Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»

Выпуск 36

А. М. Райгородский

ОСТРОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ ДАНЦЕРА—ГРЮНБАУМА

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2009

УДК 511.1
ББК 22.130
Р12

Райгородский А. М.

Р12 Остроугольные треугольники Данцера—Грюнбаума. — М.: Изд-во МЦНМО, 2009. — 32 с.

ISBN 978-5-94057-539-9

В 1962 г. геометры Людвиг Данцер и Бранко Грюнбаум предложили выяснить, насколько много точек может содержать такое множество точек в n-мерном пространстве, любые три точки которого образуют остроугольный треугольник. Несложно придумать такое множество из $2n-1$ точки. Авторы задачи думали, что лучшей конструкции не бывает. Гипотеза продержалась более двадцати лет, пока Пол Эрдёш и Золтан Фюреди с помощью весьма изящной комбинаторики её не опровергли. Оказалось, существует такое множество из $[c^n/2]$ точек, где $c=2/\sqrt{3}$.

Брошюра посвящена изложению конструкции Эрдёша—Фюреди, основанной на применении вероятностных методов в комбинаторике. Текст представляет собой обработку записи лекции для школьников 9—11 классов, прочитанной автором 16 апреля 2005 года на Малом мехмате МГУ.

Для широкого круга читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей.

ББК 22.130

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»

Райгородский Андрей Михайлович

ОСТРОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ
ДАНЦЕРА—ГРЮНБАУМА

Выпуск 36

Серия основана в 1999 году

Редакторы *А. Н. Ващенко*, *И. М. Митричева*, *Е. А. Реброва*
Корректор *М. Г. Быкова*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано к печати 27/VII 2009 г. Формат $60\times 84\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Объём 2,00 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького. 197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.

ISBN 978-5-94057-539-9

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой брошюре мы поговорим об одной замечательной задаче, которую в 1962 году предложили [2] известные геометры Людвиг Данцер и Бра́нко Грюнбаум. В простейших ситуациях, с которыми, без сомнения, знаком любой школьник, эту задачу ничего не стоит сформулировать, а потому без лишних предисловий мы и приступим к формулировке.

Представим себе, что на плоскости или в пространстве дано некоторое множество точек — назовём его X, — в котором любые три точки образуют остроугольный треугольник. Сразу же возникает вопрос: а насколько большим может оказаться такое множество? Заметим, кстати, что никакие три точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ из X не могут лежать на одной прямой, ведь иначе «вырожденный» треугольник с вершинами в $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ заведомо имел бы тупой угол, равный 180 градусам. Если обратиться к изучению плоскости, то ответ на поставленный вопрос приходит мгновенно: конечно же, самое большее, на что мы можем рассчитывать, это треугольник, т. е. уже среди любых четырёх точек на плоскости найдутся как минимум три, задающие тупой или прямой угол. Это очевидное утверждение мы не доказываем, предоставляя читателю самостоятельно разобрать несколько простых случаев, необходимых для доказательства.

Слегка более трудным выглядит аналогичное утверждение в пространстве. Однако и здесь элементарной стереометрии вполне хватает для того, чтобы установить факт: максимальное количество точек в множестве X, свободном от тупо- или прямоугольных треугольников, равняется пяти. Один из вариантов пятиэлементной конструкции мы приводим на рис. 1, а обосновать отсутствие конструкций с бо́льшим числом элементов опять-таки предлагаем читателю.

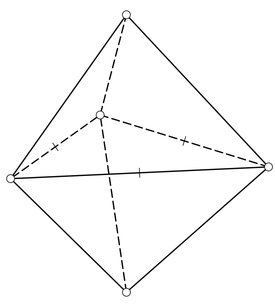

Рис. 1

Давайте добавим строгости в наше изложение. Это будет полезно в дальнейшем. Итак, через $|X|$ мы обозначим *мощность* множества X, т. е. количество элементов (например, точек) в нём. Положим $f(n) = \max\limits_X |X|$, $n = 2, 3,$

где максимум берётся по всем X (плоским, коль скоро $n=2$, и пространственным, коль скоро $n=3$), в которых, как и прежде, нет троек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, являвшихся бы вершинами неостроугольного треугольника. Естественно, мы уже знаем, что $f(2)=3$, а $f(3)=5$. Казалось бы, больше и говорить не о чем. Тем не менее не всё так просто, ведь математика отнюдь не исчерпывается двумерным и трёхмерным «пространствами», в честь размерности которых мы как раз писали двойку и тройку в качестве аргумента функции f: двойка отвечала двумерной плоскости, а тройка — трёхмерному пространству. И мы не случайно взяли в предыдущей фразе слово «пространство» в кавычки. Применительно к общепринятой ситуации подобная терминология весьма привычна, а вот по отношению к плоскости она может показаться неожиданной. Все мы прекрасно знаем школьную геометрию, и не всегда легко бывает преодолеть барьер, отделяющий её от геометрии многомерной — интуитивно непонятной и странной. Геометрия эта, однако же, очень похожа на изучаемую в школе, и мы постараемся продемонстрировать это в следующем параграфе, где и будет наконец дана «настоящая» нетривиальная формулировка задачи Данцера—Грюнбаума.

§ 2. МИНИМУМ МНОГОМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

2.1. Многомерные пространства

Дабы геометрия многомерных пространств стала совсем прозрачной, мы напомним сперва те стандартные сведения из геометрии плоскости и пространства трёхмерного, которые будут для нас наиболее важны.

Итак, давайте, как это принято в науке, через $\mathbb{R}^n$ обозначать совокупность всех наборов $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, состоящих из n вещественных чисел. Например, при $n=1$ получится обычная прямая, при $n=2$ — плоскость, при $n=3$ — пространство. Вообще-то пространством называют любое $\mathbb{R}^n$, и к этому пора привыкать. Если даже прямая нам не кажется пространством, а что происходит при $n \geqslant 4$, мы и вовсе не способны пока вообразить себе, то это не значит, что стоит отказываться от удобной терминологии. Тем более что «пространство» — это ведь, по сути, и есть та вселенная, в которой по той или иной причине расположились — «живут» — интересующие нас объекты. А объектам этим ничто не мешает носить абстрактный характер: если мы их не видим, это не повод для отрицания их существования. Короче говоря, $\mathbb{R}^n$ — это *n-мерное пространство*, и сейчас мы вольны представлять его себе исключительно комбинаторно.

Зато про $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ мы знаем гораздо больше. Так, например, элементы «наборов» $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \leqslant 3$, мы называем *координатами точек* $\mathbf{x}$, а можем в терминах этих координат и расстояние между точками измерить:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

коль скоро $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, и

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

коль скоро $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Как только в пространстве появляется указанное расстояние, мы начинаем называть это пространство *евклидовым*. В евклидовом пространстве есть скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3), \tag{1}$$

и с помощью скалярного произведения мы легко можем выразить величины расстояний:

$$\rho^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Последнее равенство есть фактически теорема косинусов.

Правда нам нужно ещё понимать, что такое *вектор* и его длина. Вектор — это, так сказать, направленный отрезок — «стрелочка», выходящая из некоторой точки $\mathbf{x}$ и заканчивающаяся в какой-нибудь точке $\mathbf{y}$. Его можно обозначать $\overline{\mathbf{xy}} = \overrightarrow{(y_1 - x_1, y_2 - x_2)}$ или $\overline{\mathbf{xy}} = \overrightarrow{(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)}$. Здесь над записью координат добавлена стрелка, дабы отличать записи точек и векторов.

Длина вектора — это расстояние между его «концами». Таким образом, если $O = (0, 0)$ $(O = (0, 0, 0))$ — это начало координат, то ясно, что $\rho^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — это квадрат длины вектора $\overline{\mathbf{xy}}$, величина $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ совпадает с квадратом длины вектора $\overline{O\mathbf{x}}$, величина $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ — с квадратом длины вектора $\overline{O\mathbf{y}}$, а $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — это произведение последних двух длин на косинус угла между соответствующими векторами. Да и скалярное произведение в (1) применяется, строго говоря, к векторам $\overline{O\mathbf{x}}$, $\overline{O\mathbf{y}}$, и мы лишь для краткости написали его в координатах точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, которые тогда совпадали с координатами упомянутых векторов.

Теперь понятно, что если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $n \leqslant 3$, то, скажем, косинус угла с вершиной в точке $\mathbf{y}$, возникающего в треугольнике, который порождён точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, есть не что иное, как косинус угла между векторами $\overline{\mathbf{yx}}$, $\overline{\mathbf{yz}}$, т. е. величина, равная

$$\frac{(\overline{\mathbf{yx}}, \overline{\mathbf{yz}})}{\sqrt{(\overline{\mathbf{yx}}, \overline{\mathbf{yx}}) \cdot (\overline{\mathbf{yz}}, \overline{\mathbf{yz}})}}.$$

В частности, угол будет острым, если $(\overline{\mathbf{yx}}, \overline{\mathbf{yz}}) > 0$.

В $\mathbb{R}^n$ с произвольным n делается в точности то же самое. Только отныне

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

а

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Практически очевидно, что все соотношения сохраняются, и, стало быть, мы спокойно можем говорить о треугольниках и величинах их углов в пространствах любой размерности.

2.2. Постановка задачи

Вернёмся к задаче Данцера—Грюнбаума. Дабы ввести величину $f(n)$, можно просто сослаться на её аналог из предыдущего параграфа: это опять-таки максимальная мощность множества точек X в n-мерном пространстве, свободного от тупо- и прямоугольных треугольников. Иначе говоря, речь идёт о самом «жирном» множестве, в котором скалярное произведение любых двух векторов, выходящих из одной и той же точки, положительно.

Посильная школьнику (хотя и не совсем простая) задача — доказать, что $f(n) < \infty$. А вот определить точное значение величины $f(n)$ — задача трудная. Её-то и предложили Данцер и Грюнбаум. Будучи великолепными геометрами, они с лёгкостью придумали конструкцию такого $X \subset \mathbb{R}^n$, что все треугольники в нём остроугольные, а мощность его равна $2n - 1$. Это хорошее упражнение на многомерную геометрию, и мы считаем, что будет лучше, если читатель сделает его сам.

Однако никакие дальнейшие усилия не помогали, и авторы задачи высказали гипотезу, что $f(n) = 2n - 1$. Заметим, что как раз $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, а $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Но вот беда: гипотезу не удавалось ни доказать, ни опровергнуть. Прорыв случился лишь 20 лет спустя, когда к изучению вопроса обратились специалисты по комбинаторике — Пол Эрдёш и Зо́лтан Фюре́ди. Их удивительная, чисто комбинаторная конструкция обладала всеми необходимыми свойствами и содержала экспоненциально большое число элементов.

Теорема Эрдёша—Фюреди (см. [3]). Справедлива следующая оценка:

$$f(n) \geqslant \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right].$$

(Здесь квадратными скобками обозначена целая часть числа.)

Подчеркнём, что контрпример к гипотезе Данцера—Грюнбаума получился, тем самым, только при $n \geqslant 35$:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{34}\right] = 66 < 2 \cdot 34 - 1 = 67,$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{35}\right] = 76 > 2 \cdot 35 - 1 = 69.$$

Однако с ростом размерности зазор между «показательной функцией» и гипотетической «линейной» переоценить невозможно. Что же так помогло Эрдёшу и Фюреди? Это-то нам и предстоит выяснить в следующих параграфах, посвящённых одному из красивейших методов в комбинаторике — методу вероятностному.

§ 3. ОБЩАЯ ИДЕЯ КОНСТРУКЦИИ ЭРДЁША—ФЮРЕДИ

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ все возможные точки, координаты которых суть нули или единицы. Эти точки образуют множество $\mathcal{K}^n$, которому, стало быть, принадлежит и начало координат, и точка, все координаты которой равны единице, и пр. и пр. Ясно, что $|\mathcal{K}^n| = 2^n$. Более того, при $n = 2$ мы получаем все вершины «единичного» квадрата $[0, 1]^2$, а при $n = 3$ — все вершины единичного куба $[0, 1]^3$. Разумно перенести указанную геометрическую интерпретацию и на многомерный случай, так что $\mathscr{K}^n$ — это в естественном смысле множество вершин единичного n-мерного куба $[0, 1]^n$.

О чём это нам говорит? Это говорит о том, что если мы правильно сделали обобщение, то все треугольники в $\mathscr{K}^n$, «как максимум», прямоугольные: углы, образованные векторами, которые соединяют вершины куба и имеют общее начало, не должны превосходить 90 градусов.

По счастью, всё в порядке. Действительно, пусть точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ с координатами x_i, y_i, z_i, $i = 1, \ldots, n$, — элементы $\mathscr{K}^n$, а интересующие нас векторы — это без ограничения общности $\overline{\mathbf{yx}}$, $\overline{\mathbf{yz}}$. Тогда для нас решающей является величина скалярного произведения $(\overline{\mathbf{yx}}, \overline{\mathbf{yz}})$, т. е. значение выражения

$$(x_1 - y_1)(z_1 - y_1) + \ldots + (x_n - y_n)(z_n - y_n).$$

Однако это значение могло бы оказаться отрицательным только при условии, что отрицательно хоть одно слагаемое вида $(x_i - y_i)(z_i - y_i)$ в нём. Такого же, очевидно, быть не может, коль скоро мы не забываем, что x_i, y_i, $z_i \in \{0, 1\}$.

Всё было бы просто чудесно, если бы не наличие прямых углов. Понятно, что они-то у нас присутствуют, и их даже довольно много. Вот кабы взять, да и поудалять те вершины n-мерного куба, в которых вредоносный угол образуется; коли действовать осмотрительно, глядишь, и нужное множество X останется, и точек в нём будет много. К сожалению, совсем напрямую такую идею реализовать нельзя, и Эрдёш с Фюреди подходят к вопросу несколько тоньше.

А именно, они сперва «наугад» выбирают подмножество Y в $\mathscr{K}^n$, имеющее мощность $2m$ с $m = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$, а затем уже из Y выкидывают не более половины элементов, причём делают они это так искусно, что все прямые углы успешно исчезают. В результате остаётся множество X надлежащей мощности, свободное от неостроугольных треугольников.

В предпоследней фразе слово «наугад», несомненно, вызовет недоумение у читателя, и это совершенно оправданно. В следующих параграфах мы дадим абсолютно строгое определение случайности точки и множества точек в $\mathscr{K}^n$. Лишь в полной мере осознав это определение, мы сумеем понять все пружины доказательства Эрдёша—Фюреди.

§ 4. СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Сейчас мы подробно изложим одну из самых простых, основополагающих и в то же время важных моделей классической теории вероятностей. Эта модель принадлежит знаменитому математику XVII века Якобу Бернулли.

Многие знают, что развитие теории вероятностей в значительной мере обязано существованию азартных игр и вере человечества в возможность построения беспроигрышной стратегии игры в рулетку или, скажем, в кости. Посему неудивительно, что бросания игральной кости или — ещё проще — монетки легли в основу той многогранной науки, которая сформировалась окончательно лишь в XX столетии.

Для наших целей, например, даже кость не понадобится; вполне хватит и монетки. Однако тут следует понимать, что и монетка монетке рознь. Действительно, берём мы нашу монетку и подбрасываем её. Разумеется, мы не знаем заранее, упадёт она «решкой» кверху или же «орлом». А вот с какой *вероятностью* реализуется тот или иной из указанных вариантов? Если монетка «симметричная», т. е. материал, из которого она сделана, идеально однороден, центр её тяжести, стало быть, не смещён, а всякими прочими физическими факторами мы пренебрегаем (воздух, форма поверхности, на которую падает монетка, и т. д.), то абсолютно естественно *постулировать*, что вероятность как решки, так и орла одна и та же, а именно $1/2$. При этом, конечно же, мы предполагаем, что монетка «идеально тонкая», т. е. на ребро она не только не становится, но даже поползновения такого она совершить не может. Если же упомянутые предположения нарушаются, то либо решка, либо орёл «выпадает» чаще и, значит, вероятность решки стоит постулировать равной какому-нибудь $p \in (0, 1)$; соответственно, вероятность орла — равной $q = 1 - p$.

Итак, теперь мы имеем не только монетку, но и дополнительную вероятностную информацию о ней: при случайном бросании она падает (скажем, на стол) решкой кверху с вероятностью p и орлом кверху с вероятностью $q = 1 - p$. Допустим, мы подбросили монетку дважды. Ясно, что результат второго бросания никак не зависит от результата первого бросания. Иными словами, бросания *независимы*. Спрашивается, какова, например, вероятность того, что оба раза выпал орёл? По-видимому, нет сомнений в том, что эта вероятность есть q^2. Точно так же вероятность двух решек есть p^2, а вероятность одной решки и одного орла равна $2pq$ (могла быть сперва решка, потом орёл, и наоборот; отсюда и удвоение). Между прочим, хоть какая-то комбинация выпасть, очевидно, должна, т. е. вероятность абы какой комбинации равна единице. С другой стороны, эта же вероятность может быть, по идее, найдена и как сумма вероятностей всех возможных комбинаций. Однако такая сумма есть $p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$, и мы имеем, тем самым, обоснование корректности тех наших действий, которые и без того интуитивно ясны.

Давайте будем осуществлять теперь не два, а n независимых бросаний — *испытаний Бернулли*. Параллельно этому процессу мы будем строить точку $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}^n$. Подбросили мы монетку первый раз и смотрим: выпала решка (в первом испытании Бернулли произошёл «успех») — полагаем $x_1 = 1$; выпал орёл (произошла «неудача») — полагаем $x_1 = 0$. И так далее вплоть до испытания с номером n. Возникает, в самом деле, случайная точка, которая может быть, вообще говоря, какой угодно. Однако мы уже понимаем, с какой вероятностью она имеет тот или иной конкретный вид. Скажем, $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ с вероятностью p^2q^{n-2}, $\mathbf{x} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 1)$ с вероятностью p^3q^{n-3}, а в общем случае мы будем писать

$$P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} q^{n - \sum_{i=1}^n x_i}.$$

(Здесь P — стандартный символ, проистекающий из перевода слова «вероятность» на любой романский язык.) Кстати, если $p = q = 1/2$, то все точки равновероятны: $P(\mathbf{x}) = 2^{-n}$.

Иной раз нам требуется посчитать вероятность целого *события*. Ведь может нас интересовать, к примеру, какова вероятность того, что в случайной точке, построенной нами, ровно $k \in \{0, \ldots, n\}$ единиц, т. е. с какой вероятностью в *схеме из n испытаний Бернулли* произошло в точности k успехов. При этом мы не указываем, где именно должны стоять единичные координаты, а где нулевые. Понятно, что речь идёт как раз о событии и что всякое событие есть совокупность точек, обладающих, как правило, неким общим свойством. Если написать $A_k = \{\mathbf{x}\colon \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = k\}$, то A_k и будет упомянутым выше событием. Его вероятность, которую принято обозначать $P(A_k)$, равна, как нетрудно убедиться, $C_n^k p^k q^{n-k}$: мы попросту суммируем вероятности тех точек, которые в A_k попадают, а точек таких, конечно же, C_n^k штук. Как и в случае с двумя испытаниями, какое-нибудь из A_k, $k = 0, \ldots, n$, непременно произойдёт, так что $P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1$. В то же время события A_k попарно не пересекаются, ввиду чего должно бы быть $P(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(A_k)$. Но оно так и есть, ведь $\sum\limits_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$. Аналогично для произвольного A мы имеем $P(A) = \sum\limits_{\mathbf{x} \in A} P(\mathbf{x})$, и мы получаем всю необходимую вероятностную базу для работы с нашими случайными объектами. Добавим, что при $p = q = 1/2$ возникает упрощение: $P(A) = |A| \cdot 2^{-n}$.

1. Найдите вероятность того, что в схеме из n испытаний произошло чётное число успехов.

2. (*Геометрическое распределение.*) Найдите вероятность того, что первый успех в схеме Бернулли произошёл на k-м испытании. Зависит ли ответ от числа испытаний?

3. Найдите вероятность того, что первый успех произошёл на k-м, а последний — на l-м испытании.

§ 5. СЛУЧАЙНЫЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

Пусть фиксировано некоторое натуральное число $m \geqslant 2$. В соответствии со схемой из n испытаний Бернулли выберем сперва одну случайную точку $\mathbf{x}_1$. Независимо от того, какой результат получился, выберем по совершенно аналогичному принципу случайную точку $\mathbf{x}_2$. Понятно, что она может даже совпасть с $\mathbf{x}_1$. И так мы действуем до тех пор (последовательно и независимо осуществляя схему Бернулли), пока не построим множество Y, состоящее из случайных точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$. Построенное множество, конечно, случайно, и мы ещё раз подчеркнём, что некоторые точки в нём имеют право совпадать. Поэтому было бы корректнее называть его *набором* или *последовательностью* — но мы для простоты продолжим называть его множеством.

Заметим, что, по сути, мы просто делаем mn независимых испытаний, и результат первых n из них — это $\mathbf{x}_1$, результат следующих n — это $\mathbf{x}_2$, и т. д. Понятно, что $P(Y) = P(\mathbf{x}_1) \times \ldots$ $\ldots \times P(\mathbf{x}_m)$, — ничего нового. Далее, из случайных множеств точек, как и из самих точек, можно составлять события. Естественно, и здесь всё по-прежнему: событие — это произвольная совокупность случайных множеств точек, объединённых, как правило, неким общим свойством. Например, можно рассмотреть событие, состоящее в том, что все элементы случайного множества точек Y различны. А можно взять событие

$$A = \{Y : \text{общее число единиц в точках из } Y \text{ равно } k\}.$$

Разумеется, мы опять-таки имеем $P(A) = \sum\limits_{Y \in A} P(Y)$. В дальнейшем для нас главным будет следующий очевидный факт.

> Если вероятность события, элементы которого объединены некоторым свойством, положительна, то заведомо найдётся элемент, обладающий тем самым свойством.

Однако пока хорошо бы научиться считать вероятности нетривиальных событий. Для этого удобно перейти от точек к конечным множествам.

Введём обозначение $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$. Ясно, что каждой точке $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{K}^n$ однозначно отвечает «индикаторное» подмножество $M_{\mathbf{x}} = \{\nu = 1, \ldots, n : x_\nu = 1\}$ в $\mathcal{R}_n$. Таким образом, всё равно, о чём говорить — о случайных множествах точек или о случайных совокупностях подмножеств в $\mathcal{R}_n$. В разделе задач мы приведём несколько вопросов, полезных для создания лучшего понимания изученной нами техники.

4. Пусть $M_1, \ldots, M_t \subseteq \mathcal{R}_n$ — случайные множества, отвечающие точкам $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_t$. Какова вероятность того, что $|M_1 \cup \ldots \cup M_t| = s$, где s фиксировано?

Указание. Попробуйте найти вероятность того, что объединение $M_1 \cup \ldots \cup M_t$ оказывается *заданным* s-элементным подмножеством $N = \{y_1, \ldots, y_s\}$.

5. Если условия прежние, какова вероятность того, что любые два множества M_i, M_j не пересекаются?

6. Если фиксировано $r \in \{2, \ldots, t\}$, какова вероятность того, что любые r множеств из $M_1, \ldots, M_t$ имеют пустое пересечение?

7. Пусть M_1, M_2 — случайные множества в $\mathscr{R}_n$, а множество $S \subset \mathscr{R}_n$, $|S| = l$, фиксировано. Найдите вероятность того, что либо $M_1 \subseteq S \subseteq M_2$, либо $M_2 \subseteq S \subseteq M_1$.

§ 6. КОНСТРУКЦИЯ ЭРДЁША—ФЮРЕДИ

Теперь понятно, что подразумевалось в конце § 3 под словами «наугад выбирают». Имелось в виду попросту, что при $m = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$ берётся случайное множество точек $Y = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2m}\} \subset \mathscr{K}^n$. Правда, важно ещё задать вероятность решки p, но она у Эрдёша и Фюреди бесхитростная, $p = 1/2$. И вот главное искусство — это обоснование возможности обещанного в § 3 удаления не более чем m элементов из Y, в результате которого останется множество X, свободное от неостроугольных треугольников и содержащее не менее m *различных* точек. Тут и впрямь тонкость: точки-то в Y имеют право совпадать, и мало того, что нужно избавиться от реальных прямых углов, надо к тому же позаботиться о том, чтобы слипающиеся точки пропали.

Удобно в этой связи ввести понятие *обобщённого прямого угла*, образованного векторами $\overline{\mathbf{yx}}$, $\overline{\mathbf{yz}}$. Обобщённым прямым углом мы будем называть такую конфигурацию из точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, при которой скалярное произведение векторов $\overline{\mathbf{yx}}$, $\overline{\mathbf{yz}}$ равно нулю. Конечно, мы и раньше считали, что если угол прямой, то произведение векторов нулевое. Однако обратное предположение включает в себя случаи, когда или $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, или $\mathbf{z} = \mathbf{y}$, а в таких случаях угол носит вырожденный характер, да и векторы нулевой длины в этом угле попадаются. Собственно, раньше-то у нас «повторных» точек не встречалось, так что вопрос о работе с ними, в принципе, не возникал.

Рассмотрим событие A, состоящее в том, что случайное множество $Y = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2m}\}$ содержит не более m различных обобщённых прямых углов. Отметим, что каждая конкретная тройка точек $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_k$ из Y может порождать до трёх обобщённых прямых углов: максимум достигается, коль скоро $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k$.

Предположим, что $P(A) > 0$. Тогда с определённостью можно утверждать, что *существует* (не случайное, а совершенно конкретное) множество точек Y, в котором количество «плохих» углов не превосходит m (ср. факт из § 5). Удалим из каждого плохого угла портившую его вершину. В результате появится новое множество X, в котором все углы «хорошие», а элементов не менее m.

Всё: построение будет завершено и теорема Эрдёша—Фюреди обоснована. Только бы установить неравенство $P(A) > 0$. Это же делается с помощью подсчёта средних значений, или, как говорят, «математических ожиданий случайных величин». В следующем разделе мы узнаем все необходимые сведения об упомянутых объектах и в дальнейшем правильно используем их.

§ 7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Пусть дана совокупность каких-нибудь случайных объектов. Вообще говоря, она может быть совершенно произвольной, но мы-то пока имели дело лишь со случайными точками и случайными множествами точек. Вот и будем для простоты считать, что Ω — это либо совокупность случайных точек (тогда $|\Omega| = 2^n$), либо совокупность случайных множеств точек (тогда $|\Omega| = 2^{nm}$, коль скоро речь идёт о множествах мощности $m \geqslant 2$). Забудем на время о геометрической природе наших случайных объектов. В частности, обозначать мы их будем одним и тем же символом $\omega \in \Omega$. Конечно, если вернуться к прежним обозначениям, то в зависимости от ситуации ω — это $\mathbf{x}$ или Y, но сейчас нам это не важно. Каждому случайному ω можно поставить в соответствие вещественное число $\xi(\omega)$, причём некоторые $\xi(\omega_1)$, $\xi(\omega_2)$ имеют право совпадать. Иными словами, мы рассматриваем любую функцию ξ, которая отображает Ω в $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Аргумент у такой функции случаен, и, стало быть, величина $\xi(\omega)$ также случайна. Посему функцию ξ называют *случайной величиной*. Однако следует, конечно, понимать, что, коль скоро элемент ω уже фиксирован, значение $\xi(\omega)$ также однозначно определено.

Предположим, что случайная величина ξ принимает на Ω множество различных значений $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Имеется в виду, что на каждом элементе ω какого-то события $A_1 \subseteq \Omega$ функция ξ равна y_1 ($A_1 = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = y_1\}$), на каждом $\omega \in A_2$ функция ξ равна y_2, и т. д. События $A_1, \ldots, A_k$ попарно не пересекаются, и в то же время $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$ (какое-то из них обязано произойти). Значит, $P(A_1) + \ldots + P(A_k) = 1$.

Положим $M\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i P(A_i)$. Ясно, что $M\xi$ — это своего рода среднее значение нашей случайной величины. Если бы все $P(A_i)$ были одинаковы, т. е. совпадали с $1/k$, то $M\xi$ оказалось бы обычным средним арифметическим. В общей же ситуации усреднение идёт с весами $P(A_1), \ldots, P(A_k)$, сумма которых равняется единице.

Описанное среднее значение принято называть *математическим ожиданием* случайной величины; отсюда и символ M. Зачастую этот символ заменяют буквой E в честь романского expectation — ‘ожидание’, и в этом есть свой резон. Всё-таки главным для нас является именно ожидание, а не тот тривиальный факт, что оно математическое: раз мы занимаемся математикой, то у нас всё так или иначе к ней относится. Тем не менее мы сохраним в дальнейшем русскоязычное обозначение.

Математическое ожидание обладает несколькими простыми, но крайне полезными свойствами. Сейчас мы эти свойства приведём и докажем.

Свойства математического ожидания.

1. Если выполнено неравенство $M\xi < t$, то $P(A) > 0$ для события $A = \{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) < t\}$. В частности, существует случайный объект ω, для которого $\xi(\omega) < t$ (ср. § 6).

2. (Линейность математического ожидания.) Пусть ξ, η — какие-то случайные величины, b, c — произвольные константы. Тогда $M\zeta = bM\xi + cM\eta$, коль скоро $\zeta = b\xi + c\eta$.

Доказательство свойства 1. Предположим противное: $P(A) = 0$. Ясно, что тогда $\xi(\omega) \geqslant t$ для любого $\omega \in \Omega$. Но в этом случае

$$M\xi = \sum_{i=1}^{k} y_i P(A_i) \geqslant t \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = t,$$

что невозможно. $\square$

Доказательство свойства 2. Пусть ξ принимает значения $y_1, \ldots, y_k$, причём $A_i = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = y_i\}$, $i = 1, \ldots, k$. Пусть точно так же η может быть равным $z_1, \ldots, z_l$ на соответствующих $B_j = \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) = z_j\}$, $j = 1, \ldots, l$. Понятно, что $b\xi$ тогда совпадает с одной из величин $by_1, \ldots, by_k$, а $c\eta$ — с одной из величин $cz_1, \ldots, cz_l$. К тому же события, на которых указанное совпадение имеет место, суть, в зависимости от того, рассматриваем мы ξ или η, всё те же $A_1, \ldots, A_k$ или $B_1, \ldots \ldots, B_l$. Наконец, величина $b\xi + c\eta$ принимает каждое значение $by_i + cz_j$ из множества всевозможных сумм упомянутого вида, коль скоро ω принадлежит одновременно двум событиям — A_i и B_j, т. е. событию $A_{i,j} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = y_i,\ \eta(\omega) = z_j\} = A_i \cap B_j$. Заметим, что, вообще говоря, числа $by_i + cz_j$ для разных i и j могут совпадать; однако нам это никак не повредит. В результате

$$M\zeta = M(b\xi + c\eta) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (by_i + cz_j) P(A_{i,j}) = \\ = \sum_{i=1}^{k} \Bigl(by_i \sum_{j=1}^{l} P(A_{i,j}) \Bigr) + \sum_{j=1}^{l} \Bigl(cz_j \sum_{i=1}^{k} P(A_{i,j}) \Bigr).$$

Практически очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{l} P(A_{i,j}) = P(A_i)$. Достаточно взглянуть на рис. 2, на котором, по сути, изображён тот факт, что при фиксированном i события $A_{i,j}$ не пересекаются и, коль скоро A_i произошло, одно из $A_{i,j}$ также непременно случится. Этот факт понятен, но не вполне тривиален. В теории вероятностей он является одним из основополагающих и даже носит специальное название «формула полной вероятности». В силу этой формулы и $\sum\limits_{i=1}^{k} P(A_{i,j}) = P(A_j)$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \Bigl(by_i \sum_{j=1}^{l} P(A_{i,j}) \Bigr) + \sum_{j=1}^{l} \Bigl(cz_j \sum_{i=1}^{k} P(A_{i,j}) \Bigr) = \\ = \sum_{i=1}^{k} by_i P(A_i) + \sum_{j=1}^{l} cz_j P(A_j) = bM\xi + cM\eta,$$

и свойство 2 доказано. □

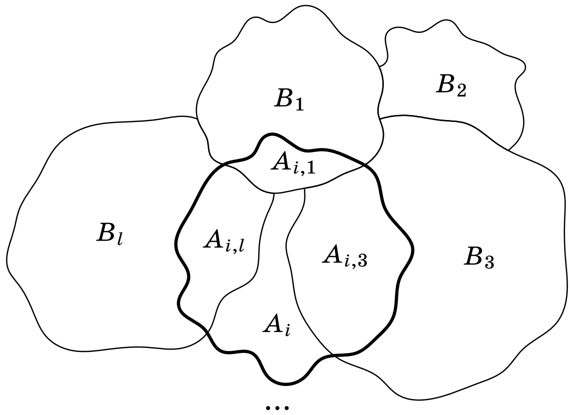

Рис. 2

Как видно, установленные нами свойства достаточно просты. Тем не менее второе из них исключительно нетривиально с точки зрения своего применения. Общая идея такова. Предположим, мы хотим посчитать математическое ожидание какой-нибудь случайной величины ξ, принимающей неотрицательные целые значения (например, такая величина может представлять из себя количество тех или иных объектов — прямых углов, скажем). Мы можем попытаться записать ξ в виде $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, где каждое ξ_i — это так называемая *индикаторная случайная величина*, принимающая в зависимости от наличия или отсутствия некоторого свойства всего два различных значения: 0 и 1. Тогда за счёт линейности $M\xi = M\xi_1 + \ldots + M\xi_N$. В то же время

$$M\xi_i = 1 \cdot P(\{\omega \in \Omega\colon \xi_i(\omega) = 1\}) + 0 \cdot P(\{\omega \in \Omega\colon \xi_i(\omega) = 0\}),$$

т. е. дабы решить нашу задачу, нам останется всего лишь отыскать вероятность события, на элементах которого ξ_i равняется единице.

Рассмотрим пример. Пусть $\Omega = \mathscr{K}^n$ — это совокупность случайных точек, возникающих в рамках схемы испытаний Бернулли. Зададим $\xi(\mathbf{x})$ как число «успехов» в n испытаниях, т. е. $\xi(\mathbf{x}) = x_1 + \ldots + x_n$, коль скоро $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Чему равно $M\xi$? Интуитивно оно и без расчётов ясно: если $p = 1/2$, то среднее число успехов вряд ли отличается от $n/2$; если же $p \in (0, 1)$ произвольно, то, наверное, $M\xi = np$. Попытаемся использовать определение математического ожидания:

$$M\xi=\sum_{k=0}^{n} kP\left(\left\{\mathbf{x}\in\mathscr{K}^n:\ \sum_{i=1}^{n} x_i=k\right\}\right).$$

В самом деле, понятно, что наша случайная величина принимает неотрицательные целые значения 0, 1, ..., n с соответствующими вероятностями. Эти вероятности мы нашли ещё в § 4, и они оказались равными $C_n^k p^k q^{n-k}$. Стало быть, $M\xi=\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$. Если приложить усилие и сосчитать последнюю сумму, то получится как раз np. Но усилий можно избежать. Запишем $\xi=\xi_1+\ldots+\xi_n$, где $\xi_i(\mathbf{x})=1$, если $x_i=1$, и $\xi_i(\mathbf{x})=0$, если $x_i=0$, $i=1, \ldots, n$. Тогда $M\xi=M\xi_1+\ldots+M\xi_n$, причём, очевидно, $M\xi_i=p$, и результат у нас сразу в кармане. Правда здесь можно было обойтись и без линейности. Ниже мы приведём упражнения, в которых применение линейности неизбежно. С ещё одним применением того же удивительного явления мы столкнёмся и в следующем параграфе, где будет завершено доказательство теоремы Эрдёша—Фюреди.

8. Пусть $M_1, \ldots, M_t\subseteq\mathscr{R}_n$ (ср. § 5) — случайные множества, отвечающие точкам $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_t$, т. е. на сей раз Ω — это совокупность случайных множеств точек Y. Пусть фиксировано $S\subset\mathscr{R}_n$, $|S|=l$. Определим $\xi(Y)=\xi(M_1, \ldots, M_t)$ следующим образом:

$$\xi(Y)=|\{(M_i, M_j):\ i\neq j\in\{1, \ldots, t\},\\ M_i\subseteq S\subseteq M_j \text{ или } M_j\subseteq S\subseteq M_i\}|.$$

Подразумевается, что пары (M_i, M_j) упорядоченные, т. е. $(M_i, M_j)\neq(M_j, M_i)$. Найдите $M\xi$.

9. Пусть Ω то же, что и в задаче 8, но

$$\xi(Y)=|\{S\subset\mathscr{R}_n : |S|=l,\ M_i\cap S\neq\varnothing,\ i=1, \ldots, t\}|.$$

Найдите $M\xi$.

§ 8. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ЭРДЁША—ФЮРЕДИ

В этом параграфе мы завершаем доказательство теоремы Эрдёша—Фюреди, начатое в § 3 и в § 6.

Пусть, как и в § 6, $m=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$. Пусть опять-таки случайное множество точек $Y=\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{2m}\}$ взято из $\mathscr{K}^n$ (см. § 3), а значит, в новых терминах Y лежит в Ω, которое из случайных множеств точек как раз и состоит. При этом $p=1/2$. Положим $\xi(Y)$ равным количеству обобщённых прямых углов в Y. Если $M\xi<m$, то по первому свойству математического ожидания $P(A)>0$, коль скоро A — это событие, описанное в § 6 («Y содержит не более m различных обобщённых прямых углов»). С помощью линейности математического ожидания мы сейчас вычислим $M\xi$ и убедимся в том, что выбор параметра m обеспечивает нам необходимое неравенство. Вкупе с рассуждениями § 6 это позволит завершить доказательство теоремы.

Итак, зададимся сперва вопросом, сколько различных обобщённых прямых углов может, в принципе, быть в множестве точек Y. Конечно, любой угол — это тройка точек. Число различных троек в Y есть C_{2m}^3. Однако угол однозначно определён лишь после того, как зафиксирована его вершина. В каждой тройке любая точка может послужить вершиной, и потому обобщённых прямых углов в Y может быть даже $3C_{2m}^3$ штук. Это количество реализуется, коль скоро все $\mathbf{x}_i\in Y$, $i=1, \ldots, 2m$, совпадают. Занумеруем как-нибудь «потенциальные» прямые углы (т. е. просто все углы) в Y и назовём их, соответственно, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, где $r=3C_{2m}^3$. Положим $\xi_i(Y)=1$, если в Y угол α_i обобщённый прямой, и $\xi_i(Y)=0$ в противном случае. Ясно, что $\xi(Y)=\xi_1(Y)+\ldots+\xi_r(Y)$. Посчитаем, стало быть, $M\xi_i$, $i=1, \ldots, r$.

Мы знаем, что

$$M\xi_i=P(\{Y\in\Omega\colon \alpha_i \text{— обобщённый прямой угол в } Y\}).$$

Последняя вероятность есть без ограничения общности не что иное, как вероятность того, что три случайные точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ образуют обобщённый прямой угол с вершиной в $\mathbf{y}$. В самом деле, мы ведь точки строим независимо друг от друга, так что, тестируя в Y упомянутый угол на качество (прямой—не прямой), мы обо всех точках, которые в него не попадают, спокойно можем забыть. Вспоминая, что угол обобщённый прямой тогда и только тогда, когда $(\overline{\mathbf{yx}}, \overline{\mathbf{yz}})=0$, легко проверить, что верна

Лемма. Угол является обобщённым прямым тогда и только тогда, когда ни для какого $i \in \{1, \ldots, n\}$ не получается так, что либо $x_i = z_i = 0$, $y_i = 1$, либо $x_i = z_i = 1$, $y_i = 0$.

Доказательство этой леммы — лёгкое упражнение, которое мы оставляем читателю.

Из этой леммы следует, что для любого i из восьми возможных комбинаций x_i, y_i, $z_i \in \{0, 1\}$ выполнению нашего события («**x**, **y**, **z** образуют обобщённый прямой угол с вершиной в **y**») благоприятствуют ровно шесть. Поскольку $p = 1/2$, а выбор координат в **x**, **y**, **z** осуществляется независимо, можно заключить, что

$$P(\{Y \in \Omega\colon \alpha_i \text{— обобщённый прямой угол в } Y\}) = \left(\frac{6}{8}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Таким образом, $M\xi_i = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, и, в частности, от i это математическое ожидание не зависит. Стало быть, $M\xi = 3C_{2m}^3\left(\frac{3}{4}\right)^n$, и ни за что бы нам такого не сосчитать, не будь у нас свойства линейности. Осталось выписать цепочку неравенств:

$$M\xi = 3C_{2m}^3\left(\frac{3}{4}\right)^n = 3\,\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^n <$$
$$< 4m^3\left(\frac{3}{4}\right)^n = m \cdot 4m^2\left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant m.$$

Здесь последнее неравенство выполнено, ибо $m = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$.

Теорема Эрдёша—Фюреди доказана.

§ 9. НЕСКОЛЬКО СЛОВ ОБ УТОЧНЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЭРДЁША—ФЮРЕДИ

Мысль человеческая не стоит на месте, и за прошедшие с момента появления теоремы Эрдёша—Фюреди четверть века был получен ряд уточнений этого результата.

Во-первых, контрпримеры к гипотезе Данцера—Грюнбаума были найдены во всех размерностях, начиная с $n = 7$, и лишь при $n \in \{4, 5, 6\}$ интрига по-прежнему сохраняется.

Во-вторых, были найдены оценки, которые слегка улучшают неравенство $f(n) \geqslant \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$.

Тут борьба развернулась исключительно вокруг константы $1/2$. Последовательность достижений довольно любопытна сама по себе, и мы выпишем её целиком:

$$f(n) \geqslant 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right] \approx 0{,}769 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n};$$

$$f(n) \geqslant \frac{3}{2}\left[\frac{22\sqrt{33}}{243}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}\right] \approx 0{,}780 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n};$$

$$f(n) \geqslant \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}\right] \approx 0{,}942 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n}.$$

Первая оценка получена Д. Беваном в 2006 году, а второй и третий результаты принадлежат Л. В. Бучок.

...Да вот кабы с константой $\frac{2}{\sqrt{3}}$ что-нибудь сделать!

ПРИЛОЖЕНИЕ
§ 10. ГРАФЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ГРАФЫ

В основной части этой брошюры мы достаточно подробно изучили схему испытаний Бернулли, которая, собственно, и помогла нам вслед за Эрдёшем и Фюреди решить замечательную геометрическую задачу Данцера—Грюнбаума. В действительности область применения схемы Бернулли гораздо шире; просто иллюстрация, которую мы успели дать, быть может, ярче других подчёркивает силу метода. Однако вместе с тем существуют и целые разделы современной математики, которые основаны на «подбрасывании монеток». Есть, например, огромный раздел, возникший весьма давно и называемый наукой о *случайных блужданиях*.

Есть и более молодая область исследований, которая, по сути, была инициирована в пятидесятые годы XX столетия уже знакомым нам Полом Эрдёшем. Вот о ней-то мы и хотим сказать ниже несколько слов. Во-первых, мы узнаем заодно, что такое граф, а во-вторых, мы сразу же получим представление о том, как свойства этого самого графа можно изучать в вероятностном ключе. Конечно, мы лишь поверхностно коснёмся науки о случайном графе, но и на таком уровне будет ясно, насколько наука содержательна, красива и многогранна.

10.1. Понятие о графе

Заметим с самого начала, что мы уже однажды давали минимальное представление о графе. Было это в брошюре [1]. В то же время следует подчеркнуть, что сколь-нибудь полную картину так называемой *теории графов* — бурно развивающейся и весьма разнообразной науки — можно получить, лишь изучая графы и занимаясь ими годами.

Историю этой науки можно вести ещё с XVIII века, когда великий математик Леонард Эйлер поставил свою знаменитую задачу о кёнигсбергских мостах. Речь шла о том, чтобы пройти по каждому мосту (рис. 3) ровно один раз, причём,

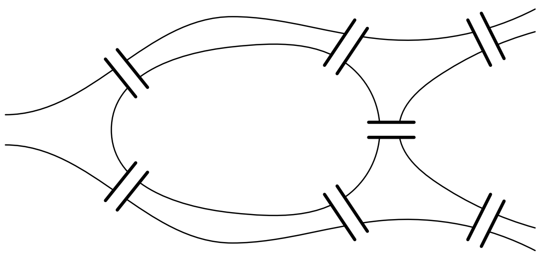

Рис. 3

стартовав из какой-нибудь части суши, вернуться туда же. Потыкавшись в картинку, нетрудно прийти к выводу, что положительного решения задача не имеет.

Однако непереборное доказательство удобнее всего проводить именно на *графе* или, точнее, на *мультиграфе*, изображённом на рис. 4. Точками (*вершинами* (*мульти*)*графа*) обозначены одноимённые части суши, а отрезками (*рёбрами* (*мульти*)*графа*) соединены точки, отвечающие частям суши, между которыми есть мост. Если мостов два, то и рёбер два.

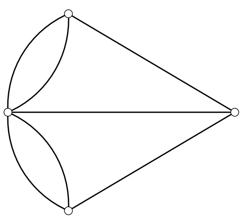

Рис. 4

Именно последнее свойство (наличие «кратных» рёбер) отличает мультиграф от графа, и уже сейчас, в принципе, понятно, что́, по большому счёту, мы станем называть графом. Действительно, геометрически это попросту набор точек (вершин) на плоскости, соединённых рёбрами-отрезками (или, как ещё иногда говорят, *дугами*). Тем не менее смущает некоторая произвольность в подобном определении: ведь мало того, что вершины на плоскости можно расположить как попало (вряд ли от этого что-нибудь изменится, коль скоро рёберную структуру мы сохраним (рис. 5)), так ещё и никто не заставлял нас размещать граф на плоскости — чем пространство или и вовсе $\mathbb{R}^n$ хуже?

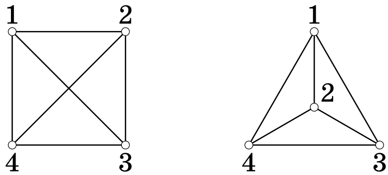

Рис. 5

Формальное определение носит чисто комбинаторный характер. *Граф G — это пара* (V, E), где V — это некоторое множество совершенно произвольных объектов, а E — это совокупность каких-то пар объектов из V. При этом каждая пара встречается в E ровно один раз; не бывает в E и пар вида (x, x) при $x \in V$; наконец, пары в E не упорядочены, т. е. $(x, y) = (y, x)$. Ясно, что V — это множество вершин графа G, E — множество его рёбер, и в этом контексте смысл ограничений, наложенных нами на E, также понятен: если мы G интерпретируем геометрически, то отсутствие пар (x, x) в E есть отсутствие *петель* (рис. 6) в графе; тот факт, что каждое ребро единственно, мы уже обсуждали (если есть кратные рёбра, то получится не граф, а мультиграф), а неупорядоченность рёбер очевидна, ведь всё равно, откуда смотреть на отрезок (дугу) — слева направо или справа налево. Правда, бывают ещё *псевдографы* (когда разрешены петли) и *орграфы* (*ориентированные графы*) (когда на ребре посредством стрелочки указывается его направление — порядок пары (x, y)). Но это совсем другая история.

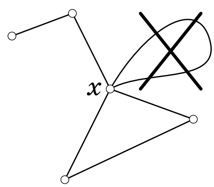

Рис. 6

Итак, граф — это чисто формальный комбинаторный объект, который, однако же, удобно изображать на плоскости, делая это в зависимости от ситуации тем или иным способом.

Заметим, что множество вершин графа бывает и бесконечным, но такие графы нас сейчас не интересуют. Подчеркнём ещё раз, что с формальной точки зрения вершины графа — это всё, что вам вздумается — хоть стулья в аудитории, — да и рёбра могут возникать по абы какому правилу: скажем, стулья-вершины можно соединять ребром, коль скоро они стоят за одной и той же партой или, допустим, надписи на них сделаны одинаковые. Собственно, уже с задачей Эйлера мы так и поступили: взяли острова-вершины и мосты-рёбра, получился мультиграф.

Как видно, граф — это исключительно полезный объект. Понятно, стало быть, что различные его свойства заслуживают глубокого изучения. Можно об этих свойствах судить, так сказать, с детерминистской точки зрения. Тогда утверждения будут звучать как-нибудь так: «если граф такой-то, то он заведомо обладает тем-то» или «графов такого-то вида столько-то». Подобные утверждения и составляют предмет обычной теории графов. Однако зачастую бывает важно оценить степень достоверности, с которой тот или иной граф имеет некоторое свойство, и в этом случае нужна теория *случайных графов*, создать которую помогает как раз схема Бернулли. В следующем параграфе мы очень быстро уясним, в чём идея упомянутой теории, а в разделе 10.3 мы расскажем об одном крайне любопытном её применении.

10.2. Случайный граф

Пусть фиксировано некоторое натуральное число n. Предположим, что V — множество, состоящее из n элементов. Например, на роль V вполне можно взять $\mathscr{R}_n = \{1, \ldots, n\}$. Зададимся сперва вопросом: а сколько различных графов $G = (V, E)$ существует? Иными словами если множество вершин графа фиксировано, сколькими способами можно на этом множестве задать рёберную структуру?

Очевидно, что в графе на n вершинах не более C_n^2 рёбер, и, кстати, если в нём именно $N = C_n^2$ рёбер, то он называется *полным* и обозначается K_n. Давайте считать, что $e_1, \ldots, e_N$ суть рёбра K_n. Ясно, что в $\{e_1, \ldots, e_N\}$ в точности 2^N подмножеств и, значит, на наш вопрос имеется ответ: различных графов $G = (V, E)$ есть $2^{C_n^2}$ штук, причём граф может быть и полным, и «пустым» (свободным от рёбер).

Вот если бы мы ко всему прочему из множества $\{e_1, \ldots, e_N\}$ ещё и *случайное* подмножество E научились извлекать, то граф $G=(V, E)$ вполне разумно было бы назвать случайным. Но случайное подмножество в $\{e_1, \ldots, e_N\}$ есть, по сути, не что иное, как случайное подмножество в $\mathscr{R}_N=\{1, \ldots, N\}$, а такие подмножества мы с успехом извлекали ещё в § 5.

Обозначим, стало быть, через Ω_n — совокупность всех случайных графов. Конечно, $|\Omega_n|=2^N$, и, коль скоро $G=(V, E)\in \in\Omega_n$, его вероятность совпадает с вероятностью случайной точки $\mathbf{x}\in\mathscr{K}^N$, имеющей $|E|$ единичных координат: $P_n(G)= = P(G)=p^{|E|}q^{N-|E|}$. Соответственно, $P_n(B)=P(B)=\sum\limits_{G\in B} P(G)$, где B — это совокупность графов (событие). Заметим, что зависимость от n здесь очень важна, так как в дальнейшем мы будем изучать поведение величин типа $P_n(B)$ при неограниченно возрастающем n. В частности, даже вероятность «успеха» в схеме Бернулли (т. е. вероятность ребра графа в нашей нынешней модели) будет зависеть от n ($p=p(n)$).

Самое же главное — понять, что события — это как раз свойства случайных графов, ведь если мы хотим найти вероятность («степень достоверности») свойства графа, то нам достаточно посчитать вероятность совокупности графов, этим свойством обладающих. Удивительным образом, такие вероятности удаётся очень точно оценивать с помощью математического ожидания, которое, в свою очередь, ищется за счёт линейности. Это как бы самая верхушка айсберга, но и здесь крайне тонкие результаты попадаются. В следующем разделе мы поговорим об одном весьма значимом свойстве (случайного) графа и постараемся на его примере проиллюстрировать сказанное.

10.3. Связность графа

Мы будем говорить, что между двумя вершинами $x, y\in V$ графа $G=(V, E)$ есть *рёберный путь*, если существует такая последовательность рёбер $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k)\in E$, что $x=x_1$, $x_k=y$. Иными словами, первое ребро выходит из вершины $x=x_1$ в какую-то вершину x_2, второе ребро начинается с x_2 и заканчивается в некотором x_3, и так далее вплоть до последнего ребра, «утыкающегося» в $x_k=y$. Подчеркнём, что путь вполне может и пересекать сам себя: скажем, может

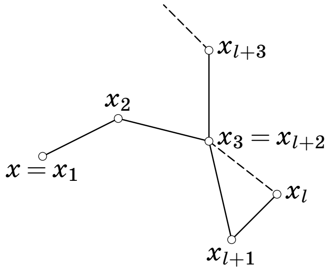

Рис. 7

статься, что при тех или иных i и j вершины x_i, x_j совпадают (рис. 7).

Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами найдётся хоть один рёберный путь. В противном случае граф несвязен; он распадается на связные куски, именуемые его *связными компонентами* (рис. 8).

Связность графа — это одно из его принципиальнейших свойств. В её терминах можно говорить и о качестве компьютерных сетей (можно ли с одного компьютера послать сообщение на некоторый другой: компьютеры суть вершины графа, а провода, соединяющие один компьютер с другим, — его рёбра), и о структуре молекул (биоинформатика), и о других интересных и серьёзных вещах. Ниже, например, мы для будем рассуждать о «стратегии» (что, впрочем, скорее забавно, чем серьёзно).

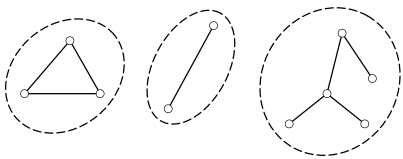

Рис. 8

Обозначим через Q_n свойство связности случайного графа в Ω_n. Оказывается, верна замечательная

Теорема 1. Если $p = p(n) > \dfrac{3 \ln n}{n}$ при $n > n_0$, то $P_n(Q_n) \geqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

Сразу ясно, насколько удивительно утверждение теоремы. Получается, даже при условии, что вероятность ребра в случайном графе с ростом n становится пренебрежимо маленькой («стремится» к нулю), рёбер «в среднем» достаточно, чтобы не нарушить связную структуру случайного графа, причём достоверность этого самого «ненарушения» крайне велика («стремится» к единице). «Стратегическую» иллюстрацию этого явления мы дадим позже, а пока наметим схему доказательства теоремы. Только подчеркнём ещё, что загадочное n_0 в формулировке — это не слишком большое число: с запасом хватит положить n_0 равным десяти.

Схема доказательства теоремы 1. Введём последовательность случайных величин $\xi_n : \Omega_n \mapsto \{0, 1, 2, \ldots\}$, полагая $\xi_n(G)$ равной числу связных компонент в $G \in \Omega_n$, если граф несвязен, и нулю иначе. Ясно, что $Q_n = \{G \in \Omega_n : \xi_n(G) = 0\}$. Но тогда $P_n(Q_n) = P_n(\{G \in \Omega_n : \xi_n(G) = 0\})$. Исходя из определения математического ожидания случайной величины, нетрудно получить оценку $P_n(\{G \in \Omega_n : \xi_n(G) = 0\}) \geqslant 1 - M\xi_n$ (проверьте это!). Следовательно, остаётся осознать, почему $M\xi_n \leqslant 1/n$. Пользуясь исключительно линейностью математического ожидания, можно обосновать неравенство $M\xi_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_n^k q^{k(n-k)}$ (подсказкой может служить тот факт, что $q^{k(n-k)}$ — это вероятность того, что никакая из данных k вершин случайного графа не соединена ребром ни с какой из оставшихся $n-k$ вершин). Последняя же величина, благодаря выбору $p = p(n)$, действительно не превосходит $1/n$, и всё в порядке. $\square$

А вот и обещанная стратегическая иллюстрация к теореме 1, призванная показать, насколько нетривиально, несмотря на простоту своего доказательства, утверждение теоремы. Конечно, мы рассмотрим сейчас малореалистичную модель, но заметим сразу, что подправить её, в принципе, можно, и это хороший стимул для самостоятельной деятельности заинтересовавшегося читателя.

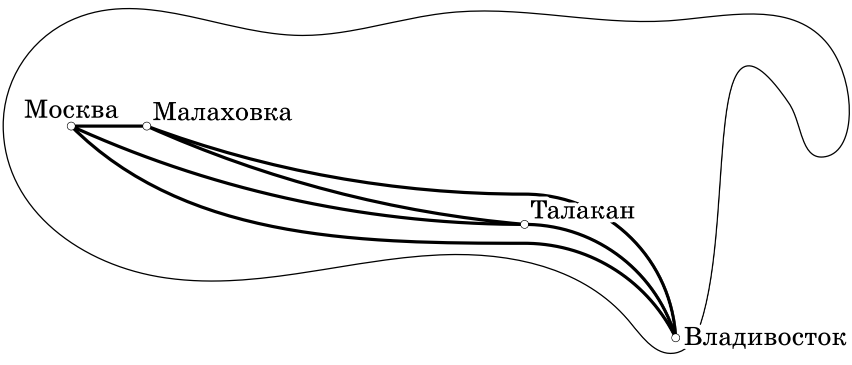

Рис. 9

Итак, представим себе, что в некоей стране есть, скажем, 1000 стратегически важных объектов (городов, электростанций и пр.), и допустим, что изначально любые два объекта соединены отдельным железнодорожным путём (рис. 9). Разумеется, последнее допущение крайне ограничительно: трудно ведь вообразить, что кто-нибудь, на самом деле, поедет из Москвы в Малаховку через Владивосток. Это одно из мест, с которыми, по идее, следует бороться, но мы для простоты оставим всё как есть. Ясно, стало быть, что различных железнодорожных путей у нас $N = C_n^2$, где $n = 1000$, и мы имеем, так сказать, «полный железнодорожный граф» K_n, вершинами которого являются объекты, подлежащие защите, а рёбрами — пути.

«Вероятный противник» стремится разрушить рёбра нашего графа посредством их бомбардировки, и мы будем считать, что каждое ребро он бомбит независимо от остальных, разрушая его с вероятностью q. Это тоже довольно специфическое допущение, хотя оно уже не столь ограничительно, как полнота железнодорожного графа. Спрашивается, насколько «слабой» может быть оборона каждого отдельного пути, чтобы тем не менее с достаточно большой вероятностью сохранилась «инфраструктура»? Иными словами, как велико может быть q, при котором с вероятностью, близкой к единице, граф путей связен (в Малаховку можно добраться, пускай и через Владивосток)?

На первый взгляд, вопрос кажется нелепым: разве можно при слабой обороне ($q \approx 1$) надеяться на сохранение связности? Но теорема 1 даёт неожиданно положительный ответ. Действительно, в результате бомбардировки полный граф превращается в случайный, причём вероятность каждого ребра есть в точности $p = 1 - q$ (вся разница лишь в том, что раньше мы «клали» ребро в граф с вероятностью p, а теперь мы его с той же вероятностью сохраняем). Следовательно, такой граф связен (ввиду теоремы 1) с вероятностью не меньшей, чем $1 - 1/n = 0{,}999$, коль скоро $p > (3 \ln n)/n \approx 0{,}02$ ($q \approx 0{,}98$). То есть мы можем «разрешить» противнику уничтожать тот или иной путь с вероятностью 0,98, и всё равно с вероятностью 0,999 инфраструктура не погибнет!

Естественно, возникает задача оптимизации. Пусть железнодорожный граф неполон. Как много должно быть в нём рёбер, чтобы, например, при разрушении каждого из них с вероятностью $1/2$ вероятность связности результирующего графа была также примерно равна половине? Попробуйте подумать над этим. Мы же в заключение приведём ещё одну замечательную теорему, принадлежащую Эрдёшу и Реньи.

Теорема 2. Если брать $p \leqslant c/n$ при $c < 1$, то с вероятностью, стремящейся к единице при n, стремящемся к бесконечности, все компоненты случайного графа очень маленькие — содержат не более $\alpha \log n$ вершин с некоторым постоянным $\alpha > 0$.

Если же $p \geqslant c/n$ при $c > 1$, то опять-таки с вероятностью, стремящейся к единице, случайный граф обладает «гигантской» компонентой, имеющей порядка n вершин.

Эта теорема, конечно, ещё более удивительна, чем теорема 1, и с неё фактически началась наука о случайном графе. В теореме речь идёт о феномене, который в физике часто называют фазовым переходом; применительно к комбинаторной ситуации Эрдёш и Реньи назвали его «двойным скачком». В самом деле, когда вероятность ребра «перескакивает» через критическое значение $1/n$, устройство графа катастрофически меняется: все его крошечные компоненты «чрезвычайно быстро» склеиваются в одну гигантскую. Это ещё не есть связность (в гигантской компоненте βn вершин с $\beta \in (0, 1)$), но до связности как бы рукой подать. В частности, если вернуться к статегической модели и предположить, что мы готовы пожертвовать частью инфраструктуры (ну не доберёмся до Малаховки, и ладно), то результат получится значительно более сильным: $q \approx 1 - 1/n = 0{,}999$ вместо $q \approx 0{,}98$. Вообще, наука о поведении случайного графа «внутри фазового перехода» (то есть, скажем, при $p = \frac{1}{n} + \frac{\lambda}{n^2}$) исключительно нетривиальна, и до сих пор там не всё исследовано. Но это уже другой разговор.

10. Аккуратно докажите теорему 1.

11. Пусть $p < \frac{\ln n}{n}$. Докажите, что тогда с вероятностью, стремящейся к единице (или хотя бы $> 1/2$), случайный граф несвязен.

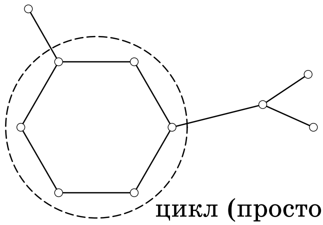

Рис. 10

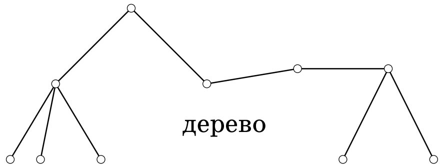

Рис. 11

12. Назовём *простым циклом* в графе любой замкнутый рёберный путь, не имеющий самопересечений (рис. 10). Найдите математическое ожидание числа связных компонент случайного графа, являющихся простыми циклами.

13*. Назовём *деревом* любой связный граф, свободный от простых циклов (рис. 11). Найдите число различных деревьев на данных k вершинах (формула Кэли) и математическое ожидание числа компонент случайного графа, являющихся деревьями.

14*. Докажите теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Райгородский. Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.

[2] L. Danzer, B. Grünbaum. Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Erdős und von V. L. Klee // Math. Z. — 1962. — V. 79. — P. 95—99.

[3] P. Erdős, Z. Füredi. The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space // Combinatorial mathematics. — Marseille-Luminy, 1981. — P. 275—283; North-Holland Math. Stud. — 75. — North-Holland, Amsterdam, 1983