# Фундаментальная математика в работах молодых ученых

## Юбилейная конференция победителей конкурса Мёбиуса

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51(06)
ББК 22.1 Я5
Ф94

*Книга опубликована при участии «Фонда поддержки молодых ученых „Конкурс Мёбиуса“»*

Ф94 Фундаментальная математика в работах молодых ученых. Юбилейная конференция победителей конкурса Мёбиуса. — М.: МЦНМО, 2009. — 120 с.

ISBN 978-5-94057-556-6

Настоящая книга — сборник статей, посвященных активно развивающимся в настоящее время направлениям фундаментальной математики. Все авторы являются победителями и призерами разных лет конкурса Мёбиуса математических работ студентов и аспирантов, проводимого Независимым московским университетом. В своих статьях они рассказывают об интересующих их областях математики. Книга рассчитана на широкий круг математической общественности, начиная со студентов-математиков.

ББК 22.1 Я5

**ISBN 978-5-94057-556-6**

# Оглавление

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

Победители конкурса Мёбиуса . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

*Александр Кузнецов*
Производные категории когерентных пучков в современной алгебраической геометрии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

*Александр Эстеров*
Индекс Пуанкаре — Хопфа, результанты и многогранники Ньютона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

*Михаил Скопенков*
О заузливании многообразий в пространстве размерности меньше метастабильной . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

*Олег Карпенков*
Числа Бернулли — Эйлера и мультикраевые особенности серии $B_n^l$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

*Фёдор Петров*
Несколько замечаний об аффинной площади поверхности . . . 55

*Иван Лосев*
Квантованные гамильтоновы действия редуктивных групп и их приложения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

*Евгений Горский*
Операции Адамса и степенные структуры . . . . . . . . . . . . . 81

*Юрий Притыкин*
О логических теориях и конечных автоматах на бесконечных последовательностях . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 103

# Предисловие

Конкурсу Мёбиуса уже 12 лет. Возник он в середине 1990-х. Математикам, как собственно и всем остальным, было нелегко. Мы были растеряны и дезориентированы одновременно. Математическая жизнь куда-то уходила, как вода в песок, большинство друзей и знакомых уехало. Русская математическая школа заканчивала свое существование или, по крайней мере, превращалась в нечто совсем другое. Всё это надо было как-то пережить. Математикой вообще заниматься нелегко, всё время что-то не получается, постоянные разочарования и недовольство собой — удел каждого. Способ выживания стандартный — надо преподавать.

Преподавание я понимаю достаточно широко. Это значит помогать молодым людям становиться математиками. А с этим в середине 1990-х были проблемы. У многих было чувство, что математика — важнейшая часть нашего существования — молодым людям не нужна. А кроме того, не очень было понятно, как помогать. Мы делали, что могли — учили студентов, помогали им уехать, если им очень хотелось. Был организован Независимый университет и позднее при нем конкурсы — Мёбиуса и гораздо позже Делиня. Постепенно выяснилось, что всё не так плохо. Жизнь, в частности математическая, продолжается. Это было бы невозможно без усилий очень многих людей.

Конкурс Мёбиуса был основан в 1997 году двумя предпринимателями, выпускниками кафедры прикладной математики МИЭМ Валерием Баликоевым и Александром Кокиным. В 2002 году Александр Кокин учредил (при участии Независимого московского университета) некоммерческую организацию «Фонд поддержки молодых ученых „Конкурс Мёбиуса“» и стал председателем Попечительского совета Фонда.

Таким образом, имеется организационная структура, благодаря которой конкурс Мёбиуса существует.

Каждый год студенты и аспиранты подают на конкурс Мёбиуса свои работы. В некоторые годы их было довольно много — около пятидесяти, в другие, к сожалению, меньше. Работы рецензируются примерно так же, как статьи, подаваемые в журналы высокого уровня. Они посылаются ведущим специалистам, которые оценивают работу. На основе их отзывов жюри отбирает несколько человек, которые докладывают свои результаты. Затем жюри на основании всего этого присуждает премии. Подробнее о конкурсе можно прочитать на сайте: www.moebiuscontest.ru

За годы проведения конкурса Мёбиуса довольно много молодых людей стали победителями. Они все — хорошие математики, а некоторые даже очень хорошие.

В 2007 году — юбилейном десятом году проведения конкурса — прошла конференция победителей конкурса прошлых лет под названием «Фундаментальная математика в работах молодых ученых». Конференция была посвящена широкому спектру вопросов современной фундаментальной математики. Было прочитано 10 докладов победителями и призерами конкурса 1997—2006 годов. На конференции присутствовали также все победители конкурса 2007 года, члены жюри и другие математики (всего более 40 человек).

Конференция показала, что, во-первых, практически все победители конкурса Мёбиуса стали математиками-исследователями высокого международного уровня, во-вторых, большинство из них остались пока в России, и в-третьих, — это оказалось неожиданностью для организаторов, — большинство докладов были прочитаны на высоком педагогическом уровне, докладчики сумели заинтересовать других молодых участников конференции своими результатами и своей тематикой.

Победители и призеры конкурса, не смогшие принять личное участие в работе конференции, также предоставили свои статьи для публикации. Работы оригинального и более специального содержания были опубликованы в журнале «Moscow Mathematical Journal». В настоящем сборнике публикуются в основном работы обзорного характера.

Организаторы конкурса надеются, что настоящий сборник будет интересен как специалистам, так и студентам-математикам, только выбирающим область своих первых исследований.

*Борис Фейгин*
Председатель жюри конкурса Мёбиуса

# Победители конкурса Мёбиуса

### 1997

*Александр Кузнецов* «Компактификации пространства отображений из $\mathbb{P}^1$ в многообразие флагов полупростой группы Ли»

### 1998

*Владлен Тиморин* «Смешанные соотношения Ходжа — Римана в линейном контексте»

### 1999

*Александр Буфетов* «Эргодические теоремы для действий нескольких операторов и отображений»

### 2000

*Сергей Шадрин* «Эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций»

### 2001

*Анна Эршлер* «On isoperimetric profiles of finitely generated groups»

### 2002

*Виктор Клепцын* «Облако точек: сближение орбит в случайных динамических системах на окружности»

*Леонид Рыбников* «О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств»

### 2003

**Первая премия.** *Сергей Чулков* «О сходимости формальных решений систем дифференциальных уравнений в частных производных»

**Вторая премия.** *Сергей Облезин* «Isomonodromic deformations of the sl(2) Fuchsian systems on the Riemann sphere»

**Вторая премия.** *Сергей Шадрин* «Combinatorics of binomial decompositions of the simplest Hodge integrals»

### 2004

**Первая премия.** *Александр Эстеров* «Индексы 1-форм, результанты и многогранники Ньютона»

**Вторая премия.** *Михаил Скопенков* «Embeddability of products of graphs, approximability by embeddings and the Van Kampen obstruction»

**Третья премия.** *Олег Карпенков* «О трехмерных многоэтажных вполне пустых выпуклых пирамидах и двумерных гранях многомерных цепных дробей»

**2005**

**Первая премия.** *Александр Гайфуллин* «Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина»

**Вторая премия.** *Геннадий Пифтанкин* «Скорость диффузии в задаче Мезера»

**Третья премия.** *Фёдор Петров* «О количестве рациональных точек на строго выпуклой кривой»

**2006**

**Номинация «Студенты и аспиранты»**

**Первая премия.** *Иван Лосев* «Вычисление комбинаторных инвариантов $G$-многообразий»

**Вторая премия.** *Павел Мнёв* «Notes on Simplicial BF Theory»

**Третья премия.** *Андрей Перфильев* «Решение проблемы описания минимальных многообразий Зейферта»

**Номинация «Студенты»**

**Первая премия.** *Евгений Горский* «Мотивные интегралы и функциональные уравнения»

**Вторая премия.** *Юрий Притыкин* «Почти периодичность и конечные автоматы»

**2007**

**Номинация «Студенты и аспиранты»**

**Вторая премия.** *Владислав Высоцкий* «Gravitational clustering in stochastic systems of sticky particles»

**Вторая премия.** *Евгений Горский* «О мотивной мере на пространстве функций»

**Третья премия.** *Михаил Скопенков* «Classification of links and knotted tori in the 2-metastable dimension»

### Номинация «Студенты»

**Первая премия.** *Вадим Горин* «Дизъюнктность представлений, возникающих в задаче гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе»

**Вторая премия.** *Арсений Акопян* «PL-аналог теоремы Нэша — Кейпера»

## 2008

### Номинация «Студенты и аспиранты»

**Первая премия.** *Александр Ефимов* «Deformations of objects in derived categories and noncommutative Grassmanians»

**Вторая премия.** *Вадим Горин* «Shuffling algorithm for boxed plane partitions»

**Третья премия.** *Дмитрий Гугнин* «Полиномиально зависимые гомоморфизмы и $n$-гомоморфизмы Фробениуса»

### Номинация «Студенты»

**Первая премия.** *Шамиль Шакиров* «Аналог тождества $\operatorname{Log}\operatorname{Det} = \operatorname{Trace}\operatorname{Log}$ для результантов»

**Вторая премия.** *Антон Науменко* «О распределении чисел с двоичным разложением специального вида в арифметических прогрессиях с произвольными простыми разностями»

# Производные категории когерентных пучков в современной алгебраической геометрии

Александр Кузнецов

*1997, победитель первого конкурса Мёбиуса*

Геометрия изучает топологические пространства с разными дополнительными структурами. Основные примеры:

— метрическая геометрия изучает топологические пространства с метрикой;

— дифференциальная геометрия — топологические пространства с гладкой структурой;

— риманова геометрия — топологические пространства с гладкой структурой и метрикой;

— симплектическая геометрия — топологические пространства с гладкой структурой и симплектической формой;

— алгебраическая геометрия — топологические пространства с алгебраической структурой.

Есть несколько способов задавать геометрическую структуру.

**1) Локальные карты и функции перехода.** Напомним вначале, что гладкая структура на топологическом пространстве $X$ — это задание открытого покрытия $X = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ и гомеоморфизмов $\varphi_i \colon \mathcal{U}_i \to X_i$, где $X_i$ — простейшие гладкие многообразия, так что функции перехода $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \colon X_j \to X_i$ — гладкие (функции перехода определены на открытом подмножестве $\varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset X_j$). Простейшими гладкими многообразиями являются области в $\mathbb{R}^n$, снабженные классической топологией.

Аналогично алгебраическая структура на топологическом пространстве $X$ — это задание открытого покрытия $X = \bigcup_i \mathcal{U}_i$ и гомеоморфизмов $\varphi_i \colon \mathcal{U}_i \to X_i$, где $X_i$ — простейшие алгебраические многообразия, так что функции перехода $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \colon X_j \to X_i$ — алгебраические (функции перехода определены на открытом подмножестве $\varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset X_j$). Простейшими алгебраическими многообразиями являются подмножества аффинного пространства $\mathbb{A}^n$, заданные набором полиномиальных уравнений и снабженные топологией Зарисского (замкнутыми подмножествами в этой топологии являются подмножества, задаваемые полиномиальными уравнениями). Такие многообразия называются аффинными алгебраическими многообразиями.

Если $X_i \subset \mathbb{A}^m$ и $X_j \subset \mathbb{A}^n$ — аффинные алгебраические многообразия, то функция $f\colon X_j \to X_i$, определенная на открытом подмножестве в $X_j$, называется алгебраической, если для всякой точки в области определения функции $f$ композиция $X_j \to X_i \to \mathbb{A}^m$ в некоторой окрестности этой точки совпадает с отображением, заданным ограничением на $X_j$ набора из $m$ рациональных функций, знаменатели которых не обращаются в нуль. Иначе говоря, если для всякой точки $x$ найдется набор $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ многочленов от $n$ переменных, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X_i \arrow[d, hook] \\ \mathbb{A}^n \arrow[r, "\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}"] & \mathbb{A}^m \end{tikzcd}$$

определена и коммутативна в окрестности точки $x$.

**Пример.** *Проективное пространство $\mathbb{P}^n$ — множество проходящих через 0 прямых в $\mathbb{A}^{n+1}$ — следующим образом снабжается структурой алгебраического многообразия. Пусть $z_0, \dots, z_n$ — координаты в $\mathbb{A}^{n+1}$. Всякая прямая однозначно определяется любым своим ненулевым вектором, причем любые два ненулевых вектора на прямой отличаются умножением на ненулевую константу. Пусть $\mathscr{U}_i \subset \mathbb{P}^n$ — множество прямых, натянутых на векторы с ненулевой $i$-й координатой, то есть $\mathscr{U}_i = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) \mid z_i \neq 0\}$. Сопоставляя такой прямой ее вектор, нормализованный условием $z_i = 1$, получаем биекцию $\varphi_i\colon \mathscr{U}_i \to \mathbb{A}^n$. При этом*

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left(\frac{t_1}{t_i}, \dots, \frac{t_j}{t_i}, \frac{1}{t_i}, \frac{t_{j+1}}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}\right)$$

*(выражение $t_i/t_i = 1$, естественно, надо пропустить) — алгебраические функции, так что $\mathbb{P}^n$ приобретает структуру алгебраического многообразия.*

**2) Задание пучка регулярных функций.** Пусть опять $X$ — топологическое пространство. Предположим, на $X$ задан пучок колец $\mathcal{O}_X$ (в дальнейшем он будет называться пучком регулярных функций), то есть для каждого открытого подмножества $\mathscr{U} \subset X$ задано кольцо $\mathcal{O}_X(\mathscr{U})$, а для каждого вложения $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ задан гомоморфизм колец $\mathcal{O}_X(\mathscr{V}) \to \mathcal{O}_X(\mathscr{U})$, $f \mapsto f_{|\mathscr{U}}$ (ограничение), так что «всякая функция определяется локально», то есть если $\mathscr{U} = \bigcup \mathscr{U}_\alpha$ — открытое покрытие, то для любого набора функций $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(\mathscr{U}_\alpha)$, такого что $f_{\alpha|\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta} = f_{\beta|\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta}$, существует единственная функция $f \in \mathcal{O}_X(\mathscr{U})$, такая что $f_{|\mathscr{U}_\alpha} = f_\alpha$. Предположим также, что задан локальный вид пары

$(X, \mathscr{O}_X)$ (для гладких многообразий локальный вид — это область в $\mathbb{R}^n$ с пучком гладких функций, а для алгебраических — аффинное многообразие с пучком алгебраических функций).

Легко видеть, что задание пучка функций и локальной структуры равносильно заданию многообразия картами. Преимущество второго подхода состоит в том, что вместо несущественных данных (набора карт, от которых необходимо только существование) рассматриваются существенные данные (пучок функций).

Алгебраическая геометрия имеет много замечательных свойств, отличающих ее от других геометрий.

**1) Богатство локальной структуры.** Если в дифференциальной геометрии локально все выглядит как $\mathbb{R}^n$, то есть локально все многообразия одинаковы, то в алгебраической геометрии ничего подобного нет. Локально алгебраическое многообразие — это аффинное многообразие, которое однозначно определяется своим кольцом функций. Поэтому локально алгебраическая геометрия — это то же, что и коммутативная алгебра.

**2) Самодостаточность (замкнутость).** Пусть $X$ — многообразие, и мы интересуемся, чем параметризуются подмногообразия в $X$ (или расслоения на $X$ или другие геометрические объекты) с фиксированными дискретными инвариантами. В дифференциальной геометрии, как правило, будут возникать совершенно бесконечномерные пространства параметров, то есть объекты из другого мира. А в алгебраической геометрии это будут опять алгебраические многообразия (или их небольшие обобщения), которые традиционно называются многообразиями модулей (модули = параметры). Модулярная интерпретация многообразия дает массу полезных вещей. Например, доказательство теоремы Ферма основано на гипотезе Таниямы— Вейля, утверждающей, грубо говоря, модулярность всех эллиптических кривых.

**3) Возможность работы над полями положительной характеристики.** Сведение в положительную характеристику — замечательный и очень сильный метод, который позволяет доказывать очень мощные результаты и совершенно отсутствует в других геометриях.

**4) Связи с другими областями математики.** Здесь можно перечислить следующие области:

— теория чисел;

— математическая физика (теория поля, теория струн);

— симплектическая геометрия (зеркальная симметрия).

**5) Сильно развитый формализм (теория когерентных пучков и их производных категорий).** Если $X$ — алгебраическое многообразие, то когерентный пучок — это пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, локально имеющий следующий вид. Напомним, что локально алгебраическое многообразие устроено как аффинное алгебраическое многообразие. Если $\mathcal{U} \subset X$ — аффинное подмножество, всякому $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-модулю $M$ можно сопоставить пучок $\mathcal{O}_X$-модулей $\widetilde{M}$ на $\mathcal{U}$, полагая

$$\widetilde{M}(\mathcal{V}) = M \otimes_{\mathcal{O}_X(\mathcal{U})} \mathcal{O}_X(\mathcal{V})$$

для всякого $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Пучки $\mathcal{O}_X$-модулей, локально устроенные именно так, называются квазикогерентными, а если модули $M$, задающие локальную структуру, конечно порождены, то когерентными.

**Примеры.** *Следующие пучки являются когерентными*:

1) *пучок функций* $\mathcal{O}_X$;

2) *пучок дифференцирований* $T_X$ *и дифференциальных форм* $\Omega^1_X$;

3) *пучок функций на подмногообразии* $\mathcal{O}_Z$ *и пучок функций, обращающихся в нуль на подмногообразии* $\mathcal{J}_Z$ (*пучок идеалов*);

4) *пучок сечений векторного расслоения* $E$.

Категория когерентных пучков «линеаризует геометрию». Она *абелева*, то есть

1) морфизмы в этой категории — абелевы группы (даже векторные пространства);

2) в категории определены конечные прямые суммы;

3) существуют ядра, коядра и образы морфизмов; в частности, определены точные последовательности.

Геометрические преобразования реализуются как функторы между категориями когерентных пучков. В частности, морфизму многообразий $f: X \to Y$ соответствуют функторы прямого образа $f_*: \mathrm{Coh}(X) \to \to \mathrm{Coh}(Y)$ и обратного образа $f^*: \mathrm{Coh}(Y) \to \mathrm{Coh}(X)$. Кроме того, важную роль играют функторы тензорного произведения $\otimes: \mathrm{Coh}(X) \times \times \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X)$ и локальных гомоморфизмов $\mathcal{H}om: \mathrm{Coh}(X)^{\mathrm{opp}} \times \times \mathrm{Coh}(X) \to \mathrm{Coh}(X)$.

Однако, линеаризация до уровня категории когерентных пучков не полна. Например, функторы прямого и обратного образа (так же как и функторы тензорного произведения и локальных гомеоморфизмов) не полностью линейны — точные последовательности в результате применения этих функторов теряют точность.

Замечательная процедура дополнительной линеаризации — переход к производной категории.

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Например, категория когерентных пучков или категория модулей над кольцом (не обязательно коммутативным!). Рассмотрим категорию $C(\mathscr{A})$ комплексов

$$\ldots \xrightarrow{d} A^{-1} \xrightarrow{d} A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} \ldots, \quad d^2 = 0,$$

члены которых — объекты категории $\mathscr{A}$. Морфизмы комплексов — коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "d"] & A^{-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & A^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^0"'] & A^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^1"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "d"] & B^{-1} \arrow[r, "d"] & B^0 \arrow[r, "d"] & B^1 \arrow[r, "d"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Комплексу $A^\bullet$ сопоставляются его когомологии

$$H^i(A^\bullet) := \operatorname{Ker}(A^i \to A^{i+1}) / \operatorname{Im}(A^{i-1} \to A^i),$$

являющиеся объектами той же категории $\mathscr{A}$. Всякий морфизм комплексов $f^\bullet\colon A^\bullet \to B^\bullet$ индуцирует морфизм когомологий

$$H^i(f^\bullet)\colon H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet).$$

**Определение.** Морфизм комплексов $f^\bullet\colon A^\bullet \to B^\bullet$ называется *квазиизоморфизмом*, если морфизм $H^\bullet(f^\bullet)\colon H^\bullet(A^\bullet) \to H^\bullet(B^\bullet)$ — изоморфизм.

Производная категория — это локализация категории $C(\mathscr{A})$ по квазиизоморфизмам (категория частных). Объекты в ней — те же самые комплексы. Морфизмы — композиции морфизмов комплексов $f$ и формально обратных к квазиизоморфизмам $s$ морфизмов $s^{-1}$. Иначе говоря, морфизмы $A^\bullet \to B^\bullet$ в производной категории — это диаграммы

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& A_1^\bullet \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & & A_3^\bullet \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & & \ldots & & A_{2m-1}^\bullet \arrow[dl, "s_m"'] \arrow[dr, "f_m"] & \\
A^\bullet = A_0^\bullet & & A_2^\bullet & & A_4^\bullet & \ldots & A_{2m-2}^\bullet & & A_{2m}^\bullet = B^\bullet,
\end{tikzcd}$$

где все $s_i$ — квазиизоморфизмы, с точностью до очевидного отношения эквивалентности. Формально такой морфизм можно записать в виде произведения дробей

$$f_m s_m^{-1} \ldots f_2 s_2^{-1} f_1 s_1^{-1}.$$

Производная категория обозначается $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.

К сожалению, в силу некоммутативности морфизмов, в таких дробях нельзя, вообще говоря, переносить знаменатели слева направо (в результате произведение дробей нельзя представить в виде одной дроби) и нельзя приводить дроби к общему знаменателю (в результате непонятно, можно ли складывать морфизмы). Полезная промежуточная процедура, которая существенно упрощает процесс локализации, не меняя его результата, — переход к гомотопической категории.

Морфизмы комплексов $f^\bullet, g^\bullet \colon A^\bullet \to B^\bullet$ называются *гомотопными*, если существует набор морфизмов $h^i \colon A^i \to B^{i-1}$ (*гомотопия*), такой что

$$f^i - g^i = d_B \circ h^i - h^{i+1} \circ d_A.$$

Легко видеть, что морфизмы, гомотопные нулю, образуют идеал в категории комплексов. Факторкатегория $\mathrm{Ho}(\mathscr{A})$ по этому идеалу называется гомотопической категорией комплексов.

Легко видеть, что гомотопные морфизмы индуцируют один и тот же морфизм на когомологиях комплексов. Поэтому понятие квазиизоморфизма спускается на гомотопическую категорию. Оказывается, исчисление дробей в гомотопической категории значительно проще, чем в категории комплексов, при том что результаты локализации одинаковы. В частности, упомянутые выше недостатки исчезают: всякий морфизм представляется в виде одной дроби, дроби можно приводить к общему знаменателю, откуда видно, что производная категория аддитивна (морфизмы можно складывать).

В отличие от исходной категории $\mathscr{A}$ производная категория $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ не является абелевой (ядра и коядра не существуют). Однако, взамен абелевой структуры возникает так называемая триангулированная структура — всякий морфизм дополняется до «выделенного треугольника», третья вершина которого совмещает свойства ядра и коядра. Выделенные треугольники заменяют собой точные тройки.

На уровне производных категорий видны замечательные связи между многообразиями, которые не очень видны на геометрическом уровне.

**1) Производная эквивалентность.** Если $\mathrm{Coh}(X) \cong \mathrm{Coh}(Y)$, то $X \cong Y$. Для некоторых классов многообразий (многообразия Фано, многообразия общего типа) это же верно и для производных категорий. Однако, для многообразий Калаби — Яу это уже не так. Есть примеры, когда $X \neq Y$, но $\mathscr{D}^b(X) \cong \mathscr{D}^b(Y)$. В этом случае многообразия $X$ и $Y$ называются производно эквивалентными.

**2) Строго полные вложения.** Есть примеры, когда $\mathscr{D}^b(X) \subset \mathscr{D}^b(Y)$, то есть одна категория является частью другой в сильном смысле. В этом случае часть свойств многообразия $Y$ объясняется свойствами многообразия $X$.

**3) Полуортогональные разложения.** Простейший пример

$$\mathscr{D}^b(\mathbb{P}^n) = \langle \underbrace{\mathscr{D}^b(\mathrm{pt}), \mathscr{D}^b(\mathrm{pt}), \ldots, \mathscr{D}^b(\mathrm{pt})}_{n+1 \text{ штука}} \rangle,$$

полуортогональное разложение производной категории проективного пространства на $n+1$ производную категорию точки. Аналогичные разложения существуют для многих других многообразий.

Данное направление алгебраической геометрии сейчас бурно развивается. При этом в нем много интересных задач и нерешенных вопросов. Добро пожаловать!

# Индекс Пуанкаре — Хопфа, результанты и многогранники Ньютона

Александр Эстеров

*2004, первое место*

Локальный вариант формулы Д. Бернштейна [1] выражает индекс Пуанкаре — Хопфа комплексного аналитического векторного поля в терминах многогранников Ньютона его компонент. Мы обобщаем эту формулу на аналоги индекса Пуанкаре — Хопфа для (ко)векторных полей на многообразиях с особенностями (см. [9, 10, 18]). В качестве следствий получается также новое доказательство и форма ответа для описания многогранника Ньютона результанта [15, 19] и выражения числа Милнора полного пересечения в терминах многогранников Ньютона его уравнений [16, 17, 20]. Большая часть работы является улучшенным и обобщенным изложением результатов из [11–14].

В этой работе индекс пересечения образа ростка аналитического отображения $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^N, 0)$ и некоторого алгебраического многообразия $R \subset \mathbb{C}^N$ (результантное многообразие, см. определение 3.1) выражается через многогранники Ньютона компонент $f$ при условии, что главные части компонент находятся в общем положении. Частными случаями индексов пересечения такого типа являются индекс Пуанкаре — Хопфа ростка векторного поля, индекс Гусейн-Заде — Эбелинга набора ростков 1-форм на изолированной особенности полного пересечения [9, 10] и вычет Сува [18] набора сечений расслоения в изолированной точке их линейной зависимости. Индекс Гусейн-Заде — Эбелинга и вычет Сува обобщают индекс Пуанкаре — Хопфа: они участвуют в обобщениях формул типа Пуанкаре — Хопфа на многообразия с особенностями, произвольные характеристические числа, произвольные векторные расслоения и т. д.

Приведем в качестве иллюстрации основных результатов работы формулу для индекса Пуанкаре — Хопфа в терминах многогранников Ньютона. Обозначим через $P$ множество всех многогранников $\Delta$ в положительном октанте $\mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^n$, таких что разность $\mathbb{R}^n_+ \setminus \Delta$ ограничена. $P$ — полугруппа относительно сложения Минковского $\Delta_1 + \Delta_2 = \{x + y \mid x \in \Delta_1,\ y \in \Delta_2\}$. Симметричная полилинейная функция $\mathrm{Vol}\colon \underbrace{P \times \ldots \times P}_{n} \to \mathbb{R}$, такая что $\mathrm{Vol}(\Delta, \ldots, \Delta)$ равняется объему $\mathbb{R}^n_+ \setminus \Delta$ для каждого многогранника $\Delta \in P$, называется *смешанным объемом $n$* многогранников (такая функция существует и единственна). *Многогранником Ньютона* степенного ряда $f$ от $n$ переменных назовем минимальный многогранник в $P$, который содержит степени всех мономов ряда $f$ (если минимальный многогранник существует). Коэффициент при мономе в степенном ряде $f$ назовем *старшим коэффициентом*, если степень монома содержится в ограниченной грани многогранника Ньютона. Для линейной функции $l\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ и степенного ряда $f$ от $n$ переменных, обозначим младшую ненулевую $l$-однородную компоненту ряда $f$ через $f^l$.

**Теорема.** *Если $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — многогранники Ньютона ростков комплексно-аналитических функций $f_1, \ldots, f_n$, $f_i\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, то индекс Пуанкаре — Хопфа векторного поля с компонентами $f_1, \ldots, f_n$ не меньше $n!\operatorname{Vol}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$.*

*Если при этом старшие коэффициенты степенных рядов $f_1, \ldots, f_n$ удовлетворяют некоторому условию общего положения, то индекс Пуанкаре — Хопфа равен $n!\operatorname{Vol}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$.*

*Необходимо и достаточно следующее условие общего положения: для любой линейной функции $l\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ с положительными коэффициентами полиномиальные уравнения $f_1^l = \ldots = f_n^l = 0$ не имеют общих корней в $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.*

Это утверждение — локальный вариант формулы Д. Бернштейна [1], доказывается аналогично, а также следует из результатов работ [17] и [8], но, видимо, нигде не было сформулировано явно.

Обычно для выражения инварианта особенности в терминах многогранников Ньютона используется следующий метод, предложенный Хованским (см., например, [2,6,17,20]). Инвариант особенности выражается в терминах разрешения особенности. По многогранникам Ньютона, связанным с особенностью, строится ее торическое разрешение. Таким образом, исходная задача сводится к вопросам геометрии торических многообразий. Для обобщенных индексов Пуанкаре — Хопфа первая трудность состоит в том, чтобы дать подходящее определение разрешения особенности. Оказывается, нужно разрешать не сам росток многообразия, на котором дано сечение векторного расслоения (например, векторное поле), а тотальное пространство проективизации двойственного расслоения (оно также является ростком торического многообразия) — это основная идея работы.

В § 1 дается определение «относительного» варианта смешанного объема многогранников, с помощью которого удобно формулировать результаты этой работы (а также некоторых других — см. следствие 2.7 и теорему 3.6). В § 2 с помощью результатов из § 4, 5 разные обобщения индекса Пуанкаре — Хопфа вычисляются в терминах многогранников Ньютона. В § 3 определяется результантное многообразие и объясняется, как индексы его пересечения связаны с инвариантами особенностей из § 2 и многогранниками Ньютона результантов. В § 4 индекс пересечения, рассмотренный в § 3, представляется как индекс пересечения дивизоров на торическом многообразии. Этот индекс вычисляется в § 5.

Обозначения, связанные с многогранниками и торическими многообразиями, введены в § 1 и § 4 соответственно.

Я очень благодарен С. М. Гусейн-Заде, А. Г. Хованскому и С. П. Чулкову за интерес к этой работе и множество полезных замечаний.

## § 1. Смешанный объем пар

Результаты этого параграфа можно формулировать в двух вариантах:

I) Многогранник в $\mathbb{R}^n$ — пересечение конечного количества замкнутых полупространств. Форма объема в $\mathbb{R}^n$ и в любом его подпространстве индуцируется стандартной метрикой в $\mathbb{R}^n$. Через $S \subset (\mathbb{R}^n)^*$ обозначим множество ковекторов единичной длины в смысле стандартной метрики в $\mathbb{R}^n$. Положим $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

II) Многогранник в $\mathbb{R}^n$ — пересечение конечного количества замкнутых полупространств, вершины которого имеют целые координаты. Форма объема в $\mathbb{R}^n$ и в любом его (рациональном) подпространстве определяется так, чтобы минимальный объем параллелепипеда с целыми вершинами был равен 1. Через $S \subset (\mathbb{R}^n)^*$ обозначим множество примитивных ковекторов (то есть целочисленных, не кратных другим целочисленным, кроме противоположного). Положим $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{Z}}{n!}$.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех выпуклых ограниченных многогранников в $\mathbb{R}^n$. Это множество — полугруппа относительно сложения Минковского $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Смешанный объем — единственная симметричная полилинейная функция $\mathrm{Vol}\colon \underbrace{\mathcal{M} \times \ldots \times \mathcal{M}}_{n} \to \mathbb{K}$, такая что $\mathrm{Vol}(A, \ldots, A)$ равно объему $A$ для любого $A \in \mathcal{M}$.

Мы определим «относительный» вариант смешанного объема. Для этого напомним некоторые понятия. Пусть $N \subset \mathbb{R}^n$ выпуклый (не обязательно ограниченный) многогранник. Его опорная функция $N(\cdot)$ определяется равенством $N(\gamma) = \inf\limits_{x \in N} \gamma(x)$ для любого ковектора $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*$. Опорной гранью $N$ относительно ковектора $\gamma \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется множество $N^\gamma = \{x \in N \mid \gamma(x) = N(\gamma)\}$, опорным конусом $N$ называется множество $\{\gamma \mid N(\gamma) > -\infty\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$.

Рассмотрим множество $\mathscr{M}_\Gamma$ всех упорядоченных пар многогранников $(A, B)$ с данным опорным конусом $\Gamma \subset (R^n)^*$, таких что симметрическая разность $A \triangle B$ ограничена. $\mathscr{M}_\Gamma$ — полугруппа относительно сложения пар $(A, B) + (C, D) = (A + C, B + D)$.

**Определение 1.1.** Объемом $V(A, B)$ пары многогранников $(A, B) \in \mathscr{M}_\Gamma$ назовем разность объемов множеств $A \setminus B$ и $B \setminus A$. Смешанным объемом пар многогранников с опорным конусом $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n)^*$ называется симметричная полилинейная функция $\mathrm{Vol}_\Gamma \colon \underbrace{\mathscr{M}_\Gamma \times \ldots \times \mathscr{M}_\Gamma}_{n} \to \mathbb{K}$, такая что $\mathrm{Vol}_\Gamma\big((A, B), \ldots, (A, B)\big) = V(A, B)$ для любой пары $(A, B) \in \mathscr{M}_\Gamma$.

Если $\Gamma = (\mathbb{R}^n)^*$, то $\mathscr{M}_\Gamma$ — множество пар выпуклых ограниченных многогранников. Существование, единственность и способы вычисления смешанного объема дает следующая теорема.

**Теорема 1.2.** 1) *Если функция* $F \colon \underbrace{\mathscr{M}_\Gamma \times \ldots \times \mathscr{M}_\Gamma}_{n} \to \mathbb{K}$ *симметрична, полилинейна и*

$$F\big((A, B), \ldots, (A, B)\big) = V(A, B)$$

*для любой пары* $(A, B) \in \mathscr{M}_\Gamma$, *то*

$$F\big((A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)\big) = \sum_{I \in \{1, \ldots, n\}} (-1)^{n-|I|} V\Big(\sum_{i \in I} (A_i, B_i)\Big).$$

2) *Функция* $\mathrm{Vol}_\Gamma \colon \underbrace{\mathscr{M}_\Gamma \times \ldots \times \mathscr{M}_\Gamma}_{n} \to \mathbb{K}$, *определенная равенством*

$$\mathrm{Vol}_\Gamma\big((A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)\big) = \frac{1}{n! \cdot n} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\gamma \in \mathrm{Int}\,\Gamma \cap S} \big(B_{\sigma(k)}(\gamma) - A_{\sigma(k)}(\gamma)\big) \times$$
$$\times \mathrm{Vol}(A^{\gamma}_{\sigma(1)}, \ldots, A^{\gamma}_{\sigma(k-1)}, B^{\gamma}_{\sigma(k+1)}, \ldots, B^{\gamma}_{\sigma(n)}),$$

*симметрична, полилинейна и* $\mathrm{Vol}_\Gamma\big((A, B), \ldots, (A, B)\big) = V(A, B)$ *для любой пары* $(A, B) \in \mathscr{M}_\Gamma$ (*здесь через* $\mathrm{Int}\,\Gamma$ *обозначена внутренность конуса* $\Gamma$, *и в сумме в правой части только конечное количество ненулевых слагаемых — для тех* $\gamma$, *которые ортогональны к ограниченным гиперграням многогранника* $\sum_{i=1}^{n} A_i + B_i$).

**Доказательство** первого пункта получается заменой каждого слагаемого в правой части требуемого равенства по правилу $V(A, B) = F\big((A, B), \ldots, (A, B)\big)$, раскрытием скобок по линейности $F$ и приведением подобных по симметричности $F$. Второй пункт следует из линейности и симметричности обычного смешанного объема, а также из следующего факта (см. [3]): объем $n$-мерной «трапеции с высотой $h$ и $(n-1)$-мерными «основаниями» $A$ и $B$ равен $\frac{h}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Vol}(\underbrace{A,\dots,A}_{k},\underbrace{B,\dots,B}_{n-k-1})$. □

Оказывается, правую часть формулы в пункте 2 можно не симметризовать, что облегчает вычисления. В частности, отсюда следует, что смешанный объем пар с целыми вершинами принадлежит $\frac{\mathbb{Z}}{n!}$.

**Утверждение 1.3.** $\mathrm{Vol}_\Gamma\big((A_1,B_1),\dots,(A_n,B_n)\big)=$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\gamma\in\mathrm{Int}\,\Gamma\cap S}\big(B_k(\gamma)-A_k(\gamma)\big)\,\mathrm{Vol}(A_1^\gamma,\dots,A_{k-1}^\gamma,B_{k+1}^\gamma,\dots,B_n^\gamma).$$

Доказательство основано на связи с алгебраической геометрией и будет дано совместно с доказательством теоремы 5.4. Заметим, что для пар с неограниченной симметрической разностью это выражение не симметрично, а его симметризация не лежит в $\frac{\mathbb{Z}}{n!}$.

Одновременно с теоремой 5.4 будет доказана также следующая формула для смешанного объема пар многогранников $(A_1,B_1),\dots$ $\dots,(A_n,B_n)$:

**Утверждение 1.4.** *Если $\widetilde{A}_i$ и $\widetilde{B}_i$ — такие ограниченные многогранники, что $A_i\setminus B_i=\widetilde{A}_i\setminus\widetilde{B}_i$ и $B_i\setminus A_i=\widetilde{B}_i\setminus\widetilde{A}_i$, то*

$$\mathrm{Vol}_\Gamma\big((A_1,B_1),\dots,(A_n,B_n)\big)=\mathrm{Vol}(\widetilde{A}_1,\dots,\widetilde{A}_n)-\mathrm{Vol}(\widetilde{B}_1,\dots,\widetilde{B}_n).$$

Дальше понадобится также следующее очевидное утверждение.

**Лемма 1.5.** *Пусть $A_1,\dots,A_n,B_0,B_1\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченные многогранники. Тогда*

$$\mathrm{Vol}(A_1,\dots,A_n)=(n+1)\,\mathrm{Vol}(\{0\}\times A_1,\dots,\{0\}\times A_n,B),$$

*где $B$ — выпуклая оболочка множества $(\{0\}\times B_0)\cup(\{1\}\times B_1)\subset\mathbb{R}^{n+1}$.*

## § 2. Обобщения индекса Пуанкаре — Хопфа

Все комплексные функции в этой работе предполагаются голоморфными. Через $\mathbb{C}^n$ обозначается $n$-мерное комплексное пространство с системой координат $(x_1,\dots,x_n)$, $\mathbb{Z}^n$ отождествляется с множеством степеней мономов от $x_1,\dots,x_n$, $\mathbb{R}^n_+$ — положительный октант, для множества $I=\{i_1,\dots,i_m\}\subset\{1,\dots,n\}$ и множества $N\subset\mathbb{R}^n$ обозначим через $N^I$ пересечение $N$ с координатной плоскостью $\{z_i=0,\ i\notin I\}$, где $(z_1,\dots,z_n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$.

**Определение 2.1.** Многогранником Ньютона $\Delta_p$ многочлена $p$ называется выпуклая оболочка степеней его мономов. Многогранником Ньютона $\Delta_f$ ростка функции

$$f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0), \quad f(x) = \sum_{a\in A} c_a x^a,$$

где $c_a \neq 0$, называется выпуклая оболочка множества $A + \mathbb{R}^n_+$. Главная часть ростка функции $f$ — сумма тех ее мономов, показатели которых содержатся в ограниченных гранях многогранника $\Delta_f$.

Мы будем вычислять в терминах многогранников Ньютона следующие инварианты особенностей.

**Определение 2.2.** Пусть $w^{i,j}$, $i = 1, \ldots, I_j$, — сечения ростка векторного расслоения ранга $k_j$ на ростке

$$(\mathbb{C}^n, 0), \quad j = 1, \ldots, J, \quad n = \sum_j (k_j - I_j + 1),$$

и только в нуле для каждого $j$ набор $w^{i,j}$, $i = 1, \ldots, I_j$, линейно зависим. Тогда, если зафиксировать тривиализации ростков расслоений, эти сечения $w^{i,j} = (w^{i,j}_1, \ldots, w^{i,j}_{k_j})$ определяют отображение маленькой сферы $S^{2n-1}$ вокруг нуля в $\mathbb{C}^n$ в многообразие $\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j} \setminus R$, где $\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j}$ — пространство наборов матриц размеров $I_j \times k_j$, а подмножество $R$ состоит из наборов вырожденных матриц. По соображениям размерности $H_{2n-1}\big(\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j} \setminus R\big) = \mathbb{Z}$. Индексом Гусейн-Заде — Эбелинга набора сечений

$$\begin{pmatrix} w^{1,1} \\ \vdots \\ w^{I_1,1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} w^{1,J} \\ \vdots \\ w^{I_J,J} \end{pmatrix}$$

в начале координат назовем образ фундаментального цикла сферы $S^{2n-1}$ в гомологиях $H_{2n-1}\big(\mathbb{C}^{\sum_j I_j \times k_j} \setminus R\big)$.

Частным случаем при $I_1 = 1$, $J = 2$ является вычет Сува набора сечений $(w^{1,2}, \ldots, w^{I_2,2})^T$ векторного расслоения на ростке полного пересечения $w^{1,1} = 0$ (см. [18]). Еще один важный частный случай определения 2.2 — индекс Гусейн-Заде — Эбелинга набора 1-форм на изолированной особенности полного пересечения (см. [10], в случае одной 1-формы — [9]).

**Определение 2.3.** Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — ростки голоморфных функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$. Пусть $f_1 = \ldots = f_k = 0$ — изолированная особенность полного пересечения, то есть 1-формы $df_1, \ldots, df_k$ линейно независимы в точках множества $\{f_1 = \ldots = f_k = 0\} \setminus \{0\}$. Пусть $\omega_{i,j}$, $i = 1, \ldots, I_j$, $j = 1, \ldots, J$, $\sum\limits_j (n - k - I_j + 1) = n - k$ — ростки голоморфных 1-форм на $(\mathbb{C}^n, 0)$ и для любой точки $x \in \{f_1 = \ldots = f_k = 0\} \setminus \{0\}$ есть номер $j$, такой что ограничения $\omega_{i,j}$, $i = 1, \ldots, I_j$, на $\{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$ линейно независимы в $x$. Индексом Гусейн-Заде — Эбелинга набора 1-форм $\omega_{i,j}$ на изолированной особенности полного пересечения $f_1 = \ldots$ $\ldots = f_k = 0$ назовем индекс Гусейн-Заде — Эбелинга набора сечений

$$\begin{pmatrix} \omega_{1,1} \\ \vdots \\ \omega_{I_1,1} \\ df_1 \\ \vdots \\ df_k \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} \omega_{1,J} \\ \vdots \\ \omega_{I_J,J} \\ df_1 \\ \vdots \\ df_k \end{pmatrix}, \quad (f_1, \ldots, f_k).$$

**Теорема 2.4.** *Пусть в обозначениях определения 2.2 многогранники $\Delta_{w_k^{i,j}}$ пересекают все координатные оси. Обозначим через*

$$\{e^{1,j}, \ldots, e^{I_j,j}\} \subset \mathbb{R}^{I_1-1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{I_J-1}$$

*множество вершин стандартного симплекса в $j$-м слагаемом прямой суммы $\mathbb{R}^{I_1-1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{I_J-1}$. Обозначим через $\Sigma^j$ выпуклую оболочку множества*

$$\{e^{1,j}, \ldots, e^{I_j,j}\} \times \mathbb{R}^n_+ \subset \mathbb{R}^{I_1-1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}^{I_J-1} \oplus \mathbb{R}^n,$$

*а через $\Sigma^j_k$ выпуклую оболочку множества*

$$(e^{1,j} \times \Delta_{w_k^{1,j}}) \cup \ldots \cup (e^{I_j,j} \times \Delta_{w_k^{I_j,j}}).$$

*Тогда в случае общего положения главных частей ростков $w_k^{i,j}$ индекс Гусейн-Заде — Эбелинга набора сечений $w^{i,j}$ в нуле корректно определен и равен смешанному объему пар многогранников $(\Sigma^j, \Sigma^j_k)$, $k = 1, \ldots, k_j$, $j = 1, \ldots, J$, умноженному на $(k_1 + \ldots + k_J)!$. В случае произвольных главных частей индекс не меньше указанного значения или не существует.*

Здесь и далее условия общего положения главных частей не формулируются явно, но все они являются частными случаями определения 5.2. Их легко восстановить, проследив, как утверждения этого параграфа сводятся к утверждениям параграфа 5.

**Доказательство**. По лемме 3.2 индекс Гусейн-Заде — Эбелинга набора сечений является частным случаем индекса пересечения из теоремы 4.4. Поэтому теорема 4.4 представляет искомый индекс Гусейн-Заде — Эбелинга как индекс пересечения дивизоров на торическом многообразии, который вычисляет теорема 5.4. □

В частности, получаем следующий факт:

**Следствие 2.5.** Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — росток голоморфного векторного поля в $(\mathbb{C}^n, 0)$ и многогранники $\Delta_{v_i}$ пересекаются со всеми координатными осями. Тогда в случае общего положения главных частей функций $v_i$ индекс Пуанкаре — Хопфа равен смешанному объему пар $(\mathbb{R}^n_+, \Delta_{v_i})$, умноженному на $n!$. В случае произвольных главных частей индекс не меньше указанного значения или не существует.

Если в качестве $v_i$ взять $x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, то получим формулу Кушниренко из работы [16] для числа Милнора ростка функции $f$.

Заметим, что теорема 2.4 дает, вообще говоря, только оценку снизу для индекса Гусейн-Заде — Эбелинга набора 1-форм, так как набор сечений из определения 2.3 может не удовлетворять условию общего положения главных частей ни для какого набора 1-форм с данными многогранниками Ньютона. Тем не менее, для индекса одной 1-формы на полном пересечении, индекса набора 1-форм на $\mathbb{C}^n$ и во многих других частных случаях такой проблемы не возникает. Опишем подробнее случай одной 1-формы на полном пересечении.

Пусть

$$N_i, M_j \subset \mathbb{R}^m_+, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, m,$$

— такие многогранники, что $\mathbb{R}^m_+ \setminus N_i$, $\mathbb{R}^m_+ \setminus M_j$ — ограниченные множества. Обозначим через $\Delta_j \subset \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^k$ выпуклую оболочку множества

$$\big(M_j' \times \{(0, \ldots, 0)\}\big) \cup \big(N_1 \times \{(1, 0, \ldots, 0)\}\big) \cup \ldots \cup \big(N_k \times \{(0, \ldots, 0, 1)\}\big),$$

где $M_j'$ — многогранник $M_j$, сдвинутый на 1 в направлении $j$-й координаты в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $\mathrm{res}_{eg}(N_1, \ldots, N_k; M_1, \ldots, M_m)$ смешанный объем пар

$$\big(\mathbb{R}^m_+ \times \{(0, \ldots, 0)\}, N_i \times \{(0, \ldots, 0)\}\big)$$

при $i = 1, \ldots, k$ и $(\Delta_j, \Delta_j)$ при $j = 1, \ldots, m$.

**Теорема 2.6.** *Пусть $f_1, \ldots, f_k, w_1, \ldots, w_n$ — ростки функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$ и их многогранники Ньютона пересекают все координатные оси. Тогда, в случае общего положения главных частей $f_i$ и $w_j$, индекс Гусейн-Заде — Эбелинга 1-формы $w_1\,dx_1 + \ldots + w_n\,dx_n$ на изолированной особенности полного пересечения $f_1 = \ldots = f_k = 0$ корректно определен* *и равен*

$$\sum_{\substack{I=\{i_1,\ldots,i_m\}\subset\{1,\ldots,n\}\\ I\neq\varnothing}} (-1)^{n-m}(m+k)!\,\mathrm{res}_{eg}(N_1^I,\ldots,N_k^I;M_{i_1}^I,\ldots,M_{i_m}^I).$$

*В случае произвольных главных частей индекс не меньше указанного выражения или не существует.*

Прямое применение теорем 4.4 и 5.4, как в предыдущем доказательстве, давало бы ответ, в котором участвуют многогранники Ньютона частных производных ростков $f_j$.

**Доказательство**. Будем доказывать индукцией по $n$. Искомый индекс равен индексу Гусейн-Заде — Эбелинга набора сечений

$$\begin{pmatrix} x_1 w_1 & \ldots & x_n w_n \\ x_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & x_n\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1\dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \ldots & x_n\dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (f_1,\ldots,f_k)$$

плюс альтернированная по $m$ сумма индексов ограничений 1-формы $w$ на полные пересечения вида $f_1=\ldots=f_k=x_{i_1}=\ldots=x_{i_m}=0$. Последние можно вычислить по предположению индукции, а первый равен индексу набора сечений

$$\begin{pmatrix} x_1 w_1 & \ldots & x_n w_n \\ x_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}+a_{1,1}f_1 & \ldots & x_n\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}+a_{1,n}f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1\dfrac{\partial f_k}{\partial x_1}+a_{k,1}f_k & \ldots & x_n\dfrac{\partial f_k}{\partial x_n}+a_{k,n}f_k \end{pmatrix}, \quad (f_1,\ldots,f_k),$$

где $a_{i,j}$ — произвольные коэффициенты. По лемме 3.2 этот индекс является частным случаем индекса пересечения из теоремы 4.4, и поэтому представляется как индекс пересечения дивизоров, который вычислен в следствии 5.8. Осталось заметить, что многогранник Ньютона $x_j\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}+a_{i,j}f_i$, в отличие от $\Delta_{x_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}}$, совпадает с $\Delta_{f_i}$. $\square$

В терминах смешанного объема пар многогранников удобно формулировать и многие ранее известные формулы, связанные с многогранниками Ньютона, например формулу Штурмфельса для многогранника Ньютона многомерного результанта (теорема 3.6) и формулу Ока для числа Милнора полного пересечения (следствие 2.7).

Смешанный объем пар многогранников $(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$ из $\mathbb{R}^n$ будет удобно обозначать мономом $(A_1, B_1) \cdot \ldots \cdot (A_n, B_n)$; моном $(A_1, B_1) \cdot \ldots \cdot (A_m, B_m)$ при $m \neq n$ положим равным нулю; значение рациональной функции на парах многогранников положим равным значению ее разложения в ряд Тейлора в нуле. Для многогранников $N_0, \ldots, N_k \subset \mathbb{R}^m_+$, таких что множества $\mathbb{R}^m_+ \setminus N_j$, $j = 0, \ldots, k$ ограничены, обозначим через $\mu_m(N_0, \ldots, N_k)$ число

$$m! \frac{(\mathbb{R}^m_+, N_0) \cdot \ldots \cdot (\mathbb{R}^m_+, N_k)}{((\mathbb{R}^m_+, N_0) + 1) \cdot \ldots \cdot ((\mathbb{R}^m_+, N_k) + 1)}.$$

**Следствие 2.7.** Пусть $f_0, \ldots, f_k$ — ростки голоморфных функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$, такие что множества $\mathbb{R}^n_+ \setminus \Delta_{f_j}$, $j = 0, \ldots, k$ ограничены. Тогда в случае общего положения главных частей этих ростков уравнения $f_0 = \ldots = f_k = 0$ задают изолированную особенность полного пересечения и ее число Милнора равно

$$(-1)^{n-k-1} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\},\ I \neq \varnothing} \mu_{|I|}(\Delta^I_\omega, \Delta^I_{f_1} \ldots, \Delta^I_{f_k}) + (-1)^{n-k}.$$

Эту формулу можно доказать, упростив ответ, данный в работе [17], с помощью утверждения 1.3, а можно доказать независимо, применив теорему 2.6 к 1-форме $df_0$ на полном пересечении $f_1 = \ldots \ldots = f_k = 0$.

## § 3. Результантные многообразия и результанты

Моном $t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}$ здесь и дальше будем обозначать через $t^a$. Для множества $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbb{C}[\Sigma]$ множество многочленов Лорана

$$\Big\{ \sum_{a \in \Sigma \cap \mathbb{Z}^n} c_a t^a \mid c_a \in \mathbb{C} \Big\}$$

на комплексном торе $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

**Определение 3.1.** Для конечных множеств $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \ldots, I$, результантным многообразием $R(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$ назовем (неприводимое) замыкание множества

$$\big\{(g_1, \ldots, g_I) \mid g_i \in \mathbb{C}[\Sigma_i],\ \exists (t_1, \ldots, t_N) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^N : \\ g_1(t_1, \ldots, t_N) = \ldots = g_I(t_1, \ldots, t_N) = 0\big\} \subset \mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I].$$

Пусть $y_m$, $m \in M$, где $M = \{(a, i) \mid a \in \Sigma_i,\ i = 1, \ldots, I\}$ — естественная система координат в пространстве $\mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I]$, такая что точка с координатами $(y_m)$ — набор многочленов Лорана $\big( \sum_{a \in \Sigma_1} y_{(a,1)} t^a, \ldots$

$\ldots, \sum\limits_{a\in\Sigma_I} y_{(a,I)}t^a)$. Пусть в этой системе координат $y_m = f_m$, $m\in M$ — компоненты ростка отображения

$$f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I], 0).$$

Нас будет интересовать следующая задача: в случае общего положения главных частей $f_m$ вычислить индекс пересечения

$$f(\mathbb{C}^n) \circ R(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I) \tag{$*$}$$

в терминах многогранников Ньютона $\Delta_{f_m}$, $m\in M$.

Теорема 4.4 сводит эту задачу к задаче торической геометрии, решение которой приведено в § 5. Задачи, рассмотренные в § 2, сводятся к вычислению индекса пересечения вида $(*)$ с помощью следующей очевидной леммы.

**Лемма 3.2.** 1) *Множество $R$ из определения* 2.2 *совпадает с результантным многообразием*

$$R(\underbrace{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\Sigma_J, \ldots, \Sigma_J}_{k_J}),$$

*где $\Sigma_j$ — множество вершин стандартного $I_j$-мерного целочисленного симплекса в $j$-м слагаемом прямой суммы $\mathbf{Z}^{I_1-1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}^{I_J-1}$.*

2) *Индекс Гусейн-Заде — Эбелинга набора ростков сечений*

$$\begin{pmatrix} w^{1,1} \\ \vdots \\ w^{I_1,1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} w^{1,J} \\ \vdots \\ w^{I_J,J} \end{pmatrix}$$

*равен индексу пересечения $R$ с образом отображения $w^{\cdot,\cdot}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{\sum_j I_j\times k_j}$.*

Прежде чем искать индексы пересечения вида $(*)$, удобно упростить условие задачи следующим образом. Пусть $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \ldots, I$, — конечные множества. Минимальную решетку $L \subset \mathbb{Z}^N$, $0 \in L$, в которую параллельными переносами помещаются множества $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \ldots, I$, будем обозначать $\operatorname{Lin}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$. Через $\operatorname{codim}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$ обозначим максимум чисел $J - \operatorname{rk}\operatorname{Lin}(\Sigma_{i_1}, \ldots, \Sigma_{I_J})$ по всем поднаборам $\{i_1, \ldots, i_J\} \subset \{1, \ldots, I\}$.

Следующая лемма показывает, что индекс пересечения вида $(*)$ имеет смысл только для $n = \operatorname{codim}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$.

**Лемма 3.3.** $\operatorname{codim} R(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I) = \operatorname{codim}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$.

**Определение 3.4.** Набор множеств $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \ldots, I$, будем называть существенным, если $J - \operatorname{rk}\operatorname{Lin}(\Sigma_{i_1}, \ldots, \Sigma_{I_J}) < I - N$ для любого поднабора $\{i_1, \ldots, i_J\} \subset \{1, \ldots, I\}$ и $\operatorname{Lin}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I) = \mathbb{Z}^N$.

Следующая лемма показывает, что достаточно искать индекс пересечения вида $(*)$ только для результантных многообразий, которые соответствуют существенным наборам.

**Лемма 3.5.** *Пусть* $\Sigma_i \subset \mathbb{Z}^N$, $i = 1, \ldots, I$, *— конечные множества.*

1) *Существует минимальный поднабор* $\{i_1, \ldots, i_J\} \subset \{1, \ldots, I\}$, *такой что* $J - \operatorname{rk} \operatorname{Lin}(\Sigma_{i_1}, \ldots, \Sigma_{I_J}) = \operatorname{codim}(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$.

2) *Обозначим через* $\Sigma'_{i_k}$ *подмножества решетки* $\operatorname{Lin}(\Sigma_{i_1}, \ldots, \Sigma_{i_k})$, *полученные из* $\Sigma_{i_k}$ *параллельными переносами. Тогда* $\Sigma'_{i_1}, \ldots, \Sigma'_{I_J}$ *— существенный поднабор относительно решетки* $\operatorname{Lin}(\Sigma_{i_1}, \ldots, \Sigma_{i_k})$.

3) $R(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I) = p^{(-1)}\big(R(\Sigma'_{i_1}, \ldots, \Sigma'_{i_k})\big)$, *где* $p\colon \mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I] \to \to \mathbb{C}[\Sigma_{i_1}] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_{i_k}] = \mathbb{C}[\Sigma'_{i_1}] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma'_{i_k}]$ *— естественная проекция.*

Доказательства лемм 3.3 и 3.5 для случая $I = N + 1$ даны в работе [19] и могут быть обобщены на произвольный случай.

В заключение укажем приложение индексов пересечения вида $(*)$ к теории результантов. Если $I = N + 1$ и набор $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I \subset \mathbb{Z}^N$ существенный, то $R(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I)$ — неприводимая гиперповерхность, заданная многочленом Rez — обобщенным результантом. Пусть росток аналитического отображения $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}[\Sigma_1] \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}[\Sigma_I]$ имеет компоненты $f_m(t) = c_m t^{\gamma_m} + \ldots$, где $c_m \neq 0$ — числа общего положения, $m \in M$, $M = \{(a, i) \mid a \in \Sigma_i\}$. Тогда индекс пересечения $(*)$ равен $\Delta_{\mathrm{Rez}}(\gamma)$, где $\Delta_{\mathrm{Rez}} \subset \mathbb{R}^M$ — многогранник Ньютона обобщенного результанта, а $\gamma \in (\mathbb{R}^M)^*$ — ковектор с компонентами $\gamma_m$, $m \in M$. Поэтому применение теорем 4.4 и 5.4 дает следующее описание опорной функции многогранника Ньютона обобщенного результанта:

**Теорема 3.6.** *В условиях предыдущего абзаца рассмотрим многогранники* $N_i = \mathbb{R}^1_+ \times \operatorname{Span}(\Sigma_i) \subset \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^N$ *и* $\widetilde{N}_i = \operatorname{Span}\{(s, a) \mid a \in \Sigma_i, s \geqslant \gamma_{(a,i)}\} \subset \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^N$ (Span *означает выпуклую оболочку). Тогда* $\Delta_{\mathrm{Rez}}(\gamma)$ *равно смешанному объему пар многогранников* $(N_i, \widetilde{N}_i)$, $i = 1, \ldots, I$, *умноженному на* $(N+1)!$.

Отсюда легко получить описание вершин многогранника Ньютона обобщенного результанта, найденное в работе [19]. В случае когда все множества $\Sigma_i$ совпадают, получается описание многогранника Ньютона $A$-детерминанта и многогранника Чжоу $A$-результанта из работы [15].

## § 4. Связь с торическими многообразиями

Сначала напомним в удобной нам форме некоторые факты о гладких торических многообразиях (подробно см. в [4] или более элементарно для гладкого случая в [2]) и введем необходимые обозначения.

Простым конусом в $\mathbb{R}^N$ назовем конус с вершиной в нуле, порожденный частью базиса решетки $\mathbb{Z}^N$. Простым веером назовем множество простых конусов, пересекающихся по общим граням, замкнутое относительно пересечения и взятия граней. Носителем $|\Gamma|$ простого веера $\Gamma$ назовем объединение его конусов. Простому вееру $\Gamma$ в $\mathbb{R}^N$ естественным образом соответствует $N$-мерное гладкое торическое многообразие $\mathbb{T}^\Gamma$ (то есть $N$-мерное многообразие с действием комплексного тора $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^N$, имеющим всюду плотную орбиту — она называется большим тором). Орбиты $\mathbb{T}^\Gamma$ находятся во взаимно однозначном соответствии с конусами $\Gamma$, обращающем примыкания и размерности. Через $S(\Gamma)$ обозначим множество примитивных векторов, порождающих одномерные конусы веера $\Gamma$. Через $\mathbb{T}^\gamma\subset\mathbb{T}^\Gamma$ обозначим замыкание орбиты, соответствующей одномерному конусу, порожденному вектором $\gamma\in S(\Gamma)$.

Пусть $\Gamma$ — простой веер в $(\mathbb{R}^N)^*$ с выпуклым носителем. Будем отождествлять решетку $\mathbb{Z}^N\subset\mathbb{R}^N$ с группой характеров большого тора $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^N$ многообразия $\mathbb{T}^\Gamma$. Многогранник $\Delta\subset\mathbb{R}^N$ назовем совместимым с $\Gamma$, если опорная функция $\Delta(\cdot)$ линейна на конусах $\Gamma$ и не определена вне $|\Gamma|$. Многограннику $\Delta$, совместимому с $\Gamma$, соответствует пара $(\mathscr{I}_\Delta, s_\Delta)$, где $\mathscr{I}_\Delta$ — линейное расслоение на $\mathbb{T}^\Gamma$, а $s_\Delta$ — его мероморфное сечение, дивизор нулей и полюсов которого равен $-\sum\limits_{\gamma\in S(\Gamma)}\Delta(\gamma)\mathbb{T}^\gamma$. Это взаимно однозначное соответствие между полугруппой целочисленных многогранников, совместимых с $\Gamma$, и полугруппой пар $(\mathscr{I}, s)$, где $\mathscr{I}$ — линейное расслоение на $\mathbb{T}^\Gamma$, порожденное глобальными сечениями, а $s$ — его мероморфное сечение, дивизор которого не пересекается с большим тором.

Компактной частью $\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$ многообразия $\mathbb{T}^\Gamma$ назовем объединение орбит с компактным замыканием. Обозначим через $\Gamma^*\subset\mathbb{R}^N$ конус, двойственный к $|\Gamma|$. Обозначим через $\mathbb{C}\{\Gamma^*\}$ группу рядов Лорана на большом торе, которые равномерно сходятся в окрестности $\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$ (заметим, что эта группа зависит только от носителя веера $\Gamma$). Обозначим через $\mathit{\Gamma}(\mathscr{I})$ множество мероморфных сечений расслоения $\mathscr{I}$ над окрестностью $\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$, которые не имеют полюсов на большом торе. Для любого многогранника $\Delta\in\mathbb{R}^N$, совместимого с $\Gamma$, домножение на $s_\Delta$ определяет изоморфизм $\mathbb{C}\{\Gamma^*\}\to\mathit{\Gamma}(\mathscr{I}_\Delta)$, который также будем обозначать $\mathscr{I}_\Delta$.

**Определение 4.1.** Пусть $s=\mathscr{I}_\Delta(\widetilde{s}\,)$ — росток мероморфного сечения расслоения $\mathscr{I}_\Delta$ на паре

$$(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}),\quad \text{где } \widetilde{s}=\sum_{a\in A}c_a t^a\in\mathbb{C}\{\Gamma^*\},\ c_a\neq 0.$$

Многогранником Ньютона $\Delta_s$ ростка сечения $s$ назовем выпуклую оболочку множества $A+\Gamma^*$. Главной частью $s$ назовем сумму всех мономов из ряда $\widetilde{s}$ с показателями из ограниченных граней $\Delta_s$. Если же росток мероморфного сечения расслоения $\mathscr{I}_\Delta$ не содержится в $\Gamma(\mathscr{I}_\Delta)$, то будем считать, что многогранник Ньютона для него не определен.

Главная часть сечения — многочлен Лорана на большом торе многообразия $\mathbb{T}^\Gamma$.

Напомним также в нужной нам общности определение подмногообразий «с кратностями» и индексов их пересечений (подробности см. в [5]). Пусть $M$ — гладкое ориентируемое $N$-мерное многообразие.

**Определение 4.2.** $k$-мерным циклом на $M$ с носителем $K$ назовем пару $(K,\alpha)$, где $K\subset M$ — замкнутое подмножество и

$$\alpha\in H_k(K\cup\{\infty\},\{\infty\};\ \mathbb{Z})=H^{n-k}(M,M\setminus K;\ \mathbb{Z}).$$

**Определение 4.3.** Сумма

$$(K_1,\alpha_1)+(K_2,\alpha_2)=(K_1\cup K_2,\alpha_1+\alpha_2),$$

пересечение

$$(K_1,\alpha_1)\cap(K_2,\alpha_2)=(K_1\cap K_2,\alpha_1\smile\alpha_2),$$

обратный образ

$$f^*(K,\alpha)=(f^{(-1)}(K),f^*\alpha),$$

прямой образ

$$f_*(K,\alpha)=(f(K),f_*\alpha)$$

для собственных отображений определяются очевидным образом и удовлетворяют естественным соотношениям. Фундаментальный цикл неприводимого аналитического множества $K$ обозначим $[K]$, дивизор нулей и полюсов мероморфного сечения $w$ линейного расслоения $E\to M$ обозначим $[w]$, непрерывному сечению $v$ векторного расслоения $F\to M$ также поставим в соответствие цикл в $M$, который обозначается $[v]$ и является пересечением графиков сечения $v$ и нулевого сечения.

Индексом $\operatorname{ind}s$ нульмерного цикла $s$ с компактным носителем назовем его образ $\operatorname{pt}_*(s)\in H_0(*;\ \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ при отображении $\operatorname{pt}\colon M\to *$.

Пусть $s_1,\dots,s_k$ — циклы на $M$ с суммой коразмерностей $N$ и компактным пересечением носителей $K$ (не обязательно нульмерным). Тогда корректно определен индекс их пересечения $\operatorname{ind}(s_1\cap\ldots\cap s_k)$. Аналогично определяются ростки циклов и индексы их пересечения.

В частности, $\operatorname{ind}[A]\cap[B]=A\circ B$ — индекс пересечения ростков аналитических множеств $A$ и $B$ дополнительной размерности, $\operatorname{ind}[w]$ — индекс Пуанкаре — Хопфа ростка $w$ сечения $N$-мерного расслоения.

Теперь мы можем сформулировать теорему, представляющую индекс пересечения с результантным многообразием как индекс пересечения дивизоров на торическом многообразии. Пусть $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_I \subset \subset \mathbb{Z}^N$ — существенный набор конечных множеств и $y_m$, $m\in M$, где $M= =\{(a,i)\,|\,a\in\Sigma_i,\ i=1,\ldots,I\}$, — естественная система координат в пространстве $\mathbb{C}[\Sigma_1]\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}[\Sigma_I]$, такая что точка с координатами $(y_m)$ — набор многочленов Лорана $\left(\sum\limits_{a\in\Sigma_1} y_{(a,1)}t^a, \ldots, \sum\limits_{a\in\Sigma_I} y_{(a,I)}t^a\right)$. Пусть в этой системе координат $y_m=f_m$, $m\in M$, — компоненты ростка отображения

$$f\colon (\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}[\Sigma_1]\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}[\Sigma_I],0),\quad n=I-N.$$

Выберем простой веер $\Gamma$, совместимый с выпуклыми оболочками $\operatorname{Span}(\Sigma_1), \ldots, \operatorname{Span}(\Sigma_I)$. Для каждого $i=1,\ldots,I$ на ростке торического многообразия $(\mathbb{T}^\Gamma\times\mathbb{C}^n, \mathbb{T}^\Gamma\times\{0\})$ рассмотрим линейное расслоение $\mathscr{I}_{\operatorname{Span}(\Sigma_i)\times\mathbb{R}^n_+}$. Обозначим через $s_i$ его сечение

$$\mathscr{I}_{\operatorname{Span}(\Sigma_i)\times\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_{a\in\Sigma_i} f_{a,i}t^a\right),$$

где $\sum\limits_{a\in\Sigma_i} f_{a,i}t^a$ — ряд Лорана на большом торе многообразия $\mathbb{T}^\Gamma\times\mathbb{C}^n$.

**Теорема 4.4.** 1) *В условиях, описанных в предыдущих двух абзацах, индекс пересечения $f(\mathbb{C}^n)$ и $R(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_I)$ равен* $\operatorname{ind}([s_1]\cap\ldots\cap[s_I])$ (*и корректно определен одновременно с ним*).

2) *Многогранник Ньютона $\Delta_{s_i}$ равен выпуклой оболочке множества $\bigcup\limits_{a\in\Sigma_i}\{a\}\times\Delta_{f_{(a,i)}}\subset\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^n_+$.*

3) *Коэффициент при мономе из главной части $s_i$ равен коэффициенту при некотором мономе из главной части одной из компонент $f_{(a,i)}$.*

Пункты 2 и 3 очевидны из определений.

**Доказательство пункта 1.** На многообразии

$$M=\mathbb{T}^\Gamma\times(\mathbb{C}[\Sigma_1]\oplus\ldots\oplus\mathbb{C}[\Sigma_I])$$

рассмотрим линейные расслоения $\mathscr{I}_{\operatorname{Span}(\Sigma_i)}$, поднятые с первого множителя, и их тавтологические сечения $\widetilde{s}_i$, такие что

$$\widetilde{s}_i|_{\mathbb{T}^\Gamma\times\{l_1+\ldots+l_I\}}=\mathscr{I}_{\operatorname{Span}(\Sigma_i)}(l_i)$$

для любых $l_i\in\mathbb{C}[\Sigma_i]$, $i=1,\ldots,I$. Тогда $[R(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_I)]$ — проекция $\pi$ цикла $[\widetilde{s}_1]\cap\ldots\cap[\widetilde{s}_I]$ на второй множитель произведения $M$, $s_i$ — прообразы $\widetilde{s}_i$ при отображении $(\operatorname{id},f)\colon\mathbb{T}^\Gamma\times\mathbb{C}^n\to M$, и из элементарных свойств индексов пересечения

$$\operatorname{ind}(\mathrm{id}, f)^*\big([\widetilde{s}_1]\cap\ldots\cap[\widetilde{s}_I]\big) = \operatorname{ind} f^*\pi_*\big([\widetilde{s}_1]\cap\ldots\cap[\widetilde{s}_I]\big). \qquad \square$$

## § 5. Индекс пересечения дивизоров на торическом многообразии

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_I \subset \mathbb{R}^I$ — целочисленные многогранники, совместимые с простым веером $\Gamma$ в $(\mathbb{R}^I)^*$. Пусть $s_i$ — ростки мероморфных сечений расслоений $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ на паре $(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma})$, такие что для них определены многогранники Ньютона (см. определение 4.1). Цель этого параграфа — вычисление или оценка индекса пересечения

$$\operatorname{ind}([s_1]\cap\ldots\cap[s_I]) \qquad (**)$$

в терминах многогранников $\Delta_i$ и $\Delta_{s_i}$. Следующая лемма показывает возможность такого вычисления.

**Определение 5.1.** Пусть $\Gamma_0 \subset (\mathbb{R}^I)^*$ — $I$-мерный конус и $\Delta_1, \ldots, \Delta_I$, $\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_I$ — многогранники с опорным конусом $\Gamma_0$. Этот набор многогранников называется удобным, если для каждого $\gamma$ из границы $\Gamma_0$ найдется множество $I_\gamma \subset \{1, \ldots, I\}$ такое что

1) $\dim \sum\limits_{i\in I_\gamma} \widetilde{\Delta}_i^\gamma \leqslant |I_\gamma|$,

2) $\widetilde{\Delta}_i(\gamma) = \Delta_i(\gamma)$ для всех $i \in I_\gamma$.

Назовем этот набор очень удобным, если $I_\gamma \subset \{2, \ldots, n\}$ при всех $\gamma \neq 0$ и $\Delta_1 = \Gamma_0^*$.

**Определение 5.2.** Пусть $A_1, \ldots, A_I$ — ограниченные целочисленные многогранники в $\mathbb{R}^I$. Будем говорить, что многочлены Лорана $\sum\limits_{a\in A_i} c_{a,i}t^a$, $i = 1, \ldots, I$, на торе $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^I$, находятся в общем положении, если для любого ковектора $\gamma \in \operatorname{Int}|\Gamma|$ и любого множества $J \subset \{1, \ldots, I\}$, такого что $\dim \sum\limits_{i\in J} A_i^\gamma < |J|$, многочлены $\sum\limits_{a\in A_i^\gamma} c_{a,i}t^a$, $i \in J$, не имеют общих корней в $(\mathbb{C}\setminus\{0\})^I$.

**Лемма 5.3.** *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_I \subset \mathbb{R}^I$ — целочисленные многогранники, совместимые с простым веером $\Gamma$ в $(\mathbb{R}^I)^*$. Пусть $s_i$, $i = 1, \ldots, I$, — ростки мероморфных сечений расслоений $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ на паре $(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma})$, такие что для них определены многогранники Ньютона. Если $\Delta_1, \ldots, \Delta_I$, $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_I}$ — удобный набор многогранников, то*

1) *индекс пересечения $(**)$ не зависит от выбора простого веера $\Gamma$;*

2) *индекс пересечения $(**)$ определен корректно в случае общего положения главных частей $s_i$;*

3) *если* $\widetilde{s}_i$ — *сечение расслоения* $\mathscr{I}_{\Delta_i}$, $\Delta_{\widetilde{s}_i} \subset \Delta_{s_i}$ *и главные части сечений* $s_1, \ldots, s_I$ *в общем положении, то* $\operatorname{ind}([\widetilde{s}_1] \cap \ldots \cap [\widetilde{s}_I])$ *не меньше индекса* $(**)$ *или не определен.*

Если набор многогранников не удобный, то утверждения леммы, вообще говоря, не верны.

**Доказательство**. 1) Пусть $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — простые вееры, совместимые с $\Delta_1, \ldots, \Delta_I$. Если один из них — подразбиение другого, то существует естественное отображение $p\colon \mathbb{T}^{\Gamma_1} \to \mathbb{T}^{\Gamma_2}$ степени 1, такое что $\Delta_{p^* s_i} = \Delta_{s_i}$, поэтому индексы $\operatorname{ind}[s_1] \cap \ldots \cap [s_I]$ и $\operatorname{ind}[p^* s_1] \cap \ldots \cap [p^* s_I]$ на многообразиях $\mathbb{T}^{\Gamma_1}$ и $\mathbb{T}^{\Gamma_2}$ равны и утверждение пункта 2 верно. У произвольных вееров $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ есть общее простое подразбиение.

2) По пункту 1 достаточно рассмотреть индекс $(**)$ для веера $\Gamma$, с которым совместимы все $\Delta_i$ и $\Delta_{s_i}$ (такой веер всегда существует). Если в этом случае главные части $s_i$ находятся в общем положении, то множество $\{s_1 = \ldots = s_I = 0\}$ содержится в $\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$ и, значит, компактно (хотя, вообще говоря, не нульмерно).

3) Множество общих нулей шевелений $\widetilde{s}_1 + \varepsilon s_1, \ldots, \widetilde{s}_I + \varepsilon s_I$ состоит из подмножества компактной части $\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$ и конечного количества близких точек $p_1, \ldots, p_l$, поэтому $\operatorname{ind}[\widetilde{s}_1] \cap \ldots \cap [\widetilde{s}_I]$ равен сумме индекса

$$\operatorname{ind}[\widetilde{s}_1 + \varepsilon s_1] \cap \ldots \cap [\widetilde{s}_I + \varepsilon s_I],$$

где $\widetilde{s}_i + \varepsilon s_i$ рассматриваются как ростки сечений около $\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$, и индексов $\operatorname{ind}_{p_j}[\widetilde{s}_1 + \varepsilon s_1] \cap \ldots \cap [\widetilde{s}_I + \varepsilon s_I]$, $j = 1, \ldots, l$, где $\widetilde{s}_i + \varepsilon s_i$ рассматриваются как ростки сечений около $p_j$. Индекс $\operatorname{ind}[\widetilde{s}_1 + \varepsilon s_1] \cap \ldots \cap [\widetilde{s}_I + \varepsilon s_I]$ равен $\operatorname{ind}[s_1] \cap \ldots \cap [s_I]$, так как главные части $\widetilde{s}_i + \varepsilon s_i$ в общем положении; индекс $\operatorname{ind}_{p_j}[\widetilde{s}_1 + \varepsilon s_1] \cap \ldots \cap [\widetilde{s}_I + \varepsilon s_I]$ положителен, так как равен соответствующему числу Милнора. □

Основной результат этого параграфа — следующая относительная версия теоремы Д. Бернштейна:

**Теорема 5.4.** *Пусть* $\Delta_1, \ldots, \Delta_I \subset \mathbb{R}^I$ — *целочисленные многогранники, совместимые с простым веером* $\Gamma$ *в* $(\mathbb{R}^I)^*$. *Пусть* $s_i$, $i = 1, \ldots, I$, — *ростки мероморфных сечений расслоений* $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ *на паре* $(\mathbb{T}^{\Gamma}, \mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma})$, *такие что для них определены многогранники Ньютона и разности* $\Delta_i \setminus \Delta_{s_i}$ *и* $\Delta_{s_i} \setminus \Delta_i$ *ограничены. Тогда в случае общего положения главных частей сечений* $s_i$ *индекс* $\operatorname{ind}([s_1] \cap \ldots \cap [s_I])$ *равен смешанному объему пар* $(\Delta_i, \Delta_{s_i})$, *умноженному на* $I!$, *а в случае произвольных главных частей индекс не меньше этого числа или не определен.*

Мы приведем два доказательства этой теоремы. Первое, предложенное А. Г. Хованским, очень наглядно и доказывает одновременно утверждение 1.4. Второе рассуждение сложнее, но доказывает одновременно утверждение 1.3 и следствие 5.8, которые нужны для доказательства теоремы 2.6.

**Доказательство теоремы 5.4 и утверждения 1.4.** Согласно пункту 3 леммы 5.3, достаточно рассмотреть случай общего положения главных частей сечений $s_i$. Так как в этом случае индекс $\operatorname{ind}([s_1]\cap\ldots\cap[s_I])$ является симметричной полилинейной функцией пар многогранников $(\Delta_i, \Delta_{s_i})$, то достаточно доказать, что

$$\operatorname{ind}([s_1]\cap\ldots\cap[s_I]) = I!\operatorname{Vol}(\Delta_1\setminus\Delta_{s_1}) - I!\operatorname{Vol}(\Delta_{s_i}\setminus\Delta_i)$$

при условии, что $\Delta_1=\ldots=\Delta_I$, $\Delta_{s_1}=\ldots=\Delta_{s_I}$ и $s_1, \ldots, s_I$ — сечения с главными частями общего положения. Для доказательства заметим следующий факт (напомним, что обозначение $\mathscr{I}_{\Delta_i}(\cdot)$ введено перед определением 4.1). ☐

**Лемма 5.5.** *Пусть в условиях теоремы* 5.4 $s_i=\mathscr{I}_{\Delta_i}(\widetilde{s}_i)$, *где* $\widetilde{s}_1, \ldots, \widetilde{s}_I$ — *многочлены Лорана с (ограниченными) многогранниками Ньютона* $\Delta_{\widetilde{s}_i}$ *и главными частями общего положения. Тогда*

$$\operatorname{ind}([s_1]\cap\ldots\cap[s_I]) = I!\operatorname{Vol}(\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_I) - I!\operatorname{Vol}(\Delta_{\widetilde{s}_1}, \ldots, \Delta_{\widetilde{s}_I}),$$

*где* $\widetilde{\Delta}_i=\Delta_i\setminus(\Delta_{s_i}\setminus\Delta_{\widetilde{s}_i})$.

**Доказательство**. Дополним веер $\Gamma$ до полного веера $\widetilde{\Gamma}$, совместимого с многогранниками $\widetilde{\Delta}_i$ и $\Delta_{\widetilde{s}_i}$, $i=1, \ldots, I$. Торическое многообразие $\mathbb{T}^{\widetilde{\Gamma}}$ — компактификация $\mathbb{T}^{\Gamma}$, линейные расслоения $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ с сечениями $s_i$ продолжаются на нее до линейных расслоений $\mathscr{I}_{\widetilde{\Delta}_i}$ с сечениями $q_i=\mathscr{I}_{\widetilde{\Delta}_i}(\widetilde{s}_i)$. Множество общих нулей сечений $q_1, \ldots, q_I$ состоит из компактного множества $Z\subset\mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma}$ и точек $p_1, \ldots, p_M$ в большом торе, поэтому

$$\operatorname{ind}([q_1]\cap\ldots\cap[q_I]) = \operatorname{ind}_Z([q_1]\cap\ldots\cap[q_I]) + \sum_j \operatorname{ind}_{p_j}([q_1]\cap\ldots\cap[q_I]).$$

При этом

$$\operatorname{ind}_Z([q_1]\cap\ldots\cap[q_I]) = \operatorname{ind}([s_1]\cap\ldots\cap[s_I])$$

по построению, а

$$\operatorname{ind}([q_1]\cap\ldots\cap[q_I]) = I!\operatorname{Vol}(\widetilde{\Delta}_1, \ldots, \widetilde{\Delta}_I)$$

и

$$\sum_j \operatorname{ind}_{p_j}([q_1]\cap\ldots\cap[q_I]) = I!\operatorname{Vol}(\Delta_{\widetilde{s}_1}, \ldots, \Delta_{\widetilde{s}_I})$$

по теореме Д. Бернштейна (см. [1,7]).

Если $\Delta_1 = \ldots = \Delta_I$, $\Delta_{s_1} = \ldots = \Delta_{s_I}$ и $s_1, \ldots, s_I$ — сечения с главными частями общего положения, то из этой леммы следует, что

$$\operatorname{ind}([s_1] \cap \ldots \cap [s_I]) = I!\operatorname{Vol}(\Delta_1 \setminus \Delta_{s_1}) - I!\operatorname{Vol}(\Delta_{s_i} \setminus \Delta_i),$$

что доказывает теорему 5.4. Вместе с теоремой 5.4 эта лемма доказывает утверждение 1.4. □

**Доказательство теоремы 5.4 и утверждения 1.3.** Через $S(\Gamma)$ обозначим множество примитивных векторов, порождающих одномерные конусы веера Γ. Через $\mathbb{T}^\gamma \subset \mathbb{T}^\Gamma$ обозначим замыкание орбиты, соответствующей одномерному конусу, порожденному вектором $\gamma \in \in S(\Gamma)$. Сначала вычислим индекс в следующем важном частном случае.

**Лемма 5.6.** *Пусть набор многогранников* $\Delta_1, \ldots, \Delta_I$, $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_I}$ *очень удобный. Тогда в случае общего положения главных частей сечений* $s_i$ *индекс* $\operatorname{ind}([s_1] \cap \ldots \cap [s_I])$ *равен*

$$(I-1)! \sum_{\gamma \in S \cap \operatorname{Int}|\Gamma|} (\Delta_{s_1}(\gamma) - \Delta_1(\gamma)) \cdot \operatorname{Vol}(\Delta_{s_2}^\gamma, \ldots, \Delta_{s_I}^\gamma),$$

*а в случае произвольных главных частей — не меньше указанного значения или не определен* (*через* $S$ *обозначено множество всех примитивных ковекторов в* $(\mathbb{Z}^I)^*$; *легко видеть, что в правой части конечное число ненулевых слагаемых*).

Выберем простой веер Γ, с которым совместимы все многогранники $\Delta_{s_i}$, $\Delta_i$. Представим дивизор $[s_i]$ как $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i$, где $\alpha_i$ — линейная комбинация орбит $\mathbb{T}^\Gamma$ с компактными замыканиями, $\beta_i$ — линейная комбинация орбит с некомпактными замыканиями, а носители $\gamma_i$, $i = 1, \ldots, I$, пересекаются трансверсально на каждой орбите $\mathbb{T}^\Gamma$. Так как по условию расслоение $\mathscr{I}_{\Delta_1}$ тривиально, то носитель цикла $[s_1 - \varepsilon] \cap \alpha_j$ пуст и

$$\operatorname{ind}[s_1] \cap \ldots \cap \widehat{[s_j]} \cap \ldots \cap [s_I] \cap \alpha_j = \\ = \operatorname{ind}[s_1 - \varepsilon] \cap \ldots \cap \widehat{[s_j]} \cap \ldots \cap [s_I] \cap \alpha_j = 0, j = 2, \ldots, I.$$

Из удобности набора многогранников и трансверсальности $\gamma_i$ следует, что носители циклов $(\beta_1 + \gamma_1) \cap \ldots \cap \widehat{(\beta_j + \gamma_j)} \cap \ldots \cap (\beta_I + \gamma_I) \cap \beta_j$, $j = 1, \ldots, I$, и $\gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_I$ пусты. По теореме Д. Бернштейна (см. [1, 7]) для любого примитивного ковектора $\gamma$ индекс $\operatorname{ind}[\mathbb{T}^\gamma] \cap \gamma_2 \cap \ldots \cap \gamma_I$ равен $\operatorname{Vol}(\Delta_{s_2}^\gamma, \ldots, \Delta_{s_I}^\gamma)$ и $\alpha_1 = \sum_{\gamma \in S(\Gamma) \cap \operatorname{Int}|\Gamma|} (\Delta_{s_1}(\gamma) - \Delta_1(\gamma))[\mathbb{T}^\gamma]$. Из приведенных равенств следует первая часть утверждения леммы, а из пункта 3 леммы 5.3 — вторая. □

Теорему 5.4 достаточно доказать в случае, когда $\Delta_{s_i} \subset \Delta_i$ (то есть $s_1, \ldots, s_I$ — голоморфные сечения). Действительно, мероморфное сечение $s_i$ можно представить как частное сечений $s_i q_i$ и $q_i$ линейных расслоений $\mathscr{I}_{\Delta_i + \widetilde{\Delta}_i}$ и $\mathscr{I}_{\widetilde{\Delta}_i}$ соответственно, таких что $\Delta_{s_i q_i} = \Delta_{s_i} + \Delta_{q_i} \subset \Delta_i + \widetilde{\Delta}_i$ и $\Delta_{q_i} \subset \widetilde{\Delta}_i$ (то есть $s_i q_i$ и $q_i$ голоморфны). Так как индекс пересечения дивизоров сечений аддитивен относительно взятия произведения сечений, а смешанный объем пар многогранников — относительно взятия суммы пар, то утверждение теоремы для мероморфных сечений $s_1, \ldots, s_I$ сводится по аддитивности к утверждению теоремы для голоморфных сечений $q_1, \ldots, q_I, s_1 q_1, \ldots, s_I q_I$.

**Лемма 5.7.** *Пусть набор многогранников $\Delta_{s_i} \subset \Delta_i \subset \mathbb{R}^I$, $i = 1, \ldots, I$, удобный. Пусть $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, I$, и $E = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^I$. Обозначим через $\Sigma_i$ выпуклую оболочку множества $((\mathbb{R}^1_+ + a_i) \times \Delta_i) \cup (\{0\} \times \Delta_{s_i}) \subset \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^I$. Тогда в случае общего положения главных частей сечений $s_i$ индекс* $\mathrm{ind}([s_1] \cap \ldots \cap [s_I])$ *равен*

$$I! \sum_{\gamma \in S \cap \mathrm{Int}(\mathbb{R}^1_+ \times |\Gamma|)} (\gamma, E)\, \mathrm{Vol}(\Sigma_1^\gamma, \ldots, \Sigma_I^\gamma),$$

*а в случае произвольных главных частей не меньше указанного значения или не определен* (*через $S$ обозначено множество всех примитивных ковекторов в $(\mathbb{Z}^1 \oplus \mathbb{Z}^I)^*$; легко видеть, что в правой части конечное число ненулевых слагаемых*).

**Доказательство** основано на идее шевеления дивизоров, использованной Д. Бернштейном в работе [1]. Выберем сечения $\widetilde{s}_i$ расслоений $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ с многогранниками Ньютона $\Delta_{\widetilde{s}_i} = \Delta_i$ и главными частями общего положения. Координату $\varepsilon$ на первом множителе торического многообразия $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{T}^\Gamma = \mathbb{T}^{\mathbb{R}^1_+ \times \Gamma}$ рассмотрим как сечение тривиального линейного расслоения на $\mathbb{C}^1 \times \mathbb{T}^\Gamma$. Тогда из элементарных свойств индексов пересечения следует, что индекс $\mathrm{ind}([s_1] \cap \ldots \cap [s_I])$ равен индексу пересечения $\mathrm{ind}[\varepsilon] \cap [s_1 + \varepsilon^{a_1} \widetilde{s}_1] \cap \ldots \cap [s_I + \varepsilon^{a_I} \widetilde{s}_I]$ на ростке многообразия $(\mathbb{C}^1 \times \mathbb{T}^\Gamma, \{0\} \times \mathbb{T}^{\mathrm{Int}\,\Gamma})$. Этот индекс пересечения можно вычислить по предыдущей лемме.

В обозначениях этой леммы назовем ограниченную грань многогранника $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^I$ длинной, если ее проекция на первое слагаемое пространства $\mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^I$ — не точка. Множество опорных ковекторов к длинным граням $\Sigma_i$ является графиком выпуклой кусочно линейной функции на конусе $|\Gamma|$, равной нулю на границе конуса и положительной внутри. Выберем последовательность $a_1 \ll a_2 \ll \ldots \ll a_I$ достаточно быстро возрастающей, тогда графики упомянутых функций пересекаются только на границе $|\Gamma|$. По лемме 1.5 ответ, который предыдущая лемма дает в случае $a_1 \ll a_2 \ll \ldots \ll a_I$, равен

$$\sum_{k=1}^{I} \sum_{\gamma \in S \cap \operatorname{Int}|\Gamma|} (\Delta_k(\gamma) - \Delta_{s_k}(\gamma)) \operatorname{Vol}(\Delta_1^\gamma, \ldots, \Delta_{k-1}^\gamma, \Delta_{s_{k+1}}^\gamma, \ldots, \Delta_{s_I}^\gamma).$$

Это выражение симметрично относительно перестановок пар $(\Delta_i, \Delta_{s_i})$, так как индекс пересечения симметричен относительно перестановки «пересекаемых». Так как по пункту 2 теоремы 1.2 симметризация этого выражения равна смешанному объему пар $(\Delta_i, \Delta_{s_i})$, то и само это выражение равно смешанному объему, что доказывает теорему 5.4 и утверждение 1.3. □

Для доказательства теоремы 2.6 потребуется следующий вариант теоремы 5.4:

**Следствие 5.8.** Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_I \subset \mathbb{R}^I$ — целочисленные многогранники, совместимые с простым веером $\Gamma$ в $(\mathbb{R}^I)^*$. Пусть $s_i$, $i = 1, \ldots, I$, — ростки мероморфных сечений расслоений $\mathscr{I}_{\Delta_i}$ на паре $(\mathbb{T}^\Gamma, \mathbb{T}^{\operatorname{Int}\Gamma})$, такие что для них определены многогранники Ньютона, набор многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_I$, $\Delta_{s_1}, \ldots, \Delta_{s_I}$ очень удобный и разность $\Delta_1 \setminus \Delta_{s_1}$ ограничена. Пусть $B_2, \ldots, B_I$ — произвольные многогранники, такие что симметрическая разность $B_i$ и $\Delta_{s_i}$ ограничена при $i = 2, \ldots, I$. Тогда в случае общего положения главных частей сечений $s_i$ индекс $\operatorname{ind}([s_1] \cap \ldots \cap [s_I])$ равен

$$I! \operatorname{Vol}\big((\Delta_1, \Delta_{s_1}), (B_2, \Delta_{s_2}), \ldots, (B_I, \Delta_{s_I})\big),$$

а в случае произвольных главных частей не меньше указанного значения или не определен.

**Доказательство**. Индекс пересечения можно вычислить с помощью леммы 5.6. Полученный ответ можно представить в виде смешанного объема пар с помощью утверждения 1.3. □

## Литература


1. *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 3. С. 1—4.
2. *Варченко А. Н.* Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функц. анал. и его прил. 1976. Т. 10, № 3. С. 13—38.
3. *Данилов В. И., Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа — Делиня // Известия АН СССР. Серия математическая. 1986. Т. 50, № 5. С. 925—945.
4. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 2. С. 85—134.
5. *Фултон У.* Теория пересечений. М.: Мир, 1989.

6. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функц. анализ и его прил. 1977. Т.11, № 4. С. 56—64.
7. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и род полных пересечений // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, № 1. С. 51—61.
8. *Biviá-Ausina C.* Joint reductions of monomial ideals and multiplicity of complex analytic maps // Math. Res. Lett. 2008. Vol. 15, № 2. P. 389—407.
9. *Ebeling W., Gusein-Zade S. M.* Indices of 1-forms on an isolated complete intersection singularity // Moscow Math. J. 2003. Vol. 3. P. 439—455.
10. *Ebeling W., Gusein-Zade S. M.* Indices of vector fields or 1-forms and characteristic numbers. 2005. (Bulletin of the London Math. Soc.; Vol. 37). P. 747—754.
11. *Эстеров А. И.* Индексы 1-форм, результанты и многогранники Ньютона // УМН. 2005. Т. 60, № 2. С. 181—182.
12. *Эстеров А. И.* Индексы 1-форм, индексы пересечения и многогранники Ньютона // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 7. С. 137—160.
13. *Esterov A.* Indices of 1-forms, intersection indices, and Newton polyhedra // Sb. Math. 2006. Vol. 197, № 7. P. 1085—1108.
14. *Esterov A.* Determinantal Singularities and Newton Polyhedra. Анализ и особенности. Ч. 2. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Владимира Игоревича Арнольда // Труды МИАН. М.: Наука, 2007. Т. 259. С. 20—38.
15. *Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V.* Discriminants, Resultants, and Miltidimensional Determinants. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1994.
16. *Kouchnirenko A. G.* Polyèdres de Newton et nombres de Milnor // Inventiones math. 1976. Vol. 32. P. 1—31.
17. *Oka M.* Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. 1990. Vol. 37. P. 11—32.
18. *Suwa T.* Residues of Chern classes on singular varieties // The Proc. Franco-Japaneze Seminar. Luminy, 1992.
19. *Sturmfels B.* On the Newton polytope of the resultant // Journal of Algebraic Combinatorics. 1994. Vol. 3. P. 207—236.
20. *Varchenko A. N.* Zeta-Function of Monodromy and Newton's Diagram // Inventiones math. 1976. Vol. 37. P. 253—262.

# О заузливании многообразий в пространстве размерности меньше метастабильной

Михаил Скопенков

*2004, второе место*

Классической проблемой топологии является *проблема заузливания*: описать множество вложений данного многообразия в евклидово пространство данной размерности. Актуальный обзор по данной теме можно найти в статье [16]. Эта проблема уже сыграла выдающуюся роль в развитии топологии. Для решения этой проблемы (а также близкой проблемы о существовании вложений) были созданы различные методы такими классиками, как Дж. Александер, П. С. Александров, Е. ван Кампен, К. Куратовский, С. Маклейн, Л. С. Понтрягин, Р. Том, Х. Уитни, Х. Хопф и др. В настоящее время исследование этой проблемы переживает новый расцвет.

Классическими результатами о вложениях являются теоремы классификации (в коразмерности по крайней мере 3) узлов, зацеплений и вложений высокосвязных многообразий (Р. Пенроуз, Дж. Г. К. Уайтхед, К. Зиман, М. Ирвин, Дж. Левин, С. П. Новиков, Дж. Хадсон, А. Хефлигер, М. Хирш). Проблема классификации вложений считается очень трудной, поскольку другие случаи, для которых было бы получено полное явное описание (непустого) множества вложений замкнутого многообразия с точностью до изотопии, до последнего времени (например, [15]) не были известны, несмотря на наличие интересных подходов (Левин — Новиков — Уолл [20], Гудвилли — Уайсс [4]).

В данной работе напоминаются некоторые классические результаты, касающиеся проблемы заузливания, и приводятся формулировки нескольких недавних результатов, полученных автором.

**Постановка проблемы.** Гладким *вложением* компактного многообразия $N$ в многообразие $M$ называется гладкое инъективное отображение $f: N \to M$, дифференциал которого $df$ невырожден в каждой точке. Два вложения $f, g: N \to M$ называются (объемлемо) *изотопными*, если существует такой диффеоморфизм

$$F: M \times I \to M \times I,$$

что

1) $F(y, 0) = (y, 0)$ для любого $y \in M$;
2) $F(f(x), 1) = (g(x), 1)$ для любого $x \in N$;
3) $F(M \times \{t\}) = M \times \{t\}$ для любого $t \in I$.

Обозначим через $E^m(N)$ множество изотопических классов вложений $N \to S^m$. *Проблема заузливания* состоит в описании множества $E^m(N)$.

Мы будем исследовать эту проблему только при условии *коразмерности по крайней мере* 3: $m \geqslant \dim N + 3$. В коразмерности меньше 3 получение полной *конкретной* классификации представляется на данный момент безнадежным.

Наоборот, *в стабильной* размерности $m \geqslant 2\dim N + 2$ проблема заузливания становится тривиальной: $|E^m(N)| = 1$. Мы увидим, что трудность проблемы заузливания коренным образом зависит от выполнения еще одного, *метастабильного*, неравенства.

**Узлы.** Самый простой частный случай проблемы заузливания — это случай *узлов*, то есть вложений $S^q \to S^m$. А. Хефлигер показал, что при $m \geqslant q+3$ множество $E^m(S^q)$ является коммутативной группой относительно операции связной суммы. Он получил, в частности, следующие конкретные результаты:

**Теорема 1** (см. [8]). а) *Если* $m \geqslant \frac{3}{2}q+2$, *то* $E^m(S^q)=0$;

б) $E^6(S^3)\cong\mathbb{Z}$, $E^7(S^4)\cong\mathbb{Z}_{12}$;

в) *пусть* $m\geqslant q+3$; *тогда*

$$E^m(S^q) \text{ бесконечна} \iff m < \frac{3}{2}q+2 \text{ и } 4 \mid q+1.$$

Размерность $m = \frac{3}{2}q + 2$ называется *метастабильной*. Это определение имеет смысл для произвольного $q$-мерного многообразия $N$. Классификация узлов (а тем более вложений многообразия $N \neq S^q$) в пространстве размерности меньше метастабильной — сложная нерешенная задача. Поэтому получение даже частичных конкретных результатов представляет большой интерес.

В размерности меньше метастабильной близкая проблема существования вложений сложна в некотором точном *алгоритмическом* смысле [11]. Интересно было бы получить оценки алгоритмической сложности задачи распознавания изотопности двух данных вложений.

**Зацепления.** Перейдем к следующему частному случаю проблемы заузливания. Это случай *зацеплений*, то есть вложений $S^p\sqcup S^q\to S^m$. А. Хефлигер показал, что при $p, q\leqslant m-3$ множество $E^m(S^p\sqcup S^q)$ является коммутативной группой относительно операции покомпонентной связной суммы. Он получил следующие формулы:

**Теорема 2.** а) $E^m(S^p\sqcup S^q)\cong\pi^S_{m-p-q-1}$ *при*

$$m \geqslant \max\Big\{\frac{3}{2}q+2, \frac{3}{2}p+2\Big\}.$$

б) *Если* $p \leqslant q \leqslant m-3$ *и* $m \geqslant \frac{2}{3}p+\frac{2}{3}q+2$, *то*

$$E^m(S^p \sqcup S^q) \cong \pi_p(S^{m-q-1}) \oplus \pi_{p+q+2-m}(V_{M+m-p-1,M}) \oplus E^m(S^p) \oplus E^m(S^q).$$

в) $E^6(S^3 \sqcup S^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Здесь $V_{M+l,M}$ — *многообразие Штифеля* $M$-реперов в начале координат пространства $\mathbb{R}^{M+l}$, где число $M$ достаточно велико. Многие группы $\pi_n(V_{M+l,M})$ явно вычислены [13].

Теорема 2 а) относится к размерности не меньше метастабильной, ее доказательство несложно. Формулы 2 а) и в) — частные случаи формулы 2 б).

А. Хефлигер доказал теорему 2 б) при более сильном ограничении $p \leqslant q$ и $m > \frac{1}{3}p+q+2$; его рассуждение может быть обобщено для случая $m > \frac{2}{3}p+\frac{2}{3}q+2$. Автором было получено доказательство для граничного случая $m = \frac{2}{3}p+\frac{2}{3}q+2$ (а заодно и более простое доказательство результата А. Хефлигера) [19]. Неравенство $m \geqslant \frac{2}{3}p+\frac{2}{3}q+2$ в теореме 2 б) уже является точным. Новое доказательство основано на сведении классификации зацеплений к классификации сингулярных зацеплений, которая является интересной задачей и сама по себе [6, 10].

Теорема 2 б) является наиболее сильной известной *явной* классификацией 2-компонентных зацеплений в сферах. Некоторые вычисления групп зацеплений с несколькими компонентами были проделаны В. Нежинским [12]. В коразмерности по крайней мере 3 имеется точная последовательность, включающая группы зацеплений и некоторые гомотопические группы, отображения между которыми задаются произведениями Уайтхеда [5, 9]. В последующей публикации автор планирует привести явный критерий конечности группы $E^m(S^p \sqcup S^q)$.

**Заузленные торы.** Следующий естественный случай проблемы заузливания — это классификация *заузленных торов*, то есть вложений $S^p \times S^q \to S^m$. Этот случай обобщает теорию 2-компонентных зацеплений одинаковой размерности. Ввиду теоремы о разбиении на ручки он может рассматриваться как следующий естественный шаг по направлению к классификации вложений произвольных многообразий. На этом пути получены даже некоторые точные результаты [15]. Многие известные контрпримеры в теории вложений — это именно вложения $S^p \times S^q \to S^m$.

А. Скопенков показал, что при $p \leqslant q$ и $m > 2p+q+2$ множество $E^m(S^p \times S^q)$ является группой относительно операции «$S^p$-параметрической связной суммы». Ему принадлежит классификация заузленных торов в размерности не меньше метастабильной:

**Теорема 3** (см. [14]). *$E^m(S^p \times S^q) \cong \pi_q(V_{m-q,p})$ при $p \leqslant q$ и $m \geqslant \geqslant \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$.*

А. Скопенковым был получен ряд конкретных результатов о заузленных торах в некотором диапазоне размерностей ниже метастабильной (а именно $p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2} \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$) [17]. Д. Реповшу, М. Ценцелю и автору принадлежит явный критерий конечности множества $E^m(S^p \times S^q)$ для еще меньшей размерности:

**Теорема 4** (см. [1, 2]). *Пусть $p + \frac{4}{3}q + 2 < m < p + \frac{3}{2}q + 2$ и $m > > 2p + q + 2$; тогда $E^m(S^p \times S^q)$ бесконечно $\Leftrightarrow 4 \mid q + 1$ или $4 \mid p + q + 1$.*

В следующих публикациях автор планирует привести явный критерий конечности множества $E^m(S^p \times S^q)$ при любом $m > 2p + q + 2$.

**Произвольные многообразия.** Для более сложных многообразий известно немного конкретных результатов. Классификация вложений в пространство размерности *не меньше* метастабильной сводится к гомотопической задаче, которую иногда удается решить. Известны также конкретные результаты о классификации вложений в пространство размерности *меньше* метастабильной для произвольных многообразий размерности 3 и 4 [3, 18]. Отметим одну нерешенную задачу: *определить, какие множества $E^m(N)$ конечны.*

Проблемы существования и классификации вложений являются частными случаями общей проблемы о существовании и классификации отображений *с заданными ограничениями на самопересечения*: погружений, сингулярных зацеплений, почти вложений, а также вложений, аппроксимирующих данное отображение. Эту общую проблему естественно изучать в совокупности с проблемой вложений, поскольку они используют близкие методы.

## Литература


1. *Cencelj M., Repovš D., Skopenkov M.* Homotopy type of the complement to an immersion and classification of embeddings of tori // Rus. Math. Surv. 2007. Vol. 62, № 5. P. 985—987, http://arxiv.org/abs/0803.4285v1[math.GT]
2. *Cencelj M., Repovš D., Skopenkov M.* A new invariant of higher dimensional embeddings. Submitted. http://arxiv.org/abs/0811.2745v1[math.GT]
3. *Crowley D., Skopenkov A.* A classification of smooth embeddings of 4-manifolds in 7-space, II. Submitted; http://arxiv.org/abs/0808.1795v1[math.GT]

4. *Goodwillie T., Weiss M.* Embeddings from the point of view of immersion theory, II // Geometry and Topology. 1999. Vol. 3. P. 103—118.
5. *Habegger N.* Knots and links in codimension greater than 2 // Topology. 1986. Vol. 25, № 3. P. 253—260.
6. *Habegger N., Kaiser U.* Link homotopy in the 2-metastable range // Topology. 1998. Vol. 37, № 1. P. 75—94.
7. *Haefliger A.* Differentiable links // Topology. 1962. Vol. 1. P. 241—244.
8. *Haefliger A.* Differentiable embeddings of $S^n$ in $S^{n+q}$ for $q > 2$ // Ann. Math. Ser. 3. 1966. Vol. 83. P. 402—436.
9. *Haefliger A.* Enlacements de spheres en codimension superiure a 2 // Comm. Math. Helv. 1966/67. Vol. 41 P. 51—72 (in French).
10. *Koschorke U.* On link maps and their homotopy classification // Math. Ann. 1990. Vol. 286, № 4. P. 753—782.
11. *Matoušek J., Tancer M., Wagner U.* Hardness of embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$. Preprint http://arxiv.org/abs/0807.0336v1
12. *Nezhinsky V.* Some computations in higher dimensional link theory // Siberian Math. J. 1982. Vol. 24, № 4. P. 104—115 (in Russian).
13. *Paechter G. F.* The groups $\pi_r(V_{n,m})$ // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1956. Vol 7. P. 249—268.
14. *Skopenkov A.* On the Haefliger — Hirsh — Wu invariants for embeddings and immersions // Comment. Math. Helv. 2002. Vol. 77. P. 78—124.
15. *Skopenkov A.* A new invariant and parametric connected sum of embeddings // Fund. Math. 2007. Vol. 197. P. 253—269; http://arxiv.org/abs/math/0509621
16. *Skopenkov A.* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces // Surveys in Contemporary Mathematics / Ed. N. Young, Y. Choi. 2007. (London Math. Soc. Lect. Notes; Vol. 347). P. 248—342; http://arxiv.org/abs/math. GT/0604045 http://arxiv.org/abs/math.GT/0604045.
17. *Skopenkov A.* Classification of embeddings below the metastable dimension. Submitted; http://arxiv.org/abs/math.GT/0607422
18. *Skopenkov A.* A classification of smooth embeddings of 3-manifolds in 6-space // Math. Zeitschrift. 2008. Vol. 260. P. 647—672; http://arxiv.org/abs/math.GT/0603429v5
19. *Skopenkov A.* Suspension theorems for links and link maps // Proc. AMS. 2009. Vol. 137, № 1. P. 359—369. [Перевод на русский язык: http://arxiv.org/abs/math.GT/0610320.]
20. *Wall C. T. C.* Unknotting spheres in codimension two and tori in codimension one // Proc. Camb. Phil. Soc. 1965. Vol. 61. P. 659—664.

# Числа Бернулли — Эйлера и мультикраевые особенности серии $B_n^l$

Олег Карпенков

*2004, третье место*

В этой работе изучаются свойства чисел $K_n^l$ компонент связности бифуркационных диаграмм мультикраевых особенностей $B_n^l$. Доказывается рекуррентное соотношение на числа $K_n^l$. Как ранее было известно, $K_n^1$ является $(n+1)$-м числом Бернулли — Эйлера, это доставляет необходимое граничное условие для вычисления чисел $K_n^l$. Мы также находим производящие функции для чисел $K_n^l$ с небольшим фиксированным параметром $l$ и выписываем уравнения в частных производных для общего случая.

## 1. Введение

Числа Бернулли — Эйлера, которые часто обозначаются через $K_n$, наряду с числами Фибоначчи и числами сочетаний, встречаются в различных областях математики. В математическом анализе эти числа можно встретить как разложения функции $\sec + \operatorname{tg}$ в ряд Тейлора, а именно:

$$\sec t + \operatorname{tg} t = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \frac{t^n}{n!}.$$

По аналогии с числами Каталана числа Бернулли — Эйлера строятся при помощи некоторого «магического» треугольника. Правила построения такого треугольника описаны, например, в [1]. Числа Бернулли — Эйлера обладают множеством важных арифметических свойств (см. [1,4,5]).

Рассмотрим одно из геометрических употреблений чисел в теории особенностей. Как было показано В. И. Арнольдом [2], компоненты множества вполне правильных $M$-морсификаций краевых особенностей серии $B_n$ тесно связаны с комбинаторикой соответствующих конусов Спрингера. Он также доказал, что количества компонент этих особенностей равны числам Бернулли — Эйлера $K_n$, см. [1].

В этой работе приведены доказательства теорем, анонсированных автором в [3]. Речь пойдет об обобщениях краевых особенностей $B_n$ функций на прямой для случая, когда край состоит из конечного числа точек, а также для случаев больших размерностей. Количества компонент множества вполне правильных $M$-морсификаций особенности $B_n^l$ также являются некоторым обобщением чисел Бернулли —

Эйлера. В частности, мы доказываем рекуррентное соотношение на числа $K_n$:

$$K_{n-2}^{l+1} = K_n^l - nlK_n^{l-1}.$$

Кроме того, новые числа перечисляют компоненты связности одной серии стратов каустик особенностей $A_{2l+n-1}$, см. следствие 3.5.

Мы приведем доказательство рекуррентного соотношения (анонсированного в статье [3]) между количеством связных компонент множества вполне правильных $M$-морсификаций для различных значений $n$ и $l$.

Эта работа организована следующим образом. Во втором разделе вводятся необходимые определения и понятия, в том числе определение особенностей серии $B_k^l$. В третьем разделе формулируется и доказывается основная теорема о рекуррентных соотношениях на числа $K_n^l$. В конце третьего раздела приводится связь чисел $K_n^l$ с количеством некоторых стратов особенностей $A_{2l+n-1}$. Для случая малого количества краевых точек числа $K_n^l$ явно считаются через числа Бернулли — Эйлера. Случай малого количества краевых точек разобран в четвертом разделе. Рекуррентные соотношения позволяют выписать (к сожалению, с трудно вычислимыми коэффициентами) некоторые выражения для чисел $K_n^l$ через числа Бернулли — Эйлера, см. пятый раздел.

Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину, С. К. Ландо и Б. З. Шапиро за оказанную помощь при выполнении этой работы, а также Техническому университету Граца (Technische Universität Graz) за гостеприимство и отличные рабочие условия.

## 2. Определение особенностей серии $B_n^l$

Приведем определение вполне правильной $M$-морсификации краевой особенности $B_\mu$ из статьи [2]. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{\mu-1}$ вещественных многочленов

$$x^\mu + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_{\mu-1} x$$

на вещественной прямой с фиксированным «краем» $x=0$.

**Определение 2.1.** *Вполне правильная $M$-морсификация краевой особенности $B_\mu$* — это многочлен этого семейства, все $\mu-1$ критических значений которого на вещественной прямой различны и не совпадают с его значением на крае.

Следующее определение является обобщением определения 2.1 на мультикраевые особенности типа $B_n^l$, то есть на особенности, у которых вместо одной краевой точки в нуле — $l$ штук.

Рассмотрим произведение пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ действительных многочленов

$$x^n+\lambda_1 x^{n-1}+\lambda_2 x^{n-2}+\ldots+\lambda_{n-1}x,$$

и пространства $\mathbb{R}^{k-1}$ «краевых точек» $x=b_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i=0$.

**Определение 2.2.** *Вполне правильная $M$-морсификация мультикраевой особенности $B_n^l$* — это многочлен, все критические точки которого вещественны и различны, причем значения во всех критических точках, а также и значения во всех краевых точках $x=b_i$, различны.

Заметим, что краевые точки у нас пронумерованы, иначе нужно было бы рассматривать факторпространства $\mathbb{R}^{l-1}$ по группе перестановок координат. Краевые точки должны быть пронумерованы, так как они соответствуют разным прообразам, которые не переставляются.

**Определение 2.3.** *$M$-областью* называется замкнутое подмножество пространства многочленов вида $x^n+\lambda_1 x^{n-1}+\lambda_2 x^{n-2}+\ldots+\lambda_{n-1}x$, состоящее из многочленов, все критические точки которых вещественны.

Множество вполне правильных $M$-морсификаций — открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{l-1}$, а его замыкание имеет вид ($M$-*область*) $\times\,\mathbb{R}^{l-1}$. Оно разбивается на связные компоненты бифуркационной диаграммой, состоящей из пяти гиперповерхностей. Три гиперповерхности встречаются уже в случае краевых особенностей типа $B_n$ (см. также [2]):

а) краевая каустика, состоящая из функций с критической точкой на крае;

б) обыкновенный страт Максвелла, состоящий из функций с равными критическими значениями в различных точках;

в) краевой страт Максвелла, состоящий из функций, хотя бы одно из краевых значений которых является критическим (и соответствующая критическая точка не лежит на крае).

Заметим, что в наших обозначениях $B_n=B_n^1$, при этом краевая точка не закреплена. Таким образом, определение вполне правильной $M$-морсификации краевой особенности $B_n$ из статьи [2] является частным случаем определения 2.2.

В случае краевых особенностей иммерсий $B_n^l$, где $l\geqslant 2$, добавляются еще две гиперповерхности:

г) двойная краевая каустика, состоящая из функций с совпадающими краевыми точками;

д) двойной краевой страт Максвелла, состоящий из функций с одинаковыми значениями в некоторых различных краевых точках.

## 3. Вычисление рекуррентного соотношения

Обозначим через $K_n$ числа Бернулли — Эйлера (вот начало последовательности, первый член соответствует $n=0$: 1, 1, 1, 2, 5, 13, 61, ...), а через $K_n^l$ — количество связных компонент множества вполне правильных $M$-морсификаций особенности $B_n^l$. Числа Бернулли — Эйлера являются граничным условием для чисел $K_n^l$, а именно $K_n^0=K_{n-1}$ и $K_n^1=K_{n+1}$ (см. [1]).

**Теорема 3.1.** *Имеет место равенство*

$$K_{n-2}^{l+1}=K_n^l-nlK_n^{l-1}.$$

Для особенности $B_2^3$ мы получаем следующее:

$$K_3^2=K_5^1-5K_5^0=K_6-5K_4=61-5\cdot 5=36.$$

Можно выписать другое соотношение:

$$K_3^2=K_1^3+2\cdot 3K_1^3=3!+6\cdot 5=36.$$

Доказательство начнем с двух лемм.

Обозначим через $L_n^l$ число компонент связности краевой каустики в дополнении к объединению стратов и каустик коразмерности 2. Здесь имеется в виду, что у функций есть одна критическая и одновременно краевая точка. Все остальные выделенные точки различны, и значения в них различны.

**Лемма 3.2.** *Верно следующее тождество.*

$$L_n^l=l(n-1)K_n^{l-1}.$$

**Замечание 3.3.** В доказательствах этой части мы иногда изменяем множество граничных точек, в результате может получиться не $M$-морсификация. Тем не менее, после вертикального сдвига графика функции, обеспечивающего нулевую сумму всех граничных точек, а затем горизонтального сдвига графика, обеспечивающего обнуление значения в нуле, мы получаем $M$-морсификацию.

**Доказательство**. Рассмотрим вполне правильную $M$-морсификацию с $l-1$ краевой точкой и $n-1$ критической точкой. Заметим, что при действии на краевых точках группы перестановок мы получим $(l-1)!$ различных вполне правильных $A$-морсификаций из разных компонент связности, но с одним и тем же множеством краевых точек. Поставим в одну из $n-1$ критических точек новую краевую точку, а затем сделаем нормализацию замечания 3.3. При действии группы перестановок на краевые точки мы имеем $l!$ различных $M$-морсификаций. Следовательно, набору симметричных $(l-1)!$ старых компонент связности ставится в соответствие набор $l!(n-1)$ новых. Отсюда следует утверждение леммы 3.2.

Дальше мы найдем количество компонент связности вполне правильных М-морсификаций, у которых одно из краевых значений превосходит все критические или, наоборот, все критические значения больше некоторого краевого. Компоненты, все критические значения $M$-морсификаций которых содержатся внутри некоторого отрезка с концами в краевых значениях, считаются дважды. Пусть $\hat{K}_n^l$ — число таких компонент. □

**Лемма 3.4.** *Выполняется следующее тождество*

$$\hat{K}_n^l = 2lK_n^{l-1}.$$

**Доказательство**. Пусть $n$ — четно. Тогда каждая морсификация имеет две неограниченные ветви, уходящие на плюс бесконечность. Рассмотрим максимальное краевое значение. Если оно больше всех критических, то оно принимается в точке, принадлежащей одной из двух ветвей, описанных выше. Следовательно, для каждой вполне правильной $M$-морсификации с $l-1$ краевой точкой мы имеем $l$ различных $M$-морсификаций, где одна из краевых точек $b_i\colon 1 \leqslant i \leqslant l$ на правой ветви, и значение в ней максимальное среди краевых и критических значений, порядок же остальных точек сохранен. Аналогичное рассуждение справедливо для левого положения точки. Следовательно, $\hat{K}_{2n}^l = 2lK_{2n}^{l-1}$.

Если $n$ нечетно, то каждая $M$-морсификация имеет две ветви, направленные в разные стороны. Проведя аналогичные рассуждения, получаем доказательство леммы 3.4. Напомним, что некоторые компоненты мы считаем дважды. □

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим компоненту связности множества вполне правильных $M$-морсификаций с $l+1$ краевой точкой и $n-3$ критическими. Пусть $f$ — некоторая $M$-морсификация из этой компоненты. Выберем последнюю краевую точку $b_{l+1}$ и добавим к ней такую $\delta$-образную функцию, сосредоточенную в этой точке, чтобы новая $M$-морсификация имела критическую точку в $b_{l+1}$ со старым краевым значением (и отнормируем, как в замечании 3.3). Значение во второй соседней критической точке, образованной при прибавлении $\delta$-образной функции, является при этом наибольшим среди всех критических и краевых значений. $M$-морсификация имеет теперь $l$ краевых и $n-1$ критических точек. Таким же образом можно вычитать $\delta$-образную функцию. Следовательно, каждой компоненте множества вполне правильных $M$-морсификаций с $l+1$ краевой и $n-3$ критическими точками мы ставим в соответствие 2 компоненты вполне правильных $M$-морсификаций с $l$ краевыми и $n-1$ критической точками.

Возьмем произвольную компоненту связности множества $M$-морсификаций краевой каустики с $n-1$ критической точкой и $l$ краевыми. Одна из краевых точек — критическая, а в остальных выделенных точках значения различны. Рассмотрим критическую точку, являющуюся краевой. Сдвинем краевую точку вправо или влево на малую величину. Если в критической точке локальный максимум, мы добавим $\delta$-образную функцию в этой точке (и отнормируем), в противном случае вычтем $\delta$-образную функцию. Критическое значение в точке изменится. Оно станет максимальным (минимальным). Для краевой точки возможны два положения в зависимости от того, в какую сторону мы сдвигали краевую точку. Мы получили две вполне правильные $M$-морсификации с $n-1$ критическими точками и $l$ краевыми. Следовательно, каждой компоненте краевой каустики мы поставили в соответствие две компоненты вполне правильных $M$-морсификаций.

Наконец, рассмотрим компоненту вполне правильных $M$-морсификаций с $n-1$ критической точкой и $l$ краевой, причем существует критическое значение, превосходящее все краевые значения. Возьмем функцию из этой компоненты. Пусть $x_i$ — точка с максимальным критическим значением. Найдем ближайшую к ней слева и справа специальные точки (критическую или краевую). Выберем из этих точек одну с большим значением. Проделаем операцию, обратную к прибавлению $\delta$-образной функции, которая «опустит» максимальное критическое значение до уровня соседней точки с большим значением. В результате возможны два варианта. Во-первых, мы можем получить функцию с двойной критической точкой. Заменим двойную точку на краевую $b_{l+1}$. Во втором случае новая функция будет иметь одну критическую краевую точку. Аналогично поступаем в случае минимального критического значения.

Тем самым мы доказали следующую формулу:

$$2K_n^l - \hat{K}_n^l = 2L_n^l + 2K_n^{l+1}.$$

Применим теперь леммы 3.2 и 3.4:

$$2K_n^l - 2lK_n^{l-1} = 2l(n-1)K_n^{l-1} + 2K_{n-2}^{l+1}.$$

Следовательно, $K_{n-2}^{l+1} = K_n^l - nlK_n^{l-1}$. Теорема доказана. $\square$

В заключение этой части мы укажем связь чисел $K_n^l$ с компонентами связности некоторых стратов каустики бифуркационной диаграммы критических точек и значений многочленов степени $2l+n$ (т. е. $A_{2l+n-1}$).

**Следствие 3.5.** Рассмотрим все открытые страты каустики, соответствующие многочленам из $M$-области, $l$ пар критических точек которых совпали. Количество компонент связности таких стратов равно $K_n^l/l!$.

## 4. Следствия теоремы 3.1. Случай малого количества краевых точек

Подсчитаем числа $K_n^l$ для $l\leqslant 5$. В [1] В. И. Арнольдом доказано, что количество компонент связности вполне правильных $M$-морсификаций без границ равно числу Бернулли — Эйлера, то есть $K(A_{n-1})=$ $=K_{n-1}$. Там же найдено $K(B_n)$ для мультикраевых особенностей $B_n$: $K(B_n)=K_{n+1}$. Итак: $K_n^0=K_{n-1}$ и $K_n^1=K_{n+1}$. Простым вычислением выводятся следующие равенства.

**Следствие 4.1.** Верны следующие выражения для чисел $K_n^l$ через числа Бернулли — Эйлера:

$$K_n^2 = K_{n+3}-(n+2)K_{n+1};$$
$$K_n^3 = K_{n+5}-(3n+8)K_{n+3};$$
$$K_n^4 = K_{n+7}-(6n+20)K_{n+5}+3(n+2)(n+4)K_{n+3};$$
$$K_n^5 = K_{n+9}-(10n+40)K_{n+7}+(15n^2+110n+184)K_{n+5};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Экспоненциальной производящей функцией для чисел Бернулли — Эйлера является функция

$$K(t)=\operatorname{tg}(t)+\sec(t).$$

Найдем экспоненциальные производящие функции чисел $B_n^l$ при $l\leqslant 4$. Заметим, что в случае $l=0$ и $l=1$ производящей функцией можно считать $K(t)$, однако в наших обозначениях это будут

$$K_0(t)=\int K(t)\,dt=-\ln(\cos t)+\ln\Bigl(\operatorname{tg}\Bigl(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\Bigr)\Bigr)+C$$

и

$$K_1(t)=K'(t)=\frac{1+K^2}{2}=\frac{1+\sin t}{\cos^2 t}=\frac{1}{1-\sin t}$$

соответственно.

**Следствие 4.2.** Экспоненциальными производящими функциями для $l=2,3,4$ являются соответственно

$$\begin{aligned}
K_2(t) &= K'''(t)-(tK(t))'' = \frac{3\sin t - t\cos t}{(1-\sin t)^2};\\
K_3(t) &= (K''-3tK'+K)''' =\\
&= \frac{3}{(1-\sin t)^3}\big(\sin t(3\sin t+7)-3t\cos t(5+\sin t)\big);\\
K_4(t) &= (K'''-6tK''+(3t^2+4)K'-3tK)^{(4)} =\\
&= \left(\frac{3t^2}{1-\sin t}-\frac{3t\cos t}{(1-\sin t)^2}(3-\sin t)+\frac{3(2-\sin t)}{(1-\sin t)^2}\right)^{(4)}.
\end{aligned}$$

Пусть

$$K(x,y)=\sum\frac{K_n^l}{l!n!}x^l y^n$$

— экспоненциальная производящая функция двух переменных.

**Следствие 4.3.** Функция $K(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$K_x=(1-2x)K_{yy}-xyK_{yyy}.$$

Б. З. Шапиро предложил рассматривать экспоненциальные производящие функции двух переменных $R(x,y)$ и $S(x,y)$ отдельно для $R_n^l=K_{2n}^l$ и для $S_n^l=K_{2n-1}^l$. При этом порядок уравнения понижается.

**Следствие 4.4.** Функции $R(x,y)$ и $S(x,y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
R_x &= (1-2x)R_y-2xyR_{yy},\\
S_x &= (1-2x)S_y-x(2y-1)S_{yy}.
\end{aligned}$$

В завершение этой части опишем геометрическую структуру $B_n^2$ при помощи «картинок» в слоях векторного расслоения

$$\pi\colon (M\text{-}\textit{область})\times\mathbb{R}^2\to M\text{-}\textit{область}.$$

Каждому многочлену $f(x)$ соответствует кососимметрический многочлен от двух переменных вида $f(b_1)=f(b_2)$. Этот многочлен задает двойной краевой страт Максвелла и краевую каустику в слое. Граничная каустика и краевой страт Максвелла в слое задаются вертикальными и горизонтальными прямыми, образующими прямоугольную сетку, в которую «вписана» кривая $f(b_1)=f(b_2)$. Эти кривые довольно легко рисовать. Для примера приведем все схематические рисунки для особенностей $B_3^2$ и $B_4^2$ (см. рис. 1 и 2). Заметим, что кривая

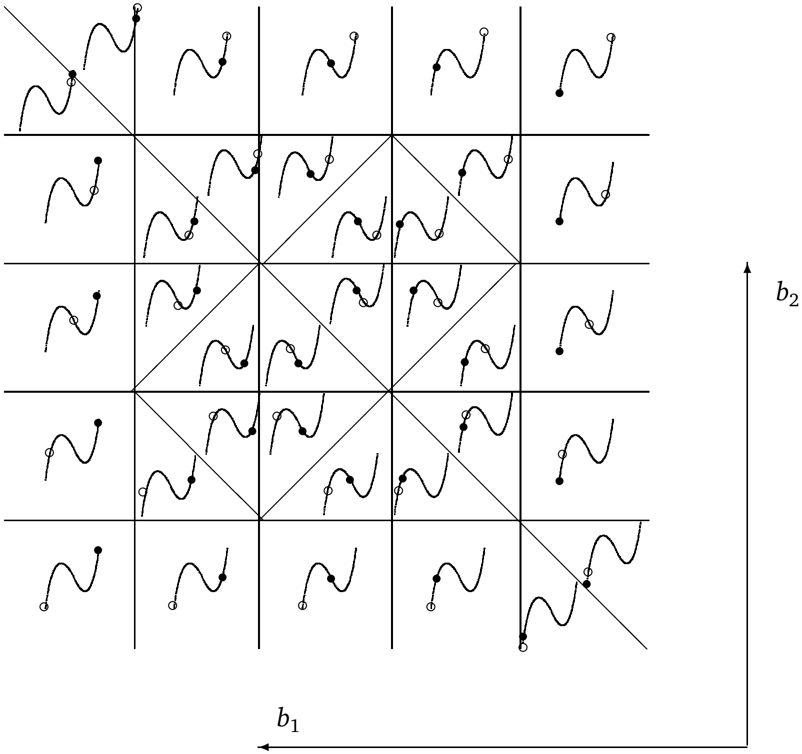



**Рис. 1**. Слой общего положения М-области особенности $B_3^2$

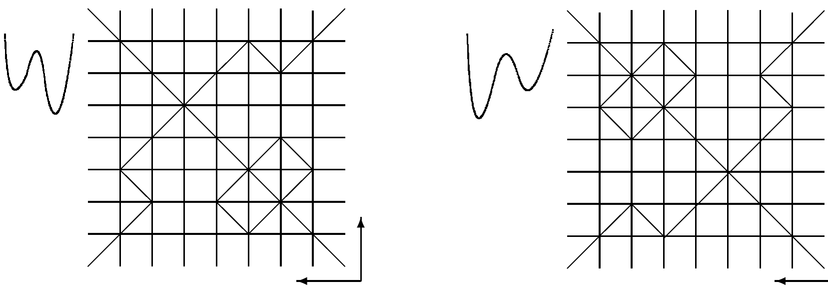


**Рис. 2**. Слой общего положения М-области особенности $B_4^2$

$f(b_1)=f(b_2)$ представляет собой объединение прямой $b_1=b_2$ с некоторой кривой степени $n-1$. В частности в случае $B_3^2$ получается объединение прямой и эллипса (см. рис. 1). В связи с этим возникает естественная проблема *описания всех комбинаторных типов таких рисунков для произвольного* $n$.

## 5. Следствия теоремы 3.1. Связь с числами Бернулли — Эйлера

В этой части мы выведем некоторое выражение для числа $K_n^l$, аналогичное соотношению следствия 4.1. Затем определим $K_n^l$ для отрицательных $n$, по модулю не меньших чем $l$. Через эти числа мы выпишем вытекающие соотношения на числа Бернулли — Эйлера.

**Следствие 5.1.** Выражение для $K_n^l$ будет следующим:

$$K_n^l = K_{n+2l-1} - \Big(\frac{l(l-1)}{2}n + \frac{(l+1)l(l-1)}{3}\Big)K_{n+2l-3} + \\ + l(l-1)(l-2)(l-3)\Big(\frac{1}{8}n^2 + \frac{2l+1}{12}n + \frac{(l+1)(5l-2)}{90}\Big)K_{n+2l-5} + \\ + \sum_{k=4}^{[\frac{l}{2}]+1}\Big(\Big(\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{l!}{(l-2k+2)!}\sum_{d=0}^{k-1}(p_{k,d}(l)n^d)\Big)K_{n+2(l-k)+1}\Big),$$

где $p_{k,d}(x)$ — многочлен степени $k-d-1$ с постоянными коэффициентами, зависящими только от $k$ и $d$.

Доказательство проводится индукцией по $l$.

Явные формулы для коэффициентов многочленов $p_{k,d}(x)$ не известны на данный момент, тем не менее существует рекуррентный способ их вычисления. Приведем формулы многочленов при $d=k-1$, $d=k-2$ и $d=k-3$.

**Следствие 5.2.** Верны следующие тождества:

$$p_{k,k-1}(x) = 1;$$

$$p_{k,k-2}(x) = \frac{(k-1)}{3}(2x+4-k);$$

$$p_{k,k-3}(x) = \frac{(k-1)(k-2)}{90}\big(20x^2+(72-20k)x+(5k^2-39k+64)\big).$$

С помощью формулы следствия 5.1 можно получить соотношения на числа Бернулли — Эйлера. Рассмотрим примеры некоторых из них. Подставив $n=1$ и $n=2$ в формулу следствия 5.1, мы получим тождества приведенной ниже теоремы.

**Теорема 5.3.** *Выполняются следующие соотношения на числа Бернулли — Эйлера:*

$$K_{2l}-l! = K_{2l}-K_1^l = \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1}\Big(\frac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{l!}{(l-2k+2)!}\sum_{d=0}^{k-1} p_{k,d}(l)\Big)K_{2(l-k+1)};$$

$$K_{2l+1}-2^l l! = K_{2l+1}-K_2^l =$$
$$= \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1}\Big(\frac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!}\frac{l!}{(l-2k+2)!}\sum_{d=0}^{k-1}(p_{k,d}(l)2^d)\Big)K_{2(l-k+1)+1}.$$

Воспользуемся результатом следствия 4.1 для получения чисел $K_n^l$ при $n\leqslant 0$.

| $K_n^l$ | $l=1$ | $l=2$ | $l=3$ | $l=4$ | $l=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n=-1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n=-2$ | ? | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $n=-3$ | ? | ? | 2 | 0 | 0 |
| $n=-4$ | ? | ? | ? | 6 | 0 |
| $n=-5$ | ? | ? | ? | ? | 24 |

Можно считать, что $K_0^l$ — это количество компонент связности пространства многочленов степени 0 с $l$ краевыми точками, в которых многочлен принимает разные значения. В этом случае все точки прямой критические и, соответственно, критическое значение совпадает с краевыми. Что обозначают числа для отрицательных $n$, автору не известно.

Заметим, что с некоторого момента в каждой строке стоят нули. Сформулируем это утверждение в следующей лемме.

**Утверждение 5.4.** *Пусть $n\leqslant -1$, тогда $K_n^l=0$ для $l>-n$, а $K_n^{-n}=$ $=(-n-1)!$. $K_0^l=0$ при $l>1$.*

**Доказательство**. Доказательство основано на теореме 3.1. Проведем индукцию по $n$.

$K_0^l = K_2^{l-1}-2(l-1)K_2^{l-2} = (2l-2)!!-(2l-2)(2l-4)!! = 0$ при $l-2\geqslant 0$.

$K_{-1}^l = K_1^{l-1}-(l-1)K_2^{l-2} = (l-1)!-(l-1)(l-2)! = 0$ при $l-2\geqslant 0$.

$K_{-2}^l = K_0^{l-1} = 0$ при $l-1\geqslant 2$.

В общем случае $K_n^l = K_{n+2}^{l-1} - (n+2)(l-1)K_{n+2}^{l-2}$, если $n < -2, l-2 \geqslant$ $\geqslant -2-n$.

$$K_n^{-n} = K_{n+2}^{-n-1} - (n+2)(-n-1)K_{n+2}^{-n-2} = \\ = 0 + (n+2)(n+1)(-n-3)! = (-n-1)!.$$

Утверждение доказано. □

В заключение работы мы выпишем соотношения на числа Бернулли — Эйлера, вытекающие из следствия 5.1 и предложения 5.4.

**Следствие 5.5.** Пусть $n \leqslant 0$, $l > \max(1, -n)$, тогда

$$0 = K_n^l = \\ = K_{n+2l-1} + \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1} \left( \left( \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{l!}{(l-2k+2)!} \sum_{d=0}^{k-1} (p_{k,d}(l)n^d) \right) K_{n+2(l-k)+1} \right).$$

Если $l = -n$, то

$$(l-1)! = K_n^{-n} = \\ = K_{l-1} + \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1} \left( \left( \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{l!}{(l-2k+2)!} \sum_{d=0}^{k-1} (p_{k,d}(l)(-l)^d) \right) K_{l-2k+1} \right).$$

В частности, при $l > 1$

$$0 = K_0^l = K_{n+2l-1} + \sum_{k=2}^{[\frac{l}{2}]+1} \left( \left( \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{l!}{(l-2k+2)!} p_{k,0}(l) \right) K_{2(l-k)+1} \right).$$

## Литература

1. *Arnold V. I.* Bernoulli — Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics // Duke Math. J. 1991. Vol. 63, № 2. P. 537—555.
2. *Arnold V. I.* Springer numbers and morsification spaces // J. Algebraic Geom. 1992. Vol. 1, № 2. P. 197—214.
3. *Карпенков О.* Комбинаторика мультикраевых особенностей серии $B_n^l$ и числа Бернулли — Эйлера // Функц. анализ и его прил. 2002. Т. 36, № 1. С. 78—81.
4. *Knuth D. E.*, *Buckholtz T. J.* Computation of tangent numbers, Euler, and Bernoulli numbers // Math. Comp. 1967. Vol. 21. P. 663—688.
5. *Nielsen N.* Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. Paris: Gauthier-Villars, 1923.

# Несколько замечаний об аффинной площади поверхности

Фёдор Петров

*2005, третье место*

Предлагается новое доказательство неравенства Брунна — Минковского для аффинных длин замкнутых выпуклых кривых на плоскости, не использующее сложения по Бляшке. Также предлагается несколько модификаций аффинной выпуклой площади поверхности выпуклого тела в $\mathbb{R}^d$, предположительно совпадающих с обычной аффинной площадью поверхности.

Пусть $\Gamma$ — гладкая замкнутая выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Определим ее аффинную площадь $as(\Gamma)$ как $\int \kappa^{\frac{1}{d+1}} ds$, где $\kappa$ — гауссова кривизна, а $ds$ — элемент площади поверхности. Аффинная площадь произвольной (не обязательно гладкой) замкнутой выпуклой поверхности $\Gamma$ определяется как верхний предел аффинных площадей замкнутых гладких поверхностей, сходящихся к $\Gamma$ по Хаусдорфу. Известно [8], что это определение корректно в том смысле, что оно согласуется с исходным для гладких поверхностей. В двумерном случае будем говорить об аффинной длине $al(\gamma)$ кривой $\gamma$. Для выпуклого тела $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ будем писать $as(\Phi)$ вместо $as(\partial\Phi)$.

Напомним, что $as(\cdot)$ не меняется при аффинных преобразованиях $\mathbb{R}^d$ с единичным определителем и умножается на $|\lambda|^{\frac{d(d-1)}{d+1}}$ при гомотетиях с коэффициентом $\lambda$.

Имеются разные способы определить аффинную площадь поверхности произвольного выпуклого тела прямо, не через аппроксимацию гладкими. Упомянем два таких подхода.

1. [8] Для выпуклого тела $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ определим его *меру кривизны* $\mu_\Phi$, сосредоточенную на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. Для борелевского множества $U \subset \mathbb{S}^{d-1}$ определим $\mu_\Phi(U)$ как площадь (меру Лебега на $\partial\Phi$) тех $x \in \partial\Phi$, для которых некоторый вектор $u \in U$ является внешней нормалью (одной из внешних нормалей, если их несколько). Тогда аффинная площадь поверхности тела $\Phi$ может быть определена как

$$as(\Phi)^{1+1/d} = C_d \cdot \inf \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \rho^{-1} d\mu_\Phi,$$

где инфимум берется по всем положительным функциям $\rho$ на сфере с фиксированным (например, единичным) средним значением по сфере функции $\rho^{d-1}$. $C_d$ — некоторая явно выражающаяся через размерность $d$ константа. Разные определения аффинной площади поверхности содержат нормирующие множители, зависящие только от размерности, значением которых мы здесь не интересуемся. Можно представлять дело так, что речь идет только об отношении аффинных площадей поверхности двух выпуклых тел, не зависящем от нормировки.

2. [10] Если $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклое тело, определим Ф-шапку как пересечение Ф и некоторого (аффинного) полупространства в $\mathbb{R}^d$. Для $t > 0$ определим плавающее тело $\Phi_t$ как множество точек $x \in \Phi$, не лежащих ни в одной шапке объема меньше, чем $t$. $\Phi_t$ — выпуклое, компактное, непустое при малых $t$ множество. Тогда аффинная площадь поверхности тела Ф равна [10]

$$C'_d \cdot \lim_{t\to 0} \frac{V(K) - V(K_t)}{t^{\frac{2}{d+1}}}$$

для некоторой константы $C'_d$.

Аффинная площадь поверхности — важный инвариант выпуклого тела. В частности, она появляется в геометрии чисел по следующим причинам. Количество целых точек в $n\Phi$, или $n\,\partial\Phi$, или в малой окрестности $n\,\partial\Phi$ выпуклого тела $\Phi \subset \mathbb{R}^d$ и большого натурального $n$ есть величина $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$-инвариантная, т. е. «почти» $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$-инвариантная. Более того, для $n\,\partial\Phi$ эта величина является «аддитивной» функцией поверхности тела в естественном смысле. Назовем функцию $\varphi$, заданную на множестве выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$, аддитивной, если для двух выпуклых компактов $K_1$, $K_2$, объединение $K_1 \cup K_2$ которых выпукло, имеет место равенство

$$\varphi(K_1) + \varphi(K_2) = \varphi(K_1 \cap K_2) + \varphi(K_1 \cup K_2).$$

Фундаментальная теорема Людвиг и Райтцнера [9] утверждает, что полуаддитивная сверху (по Хаусдорфу) аддитивная в указанном смысле функция выпуклых компактов есть линейная комбинация константы, функции объема и аффинной площади поверхности.

Это подсказывает, что ответ в асимптотических задачах такого рода должен выражаться через аффинную площадь поверхности.

Связь аффинной площади поверхности и геометрии чисел изучалась в [1, 2, 4, 6]. В [1, 4, 6] доказано, что для ограниченной выпуклой плоской области $\Omega$ предельная форма выпуклых многоугольников с вершинами в множестве $\frac{1}{n}\mathbb{Z}^2 \cap \Omega$ есть единственная выпуклая кривая внутри $\Omega$, имеющая максимально возможную аффинную длину. В частности, если $\Omega$ — многоугольная область, то максимизирующая кривая состоит из кусков парабол, вписанных в углы многоугольника.

При попытке перенести этот результат в старшую размерность первая возникающая проблема — выяснить, единственна ли поверхность внутри данной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с максимально возможной аффинной площадью поверхности. На плоскости этот результат доказан Барани [4] с использованием неравенства типа Брунна — Минковского для аффинных периметров плоских выпуклых компактов. Оказывается, если $K_1$, $K_2$ — два плоских выпуклых компакта с равным аффинным периметром $l$, то их полусумма по Минковскому $(K_1+K_2)/2$ имеет аффинный периметр хотя бы $l$. Поскольку $(K_1+K_2)/2$ лежит в выпуклой оболочке $K_1$ и $K_2$, это обстоятельство можно использовать для доказательства единственности в задаче о максимальной аффинной длине выпуклой кривой внутри $\Omega$. В старшей размерности то же верно для полусуммы по Бляшке (см. определение ниже) вместо полусуммы по Минковскому. В связи с чем возникает следующий вопрос: *можно ли расположить полусумму по Бляшке двух выпуклых тел в их выпуклой оболочке*? Вполне удовлетворительным было бы расположить не полусумму по Бляшке, а какое-то тело, чья мера кривизны не меньше, чем у полусуммы по Бляшке.

Напомним, что сумма по Бляшке двух выпуклых тел $\Phi_1$, $\Phi_2$ есть такое выпуклое тело $\Phi_3 = \Phi_1 +_B \Phi_2$, что $\mu_{\Phi_3} = \mu_{\Phi_2} + \mu_{\Phi_1}$ ($\mu$ обозначает меру кривизны).

Из определения 1 аффинной площади поверхности сразу следует неравенство

$$as(\Phi_1 +_B \Phi_2)^{1+1/d} \geqslant as(\Phi_1)^{1+1/d} + as(\Phi_2)^{1+1/d}.$$

Достаточно заметить, что $\inf(F+G) \geqslant \inf(F) + \inf(G)$ для любых функций $F$, $G$, определенных на одном и том же множестве.

На плоскости сложение по Бляшке совпадает со сложением по Минковскому. Так что на плоскости выполняется

**Теорема.** *Пусть $\Phi_1$, $\Phi_2$ — ограниченные выпуклые множества на плоскости, $\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2$ — их сумма по Минковскому. Тогда для аффинных периметров выполняется неравенство*

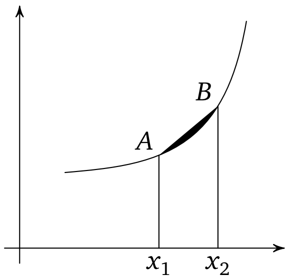
$$ap(\Phi_3)^{3/2} \geqslant ap(\Phi_1)^{3/2} + ap(\Phi_2)^{3/2}. \tag{1}$$

Отметим, что если $\Phi_1$ и $\Phi_2$ гомотетичны (с положительным коэффициентом), то в (1) имеет место равенство. Однако есть и другие случаи равенства: например, если $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — многоугольники, то обе части (1) равны нулю.

Мы предложим другое доказательство теоремы. Оно использует неравенство Брунна — Минковского в размерности 2 (в отличие от доказательства через сложение по Бляшке), и причины, по которым не удается перенести его в старшую размерность, имеют не геометрическую (различие между сложением по Бляшке и Минковскому), но аналитическую природу: показатель $p=d(d-1)/(d+1)$ оказывается больше 1 при $d>2$, и неравенство треугольника в $L_p$ меняет знак по сравнению со случаем $p=2$.

Перед тем как приступить к доказательству теоремы, сформулируем и докажем пару элементарных лемм.

**Лемма 1.** *Пусть $\gamma$ — гладкая ограниченная выпуклая кривая на плоскости, $A$ и $B$ — достаточно близкие точки на $\gamma$. Пусть $\kappa(\cdot)$ — кривизна кривой $\gamma$, $S_{AB}$ — площадь (малого) сегмента, отсекаемого от $\gamma$ хордой $AB$. Тогда разность между величинами $\int_A^B \kappa^{1/3} ds$ и $(12S_{AB})^{1/3}$ есть $o(AB)$.*




**Доказательство леммы 1.** Не умаляя общности, $\gamma$ является графиком гладкой выпуклой функции $y=f(x)$ в некоторой декартовой системе координат $(x,y)$. Тогда

$$\kappa^{1/3} ds = (f'')^{1/3}\, dx.$$

Пусть $A=(x_1, f(x_1))$, $B=(x_2, f(x_2))$, $x_1<x_2$. Имеем

$$\int_A^B \kappa^{1/3} ds = \int_{x_1}^{x_2} f''(x)^{1/3}\, dx = f''(\widetilde{x})^{1/3}(x_2-x_1)$$

для некоторого $\widetilde{x}\in[x_1, x_2]$. Определим теперь для $x\in(x_1, x_2)$ функцию $\varphi_x(t)$ как квадратный трехчлен $p_x t^2+q_x t+r_x$ такой, что $\varphi_x(z)=f(z)$ для $z\in\{x_1, x_2, x\}$. Отметим, что функция $f(t)-\varphi_x(t)$ имеет (как минимум) три корня на отрезке $[x_1, x_2]$, так что по теореме Ролля ее вторая производная $f''(t)-2p_x$ обращается в 0 в какой-то точке отрезка. Значит, $m\leqslant 2p_x\leqslant M$ для всех $x\in(x_1, x_2)$, где $m=\min_{[x_1,x_2]} f''$, $M=\max_{[x_1,x_2]} f''$. Рассмотрим функции $\check{\varphi}$ и $\hat{\varphi}$, определенные как квадратные трехчлены со старшими коэффициентами $m/2$ и $M/2$

соответственно, графики которых проходят через точки $A$ и $B$. Заметим, что для всякого $x \in (x_1, x_2)$ график многочлена $\varphi_x$ на отрезке $[x_1, x_2]$ лежит между графиками многочленов $\check{\varphi}$ и $\hat{\varphi}$. Так что и точка $(x, \varphi_x(x)) = (x, f(x))$ лежит между этими графиками. Таким образом, сегмент, отсекаемый от кривой $\gamma$ хордой $AB$, лежит между сегментами парабол $y = \check{\varphi}(x)$ и $y = \hat{\varphi}(x)$. Вычисляя площадь сегмента параболы $\check{\varphi}$, находим, что она равна $\frac{1}{12}m(x_2 - x_1)^3$; аналогично для $\hat{\varphi}$. Осталось заметить, что величины $m$, $M$ и $f''(\widetilde{x})$ достаточно близки, если $A$ и $B$ достаточно близки. □

**Лемма 2** (обратное неравенство треугольника). *Для $p > 1$ и неотрицательных чисел $x_i$, $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выполняется неравенство*

$$\left(\sum (x_i + y_i)^{1/p}\right)^p \geqslant \left(\sum x_i^{1/p}\right)^p + \left(\sum y_i^{1/p}\right)^p. \tag{2}$$

**Доказательство леммы 2.** В силу однородности можно считать, что $\sum x_i^{1/p} = 1$. Положим $\alpha_i = x_i^{1/p}$, $t_i = (y_i/x_i)^{1/p}$. Заметим, что функция $f(t) = (1 + t^p)^{1/p}$ выпукла вниз при $t \geqslant 0$. Неравенство (2) равносильно неравенству Йенсена

$$\sum \alpha_i f(t_i) \geqslant f\left(\sum \alpha_i t_i\right)$$

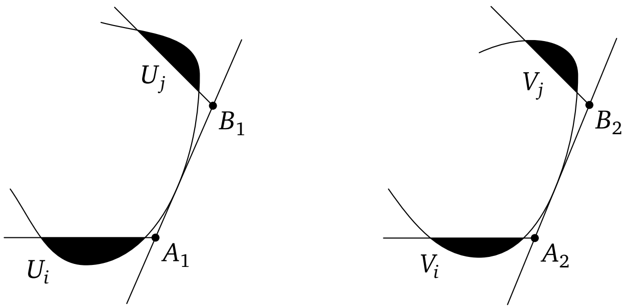
для функции $f$. □

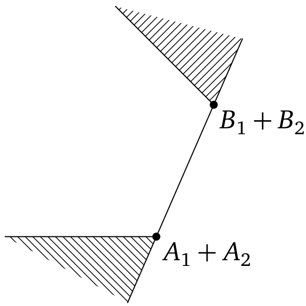
**Доказательство теоремы.** Рассмотрим сначала случай, когда $\Phi_1$ и $\Phi_2$ имеют гладкую строго выпуклую границу.

Рассмотрим достаточно большое четное натуральное $n$ и зафиксируем правильный $n$-угольник $P_n$. Проведем к каждой из фигур $\Phi_1$, $\Phi_2$ $n$ касательных, параллельных биссектрисам углов многоугольника $P_n$.

Пусть две соседние касательные касаются фигуры $\Phi_1$ в точках $A$ и $B$ и пересекаются в точке $C$, $CB \leqslant CA$. Проведем через точку $B$ хорду $BB_1$ кривой $\gamma$, перпендикулярную биссектрисе угла $ACB$ (и параллельную стороне $P_n$). Поскольку близкие касательные к гладкой кривой составляют почти равные углы с хордой между точками касания, точки $A$ и $B_1$ будут близки. Аналогично проведем по $n$ хорд в каждой из фигур. Пусть эти хорды отсекают сегменты $U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в фигуре $\Phi_1$ и $V_i$ — в фигуре $\Phi_2$.

Рассмотрим два соответственных сегмента $U_i$ и $V_i$, пусть они отсекаются прямыми $l_i$ и $k_i$ соответственно. Обозначим за $W_i$ сегмент, отсекаемый от $\Phi_3$ прямой $l_i + k_i$. Важным обстоятельством является то, что сегменты $W_i$ и $W_j$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек. Докажем это. Достаточно рассмотреть случай $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $j - i < n/10$ (иначе сегменты $W_i$ и $W_j$ просто «далеко» друг от друга). Рассмотрим параллельные касательные к фигурам $\Phi_1$ и $\Phi_2$, касающиеся их между сегментами $U_i$ и $U_j$ (соответственно, $V_i$ и $V_j$). Тогда $W_i$ и $W_j$ лежат в непересекающихся углах, закрашенных на рисунке. Также понятно, что $U_i + V_i \subset W_i$.




Обозначая площади сегментов $U_i$, $V_i$, $W_i$ буквами $u_i$, $v_i$, $w_i$ соответственно, имеем в силу неравенства Брунна — Минковского

$$w_i \geqslant \left(\sqrt{u_i} + \sqrt{v_i}\right)^2.$$

Отсюда, полагая $u_i^{1/3} = x_i$, $v_i^{1/3} = y_i$, $p = 3/2$ и применяя лемму 2, получаем, что

$$\left(\sum w_i^{1/3}\right)^{3/2} \geqslant \left(\sum u_i^{1/3}\right)^{3/2} + \left(\sum v_i^{1/3}\right)^{3/2}.$$

Правая часть стремится при возрастающем $n$ к величине

$$12^{-1/2}(ap(\Phi_1)^{3/2} + ap(\Phi_2)^{3/2}).$$

Нижний предел левой части не больше, чем $12^{-1/2} ap(\Phi_3)$.

Таким образом, (1) установлено для гладких строго выпуклых фигур. Общий случай получается с помощью предельного перехода (следует приблизить фигуры $\Phi_1$, $\Phi_2$ гладкими строго выпуклыми так, чтобы аппроксимировались их аффинные периметры. Тогда суммы аппроксимирующих фигур будут стремиться к $\Phi_3$, так что нижний предел их аффинных периметров будет не меньше, чем $ap(\Phi_3)$. $\square$

## Другой подход к аффинной площади поверхности

Обсудим перспективу обобщения этих аргументов на случай старшей размерности. Во-первых, заметим, что мы использовали следующее определение аффинной площади поверхности:

3. Для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^d$ определим ее модифицированную аффинную площадь поверхности

$$as'(K) = \limsup \sum V_i^{\frac{d-1}{d+1}},$$

где нижний предел берется по всем непересекающимся $K$-шапкам объемов $V_i$, максимум диаметров которых стремится к нулю.

Естественно ввести также другое «двойственное» определение

$$as''(K) = \liminf \sum V_i^{\frac{d-1}{d+1}},$$

где нижний предел берется по покрытиям $\partial K$ шапками объемов $V_i$, максимум из которых стремится к нулю.

С помощью инфинитезимальных разложений (формулы Тейлора) и теорем об исчерпывании покрытиями типа Витали можно установить, что $as'$ и $as''$ пропорциональны $as$ для гладких поверхностей с положительной гауссовой кривизной. Д. Хаг сообщил мне, что для покрытия шапками это сделано в его диссертации.

Вероятно, что это так для всех выпуклых тел, но нам удалось доказать лишь следующее

**Предложение.** *Существуют положительные константы $C_1(d)$, $C_2(d)$, $C_3(d)$ такие, что для любого выпуклого тела $\Phi \subset \mathbb{R}^d$*

$$C_1(d) \cdot as'(\Phi) \leqslant as(\Phi), \quad C_2(d) \cdot as''(\Phi) \leqslant as(\Phi) \leqslant C_3(d) \cdot as''(\Phi).$$

**Доказательство**. Будем писать $F \leqslant_d G$ для двух величин $F$, $G$, если $F \leqslant C(d) \cdot G$ для некоторой константы $C(d)$, зависящей только от $d$.

Мы пользуемся техникой покрытия шапками [5] и неравенством для объемов непересекающихся шапок, по существу содержащемся в работе Эндрюса [3] (явное доказательство, использующее аффинные площади, см. в [2]).

Если $H_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — непересекающиеся $K$-шапки, то для $V_i = V(H_i)$ выполняется неравенство

$$\sum V_i^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d V^{\frac{d-1}{d+1}}. \tag{3}$$

Далее, выполняется следующая полезная лемма о покрытии шапками [5]:

*Для достаточно малого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0(d)$ существует такое покрытие границы $\partial K$ выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ шапками $H_1, H_2, \ldots, H_n$, что объем каждой шапки $V(H_i)$ не превосходит $\varepsilon \cdot V(K)$ и существуют попарно непересекающиеся подмножества $C_i \subset H_i$ такие, что $V(C_i) \geqslant_d \varepsilon \cdot V(K)$.*

Оценка $as \leqslant_d as''$ следует немедленно из хорошо известного неравенства

$$as(K) \leqslant_d V^{\frac{d-1}{d+1}}(K),$$

где $V(K)$ — это $K$. Применим это неравенство к каждой шапке и просуммируем.

Для оценки $as'' \leqslant_d as$ используем лемму о покрытиях шапками. Пусть $V(K) = 1$. Во-первых, рассмотрим случай $as(K) > 0$. Выберем $\varepsilon < \varepsilon_0(d)$ так, что $V(K) - V(K_\varepsilon) < 2as(K)\varepsilon^{\frac{2}{d+1}}$. Затем выберем покрытие, удовлетворяющее условию леммы. Используя определение $as$ через плавающее тело, получаем

$$n\varepsilon \leqslant_d V(K) - V(K_\varepsilon) \leqslant_d as(K)\varepsilon^{\frac{2}{d+1}},$$

так что $\sum V(H_i)^{\frac{d-1}{d+1}} \leqslant_d as''$. Осталось перейти к пределу.

Наконец, докажем, что $as' \leqslant_d as$. Опять используем лемму. Выберем покрытие $\partial K$ шапками, как в лемме. Для непересекающихся достаточно малых шапок заметим, что по лемме Лебега каждая из них содержится целиком в некоторой шапке $H_i$. Тогда применим (3) для каждой шапки $H_i$ и содержащихся в ней шапок и просуммируем. □

Заметим также, что в определении $as'$ верхний предел брался по $\max \operatorname{diam} \to 0$, а в определении $as''$ нижний предел брался по $\max \operatorname{vol} \to 0$. Мотивируется это только тем, что при таких определениях удалось доказать приведенные неравенства. Скорее всего, такие тонкости не влияют на значения верхнего-нижнего пределов. Также отметим, что шапки можно заменять на произвольные выпуклые тела в случае $as''$ и на строго непересекающиеся выпуклые тела (такие что каждое не пересекается с выпуклой оболочкой остальных) в случае $as'$. Естественно предположить, что такие пределы пропорциональны $as$, но, вероятно, с другими константами.

Я признателен Эрвину Лютваку, Монике Людвиг и Даниэлю Хагу за многочисленные полезные дискуссии.

## Литература


1. *Вершик А. М.* Предельная форма выпуклых целочисленных многоугольников и близкие вопросы // Функц. анал. и его прил. Т. 28. 1994. С. 16—25.
2. *Петров Ф. В.* Оценки числа рациональных точек на выпуклых кривых и поверхностях // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2007. Т. 344. С. 174—189.
3. *Andrews G. E.* A lower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. P. 270—279.
4. *Barany I.* Affine perimeter and limit shape // J. Reine Angew. Math. 1997. Vol. 484. P. 71—84.
5. *Barany I.* The technique of *M*-regions and cap coverings: a survey. III International Conference // Stochastic Geometry, Convex Bodies and Empirical Measures. Part II. (Mazara del Vallo, 1999). 2000.
6. *Barany I.*, *Prodromou M.* On maximal convex lattice polygons inscribed in a plane convex set // Israel J. Math. 2006. Vol. 154. P. 337—360.
7. *Lutwak E.* Mixed affine surface area // J. Math. Anal. Appl. 1987. Vol. 125. P. 351—360.
8. *Lutwak E.* Extended affine surface area // Adv. Math. 1991. Vol. 85, № 1. P. 39—68.
9. *Ludwig M.*, *Reitzner M.* A characterization of affine surface area // Adv. Math. 1999. Vol. 147. P. 138—172.
10. *Werner E.* A general geometric construction for affine surface area. (English summary) // Studia Math. 1999. Vol. 132, № 3. P. 227—238.

# Квантованные гамильтоновы действия редуктивных групп и их приложения

Иван Лосев

*2006, первое место*

Доклад посвящен квантованным гамильтоновым действиям редуктивных групп на аффинных симплектических многообразиях, проквантованных по Федосову. Он также описывает приложения таких действий к исследованию $W$-алгебр конечного типа и проблеме подъема центральных инвариантов. Обсуждаемые результаты получены в препринтах автора [15, 16].

## 1. Введение

Основным полем в работе является алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$ характеристики 0.

Пусть $G$ — редуктивная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $X$ — гладкое аффинное алгебраическое многообразие, снабженное (регулярной, т. е. алгебраической) симплектической формой $\omega$. Предположим, что задано гамильтоново действие $G:X$ и $*$-произведение

$$*\colon \mathbb{K}[X]\otimes\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[X][[\hbar]],\quad f*g=\sum_{i=0}^{\infty}D_i(f,g)\hbar^i,$$

где все $D_i$ $G$-эквивариантны (здесь «постоянная Планка» $\hbar$ — формальная переменная; все определения, касающиеся гамильтоновых действий и $*$-произведений, будут даны в следующем разделе). Предположим, что гамильтоново действие может быть проквантовано. Известно (см., например, [1]), что произведение $*$ эквивариантно эквивалентно $*$-произведению, полученному конструкцией Федосова, [5, 6], поэтому достаточно ограничиться рассмотрением $*$-произведений последнего вида.

В этой работе мы рассмотрим два применения квантованных гамильтоновых действий. Во-первых, мы применим их к исследованию некоторых конечно порожденных алгебр, связанных с нильпотентными элементами в $\mathfrak{g}$, так называемых *$W$-алгебр конечного типа*. Этому посвящен раздел 3. Во-вторых, мы рассмотрим проблему подъема центральных элементов пуассоновой алгебры $\mathbb{K}[X]^G$ до центральных элементов ассоциативной алгебры $\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G$, раздел 4. Раздел 2 содержит все необходимые определения, касающиеся $*$-произведений и классических, и квантованных гамильтоновых действий. Наконец, в разделе 5 мы формулируем одну гипотезу.

**Замечание 1.1.** Мы рассматриваем квантованные гамильтоновы действия обычных, кокоммутативных, алгебраических групп. Можно, однако, рассматривать квантованные гамильтоновы действия квантовых групп (см. [19]).

## 2. Основные понятия

В этом разделе $G$ — редуктивная алгебраическая группа, $X$ — аффинное симплектическое алгебраическое многообразие, $\omega$ — симплектическая форма на $X$. Через $\mathbb{K}[X]$ мы обозначаем алгебру регулярных функций на $X$.

Пусть $f$ — регулярная функция на $X$. *Косой градиент* $v(f)$ функции $f$ — это, по определению, векторное поле на $X$, определенное равенством

$$\omega_x(v(f), \eta) = \langle d_x f,\ \eta\rangle,\ x \in U,\ \eta \in T_x X.$$

Для $f, g \in \mathbb{K}[X]$ мы определяем их *скобку Пуассона* $\{f, g\} \in \mathbb{K}[X]$ равенством

$$\{f, g\} = \omega(v(f), v(g)).$$

Понятно, что $\{f, g\} = L_{v(f)} g$, где $L$ обозначает производную Ли.

Пусть теперь группа $G$ действует на $X$ симплектоморфизмами, т. е. сохраняя форму $\omega$. Элементу $\xi \in \mathfrak{g}$ ставится в соответствие векторное поле скоростей $\xi_*$. Его можно определить, к примеру, так. Алгебра $\mathbb{K}[X]$ является суммой конечномерных $G$-модулей, и, значит, обладает естественной структурой $\mathfrak{g}$-модуля, причем $\mathfrak{g}$ действует на $\mathbb{K}[X]$ дифференцированиями. Векторное поле $\xi_*$ есть образ $\xi$ при этом действии.

Предположим, что задано линейное отображение $\mathfrak{g} \to \mathbb{K}[X]$, $\xi \mapsto H_\xi$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$H_{\mathrm{Ad}(g)\xi} = g.H_\xi \quad \text{для всех } g \in G, \xi \in \mathfrak{g}, \tag{H1}$$

$$v(H_\xi) = \xi_*. \tag{H2}$$

**Определение 2.1.** Действие $G : X$, снабженное линейным отображением $\xi \mapsto H_\xi$, удовлетворяющим (H1), (H2), называется *гамильтоновым*, $X$ в этом случае называется гамильтоновым $G$-многообразием.

**Замечание 2.2.** Очень часто определение гамильтонова действия дается немного по-другому. Именно, для связной группы $G$ условие (H1) заменяется на условие $\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi,\eta]}$ для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. Однако эти два условия эквивалентны, если выполнено (H2).

Для гамильтонова действия $G:X$ мы определяем морфизм

$$\mu_{G,X}\colon X\to\mathfrak{g}^*,$$

называемый *отображением моментов* гамильтонова $G$-многообразия $X$, формулой

$$\langle\mu_{G,X}(x),\xi\rangle=H_\xi(x),\ \ \xi\in\mathfrak{g},\ \ x\in U.$$

Условия (H1), (H2) эквивалентны, соответственно, следующим условиям:

$$\mu_{G,X}\ \text{является } G\text{-эквивариантным морфизмом,}\tag{M1}$$
$$\langle d_x\mu_{G,X}(v),\xi\rangle=\omega_x(\xi_x,v),\ \text{для всех } x\in X, v\in T_xX, \xi\in\mathfrak{g}.\tag{M2}$$

Здесь $\xi_x$ обозначает вектор $\xi_*$ в точке $x$.

Вот важный пример гамильтонова действия.

**Пример 2.3.** *Пусть $X_0$ — гладкое аффинное $G$-многообразие. Пусть $X:=T^*X_0$ — кокасательное расслоение многообразия $X_0$ и $\pi\colon X\twoheadrightarrow X_0$ — каноническая проекция. Введем каноническую 1-форму $\alpha$ на $X$ следующим образом: в точке $(x_0,\beta)\in X, x_0\in X_0, \beta\in T^*_{x_0}X_0$, спаривание $\alpha$ с касательным вектором $v$ равно $\langle\beta,\pi_*(v)\rangle$. Положим $\omega=-d\alpha$, $H_\xi=\langle\alpha,\xi_*\rangle$, для $\xi\in\mathfrak{g}$. Тогда $\omega$ является $G$-инвариантной симплектической формой на $X$, и отображение $\xi\mapsto H_\xi$ наделяет $X$ структурой гамильтонова $G$-многообразия.*

Перейдем теперь к определению $*$-произведений.

Пусть $A$ — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей, снабженная скобкой Пуассона, т. е. кососимметрическим отображением $A\otimes A\to A$, удовлетворяющим тождествам Лейбница

$$\{ab,c\}=\{a,c\}b+\{b,c\}a$$

и Якоби

$$\{a,\{b,c\}\}+\{b,\{c,a\}\}+\{c,\{a,b\}\}=0.$$

К примеру, можем взять $\mathbb{K}[X]$ в качестве $A$.

**Определение 2.4.** Билинейное отображение $*\colon A\otimes A\to A[[\hbar]]$ называется $*$-*произведением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$(f*g)*h=f*(g*h),\ f*1=1*f=f \ \text{для всех } f,g,h\in A,\tag{*1}$$

$$f*g-fg\in\hbar A[[\hbar]],\ f*g-g*f-\hbar\{f,g\}\in\hbar^2A[[\hbar]]\ \text{для всех } f,g\in A.\tag{*2}$$

Из (*1) следует, что $*$ единственным образом продолжается до ассоциативного $\mathbb{K}[[\hbar]]$-линейного непрерывного в $\hbar$-адической топологии произведения на $A[[\hbar]]$, которое мы также будем обозначать через $*$. Для $f, g \in A$ можем записать

$$f * g = \sum_{i=0}^{\infty} D_i(f, g)\hbar^i, \quad D_i \colon A \otimes A \to A.$$

Условие (*2) эквивалентно равенствам

$$D_0(f, g) = fg, \quad D_1(f, g) - D_1(g, f) = \{f, g\}.$$

Если все $D_i$ являются бидифференциальными операторами, то $*$-произведение называется *дифференциальным*.

Когда мы рассматриваем $A[[\hbar]]$ как алгебру с произведением $*$, мы называем ее *квантовой алгеброй*.

Пусть теперь $G$ действует на $A$ автоморфизмами, сохраняющими скобку Пуассона. Мы говорим, что $*$ $G$-инвариантно, если все операторы $D_i$ $G$-эквивариантны.

Введем теперь определение эквивалентных $*$-произведений.

**Определение 2.5.** Пусть $*, *'$ — $*$-произведения на $A$. Они называются *эквивалентными*, если существуют линейные отображения $T_i \colon A \to A$, $i \in \mathbb{N}$, для которых отображение

$$T = id + \sum_{i=1}^{\infty} T_i\hbar^i \colon A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$$

удовлетворяет равенству

$$f *' g = T(T^{-1}(f) * T^{-1}(g)) \quad \text{для всех } f, g \in A.$$

Такое отображение $T$ называется эквивалентностью между $*, *'$.

**Замечание 2.6.** Предположим теперь, что на алгебре $A$ задана градуировка $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$, а скобка Пуассона однородна степени $-k$, $k \in \mathbb{N}$. В этом случае удобно модифицировать определение $*$-произведения. Именно, под *однородным $*$-произведением степени $k$* мы понимаем отображение $* \colon A \otimes A \to A[[\hbar]]$, которое удовлетворяет (*1) и такое, что

$$f * g = \sum_{i=0}^{\infty} D_i(f, g)\hbar^{ki},$$

где $D_i$ имеет степень $-ki$, и

$$D_0(f, g) = fg, D_1(f, g) - D_1(g, f) = \{f, g\} \quad \text{для } f, g \in A.$$

Отметим, что одномерный тор $\mathbb{K}^\times$ действует на $A[[\hbar]]$ автоморфизмами квантовой алгебры:

$$t.\sum_{i,j} a_{ij}\hbar^j = \sum_{i,j} t^{i+j} a_{ij}\hbar^j, \quad a_{ij} \in A_i.$$

Определение инвариантных $*$-произведений обобщается со случая обычных $*$-произведений. В определении эквивалентности надо требовать, чтобы оператор $T_i$ были однородным степени $-i$ и $T_i=0$, как только $i$ не кратно $k$.

Рассмотрим теперь подход к построению $*$-произведений, принадлежащий Федосову [5,6]. Несмотря на то что Федосов работал с вещественными $C^\infty$-многообразиями, его конструкция проходит также и в алгебраической ситуации. Пусть $X,\omega$ таковы, как выше.

Следуя Федосову, для того чтобы построить $*$-произведение на $\mathbb{K}[X]$, мы должны фиксировать симплектическую связность на $X$.

**Определение 2.7.** Симплектическая связность на $X$ — это ковариантная производная

$$\nabla\colon TX \to TX\otimes\Omega^1(X)$$

без кручения, для которой $\nabla\omega=0$.

Следующее предложение достаточно стандартно (см. [15, Proposition 2.2.2]).

**Утверждение 2.8.** *Пусть $G$ действует на $X$ симплектоморфизмами, а $\mathbb{K}^\times$ действует на $X$ $G$-эквивариантными автоморфизмами, так что $t.\omega=t^k\omega$ для некоторого $k\in\mathbb{Z}$. Тогда найдется $G\times\mathbb{K}^\times$-инвариантная симплектическая связность $\nabla$ на $X$.*

Федосов построил дифференциальное $*$-произведение на $\mathbb{K}[X]$ по симплектической связности $\nabla$ (см. [6, Section 5.2]). Отметим, что все промежуточные объекты в конструкции Федосова получаются из регулярных объектов (таких как $\omega,\nabla$ или тензор кривизны связности $\nabla$) рекурсивной процедурой, и потому также регулярны. Если $G$ действуют на $X$ симплектоморфизмами и $\nabla$ выбрана инвариантной, то $*$ также оказывается $G$-инвариантным. Если же $\mathbb{K}^\times$ действует на $X$, как указано в предложении 2.8, то конструкция Федосова дает однородное $*$-произведение степени $k$.

**Замечание 2.9.** На самом деле имеется более общий вариант конструкции Федосова, также приведенный в [6, раздел 5.3]. Помимо симплектической связности, он также использует элемент из $H^2_{DR}(X)[[\hbar]]$, называемый *характеристическим классом* $*$-произведения. Кроме того, $*$-произведения, построенные по двум различным симплектическим связностям, эквивалентны, причем эквивалентность может быть выбрана дифференциальной (все $T_i$ — дифференциальные операторы), а также $G$ или $\mathbb{K}^\times$-эквивариантной, при условии, что обе связности $G$ или $\mathbb{K}^\times$-эквивариантны. Эти утверждения также следуют из результатов Федосова, [6, раздел 5.5].

**Пример 2.10.** *Пусть $X = V$ — конечномерное симплектическое векторное пространство и $P$ — его бивектор Пуассона. $*$-произведение Мойала — Вейля на $\mathbb{K}[V]$ определяется посредством*

$$f * g = \exp\left(\frac{\hbar^2}{2}P\right) f(x) \otimes g(y)\Big|_{x=y}.$$

*Здесь $P$ рассматривается как элемент из $V^* \otimes V^*$. Последнее пространство действует на $\mathbb{K}[V] \otimes \mathbb{K}[V]$ сверткой. Это $*$-произведение получается применением конструкции Федосова к тривиальной связности $\nabla$. $*$-произведение Мойала — Вейля инвариантно относительно $\mathrm{Sp}(V)$ и является однородным степени 2 относительно действия группы $\mathbb{K}^\times$, заданного посредством $t.v = t^{-1}v$.*

**Пример 2.11.** *Пусть $X_0$ — гладкое аффинное $G$-многообразие и $X$ — его кокасательное расслоение. Группа $\mathbb{K}^\times$ действует на $X$ следующим образом: элемент $t$ действует послойным умножением на $t^{-1}$. Выберем $G \times \mathbb{K}^\times$-инвариантную симплектическую связность на $X$ и построим по ней $*$-произведение.*

*Квантовая алгебра $\mathbb{K}[X][[\hbar]]$ допускает интересную интерпретацию. Рассмотрим алгебру $\mathscr{D}(X_0)$ линейных дифференциальных операторов на $X_0$. Эта алгебра имеет естественную возрастающую фильтрацию $\mathrm{F}_i\,\mathscr{D}(X_0)$ по порядку дифференциального оператора. Наличие фильтрации дает нам возможность построить алгебру Рисса*

$$\mathscr{D}_{\hbar}(X_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar^i\, \mathrm{F}_i\, \mathscr{D}(X_0) \subset \mathscr{D}(X_0)[\hbar].$$

*На этой алгебре естественным образом действует группа $G$, а также одномерный тор $\mathbb{K}^\times$: элемент $t \in \mathbb{K}^\times$ действует на $\hbar^i\,\mathrm{F}_i\,\mathscr{D}(X_0)$ умножением на $t^i$. Кроме того, понятно, что алгебра $\mathscr{D}_{\hbar}(X_0)/(\hbar - 1)$ естественным образом отождествляется с $\mathscr{D}(X_0)$, а алгебра $\mathscr{D}_{\hbar}(X_0)/(\hbar)$ — с $\mathbb{K}[X]$.*

*Определим пополненную алгебру Рисса $\mathscr{D}^{\wedge}_{\hbar}(X_0)$ как пополнение $\mathscr{D}_{\hbar}(X_0)$ относительно $\hbar$-адической топологии, т. е.*

$$D^{\wedge}_{\hbar}(X_0) := \varprojlim \mathscr{D}_{\hbar}(X_0)/(\hbar^k).$$

*Оказывается, существует $G \times \mathbb{K}^\times$-эквивариантный изоморфизм топологических $\mathbb{K}[[\hbar]]$-алгебр $\mathbb{K}[X][[\hbar]] \to \mathscr{D}^{\wedge}_{\hbar}(X_0)$*[1].

[1] Добавлено при корректуре: указанное утверждение, строго говоря, неверно. Для получения алгебры $\mathscr{D}_{\hbar}(X_0)$ надо использовать более общий вариант конструкции Федосова, см. замечание 2.9, с характеристическим классом, который не обязан быть тривиальным. Впрочем, в случае когда $X_0 = G$, см. ниже, характеристический класс равен 0.

*Рассмотрим интересный частный случай предыдущей ситуации. В качестве $X_0$ возьмем саму группу $G$, а $G$ заменим на произведение $G \times G$, действующее на $G$ двусторонними сдвигами. Перейдя к инвариантам (скажем, относительно действия левыми сдвигами), получаем структуру квантовой алгебры на $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*][[\hbar]]$. Последняя $G \times \mathbb{K}^\times$-эквивариантно изоморфна пополненной алгебре Рисса $U_{\hbar}^{\wedge}(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Последняя определяется аналогично алгебре $\mathscr{D}_{\hbar}^{\wedge}(X_0)$.*

Теперь перейдем к рассмотрению квантования гамильтоновых действий. Построим $*$-произведение на $X$ по $G$-инвариантной симплектической связности. Мы говорим, что действие $G : X$ является $*$-гамильтоновым, если задано $G$-эквивариантное линейное отображение $\mathfrak{g} \to \mathbb{K}[X][[\hbar]]$, $\xi \mapsto \widehat{H}_\xi$, удовлетворяющее равенству

$$[\widehat{H}_\xi, f] = \hbar \xi_* f, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g},\ f \in \mathbb{K}[X]. \tag{1}$$

Если $\widehat{H}_\xi = H_\xi + O(\hbar)$, то мы говорим, что $*$-гамильтоново действие $G : X$ является квантованием гамильтонова действия $G : X$.

В случае когда $*$ является однородным степени $k$, мы заменяем (1) следующим равенством:

$$[\widehat{H}_\xi, f] = \hbar^k \xi_* f, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g},\ f \in \mathbb{K}[X]. \tag{2}$$

Из результатов работы [9] следует, что действие $G : X$ допускает квантование. Опять же, заметим, что, несмотря на то что в упомянутой работе рассматривается $C^\infty$-случай, конструкция проходит с минимальными модификациями и в алгебраической ситуации. Если мы рассматриваем однородное $*$-произведение степени $k$ и все функции $H_\xi$ имеют степень $k$ то можем считать, что функции $\widehat{H}_\xi$ также имеют степень $k$.

## 3. Приложение: *W*-алгебры конечного типа

Материал этого раздела взят из работы [15]. В этом разделе $\mathfrak{g}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{K}$, а $G$ — полупростая алгебраическая группа присоединенного типа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем ненулевой нильпотентный элемент $e \in \mathfrak{g}$. $W$-алгебра конечного типа — это некоторая конечно порожденная ассоциативная алгебра. Приведем простейшую ее конструкцию, использующую квантовую гамильтонову редукцию.

Отождествим $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$ посредством инвариантной невырожденной симметрической формы на $\mathfrak{g}$ (скажем, формы Киллинга). Пусть $\chi$ — элемент из $\mathfrak{g}^*$, отвечающий $e$ при этом отождествлении. Выберем $\mathfrak{sl}_2$-тройку $(e, h, f)$ ($h$ обозначает полупростой элемент). Рассмотрим градуировку $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$, ассоциированную с $h$, т. е.

$$\mathfrak{g}(i) := \{\xi \in \mathfrak{g} \mid [h, \xi] = i\xi\}.$$

Определим 2-форму $\omega_\chi$ на $\mathfrak{g}(-1)$ посредством $\omega_\chi(\xi, \eta) = \langle\chi, [\xi, \eta]\rangle$. Ядро формы $\omega_\chi$ лежит в централизаторе $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(e)$, а значит, оно нулевое. Выберем лагранжево пространство $\mathfrak{y} \subset \mathfrak{g}(-1)$. Положим

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{y} := \bigoplus_{i\leqslant -2} \mathfrak{g}(i) \oplus \mathfrak{y}.$$

Понятно, что $\mathfrak{m}_\mathfrak{y}$ является унипотентной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $M_\mathfrak{y}$ связную подгруппу в $G$ с касательной алгеброй $\mathfrak{m}_\mathfrak{y}$. Непосредственно видно, что функция $\chi|_{\mathfrak{m}_\mathfrak{y}}$ инвариантна относительно $M_\mathfrak{y}$. Для упрощения обозначений ниже мы пишем $\mathfrak{m}, M$ вместо $\mathfrak{m}_\mathfrak{y}, M_\mathfrak{y}$. Положим $\mathfrak{m}'(=\mathfrak{m}'_\mathfrak{y}) := \{\xi - \langle\chi, \xi\rangle, \xi \in \mathfrak{m}\}$.

**Определение 3.1.** Под $W$-алгеброй (конечного типа), ассоциированной с $e$ мы понимаем $U(\mathfrak{g}, e) := \big(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{m}'\big)^M$, умножение на которой индуцировано с $U(\mathfrak{g})$.

Приведенное определение алгебры $U(\mathfrak{g}, e)$ принадлежит Премету [21]. Оно было обобщено Ганом и Гинзбургом в работе [7] на случай изотропного подпространства $\mathfrak{y}$.

**Замечание 3.2.** Помимо $W$-алгебр конечного типа есть еще *аффинные* $W$-алгебры, которые являются не ассоциативными, а вертексными алгебрами. Связь между двумя типами $W$-алгебр заключается в том, что они имеют одинаковую теорию представлений. Подробности см. в [4].

Теперь определим естественную фильтрацию на $U(\mathfrak{g}, e)$. Для этого сначала введем некоторую фильтрацию $\mathrm{F}_\bullet$ (*фильтрацию Каждана*) на $U(\mathfrak{g})$. Отметим прежде всего, что на $U(\mathfrak{g})$ имеется стандартная (PBW) фильтрация $\mathrm{F}_i^{st} U(\mathfrak{g})$. Положим

$$U(\mathfrak{g})(i) := \{f \in U(\mathfrak{g}) \mid [h, f] = if\}, \quad \mathrm{F}_i U(\mathfrak{g}) = \sum_{i+2j\leqslant k} (\mathrm{F}_j^{st} U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})(i)).$$

Снабдим $U(\mathfrak{g}, e)$ индуцированной фильтрацией, которую также будем называть фильтрацией Каждана.

Основным результатом работ [7, 21] является описание присоединенной градуированной алгебры $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}, e)$. Обозначим через $S$ *слайс Слодови* $\chi + (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, f])^* \subset \mathfrak{g}^*$, введенный в работе [24]. Мы можем отождествить алгебру $\mathbb{K}[S]$ с симметрической алгеброй $S(\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(e))$. На $\mathbb{K}[S]$ имеется единственная градуировка, для которой $\xi \in \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(e) \cap \mathfrak{g}(i)$ имеет степень $i + 2$.

**Теорема 3.3** (см. [7, Theorem 4.1]). *Фильтрованная алгебра $U(\mathfrak{g}, e)$ не зависит от выбора $\mathfrak{y}$ с точностью до изоморфизма, и*

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}, e) \cong \mathbb{K}[S]$$

*как градуированные алгебры.*

Второе утверждение было ранее доказано Преметом в [21] с использованием редукции в положительную характеристику. Подход Гана и Гинзбурга основан на использовании спектральных последовательностей и значительно проще использованного Преметом.

Еще одним базовым результатом о $W$-алгебрах является теорема о категорной эквивалентности, впервые доказанная Скрябиным в приложении к [21], а затем передоказанная в [7]. Для ее формулировки нам нужно понятие модуля Уиттекера.

**Определение 3.4.** Мы говорим, что $U(\mathfrak{g})$-модуль $V$ является *модулем Уиттекера* (для $e$), если $\mathfrak{m}'$ действует на $V$ локально нильпотентными эндоморфизмами.

Пусть $V$ — $U(\mathfrak{g})$-модуль Уиттекера. Тогда $V^{\mathfrak{m}'}$ имеет естественную структуру $U(\mathfrak{g}, e)$-модуля. С другой стороны, положим

$$Q_{\mathfrak{y}} := U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{m}'.$$

Это пространство имеет естественную структуру $(U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{g}, e))$-бимодуля. Поэтому $U(\mathfrak{g}, e)$-модулю $M$ мы можем поставить в соответствие $U(\mathfrak{g})$-модуль $M^{\dagger} := Q_{\mathfrak{y}} \otimes_{U(\mathfrak{g},e)} M$, который является модулем Уиттекера.

**Теорема 3.5.** *Отображения $V \mapsto V^{\mathfrak{m}'}$, $M \mapsto M^{\dagger}$ являются квазиобратными эквивалентностями между категорией $U(\mathfrak{g})$-модулей Уиттекера и категорией $U(\mathfrak{g}, e)$-модулей.*

Изучение модулей Уиттекера было начато Костантом в [13], где рассматривался случай главного нильпотентного элемента. В этом случае алгебра $U(\mathfrak{g}, e)$ канонически изоморфна центру $\mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ алгебры $U(\mathfrak{g})$. Результаты Костанта были частично обобщены на случай четных нильпотентных элементов в диссертации Линча [20].

Есть еще несколько случаев, когда алгебра $U(\mathfrak{g}, e)$ детально изучалась. В работе [22] рассматривался случай минимального нильпотентного элемента. Брандэн и Клещев [2, 3] изучали алгебры $U(\mathfrak{g}, e)$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Их результаты включают классификацию конечномерных неприводимых $U(\mathfrak{g}, e)$-модулей. Используемый ими подход опирается на связи между $U(\mathfrak{g}, e)$ и некоторой алгеброй Хопфа, называемой *смещенным янгианом*. Эта связь является отличительной особенностью случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

Наш подход к $W$-алгебрам существенно отличается от всех предложенных ранее. Он основан на наблюдении, что $U(\mathfrak{g}, e)$ является, по сути, алгеброй инвариантов для квантованного гамильтонова действия группы $G$. Приведем конструкцию.

Положим $X := G \times S \hookrightarrow G \times \mathfrak{g}^* \cong T^*G$. Ограничивая симплектическую форму с $T^*G$, мы получаем замкнутую 2-форму на $X$, которую обозначим через $\omega'$. Можно показать, что эта форма невырождена на всем $X$. Отображение моментов для действия $G : X$ имеет вид $(g, s) \mapsto gs$.

Обозначим через $\gamma$ однопараметрическую подгруппу в $G$ с $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=0} = h$. Определим действие $\mathbb{K}^\times : T^*G$ посредством

$$t.(g, \alpha) = (g\gamma(t), t^{-2}\gamma(t^{-1})\alpha).$$

Если $\omega, \mu$ обозначает симплектическую форму и отображение моментов для $T^*G$, то $t.\omega = t^2\omega$, $t.\mu = t^2\mu$. Орбита $G(1, \chi)$ и подмногообразие $X \subset T^*G$ устойчивы относительно $\mathbb{K}^\times$. Фиксируем $G \times \mathbb{K}^\times$-инвариантную связность на $X$ и построим $*$-произведение

$$f * g = \sum_{i=0}^{\infty} D_i(f, g)\hbar^{2i}$$

степени 2 по этой связности. Можно показать, что для всех $f, g \in \mathbb{K}[X]$ найдется число $n \in \mathbb{N}$, для которого $D_i(f, g) = 0$ при всех $i > n$. Значит, на $\mathbb{K}[X]$ корректно определена операция $\circ$, заданная равенством $f \circ g = \sum_{i=0}^{\infty} D_i(f, g)$. Эта операция является ассоциативной, и 1 является для нее единицей. Когда мы рассматриваем $\mathbb{K}[X]$ как алгебру относительно $\circ$, мы обозначаем ее через $\widetilde{\mathscr{W}}$. Градуировка на $\mathbb{K}[X]$, происходящая из действия $\mathbb{K}^\times : X$, снабжает $\widetilde{\mathscr{W}}$ фильтрацией, которую мы называем фильтрацией Каждана.

Положим $\mathscr{W} = \widetilde{\mathscr{W}}^G$. Это фильтрованная ассоциативная алгебра с $\operatorname{gr}\mathscr{W} = \mathbb{K}[S]$. Оказывается, имеет место изоморфизм фильтрованных алгебр $\mathscr{W} = U(\mathfrak{g}, e)$. Нам известно два доказательства.

Первое заключается в альтернативном описании алгебры $\widetilde{\mathscr{W}}$. Оказывается, эта алгебра изоморфна квантовой редукции алгебры $\mathscr{D}(G)$, которая аналогична той, что была использована при определении $U(\mathfrak{g}, e)$ через $U(\mathfrak{g})$. Пользуясь техникой спектральных последовательностей из [7], можно показать, что присоединенная градуированная этой редукции совпадает с $\mathbb{K}[X]$. Требуемый изоморфизм получается из стандартных свойств эквивалентности для $*$-произведений.

Второй способ основан на применении варианта теоремы Дарбу — Вейнстейна из симплектической геометрии. Поскольку эта техника очень важна для исследования $W$-алгебр, мы остановимся на ней подробнее.

Положим $V := [\mathfrak{g}, f]$. Это симплектическое векторное пространство с формой $\langle \chi, [\cdot,\cdot]\rangle$, а алгебра $S(V) = \mathbb{K}[V^*]$ снабжена градуировкой, индуцированной с градуировки Каждана на $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$. Снабдим $\mathbb{K}[V^*]$ $*$-произведением Мойала — Вейля. Получаем дифференциальное $*$-произведение на $\mathbb{K}[X \times V^*]$. Рассмотрим пополнения $\mathbb{K}[T^*G]^{\wedge}_{Gx}$, $\mathbb{K}[X \times V^*]^{\wedge}_{Gx}$ алгебр $\mathbb{K}[T^*G]$, $\mathbb{K}[X \times V^*]$ относительно орбит $Gx \subset T^*G,\ X \times V^*\ \ x := (1, \chi)$. Поскольку $*$-произведения на $\mathbb{K}[T^*G]$, $\mathbb{K}[X \times V^*]$ дифференциальные, они продолжаются до $*$-произведений на $\mathbb{K}[T^*G]^{\wedge}_{Gx}$, $\mathbb{K}[X \times V^*]^{\wedge}_{Gx}$. Оказывается, квантовые алгебры

$$\mathbb{K}[T^*G]^{\wedge}_{Gx}[[\hbar]], \quad \mathbb{K}[X \times V^*]^{\wedge}_{Gx}[[\hbar]]$$

$G \times \mathbb{K}^{\times}$-эквивариантно изоморфны. Более того, изоморфизм уважает отображения $\xi \mapsto \widehat{H}_{\xi}$.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые обозначения. Положим $\mathcal{U} := U(\mathfrak{g})$ и через $\mathbf{A}_V$ обозначим алгебру Вейля пространства $V$ (т. е. фактор тензорной алгебры $T(V)$ по соотношениям

$$uv - vu = \omega(u, v), \quad u, v \in V,$$

где $\omega$ обозначает симплектическую форму на $V$). Мы пишем $\mathbf{A}_V(\mathcal{W})$ вместо $\mathbf{A}_V \otimes \mathcal{W}$.

Получаем $\mathbb{K}^{\times}$-эквивариантный изоморфизм квантовых алгебр $\mathbb{K}[S \times V^*][[\hbar]]$, $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*][[\hbar]]$. Переходя к $\mathbb{K}^{\times}$-конечным частям этих алгебр и факторизуя по идеалам, порожденным $\hbar - 1$, мы получаем изоморфизм алгебр $\mathbf{A}_V(\mathcal{W})^{\heartsuit}$, $\mathcal{U}^{\heartsuit}$, которые определяются следующим образом. Алгебра $\mathcal{U}^{\heartsuit}$ состоит из всех рядов вида $\sum\limits_{i<n} f_i$, где $f_i$ — однородный элемент из $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ степени (Каждана) $i$. Произведение на $\mathcal{U}^{\heartsuit}$ индуцировано произведением $\circ$ на $\mathcal{U} \cong \mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$. Алгебра $\mathbf{A}_V(\mathcal{W})^{\heartsuit}$ определяется аналогично, только $\mathbb{K}[\mathfrak{g}^*]$ заменяется на $\mathbb{K}[S \times V^*]$. Из изоморфизма

$$\mathcal{U}^{\heartsuit} \cong \mathbf{A}_V(\mathcal{W})^{\heartsuit}$$

можно вывести изоморфизм $U(\mathfrak{g}, e) \cong \mathcal{W}$.

Кроме того, из изоморфизма $\mathcal{U}^{\heartsuit} \cong \mathbf{A}_V(\mathcal{W})^{\heartsuit}$ можно вывести изоморфизм двух пополнений алгебр $\mathcal{U}$, $\mathbf{A}_V(\mathcal{W})$, содержащих $\mathcal{U}^{\heartsuit}$, $\mathbf{A}_V(\mathcal{W})^{\heartsuit}$. Общая конструкция пополнения, которую мы используем и которую мы позаимствовали из работы [8], выглядит следующим образом.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей и $\mathfrak{f}$ — подалгебра Ли в $\mathcal{A}$. Предположим, что $\mathrm{ad}(\xi)$ является локально нильпотентным эндоморфизмом пространства $\mathcal{A}$ для всех $\xi \in \mathfrak{f}$ и что любой элемент из

$\mathscr{A}$ лежит в конечномерном $\operatorname{ad}(\mathfrak{f})$-модуле. Положим

$$\mathscr{A}_{\mathfrak{f}}^{\wedge} := \varprojlim_{k\to\infty} \mathscr{A}/\mathscr{A}\mathfrak{f}^k.$$

На $\mathscr{A}_{\mathfrak{f}}^{\wedge}$ имеется естественная структура топологической алгебры (с ядрами естественных эпиморфизмов $\mathscr{A}_{\mathfrak{f}}^{\wedge} \to \mathscr{A}/\mathscr{A}\mathfrak{f}^k$ в качестве системы фундаментальных окрестностей 0) (ср. с [8, Section 5]). Понятно, что алгебра $\mathscr{A}_{\mathfrak{f}}^{\wedge}$ является полной относительно этой топологии. Естественное отображение $\mathscr{A} \to \mathscr{A}_{\mathfrak{f}}^{\wedge}$ является гомоморфизмом алгебр.

**Теорема 3.6.** *Обозначим через $\underline{\mathfrak{m}}$ подпространство в $V$, совпадающее с $\mathfrak{m}$, так что $\underline{\mathfrak{m}}$ — коммутативная подалгебра Ли в $\mathbf{A}_V$. Существует топологический изоморфизм $\Phi\colon \mathscr{U}_{\mathfrak{m}'}^{\wedge} \to \mathbf{A}_V(\mathscr{W})_{\underline{\mathfrak{m}}}^{\wedge}$.*

Можно заметить, что $\mathscr{U}^{\heartsuit}, \mathbf{A}_V(\mathscr{W})^{\heartsuit}$ естественным образом вкладываются в $\mathscr{U}_{\mathfrak{m}'}^{\wedge}, \mathbf{A}_V(\mathscr{W})_{\underline{\mathfrak{m}}}^{\wedge}$.

Используя теорему 3.6 (а точнее, ее уточненный вариант), несложно доказать теорему 3.5.

Для ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ положим

$$\operatorname{Pr}(\mathscr{A}) = \{\mathscr{I} | \mathscr{I} \text{ — первичный идеал в } \mathscr{A}, \operatorname{codim}_{\mathscr{Z}(\mathscr{A})} \mathscr{I} \cap \mathscr{Z}(\mathscr{A}) = 1\},$$

где через $\mathscr{Z}(\mathscr{A})$ обозначен центр алгебры $\mathscr{A}$. Напомним, что идеал $\mathscr{I}$ называется *первичным*, если $a\mathscr{A}b \not\subset \mathscr{I}$, как только $a, b \notin \mathscr{I}$. Наш основной результат о $W$-алгебрах — это теорема о сравнении множеств $\operatorname{Pr}(\mathscr{U}), \operatorname{Pr}(\mathscr{W})$. Известно, см. [10], 7.3, что $\operatorname{Pr}(\mathscr{U})$ состоит в точности из примитивных идеалов алгебры $\mathscr{U}$, т. е. из аннуляторов неприводимых модулей.

**Вопрос 3.7.** Верно ли аналогичное утверждение для $\mathscr{W}$?

Напомним понятие ассоциированного многообразия идеала. Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей, снабженная такой возрастающей фильтрацией $\mathrm{F}_i\,\mathscr{A}$, что

$$\mathrm{F}_0\,\mathscr{A} = \mathbb{K}, \quad \mathrm{F}_{-1}\,\mathscr{A} = \{0\}, \quad \bigcup_i \mathrm{F}_i\,\mathscr{A} = \mathscr{A}.$$

Предположим, что $[\mathrm{F}_i\,\mathscr{A}, \mathrm{F}_j\,\mathscr{A}] \subset \mathrm{F}_{i+j-1}\,\mathscr{A}$ и ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}(\mathscr{A})$ конечно порождена. Для идеала $\mathscr{I}$ алгебры $\mathscr{A}$ положим

$$\operatorname{gr}(\mathscr{I}) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (\mathrm{F}_i\,\mathscr{A} \cap \mathscr{I})/(\mathrm{F}_{i-1}\,\mathscr{A} \cap \mathscr{I}),$$

это идеал в $\operatorname{gr}(\mathscr{A})$. Многообразие его нулей в $\operatorname{Spec}(\operatorname{gr}(\mathscr{A}))$ называется *ассоциированным многообразием* идеала $\mathscr{I}$ и обозначается через $\operatorname{VA}(\mathscr{I})$.

Обе алгебры $\mathcal{U}, \mathcal{W}$ снабжены фильтрациями, удовлетворяющими условиям предыдущего параграфа (мы рассматриваем стандартную фильтрацию на $\mathcal{U}$). Напомним, что для $\mathcal{J} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{U})$ подмногообразие $\operatorname{VA}(\mathcal{J})$ является замыканием некоторой нильпотентной орбиты, подробности см. в [11, 9.3]. Идеалу $\mathcal{J} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{U})$ мы ставим в соответствие его *кратность*

$$\operatorname{mult}(\mathcal{J}) = \dim_{\operatorname{Quot}(S(\mathfrak{g})/\mathfrak{p})}(S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr}(\mathcal{J}))_{\mathfrak{p}},$$

где $\mathfrak{p} = \sqrt{\operatorname{gr}\mathcal{J}}$.

**Теорема 3.8.** (1) *Имеется единственное отображение*

$$\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}^{\dagger}\colon \operatorname{Pr}(\mathcal{W}) \to \operatorname{Pr}(\mathcal{U}),$$

*которое для* $\mathcal{W}$*-модуля* $M$ *переводит* $\operatorname{Ann}_{\mathcal{W}}(M)$ *в* $\operatorname{Ann}_{\mathcal{U}}(M^{\dagger})$.

(2) *Элемент* $\mathcal{J} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{U})$ *имеет вид* $\mathcal{I}^{\dagger}$ *с* $\mathcal{I} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{W})$ *тогда и только тогда, когда* $G\chi \subset \operatorname{VA}(\mathcal{J})$.

(3) *Пусть* $\mathcal{J}$ *— элемент из* $\operatorname{Pr}(\mathcal{U})$*, для которого* $\operatorname{VA}(\mathcal{J}) = \overline{G\chi}$*. Существует идеал* $\mathcal{J}_{\dagger}$ *алгебры* $\mathcal{W}$*, для которого множество* $\{\mathcal{I} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{W}) \mid \mathcal{I}^{\dagger} = \mathcal{J}\}$ *состоит из всех первичных идеалов алгебры* $\mathcal{W}$*, содержащих* $\mathcal{J}_{\dagger}$*. В частности, множество* $\{\mathcal{I} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{W}) \mid \mathcal{I}^{\dagger} = \mathcal{J}\}$ *конечно. Более того,* $\operatorname{codim}_{\mathcal{W}} \mathcal{J}_{\dagger} = \operatorname{mult}(\mathcal{J})$.

(4) *Пусть* $\mathcal{I} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{W})$ *имеет конечную коразмерность в* $\mathcal{W}$*. Тогда ранг Голди фактора* $\mathcal{U}/\mathcal{I}^{\dagger}$ *не превосходит* $(\operatorname{codim}_{\mathcal{W}} \mathcal{I})^{1/2}$.

Утверждение (2) для $\mathcal{J}$ как в (3) было также доказано Преметом с использованием редукции в положительную характеристику. Доказательство в общем случае не опубликовано, важный частный случай является основным результатом в [23]. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ из [3] следует, что для $\mathcal{J}$ как в (3) найдется единственный элемент $\mathcal{I} \in \operatorname{Pr}(\mathcal{W})$ с $\mathcal{I}^{\dagger} = \mathcal{J}$. В общем случае это утверждение уже неверно. Утверждения (3), (4) подсказывают, что простейшим случаем, где можно найти контрпример, является $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4$, $e$ — субрегулярный элемент. Как нам сообщил Премет, в этом случае действительно существует $\mathcal{J}$, слой которого при отображении $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I}^{\dagger}$ состоит из двух элементов. Однако некоторое утверждение о единственности все еще может выполняться. Для этого отметим, что имеется естественное действие группы компонентов $Z_G(e)/Z_G(e)^{\circ}$ на $\operatorname{Pr}(\mathcal{W})$.

**Гипотеза 3.9** (Премет)**.** Пусть $\mathcal{J}$ таков, как в (3). Тогда $\{\mathcal{I} | \mathcal{I}^{\dagger} = \mathcal{J}\}$ является одной $Z_G(e)/Z_G(e)^{\circ}$-орбитой[2].

Наконец, имеется еще один результат о конечномерных представлениях алгебры $\mathcal{W}$.

[2] Доказательство этой гипотезы было недавно получено автором в препринте [17].

**Теорема 3.10.** 1. *$\mathscr{W}$ имеет конечномерный модуль $V$, одномерный, если $\mathfrak{g}$ классическая алгебра.*

2. *Пусть $V$ — $\mathscr{W}$-модуль. Тогда на $L(\lambda)\otimes V$, где $L(\lambda)$ — конечномерный модуль со старшим весом $\lambda$, существует структура $\mathscr{W}$-модуля и представление $\mathscr{W}$ в $\bigoplus\limits_{\lambda} L(\lambda)\otimes V$ точное.*

Имеется гипотеза, подтверждающая утверждение (2) и верная для $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$, а также для четных $e$.

**Гипотеза 3.11.** Существует мономорфизм $\widetilde{\mathscr{W}}\hookrightarrow\mathscr{D}(G)$.

## 4. Приложение: подъем центральных инвариантов

В этом пункте $G$ — связная редуктивная группа, $X$ — симплектическое алгебраическое многообразие, снабженное $*$-произведением, полученным конструкцией Федосова и $*$-гамильтоновым действием группы $G$. Обозначим через $\mathscr{Z}(\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G), \mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)$ центры квантовой алгебры инвариантов $\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G$ и пуассоновой алгебры $\mathbb{K}[X]^G$. Оказывается, алгебры $\mathscr{Z}(\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G)$ и $\mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]]$ изоморфны.

На самом деле имеет место более точное утверждение. Имеем гомоморфизмы алгебр $S(\mathfrak{g})\to\mathbb{K}[X], U_{\hbar}^{\wedge}(\mathfrak{g})\to\mathbb{K}[X][[\hbar]]$, которые являются частью структуры гамильтоновых действий. Они дают гомоморфизмы алгебр инвариантов $S(\mathfrak{g})^G\to\mathbb{K}[X]^G, U_{\hbar}^{\wedge}(\mathfrak{g})^G\to\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G$. Отметим также, что имеются гомоморфизмы

$$U_{\hbar}^{\wedge}(\mathfrak{g})^G,\quad S(\mathfrak{g})[[\hbar]]^G\to S(\mathfrak{g})^G,$$
$$\mathscr{Z}(\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G),\quad \mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]]\to \mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G),$$

которые отображают ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i\hbar^i$ в $f_0$.

Несложно показать, что существует $\mathbb{K}^\times$-эквивариантный изоморфизм $\mathbb{K}[[\hbar]]$-алгебр $U_{\hbar}^{\wedge}(\mathfrak{g})^G\to S(\mathfrak{g})^G[[\hbar]]$, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr] & \\
U_{\hbar}^{\wedge}(\mathfrak{g})^G \arrow[r] & S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.
\end{tikzcd}$$

Фиксируем такой изоморфизм.

**Теорема 4.1.** *Имеется изоморфизм $\mathbb{K}[[\hbar]]$-алгебр*
$$\mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]] \to \mathscr{Z}(\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G),$$
*делающий следующую диаграмму коммутативной*:
$$\begin{tikzcd}
S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]] \arrow[r] \arrow[dd, "\cong"] & \mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\
 & & \mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G). \\
\mathscr{Z}(U^{\wedge}_{\hbar}(\mathfrak{g})) \arrow[r] & \mathscr{Z}(\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

*Если $*$ — однородное $*$-произведение степени $k$ и $t.\widehat{H}_\xi = t^k \widehat{H}_\xi$ для всех $\xi \in \mathfrak{g}$, то изоморфизм может быть выбран $\mathbb{K}^\times$-инвариантным.*

Опишем кратко основные идеи доказательства. Сначала надо доказать существование изоморфизма между целыми замыканиями образов алгебр $S(\mathfrak{g})^G[[\hbar]]$, $U^{\wedge}_{\hbar}(\mathfrak{g})^G$ в $\mathscr{Z}(\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G)$, $\mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]]$. Для этого мы рассматриваем уравнение целой зависимости некоторого элемента в $\mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]]$, переносим это уравнение в $U^{\wedge}_{\hbar}(\mathfrak{g})^G$ и находим его единственное решение в $\mathbb{K}[X^0][[\hbar]]^G$, имеющее тот же свободный член, что и исходный элемент из $\mathrm{ZP}(\mathbb{K}[X]^G)[[\hbar]]$. Здесь $X^0$ — подходящее $G$-инвариантное открытое подмножество в $X$. Далее мы доказываем, что это решение центрально и содержится в $\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G$.

Укажем одно приложение теоремы 4.1. Пусть $X_0$ — гладкое аффинное $G$-многообразие. Тогда теорема дает изоморфизм алгебр центров $\mathscr{D}(X_0)^G$ и $\mathbb{K}[T^*X_0]^G$. Этот результат (в более точной форме) был ранее доказан Кнопом в [12] с помощью сложной алгебро-геометрической техники.

## 5. Открытая проблема: квантовая теорема Луны — Ричардсона

Пусть $X$ — некоторое гладкое неприводимое аффинное алгебраическое многообразие с действием связной редуктивной группы $G$. Известно, см. [18], что найдется редуктивная подгруппа $G_0 \subset G$, для которой замкнутая орбита общего положения в $X$ изоморфна $G/G_0$. Основным результатом работы [18] является следующая теорема, которая является полезным средством для описания алгебр инвариантов.

**Теорема 5.1.** *Группа $N_G(G_0)$ транзитивно переставляет связные ($=$неприводимые) компоненты многообразия $X^{G_0}$. Если $X_0$ — одна из этих компонент, то ограничение функций с $X$ на $X_0$ индуцирует изоморфизм алгебр инвариантов $\mathbb{K}[X]^G \cong \mathbb{K}[X_0]^{N_G(G_0)}$.*

В частности, если $X=\mathfrak{g}$, мы получаем известную теорему Шевалле об ограничении инвариантов.

Несложно видеть, что если $X$ — симплектическое многообразие, а группа $G$ действует на $X$ гамильтоново, то подмногообразие $X_0$ симплектическое, $N_G(G_0)$ будет действовать гамильтоново, а изоморфизм $\mathbb{K}[X]^G \cong \mathbb{K}[X_0]^{N_G(G_0)}$ будет пуассоновым.

Хочется получить квантовую версию теоремы 5.1.

**Гипотеза 5.2.** Пусть на многообразии $X$ задана симплектическая $G$-инвариантная связность $\nabla$, с ее помощью построено $*$-произведение, так что действие $G : X$ становится $*$-гамильтоновым. Определим $*$-произведение на $X_0$ с помощью ограничения связности $\nabla$ (несложно видеть, что $X_0$ является «вполне геодезическим» подмногообразием в $X$). Тогда существует изоморфизм квантовых алгебр инвариантов $\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G \to \mathbb{K}[X_0][[\hbar]]^{N_G(G_0)}$, делающий следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[X][[\hbar]]^G \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}[X_0][[\hbar]]^{N_G(G_0)} \arrow[d] \\
\mathbb{K}[X]^G \arrow[r] & \mathbb{K}[X_0]^{N_G(G_0)}.
\end{tikzcd}$$

Здесь нижняя горизонтальная стрелка — изоморфизм из теоремы 5.1, а вертикальные стрелки — гомоморфизмы взятия свободного члена.

## Литература


1. *Bezrukavnikov R., Kaledin D.* Fedosov quantization in algebraic context // Moscow Math. J. 2004. Vol. 4, № 3. P. 559—592.
2. *Brundan J., Kleshchev A.* Shifted Yangians and finite $W$-algebras // Adv. Math. 2006. Vol. 200. P. 136—195.
3. *Brundan J., Kleshchev A.* Representations of shifted Yangians and finite $W$-algebras. Preprint. 2005. arXiv:math.RT/0508003, 109 pages.
4. *De Sole A., Kac V.* Finite vs affine $W$-algebras / With an appendix by A. D'Andrea, C. De Concini, A. De Sole, R. Heluani and V. Kac. Japan // J. Math. 2006. Vol. 1. P. 137—261.
5. *Fedosov B.* A simple geometrical construction of deformation quantization // J. Diff. Geom. 1994. Vol. 40. P. 213—238.
6. *Fedosov B.* Deformation quantization and index theory // Mathematical Topics 9. Akademie Verlag, 1996.
7. *Gan W. L., Ginzburg V.* Quantization of Slodowy slices // IMRN. 2002. Vol. 5. P. 243—255.

8. *Ginzburg V.* On primitive ideals // Selecta Math. New series. 2003. Vol. 9. P. 379—407.
9. *Gutt S., Rawnsley J.* Natural star products on symplectic manifolds and quantum moment maps. Preprint. 2003; arXiv:math.SG/0304498.
10. *Jantzen J. C.* Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren // Ergebnisse der Math. Vol. 3. New York; Tokio etc.: Springer, 1983.
11. *Jantzen J. C.* Nilpotent orbits in representation theory / Eds. J. Anker, B. Orsted. Boston: Birkhäuser, 2004. (Progress in Math.; Vol. 228). P. 1—211.
12. *Knop F.* A Harish-Chandra homomorphism for reductive group actions // Ann. Math. 1994. Vol. 140. P. 253—288.
13. *Kostant B.* On Whittaker vectors and representation theory. 1978. (Invent. Math.; Vol. 48). P. 101—184.
14. *Лосев И. В.* Симплектические слайсы для редуктивных групп // Мат. сборник. 2006. Т. 197, № 2. С. 75—86.
15. *Losev I. V.* Quantized symplectic actions and $W$-algebras. To appear J. Amer. Math. Soc. arXiv:math.RT/0707.3108v4, 23 pages.
16. *Losev I. V.* Lifting central invariants of quantized Hamiltonian actions // Moscow Math. J. 2009. Vol. 9. P. 359—369; arXiv:math.QA/0708.0630v1, 9 p.
17. *Losev I. V.* Finite dimensional representations of $W$-algebras. Preprint. 2008; arXiv:0807.1023v2, 21 pages.
18. *Luna D., Richardson R. W.* A generalization of the Chevalley restriction theorem // Duke Math. J. 1980. Vol. 46, № 3. P. 487—496.
19. *Lu J. H.* Moment maps at quantum level // Comm. Math. Phys. 1993. Vol. 157. P. 389—404.
20. *Lynch T. E.* Generalized Whittaker vectors and representation theory // Thesis, M.I.T. 1979.
21. *Premet A.* Special transverse slices and their enveloping algebras // Adv. Math. 2002. Vol. 170. P. 1—55.
22. *Premet A.* Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal // J. Eur. Math. Soc, to appear; arXiv:math.RT/0504343.
23. *Premet A.* Primitive ideals, non-restricted representations and finite $W$-algebras. Preprint. 2006; arXiv:math.RT/0612465.
24. *Slodowy P.* Simple singularities and simple algebraic groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980. (Lect. Notes Math.; Vol. 815).

# Операции Адамса и степенные структуры

Евгений Горский

*2006, первый победитель в номинации «Студенты»*
*2007, второе место в номинации «Студенты и аспиранты»*

## 1. Введение

В работе строится семейство аддитивных эндоморфизмов $\Psi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ кольца Гротендика квазипроективных многообразий и кольца Гротендика мотивов Чжоу. Каждое из этих отображений, примененное к данному многообразию, — многочлен от его симметрических степеней с целыми коэффициентами. Так,

$$\Psi_1(X) = X, \quad \Psi_2(X) = 2[S^2X] - [X^2],$$

где $S^2X$ — симметрический квадрат $X$. Для полиномов от аффинной прямой имеет место формула

$$\Psi_k(P(\mathbb{L})) = P(\mathbb{L}^k).$$

Построение этих отображений во многом напоминает конструкцию операций Адамса в $K$-теории, и для кольца Гротендика мотивов выполнены дополнительно соотношения

$$\Psi_i(X \cdot Y) = \Psi_i(X) \cdot \Psi_i(Y), \quad \Psi_i \circ \Psi_j = \Psi_{ij},$$

аналогичные соотношениям для операций Адамса. Этот факт следует из специальности $\lambda$-структуры на кольце Гротендика мотивов, доказанной Ф. Хейнлот [7].

Построенные операции применяются для изучения степенной структуры на кольце Гротендика. Доказывается формула обращения, позволяющая в разложении

$$1 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + \ldots = (1-t)^{-B_1}(1-t^2)^{-B_2}\ldots$$

явно выразить показатели $B_i$ через коэффициенты $A_j$. Эта формула кажется аналогичной формуле «мотивного обращения Мёбиуса», доказанной Д. Бурки в [5].

В качестве примера вычисляется класс многообразия неприводимых многочленов заданной степени от произвольного количества переменных в кольце Гротендика квазипроективных (комплексных) алгебраических многообразий. Это позволяет, например, вычислить все числа Ходжа — Деліня этого многообразия.

Кроме того, полученные формулы дают возможность дать прозрачную интерпретацию в терминах степенных структур формул Э. Гетцлера [8] для характеров эквивариантных когомологий конфигурационных пространств упорядоченных наборов различных точек заданного многообразия.

## 2. Степенные структуры

Понятие степенной структуры на (полу)кольце было введено С. М. Гусейн-Заде, И. Луэнго и А. Мелле-Эрнандесом в [12].

**Определение.** Степенной структурой на кольце $R$ называется отображение

$$(1+tR[[t]])\times R\to 1+tR[[t]]\colon (A(t),m)\mapsto (A(t))^m,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(A(t))^0=1$,
2. $(A(t))^1=A(t)$,
3. $((A(t)\cdot B(t))^m=((A(t))^m\cdot((B(t))^m$,
4. $(A(t))^{m+n}=(A(t))^m\cdot(A(t))^n$,
5. $(A(t))^{mn}=((A(t))^n)^m$,
6. $(1+t)^m=1+mt+$ члены большей степени,
7. $(A(t^k))^m=((A(t))^m)|_{t\to t^k}$.

Степенная структура называется конечно определенной, если для любого $N>0$ существует такое $M>0$, что $N$ — струя ряда $(A(t))^m$ однозначно определяется $M$-струей ряда $A(t)$.

В [12] доказано, что конечно определенная степенная структура задана, если задано правило, описывающее $(1-t)^{-m}$ для каждого $m\in R$, причем $(1-t)^{-m-n}=(1-t)^{-m}\cdot(1-t)^{-n}$.

Действительно, если задан ряд $1+A_1t+A_2t^2+A_3t^3+\ldots$, то, поделив его на $(1-t)^{-A_1}$, получим ряд вида $1+D_2t^2+D_3t^3+\ldots$, поделим его на $(1-t^2)^{-D_2}$ и т. д. Действуя так, получим разложение ряда в бесконечное произведение

$$1+A_1\cdot t+A_2\cdot t^2+\ldots=(1-t)^{-B_1}(1-t^2)^{-B_2}\ldots \tag{3}$$

Если известны значения выражений $(1-t^k)^{-B_k\cdot X}$, то легко и вычислить $A(t)^X$, полагая

$$(1+A_1\cdot t+A_2\cdot t^2+\ldots)^X=\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k)^{-B_k\cdot X}.$$

Если кольцо $R$ является алгеброй над $\mathbb{Q}$, то в нем можно определить экспоненциальное и логарифмическое отображения, поэтому можно задать «обычную» степенную структуру формулой

$$(1+A_1\cdot t+A_2\cdot t^2+\ldots)^X := \exp(X\cdot\ln(1+A_1\cdot t+A_2\cdot t^2+\ldots)).$$

Легко видеть, что для такой структуры аксиомы 1—7 выполнены.

Важно отметить, что эта степенная структура — далеко не единственно возможная. Ниже будет приведен ряд примеров, важных для приложений степенных структур, отличающихся от этой. Также важно отметить, что в их определениях не используется деление на целые числа, что позволяет не использовать структуру алгебры над $\mathbb{Q}$.

### 2.1. Степенная структура на кольце Гротендика многообразий

Через $K_0(Var_{\mathbb{C}})$ будем обозначать кольцо Гротендика квазипроективных алгебраических многообразий. Оно свободно порождено классами изоморфных комплексных квазипроективных алгебраических многообразий по модулю соотношений вида $[X]=[Y]+[X\setminus Y]$, где $Y$ — замкнутое по Зарисскому подмножество $X$. Умножение задается формулой $[X]\cdot[Y]=[X\times Y]$. Через $\mathbb{L}\in K_0(Var_{\mathbb{C}})$ будем обозначать класс аффинной прямой.

На кольце Гротендика квазипроективных алгебраических многообразий определена степенная структура, для которой

$$(1-t)^{-[X]} = 1+[S^1X]t+[S^2X]t^2+\ldots,$$

где $S^kX$ обозначает $k$-ю симметрическую степень $X$. Аналогично можно определить степенную структуру и на кольце мотивов Чжоу. Например, при $j\geqslant 0$ известно [12], что $[S^k\mathbb{L}^j]=\mathbb{L}^{kj}$, поэтому

$$(1-t)^{-\mathbb{L}^j} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\mathbb{L}^{kj} = (1-t\mathbb{L}^j)^{-1}.$$

Эта степенная структура имеет прозрачный геометрический смысл: если $A_1, A_2, \ldots$ и $X$ — некоторые квазипроективные многообразия и

$$(1+A_1\cdot t+A_2\cdot t^2+\ldots)^X = 1+B_1\cdot t+B_2\cdot t^2+\ldots,$$

то многообразия $B_n$ допускают следующее геометрическое описание. Рассмотрим на несвязном объединении $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ функцию $I$, тождественно равную $i$ на $A_i$. Тогда $B_n$ — это множество пар $(K,\varphi)$, где $K$ — конечное подмножество $X$, а $\varphi\colon K\to\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — такое отображение, что

$$\sum_{x\in K} I(\varphi(x)) = n.$$

На таком множестве пар можно естественным образом ввести структуру квазипроективного алгебраического многообразия. Кроме того, несложно проверить, исходя из такого геометрического определения, что построенная конструкция удовлетворяет всем аксиомам степенной структуры.

Более наглядно эту конструкцию можно описать так: на многообразии $X$ существуют частицы, которым сопоставлены натуральные числа (кратности, массы, ...). Частица данной кратности $k$ обладает сложным внутренним пространством состояний, параметризующихся точками квазипроективного многообразия $A_k$. Тогда $B_n$ — это конфигурационное пространство наборов частиц суммарной кратности $n$. Например, если все $A_k$ — точки, то $B_n$ состоит из всевозможных наборов различных точек на $X$ с кратностями суммарной кратности $n$, то есть $B_n = S^n X$. Поэтому

$$1+[S^1X]t+[S^2X]t^2+\ldots = \\ = (1+t+t^2+\ldots)^{[X]} = ((1-t)^{-1})^{[X]} = (1-t)^{-[X]}.$$

Если, например, $A_1$ — точка, а все остальные $A_i$ пусты, то $B_n$ — множество неупорядоченных наборов различных точек на $X$. Производящая функция для классов таких множеств имеет вид $(1+t)^{[X]}$.

Есть и менее тривиальные примеры использования степенных структур. Так, жорданова нормальная форма матрицы — это набор ее собственных чисел, каждому из которых сопоставлено разбиение (диаграмма Юнга). Поэтому множество жордановых форм матриц $n\times n$ — это коэффициент с номером $n$ в ряду $(1+A_1\cdot t+A_2t^2+\ldots)^X$, где $X$ — множество, которое пробегают собственные значения (например, всё $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}^*$, если рассматриваются только невырожденные матрицы), а $A_k$ — множество диаграмм Юнга веса $k$. Подробнее о связанных с этим примером комбинаторных тождествах можно (немного в другой терминологии) прочесть в статье [15].

Еще одним приложением аппарата степенных структур является комбинаторика схем Гильберта точек на многообразиях. Если $X$ — гладкое проективное $d$-мерное многообразие, то множество его нульмерных подсхем длины $k$ может быть снабжено структурой проективного алгебраического многообразия. Оно называется $k$-й схемой Гильберта точек на $X$ и обозначается $Hilb^k(X)$. Оказывается, имеет место тождество [13]:

$$(1+[Hilb^1(\mathbb{C}^d,0)]\cdot t+[Hilb^2(\mathbb{C}^d,0)]\cdot t^2+\ldots)^{[X]} = \\ = 1+[Hilb^1(X)]\cdot t+[Hilb^2(X)]\cdot t^2+\ldots,$$

где $Hilb^k(\mathbb{C}^d,0)$ — схема Гильберта, параметризующая подсхемы $\mathbb{C}^d$ длины $k$ с носителем в начале координат. Это тождество не следует непосредственно из определения степенной структуры, но выводится из него после некоторой технической работы [13].

Подобные тождества в кольце Гротендика многообразий, которое выглядит довольно абстрактно, имеют вполне конкретные геометрические следствия. Например, эйлерова характеристика — аддитивный инвариант алгебраических многообразий в том смысле, что

$$\chi(X) = \chi(Y) + \chi(X \setminus Y),$$

если $Y$ — замкнутое по Зарисскому подмножество $X$. Кроме того, $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$, поэтому $\chi\colon K_0(Var_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм колец. Есть и другие аддитивные инварианты алгебраических многообразий. Так, существует многочлен Ходжа — Деліня [1]

$$e\colon K_0(Var_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{Z}(u, v),$$

совпадающий для гладких проективных многообразий с производящей функцией для чисел Ходжа:

$$e(X) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} u^i v^j h_{i,j}(X).$$

На кольце многочленов от нескольких переменных тоже существует степенная структура, определяемая соотношением

$$(1-t)^{-\sum a_{\underline{k}} \underline{x}^{\underline{k}}} = \prod (1 - t\underline{x}^{\underline{k}})^{-a_{\underline{k}}}.$$

Известно, что многочлен Ходжа — Деліня осуществляет гомоморфизм кольца Гротендика многообразий в кольцо многочленов от двух переменных. Как доказано в [12], он является и морфизмом степенных структур, то есть если $M, A_1, A_2, \ldots \in K_0(Var_{\mathbb{C}})$, то

$$e((1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots)^M) = (e(1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots))^{e(M)}.$$

В частности,

$$\chi((1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots)^M) = (1 + \chi(A_1) t + \chi(A_2) t^2 + \ldots)^{\chi(M)}.$$

Это соображение позволяет переводить формулы в кольце Гротендика в утверждения о числах Ходжа многообразий. В частности, в примере со схемами Гильберта точек из тождества в кольце Гротендика получается формула Гётше [10] для чисел Бетти схем Гильберта точек. В обозначениях степенной структуры на кольце многочленов она имеет вид:

$$(1 + e(Hilb^1(\mathbb{C}^d, 0)) \cdot t + e(Hilb^2(\mathbb{C}^d, 0)) \cdot t^2 + \ldots)^{e(X)} =$$
$$= 1 + e(Hilb^1(X)) \cdot t + e(Hilb^2(X)) \cdot t^2 + \ldots$$

### 2.2. Специальные $\lambda$-кольца

Пусть $R$ — некоторое коммутативное кольцо с единицей.

**Определение.** Отображение $\lambda_t\colon R \to 1+tR[[t]]$ называется $\lambda$-структурой на $R$, если

$$\lambda_t(X+Y) = \lambda_t(X)\lambda_t(Y).$$

Обычно также считают, что $\lambda_t(X) = 1+tX+\ldots$

Если на кольце задана $\lambda$-структура, то можно определить на нем и степенную структуру, полагая $(1-t)^{-X} = \lambda_t(X)$. С другой стороны, степенная структура на кольце позволяет ввести на нем множество различных степенных структур вида

$$\lambda_t^A(X) = (A(t))^X,$$

где $A(t)$ — произвольный ряд вида $1+t+\ldots$ Тем не менее ниже, если не оговорено обратное, под $\lambda$-структурой на кольце со степенной структурой будет пониматься именно $(1-t)^{-X}$.

Пусть $\sigma_i$ — $i$-й элементарный симметрический многочлен от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_N$, $s_i$ — $i$-й элементарный симметрический многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_N$. Пусть $P_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n; s_1, \ldots, x_n)$ — коэффициент при $t^n$ в ряде

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant N} (1+\xi_i x_j t),$$

а $P_{n,r}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{nr})$ — коэффициент при $t^n$ в ряде

$$\prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant N} (1+\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r} t).$$

Снабдим $1+tR[[t]]$ структурой кольца с $\lambda$-структурой. Сложение задается в нем умножением, умножение $\circ$ формулой

$$(1+a_1t+a_2t^2+\ldots) \circ (1+b_1t+b_2t^2+\ldots) = \\ = 1+\sum_{n=1}^{\infty} P_n(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n)t^n,$$

а $\lambda$-структура формулой

$$\Lambda_r(1+a_1t+a_2t^2+\ldots) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} P_{n,r}(a_1, \ldots, a_{nr})t^n.$$

**Определение.** $\lambda$-структура на кольце $R$ называется *специальной*, если $\lambda_t\colon R \to 1+tR[[t]]$ — гомоморфизм колец, сохраняющий $\lambda$-структуру.

Ф. Хейнлот [7] показала, что $\lambda$-структура на кольце Гротендика мотивов Чжоу является специальной. Неизвестно, верно ли аналогичное утверждение для кольца Гротендика многообразий.

Чтобы использовать это утверждение для вычислений, удобно переформулировать, следуя [14], определение специальной $\lambda$-структуры.

Пусть

$$\lambda_t(X)^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\lambda_t(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(X)t^{n-1}.$$

Тогда определение $\lambda$-структуры эквивалентно равенству

$$\Psi_i(X+Y)=\Psi_i(X)+\Psi_i(Y),$$

а если $\lambda$-структура специальная, то [14]

$$\Psi_i(XY)=\Psi_i(X)\Psi_i(Y)\quad\text{и}\quad\Psi_i\circ\Psi_j=\Psi_{ij}$$

для любых $i$ и $j$.

**Пример.** *Пусть* $X=\mathbb{L}^k$. *Тогда* $\lambda_t(X)=(1-\mathbb{L}^k t)^{-1}$, *откуда*

$$\lambda_t(X)^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\lambda_t(X)=\frac{\mathbb{L}^k}{1-\mathbb{L}^k t},$$

*и*

$$\Psi_n(\mathbb{L}^k)=\mathbb{L}^{kn}.$$

*Так как* $\Psi_n$ *— аддитивные операции, то* $\Psi_n(P(\mathbb{L}))=P(\mathbb{L}^n)$, *следовательно, на подкольце многочленов от* $\mathbb{L}$ $\lambda$*-структура является специальной.*

На самом деле, операции Адамса на кольце многочленов с целыми коэффициентами от любого числа переменных имеют аналогичный вид. Действительно, если $q(\underline{x})=\sum a_{\underline{k}}\underline{x}^{\underline{k}}$, то

$$(1-t)^{-q(\underline{x})}=(1-t)^{-\sum a_{\underline{k}}\underline{x}^{\underline{k}}}=\prod(1-t\underline{x}^{\underline{k}})^{-a_{\underline{k}}},$$

поэтому

$$(1-t)^{q(\underline{x})}\frac{d}{dt}(1-t)^{-q(\underline{x})}=\sum\frac{a_{\underline{k}}x^{\underline{k}}}{1-t\underline{x}^{\underline{k}}}=\sum_{n=1}^{\infty}q(x_1^n,x_2^n,\ldots)t^{n-1},$$

откуда

$$\Psi_n(q(x_1,x_2,\ldots))=q(x_1^n,x_2^n,\ldots).$$

Например, отсюда следует, что $\lambda$-структура на кольце многочленов специальная.

Другим важным примером кольца с естественной специальной $\lambda$-структурой является кольцо Гротендика представлений некоторой конечной группы $G$. Каждому представлению $\rho\colon G\to \mathrm{GL}(V)$ ставится в соответствие его характер $\chi(g)=\operatorname{tr}\rho(g)$, и кольцо Гротендика отождествляется с кольцом (комплекснозначных) функций, принимающих равные значения на сопряженных элементах группы $G$. При этом характер прямой суммы (тензорного произведения) двух представлений равен поточечной сумме (произведению) характеров этих представлений, поэтому отображение характера является гомоморфизмом кольца представлений в кольцо комплекснозначных функций.

На кольце представлений есть естественная $\lambda$-структура:

$$\lambda_t(V)=1+\sum_{k=1}^{\infty}S^kV\cdot t^k.$$

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n$ — собственные числа оператора $\rho(g)$ для некоторого элемента $g\in G$. Тогда собственные числа оператора $S^k\rho(g)$, действующего на пространстве $S^kV$, — всевозможные произведения вида $\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}$, $i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k$. Следовательно,

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}t^k\operatorname{tr}S^k\rho(g)=\prod_{j=1}^{n}(1-\xi_jt)^{-1},$$

откуда значение характера $\Psi_k(\rho)$ на элементе $g$ равно $\xi_1^k+\ldots+\xi_n^k=\chi_\rho(g^k)$. Следовательно, $\Psi_k\chi(g)=\chi(g^k)$, откуда, например, очевидно, что степенная структура специальная.

**Пример.** *Изначально операции Адамса были введены в $K$-теории* [3]. *Пусть $X$ — произвольное топологическое пространство, $K_0(X)$ — группа Гротендика векторных расслоений на нем. На $K_0(X)$ есть естественная $\lambda$-структура: если $E$ — (виртуальное) представление, то*

$$(1-t)^{-E}=1+\sum_{k=1}^{\infty}S^kE\cdot t^k.$$

*Для вычисления операций Адамса удобно воспользоваться принципом расщепления: если $E=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$, $\operatorname{rk}E_i=1$, то*

$$\Psi_k(E)=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i^k.$$

*Доказательство этого факта полностью аналогично предыдущему примеру, и видно, что степенная структура является специальной.*

**Пример.** *Пусть* $R=\bigoplus_{i=0}^{\infty}R_i$ — *градуированное кольцо, то есть* $R_i\cdot R_j\subset R_{i+j}$. *Положим для* $x\in R_j$

$$\Psi_k(x)=k^j\cdot x.$$

*Нетрудно видеть, что построенные операции являются кольцевыми гомоморфизмами и* $\Psi_k(\Psi_m(x))=\Psi_{km}(x)$. *Поэтому* $\Psi_k$ *являются операциями Адамса для некоторой специальной степенной структуры. Ясно, какой вид имеет эта структура: если* $x\in R_j$, *то*

$$(1-t)^{-x}=\exp\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(x)\frac{t^k}{k}\Bigr)=\exp\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty}k^{j-1}t^k\Bigr)=$$
$$=1+t+\Bigl(2^{j-1}+\frac{1}{2}\Bigr)t^2+\Bigl(3^{j-1}+2^{j-1}+\frac{1}{6}\Bigr)t^3+\ldots$$

*Такая странная на первый взгляд степенная структура возникает естественным образом, например, в кольце когомологий четной размерности произвольного топологического пространства* $X$. *Характер Черна* $ch$ *является гомоморфизмом из* $K_0(X)$ *в* $H^{2*}(X)$. *Если* $E$ — *линейное расслоение на* $X$, *то*

$$c_1(\Psi_k(E))=c_1(E^k)=kc_1(E)=\Psi_k(c_1(E)).$$

*Так как* $\Psi_k$ — *кольцевые гомоморфизмы, то*

$$ch(\Psi_k(E)=e^{c_1(\Psi_k(E))}=\Psi_k(e^{c_1(E)})=\Psi_k(ch(E)).$$

*Из принципа расщепления и свойств операций Адамса следует, что и для любого расслоения* $E$

$$ch(\Psi_k(E))=\Psi_k(ch(E)),\quad ch((1-t)^{-E})=(1-t)^{-ch(E)}.$$

## 3. Формула обращения

Доказательство формулы (3), взятое из [12], несложно, но не дает явных формул, выражающих $B_i$ через коэффициенты $A(t)$. Оказывается, такие формулы могут быть легко записаны в терминах введенных операций Адамса.

**Теорема 1.** *Пусть*

$$A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nt^{n-1}.$$

*Тогда*

$$nB_n=\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{s-1}>1\\ i_1\cdot\ldots\cdot i_s=n}}(-1)^{s-1}\Psi_{i_1}\ldots\Psi_{i_{s-1}}(C_{i_s}),$$

*а если соответствующая $\lambda$-структура на кольце специальная, то*

$$nB_n = \sum_{d|n} \mu(d)\Psi_d\big(C_{\frac{n}{d}}\big),$$

*где $\mu$ — функция Мёбиуса.*

**Доказательство**. Заметим, что

$$(1-t^k)^{B_k}\frac{d}{dt}(1-t^k)^{-B_k} = kt^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(B)t^{k(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(kB_k)t^{kn-1},$$

поэтому равенство (3) эквивалентно равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n t^{n-1} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \Psi_m(kB_k)t^{km-1},$$

то есть

$$\sum_{km=n} \Psi_m(kB_k) = C_n.$$

С другой стороны, легко видеть, что выражения для $B_k$ в условии леммы удовлетворяют последнему равенству, что и доказывает лемму. □

**Пример 1.** Пусть $A(t) = \exp(at)$, тогда $C(t) = a$, то есть $C_1 = a$, $C_i = 0, i > 1$. Предположим, что $\lambda$-структура специальная. Тогда

$$nB_n = \sum_{d|n} \mu(d)\Psi_d(C_{\frac{n}{d}}) = \mu(n)\Psi_n(a), \quad B_n = \frac{\mu(n)}{n}\Psi_n(a).$$

Следовательно,

$$\exp(at) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n)^{-\frac{\mu(n)}{n}\Psi_n(a)},$$

где, напомним, возведение в степень в правой части понимается в смысле степенной структуры. В частности, при $a = 1$ получаем равенство формальных рядов

$$e^t = \prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n)^{-\frac{\mu(n)}{n}}.$$

**Пример 2.** Пусть $A(t) = 1 + at$, тогда $C(t) = \frac{a}{1+at}$, откуда $C_j = -(-a)^j$. Предположим, что $\lambda$-структура специальная, тогда

$$nB_n = -\sum_{d|n} \mu(d)\Psi_d((-a)^{\frac{n}{d}}).$$

Значит,

$$\frac{d}{dt}\ln((1+at)^x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n t^{n-1},$$

где

$$D_n = \sum_{km=n} \Psi_m(kB_k \cdot x) = -\sum_{km=n} \Psi_m\left(\sum_{d|k} \mu(d)\Psi_d((-a)^{\frac{k}{d}}) \cdot x\right) = \\ = -\sum_{dsm=n} \mu(d)\Psi_{md}((-a)^s)\Psi_m(x).$$

Таким образом,

$$\ln((1+at)^x) = -\sum_{d,s,m=1}^{\infty} \mu(d)\Psi_{md}((-a)^s)\Psi_m(x)\frac{t^{dsm}}{dsm} = \\ = \sum_{d,m=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{dm}\ln(1+\Psi_{md}(a)t^{md})\Psi_m(x) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\Psi_n(a)t^n)\frac{1}{n}\sum_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\Psi_m(x).$$

Получаем формулу

$$(1+at)^x = \prod_{n=1}^{\infty}(1+\Psi_n(a)t^n)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\Psi_m(x)},$$

где в левой части возведение в степень понимается в смысле степенной структуры, а в правой — в «обычном смысле экспоненты от логарифма».

Рассмотрим, например, кольцо $\Lambda$ многочленов с целыми коэффициентами от бесконечного числа переменных $x_1, x_2, \ldots$ Пусть $p_k = x_1^k + x_2^k + \ldots$ — элементарные многочлены Ньютона. Тогда $\Psi_k(p_1) = p_k$.

Пусть $X$ — квазипроективное алгебраическое многообразие, $F(X,n)$ — множество упорядоченных наборов из $n$ различных точек на $X$, $e^{S_n}_{F(X,n)}(u,v)$ — эквивариантный многочлен Ходжа — Делиня [8] для $F(X,n)$ относительно естественного действия группы перестановок $S_n$ на $F(X,n)$. Пусть $B(X,n)$ — множество неупорядоченных наборов различных точек на $X$. Э. Гетцлер [8] доказал, что имеет место тождество

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} t^n e^{S_n}_{F(X,n)}(u,v) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+p_n t^n)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\Psi_m(e_X(u,v))}.$$

Мы видим, что это равенство можно переписать в виде

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} t^n e_{F(X,n)}^{S_n}(u,v) = (1+p_1t)^{e_X(u,v)}, \tag{4}$$

где правая часть понимается в смысле степенной структуры на кольце $\Lambda\otimes\mathbb{Z}(u,v)$.

**Пример 3а.** Можно показать [2], что после замены всех $p_i$ на 1 в характере представления получится (виртуальная) кратность вхождения тривиального представления в данное. Поэтому если заменить все $p_i$ на 1 в формуле Гетцлера, получится производящая функция для $S_n$-инвариантных подпространств в когомологиях $F(X,n)$, то есть производящая функция для многочленов Пуанкаре (с компактными носителями) факторпространств $B(X,n)=F(X,n)/S_n$. Таким образом,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} t^n P_{B(X,n)}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+t^n)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\Psi_m(P(X))},$$

что, по вышесказанному, совпадает с $(1+t)^{P(X)}$ в смысле степенной структуры. Это совпадение не случайно и следует из геометрического смысла степенной структуры. Если $b_k$ — $k$-е число Бетти многообразия $X$, то

$$(1+t)^{P(X)} = \frac{(1-t^2)^{P(X)}}{(1-t)^{P(X)}} = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{(1-t^2q^k)^{(-1)^k b_k}}{(1-tq^k)^{(-1)^k b_k}}.$$

**Пример 3б.** Петле на $B(X,n)$ соответствует автоморфизм накрытия $F(X,n)\to B(X,n)$, то есть элемент $S_n$. Поэтому, например, знаковому представлению $S_n$ соответствует некоторое одномерное представление $\pi_1(B(X,n))$.

Можно показать [2], что после замены $p_i$ на $(-1)^{i-1}$ в характере представления получится (виртуальная) кратность вхождения знакового представления в данное. Поэтому если заменить все $p_i$ на $(-1)^{i-1}$ в формуле Гетцлера, то получится производящая функция для многочленов Пуанкаре (с компактными носителями) $B(X,n)$ с коэффициентами в знаковом представлении. Таким образом,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^k \dim H_c^k(B(X,n),\pm\mathbb{C}) =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^{n-1}t^n)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu(n/m)\Psi_m(P(X))},$$

что по вышесказанному совпадает с $(1-u)^{P(X)}|_{u=-t}$ в смысле степенной структуры. Если $b_k$ — $k$-е число Бетти $X$, то

$$(1-u)^{P(X)}|_{u=-t} = \prod_{k=0}^{\infty}(1-uq^k)^{(-1)^k b_k}|_{u=-t} = \prod_{k=0}^{\infty}(1+tq^k)^{(-1)^k b_k}.$$

**Пример 3в.** Можно показать [2], что коэффициент при $p_1^n$ в характере представления $S_n$ равен (виртуальной) размерности представления, умноженной на $n!$. Поэтому если заменить все $p_i$ на 0 при $i>0$ в формуле Гетцлера, то получится экспоненциальная производящая функция для многочленов Пуанкаре (с компактными носителями) $F(X,n)$. Таким образом,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}P_{F(X,n)}(q) = (1+t)^{P(X)},$$

где возведение в степень понимается в «обычном» смысле.

**Пример 4.** О. Томмаси [4, 16] доказала, что гомологии пространства модулей гиперэллиптических кривых любого рода тривиальны (но имеют ненулевой вес). Используя степенную структуру, легко проверить, что многочлен Ходжа — Деліня пространства модулей гиперэллиптических кривых рода $g$ равен $(uv)^{4g-2}$. Действительно, всякая гиперэллиптическая кривая взаимно однозначно соответствует набору из $2g+2$ неупорядоченных различных точек на $\mathbb{P}^1$ с точностью до действия $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. Проективизация пространства матриц $2\times 2$ — это $\mathbb{CP}^3$, его класс в кольце Гротендика равен $\mathbb{L}^3+\mathbb{L}^2+\mathbb{L}+1$. Вырожденные матрицы лежат на квадрике Сегре, класс которой равен $(1+\mathbb{L})^2=1+2\mathbb{L}+\mathbb{L}^2$. Значит,

$$[\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})] = (\mathbb{L}^3+\mathbb{L}^2+\mathbb{L}+1)-(1+2\mathbb{L}+\mathbb{L}^2) = \mathbb{L}^3-\mathbb{L}.$$

С другой стороны, производящая функция для классов неупорядоченных наборов точек на $\mathbb{P}^1$ имеет вид:

$$(1+t)^{1+\mathbb{L}} = (1+t)\cdot\frac{(1-t)^{-\mathbb{L}}}{(1-t^2)^{-\mathbb{L}}} = \frac{(1-\mathbb{L}t^2)(1+t)}{(1-\mathbb{L}t)}.$$

Коэффициент при $t^k$ в разложении этой функции равен $\mathbb{L}^k-\mathbb{L}^{k-2}$ при $k\geqslant 4$. Поэтому класс пространства модулей гиперэллиптических кривых в кольце Гротендика равен

$$\frac{\mathbb{L}^{2g+2}-\mathbb{L}^{2g}}{\mathbb{L}^3-\mathbb{L}} = \mathbb{L}^{2g-1},$$

что и требовалось доказать.

Оказывается, равенство из примера 2 может быть обобщено на произвольные ряды.

**Теорема 2.** $(1+A_1t+A_2t^2+\ldots)^X=$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1+\Psi_n(A_1)t^n+\Psi_n(A_2)t^{2n}+\ldots)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\Psi_m(X)}, \qquad (5)$$

*где в левой части возведение в степень понимается в смысле степенной структуры, а в правой — в смысле «экспоненты от логарифма».*

**Доказательство**. Докажем сначала, что правая часть равенства (5) задает степенную структуру. Свойства 1, 3, 4, 6, 7 очевидны. Свойство 2 следует из равенства $\sum\limits_{m|n}\mu(n/m)=\delta_{n,1}$. Докажем свойство 5. С точки зрения этой (предполагаемой) структуры

$$((A(t))^X)^Y=\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+\Psi_n(A_1)t^n+\Psi_n(A_2)t^{2n}+\ldots)^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu(n/m)\Psi_m(X)}\right]^Y=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\Psi_k\left[(\Psi_n(A)(t^{kn}))^{\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu(n/m)\Psi_m(X)}\right]^{\frac{1}{k}\sum\limits_{l|k}\mu(k/l)\Psi_l(Y)}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(\Psi_{kn}(A)(t^{kn}))^{\frac{1}{kn}\sum\limits_{m|n}\sum\limits_{l|k}\mu(n/m)\mu(k/l)\Psi_km(X)\Psi_l(Y)}.$$

Положим $a=kn$, $b=km$.Тогда $n/m=a/b$. Заметим, что

$$\sum_{k:\,k|b,\ l\,|\,k}\mu(k/l)=\sum_{f\,|(b/l)}\mu(f)=\delta_{b/l,1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{kn=a}\sum_{m|n}\sum_{l|k}\mu(n/m)\mu(k/l)\Psi_{km}(X)\Psi_l(Y)=$$

$$=\sum_{b|a}\mu(a/b)\Psi_b(X)\Psi_b(Y)=\sum_{b|a}\mu(a/b)\Psi_b(XY).$$

Поэтому

$$\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(\Psi_{kn}(A)(t^{kn}))^{\frac{1}{kn}\sum\limits_{m|n}\sum\limits_{l|k}\mu(n/m)\mu(k/l)\Psi_km(X)\Psi_l(Y)}=$$

$$=\prod_{a=1}^{\infty}(\Psi_a(A)(t^a)^{\frac{1}{a}\sum\limits_{b|a}\mu(a/b)\Psi_b(XY)}.$$

Таким образом, свойство 5 также выполнено, и правая часть (5) задает степенную структуру. Осталось проверить совпадение этой структуры с исходной на $A(t)=(1-t)^{-X}$. Прологарифмировав выражение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-t^n)^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{m|n}\mu(n/m)\Psi_m(X)}, \tag{6}$$

получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{m|n}\mu(n/m)\Psi_m(X)\ln(1-t^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m|n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mu(n/m)\frac{1}{k}t^{kn}\Psi_m(X)=$$
$$=\sum_{s,m=1}^{\infty}\sum_{l|s/m}\mu(l)\frac{1}{s}t^s\Psi_m(X)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}t^s\Psi_m(X).$$

Поэтому логарифмическая производная (6) равна

$$\sum_{s=1}^{\infty}t^{s-1}\Psi_m(X),$$

что и требовалось доказать. □

**Пример 5.** Пусть $P_N$ — проективизация множества многочленов степени $N$ от $n$ переменных, а $Irr_N$ — проективизация множества неприводимых многочленов степени $N$ от $n$ переменных.

Класс $P_N$ в кольце Гротендика равен

$$[P_N]=\frac{\mathbb{L}^{\binom{n}{n+N}}-\mathbb{L}^{\binom{n}{n+N-1}}}{\mathbb{L}-1}.$$

Пусть

$$P(\mathbb{L},t)=1+\sum_{N=1}^{\infty}[P_N]t^N.$$

Заметим, что $(\mathbb{L}-1)P(\mathbb{L},t)$ — степенной ряд по переменным $\mathbb{L}$ и $t$, поэтому $P(\mathbb{L},t)$ можно единственным образом разложить в степенной ряд по $\mathbb{L}$ и $t$, начинающийся с 1.

Пусть

$$P(\mathbb{L},t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbb{L},t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(\mathbb{L})t^{n-1}.$$

**Теорема 3.** $n[Irr_n]=\sum\limits_{d|n}\mu(d)C_{\frac{n}{d}}(\mathbb{L}^d)$.

**Доказательство**. Так как в кольце многочленов разложение на неприводимые множители однозначно с точностью до умножения на константу, то можно определить множество $P_{i_1 i_2 \dots}$ многочленов, в разложении которых $i_1$ неприводимых множителей степени 1, $i_2$ — степени 2 и т. д. ($i_k = 0$ для достаточно больших $k$).

Заметим, что

$$P_{i_1 i_2 \dots} = (S^{i_1} Irr_1) \times (S^{i_2} Irr_2) \times \dots$$

и

$$P_N = \bigsqcup_{i_1 + 2i_2 + \dots = N} P_{i_1 i_2 \dots},$$

поэтому

$$P(\mathbb{L}, t) = \sum_{N=0}^{\infty} [P_N] t^N = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-[Irr_k]}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из леммы 1 и примера перед ней. □

**Следствие 4.** Многочлен Ходжа — Деліня проективизации множества неприводимых многочленов определяется формулой

$$n \cdot e_{Irr_n}(u, v) = \sum_{d|n} \mu(d) C_{\frac{n}{d}}(u^d v^d).$$

Можно, например, вычислить эйлерову характеристику $Irr_i$. Действительно,

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - t^i)^{-\chi(Irr_i)} = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Логарифмируя, получаем

$$\sum_i \chi(Irr_i) \ln(1 - t^i) = n \ln(1 - t),$$

или

$$\sum_n \chi(Irr_i) \sum_l t^{il}/l = n \sum_k t^k/k.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$\sum_{i|k} i \chi(Irr_i) = n,$$

откуда по формуле обращения Мёбиуса

$$\chi(Irr_i) = \frac{2}{i} \sum_{k|i} \mu(i),$$

что равно $n$ при $i = 1$ и 0 при больших $i$.

## 4. Плетизмы и представления симметрических групп

Пусть $\Lambda$ — кольцо симметрических многочленов от бесконечного количества переменных. На $\Lambda$, как и на любом кольце многочленов, есть естественная $\lambda$-структура. Легко проверить, что она является специальной.

Для любого $\lambda$-кольца $R$ можно построить естественное отображение, по паре элементов $f \in \Lambda$ и $X \in R$ строящее элемент $f \circ X$ и удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $(f_1 + f_2) \circ X = f_1 \circ X + f_2 \circ X$;

2) $(f_1 f_2) \circ X = (f_1 \circ X)(f_2 \circ X)$;

3) $p_k \circ X = \Psi_k(X)$.

Несложное вычисление показывает, что

$$(1-t)^{-X} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \circ X t^k.$$

Можно проверить, что $\lambda$-кольцо специальное тогда и только тогда, когда для любых $f, g, X$ $(f \circ g) \circ X = f \circ (g \circ X)$.

Рассмотрим прямую сумму колец представлений групп $S_k$ по всем $k$. Каждому представлению $V$ группы $S_k$ можно поставить в соответствие характер — однородный многочлен из $\Lambda$ степени $k$, определяющийся формулой

$$ch(V) = \sum_{\sigma \in S_k} Tr(\sigma|_V) \cdot p_1^{i_1(\sigma)} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k(\sigma)},$$

где $i_s(\sigma)$ — количество циклов длины $s$ в подстановке $\sigma$.

Как показано в [2], «естественные» операции над представлениями соответствуют естественным операциям над их характерами: характер прямой суммы представлений равен сумме их характеров, если $V$ — представление $S_k$, а $W$ — представление $S_m$, то характер представления $Ind_{S_k \times S_m}^{S_{k+m}}(V \otimes W)$ равен произведению характеров $V$ и $W$. Кроме того, на представлениях есть и так называемая операция плетизма: если $V$ — представление $S_k$, а $W$ — представление $S_m$, то на $V \otimes W^{\otimes k}$ естественным образом действует полупрямое произведение групп $S_k$ и $(S_m)^k$. Плетизмом называется представление

$$V \circ W = Ind_{S_k \propto (S_m)^k}^{S_{km}}(V \otimes W^{\otimes k}).$$

Оказывается [2],

$$ch(V \circ W) = ch(V) \circ ch(W).$$

В частности, если $V$ — тривиальное одномерное расслоение $S_k$, то $ch(V)=h_k$, а $ch(V\circ W)=h_k\circ ch(W)$. Например, производящая функция для характеров таких представлений равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k\circ ch(W) = (1-t)^{-ch(W)}.$$

Рассмотрим прямую сумму колец Гротендика представлений всех симметрических групп:

$$R=\bigoplus_{n=1}^{\infty} R(S_n).$$

Умножение на кольце $R$ зададим формулой

$$V\odot W = Ind_{S_k\times S_m}^{S_{k+m}}(V\otimes W),$$

если $V$ — представление $S_k$, а $W$ — представление $S_m$ (произведение будет представлением $S_{k+m}$).

Как показано в [2, 14], отображение характера осуществляет изоморфизм этого кольца на кольцо $\Lambda$. При этом, как видно из приведенных формул, степенной структуре на кольце многочленов соответствует степенная структура на кольце $R$, для которой

$$(1-t)^{-W} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\cdot Ind_{S_k\propto (S_m)^k}^{S_{km}} W^{\otimes k}$$

для представления $W$ группы $S_m$.

## 5. Пространства модулей кривых

Как уже упоминалось выше, О. Томмаси доказала, что рациональные когомологии пространства модулей гиперэллиптических кривых любого рода тривиальны. Следовательно, так как любая гладкая комплексная кривая рода 2 является гиперэллиптической, то когомологии пространства модулей $\mathcal{M}_2$ кривых рода 2 также тривиальны. Это означает, что описанная выше техника может дать выражение для $S_n$-эквивариантной эйлеровой характеристики (или многочлена Ходжа — Деліня) пространства $\mathcal{M}_{2,n}$ модулей кривых рода 2 с $n$ отмеченными точками для всех $n$.

Ситуация, однако, осложняется тем, что отображение забывания $\mathcal{M}_{2,n}\to\mathcal{M}_2$ не является настоящим расслоением. Дело в том, что кривые могут иметь нетривиальную группу автоморфизмов (например, любая гиперэллиптическая кривая имеет нетривиальный автоморфизм — гиперэллиптическую инволюцию), и слоем отображения забывания будет фактор пространства наборов различных упорядоченных точек на кривой по действию группы автоморфизмов кривой.

Рассмотрим следующую задачу: пусть на многообразии $X$ действует конечная группа $G$, причем каждый ее нетождественный элемент имеет конечное количество неподвижных точек. Пусть $\nu(g)$ — порядок элемента $g$. Пусть также $O_k(g)$ — число орбит длины $k$ действия элемента $g$ (конечно, $1\leqslant k\leqslant \nu(g)-1$ и $k\,|\,\nu(g)$).

**Теорема 4.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \chi^{S_n}(F(X,n)/G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \frac{\prod_{k|\nu(g)}(1+p_k t^k)^{O_k(g)}\cdot(1+p_{\nu(g)}t^{\nu(g)})^{\frac{\chi(X)}{\nu(g)}}}{(1+p_{\nu(g)}t^{\nu(g)})^{\frac{1}{\nu(g)}\sum\limits_{l|\nu(g)} l\cdot O_l(g)}}.$$

**Доказательство**. Пусть $R\in Rep(G)$ — знакопеременная сумма когомологий $X$ как представлений $G$ (лежащая в кольце Гротендика представлений группы $G$). Тогда по формуле Гетцлера аналогичная сумма для $S_n$-эквивариантных когомологий $F(X,n)$ равна

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k t^k)^{\frac{1}{k}\sum\limits_{d|k}\mu(k/d)\Psi_d(R)},$$

и ее характер на элементе $g$ равен

$$\xi(g) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k t^k)^{\frac{1}{k}\sum\limits_{d|k}\mu(k/d)\chi(g^d)},$$

если $\chi$ — характер представления $R$. Заметим, что из теоремы Лефшеца следует, что $\chi(e)=\chi(X)$, а для остальных $g$ $\chi(g)$ равно количеству неподвижных точек отображения $g$. Кроме того, размерность $G$-инвариантной части в когомологиях $F(x,n)$ равна

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\xi(g).$$

Пусть порядок $g$ равен $\nu$. Тогда если $d$ делится на $\nu$, то $\chi(g^d) = \chi(X)$, а в противном случае количество неподвижных точек $g^d$ равно количеству точек в орбитах, длина которых делит $d$, то есть $\sum\limits_{l|d} l\cdot O_l(g)$. Таким образом,

$$\frac{1}{k}\sum_{d|k}\mu(k/d)\chi(g^d) = \frac{1}{k}\sum_{d|k,\ \nu\,|\,d}\mu(k/d)\chi(X) + \frac{1}{k}\sum_{d|k,\ \nu\nmid d}\mu(k/d)\sum_{l|d} l\cdot O_l(g).$$

Заметим, что

$$\frac{1}{k}\sum_{d|k}\mu(k/d)\sum_{l|d}l\cdot O_l(g)=\frac{1}{k}\sum_{l|k}l\cdot O_l(g)\sum_{d|k,\ l\,|\,d}\mu(d)=\frac{1}{k}k\cdot O_k(g)=O_k(g),$$

$$\frac{1}{k}\sum_{d|k,\ \nu|d}\mu(k/d)\sum_{l|d}l\cdot O_l(g)=\frac{1}{k}\sum_{d|k,\ \nu|d}\mu(k/d)\sum_{l|\nu}l\cdot O_l(g)=\delta_{\nu,k}\frac{1}{k}\sum_{l|\nu}l\cdot O_l(g),$$

$$\frac{1}{k}\sum_{d|k,\ \nu\,|\,d}\mu(k/d)\chi(X)=\delta_{k,\nu}\frac{1}{k}\chi(X).$$

Объединяя эти ответы, получим

$$\xi(g)=\prod_{k|\nu}(1+p_kt^k)^{O_k(g)}\cdot(1+p_\nu t^\nu)^{\frac{1}{\nu}\chi(X)}(1+p_\nu t^\nu)^{\frac{1}{\nu}\sum\limits_{l|\nu}l\cdot O_l(g)},$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

**Следствие 5.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\chi(F(X,n)/G)=\frac{1}{|G|}((1+t)^{\chi(X)}+\sum_{g\neq e}(1+t)^{L(g)}),$$

где $L(g)=O_1(g)$ — число неподвижных точек отображения $g$.

**Замечание.** Нужно отметить, что показатель степени выражения $1+p_{\nu(g)}t^{\nu(g)}$ в формулировке теоремы 4 является целым числом. Действительно, он равен

$$\frac{1}{\nu(g)}\Big(\chi(X)-\sum l\cdot O_l(g)\Big),$$

то есть эйлеровой характеристике факторпространства точек, орбита которых состоит из $\nu(g)$ точек, по (свободному) действию циклической подгруппы, порожденной $g$. Вообще, если обозначить через $X_k(g)$ множество точек на $X$, орбита которых при действии элементом $g$ имеет длину $k$, то полученную формулу можно переписать в таком виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n\chi^{S_n}(F(X,n)/G)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{k|\nu(g)}(1+p_kt^k)^{\chi(X_k(g)/<g>)}.$$

Для вычисления эквивариантной эйлеровой характеристики $\mathcal{M}_{2,n}$ нужно описать гиперэллиптические кривые, имеющие дополнительные симметрии. Для этого нужно описать наборы из 6 точек на $\mathbb{CP}^1$, имеющие нетривиальные группы симметрий, и найти эйлеровы характеристики пространств модулей соответствующих кривых.

Сумма эйлеровых характеристик равна 1 согласно теореме О. Томмаси ([16],[4], см. выше).

Сумма эйлеровых характеристик стратов, деленных на порядки соответствующих групп симметрий (орбифолдная эйлерова характеристика), равна $-\frac{1}{240}$ в согласии с формулой Харера — Загира [6]:

$$\chi_{orb}(\mathscr{M}_{g,n}) = (-1)^n \frac{(2g-3+n)!(2g-1)}{(2g)!} B_{2g},$$

где $B_{2g}$ — числа Бернулли. При $g=2$ $B_{2g}=\frac{-1}{30}$, откуда

$$\chi_{orb}(\mathscr{M}_{2,0}) = \frac{1\cdot 3}{4!}\cdot\frac{-1}{30} = \frac{-1}{240}.$$

Сложив ответы для разных стратов, получим [11]

**Предложение.**

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty} t^n \chi^{S_n}(\mathscr{M}_{2,n}) = -\frac{1}{240}(1+p_1t)^{-2} - \frac{1}{240}(1+p_1t)^6(1+p_2t^2)^{-4} + \\ +\frac{2}{5}(1+p_1t)^3(1+p_5t^5)^{-1} + \frac{2}{5}(1+p_1t)(1+p_2t^2)(1+p_5t^5)(1+p_{10}t^{10})^{-1} + \\ +\frac{1}{6}(1+p_1t)^2(1+p_2t^2)(1+p_6t^6)^{-1} - \frac{1}{12}(1+p_1t)^4(1+p_3t^3)^{-2} - \\ -\frac{1}{12}(1+p_2t^2)^2(1+p_3t^3)^2(1+p_6t^6)^{-2} + \frac{1}{12}(1+p_1t)^2(1+p_2t^2)^{-2} + \\ +\frac{1}{4}(1+p_1t)^2(1+p_4t^4)(1+p_8t^8)^{-1} - \frac{1}{8}(1+p_1t)^2(1+p_2t^2)^2(1+p_4t^4)^{-2}.\end{gathered}$$

Используя программу Maple, получим

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} t^n \chi^{S_n}(\mathscr{M}_{2,n}) &= 1 + 2p_1\cdot t + p_1^2\cdot t^2 + \left(\frac{1}{2}p_4 + \frac{2}{3}p_1p_3 - \frac{1}{6}p_1^4\right)\cdot t^4 + \ldots = \\ &= 1 + 2s_1\cdot t^4 + (s_1+s_2)\cdot t^2 + (s_4 - s_{3,1} - s_{2,2})\cdot t^4 + \ldots,\end{aligned}$$

что согласуется с ответами, полученными Гетцлером [9], а также Томмаси и Бергстрёмом [4].

Автор благодарен С. М. Гусейн-Заде, М. Э. Казаряну и С. К. Ландо за многочисленные обсуждения.

## Литература

1. *Данилов В. И., Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и алгоритм вычисления чисел Ходжа — Деліня // Изв. АН СССР. Сер. математ. Т. 50, № 5. 1986. С. 925—945.

2. *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.
3. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
4. *Bergström J., Tommasi O.* The rational cohomology of $\bar{\mathscr{M}}_4$. arXiv:math.AG/0506502.
5. *Bourqui D.* Produit eulérien motivique et courbes rationnelles sur les variétés toriques. arXiv:math.NT/0602094
6. *Harer J., Zagier D.* The Euler characteristic of the moduli space of curves // Invent. Math. 1986. Vol. 85. P. 457—485.
7. *Heinloth F.* A note on functional equations for zeta functions with values in Chow motives. arXiv:math.AG/0512237
8. *Getzler E.* Mixed Hodge structures of configuration spaces. arXiv:math.AG/9510018.
9. *Getzler E.* Topological recursion relations in genus 2. arXiv:math.AG/9801003.
10. *Goettsche L.* The Betti numbers of the Hilbert schemes of points on a smooth projective surface // Math. Ann. 1990. Vol. 286. P. 193—207.
11. *Gorsky E.* On the $S_n$-equivariant Euler characteristic of $\mathscr{M}_{2,n}$. arXiv:math.AG/0707.2662.
12. *Gusein-Zade S. M., Luengo I., Melle-Hernández A.* A power structure over the Grothendieck ring of varieties // Math. Res. Lett. 2004. Vol. 11, № 1. P. 49—57.
13. *Gusein-Zade S. M., Luengo I., Melle-Hernández A.* Power structure over the Grothendieck of varieties and generating functions of Hilbert schemes of points.
14. *Knutson D.* $\lambda$-rings and the representation theory of the symmetric group. Berlin: Springer, 1973.(Lecture Notes in Math.; № 308).
15. *Rodriguez-Villegas F.* Counting colorings on the varieties. arXiv:math.NT/0612664.
16. *Tommasi O.* Rational cohomology of the moduli space of genus 4 curves. arXiv:math.AG/0312055.

# О логических теориях и конечных автоматах на бесконечных последовательностях

Юрий Притыкин

*2006, второе место в номинации «Студенты»*

В работе показан пример связи логики и комбинаторики. Обсуждается связь вопросов разрешимости монадических теорий второго порядка бесконечных последовательностей и конечно-автоматных преобразователей, действующих на бесконечных последовательностях.

## 1. Введение

Рассмотрим следующий общий вопрос: дана функция — какие у нее свойства и как научиться их определять? Ограничимся функциями вида $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, принимающими лишь конечное множество различных значений. Такие функции мы будем отождествлять с последовательностями букв конечного алфавита.

Рассмотрим следующие простые вопросы о последовательности $x$: входит ли в $x$ символ $a$? Входит ли слово $u$? Входит ли слово $u$ бесконечно много раз? Можно сформулировать и более сложные вопросы про последовательность. Различные, в том числе и перечисленные только что, свойства бесконечных последовательностей могут быть выражены в *логической теории первого порядка*. Под такой теорией для последовательности $x \in A^{\mathbb{N}}$ мы будем понимать следующее. Формально, в качестве структуры возьмем $\langle \mathbb{N}, S, <, X \rangle$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, которое пробегают индивидные переменные, $S$ — двухместный предикат следования, $<$ — двухместный предикат порядка на натуральных числах, $X$ — функциональный символ, интерпретируемый как последовательность $x\colon \mathbb{N} \to A$. В качестве теории берем обычную теорию первого порядка, истинность формул интерпретируем естественным образом. Во всех рассматриваемых нами теориях мы подразумеваем наличие двухместного предиката равенства, интерпретируемого естественным образом.

Ясно, что у такой реализации есть много вариантов, эквивалентных между собой по выразительным способностям. Например, можно было вместо двухместного предиката следования взять в структуру одноместную функцию следования. Можно было и не брать предикат следования вообще, потому что он выразим через неравенство. Точно так же вместо одной функции $X$ можно было взять семейство предикатов $X_a$ по одному для каждого $a \in A$, истинных ровно там, где в $x$ стоит буква $a$. Можно обойтись и меньшим — логарифмическим по отношению к размеру алфавита последовательности — количеством предикатов. Кроме того, поскольку константа 0 выразима в определенной выше структуре, ясно, что можно было, не меняя множество выразимых формул, добавить в структуру все константы.

Теорию, определенную выше, будем обозначать $\mathrm{T}\,x$.

Несложно видеть, что простые свойства последовательности $x$, типа упомянутых в начале раздела, можно выразить в теории $\mathrm{T}\,x$. Например, формула $\forall p\, \exists q\, \exists r\, (q > p) \wedge S(q,r) \wedge X(q) = 0 \wedge X(r) = 1$ означает свойство вхождения в $x$ бесконечное количество раз слова 01. Тем не менее, некоторые достаточно просто формулируемые свойства, которые, возможно, хотелось бы выразить, в теории первого порядка выразить нельзя, например, «бесконечное слово в алфавите $\{a, b\}$, в котором между любыми последовательными вхождениями $b$ (такими, между которыми нет других вхождений $b$) входит нечетное количество букв $a$».

Гораздо больше можно выразить в более сильной *монадической теории второго порядка*. В такой теории, кроме обычных переменных по натуральным числам $p, q, \ldots$, разрешены также монадические переменные по множествам (или по одноместным предикатам) $P, Q, \ldots$ Вводятся также соответствующие атомарные формулы вида $P(p), Q(p), \ldots$, обозначающие «$p$ принадлежит $P$», «$p$ принадлежит $Q$»... Разрешены также кванторы по монадическим переменным. Такую теорию мы будем обозначать $\mathrm{MT}\,x$.

Теории, аналогичные вышеперечисленным, но не расширенные последовательностью, будем обозначать соответственно $\mathrm{T}\langle\mathbb{N}, <\rangle$, $\mathrm{MT}\langle\mathbb{N}, <\rangle$.

Теория $\mathrm{MT}\,x$ богаче теории $\mathrm{T}\,x$. Например, упомянутое выше не выразимое в теории первого порядка свойство в монадической теории выражается так:

$$\forall p \forall q((X(p) = b) \wedge (X(q) = b) \wedge (p < q) \wedge \forall r((p < r) \wedge (r < q) \to$$
$$\to (X(r) = a)) \to \exists Y(\forall u \forall v(S(u,v) \to (Y(u) \leftrightarrow \neg Y(v))) \wedge Y(p) \wedge Y(q)))$$

Как и в случае с теориями первого порядка, в описанной формализации монадической теории многое можно реализовать по-другому. Например, можно отказаться от неравенства, потому что в монадической теории оно выразимо через следование. Мы будем переходить от одной реализации к другой для удобства.

Для формулы $\varphi$ в любом из вышеописанных языков будем обозначать через $L(\varphi)$ множество всех последовательностей $x$, для которых эта формула верна (то есть верна, если интерпретировать входящую в нее единственную свободную переменную по функциям $X$ как $x$).

Естественным (и основным для нас) вопросом о любой теории является вопрос о ее разрешимости. Теория *разрешима*, если существует алгоритм, который по любой замкнутой формуле определяет ее истинность.

Основной вопрос здесь — полностью описать класс последовательностей, для которых разрешима их монадическая теория. В такой формулировке вопрос не решен и, видимо, удовлетворительно решен быть не может.

Однако благодаря применению теории автоматов для достаточно широких классов последовательностей можно получить критерий разрешимости их монадических теорий. В разделе 2 мы определяем автоматы Бюхи и Мюллера на последовательностях и обсуждаем, как они связаны с вопросами разрешимости логических теорий. В разделе 3 мы определяем некоторые классы последовательностей со свойствами, близкими к свойствам периодических последовательностей. В разделе 4 мы обсуждаем результаты о конечно-автоматных преобразованиях последовательностей со свойствами типа почти периодичности и следствия из этих результатов о разрешимости монадических теорий таких последовательностей.

Подробнее о монадических теориях последовательностей см., например, [3, 15, 16]. Настоящая статья получена переработкой из нескольких разделов обзорной статьи [17]. В частности, в [17] можно найти доказательства многих результатов, которые ниже приводятся без доказательства. О морфических и автоматных последовательностях, о которых идет речь в конце статьи, можно также прочесть в монографии [5].

## 2. Монадические теории и конечные автоматы

Назовем (недетерминированным) *автоматом Бюхи* совокупность $M = \langle A, Q, \widetilde{q}, \Delta, F\rangle$, где $A$ — входной алфавит, $Q$ — множество состояний, $\widetilde{q} \in Q$ — начальное состояние, $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$ — множество переходов, $F \subseteq Q$ — множество заключительных состояний. Ходом автомата $M$ на последовательности $x = x(0)x(1)x(2)\ldots$ называется такая последовательность состояний $\rho = \rho(0)\rho(1)\rho(2)\ldots$, что $\rho(0) = \widetilde{q}$ и $\langle \rho(i), x(i), \rho(i+1)\rangle \in \Delta$ для любого $i$. Мы говорим, что автомат $M$ *принимает* $x$, если существует хотя бы один ход $\rho$ автомата $M$ на $x$, для которого хотя бы одно состояние, встречающееся в $\rho$ бесконечное количество раз, входит в множество заключительных состояний $F$. Определяя *детерминированный автомат Бюхи*, множество переходов $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$ можно заменить на функцию переходов $\delta\colon Q \times A \to Q$ (с естественными изменениями для определения хода автомата).

Есть немного другой вариант понятия автомата на последовательности. Назовем (недетерминированным) *автоматом Мюллера* совокупность $M = \langle A, Q, \widetilde{q}, \Delta, \mathscr{F}\rangle$, где $A$ — входной алфавит, $Q$ — множество состояний, $\widetilde{q} \in Q$ — начальное состояние, $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$ — множество переходов, $\mathscr{F} \subseteq 2^Q$ — множество заключительных макросостояний. Здесь под *макросостоянием* мы понимаем элемент множества $2^Q$, то есть произвольное подмножество множества состояний $Q$. Ходом автомата $M$ на последовательности $x = x(0)x(1)x(2)\ldots$ называется такая последовательность состояний $\rho = \rho(0)\rho(1)\rho(2)\ldots$, что $\rho(0) = \widetilde{q}$ и $(\rho(i), x(i), \rho(i+1)) \in \Delta$ для любого $i$. Назовем *пределом (предельным макросостоянием)* автомата $M$ на последовательности $x$ вдоль хода $\rho$ множество всех таких состояний, которые встречаются в $\rho$ бесконечное количество раз, обозначим это множество через $\lim_\rho M$. Мы говорим, что автомат $M$ *принимает* $x$, если существует хотя бы один ход $\rho$ автомата $M$ на $x$, для которого $\lim_\rho M \in \mathscr{F}$. Другими словами, слово принимается, если хотя бы на каком-нибудь ходе предельное макросостояние принадлежит множеству заключительных макросостояний $\mathscr{F}$. Аналогично предыдущему, определяя *детерминированный автомат Мюллера*, множество переходов $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$ можно заменить на функцию переходов $\delta\colon Q \times A \to Q$ (с естественными изменениями для определения хода автомата).

Для автомата $M$ Бюхи или Мюллера множество всех последовательностей, которые принимаются автоматом $M$, обозначим $L(M)$.

Для примера рассмотрим множество $L$ последовательностей в алфавите $\{a, b, c\}$, в которые если $a$ входит бесконечное количество раз, то и $b$ входит бесконечное количество раз. Автоматы Мюллера и Бюхи, принимающие в точности слова множества $L$, показаны на рис. 1 (автомат Бюхи понадобился недетерминированный).

Это пример общей ситуации.

**Теорема 2.1** [10]. *Недетерминированные автоматы Бюхи, недетерминированные автоматы Мюллера и детерминированные автоматы Мюллера распознают один и тот же класс множеств последовательностей. Более того, по автомату одного типа можно получать эквивалентный автомат другого типа алгоритмически.*

Множество последовательностей, распознаваемое автоматом Мюллера или автоматом Бюхи, будем называть *регулярным*. Детерминированные автоматы Бюхи распознают меньший класс множеств.

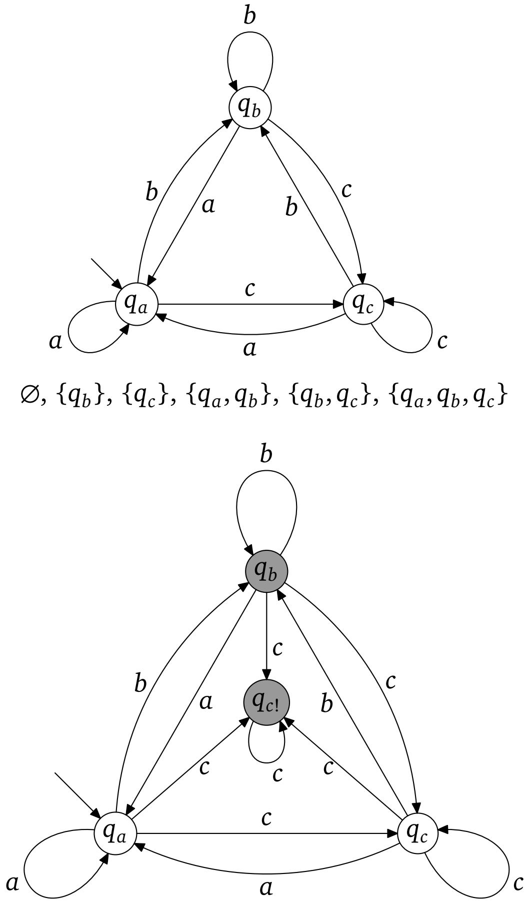



**Рис. 1.** Пример автомата Мюллера (вверху) и автомата Бюхи (внизу), принимающих одно и то же множество последовательностей. Множество принимающих макросостояний автомата Мюллера дано списком. Принимающие состояния автомата Бюхи отмечены темным цветом

Оказывается, между описанием множеств последовательностей с помощью конечных автоматов и описанием их формулами монадического языка есть прямая связь.

**Теорема 2.2** [6]**.** *Существует алгоритм, который по каждому автомату Бюхи* $M$ *строит формулу* $\varphi$ *монадического языка, такую что* $L(M)=L(\varphi)$*, и наоборот, по любой формуле* $\varphi$ *строит такой автомат Бюхи* $M$*, что* $L(\varphi)=L(M)$*.*

**Следствие 2.3.** Множество последовательностей регулярно тогда и только тогда, когда оно выразимо в монадическом языке.

**Следствие 2.4** [6]. Теория MT$\langle\mathbb{N},<\rangle$ разрешима.

Нас же интересует ситуация, когда теория MT$\langle\mathbb{N},<\rangle$ расширена последовательностью. Несложно видеть, что выполняется следующее следствие из теоремы Бюхи (теоремы 2.2).

**Следствие 2.5.** Монадическая теория последовательности $x$ разрешима тогда и только тогда, когда существует алгоритм, который по любому автомату Бюхи (или любому детерминированному автомату Мюллера) может определить, принимает ли этот автомат последовательность $x$ или нет.

Следствие 2.5 дает способ устанавливать разрешимость монадических теорий некоторых типов последовательностей.

## 3. Почти периодичность

Последовательность $x$ *периодическая*, если для некоторого $T\in\mathbb{N}$, называемого *периодом*, имеем $x(i)=x(i+T)$ для любого $i\in\mathbb{N}$. В соответствии с общепринятым соглашением, периодом мы называем также и слово $x[0,T-1]$. Будем называть последовательность *заключительно периодической*, если то же выполнено для всех $i$, начиная с некоторого $K$. Тогда $x[0,K-1]$ называется *предпериодом*. Предпериодом будем называть также и число $K$. Последовательность, не являющаяся заключительно периодической, называется *апериодической*. Множество всех периодических последовательностей обозначим $\mathscr{P}$, множество заключительно периодических обозначим $\mathscr{EP}$. Рассмотрим некоторые расширения этих классов.

Последовательность $x$ называется *почти периодической*, если для каждого ее фактора $u$ найдется такое натуральное $l$, что на каждом отрезке длины $l$ последовательности $x$ найдется вхождение слова $u$. Тем самым любое слово, входящее в почти периодическую последовательность, входит в нее бесконечное количество раз. Через $\mathscr{AP}$ (almost periodic) будем обозначать класс всех таких последовательностей. Ясно, что для проверки почти периодичности достаточно только убедиться в повторяемости с ограниченными интервалами всех префиксов, а не всех факторов. Почти периодические последовательности называют также *равномерно рекуррентными* и *минимальными*.

Будем называть последовательность $x$ *заключительно почти периодической*, если некоторый ее суффикс почти периодичен. Класс всех таких последовательностей обозначим $\mathscr{EAP}$ (eventually almost periodic).

Последовательность $x$ называется *обобщенно почти периодической*, если для каждого ее фактора $u$, входящего в нее бесконечное число раз, найдется такое натуральное $l$, что на каждом отрезке длины $l$ последовательности $x$ найдется вхождение слова $u$. Класс всех таких последовательностей обозначим через $\mathscr{GAP}$ (generalized almost periodic).

Если $x \in \mathscr{EAP}$, то минимальное такое $n$, что $x[n, \infty) \in \mathscr{AP}$, будем называть *минимальным префиксом* и обозначать $\mathrm{pr}(x)$. Заметим, что для любого $m \geqslant \mathrm{pr}(x)$ имеем $x[m, \infty) \in \mathscr{AP}$.

И наконец, назовем последовательность $x$ *рекуррентной*, если каждое слово, которое в нее входит, обязательно входит бесконечное количество раз. Ясно, что если последовательность рекуррентная и обобщенно почти периодическая, то она почти периодическая. Класс рекуррентных последовательностей будем обозначать $\mathscr{R}$. Последовательность *заключительно рекуррентная*, если некоторый ее суффикс рекуррентен. Класс таких последовательностей обозначим $\mathscr{ER}$.

*Регулятором почти периодичности* последовательности $x \in \mathscr{GAP}$ назовем функцию

$$\mathrm{R}_x : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

которая на числе $n$ равна минимальному такому $l$, что каждое слово длины $n$, которое входит в $x$ бесконечное количество раз, встретится на любом отрезке длины $l$ последовательности $x$, а также любое слово длины $n$, которое входит в $x$ конечное количество раз, не входит в $x[l, \infty)$ (второе важно только для обобщенно почти периодических последовательностей, не являющихся почти периодическими). Часто вместо регулятора нам будет достаточно рассматривать только какую-то верхнюю оценку на него, то есть функцию $f$, такую что $f(n) \geqslant \mathrm{R}_x(n)$ для всех $n$ — в этом случае мы пишем $f \geqslant \mathrm{R}_x$. Если говорить более точно, регулятор почти периодичности объединяет в себе две функции: одна следит за расстояниями между вхождениями слов, входящих бесконечное количество раз, а другая следит за тем префиксом, которым ограничивается вхождение слов, входящих конечное количество раз. Иногда стоит эти функции разделять явно, хотя на протяжении настоящей статьи мы этого делать не будем.

Несложно видеть, что

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{AP} \subset \mathscr{EAP} \subset \mathscr{GAP}.$$

Оказывается, все эти включения строгие. Например, известная последовательность Туэ — Морса

$$\mathbf{t} = 01101001100101101001011001101001\ldots$$

— пример последовательности из $\mathscr{AP}$, но не из $\mathscr{P}$. Другой известный пример — последовательность Фибоначчи

$$\mathbf{f} = 0100101001001010010100100101001001\ldots$$

Последовательность $\mathbf{t}$ получается, если взять подстановку $0 \to 01$, $1 \to 10$ и, начав с символа 0, применить к нему подстановку, потом применить ту же подстановку к результату, и т. д. (каждый раз подстановка применяется ко всем буквам слова одновременно). Каждое следующее слово начинается с предыдущего. В пределе получится бесконечная последовательность $\mathbf{t}$. Аналогично можно получить $\mathbf{f}$ с помощью подстановки $0 \to 01$, $1 \to 0$. Подробнее о таком способе построения последовательностей см., например, [5]. Последовательности $\mathbf{t}$ и $\mathbf{f}$ обладают большим количеством интересных свойств и часто встречаются в комбинаторике слов, например, см. [4, 5, 9].

Другое семейство примеров почти периодических последовательностей (идущее из символической динамики, где это понятие и появилось [11, 12]) получается следующим образом. Разделим окружность длины 1 на несколько дуг, каждой из которых сопоставим некоторый символ конечного алфавита. Отметим какую-нибудь точку на окружности и начнем делать шаги из этой точки по окружности с некоторым фиксированным иррациональным шагом. При этом будем записывать, в какую дугу попадаем. Таким образом запишется почти периодическая последовательность (мы, возможно, иногда будем попадать на границу между дугами, но такое произойдет не более одного раза для каждой границы, поэтому можем начать записывать с того места, когда это уже не происходит).

Неравенство $\mathscr{AP} \subsetneq \mathscr{EAP}$ очевидно (можно взять в качестве примера $10000000\ldots$). Неравенство $\mathscr{EAP} \subsetneq \mathscr{GAP}$ было доказано в [18].

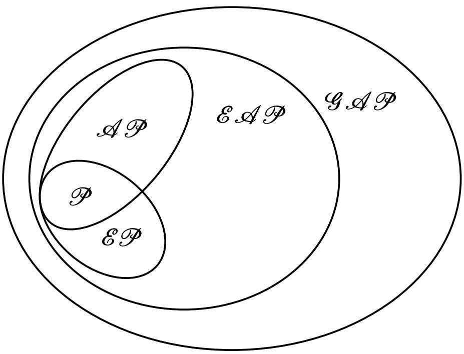



**Рис. 2.** Классы последовательностей

Кроме того, выполнены включения $\mathscr{P} \subset \mathscr{EP} \subset \mathscr{EAP}$, все из которых тоже, очевидно, строгие. Соотношения между введенными классами проиллюстрированы на рис. 2.

Мы говорим, что последовательность эффективно обобщенно почти периодическая, если она вычислима, а также некоторая верхняя оценка на ее регулятор почти периодичности вычислима. Класс таких последовательностей обозначим $\mathscr{GAP}^e$. Другими словами, для эффективно обобщенно почти периодической последовательности существует алгоритм, который, во-первых, по любому $n$ может выдать $n$-й элемент последовательности и, во-вторых, для любого слова $u$ может указать такое число $l$ (не обязательно минимальное возможное), что если $u$ входит в $x$ бесконечное количество раз, то оно входит на любом отрезке длины $l$, а если $u$ входит конечное количество раз, то оно не входит в суффикс $x[l, +\infty)$.

## 4. Конечно-автоматные преобразователи

Конечные автоматы, участвующие в определении конечно-автоматных преобразований бесконечных последовательностей, отличаются от автоматов Бюхи и Мюллера, определенных выше. Во-первых, у них есть начальное состояние, но нет принимающих. Во-вторых, на каждом переходе написана не только входная буква, но и выходная. Такой автомат читает по очереди буквы последовательности, записанные на входной ленте, и в соответствии с прочитанным меняет каждый раз текущее состояние, выдает букву на выходную ленту и переходит к следующей входной букве. Последовательность, полученная в итоге на выходной ленте, и есть результат конечно-автоматного преобразования.

Дадим теперь формальное определение. *Конечно-автоматным преобразователем* назовем совокупность $M = \langle A, B, Q, \widetilde{q}, \lambda, \mu \rangle$, где $A$ и $B$ — конечные множества, называемые соответственно входной и выходной алфавит, $Q$ — конечное множество состояний, $\widetilde{q} \in Q$ — выделенное состояние, называемое начальным, и

$$\lambda\colon Q \times A \to B^*, \quad \mu\colon Q \times A \to Q$$

— функции переходов. Пусть $x \in A^{\mathbb{N}}$. Последовательность $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ элементов множества $Q$ назовем *ходом преобразователя $M$ на $x$*, если $p_0 = \widetilde{q}$ и для каждого $n$ выполняется $p_{n+1} = \mu(p_n, x(n))$. Последовательность $M(x)$, определяемую как $M(x)(n) = \lambda(p_n, x(n))$, где $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ — ход преобразователя $M$ на $x$, назовем *образом последовательности $x$ под действием $M$*. Определение иллюстрируется на рис. 3.

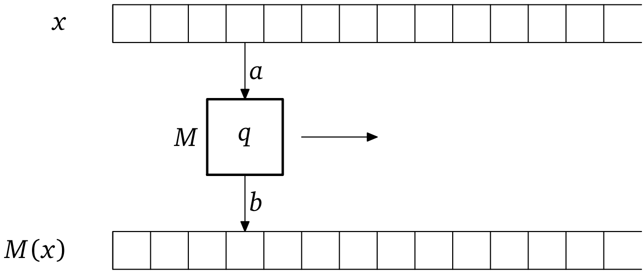



**Рис. 3.** Конечно-автоматное преобразование последовательности. Конечный автомат $M$, последовательность $x$, текущее состояние $q$, входная буква $a$, выходная буква $b$. Автомат идет слева направо вдоль последовательности

Если для каждых $a \in A$, $q \in Q$ выполнено $|\lambda(q, a)| = 1$, то преобразователь $M$ называется *равномерным*. Применение произвольного конечно-автоматного преобразователя к последовательности можно представить как последовательное применение равномерного конечно-автоматного преобразователя и некоторого морфизма.

**Предложение 4.1.** *Пусть $M = \langle A, B, Q, \widetilde{q}, \lambda, \mu\rangle$ — конечно-автоматный преобразователь, $x$ — последовательность. Тогда существует такой равномерный конечно-автоматный преобразователь $M'$ и такой морфизм $\varphi$, что $M(x) = \varphi(M'(x))$.*

**Доказательство**. Действительно, положим

$$M' = \langle A, Q \times A, Q, \widetilde{q}, \lambda, \mu'\rangle,$$

так что $\mu'(q, a) = \langle q, a\rangle$ для любых $q \in Q$ и $a \in A$. Определим также морфизм $\varphi: Q \times A \to B$, так что $\varphi(\langle q, a\rangle) = \mu(q, a)$ для любых $q \in Q$ и $a \in A$. Ясно тогда, что $M(x) = \varphi(M'(x))$. □

Поэтому часто для упрощения ситуации мы ограничиваемся рассмотрением равномерных конечно-автоматных преобразователей. Если $[i, j]$ — вхождение слова $u$ в последовательность $x$, причем $p_i = q$, где $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ — ход преобразователя $M$ на $x$, то будем говорить, что преобразователь $M$ *подходит* к этому вхождению слова *$u$ в состоянии $q$*.

По существу следующая теорема доказана в [3] (см. также [13]). Мы приводим ее с полным доказательством (по [13]).

Для произвольной функции $g$ обозначим $\underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{m}$ через $g^m$.

**Теорема 4.2** [3, 13]. *Пусть $M$ — конечно-автоматный преобразователь с $m$ состояниями и $x \in \mathcal{GAP}$. Тогда верно следующее:*

1. $M(x) \in \mathscr{GAP}$.

2. *Пусть* $M$ *— равномерный преобразователь. Тогда* $\mathrm{R}_{M(x)}(n) \leqslant h(h(n))$ *для всех* $n$*, где* $h(n) = g^m(n) - 1$ *и* $g(n) = \mathrm{R}_x(n) + 1$.

3. *Если* $x \in \mathscr{GAP}^e$*, то* $M(x) \in \mathscr{GAP}^e$.

**Лемма 4.3.** *Пусть* $M$ *— равномерный конечно-автоматный преобразователь с* $m$ *состояниями и* $x \in \mathscr{GAP}$*. Пусть* $v = M(x)[i, j]$ *— вхождение слова длины* $n$ *в* $M(x)$*, такое что* $i \geqslant h(n)$*, где* $h(t) = g^m(t) - 1$*,* $g(t) = \mathrm{R}_x(t) + 1$*. Тогда найдется такое* $r$*, что* $j - h(n) \leqslant r \leqslant i - 1$ *и* $M(x)[r, r+n-1] = v$.

**Доказательство**. Будем считать сначала, что $v = M(x)[i, j]$ — просто достаточно далекое от начала вхождение слова $v$ в $M(x)$. Объясним, как найти искомое $v = M(x)[r, s]$. При этом мы будем делать разные допущения, которые подытожим и сформулируем точно позднее.

Итак, пусть $v = M(x)[i, j]$ и $u_1 = x[i, j]$ — прообраз $v$ в $x$. Пусть преобразователь $M$ подходит к позиции $i$, находясь в состоянии $q_1$. Если $i$ достаточно велико, найдется вхождение $u_1 = x[i_2, j_2]$ левее $[i, j]$, но достаточно близко. Если $M$ подходит к $i_2$ в состоянии $q_1$, то $M(x)[i_2, j_2] = v$. Иначе $M$ подходит к $i_2$ в каком-то состоянии $q_2 \neq q_1$ (рис. 4).

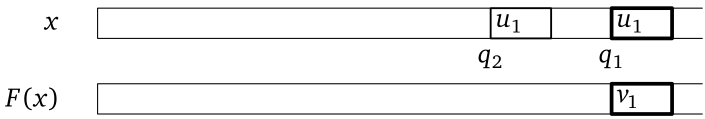



**Рис. 4.** Иллюстрация к доказательству теоремы 4.2

Положим $u_2 = x[i_2, j]$. Если $i_2$ достаточно велико, то найдется вхождение $u_2 = x[i_3, j_3]$ левее $[i_2, j]$, но достаточно близко. Если $M$ подходит к $i_3$ в состоянии $q_1$, то $M(x)[i_3, i_3 + n - 1] = v$, так как $u_2$ начинается с $u_1$. Если $M$ подходит к $i_3$ в состоянии $q_2$, то $M(x)[i_3, j_3] = M(x)[i_2, j]$, и тогда $M(x)[j_3 - n + 1, j_3] = v$, так как $u_2$ заканчивается словом $u_1$. В худшем случае $M$ подходит к $i_3$ в состоянии $q_3$, таком что $q_3 \neq q_2$ и $q_3 \neq q_1$. При этом положим $u_3 = x[i_3, j]$ (рис. 5).

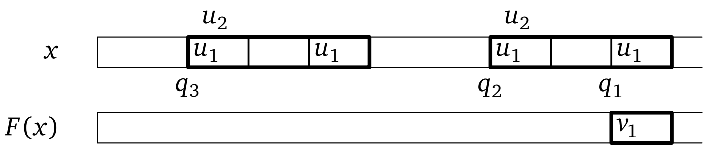



**Рис. 5.** Иллюстрация к доказательству теоремы 4.2

Рассуждая так дальше, мы, все время выбирая худший случай, найдем такие $i_2, \ldots, i_{m+1}$, что к каким-то двум из $i_1 = i, i_2, \ldots, i_{m+1}$ преобразователь $M$ подходит в одинаковых состояниях. Таким образом, слово $v$ обязательно встретится в $M(x)[i_{m+1}, j-1]$.

Проанализируем теперь вышеприведенное рассуждение. Вначале мы ищем вхождение $u_1 = x[i_2, j_2]$. Это можно сделать, если $i \geqslant \mathrm{R}_x(n)$ — исходя из определения обобщенной почти периодичности, это означает, что $u_1$ входит в $x$ бесконечно много раз. При этом получится $(j-1)-i_2+1 \leqslant \mathrm{R}_x(n)$ — этого достаточно, чтобы на отрезке $x[i_2, j-1]$ нашлось вхождение $u_1$. Отсюда $i_2 \geqslant j - \mathrm{R}_x(n)$ и $|u_2| = j - i_2 + 1 \leqslant \leqslant \mathrm{R}_x(n) + 1$.

Далее аналогично получаем, что при $i_2 \geqslant \mathrm{R}_x(\mathrm{R}_x(n)+1) \geqslant \mathrm{R}_x(|u_2|)$ действительно можно найти вхождение $u_2 = x[i_3, j_3]$, причем

$$i_3 \geqslant j - \mathrm{R}_x(\mathrm{R}_x(n)+1) \quad \text{и} \quad |u_3| \leqslant \mathrm{R}_x(\mathrm{R}_x(n)+1)+1.$$

Положим $g = \mathrm{R}_x + 1$. Аналогично рассуждая, получим, что при $i_m \geqslant g^m(n) - 1$ можно выбрать $i_{m+1} \geqslant j - g^m(n) + 1$. □

**Доказательство теоремы 4.2.** Пусть $x \in \mathcal{GAP}$ и на $x$ действует конечный преобразователь $M$ с $m$ состояниями.

1) Из предложения 4.1 следует, что достаточно доказать утверждение только для равномерного $M$, так как морфизмы сохраняют обобщенную почти периодичность. Для равномерного $M$ из леммы 4.3 следует, что если слово $v$ длины $n$ входит в $M(x)$ бесконечно много раз, то оно входит на каждом отрезке длины $g^m(n) - 1$ в $M(x)$. Поэтому $M(x)$ обобщенно почти периодическая.

2) Покажем, как найти оценку сверху на $\mathrm{R}_{M(x)}$. Обозначим $h(n) = = g^m(n) - 1$, где $g(n) = \mathrm{R}_x(n) + 1$.

Пусть слово $v$ длины $n$ входит в $M(x)$ бесконечно много раз. Тогда по 1) оно встретится на любом отрезке длины $h(n)$.

Пусть теперь слово $v$ длины $n$ входит в $M(x)$ конечное количество раз. Докажем, что тогда $v$ не входит в $M(x)$ правее позиции $h(h(n))$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда на каждом отрезке длины $h(n)$ слова $M(x)[0, h(h(n)) - 1]$ найдется вхождение $v$, так как по 1) от каждого такого вхождения можно найти еще одно слева не дальше, чем на расстоянии $h(n)$. Но $v$ входит в $M(x)$ лишь конечное количество раз. Поэтому в $M(x)$ найдется слово $w$ длины $h(n)$ (где-то сильно справа), которое не содержит $v$. Тогда всюду слева от него на любом отрезке длины $h(h(n))$ найдется вхождение $w$, значит, и в $M(x)[0, h(h(n)) - 1]$ тоже. Противоречие, так как на любом отрезке длины $h(n)$ в $M(x)[0, h(h(n)) - 1]$ есть вхождение $v$, но $w$ не содержит $v$ и входит в $M(x)[0, h(h(n)) - 1]$.

Таким образом, объединяя последние два абзаца, получаем оценку $\mathrm{R}_{M(x)}(n) \leqslant h(h(n))$.

3) Пусть теперь последовательность $x$ эффективно обобщенно почти периодическая, т. е. $x$ вычислима и регулятор $\mathrm{R}_x$ вычислим. Аналогично п. 1), достаточно рассматривать только случай равномерного $M$, так как морфизмы сохраняют эффективную обобщенную почти периодичность. Ясно, что, зная $M$ и умея вычислять $x$, мы можем вычислять $M(x)$. Пункт 2) позволяет также вычислять оценку сверху на $\mathrm{R}_{M(x)}$. Значит, $M(x)$ эффективно обобщенно почти периодическая. □

В частности, мы видим, что для $x \in \mathscr{EAP}$ или $x \in \mathscr{AP}$ и произвольного конечно-автоматного преобразования $M$ выполнено $M(x) \in \in \mathscr{GAP}$. Теорема 4.5 усиливает этот результат.

Имея и самостоятельный интерес, теорема 4.2 позволяет также получить следующее

**Следствие 4.4.** Для $x \in \mathscr{GAP}$ теория МТ $x$ разрешима тогда и только тогда, когда $x \in \mathscr{GAP}^e$.

**Доказательство**. $\Rightarrow$. Пусть для $x \in \mathscr{GAP}$ теория МТ $x$ разрешима. Тогда для каждого $n$ и для каждого возможного символа $a$ проверяем, не верно ли $x(n) = a$, и так перебором находим значение $x(n)$. Следовательно, $x$ вычислима. Также перебором можно вычислять $\mathrm{R}_x$, поскольку для любых $n$ и $l$ можно записать формулой тот факт, что $\mathrm{R}_x(n) \leqslant l$. Действительно, во-первых, мы можем найти перебором, какие элементы входят в последовательность (несмотря на то, что потенциальных претендентов, как мы договорились, может быть бесконечное количество), поскольку можно выразить формулой тот факт, что все символы, кроме символов из некоторого фиксированного конечного множества, в последовательности не встречаются. Во-вторых, слов фиксированной длины конечное число, поскольку последовательность конечнозначная.

$\Leftarrow$. Пусть теперь $x \in \mathscr{GAP}^e$.

По следствию 2.5 для разрешимости МТ $x$ достаточно уметь по любому детерминированному автомату Мюллера, запущенному на $x$, определять, принимает ли он $x$ или нет.

Пусть $M$ — какой-нибудь детерминированный автомат Мюллера, действующий на $x$. Рассмотрим конечно-автоматный преобразователь $M'$, полученный из $M$ следующим образом: внутреннее устройство $M'$ такое же, как и у $M$, при этом про принимающие макросостояния $M$ мы забываем. На входных последовательностях $M'$ работает точно так же, как и $M$, а на выходную ленту записывает на каждом шаге свое текущее состояние. По теореме 4.2 из $x \in \mathscr{GAP}^e$ следует $M'(x) \in \mathscr{GAP}^e$.

Для любой $x \in \mathcal{GAP}^e$ легко вычислить, какие символы входят в $x$ бесконечно много раз: для этого достаточно посмотреть, какие символы входят в отрезок $x[f(1), 2f(1)-1]$, где $f$ — какая-нибудь вычислимая оценка сверху на регулятор (а «посмотреть» мы можем, потому что сама последовательность $x$ тоже вычислима).

Таким образом, мы можем найти множество всех таких состояний автомата $M$, которые встречаются бесконечное количество раз в процессе работы $M$ на $x$. Значит, мы можем проверить, принимает ли автомат $M$ последовательность $x$. □

В частности, из следствия 4.4 получаем, что монадические теории последовательностей Туэ — Морса $\mathbf{t}$ и Фибоначчи $\mathbf{f}$ разрешимы (для этих последовательностей несложно научиться оценивать сверху регулятор).

Следующий результат продолжает результат теоремы 4.2, но, видимо, не имеет приложений и следствий для логических теорий.

**Теорема 4.5** [1,18]. 1) *Множество заключительно почти периодических последовательностей замкнуто относительно конечно-автоматных преобразований.*

2) *Пусть $F$ — конечный автомат с $n$ состояниями, $x \in \mathcal{AP}$. Тогда $F(x) \in \mathcal{EAP}$ и*

$$\mathrm{pr}(F(x)) \leqslant \mathrm{R}_x^n(1) + \mathrm{R}_x^{n-1}(1) + \ldots + \mathrm{R}_x(1).$$

«Экспоненциальные» оценки (в смысле итераций функций) для регулятора почти периодичности в теореме 4.2 и для префикса в теореме 4.5 не могут быть существенно улучшены, как показано в [2,14].

Одним из основных шагов в доказательстве теоремы 4.5 является следующий результат, представляющий и самостоятельный интерес.

Назовем конечно-автоматный преобразователь

$$M = \langle A, B, Q, \widetilde{q}, \lambda, \mu \rangle$$

*обратимым*, если для каждых $q \in Q$ и $a \in A$ существует ровно одно состояние $q' \in Q$, такое что $\mu(q', a) = q$. Другими словами, в таком преобразователе каждая буква входного алфавита осуществляет взаимно однозначное отображение множества состояний в себя. Находясь в некотором состоянии и зная последовательность предыдущих входных символов, можно восстановить и последовательность пройденных состояний (в этом и заключается свойство обратимости).

**Предложение 4.6** [1]. *Пусть $M$ — обратимый равномерный конечно-автоматный преобразователь с $m$ состояниями. Тогда если $x \in \mathcal{AP}$, то $M(x) \in \mathcal{AP}$.*

Еще один результат из этой серии утверждает замкнутость класса заключительно рекуррентных последовательностей.

**Теорема 4.7** [17]. *Пусть $M$ — конечно-автоматный преобразователь. Тогда если $x \in \mathscr{ER}$, то $M(x) \in \mathscr{ER}$.*

Доказательства теорем 4.5, 4.7 и предложения 4.6 можно найти в [17].

Приведем еще один аналогичный результат. Способ, которым мы определили последовательности Туэ — Морса и Фибоначчи в разделе 3, можно обобщить. Назовем *подстановкой*, или *морфизмом*, любое отображение вида $\varphi\colon A^* \to A^*$ (здесь $A^*$ — множество всех конечных слов над алфавитом $A$), такое что для любых слов $u, v \in A^*$ выполнено $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$. Ясно, что тогда морфизм полностью определяется своими значениями на однобуквенных словах.

Пусть $\varphi(s) = su$ для некоторых $s \in A$, $u \in A^*$. Тогда для всех натуральных $m < n$ слово $\varphi^n(s)$ начинается со слова $\varphi^m(s)$, так что можно корректно определить

$$\varphi^\infty(s) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(s) = su\varphi(u)\varphi^2(u)\varphi^3(u)\ldots$$

Если для всякого $n$ выполнено $\varphi^n(u) \neq \Lambda$, то последовательность $\varphi^\infty(s)$ бесконечна. Последовательности вида $\varphi^\infty(s)$ называются *чисто морфическими*. Чисто морфические последовательности являются неподвижными точками морфизма: для них выполнено $\varphi(\varphi^\infty(s)) = \varphi^\infty(s)$ (если продолжить $\varphi$ на бесконечные последовательности естественным образом). Например, последовательности Туэ — Морса и Фибоначчи — чисто морфические.

Если в чисто морфической последовательности некоторые буквы отождествить, получим морфическую последовательность. Более формально, морфизм $h\colon A^* \to A^*$, переводящий однобуквенные слова в однобуквенные слова, называется *кодированием*. Последовательности вида $h(\varphi^\infty(s))$, где $\varphi^\infty(s)$ — чисто морфическая последовательность, $h$ — кодирование, называются *морфическими*.

**Теорема 4.8** [8]. *Множество морфических последовательностей замкнуто относительно конечно-автоматных преобразований.*

Доказательство теоремы 4.8 можно найти также в [5].

**Следствие 4.9.** Для любой морфической последовательности $x$ теория MT $x$ разрешима.

Действительно, можно следовать общей схеме из доказательства следствия 4.4. Проанализировав доказательство теоремы 4.8, можно увидеть, что она позволяет по морфической последовательности (которую можно задать конечным набором конечных объектов — алфавит, морфизм, начальная буква, кодирование) и конечно-автоматному преобразователю находить результат действия этого преобразователя на этой последовательности алгоритмически. Заметим также, что по произвольной морфической последовательности можно алгоритмически находить те символы, которые входят в нее бесконечно много раз.

Прямое доказательство следствия 4.9 приведено в [7].

В частности, еще одним способом мы получаем доказательство того, что теории MT**t** и MT**f** разрешимы.

## Литература


1. *Притыкин Ю. Л.* Почти периодичность, конечно-автоматные преобразования и вопросы эффективности // Известия вузов. Математика. Готовится к публикации, 2010. См. препринт arXiv:cs/0607009.
2. *Раскин М. А.* Об оценке регулятора автоматного образа почти периодической последовательности // Труды XXVIII Конференции молодых ученых. Мех.-мат. ф-т МГУ им. Ломоносова. 2006. С. 181—185.
3. *Семёнов А. Л.* Логические теории одноместных функций на натуральном ряде // Известия АН СССР. Серия математическая. 1983. Т. 47, № 3. С. 623—658.
4. *Allouche J.-P.*, *Shallit J.* The ubiquitous Prouhet — Thue — Morse sequence // Sequences and their applications, Proceedings of SETA'98. Springer-Verlag, 1999. P. 1—16.
5. *Allouche J.-P.*, *Shallit J.* Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press, 2003.
6. *Büchi J. R.* On a decision method in restricted second-order arithmetic // Proceedings of International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Stanford University Press, 1962. P. 1—11.
7. *Carton O.*, *Thomas W.* The Monadic Theory of Morphic Infinite Words and Generalizations // Information and Computation. 2002. Vol. 176. P. 51—65.
8. *Dekking F. M.* Iteration of maps by an automaton // Discrete Mathematics. 1994. Vol. 126, № 1—3. P. 81—86.
9. *Lothaire M.* Combinatorics on Words. 2nd ed. Cambridge University Press, 1997.
10. *McNaughton R.* Testing and generating infinite sequences by a finite automaton // Information and Control. 1966. Vol. 9. P. 521—530.
11. *Morse M.*, *Hedlund G. A.* Symbolic dynamics // American Journal of Mathematics. 1938. Vol. 60, № 4. P. 815—866.
12. *Morse M.*, *Hedlund G. A.* Symbolic dynamics. II: Sturmian trajectories // American Journal of Mathematics. 1940. Vol. 62. P. 1—42.
13. *Muchnik An.*, *Semenov A.*, *Ushakov M.* Almost periodic sequences // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 304, № 1—3. P. 1—33.
14. *Pritykin Yu.*, *Raskin M.* Almost Periodicity and Finite Automata // Electronic Proceedings of WIWAD (satellite to CSR 2007). Ekaterinburg, Russia, 2007.
15. *Semenov A. L.* Decidability of Monadic Theories // Proceedings of MFCS'84. Springer-Verlag, 1984. P. 162—175. (Lecture Notes in Comp. Science; Vol. 176).

16. *Thomas W.* Languages, automata, and logic / Ed. G. Rozenberg, A. Salomaa. Springer-Verlag, 1997. (Handbook of Formal Languages; Vol. 3). P. 389—455.
17. *Мучник Ан. А.*, *Притыкин Ю. Л.*, *Семёнов А. Л.* Последовательности, близкие к периодическим. Готовится к публикации, 2009. Препринт arXiv: 0903.5316.
18. *Притыкин Ю. Л.* Конечно-автоматные преобразования строго почти периодических последовательностей // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 5. С. 751—756.

Фундаментальная математика в работах молодых ученых.
Юбилейная конференция победителей конкурса Мёбиуса

Подписано в печать 07.10.2009 г. Формат $60 \times 90$ $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 7.5. Тираж 800 экз. Заказ №      .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.