18	3	11
1531	1	7	12	9	20	22	23	11
1532	1	7	12	9	24	11	8	6
1533	1	7	12	9	24	11	8	22
1534	1	7	12	11	20	5	16	24
1535	1	7	12	11	20	10	21	9
1536	1	7	12	11	20	18	5	9
1537	1	7	12	11	24	5	16	8
1538	1	7	12	11	24	17	4	20
1539	1	7	12	11	24	22	9	5
1540	1	7	12	15	18	5	20	24
1541	1	7	12	15	18	9	22	10
1542	1	7	12	15	18	21	4	24
1543	1	7	12	15	24	9	22	18
1544	1	7	12	15	24	22	9	5
1545	1	7	12	17	23	22	11	5
1546	1	8	2	10	19	11	20	22
1547	1	8	2	10	19	12	21	23
1548	1	8	2	10	23	7	6	22
1549	1	8	2	10	23	21	20	22
1550	1	8	2	12	21	16	23	19
1551	1	8	2	14	21	3	16	22
1552	1	8	2	15	23	12	6	22
1553	1	8	2	16	17	19	12	22
1554	1	8	2	16	22	6	9	19
1555	1	8	2	16	22	6	9	21
1556	1	8	2	16	22	20	23	19
1557	1	8	2	16	22	20	23	21
1558	1	8	2	17	21	6	10	22
1559	1	8	3	9	24	10	21	15
1560	1	8	3	9	24	12	5	15
1561	1	8	3	11	24	4	19	21
1562	1	8	3	11	24	7	6	16
1563	1	8	3	11	24	7	22	16
1564	1	8	3	11	24	22	7	17
1565	1	8	3	11	24	22	21	17
1566	1	8	3	17	15	7	16	24
1567	1	8	3	17	15	19	12	24
1568	1	8	3	17	15	19	20	24
1569	1	8	3	17	16	20	15	21
1570	1	8	3	17	19	5	10	22
1571	1	8	3	17	20	24	15	19
1572	1	8	3	17	22	5	10	20
1573	1	8	3	17	22	14	7	15
1574	1	8	3	17	24	7	16	22
1575	1	8	3	17	24	16	7	15
1576	1	8	3	17	24	19	12	22
1577	1	8	3	17	24	19	20	22

1578	1	8	4	9	21	12	6	16
1579	1	8	4	12	16	6	15	23
1580	1	8	4	12	16	20	9	23
1581	1	8	4	12	20	2	15	23
1582	1	8	4	12	20	24	21	23
1583	1	8	4	12	23	2	15	17
1584	1	8	4	12	23	24	21	17
1585	1	8	4	16	19	3	12	20
1586	1	8	4	16	20	2	15	21
1587	1	8	4	16	20	24	9	21
1588	1	8	4	16	21	2	15	19
1589	1	8	4	16	21	24	9	19
1590	1	8	4	16	24	6	23	15
1591	1	8	4	17	21	24	10	20
1592	1	8	5	9	24	4	15	23
1593	1	8	5	9	24	6	7	23
1594	1	8	5	9	24	22	23	19
1595	1	8	5	10	24	7	23	15
1596	1	8	5	11	16	9	6	24
1597	1	8	5	11	16	9	22	24
1598	1	8	5	11	16	22	9	23
1599	1	8	5	11	16	22	19	23
1600	1	8	5	11	23	7	4	16
1601	1	8	5	11	23	7	24	16
1602	1	8	5	14	20	3	11	17
1603	1	8	5	14	24	15	3	19
1604	1	8	5	15	17	3	12	22
1605	1	8	5	15	20	2	17	23
1606	1	8	5	15	22	7	24	14
1607	1	8	5	15	22	24	7	17
1608	1	8	5	15	23	9	6	22
1609	1	8	5	17	16	20	23	19
1610	1	8	6	9	23	4	12	24
1611	1	8	6	10	17	11	24	22
1612	1	8	6	10	24	4	21	19
1613	1	8	6	10	24	22	3	19
1614	1	8	6	11	19	14	4	16
1615	1	8	6	12	17	10	5	19
1616	1	8	6	14	19	11	4	16
1617	1	8	6	14	23	9	22	24
1618	1	8	6	14	24	4	17	11
1619	1	8	6	14	24	22	7	11
1620	1	8	6	15	19	16	2	22
1621	1	8	6	16	14	24	19	23
1622	1	8	6	16	22	2	17	15
1623	1	8	6	16	22	24	7	15
1624	1	8	7	9	20	2	15	23
1625	1	8	7	9	20	11	24	16
1626	1	8	7	9	20	14	3	15
1627	1	8	7	9	21	15	24	14

1628	1	8	7	9	21	23	24	22
1629	1	8	7	9	23	5	6	22
1630	1	8	7	9	23	15	24	12
1631	1	8	7	9	24	14	3	11
1632	1	8	7	11	16	3	14	24
1633	1	8	7	11	16	14	3	21
1634	1	8	7	11	24	22	21	23
1635	1	8	7	15	14	9	24	22
1636	1	8	7	15	14	24	9	23
1637	1	8	7	15	22	24	9	23
1638	1	8	7	15	23	9	24	22
1639	1	8	7	17	15	23	24	20
1640	1	8	7	17	22	16	3	15
1641	1	8	7	17	22	24	23	21
1642	1	8	7	17	24	16	5	11
1643	1	8	9	10	22	3	19	21
1644	1	8	9	15	14	3	16	22
1645	1	8	9	15	14	16	3	21
1646	1	8	9	15	20	2	19	21
1647	1	8	9	15	20	2	21	19
1648	1	8	9	15	21	3	16	22
1649	1	8	9	15	22	16	3	21
1650	1	8	10	12	17	6	21	15
1651	1	8	10	12	17	20	3	15
1652	1	8	10	14	19	5	22	24
1653	1	8	10	14	19	23	4	24
1654	1	8	10	15	17	24	6	14
1655	1	8	11	9	20	3	16	14
1656	1	8	11	9	24	12	19	23
1657	1	8	11	9	24	16	23	7
1658	1	8	11	17	16	7	24	14
1659	1	8	11	17	16	19	4	14
1660	1	8	11	17	23	7	24	16
1661	1	8	11	17	23	19	4	16
1662	1	8	12	10	19	6	17	11
1663	1	8	12	10	19	20	3	11
1664	1	8	12	11	19	20	4	10
1665	1	8	12	11	21	10	22	24
1666	1	8	12	15	23	10	22	20
1667	1	8	12	16	17	6	19	11
1668	1	8	12	16	17	20	5	11
1669	1	9	2	11	20	10	21	19
1670	1	9	2	11	21	12	23	19
1671	1	9	2	11	22	8	23	21
1672	1	9	2	11	22	12	3	21
1673	1	9	2	11	23	4	19	21
1674	1	9	2	12	23	22	20	18
1675	1	9	2	15	20	10	5	23
1676	1	9	2	15	20	22	21	23
1677	1	9	2	15	21	20	7	23

1678	1	9	2	15	21	20	23	19
1679	1	9	2	15	23	10	5	19
1680	1	9	2	15	23	22	21	19
1681	1	9	2	16	19	4	14	20
1682	1	9	2	16	21	6	8	22
1683	1	9	3	10	24	5	6	18
1684	1	9	3	10	24	6	7	15
1685	1	9	3	10	24	20	21	15
1686	1	9	3	10	24	21	22	18
1687	1	9	3	11	21	2	14	22
1688	1	9	3	11	21	8	20	16
1689	1	9	3	11	21	12	24	18
1690	1	9	3	11	21	14	2	22
1691	1	9	3	11	21	20	8	16
1692	1	9	3	11	21	24	12	18
1693	1	9	3	11	22	2	12	20
1694	1	9	3	11	22	8	24	20
1695	1	9	3	11	22	12	2	20
1696	1	9	3	11	22	24	8	20
1697	1	9	3	11	24	4	20	18
1698	1	9	3	11	24	20	4	18
1699	1	9	3	12	22	16	5	15
1700	1	9	3	14	18	24	15	21
1701	1	9	3	14	19	5	22	24
1702	1	9	3	14	19	21	6	24
1703	1	9	3	14	22	6	21	15
1704	1	9	3	14	22	16	5	15
1705	1	9	3	14	22	20	7	15
1706	1	9	3	14	24	5	22	18
1707	1	9	3	14	24	21	6	18
1708	1	9	3	15	18	14	4	24
1709	1	9	3	15	19	4	14	18
1710	1	9	3	15	19	16	4	24
1711	1	9	3	15	19	22	10	18
1712	1	9	3	15	20	2	16	22
1713	1	9	3	15	22	2	16	20
1714	1	9	3	15	24	4	20	16
1715	1	9	3	15	24	14	4	18
1716	1	9	3	16	18	22	11	19
1717	1	9	3	16	19	5	8	22
1718	1	9	3	16	19	21	24	22
1719	1	9	3	16	22	5	8	20
1720	1	9	3	16	22	21	24	20
1721	1	9	4	11	16	5	14	24
1722	1	9	4	11	16	7	8	24
1723	1	9	4	11	16	21	8	24
1724	1	9	4	11	18	12	5	19
1725	1	9	4	11	20	5	14	16
1726	1	9	4	11	20	7	8	16
1727	1	9	4	11	20	21	8	16

1728	1	9	4	15	20	10	3	21
1729	1	9	4	15	21	10	3	19
1730	1	9	4	15	23	6	7	21
1731	1	9	4	16	21	24	8	20
1732	1	9	5	10	18	12	23	19
1733	1	9	5	10	23	15	2	14
1734	1	9	5	10	23	19	2	22
1735	1	9	5	10	24	4	15	23
1736	1	9	5	10	24	6	7	23
1737	1	9	5	11	22	6	24	18
1738	1	9	5	11	23	2	18	20
1739	1	9	5	11	23	4	16	24
1740	1	9	5	11	23	16	2	14
1741	1	9	5	11	23	16	4	12
1742	1	9	5	11	23	18	2	22
1743	1	9	5	11	23	20	24	14
1744	1	9	5	11	24	4	16	12
1745	1	9	5	12	16	24	19	23
1746	1	9	5	12	19	3	20	24
1747	1	9	5	12	19	15	4	16
1748	1	9	5	15	18	14	2	22
1749	1	9	5	15	19	12	4	16
1750	1	9	5	15	19	24	6	22
1751	1	9	5	15	22	24	6	18
1752	1	9	5	15	23	4	18	12
1753	1	9	5	16	22	8	7	23
1754	1	9	6	10	21	2	18	22
1755	1	9	6	10	23	4	12	24
1756	1	9	6	11	16	3	12	24
1757	1	9	6	11	16	23	22	24
1758	1	9	6	11	24	5	8	22
1759	1	9	6	15	21	24	7	23
1760	1	9	7	11	18	4	14	16
1761	1	9	7	11	20	16	2	14
1762	1	9	7	11	21	4	20	24
1763	1	9	7	11	21	6	8	12
1764	1	9	7	11	22	16	2	12
1765	1	9	7	11	23	22	2	14
1766	1	9	7	11	23	22	2	20
1767	1	9	7	11	24	4	14	10
1768	1	9	7	11	24	4	20	12
1769	1	9	7	12	15	5	8	22
1770	1	9	7	12	15	21	24	22
1771	1	9	7	12	16	2	15	23
1772	1	9	7	12	16	15	2	20
1773	1	9	7	12	22	16	3	11
1774	1	9	7	14	22	23	8	24
1775	1	9	7	14	23	21	2	16
1776	1	9	7	15	21	2	16	22
1777	1	9	7	15	21	4	24	16

1778	1	9	7	15	21	16	2	22
1779	1	9	7	15	21	24	4	16
1780	1	9	7	15	24	4	18	10
1781	1	9	7	15	24	6	22	10
1782	1	9	7	15	24	18	4	10
1783	1	9	7	15	24	22	6	10
1784	1	9	7	16	12	15	6	24
1785	1	9	7	16	15	3	14	20
1786	1	9	7	16	22	24	5	15
1787	1	9	7	16	23	5	24	14
1788	1	9	7	16	24	3	18	12
1789	1	9	7	16	24	6	23	11
1790	1	9	7	16	24	23	6	12
1791	1	9	8	10	21	24	6	12
1792	1	9	8	11	20	3	10	14
1793	1	9	8	11	20	23	24	14
1794	1	9	8	11	24	3	16	20
1795	1	9	8	14	15	2	16	22
1796	1	9	8	14	15	16	2	20
1797	1	9	8	15	12	5	16	24
1798	1	9	8	15	24	5	16	20
1799	1	9	10	11	14	5	20	22
1800	1	9	10	11	14	21	2	22
1801	1	9	10	11	18	5	20	14
1802	1	9	10	11	18	21	2	14
1803	1	9	10	11	24	7	14	22
1804	1	9	10	14	19	4	20	24
1805	1	9	10	14	21	18	2	22
1806	1	9	10	15	21	4	23	19
1807	1	9	10	15	21	24	3	19
1808	1	9	10	15	22	7	24	20
1809	1	9	11	10	19	5	18	12
1810	1	9	11	10	19	21	2	12
1811	1	9	11	10	21	7	12	8
1812	1	9	11	12	19	21	4	10
1813	1	9	11	12	20	4	19	23
1814	1	9	11	12	20	7	22	10
1815	1	9	11	12	20	19	2	10
1816	1	9	11	12	23	7	22	20
1817	1	9	11	12	23	19	2	20
1818	1	9	11	12	24	20	3	7
1819	1	9	11	12	24	20	3	19
1820	1	9	11	14	21	7	16	24
1821	1	9	11	16	12	18	3	21
1822	1	9	11	16	20	4	23	19
1823	1	9	11	16	20	24	3	19
1824	1	9	12	11	20	5	16	24
1825	1	9	12	11	20	7	16	8
1826	1	9	12	11	20	19	4	8
1827	1	9	12	11	23	10	19	5

1828	1	9	12	11	23	22	7	5
1829	1	9	12	11	24	7	16	20
1830	1	9	12	11	24	19	4	20
1831	1	9	12	11	24	22	3	7
1832	1	9	12	15	10	7	20	24
1833	1	9	12	15	10	8	21	23
1834	1	9	12	15	10	20	5	23
1835	1	9	12	15	18	5	20	24
1836	1	9	12	15	18	7	22	10
1837	1	9	12	15	18	23	4	24
1838	1	9	12	15	23	8	21	19
1839	1	9	12	15	23	20	5	19
1840	1	9	12	15	23	22	7	5
1841	1	9	12	16	21	8	24	20
1842	1	9	12	16	23	22	6	18
1843	1	10	2	11	21	4	12	18
1844	1	10	2	11	21	12	4	18
1845	1	10	2	12	19	4	9	23
1846	1	10	2	12	19	17	22	20
1847	1	10	2	12	21	3	18	22
1848	1	10	2	12	21	11	4	18
1849	1	10	2	14	17	7	20	22
1850	1	10	2	14	17	8	7	23
1851	1	10	2	14	17	15	6	22
1852	1	10	2	14	17	19	8	22
1853	1	10	2	14	18	4	15	21
1854	1	10	2	14	21	7	6	18
1855	1	10	2	14	21	15	4	18
1856	1	10	2	14	23	17	4	20
1857	1	10	2	15	23	4	20	18
1858	1	10	3	11	19	5	6	24
1859	1	10	3	11	19	21	22	24
1860	1	10	3	15	17	7	8	20
1861	1	10	3	15	18	7	24	22
1862	1	10	3	15	18	22	9	19
1863	1	10	3	15	24	21	22	20
1864	1	10	4	11	23	20	2	18
1865	1	10	4	12	23	19	2	20
1866	1	10	4	14	17	2	15	23
1867	1	10	4	14	17	19	24	20
1868	1	10	4	14	17	24	21	23
1869	1	10	4	14	19	3	8	20
1870	1	10	4	14	19	8	5	17
1871	1	10	4	14	19	11	2	20
1872	1	10	4	14	20	2	15	17
1873	1	10	4	14	20	24	21	17
1874	1	10	4	14	21	3	18	24
1875	1	10	4	14	23	17	2	18
1876	1	10	4	14	24	6	23	19
1877	1	10	5	11	17	23	22	24

1878	1	10	5	11	23	19	2	14
1879	1	10	5	11	23	19	2	22
1880	1	10	5	15	18	14	3	17
1881	1	10	6	11	17	4	12	18
1882	1	10	6	12	15	19	24	22
1883	1	10	6	12	21	3	22	18
1884	1	10	6	12	21	23	2	18
1885	1	10	6	12	23	4	17	11
1886	1	10	6	12	23	17	4	24
1887	1	10	6	12	24	4	21	19
1888	1	10	6	12	24	22	3	19
1889	1	10	6	14	17	7	24	18
1890	1	10	6	14	17	15	2	18
1891	1	10	6	15	21	4	24	18
1892	1	10	6	15	21	24	4	18
1893	1	10	7	11	22	3	20	14
1894	1	10	7	11	23	21	2	12
1895	1	10	7	11	24	4	9	21
1896	1	10	7	15	12	8	21	23
1897	1	10	7	15	20	2	17	23
1898	1	10	7	15	20	24	5	23
1899	1	10	8	11	21	22	24	12
1900	1	10	8	11	23	6	12	24
1901	1	10	8	12	15	6	21	19
1902	1	10	8	12	19	2	17	15
1903	1	10	8	12	19	24	3	15
1904	1	10	8	12	21	23	4	24
1905	1	10	8	14	21	3	22	20
1906	1	10	8	14	21	23	2	20
1907	1	10	8	14	24	4	21	17
1908	1	10	8	14	24	22	3	17
1909	1	10	9	11	14	5	20	22
1910	1	10	9	11	14	22	3	21
1911	1	10	9	11	19	3	18	14
1912	1	10	9	11	19	23	2	14
1913	1	10	9	11	21	3	18	12
1914	1	10	9	11	21	23	2	12
1915	1	10	9	11	23	5	12	8
1916	1	10	9	12	18	3	19	15
1917	1	10	9	14	18	3	21	15
1918	1	10	9	15	20	2	19	21
1919	1	10	9	15	20	4	23	21
1920	1	10	9	15	20	24	3	21
1921	1	10	9	15	23	19	2	18
1922	1	10	12	11	21	22	24	8
1923	1	11	2	14	19	10	4	20
1924	1	11	2	14	23	18	4	20
1925	1	11	3	12	18	24	17	21
1926	1	11	3	12	21	19	24	18
1927	1	11	3	14	16	17	4	24

1928	1	11	3	14	22	2	17	21
1929	1	11	3	14	24	4	17	21
1930	1	11	5	12	18	3	6	22
1931	1	11	5	12	18	20	23	17
1932	1	11	5	14	16	3	20	24
1933	1	11	5	14	17	3	8	20
1934	1	11	5	14	24	3	20	16
1935	1	11	7	12	17	23	24	18
1936	1	11	7	12	18	24	3	17
1937	1	11	7	14	16	4	23	21
1938	1	11	7	14	16	24	3	21
1939	1	11	7	14	17	3	18	16
1940	1	11	7	14	21	3	22	20
1941	1	11	7	14	21	23	2	20
1942	1	11	7	14	24	4	21	17
1943	1	11	7	14	24	22	3	17
1944	1	11	8	14	17	22	2	16
1945	1	11	9	14	21	7	20	24
1946	1	11	9	14	21	19	4	24
1947	1	11	9	14	22	20	5	23
1948	1	11	10	12	21	6	18	24

Табл. 5.5.2

От представленной исходной группы МК (Табл. 5.5.2, 1948 вариантов), путём описанных тождественных преобразований, можно получить ещё 5844 варианта МК (1948+1948+1948), то есть группа МК с числом 1 в ячейке А1 содержит 7792 варианта МК.

От МК с числом 1 в ячейке А1, путём универсального преобразования ($26-X_i$) можно получить 7792 варианта МК с числом 1 в ячейке В2.

Также от МК с числом 1 в ячейке А1, путём перестановки первой и второй строк можно получить 7792 варианта МК с числом 1 в ячейке А2.

Также от МК с числом 1 в ячейке А1, путём перестановки первого и второго столбцов можно получить 7792 МК с числом 1 в ячейке В1.

Таким образом, суммарное число МК с числом 1 в ячейках А1, В1, А2, В2 составит 31168 вариантов.

Для поиска МК с числом 1 в крест-образующих ячейках достаточно получить МК с числом 1 в ячейке С1.

Действительно, путём невариантных преобразований (поворотами вокруг ячейки С3) и тождественных преобразований (перестановками второй и четвёртой строк, а затем второго и четвёртого столбцов), число 1 из любой крест-образующей ячейки можно переместить в ячейку С1.

Перед поиском МК этой группы, выражения для чисел МК удобнее представить в виде Табл.5.5.3 (это связано с изменением положения оси симметрии).

X_1	X_2	1	$-X_1-X_2-X_5+64$	X_5
$-X_2+26$	$-X_1+26$	25	$-X_5+26$	$X_1+X_2+X_5-38$
X_{11}	$-X_{11}+26$	13	X_{14}*	X_{15}*
X_{16}*	$-X_{21}+26$	$-X_{23}+26$	$-X_{25}+26$	X_{20}*
X_{21}	X_{22}*	X_{23}	X_{24}*	X_{25}

Табл.5.5.3

X_{14}*=$2X_1+2X_5+X_{11}+2X_{21}+X_{23}+2X_{25}-129$;
X_{15}*=$-2X_1-2X_5-X_{11}-2X_{21}-X_{23}-2X_{25}+155$;
X_{16}*=$-X_1+X_2-X_{11}-X_{21}+39$;
X_{20}*=$X_1-X_2+X_{11}+2X_{21}+X_{23}+X_{25}-52$;
X_{22}*=$X_1-X_2+X_{11}+X_{21}-13$;
X_{24}*=$-X_1+X_2-X_{11}-2X_{21}-X_{23}-X_{25}+78$;

Кроме того, учитывая сохранение свойств рассматриваемой группы МК при перестановке четвёртой и пятой строк, или первого и второго столбцов, или четвёртого и пятого столбцов, а также при комбинации этих перестановок, достаточно представить только одну восьмую часть МК (при $X_{12}<X_{11}$, $X_{15}<X_{14}$, $X_{18}<X_{23}$), а остальные семь типов МК получить при помощи этих преобразований.

В Табл. 5.5.4 приведены значения независимых переменных для такой исходной группы магических квадратов, полученных компьютерным перебором (при $X_{12}<X_{11}$, $X_{15}<X_{14}$, $X_{18}<X_{23}$), а значения зависимых переменных должны определяться в соответствии с выражениями в Табл. 5.5.3.

№ п/п	X_3	X_{23}	X_{11}	X_1	X_{25}	X_5	X_2	X_{21}
1	1	15	14	4	9	21	23	20
2	1	15	14	5	4	23	16	19
3	1	15	14	5	10	17	22	19
4	1	15	14	6	2	23	19	21
5	1	15	14	6	9	19	23	18
6	1	15	14	9	4	23	8	19
7	1	15	14	9	16	23	8	5
8	1	15	14	9	19	23	8	4
9	1	15	14	10	2	22	9	19
10	1	15	14	16	8	21	4	6
11	1	15	14	16	9	24	3	4
12	1	15	14	16	22	7	18	6
13	1	15	14	16	24	9	18	4
14	1	15	14	17	20	8	23	7
15	1	15	14	18	3	10	17	20
16	1	15	14	18	3	21	6	9
17	1	15	14	18	4	10	17	21

18	1	15	14	18	9	4	23	20
19	1	15	14	18	9	19	4	5
20	1	15	14	18	9	21	6	3
21	1	15	14	18	10	4	23	21
22	1	15	14	18	10	23	4	2
23	1	15	14	18	20	4	23	9
24	1	15	14	18	20	10	17	3
25	1	15	14	18	22	6	17	5
26	1	15	14	18	23	10	17	2
27	1	15	14	19	23	2	21	9
28	1	15	14	20	4	9	16	18
29	1	15	14	20	4	9	19	21
30	1	15	14	20	10	3	22	18
31	1	15	14	20	23	9	19	2
32	1	15	14	21	3	24	9	6
33	1	15	14	21	9	4	23	20
34	1	15	14	22	2	23	9	7
35	1	15	14	22	2	23	10	7
36	1	15	14	23	2	9	22	19
37	1	15	14	23	2	22	10	7
38	1	15	14	24	3	21	9	6
39	1	15	14	24	4	8	23	19
40	1	15	14	24	6	21	9	3
41	1	15	14	24	16	8	23	5
42	1	15	14	24	19	8	23	4
43	1	15	14	24	20	5	19	3
44	1	15	16	2	6	22	19	23
45	1	15	16	2	7	21	18	22
46	1	15	16	2	9	19	22	23
47	1	15	16	2	12	21	19	17
48	1	15	16	4	5	20	17	24
49	1	15	16	5	6	17	24	23
50	1	15	16	6	3	18	19	24
51	1	15	16	6	9	21	19	14
52	1	15	16	7	3	21	12	20
53	1	15	16	8	2	21	12	20
54	1	15	16	8	6	19	23	17
55	1	15	16	14	7	9	18	21
56	1	15	16	14	9	7	20	21
57	1	15	16	14	24	9	19	5
58	1	15	16	18	3	21	6	9
59	1	15	16	18	21	3	24	9
60	1	15	16	19	3	9	24	22
61	1	15	16	19	4	24	9	5
62	1	15	16	19	9	20	3	5
63	1	15	16	19	17	8	23	6
64	1	15	16	19	20	9	24	5
65	1	15	16	19	21	2	23	9
66	1	15	16	19	24	4	18	5
67	1	15	16	20	21	2	19	8

68	1	15	16	21	3	18	19	9
69	1	15	16	21	3	20	19	9
70	1	15	16	22	2	21	9	7
71	1	15	16	22	3	9	19	18
72	1	15	16	22	6	5	23	17
73	1	15	16	22	7	21	9	2
74	1	15	16	22	17	5	23	6
75	1	15	16	22	23	2	19	6
76	1	15	16	23	4	8	19	17
77	1	15	16	23	6	5	24	17
78	1	15	16	23	9	4	19	14
79	1	15	16	23	17	5	24	6
80	1	15	16	24	4	19	9	5
81	1	15	17	2	12	19	20	18
82	1	15	17	4	8	16	24	23
83	1	15	17	4	16	19	18	12
84	1	15	17	8	7	20	24	16
85	1	15	17	16	8	20	4	7
86	1	15	17	18	12	19	4	2
87	1	15	17	22	2	20	10	7
88	1	15	17	22	7	20	10	2
89	1	15	17	22	14	8	10	7
90	1	15	17	23	4	8	19	16
91	1	15	17	24	3	18	12	6
92	1	15	17	24	6	18	12	3
93	1	15	17	24	18	6	12	3
94	1	15	18	4	7	17	20	21
95	1	15	18	5	3	22	17	19
96	1	15	18	5	4	19	24	23
97	1	15	18	5	4	23	12	19
98	1	15	18	5	6	16	24	23
99	1	15	18	5	9	24	16	12
100	1	15	18	5	17	16	20	12
101	1	15	18	6	5	16	19	22
102	1	15	18	7	2	20	23	21
103	1	15	18	10	4	14	17	21
104	1	15	18	10	19	14	17	6
105	1	15	18	12	6	9	24	23
106	1	15	18	14	6	10	17	19
107	1	15	18	14	10	6	21	19
108	1	15	18	14	10	21	6	4
109	1	15	18	14	21	10	17	4
110	1	15	18	16	2	12	19	21
111	1	15	18	16	4	20	7	9
112	1	15	18	16	12	4	23	19
113	1	15	18	16	12	21	4	2
114	1	15	18	16	20	4	23	9
115	1	15	18	16	21	12	19	2
116	1	15	18	17	2	10	23	21
117	1	15	18	17	10	19	4	5

118	1	15	18	19	4	23	12	5
119	1	15	18	19	16	2	21	14
120	1	15	18	19	17	2	20	12
121	1	15	18	19	23	4	17	5
122	1	15	18	22	16	5	14	6
123	1	15	18	23	9	6	16	12
124	1	15	18	23	12	4	17	10
125	1	15	19	8	17	14	22	10
126	1	15	19	10	8	9	24	22
127	1	15	19	10	9	24	8	6
128	1	15	19	12	10	22	6	5
129	1	15	19	16	22	6	18	5
130	1	15	19	22	17	8	20	2
131	1	15	19	24	9	10	22	6
132	1	15	20	7	9	18	23	14
133	1	15	20	8	17	14	23	10
134	1	15	20	9	8	10	23	21
135	1	15	20	9	16	18	14	5
136	1	15	20	12	18	16	17	3
137	1	15	20	14	4	23	10	7
138	1	15	20	16	3	12	17	18
139	1	15	20	16	3	21	8	9
140	1	15	20	18	12	3	24	16
141	1	15	20	18	16	9	23	5
142	1	15	20	18	19	2	23	10
143	1	15	20	19	2	10	23	18
144	1	15	20	19	4	16	21	9
145	1	15	20	21	9	4	23	14
146	1	15	20	23	2	14	19	10
147	1	15	20	23	16	4	18	5
148	1	15	20	24	17	5	16	3
149	1	15	22	6	3	21	18	17
150	1	15	22	7	3	20	21	17
151	1	15	22	10	3	14	21	20
152	1	15	22	10	5	14	17	18
153	1	15	22	10	18	14	17	5
154	1	15	22	14	9	8	19	16
155	1	15	22	14	9	19	8	5
156	1	15	22	14	20	8	19	5
157	1	15	22	16	6	18	9	7
158	1	15	22	20	3	14	21	10
159	1	15	22	21	3	14	19	9
160	1	15	22	21	6	8	19	12
161	1	15	22	21	17	6	19	3
162	1	17	14	2	8	23	20	21
163	1	17	14	2	10	19	20	22
164	1	17	14	2	10	21	18	19
165	1	17	14	3	5	22	20	24
166	1	17	14	3	11	22	18	16
167	1	17	14	4	6	21	16	19

168	1	17	14	4	10	15	21	23
169	1	17	14	4	10	23	18	15
170	1	17	14	5	7	16	20	22
171	1	17	14	6	3	18	21	24
172	1	17	14	6	4	19	16	24
173	1	17	14	6	5	16	23	24
174	1	17	14	7	4	18	15	23
175	1	17	14	8	2	23	11	21
176	1	17	14	10	15	23	7	4
177	1	17	14	11	2	20	23	18
178	1	17	14	11	3	19	24	18
179	1	17	14	11	3	22	7	16
180	1	17	14	11	3	22	24	18
181	1	17	14	11	16	22	7	3
182	1	17	14	11	19	22	8	2
183	1	17	14	15	3	10	20	22
184	1	17	14	15	23	10	18	4
185	1	17	14	16	3	11	18	22
186	1	17	14	16	6	23	7	5
187	1	17	14	16	7	21	3	8
188	1	17	14	16	22	3	21	11
189	1	17	14	16	22	11	18	3
190	1	17	14	16	24	7	18	5
191	1	17	14	18	3	19	6	11
192	1	17	14	18	20	2	23	11
193	1	17	14	19	3	18	21	11
194	1	17	14	19	3	20	21	11
195	1	17	14	19	5	16	23	11
196	1	17	14	19	6	24	3	5
197	1	17	14	19	10	18	3	5
198	1	17	14	19	21	6	16	4
199	1	17	14	21	2	10	18	19
200	1	17	14	21	2	20	7	8
201	1	17	14	21	19	3	24	8
202	1	17	14	21	23	2	19	8
203	1	17	14	21	23	8	20	2
204	1	17	14	22	5	19	20	8
205	1	17	14	22	10	3	20	15
206	1	17	14	22	19	3	15	8
207	1	17	14	22	23	7	20	2
208	1	17	14	22	24	3	20	5
209	1	17	14	23	6	16	7	5
210	1	17	14	23	10	4	18	15
211	1	17	14	23	15	10	7	4
212	1	17	14	23	15	10	7	5
213	1	17	14	24	4	19	16	6
214	1	17	14	24	5	7	18	16
215	1	17	14	24	15	7	10	5
216	1	17	14	24	16	6	11	5
217	1	17	14	24	16	6	11	7

218	1	17	15	3	12	20	19	16
219	1	17	15	6	4	18	24	23
220	1	17	15	6	7	24	18	14
221	1	17	15	6	10	12	24	23
222	1	17	15	7	2	20	23	22
223	1	17	15	7	8	12	23	24
224	1	17	15	7	8	20	23	16
225	1	17	15	7	12	10	23	22
226	1	17	15	12	2	19	10	18
227	1	17	15	12	3	20	8	16
228	1	17	15	12	18	19	10	2
229	1	17	15	16	4	19	6	12
230	1	17	15	20	7	22	8	2
231	1	17	15	22	2	20	8	7
232	1	17	15	22	12	10	8	7
233	1	17	15	23	4	18	7	6
234	1	17	15	23	10	12	7	6
235	1	17	15	24	3	8	20	16
236	1	17	15	24	12	8	10	7
237	1	17	16	2	11	19	22	20
238	1	17	16	5	4	20	24	23
239	1	17	16	6	2	19	21	23
240	1	17	16	6	3	18	19	22
241	1	17	16	6	7	14	23	22
242	1	17	16	6	11	21	19	12
243	1	17	16	6	12	11	23	21
244	1	17	16	6	12	21	18	11
245	1	17	16	7	5	14	23	24
246	1	17	16	7	5	24	18	14
247	1	17	16	7	6	24	21	15
248	1	17	16	7	8	12	23	24
249	1	17	16	7	11	24	12	8
250	1	17	16	7	15	24	12	6
251	1	17	16	8	3	15	21	24
252	1	17	16	8	5	22	19	14
253	1	17	16	8	7	20	21	14
254	1	17	16	8	14	21	15	7
255	1	17	16	11	2	14	19	23
256	1	17	16	11	2	18	12	19
257	1	17	16	11	5	12	19	23
258	1	17	16	11	19	20	12	2
259	1	17	16	11	21	12	18	6
260	1	17	16	12	4	21	7	15
261	1	17	16	12	4	21	24	15
262	1	17	16	15	2	12	19	22
263	1	17	16	15	7	24	3	6
264	1	17	16	15	21	3	22	12
265	1	17	16	15	21	12	19	3
266	1	17	16	15	24	6	22	7
267	1	17	16	18	2	19	22	12

268	1	17	16	19	2	18	21	11
269	1	17	16	19	2	20	21	11
270	1	17	16	19	11	20	3	2
271	1	17	16	20	19	11	21	2
272	1	17	16	21	8	14	7	6
273	1	17	16	21	11	12	7	6
274	1	17	16	21	11	12	23	6
275	1	17	16	21	19	3	18	6
276	1	17	16	22	3	21	7	6
277	1	17	16	22	14	11	7	5
278	1	17	16	22	14	11	24	5
279	1	17	16	22	15	2	19	12
280	1	17	16	22	21	3	24	6
281	1	17	16	23	4	7	20	15
282	1	17	16	23	4	20	7	5
283	1	17	16	23	6	5	22	15
284	1	17	16	23	8	14	7	5
285	1	17	16	23	8	14	20	5
286	1	17	16	23	11	12	7	5
287	1	17	16	23	14	2	19	11
288	1	17	16	23	19	2	21	6
289	1	17	16	24	5	7	18	14
290	1	17	16	24	6	5	23	15
291	1	17	16	24	6	15	18	5
292	1	17	16	24	7	11	23	8
293	1	17	16	24	7	15	21	6
294	1	17	16	24	8	12	23	7
295	1	17	16	24	11	3	19	12
296	1	17	16	24	11	7	12	8
297	1	17	16	24	12	3	18	11
298	1	17	18	3	4	24	16	19
299	1	17	18	3	6	21	16	19
300	1	17	18	3	11	16	21	19
301	1	17	18	5	10	22	14	11
302	1	17	18	7	5	14	23	22
303	1	17	18	10	5	11	23	22
304	1	17	18	10	5	11	24	23
305	1	17	18	10	6	19	24	14
306	1	17	18	10	12	7	24	20
307	1	17	18	10	21	7	23	12
308	1	17	18	11	5	19	24	14
309	1	17	18	11	16	19	14	3
310	1	17	18	12	3	24	7	10
311	1	17	18	12	10	7	23	21
312	1	17	18	12	20	7	24	10
313	1	17	18	14	10	21	7	3
314	1	17	18	14	11	23	5	2
315	1	17	18	15	4	12	16	19
316	1	17	18	19	12	16	5	3
317	1	17	18	19	15	2	22	14

318	1	17	18	19	15	12	23	4
319	1	17	18	19	16	12	22	3
320	1	17	18	20	4	19	14	5
321	1	17	18	20	10	7	14	11
322	1	17	18	20	10	15	7	3
323	1	17	18	21	6	19	14	3
324	1	17	18	22	10	7	14	11
325	1	17	18	23	4	16	14	5
326	1	17	18	23	5	11	24	10
327	1	17	18	24	15	7	12	3
328	1	17	19	4	3	24	16	18
329	1	17	19	8	10	20	22	11
330	1	17	19	8	20	10	22	11
331	1	17	19	10	4	12	24	23
332	1	17	19	10	4	23	20	12
333	1	17	19	10	11	8	22	20
334	1	17	19	10	14	22	8	3
335	1	17	19	10	20	8	24	11
336	1	17	19	12	2	20	10	15
337	1	17	19	12	4	18	10	15
338	1	17	19	14	6	11	16	18
339	1	17	19	14	22	11	16	2
340	1	17	19	18	22	6	16	3
341	1	17	19	22	2	10	20	15
342	1	17	19	22	3	18	10	6
343	1	17	19	22	10	3	24	14
344	1	17	19	22	10	14	20	3
345	1	17	19	22	18	3	24	6
346	1	17	19	24	14	8	22	3
347	1	17	19	24	16	6	22	3
348	1	17	20	3	11	16	21	18
349	1	17	20	5	12	16	24	15
350	1	17	20	7	3	24	18	14
351	1	17	20	7	14	16	23	11
352	1	17	20	8	3	15	22	21
353	1	17	20	8	3	22	19	14
354	1	17	20	8	14	15	22	10
355	1	17	20	10	4	12	23	21
356	1	17	20	10	8	19	23	11
357	1	17	20	12	10	7	22	18
358	1	17	20	12	10	21	8	4
359	1	17	20	12	11	7	21	18
360	1	17	20	12	16	15	18	4
361	1	17	20	14	21	11	16	2
362	1	17	20	18	7	21	11	2
363	1	17	20	18	12	3	24	15
364	1	17	20	18	21	7	16	2
365	1	17	20	19	3	15	22	10
366	1	17	20	19	10	15	8	3
367	1	17	20	19	15	10	21	3

368	1	17	20	21	3	10	18	14
369	1	17	20	21	4	12	23	10
370	1	17	20	21	7	15	18	4
371	1	17	20	21	7	18	14	2
372	1	17	20	21	14	2	23	11
373	1	17	20	23	5	8	19	11
374	1	17	20	23	7	16	11	2
375	1	17	20	23	7	16	14	2
376	1	17	20	23	8	5	22	11
377	1	17	20	23	8	12	19	4
378	1	17	20	23	15	4	19	5
379	1	17	20	24	8	5	23	11
380	1	17	21	4	12	20	16	11
381	1	17	21	6	10	12	22	19
382	1	17	21	6	11	16	24	14
383	1	17	21	6	11	22	12	8
384	1	17	21	7	6	24	11	10
385	1	17	21	8	4	20	12	15
386	1	17	21	8	11	22	10	6
387	1	17	21	12	6	19	22	10
388	1	17	21	12	19	6	22	10
389	1	17	21	14	11	20	8	2
390	1	17	21	15	4	20	19	8
391	1	17	21	15	10	18	7	4
392	1	17	21	18	4	11	16	14
393	1	17	21	18	6	19	16	4
394	1	17	21	18	19	6	16	4
395	1	17	21	19	12	10	11	6
396	1	17	21	20	4	8	24	15
397	1	17	21	22	8	11	12	6
398	1	17	21	22	11	8	24	6
399	1	17	21	22	16	7	20	2
400	1	17	22	5	7	16	20	18
401	1	17	22	7	11	16	23	12
402	1	17	22	10	5	23	12	8
403	1	17	22	11	14	16	19	5
404	1	17	22	12	16	11	23	7
405	1	17	22	14	10	7	20	15
406	1	17	22	16	18	5	20	7
407	1	17	22	18	7	15	10	6
408	1	17	22	18	7	15	21	6
409	1	17	22	19	5	16	11	6
410	1	17	22	21	16	6	18	3
411	1	17	22	21	16	6	19	3
412	1	19	14	3	6	22	15	21
413	1	19	14	3	8	24	15	16
414	1	19	14	3	9	21	22	20
415	1	19	14	3	11	21	18	16
416	1	19	14	5	3	24	15	18
417	1	19	14	6	4	18	17	21

418	1	19	14	8	2	20	15	23
419	1	19	14	8	15	9	24	21
420	1	19	14	9	2	16	18	23
421	1	19	14	10	11	22	9	6
422	1	19	14	11	2	23	8	17
423	1	19	14	11	4	20	9	18
424	1	19	14	11	9	8	23	21
425	1	19	14	11	9	23	8	6
426	1	19	14	11	10	24	9	5
427	1	19	14	11	16	6	24	17
428	1	19	14	11	17	6	23	16
429	1	19	14	11	17	23	8	2
430	1	19	14	15	2	18	9	16
431	1	19	14	15	17	3	24	16
432	1	19	14	16	4	8	23	21
433	1	19	14	16	4	23	8	6
434	1	19	14	16	6	17	23	11
435	1	19	14	17	3	22	5	11
436	1	19	14	17	3	24	8	6
437	1	19	14	17	22	3	24	11
438	1	19	14	18	3	22	9	6
439	1	19	14	18	16	9	22	6
440	1	19	14	20	3	9	24	21
441	1	19	14	20	3	22	5	8
442	1	19	14	20	4	15	8	10
443	1	19	14	20	5	17	24	11
444	1	19	14	20	22	3	24	8
445	1	19	14	20	23	5	15	4
446	1	19	14	21	4	15	8	9
447	1	19	14	21	9	15	24	8
448	1	19	14	21	10	11	8	9
449	1	19	14	21	18	3	16	9
450	1	19	14	22	2	23	8	6
451	1	19	14	22	6	23	8	2
452	1	19	14	22	10	8	11	9
453	1	19	14	22	10	11	8	6
454	1	19	14	23	2	20	17	8
455	1	19	14	23	11	9	22	6
456	1	19	14	23	16	2	18	9
457	1	19	14	24	3	17	15	6
458	1	19	14	24	10	8	11	9
459	1	19	14	24	15	3	16	8
460	1	19	14	24	15	3	16	9
461	1	19	14	24	17	3	16	6
462	1	19	15	10	4	18	24	17
463	1	19	15	10	12	22	8	5
464	1	19	15	12	5	24	6	8
465	1	19	15	21	4	14	9	10
466	1	19	15	22	16	6	12	5
467	1	19	15	24	12	8	22	5

468	1	19	16	3	5	24	15	18
469	1	19	16	3	9	24	15	14
470	1	19	16	3	12	18	21	17
471	1	19	16	8	3	15	21	22
472	1	19	16	8	5	24	17	12
473	1	19	16	8	9	11	21	22
474	1	19	16	8	9	20	21	12
475	1	19	16	9	4	14	18	21
476	1	19	16	9	4	14	21	24
477	1	19	16	9	5	12	23	22
478	1	19	16	9	5	22	18	12
479	1	19	16	9	6	18	23	15
480	1	19	16	9	6	23	18	11
481	1	19	16	9	8	21	20	11
482	1	19	16	9	14	24	11	4
483	1	19	16	9	15	18	14	6
484	1	19	16	11	3	17	12	18
485	1	19	16	11	3	21	8	14
486	1	19	16	11	9	8	22	20
487	1	19	16	11	9	8	24	22
488	1	19	16	11	12	24	8	3
489	1	19	16	11	14	6	23	18
490	1	19	16	11	14	21	8	3
491	1	19	16	11	17	21	12	2
492	1	19	16	11	18	6	23	14
493	1	19	16	11	18	17	12	3
494	1	19	16	12	2	18	11	17
495	1	19	16	12	2	20	9	15
496	1	19	16	12	5	11	18	20
497	1	19	16	12	8	23	9	5
498	1	19	16	12	15	5	24	17
499	1	19	16	12	15	5	24	18
500	1	19	16	12	15	20	9	2
501	1	19	16	12	17	5	24	15
502	1	19	16	12	17	18	11	2
503	1	19	16	12	22	11	18	5
504	1	19	16	14	3	21	20	11
505	1	19	16	14	4	9	23	21
506	1	19	16	14	6	18	23	11
507	1	19	16	14	9	21	6	4
508	1	19	16	15	2	20	21	12
509	1	19	16	15	2	22	21	12
510	1	19	16	15	3	24	5	9
511	1	19	16	15	5	17	24	12
512	1	19	16	15	9	22	3	5
513	1	19	16	15	18	12	17	3
514	1	19	16	15	22	5	24	9
515	1	19	16	15	23	8	17	4
516	1	19	16	18	15	9	23	6
517	1	19	16	20	8	9	12	11

518	1	19	16	20	12	17	4	2
519	1	19	16	20	17	12	21	2
520	1	19	16	21	12	8	11	9
521	1	19	16	22	5	9	15	14
522	1	19	16	22	6	5	23	15
523	1	19	16	22	6	15	18	5
524	1	19	16	22	6	21	12	2
525	1	19	16	22	8	9	12	11
526	1	19	16	22	15	5	14	6
527	1	19	16	22	15	5	14	9
528	1	19	16	22	15	5	23	6
529	1	19	16	22	15	12	21	2
530	1	19	16	22	18	5	17	3
531	1	19	16	23	2	9	20	15
532	1	19	16	23	2	18	11	6
533	1	19	16	23	6	5	24	15
534	1	19	16	23	6	18	11	2
535	1	19	16	23	8	12	9	5
536	1	19	16	23	8	12	20	5
537	1	19	16	23	12	8	11	5
538	1	19	16	23	12	8	22	5
539	1	19	16	23	15	5	24	6
540	1	19	16	23	15	6	21	4
541	1	19	16	23	15	9	20	2
542	1	19	16	24	3	8	21	14
543	1	19	16	24	3	17	12	5
544	1	19	16	24	5	6	23	14
545	1	19	16	24	5	17	8	4
546	1	19	16	24	5	17	12	3
547	1	19	16	24	9	4	21	14
548	1	19	16	24	12	11	8	3
549	1	19	16	24	12	11	21	3
550	1	19	16	24	14	6	23	5
551	1	19	16	24	14	8	21	3
552	1	19	16	24	20	4	21	3
553	1	19	17	3	6	22	15	18
554	1	19	17	4	14	20	16	11
555	1	19	17	6	14	11	24	18
556	1	19	17	10	2	14	22	23
557	1	19	17	10	2	23	20	14
558	1	19	17	10	8	20	22	11
559	1	19	17	10	11	8	22	20
560	1	19	17	10	20	8	22	11
561	1	19	17	11	14	6	23	18
562	1	19	17	11	20	8	23	10
563	1	19	17	12	10	24	8	3
564	1	19	17	14	2	18	10	15
565	1	19	17	16	11	4	24	18
566	1	19	17	18	2	23	12	6
567	1	19	17	18	6	10	14	15

568	1	19	17	20	11	8	12	10
569	1	19	17	22	2	10	18	15
570	1	19	17	22	14	11	8	2
571	1	19	17	23	2	18	11	6
572	1	19	17	24	10	3	22	12
573	1	19	17	24	10	12	20	3
574	1	19	17	24	18	4	20	3
575	1	19	18	3	5	24	15	17
576	1	19	18	3	11	20	17	14
577	1	19	18	5	4	23	12	17
578	1	19	18	5	12	16	23	15
579	1	19	18	5	15	12	23	17
580	1	19	18	5	15	16	20	12
581	1	19	18	6	14	11	23	17
582	1	19	18	11	14	6	23	17
583	1	19	18	12	15	5	24	16
584	1	19	18	12	15	5	24	17
585	1	19	18	12	16	5	23	15
586	1	19	18	12	16	15	20	5
587	1	19	18	14	2	11	23	21
588	1	19	18	14	2	21	20	11
589	1	19	18	14	4	23	10	6
590	1	19	18	14	5	11	16	17
591	1	19	18	14	10	6	21	17
592	1	19	18	14	11	22	5	2
593	1	19	18	14	16	11	22	6
594	1	19	18	14	17	11	23	6
595	1	19	18	14	22	11	16	2
596	1	19	18	15	3	17	10	14
597	1	19	18	15	5	16	9	12
598	1	19	18	15	17	3	24	14
599	1	19	18	16	4	12	15	17
600	1	19	18	16	12	4	23	17
601	1	19	18	17	3	24	11	5
602	1	19	18	17	11	14	23	6
603	1	19	18	17	16	11	24	5
604	1	19	18	22	3	10	17	14
605	1	19	18	22	10	3	24	14
606	1	19	18	23	5	14	10	6
607	1	19	18	23	6	14	17	4
608	1	19	18	23	9	11	20	4
609	1	19	18	23	17	6	14	2
610	1	19	18	24	3	9	20	12
611	1	19	18	24	3	9	21	12
612	1	19	18	24	3	17	12	5
613	1	19	18	24	10	11	20	3
614	1	19	18	24	12	9	11	3
615	1	19	18	24	12	9	21	3
616	1	19	18	24	16	3	20	5
617	1	19	20	3	8	21	16	15

618	1	19	20	3	9	21	16	14
619	1	19	20	8	3	15	24	21
620	1	19	20	8	3	24	17	12
621	1	19	20	8	5	23	11	10
622	1	19	20	8	10	17	24	12
623	1	19	20	8	16	9	24	14
624	1	19	20	9	3	22	18	12
625	1	19	20	10	2	14	23	21
626	1	19	20	10	5	23	14	8
627	1	19	20	10	8	17	23	11
628	1	19	20	10	15	14	23	8
629	1	19	20	11	8	23	14	5
630	1	19	20	11	17	8	23	10
631	1	19	20	12	8	17	24	10
632	1	19	20	14	16	15	18	2
633	1	19	20	14	17	5	23	10
634	1	19	20	15	3	17	24	12
635	1	19	20	17	5	14	11	10
636	1	19	20	17	8	12	11	10
637	1	19	20	17	10	8	15	12
638	1	19	20	21	3	9	24	14
639	1	19	20	21	3	10	18	12
640	1	19	20	21	9	15	18	2
641	1	19	20	22	5	11	14	8
642	1	19	20	22	8	5	23	11
643	1	19	20	23	2	14	17	8
644	1	19	20	23	5	11	14	8
645	1	19	20	23	8	5	24	11
646	1	19	20	23	8	14	17	2
647	1	19	20	24	15	5	18	3
648	1	19	22	6	5	18	17	16
649	1	19	22	6	8	14	21	17
650	1	19	22	6	8	21	14	10
651	1	19	22	14	6	17	10	8
652	1	19	22	14	17	6	21	8
653	1	19	22	15	8	16	21	6
654	1	19	22	16	15	5	20	9
655	1	19	22	17	6	14	23	8
656	1	19	22	18	3	10	21	14
657	1	19	22	18	9	12	23	6
658	1	19	22	18	9	15	10	3
659	1	19	22	18	10	11	12	6
660	1	19	22	18	14	10	21	3
661	1	19	22	21	8	6	23	10
662	1	21	14	3	7	22	15	20
663	1	21	14	3	9	22	20	18
664	1	21	14	6	2	23	16	18
665	1	21	14	6	3	24	15	16
666	1	21	14	6	9	16	23	18
667	1	21	14	7	3	18	17	20

668	1	21	14	7	8	24	16	11
669	1	21	14	7	9	24	15	10
670	1	21	14	7	17	22	11	6
671	1	21	14	8	2	19	17	23
672	1	21	14	8	2	23	11	19
673	1	21	14	8	2	23	22	19
674	1	21	14	8	10	11	22	19
675	1	21	14	9	4	20	11	19
676	1	21	14	9	15	24	8	4
677	1	21	14	9	19	20	11	4
678	1	21	14	11	2	22	23	17
679	1	21	14	11	9	22	8	6
680	1	21	14	11	10	8	22	19
681	1	21	14	11	17	22	8	2
682	1	21	14	15	3	22	7	8
683	1	21	14	15	8	20	22	9
684	1	21	14	15	8	22	3	7
685	1	21	14	16	17	11	18	4
686	1	21	14	17	2	22	6	11
687	1	21	14	17	10	20	3	4
688	1	21	14	17	19	8	16	4
689	1	21	14	17	23	7	16	4
690	1	21	14	17	23	8	20	4
691	1	21	14	18	11	17	22	6
692	1	21	14	18	11	19	3	4
693	1	21	14	18	17	3	24	11
694	1	21	14	19	17	3	24	10
695	1	21	14	19	23	6	15	4
696	1	21	14	20	2	16	9	11
697	1	21	14	20	16	2	23	11
698	1	21	14	20	16	3	19	9
699	1	21	14	20	16	3	22	9
700	1	21	14	22	3	15	9	10
701	1	21	14	22	11	9	10	6
702	1	21	14	22	17	7	11	6
703	1	21	14	23	2	17	16	7
704	1	21	14	23	10	4	18	11
705	1	21	14	24	4	7	23	15
706	1	21	14	24	6	10	23	9
707	1	21	14	24	9	15	6	3
708	1	21	14	24	9	15	6	4
709	1	21	14	24	15	9	23	4
710	1	21	14	24	16	7	11	3
711	1	21	14	24	18	3	17	7
712	1	21	14	24	18	7	11	3
713	1	21	14	24	18	7	22	3
714	1	21	14	24	20	4	17	3
715	1	21	15	6	7	16	18	22
716	1	21	15	6	16	22	12	7
717	1	21	15	10	14	24	8	3

718	1	21	15	19	2	10	23	20
719	1	21	15	19	2	18	23	12
720	1	21	15	19	18	2	23	12
721	1	21	15	19	18	10	23	4
722	1	21	15	20	7	14	8	10
723	1	21	15	20	19	4	16	8
724	1	21	15	24	3	16	20	8
725	1	21	15	24	14	10	22	3
726	1	21	15	24	18	6	22	3
727	1	21	16	3	7	22	15	17
728	1	21	16	3	11	18	19	17
729	1	21	16	4	11	23	17	12
730	1	21	16	6	9	15	24	18
731	1	21	16	6	14	19	15	9
732	1	21	16	7	6	23	12	11
733	1	21	16	8	3	17	24	20
734	1	21	16	9	3	15	18	20
735	1	21	16	9	6	12	24	23
736	1	21	16	9	6	24	19	11
737	1	21	16	11	2	18	12	17
738	1	21	16	11	3	14	19	22
739	1	21	16	11	3	20	9	14
740	1	21	16	11	6	23	12	7
741	1	21	16	11	7	24	12	6
742	1	21	16	11	9	20	19	8
743	1	21	16	11	14	20	9	3
744	1	21	16	11	19	12	18	6
745	1	21	16	14	9	7	20	18
746	1	21	16	15	9	20	7	3
747	1	21	16	15	18	6	24	9
748	1	21	16	18	3	15	24	12
749	1	21	16	18	20	7	15	3
750	1	21	16	19	6	14	9	11
751	1	21	16	19	6	22	14	3
752	1	21	16	19	9	4	23	15
753	1	21	16	19	17	2	23	12
754	1	21	16	20	9	14	19	4
755	1	21	16	20	15	4	17	8
756	1	21	16	22	2	18	9	7
757	1	21	16	22	3	15	18	7
758	1	21	16	22	7	18	15	2
759	1	21	16	22	11	14	19	2
760	1	21	16	22	14	3	19	11
761	1	21	16	22	14	11	8	2
762	1	21	16	22	17	3	24	7
763	1	21	16	22	18	7	12	2
764	1	21	16	23	2	14	20	9
765	1	21	16	24	7	15	8	3
766	1	21	16	24	15	3	19	6
767	1	21	16	24	18	4	19	3

768	1	21	17	3	6	24	15	16
769	1	21	17	3	8	24	15	14
770	1	21	17	4	8	20	16	15
771	1	21	17	7	2	20	15	18
772	1	21	17	10	6	12	18	19
773	1	21	17	10	11	24	12	4
774	1	21	17	10	15	18	12	4
775	1	21	17	11	6	22	7	8
776	1	21	17	11	8	22	7	6
777	1	21	17	11	10	8	23	20
778	1	21	17	11	14	16	19	6
779	1	21	17	11	20	8	23	10
780	1	21	17	12	4	20	8	11
781	1	21	17	12	10	19	18	6
782	1	21	17	12	19	10	18	6
783	1	21	17	15	10	20	7	2
784	1	21	17	18	6	22	14	3
785	1	21	17	19	12	6	15	10
786	1	21	17	19	18	6	15	4
787	1	21	17	20	8	10	12	11
788	1	21	17	24	4	8	20	11
789	1	21	17	24	18	4	20	3
790	1	21	18	3	7	22	15	16
791	1	21	18	4	14	19	17	11
792	1	21	18	6	3	24	15	14
793	1	21	18	6	4	19	16	17
794	1	21	18	6	11	16	23	14
795	1	21	18	7	10	12	23	17
796	1	21	18	10	11	23	7	4
797	1	21	18	11	12	16	20	7
798	1	21	18	12	2	23	19	11
799	1	21	18	12	10	7	23	17
800	1	21	18	12	10	17	20	7
801	1	21	18	12	11	17	19	6
802	1	21	18	12	11	23	10	2
803	1	21	18	12	15	17	19	4
804	1	21	18	14	3	19	9	10
805	1	21	18	14	3	19	20	10
806	1	21	18	14	9	7	20	16
807	1	21	18	15	4	20	17	7
808	1	21	18	15	10	19	6	3
809	1	21	18	15	17	14	19	2
810	1	21	18	15	20	9	16	3
811	1	21	18	17	2	16	11	12
812	1	21	18	17	7	20	15	3
813	1	21	18	17	11	4	24	16
814	1	21	18	17	11	16	19	3
815	1	21	18	17	15	3	24	12
816	1	21	18	17	15	4	20	10
817	1	21	18	17	16	4	19	11

818	1	21	18	19	2	12	16	15
819	1	21	18	19	17	6	16	4
820	1	21	18	22	11	7	23	6
821	1	21	18	22	14	7	20	3
822	1	21	18	23	4	14	11	7
823	1	21	18	23	6	16	11	2
824	1	21	18	23	9	10	12	4
825	1	21	18	23	9	10	20	4
826	1	21	18	23	12	4	20	7
827	1	21	18	23	15	7	20	2
828	1	21	18	24	3	11	22	10
829	1	21	18	24	11	9	12	3
830	1	21	18	24	12	3	22	9
831	1	21	18	24	14	6	15	3
832	1	21	18	24	14	7	22	3
833	1	21	20	8	2	17	23	19
834	1	21	20	10	2	19	23	15
835	1	21	20	10	14	19	11	3
836	1	21	20	12	2	23	10	9
837	1	21	20	12	3	22	11	8
838	1	21	20	12	7	11	17	16
839	1	21	20	12	15	10	23	8
840	1	21	20	14	2	23	11	7
841	1	21	20	14	8	19	16	4
842	1	21	20	14	10	17	18	4
843	1	21	20	16	11	7	17	12
844	1	21	20	17	2	16	12	11
845	1	21	20	17	2	16	23	11
846	1	21	20	18	3	15	12	9
847	1	21	20	18	14	4	23	9
848	1	21	20	19	2	10	23	15
849	1	21	20	19	14	10	11	3
850	1	21	20	23	7	11	18	4
851	1	21	20	23	8	10	19	4
852	1	21	20	24	12	7	16	3
853	1	21	22	7	8	20	14	9
854	1	21	22	8	3	17	19	16
855	1	21	22	8	3	19	20	14
856	1	21	22	9	3	20	19	12
857	1	21	22	11	3	14	19	16
858	1	21	22	16	3	11	20	14
859	1	21	22	16	3	19	14	6
860	1	21	22	16	8	11	14	9
861	1	21	22	16	14	11	20	3
862	1	21	22	17	3	16	20	8
863	1	21	22	18	3	11	19	12
864	1	21	22	18	3	17	14	6
865	1	21	22	18	6	17	14	3
866	1	21	22	18	9	11	23	6
867	1	21	22	19	3	14	20	8

868	1	21	22	19	6	16	14	3
869	1	21	22	19	9	10	23	6
870	1	21	22	19	14	8	20	3
871	1	23	14	4	9	21	19	16
872	1	23	14	6	2	22	17	21
873	1	23	14	6	5	19	15	18
874	1	23	14	6	9	15	24	21
875	1	23	14	8	7	24	15	10
876	1	23	14	8	9	20	15	10
877	1	23	14	9	2	16	20	21
878	1	23	14	9	2	16	21	22
879	1	23	14	9	4	19	20	15
880	1	23	14	9	8	20	19	11
881	1	23	14	9	11	10	21	18
882	1	23	14	9	11	10	21	19
883	1	23	14	9	11	20	16	8
884	1	23	14	10	9	20	15	8
885	1	23	14	10	11	9	24	20
886	1	23	14	11	9	21	10	6
887	1	23	14	11	9	24	7	5
888	1	23	14	15	7	22	17	6
889	1	23	14	15	9	6	24	18
890	1	23	14	15	18	10	19	5
891	1	23	14	16	2	19	8	11
892	1	23	14	16	2	19	20	11
893	1	23	14	16	4	9	20	18
894	1	23	14	16	4	21	8	6
895	1	23	14	16	4	24	7	5
896	1	23	14	16	6	8	19	17
897	1	23	14	16	6	17	7	11
898	1	23	14	16	6	17	24	11
899	1	23	14	16	9	19	18	5
900	1	23	14	16	9	21	8	2
901	1	23	14	16	17	8	19	6
902	1	23	14	16	21	9	19	4
903	1	23	14	17	7	15	24	10
904	1	23	14	18	2	10	21	19
905	1	23	14	18	9	19	6	2
906	1	23	14	18	17	10	21	4
907	1	23	14	19	2	22	17	8
908	1	23	14	19	9	15	24	8
909	1	23	14	19	9	18	6	2
910	1	23	14	19	15	4	21	9
911	1	23	14	19	18	6	15	5
912	1	23	14	20	2	17	22	11
913	1	23	14	20	7	22	5	2
914	1	23	14	20	15	4	19	8
915	1	23	14	20	21	8	19	2
916	1	23	14	22	8	11	10	6
917	1	23	14	22	9	5	18	11

918	1	23	14	22	9	10	21	6
919	1	23	14	22	9	18	5	2
920	1	23	14	22	21	6	17	2
921	1	23	14	24	8	5	19	11
922	1	23	14	24	8	11	10	5
923	1	23	14	24	8	11	20	5
924	1	23	14	24	10	9	11	5
925	1	23	14	24	10	9	11	7
926	1	23	14	24	11	5	16	8
927	1	23	14	24	11	5	16	9
928	1	23	14	24	11	10	21	4
929	1	23	15	5	10	22	17	12
930	1	23	15	6	10	24	12	9
931	1	23	15	8	14	10	22	17
932	1	23	15	9	2	16	21	22
933	1	23	15	9	2	22	21	16
934	1	23	15	10	14	8	24	17
935	1	23	15	12	5	22	6	10
936	1	23	15	20	2	22	10	5
937	1	23	15	21	14	10	9	4
938	1	23	15	22	2	20	12	5
939	1	23	16	6	8	17	19	15
940	1	23	16	6	11	18	19	12
941	1	23	16	7	4	21	12	17
942	1	23	16	7	8	14	21	17
943	1	23	16	7	11	12	21	17
944	1	23	16	7	11	12	24	18
945	1	23	16	7	11	21	12	8
946	1	23	16	7	14	11	22	17
947	1	23	16	7	14	22	11	6
948	1	23	16	7	15	21	12	6
949	1	23	16	8	5	15	24	19
950	1	23	16	9	2	21	20	15
951	1	23	16	9	4	14	20	19
952	1	23	16	11	4	20	9	14
953	1	23	16	11	5	24	9	7
954	1	23	16	11	8	24	7	5
955	1	23	16	11	8	24	12	5
956	1	23	16	11	17	7	22	14
957	1	23	16	12	7	9	22	18
958	1	23	16	12	11	7	24	17
959	1	23	16	12	11	7	24	18
960	1	23	16	14	17	11	20	5
961	1	23	16	15	2	21	8	9
962	1	23	16	15	4	20	8	7
963	1	23	16	15	5	24	8	4
964	1	23	16	15	7	20	8	4
965	1	23	16	15	8	19	6	5
966	1	23	16	15	9	21	8	2
967	1	23	16	15	17	8	19	6

968	1	23	16	15	19	8	17	5
969	1	23	16	17	7	14	22	8
970	1	23	16	18	5	7	24	17
971	1	23	16	19	14	4	20	9
972	1	23	16	19	17	6	15	5
973	1	23	16	21	15	6	19	4
974	1	23	16	22	2	19	12	5
975	1	23	16	22	5	7	20	12
976	1	23	16	22	11	7	14	6
977	1	23	16	22	11	7	14	9
978	1	23	16	22	11	14	7	2
979	1	23	16	22	12	5	17	7
980	1	23	16	22	12	6	15	9
981	1	23	16	22	19	6	15	2
982	1	23	16	24	5	7	22	12
983	1	23	16	24	5	15	17	4
984	1	23	16	24	7	11	20	5
985	1	23	16	24	12	6	15	5
986	1	23	17	4	8	20	16	15
987	1	23	17	10	2	20	22	15
988	1	23	17	10	14	8	22	15
989	1	23	17	10	15	8	22	14
990	1	23	17	11	6	22	7	8
991	1	23	17	11	12	18	19	6
992	1	23	17	11	18	12	19	6
993	1	23	17	12	4	24	8	7
994	1	23	17	12	16	15	18	4
995	1	23	17	16	15	4	24	12
996	1	23	17	19	14	6	15	8
997	1	23	17	20	2	15	22	10
998	1	23	17	20	15	8	12	4
999	1	23	17	22	12	7	24	6
1000	1	23	17	24	4	12	20	7
1001	1	23	17	24	12	4	20	7
1002	1	23	18	6	5	19	15	16
1003	1	23	18	6	12	19	15	9
1004	1	23	18	7	6	21	14	11
1005	1	23	18	7	12	16	21	11
1006	1	23	18	10	6	17	22	12
1007	1	23	18	11	7	10	21	17
1008	1	23	18	11	7	21	10	6
1009	1	23	18	11	16	12	21	7
1010	1	23	18	12	2	16	15	17
1011	1	23	18	12	2	22	9	11
1012	1	23	18	12	7	24	11	4
1013	1	23	18	12	9	20	11	4
1014	1	23	18	12	11	7	24	16
1015	1	23	18	12	11	7	24	17
1016	1	23	18	12	11	16	19	6
1017	1	23	18	12	11	22	9	2

1018	1	23	18	12	15	16	19	4
1019	1	23	18	12	17	7	24	11
1020	1	23	18	12	17	16	15	2
1021	1	23	18	14	2	19	10	11
1022	1	23	18	14	2	19	21	11
1023	1	23	18	14	4	10	21	17
1024	1	23	18	14	4	21	10	6
1025	1	23	18	14	9	21	10	2
1026	1	23	18	14	15	10	21	6
1027	1	23	18	15	6	19	16	5
1028	1	23	18	15	9	6	24	16
1029	1	23	18	15	9	16	19	5
1030	1	23	18	15	16	6	24	9
1031	1	23	18	16	5	20	11	4
1032	1	23	18	16	14	11	20	4
1033	1	23	18	17	6	10	15	12
1034	1	23	18	17	10	6	19	12
1035	1	23	18	17	10	12	24	7
1036	1	23	18	17	15	12	19	2
1037	1	23	18	19	6	16	17	4
1038	1	23	18	19	15	6	17	5
1039	1	23	18	20	2	17	11	7
1040	1	23	18	20	4	16	11	5
1041	1	23	18	20	17	7	16	2
1042	1	23	18	21	9	11	20	4
1043	1	23	18	22	2	14	21	9
1044	1	23	18	22	5	11	14	7
1045	1	23	18	22	5	11	24	9
1046	1	23	18	22	7	10	21	6
1047	1	23	18	22	11	5	20	7
1048	1	23	18	22	12	6	17	5
1049	1	23	18	22	12	11	10	2
1050	1	23	18	22	16	7	14	2
1051	1	23	18	24	6	9	21	7
1052	1	23	18	24	7	9	21	6
1053	1	23	20	7	9	21	12	8
1054	1	23	20	7	14	16	17	8
1055	1	23	20	8	5	15	19	16
1056	1	23	20	8	5	15	22	16
1057	1	23	20	8	9	15	22	12
1058	1	23	20	8	12	15	19	9
1059	1	23	20	9	7	12	21	16
1060	1	23	20	10	5	17	22	12
1061	1	23	20	10	12	17	15	5
1062	1	23	20	16	5	19	12	4
1063	1	23	20	16	9	15	19	4
1064	1	23	20	17	5	14	22	8
1065	1	23	20	17	12	10	22	5
1066	1	23	20	19	5	8	22	12
1067	1	23	20	19	5	16	12	4

1068	1	23	20	19	8	16	17	2
1069	1	23	20	19	9	15	18	2
1070	1	23	20	19	11	10	21	4
1071	1	23	20	19	12	8	15	5
1072	1	23	20	19	12	8	22	5
1073	1	23	20	21	2	14	19	8
1074	1	23	20	21	4	10	19	9
1075	1	23	20	21	7	9	24	8
1076	1	23	20	21	9	10	14	4
1077	1	23	22	10	5	20	15	8
1078	1	23	22	10	8	19	14	6
1079	1	23	22	10	11	14	21	8
1080	1	23	22	10	12	15	18	6
1081	1	23	22	14	7	17	18	5
1082	1	23	22	14	8	16	19	5
1083	1	23	22	16	6	12	15	9
1084	1	23	22	16	11	7	20	9
1085	1	23	22	20	7	11	16	5
1086	1	23	22	20	10	8	19	5

Табл.5.5.4

Здесь интересно обратить внимание на то, что «её величество симметрия» ограничила по признаку нечётности/чётности числа в строке и в столбце крест-образующих ячеек (без учёта числа в ячейке С3).

Действительно, в третьей строке все числа (без учёта числа в ячейке С3) имеют одинаковый признак чётности, аналогичная ситуация свойственна для чисел в третьем столбце. Это не настолько существенное ограничение по сравнению с МК третьего порядка, но, всё-таки, факт имеет место.

От представленной исходной группы МК (Табл. 5.5.4, 1086 вариантов), путём комбинации описанных тождественных перестановок, можно получить ещё 7602 варианта МК (1086+1086+1086+1086+1086+1086+1086) то есть группа МК с числом 1 в ячейке С1 содержит 8688 вариантов МК.

От МК с числом 1 в ячейке С1, путём универсального преобразования $(26\text{-}X_i)$ можно получить и 8688 вариантов МК с числом 1 в ячейке С2.

Таким образом общее количество МК для рассматриваемой схемы расстановки симметричных чисел (Вар.5.5.1) будет равно 48544 вариантам (7792+7792+7792+7792+8688+8688).

Одновременно можно рассмотреть группу МК с другой, уже центрально-ориентированной схемой расстановки симметричных чисел Вар.5.5.2:

А	Б	В	Г	Д
Е	Ж	З	И	К
Л	М	13	м	л
к	и	з	ж	е
д	г	в	б	а

Вар.5.5.2

Здесь даже нет необходимости в компьютерном переборе и трудоёмком анализе схемы расстановки симметричных чисел, так как путём перестановки второй и пятой строк и второго и пятого столбцов от любого МК типа Вар.5.5.1 можно получить МК типа Вар.5.5.8:

А	Б	В	Г	Д
б	а	в	д	г
Е	е	13	Ж	ж
З	И	К	Л	М
и	з	к	м	л

Вар.5.5.1

→

А	Б	В	Г	Д
и	з	к	м	л
Е	е	13	Ж	ж
З	И	К	Л	М
б	а	в	д	г

→

А	Д	В	Г	Б
и	л	к	м	з
Е	ж	13	Ж	е
З	М	К	Л	И
б	г	в	д	а

Вар.5.5.2

Таким образом оказалось, что две схемы расстановки симметричных чисел (Вар.5.5.1 и Вар.5.5.2) дают 97088 (48544+48544) вариантов МК, что составляет ничтожную долю от всего массива МК пятого порядка.

К тому же выяснилось, что поиск всех возможных схем расстановки симметричных чисел достаточно сложная и трудоёмкая задача, а значит требуется дополнительная методика по разделению всего массива МК на группы.

Ну да ладно, будем считать проведённое исследование всего лишь предварительной проработкой проблемы (лёгкой разминкой).

Одновременно удалось установить неравноценность ячеек МК.

Так центральная ячейка обладает уникальными свойствами, никакими тождественными перестановками строк и столбцов невозможно изменить значение числа, находящегося в ней.

В остальных крест-образующих ячейках числа можно перемещать при помощи невариантных и тождественных преобразований, но есть ограничения по их нечётности/чётности.

Для чисел же в диагональных ячейках даже этих ограничений увидеть не удаётся.

Ну и оставшиеся боковые ячейки (B1, D1, A2, E2, A4, E4, B5, D5) могут содержать числа, обладающие наименьшими ограничениями, по сравнению со всеми уже рассмотренными.

Ещё надо отметить уникальность числа 13 в числовом наборе для МК 5х5, но, разумеется не в смысле его принадлежности к «чёртовой дюжине», а в смысле отсутствия для него симметричного числа.

Вот теперь пора непосредственно приступить к исследованию магических квадратов пятого порядка.

Литература

М. М. Постников. Магические квадраты. 1964 г.
Е. Я. Гуревич. Тайна древнего талисмана. 1969 г.
Н. В. Макарова. Волшебный мир магических квадратов. 2009 г.

Об авторе

Новокрещенов Михаил Валентинович, год рождения — 1951.

В 1973 г. окончил Ижевский механический институт по специальности «Конструирование» и «Производство радиоаппаратуры». В этом же году поступил на работу в Союзный научно-исследовательский институт приборостроения (СНИИП) инженером- конструктором.

Поработал на всех должностях от инженера-конструктора до начальника КБ. Далее работал на производственных предприятиях и в коммерческих организациях на различных должностях.

В настоящее время на пенсии.

Учёных степеней и званий нет.

Ранее не публиковался.

Систематически интересовался научно-популярной литературой с математической спецификой, особенно магическими квадратами.

Представленная монография — мой первый опыт в этой области.

Контактный e-mail: elpostnmv@mail.ru