

Конкурс Мёбиуса глазами его победителей

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51(06)
ББК 22.1
К64

*Книга издана при участии «Фонда поддержки
молодых ученых „Конкурс Мёбиуса“»*

Конкурс Мёбиуса глазами его победителей. — М.: МЦНМО,
К64 2017. — 80 с.

ISBN 978-5-4439-2633-9

Книга посвящена двадцатилетию Конкурса Мёбиуса, проводимого Независимым Московским университетом. Победители конкурса первых десяти лет рассказывают в ней о роли конкурса в их жизни и о математике, которой они занимаются сейчас.

Книга рассчитана на широкий круг математической общественности, начиная со студентов-математиков.

ББК 22.1

Предисловие

Конкурсу Мёбиуса уже 20 лет. Возник он при Независимом Московском университете. Тесно связаны они и сейчас. История Независимого университета — отдельная тема, мы ее касаться не будем. Нам важно другое — зачем, по какой причине Независимый университет был создан.

Идеи основателей были примерно такие. Во-первых, передача математического знания и традиций московской математической школы. Но это далеко не все. Обучение математике — это лекции, семинары, экзамены. Все это в Независимом университете должно было быть — как иначе. Но хотелось большего. Дело в том, что практически каждый молодой человек, собирающийся заниматься математикой, сталкивается с очень большими проблемами. Обычная ситуация такова. В таком молодом человеке горит или тлеет некий огонь — он одержим желанием. Но чего он именно хочет и как это желание реализовать, ему совершенно неизвестно. Перед начинающим математиком темный малопонятный лес, в который и войти страшно, а если войдешь, заблудишься и потеряешься. Конечно, со временем восприятие меняется, и человек находит свой путь и обретает уверенность.

Основатели Независимого университета и хотели создать структуру, которая помогала бы молодым людям пережить трудный начальный период, сделать так, чтобы «темный лес» осветился смыслом и значением.

Проще говоря, хотелось, чтобы Независимый университет стал местом, где постоянно, «непрерывно» идет математическая жизнь, где математики — и состоявшиеся, и начинающие, и даже еще не начавшие — общаются и поддерживают друг друга. В таком общении нуждаются отнюдь не только молодые. Работающим математикам очень нужно, чтобы рядом были молодые люди, которым ты можешь что-то передать. Если этого нет, то кажется, что твоя деятельность теряет смысл.

Независимый Московский университет был создан, и, насколько это возможно, идеи основоположников реализовались. Студенты учились, общались друг с другом и со старшими, находили подходящие для себя задачи, то есть делали то, что они в математике любят.

Проблема становления, нахождения своего пути, конечно, важнейшая для молодого математика, но, к сожалению, далеко не единственная. Есть еще практические проблемы. Как устроить жизнь так, чтобы математикой можно было заниматься? Как найти ра-

боту? Откуда брать средства к существованию? Такие проблемы имеются во всем мире, и хорошего решения не существует. Бывает «немножко лучше» или «немножко хуже», и у нас, в особенности 20 лет назад, было «немножко хуже». Студентам и выпускникам Независимого, и вообще всем, кто хотел заниматься математикой, очень нужна была помощь.

И случилось маленькое чудо. Профессор Независимого университета Алексей Брониславович Сосинский встретил однажды двух своих бывших учеников, выпускников кафедры прикладной математики МИЭМ — Валерия Баликоева и Александра Кокина. Они не стали математиками, но преуспели в бизнесе. А еще они сохранили любовь к математике и захотели помочь начинающим математикам — студентам и аспирантам. И у них возникла идея организовать конкурс студенческих и аспирантских работ, победитель которого получал бы довольно значительную стипендию. И они все троем — А. Сосинский, В. Баликоев и А. Кокин — придумали правила этого конкурса и дали ему название. А Алексей Брониславович рассказал об идее спонсоров в Независимом и уговорил многих известных математиков войти в состав жюри.

Поначалу конкурс был очень маленький — только для студентов и аспирантов Независимого. На первый конкурс 1997 года было подано всего 9 работ. Но уже в следующем году в конкурсе смогли участвовать студенты и аспиранты любых московских вузов. Потом конкурс распространился на Санкт-Петербург, а затем и на всю Россию.

Важной вехой в истории конкурса послужило создание в 2002 году Александром Кокиным некоммерческой организации «Фонд поддержки молодых ученых „Конкурс Мёбиуса“», председателем попечительского совета которой он стал. Таким образом, была создана организационная структура, благодаря которой конкурс Мёбиуса существует и по сей день.

В 2003 году спонсоры приняли решение об увеличении числа победителей. С этого момента жюри присуждало уже не одну премию, а три — первую, вторую и третью. Затем спонсоры обратили внимание на то, что студентам довольно трудно соревноваться с аспирантами, ведь научный уровень студентов, как правило, ниже уровня аспирантов. Их участие в едином конкурсе ставило студентов в тяжелые условия. Поэтому в 2006 году студенты были выделены в отдельный поток, и конкурс стал проводиться в двух номинациях: «Студенты и аспиранты» и «Студенты». Денежное вознаграждение победителям в первой номинации больше, чем во второй. Однако студенты имеют право рискнуть и попробовать соревноваться с ас-

пирантами; и действительно, был один случай, когда студент рискнул — и превзошел аспирантов.

Последнее время в конкурсе ежегодно участвует 30—50 работ. Одна из составляющих успеха конкурса — простота правил подачи заявки: достаточно заполнить очень небольшую анкету, прислать свою работу и при желании попросить научного руководителя написать отзыв на эту работу. Зато рецензирование работ осуществляется самым серьезным образом. Работы рецензируют не только члены жюри — почти все также посылаются на внешний отзыв ведущим специалистам, в том числе зарубежным. На каждую работу жюри старается получить по 2—3 отзыва.

Конкретные детали о том, как именно работает конкурс, можно найти на его сайте: <http://www.moebiuscontest.ru/>. При создании сайта организаторы провели опрос участников конкурса о том, какую информацию те хотели бы видеть на сайте и как, по их мнению, она должна быть организована.

Таким образом, за двадцать лет своего существования конкурс Августа Мёбиуса превратился из небольшого соревнования среди студентов и аспирантов НМУ в престижный общенациональный конкурс высокого научного уровня, открытый для всех молодых математиков России. Нужно отметить, что все эти 20 лет конкурс по-прежнему полностью финансируется В.Баликовым и А.Кокиным, двумя предпринимателями, возродившими замечательные традиции благотворительности русских купцов и промышленников конца XIX и начала XX века.

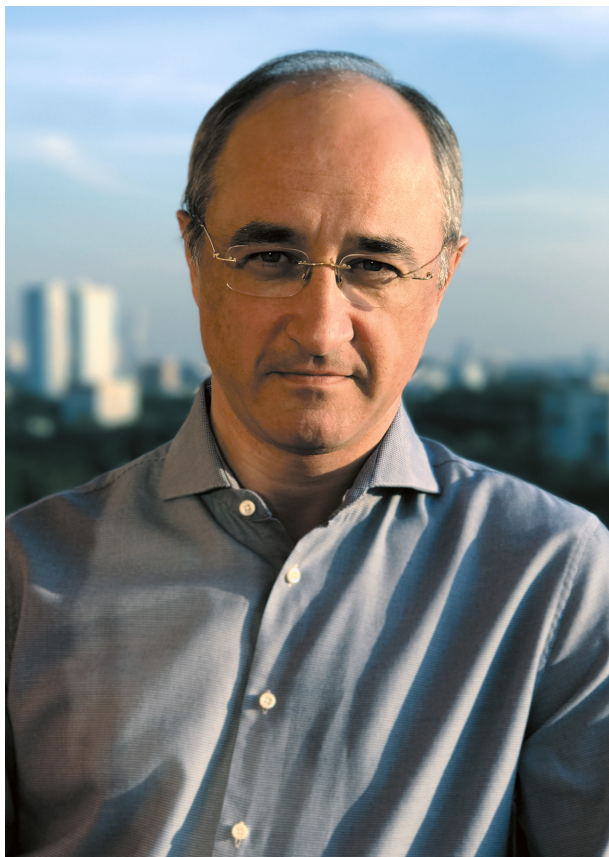
Победа в конкурсе Мёбиуса — вещь почетная и значимая. Но нам кажется, что основное, что было в нем с самого начала, — доброжелательные, человеческие отношения — сохранилось.

Поскольку идея конкурса была помочь людям выжить и заниматься математикой, очень интересно понять, насколько это получилось. В этой брошюре собраны мнения победителей конкурса первых десяти лет (1997—2006 гг.) о роли конкурса в их жизни. Кроме того, победители немного рассказывают о себе. Читать это интересно, а выводы читатель (если захочет) может сделать сам.

Борис Фейгин

Председатель жюри конкурса Мёбиуса

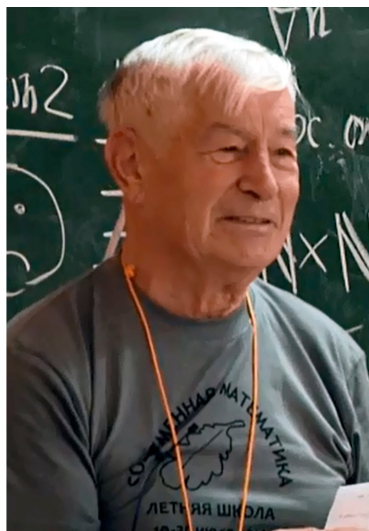
**Попечительский Совет
Фонда поддержки молодых ученых
«Конкурс Мёбиуса»**



Александр Анатольевич Кокин
Председатель Попечительского совета



Михаил Анатольевич
Цфасман
Ответственный секретарь
Попечительского совета



Алексей Брониславович
Сосинский
Вице-президент НМУ

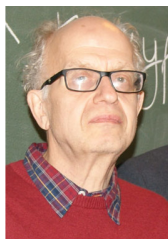


Юлий Сергеевич Ильяшенко
Президент НМУ



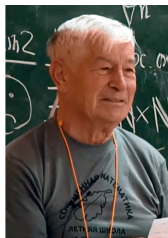
Иван Валериевич Ященко
Директор МЦНМО и ЦПМ

Жюри конкурса



Борис Львович Фейгин

Председатель жюри, профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики



Алексей Брониславович Сосинский

Ученый секретарь жюри, вице-президент и профессор Независимого Московского университета



Михаил Семенович Агранович

Профессор, заведующий кафедрой математического анализа Московского института электроники и математики им. А. Н. Тихонова, заместитель главного редактора журнала «Функциональный анализ и его приложения»



Валерий Урусбиевич Баликов

Президент компании «Инфра»



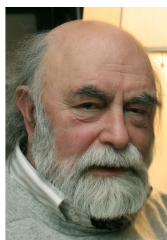
Александр Вадимович Булинский

Профессор МГУ им. М. В. Ломоносова, член Правления Московского математического общества, председатель Федерального учебно-методического объединения в системе высшего образования, член Экспертного совета ВАК РФ по математике и механике, лауреат Ломоносовской премии в области науки



Юрий Михайлович Бурман

Доцент Национального исследовательского университета Высшая школа экономики



Анатолий Моисеевич Вершик

Главный научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор Санкт-Петербургского государственного университета, ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества (1998—2008)



Михаил Николаевич Вялый

Старший научный сотрудник Вычислительного центра РАН, профессор факультета компьютерных технологий Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, доцент Московского физико-технического института



Алексей Львович Городенцев

Профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, старший научный сотрудник Института теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова



Сабир Меджирович Гусейн-Заде

Заслуженный профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, член Правления Московского математического общества



Александр Сергеевич Демидов

Профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и Московского физико-технического института



Сергей Васильевич Дужин

Доктор физико-математических наук, сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН



Юлий Сергеевич Ильяшенко

Президент и профессор Независимого Московского университета, профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, член Правления Московского математического общества



Максим Эдуардович Казарян

Профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и Независимого Московского университета, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, член Правления Московского математического общества



Дмитрий Борисович Каледин

Ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН



Александр Анатольевич Кокин

Председатель Попечительского совета фонда поддержки молодых ученых «Конкурс Мёбиуса»



Сергей Константинович Ландо

Профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, Сколковского института науки и технологий и Независимого Московского университета, вице-президент Московского математического общества



Андрей Семенович Лосев

Профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, старший научный сотрудник Института теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова



Александр Ильич Назаров

Ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор Санкт-Петербургского государственного университета



Сергей Миронович Натанзон

Профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и Независимого Московского университета



Армен Глебович Сергеев

Ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, член Правления Московского математического общества, вице-президент Европейского математического общества



Аркадий Борисович Скопенков

Профессор Независимого Московского университета и Московского физико-технического института



Михаил Анатольевич Цфасман

Вице-президент и профессор Независимого Московского университета, заведующий сектором Института проблем передачи информации РАН, ведущий научный сотрудник Национального центра научных исследований Франции (CNRS)



Александр Яковлевич Хелемский

Заслуженный профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова



Осип Владимирович Шварцман

Профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и Независимого Московского университета



Олег Карлович Шейнман

Ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН



Валентин Борисович Шехтман

Главный научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, профессор Национального исследовательского университета Высшая школа экономики и Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Победители конкурса Мёбиуса

1997

Александр Кузнецов «Компактификации пространства отображений из $\mathbb{P}^1$ в многообразии флагов полупростой группы Ли»

1998

Владлен Тиморин «Смешанные соотношения Ходжа—Римана в линейном контексте»

1999

Александр Буфетов «Эргодические теоремы для действий нескольких операторов и отображений»

2000

Сергей Мелихов «On maps with unstable singularities»

Сергей Шадрин «Эйлерова характеристика пространств вещественных мероморфных функций»

2001

Анна Эршлер «On isoperimetric profiles of finitely generated groups»

2002

Виктор Клепцын «Облако точек: сближение орбит в случайных динамических системах на окружности»

Леонид Рыбников «О коммутативности слабо коммутативных римановых однородных пространств»

2003

Первое место. *Сергей Чулков* «О сходимости формальных решений систем дифференциальных уравнений в частных производных»

Второе место. *Сергей Облезин* «Isomonodromic deformations of the $sl(2)$ Fuchsian systems on the Riemann sphere»

Второе место. *Сергей Шадрин* «Combinatorics of binomial decompositions of the simplest Hodge integrals»

2004

Первое место. *Александр Эстеров* «Индексы 1-форм, результаты и многогранники Ньютона»

Второе место. *Михаил Скопенков* «Embeddability of products of graphs, approximability by embeddings and the Van Kampen obstruction»

Третье место. *Олег Карпенков* «О трехмерных многоэтажных вполне пустых выпуклых пирамидах и двумерных гранях многомерных цепных дробей»

2005

Первое место. *Александр Гайфуллин* «Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина»

Второе место. *Геннадий Пифтанкин* «Скорость диффузии в задаче Мезера»

Третье место. *Фёдор Петров* «О количестве рациональных точек на строго выпуклой кривой»

2006

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. *Иван Лосев* «Вычисление комбинаторных инвариантов G -многообразий»

Второе место. *Павел Мнёв* «Notes on Simplicial BF Theory»

Третье место. *Андрей Перфильев* «Решение проблемы описания минимальных многообразий Зейферта»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Евгений Горский* «Мотивные интегралы и функциональные уравнения»

Второе место. *Юрий Притыкин* «Почти периодичность и конечные автоматы»

2007

Номинация «Студенты и аспиранты»

Второе место. *Владислав Высоцкий* «Gravitational clustering in stochastic systems of sticky particles»

Второе место. *Евгений Горский* «О мотивной мере на пространстве функций»

Третье место. *Михаил Скопенков* «Classification of links and knotted tori in the 2-metastable dimension»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Вадим Горин* «Дизъюнктность представлений, возникающих в задаче гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе»

Второе место. *Арсений Акопян* «PL-аналог теоремы Нэша—Кейпера»

2008

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. *Александр Ефимов* «Deformations of objects in derived categories and noncommutative Grassmanians»

Второе место. *Вадим Горин* «Shuffling algorithm for boxed plane partitions»

Третье место. *Дмитрий Гугнин* «Полиномиально зависимые гомоморфизмы и n -гомоморфизмы Фробениуса»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Шамиль Шакиров* «Аналог тождества $\text{Log Det} = \text{Trace Log}$ для результатов»

Второе место. *Антон Науменко* «О распределении чисел с двоичным разложением специального вида в арифметических прогрессиях с произвольными простыми разностями»

2009

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. *Алексей Елагин* «Когомологическая теория спуска для стеков и эквивариантных производных категорий»

Первое место. *Дмитрий Почекутов* «Диагонали рядов Лорана рациональных функций»

Третье место. *Андрей Кустарёв* «Почти комплексные квазиторические многообразия»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Илья Тюрин* «О скорости сходимости в теореме Ляпунова»

Второе место. Павел Бибилов «О разбиениях, связанных с дискретными группами отражений»

Второе место. Александр Буряк «Характеристические числа особых многообразий»

2010

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. Александр Ефимов «Fukaya categories, Landau—Ginzburg models and homological mirror symmetry»

Второе место. Леонид Петров «Pfaffian Stochastic Dynamics of Strict Partitions»

Третье место. Александр Буряк «The classes of the quasihomogeneous Hilbert schemes of points on the plane»

Номинация «Студенты»

Первое место. Наталья Бондаренко «Обратная задача спектрального анализа для матричного уравнения Штурма—Лиувилля»

Второе место. Алексей Буфетов «Давление и равновесные меры для действия аменабельных групп на пространстве конфигураций»

2011

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. Антон Осиненко «Гармонический анализ на бесконечномерной унитарной группе»

Второе место. Антон Фонарёв «On minimal Lefschetz decompositions for Grassmannians»

Третье место. Алексей Буфетов «Центральная предельная теорема для экстремальных характеристик бесконечной симметрической группы»

Номинация «Студенты»

Первое место. Константин Толмачёв «Дисперсия линейной статистики планшерелевских диаграмм Юнга»

Второе место. Фёдор Пахомов «Неразрешимость элементарной теории полурешетки GLP -слов»

2012

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. Александр Буряк «Top tautological group of $\mathcal{M}_{g,n}$ »

Второе место. Роман Бессонов «Truncated Toeplitz operators of finite rank»

Третье место. Александр Ершов «Асимптотика решения уравнения Лапласа с граничными условиями, изменяющимися на двух малых участках»

Номинация «Студенты»

Первое место. Наталия Гончарук «Числа вращения и модули эллиптических кривых»

Второе место. Дмитрий Кубрак «Теорема Брауэра—Зигеля для торов над функциональным полем и доказательство гипотезы Куныевского—Цфасмана»

2013

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. Александр Захаров «О ранге пересечения свободных подгрупп почти свободных групп»

Второе место. Анастасия Головина «О резольvente и спектре возмущенного периодического дифференциального оператора»

Третье место. Даниил Руденко «Арифметика трехвалентных графов и разрезание плоской поверхности на треугольники равной площади»

Номинация «Студенты»

Первое место. Михаил Карпухин «Максимизация первого ненулевого собственного значения на поверхности рода 2»

Второе место. Андрей Лавренов «Центральная замкнутость унитарной группы Стейнберга»

2014

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. Лев Суханов «О феномене постоянной кривизны в диффузионных ортогональных полиномах»

Второе место. Сергей Аввакумов «Классификация зацепления некоторых трехмерных многообразий в шестимерном пространстве»

Второе место. *Михаил Басок* «Тау функция и пространство модулей спинорных кривых»

Третье место. *Александр Маслей* «Дискретные группы изометрий гиперболического пространства»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Артур Томберг* «Твисторные пространства гиперкомплексных многообразий сбалансированы»

Второе место. *Алексей Балицкий* «Кратчайшие замкнутые бильярдные траектории на плоскости и случаи равенства в гипотезе Малера»

2015

Номинация «Студенты и аспиранты»

Второе место. *Анна Тараненко* «Многомерный перманент и верхняя оценка числа трансверселей латинских квадратов»

Третье место. *Родион Деев* «О расслоениях с гиперкэлеровыми слоями»

Третье место. *Игорь Махлин* «Комбинаторная формула для аффинных функций Холла—Литтлвуда и взвешенная теорема Бриона»

Третье место. *Егор Ясинский* «Подгруппы нечетного порядка в группе Кремоны вещественной проективной плоскости»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Денис Городков* «О 15-вершинной триангуляции кватернионной проективной плоскости»

Второе место. *Екатерина Щётка* «Квазиклассические асимптотики решений разностных уравнений на комплексной плоскости»

2016

Номинация «Студенты и аспиранты»

Первое место. *Александр Калмынин* «О числах Новака»

Второе место. *Мария Платонова* «Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана—Лиувилля»

Третье место. *Павел Сечин* «Морава-ориентируемые ориентируемые теории»

Номинация «Студенты»

Первое место. *Василий Крылов* «Явная конструкция изоморфизма между колчанными многообразиями типа A и трансверсальными срезами в аффинном грассманиане»

Второе место. *Ренат Абугалиев* «Аutomорфизмы поверхностей типа $K3$ »

Второе место. *Егор Воронецкий* «О нормальности элементарной подгруппы в $Sp(2, A)$ »

Александр Кузнецов



Доктор физико-математических наук, профессор РАН, член-корреспондент РАН, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Победитель Первого конкурса Мёбиуса (1997), лауреат конкурса Пьера Делиня для молодых математиков (2005), лауреат премии Президента РФ в области науки и инноваций для молодых ученых за 2008 г., лауреат премии Европейского математического общества (2008), приглашенный докладчик на Международном математическом конгрессе в Сеуле (2014), член редколлегии журналов «Moscow Mathematical Journal» и «Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste».

Участие в конкурсе Мёбиуса оказало на меня очень большое влияние.

Во-первых, оно придало мне уверенности в собственных силах и служило моральной поддержкой в дальнейшей жизни.

Во-вторых, оно мне существенно помогло материально, полученная премия была очень значительной прибавкой к моим семейным доходам.

Алгебраическая геометрия

Алгебраическая геометрия — это раздел математики на стыке алгебры и геометрии, который изучает геометрические свойства многообразий, задаваемых в аффинных или проективных пространствах полиномиальными уравнениями. Начиная с середины XX века алгебраическая геометрия по праву занимает центральное место в современной математике, вбирая в себя методы топологии, анализа, дифференциальной геометрии, теории чисел, математической физики и других математических дисциплин.

Конкретное направление алгебраической геометрии, которое наиболее близко моим интересам, — это изучение производных категорий когерентных пучков на алгебраических многообразиях и связь их свойств с геометрическими свойствами многообразий. Здесь удивительным образом переплетаются абстрактные алгебраические свойства абелевых и триангулированных категорий и геометрические свойства многообразий. С одной стороны, большинство многообразий восстанавливается по своей производной категории. С другой стороны, есть примеры разных многообразий, обладающих одинаковой производной категорией. Наконец, у некоторых многообразий производные категории имеют общую компоненту. Все эти явления, с одной стороны, совершенно неочевидны на геометрическом уровне. Но с другой стороны, они имеют множество именно геометрических следствий.

Здесь также возникает неожиданная связь с симплектической геометрией, описанная в гипотезе о зеркальной симметрии, имеющей своими корнями теорию струн и физику высоких энергий. Согласно этой гипотезе производная категория алгебраического многообразия совпадает с категорией совершенно другой природы (симплектической категорией Фукаи) другого многообразия — так называемого зеркального партнера. При этом ожидается, что интересные и неожиданные компоненты производных категорий на зеркальной стороне приобретают конкретный геометрический смысл и становятся «видны».

Короче говоря, мой раздел математики интересен богатой структурой и неожиданными связями с, казалось бы, совершенно другими математическими областями.

Владлен Тиморин



Доктор физико-математических наук, профессор и декан факультета математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, член правления Независимого Московского университета.

Победитель Второго конкурса Мёбиуса (1998), лауреат конкурса Пьера Делиня для молодых математиков (2009), лауреат премии фонда «Династия» (2012).

В конкурсе Мёбиуса я участвовал, будучи студентом. Участие в конкурсе позволило мне поверить в собственные силы.

Топологические модели

Буду двигаться от общего к частному. Я геометр. Геометрия меня привлекает сочетанием противоположностей: она требует, с одной стороны, безудержного воображения (геометр мыслит картинками), а с другой стороны, безупречной логики, как и любая математическая дисциплина.

В разное время я увлекался разными разделами геометрии, но в последние годы концентрирую внимание на динамике рациональ-

ных функций. Этот сюжет относится как к геометрии, так и к динамическим системам. Рациональная функция от одной комплексной переменной — очень простой и осязаемый объект, если смотреть на него с алгебраической точки зрения. Например, имеется очень простая формула $f(z) = z^2 - 1,5$. Эта формула дает исчерпывающее алгебраическое описание квадратного многочлена f одной комплексной переменной z . С другой стороны, когда мы встаем на точку зрения динамических систем, мы рассматриваем итерации многочлена f , т.е. применяем многочлен последовательно много раз. Каждая точка на плоскости комплексных чисел определяет последовательность $z, f(z), f(f(z)), \dots$. Эта последовательность называется орбитой точки z . Теория динамических систем занимается изучением таких процессов, которые происходят по одному, раз навсегда заданному закону. Наше отображение f определяет дискретную динамическую систему в следующем смысле. Про точку z следует думать как про состояние системы в некоторый момент времени. Моменты времени считаются дискретно, т.е., например, есть момент 0, момент 1 и т.д. Если в момент времени n система находилась в состоянии z , то в момент времени $n + 1$ она будет находиться в состоянии $f(z)$. Таким образом, орбита — это последовательность состояний одной и той же системы в последовательные моменты времени. Типичные вопросы в теории динамических систем следующие: как орбита точки z зависит от самой точки и от отображения f ? Это сложные вопросы даже для очень простых систем, таких, как рассматриваемая сейчас. Например, что можно сказать про замыкание множества всех точек z , орбиты которых конечны? Является ли это множество локально связным? Ответы на эти вопросы очень трудно получить, глядя на формулу. Требуется другое, альтернативное описание отображения f , которое было бы явным не в алгебраическом смысле, а в смысле топологической динамики. Такие динамически явные описания называются топологическими моделями. Ими я и занимаюсь.

Александр Буфетов



Доктор физико-математических наук, профессор Независимого Московского университета, ведущий научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова РАН и Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича (ИППИ РАН), сотрудник лаборатории факультета математики НИУ ВШЭ, директор исследований Национального центра научных исследований Франции (CNRS), член редколлегии журналов «Moscow Mathematical Journal» и «Известия РАН. Серия математическая».

Победитель Третьего конкурса Мёбиуса (1999), лауреат премии Московского математического общества за цикл работ по приложению теории перекладываний и гиперболической теории динамических систем к потокам Тейхмюллера (2005), лауреат премии имени С. В. Ковалевской за цикл работ «Эргодическая теория и ее применения к случайным процессам, представлениям и теории Тейхмюллера» (2015).

Приз конкурса Мёбиуса был очень важен как практически — стипендия победила репетиторство, на которое ушли сотни невозвратимых часов начиная с предпоследнего класса школы, — так и для

самооценки. Атмосфера среди московских школьников и студентов-математиков была в то время чрезвычайно остро конкурентной: «А первый, В второй...», что подогревалось олимпиадным движением напрямую и разными способами косвенно: например, Независимый университет платил стипендию своим студентам, а мне, поступившему школьнику, нет. Приз Мёбиуса позволил надеяться, что я конкурентоспособен. Потом мой научный руководитель Яков Григорьевич Синай скажет мне: «Математика — не скачки», декан математического факультета Чарльз Фефферман: «если вы будете усердно заниматься, то у вас получится — может быть, не именно то, чего вы хотели, но непременно получится», а моя первая работа в Принстоне¹ продолжит представленную в конкурс Мёбиуса.

Меры Пальма детерминантных процессов

Точечный процесс на прямой моделирует последовательность неразличимых событий, происходящих через случайные промежутки времени. В самом широком смысле теория точечных процессов началась с пионерской работы [2] Джона Граунта, в XVII веке подробно исследовавшего таблицы смертности лондонцев «with reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Ayre, Diseases, and the several Changes of the said CITY»; Граунт отмечает среди прочего, что население Лондона удваивается втрое быстрее, чем население Англии. В начале XX века перед телефонными операторами встала задача возможного уменьшения времени ожидания в очереди на звонок. Проблемой времени ожидания занимался Андрей Николаевич Колмогоров [4]. Конрад Пальм, инженер, работавший на фирму «Эрикссон» в Стокгольме, предложил [5] рассматривать условное распределение времени ожидания следующего события при условии, что событие только что произошло. Работа Пальма была написана с позиций инженера; математическую теорию распределений, которые сегодня мы называем именем Пальма, дал Александр Яковлевич Хинчин [3].

В моей работе [1] исследуются меры Пальма для детерминантных точечных процессов. Детерминантными эти процессы называют потому, что их ключевые численные характеристики (например, корреляционные функции) задаются детерминантными формулами.

Главный результат работы [1] в том, что для широкого класса детерминантных процессов меры Пальма, взятые в различных точ-

¹A. Bufetov. Convergence of spherical averages for actions of free groups // Annals of Math. (2). 2002. V. 155, № 3. P. 929—944.

ках — иначе говоря, по отношению к событию, произошедшему в тот или иной фиксированный момент времени, — переводятся одна в другую умножением на функцию, найденную явно.

Литература

- [1] *A. Bufetov*. Quasi-Symmetries of Determinantal Point Processes. arXiv:1409.2068. Annals of Probability, to appear.
- [2] *John Graunt*. Observations on the London bills of mortality. London, 1662.
- [3] *А. Я. Хинчин*. Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. 1955. Т. 49. С. 3—122.
- [4] *А. Н. Колмогоров*. Sur le problème d'attente // Мат. сборн. 1931. Т. 38, вып. 1—2. С. 101—106.
- [5] *C. Palm*. Intensitätsschwankungen im Fernspreverkehr // Ericsson Technics. 1943. V. 44. P. 1—189.

Сергей Мелихов



Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Победитель Четвертого конкурса Мёбиуса (2000), награжден медалью РАН для молодых ученых (2006)

Участие в конкурсе оказало мне финансовую поддержку, за что я очень благодарен. Полученные деньги тратил на еду, книги по математике, диски с классической музыкой.

Топология доказательств

Я считаю себя топологом, но если написать про все независимые сюжеты в топологии, к которым я время от времени возвращаюсь, получится очень длинно; а если выбрать какой-то один из них — это даст сомнительное представление о моих интересах, и тем более о топологии в целом. Поэтому лучше я напишу про логику (точнее, «топологию доказательств»).

В математической жизни нередко возникают вопросы такого типа: допустим, у некоторой теоремы появились из разных источников два доказательства; являются ли эти доказательства принципиально различными или можно одно «продеформировать» в другое

последовательностью каких-то элементарных преобразований, не меняющих ничего «по существу»? Попытки неформального анализа конкретных примеров из элементарной математики можно найти, например, в блоге Тимоти Гауэrsa, а попытку поставить вопрос о «гомотопности» двух заданных доказательств в общем виде (и, похоже, даже более общий вопрос о «пространствах доказательств») — в 24-й проблеме Гильберта (которая не вошла в окончательную редакцию его известного списка из 23 проблем, но была найдена в черновиках Гильберта около 20 лет назад). Этот вопрос несложно формализовать в стандартных терминах теории доказательств (исчисление секвенций Генцена), и, оказывается (Лафон, 1989 г.), в классической логике вообще все доказательства заданной теоремы всегда «гомотопны» друг другу (в некотором довольно естественном смысле). Доказательство этого общего факта, с одной стороны, вполне убедительно (т. е. рассматриваемая формализация хорошо согласуется с интуицией, подсказываемой математической практикой), но с другой стороны, основано на общем трюке, который ровным счетом ничего не проясняет применительно к конкретным примерам. С точки зрения традиционной теории доказательств у этого «парадокса» есть очевидное «решение» (его указывает и сам Лафон): здесь «правильно» (в смысле отражения математической практики) все, кроме классической логики! На первый взгляд этот вывод кажется еще более парадоксальным, поскольку почти все математики именно классической логикой и пользуются на практике. Но на самом деле все несколько сложнее. Скажем, если некто придёт в НМУ и скажет: «либо гипотеза Римана верна, либо она неверна; значит, по принципу исключенного третьего мне полагается премия имени Мёбиуса» — на него посмотрят в лучшем случае с сочувствием. Это говорит о том, что деятельность по нахождению доказательств не подчиняется законам классической логики; выражаясь точнее, *металогика* (классической логики), которой математики реально пользуются на практике, не классическая, а конструктивная. К сожалению, до недавнего времени на формальную металогiku смотрели исключительно с синтаксической точки зрения (основные ее применения — в пружфчекерах, начиная с системы LCF 1972 года и до современных Isabelle и HOL), и только в этом году стали понятны какие-то самые базовые вещи про ее модели, в том числе топологические (см. [arXiv:1504.03380v3](https://arxiv.org/abs/1504.03380v3); там же можно прочитать подробнее обо всем вышесказанном).

Если временно отвлечься от привычной классической логики и подсмотреть краем глаза, что происходит в логике конструктивной, — оказывается, что все вопросы о гомотопиях и пространствах

доказательств уже решены в ней весьма разумным образом, хорошо согласующимся с интуицией. В частности, конструктивная теория типов Мартин-Лёфа (1970-е гг.), произошедшая из теории доказательств и разработанная в первую очередь для нужд компьютерных наук (где «типы» реализуются как типы данных, быть может весьма сложно устроенные, а конструктивным доказательствам соответствуют программы), оказалась эквивалентной переформулировкой некоторого варианта аксиоматической теории гомотопий (близкого к модельным категориям Квиллена). Это важное соответствие (Эводи, Воеводский и др., 2006—2009 гг.) породило целую науку под названием «гомотопическая теория типов», претендующую даже на новые «универсальные основания» математики. Но эта очень красивая и активно развивающаяся наука, к сожалению, ставит перед собой в первую очередь утилитарные цели (в направлении «заменить рецензентов математических статей компьютером») и стремится к простоте исходя из них; поэтому нет ничего удивительного в том, что с точки зрения универсальных оснований все доказательства заданной теоремы элементарной математики по-прежнему «гомотопны» друг другу (несмотря на решительный отказ от классической логики в пользу конструктивной), а нетривиальная топология доказательств возникает, только если ее создавать искусственно.

Таким образом, до сих пор очень мало что понятно относительно содержательных связей между конструктивной математикой и тем, чем на самом деле занимаются почти все математики (а не тем, чем они должны заниматься по мнению конструктивистов). Самое разумное, что имеется на этот счет, — заметка А. Н. Колмогорова 1932 года, в которой он объяснил, что конструктивная («интуиционистская») логика — это «на самом деле» логика задач, в том же смысле, в котором обычная классическая логика — это логика высказываний. Задачи бывают, например: шахматные; на построение циркулем и линейкой; решить уравнение (например, задача Коши); доказать утверждение. *Задача* — это требование (или желание) выполнить оговоренными средствами построение, удовлетворяющее требуемым условиям. Колмогоров дал интерпретацию конструктивных логических (и, по существу, металогических) связок и кванторов в терминах операций над задачами. Например, импликация интерпретируется как сведение одной задачи к другой; а если Γ обозначает, скажем, задачу «разделить заданный угол на три равные части циркулем и линейкой», то $\Gamma \vee \neg\Gamma$ — это задача «разделить заданный угол на три равные части циркулем и линейкой или доказать, что это невозможно». Это весьма нетривиальная задача; ее решение

заняло пару тысячелетий. И даже сейчас, когда решение хорошо известно, сама задача по-прежнему сохраняет смысл: принцип исключенного третьего $P \vee \neg P$ не поможет студенту решить эту задачу на экзамене (по теории Галуа). Поэтому этот принцип, невыводимый в интуиционистской логике, к задачам не применим. В то же время было бы странно запрещать его применение к высказываниям.

Мейнстрим математической логики воспринял интерпретацию Колмогорова лишь отчасти (особенно на Западе), проигнорировав всю ее металогическую часть и переименовав «решения задач» в «доказательства высказываний» (что создает конфликт с обычным пониманием высказываний и их доказательств, которого у Колмогорова не было). Такой неудачный выбор терминологии сложился исторически (в этих терминах независимо от Колмогорова сформулировал нечто похожее Гейтинг, причем со временем это стало восприниматься как «та самая», «подразумеваемая» интерпретация интуиционистской логики) и до некоторой степени связан с трудностями перевода (хотя в русском и немецком языках математические задачи мирно уживаются с математическими проблемами, в английском, французском и голландском им это почему-то не удается). При этом отбрасывание металогической части, с одной стороны, сделало неформальную интерпретацию Колмогорова куда более загадочной, чем она есть на самом деле (так как без учета металогической части она, строго говоря, применима и к классической логике), а с другой стороны, имеет вполне содержательные причины: если ее попытаться формализовать целиком, оказывается, что ни обычная теория моделей (основанная на понимании следования по Тарскому), ни даже стандартный формализм логики первого порядка (основанный на схемах, содержащих метаварьируемые) для этого не достаточны; адекватная формализация получается только в рамках моделей металогики (см. [arXiv:1504.03380](https://arxiv.org/abs/1504.03380)).

Итак, сейчас наконец выясняется, «что такое» задачи в смысле Колмогорова. Фиксируются «пространство модулей», параметризующее некоторый класс задач, и «тавтологическое расслоение» над ним, слой которого над заданной задачей состоит из всех ее решений. (Например, задача может состоять в решении уравнения с параметром, тогда пространство модулей — это просто то пространство, которое пробегает параметр; или в задаче на построение циркулем и линейкой в качестве пространства модулей могут выступать всевозможные конфигурации начальных данных; конечно, должны быть выполнены определенные условия.) Логические и металогические связки и кванторы интерпретируются естественными операциями над всем расслоением (а не над отдельными его слоями,

что давало бы интерпретацию классической логики). В таком виде «класс задач» — это примерно то же самое, что «универсум» в теории типов Мартин-Лёфа (с точки зрения гомотопической теории типов), однако здесь речь идет об интерпретации не только объектной (интуиционистской) логики, но и ее металогики (а вместо расслоений на самом деле подойдут и пучки множеств).

Однако какое все это имеет отношение к традиционной математике? Все мы любим решать задачи, но где та формальная логика, которая позволила бы осознать какие-то конкретные задачи из элементарной математики в этих терминах (так же как теоремы и другие высказывания из арифметики и геометрии вполне адекватно описываются формальными теориями, основанными на обычной классической логике)? В комментарии к своему собранию сочинений 1985 г. А. Н. Колмогоров сообщает: «Работа [1932 г.] писалась в надежде на то, что логика решения задач сделается со временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами». Недавно такой аппарат — совместная логика задач и высказываний — наконец появился (arXiv:1312.2575): он соединяет классическую и интуиционистскую логику посредством двух новых операторов (? сопоставляет заданной задаче высказывание о том, что она имеет решение; а ! сопоставляет заданному высказыванию задачу, состоящую в том, чтобы его доказать). На уровне классов формул относительно логической эквивалентности (т. е. алгебры Линденбаума) эти два оператора задают соответствие Галуа (т. е. пару сопряженных функторов между частичными порядками).

Совместная логика задач и высказываний уже слегка проявляется кое-что в элементарной математике. Так, первые 4 книги «Начал» Евклида, состоящие из теорем планиметрии и задач на построение циркулем и линейкой, можно понимать как начальный фрагмент некоторой формальной теории над совместной логикой задач и высказываний. Чисто классическая часть этой теории совпадает со слабой (конечно аксиоматизируемой) элементарной геометрией Тарского, а чисто конструктивная — с интуиционистской геометрией Бисона; операторы ? и ! позволяют формализовать логическую взаимозависимость между теоремами и задачами в том виде, в котором она встречается у Евклида.

Кроме того, модель совместной логики задач и высказываний, в которой задачи интерпретируются пучками множеств на некотором пространстве X , а высказывания — подмножествами пространства X , хорошо описывает задачи о нахождении «устойчивых» ре-

шений алгебраических уравнений с параметром из X (скажем, в случае $X = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и высказывания о существовании таких решений. При этом конъюнкция таких задач отвечает системе соответствующих уравнений, дизъюнкция — их совокупности, а импликация — сведению одного уравнения к другому (в смысле, хорошо согласующемся, например, с теми редукциями, которые возникают при решении в радикалах уравнений малых степеней). Поэтому конъюнкция и дизъюнкция таких задач интерпретируются *произведением и дизъюнктным объединением* пучков решений (т. е. при фиксированном значении параметра — самих множеств решений), а конъюнкция и дизъюнкция высказываний о существовании решений этих задач — *пересечением и объединением* множеств (а именно, множеств значений параметра, при которых система или совокупность уравнений имеет устойчивое решение). Вообще, как видно из этого примера, типичная задача включает в себе некую категорификацию высказывания о существовании ее решения.

Однако для того, чтобы можно было говорить о каком-то минимальном понимании происходящего, следует знать хотя бы одну достаточно естественную ситуацию (скажем, в формальной арифметике), в которой оба оператора $!$ и $?$ *одновременно* имеют вполне содержательный, нетривиальный смысл. Этого пока не сделано — хотя некоторые ожидания на этот счет имеются.

Сергей Шадрин



Кандидат физико-математических наук, профессор Амстердамского университета.

Победитель Четвертого конкурса Мёбиуса (2000) и лауреат второй премии Седьмого конкурса Мёбиуса (2003), лауреат конкурса Пьера Делиня для молодых математиков (2005), лауреат премии Московского математического общества за цикл работ по топологии пространств модулей (2007).

В те годы, что я был студентом и аспирантом в Москве, не существовало никаких академических позиций соответствующего уровня, позволяющих полностью содержать себя на получаемую зарплату. Единственный способ организации жизни аспиранта, желающего заниматься профессионально наукой и в перспективе защитить диссертацию, заключался в постоянном жонглировании разными источниками доходов (небольшие стипендии, гранты, частные уроки, преподавание где-нибудь на полставки, подработки вне академической системы, временные контракты за границей и т. п.). Все это требовало неусыпного внимания и времени. Конкурс Мёбиуса позволял (в случае положительного итога) на год-другой упростить эту систему самофинансирования до более или менее разумной, не

требуя фактически ничего взамен (подать на конкурс уже написанную статью, разумеется, намного экономнее по расходу времени, чем, например, написать с листа заявку на грант, а потом еще и отчет).

Алгебра, геометрия, комбинаторика и дифференциальные уравнения

Мне немного сложно точно определить, каким именно разделом математики я занимаюсь, поскольку моя основная тема находится на пересечении нескольких областей, на первый взгляд не очень друг с другом связанных.

1. Пространство модулей кривых: мы смотрим на двумерные поверхности (сфера, тор или, скажем поверхность кренделя) и изучаем вопрос, как устроено пространство всех возможных комплексных структур на них. Иными словами, мы изучаем, как такие поверхности можно задавать уравнениями в комплексных пространствах, с точностью до некоторых естественных эквивалентностей. Мы интересуемся топологией этих пространств и их естественных подпространств.

2. Комбинаторика: мы изучаем специальный класс задач, в которых ответ зависит естественным образом от чисел $g \geq 0$, $n \geq 1$ и дополнительного набора натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$. Например, можно спросить, сколько имеется неэквивалентных способов разрезать сферу с g ручками на n многоугольников, где первый многоугольник имеет k_1 сторон, второй — k_2 сторон и т.д. Интересно изучать универсальные системы рекурсий, позволяющих решать такие задачи, например топологическую рекурсию, приходящую из теории матричных моделей.

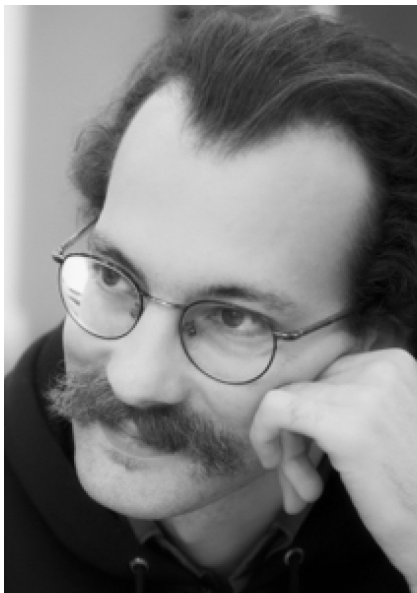
3. Интегрируемые иерархии: мы изучаем системы дифференциальных уравнений специального вида, например уравнения, описывающие одиночные волны в одномерной модели и их деформации. Тут интересны вопросы существования и классификации таких систем, а также геометрическая и/или комбинаторная интерпретация их формальных решений.

4. Гомотопическая алгебра: можно изучать алгебраические структуры абстрактно, без привязки к их конкретной реализации. Например, ассоциативные алгебры — вместо изучения одной конкретной можно изучать универсальное пространство операций, необходимых для задания структуры ассоциативной алгебры. Пространство операций можно естественно рассматривать как универсальную часть некоторого большего пространства, оснащенного более богатой и гибкой структурой. Тут интересны вопросы естественных

переносов таких структур с одного пространства на другое и их возможных деформаций и симметрий.

Каждую из этих областей интересно изучать саму по себе, но, кроме того, они все связаны следующими наблюдениями: более или менее одни и те же интегралы на пространствах модулей кри-вых, во-первых, дают универсальные решения для упомянутых выше комбинаторных задач, во-вторых, определяют интегрируемые иерархии дифференциальных уравнений и, в третьих, дают интересные примеры алгебраических структур, свойства поднятий которых до пространств операций опять же оказываются некоторыми утверждениями про топологию пространств модулей.

Виктор Клепцын



Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник CNRS, Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR).

Победитель Шестого конкурса Мёбиуса (2002).

Премия конкурса Мёбиуса оказалась для меня «внешним подтверждением», давшим мне уверенность в себе — что я могу решать задачи, которые интересны многим, не только математикам непосредственно вокруг меня. И это для меня было очень важно.

Динамические системы

Работа, за которую я получил премию, была посвящена случайным динамическим системам на окружности. Динамические системы — математическая формализация идей Лапласа, что «если бы мы знали положения и скорости всех частиц сейчас, то исходя из законов природы мы бы могли предсказывать их поведение в сколь угодно далеком будущем».

Более формально — задаются множество состояний системы X и его непрерывное отображение в себя f , «в каком состоянии система будет через минуту». Его итерации и задают динамику системы.

Зачастую предполагают, что отображение f взаимно однозначное или даже гладкое (как это должно быть для отображения последования, соответствующего дифференциальному уравнению, например уравнениям небесной механики).

В случайных же динамических системах на каждом шаге новое применяемое отображение выбирается случайно — скажем, из конечного набора «киданием кубика». Исходная наша работа с Максимом Нальским была посвящена случайной динамике на окружности: ставя компьютерные эксперименты, Максим обнаружил, что орбиты с различными начальными условиями, но подвергаемые итерациям одних и тех же отображений, сближаются. Иными словами, в случайной динамике на окружности система «забывала прошлое». Мне удалось найти этому строгое доказательство — и мы написали совместную статью.

Увы, через несколько лет оказалось, что еще за двадцать лет до того ленинградский физик В. А. Антонов доказал такое же утверждение почти такими же методами, придя к нему от небесной механики, — для него окружность была множеством возможных положений астероида на орбите. К сожалению, эта его статья долго оставалась неизвестной — она вышла в серии «Астрономия» Вестника Ленинградского университета и оставалась незамеченной. Мы с Максимом узнали о ней, только когда сам Антонов, увидев нашу статью, нам написал.

С тех пор я довольно много занимался задачами, в которых случайность смешивалась с геометрией и динамикой. С Бертраном Делуаном и Андресом Навасом мы дальше исследовали гладкую динамику на окружности и сумели продвинуться во многих разных направлениях.

С ними же и с Камлешем Парвани мы занимались случайной симметричной динамикой на прямой (симметричность означает, что отображение и обратное к нему применяются равновероятно). В этом случае тоже возникает сближение орбит и «забывание прошлого», но техника с работы на окружности переносится не буквально: за неограниченность прямой «приходится платить».

Большой проект, который мы тогда начали с Бертраном и с Андресом, касался классификации групп преобразований окружности. Все началось с вопроса об эргодичности (восходящего к Жису и Салливану) — правда ли, что если для («хорошего») действия нет нетривиальных замкнутых инвариантных множеств, то нет и нетривиальных измеримых инвариантных множеств. Сначала мы придумали свойство действия, которого хватало для доказательства и которое выполнялось во всех известных нам примерах. Потом

начали исследовать, что из этого свойства следует. Тут к проекту присоединился Дмитрий Филимонов, и мы с ним выяснили, что следует многое — действие группы оказывается очень жестко заданным.

Потом попробовали, наоборот, понять, при каких же условиях это свойство (которое мы тогда временно назвали свойством «звездочка», а потом оно так и осталось) выполняется. И в какой-то момент, в Барселоне, у нас «сошлись концы с концами» — нам удалось доказать его для свободных групп. И вот это был прорыв.

После этого мы доказали его для групп с одним концом при паре дополнительных предположений, а недавно, когда к проекту присоединился Микеле Триестино и собрал в Бразилии команду — Себастьяна Альвареса, Доминика Малисета, Карлоса Меньино, — нам всем вместе удалось добить случай группы с бесконечным числом концов (такая группа достаточно похожа на свободную). А поскольку у группы может быть ноль, один, два или бесконечное число концов, причем случаи ноль и два нас не интересуют (это конечная группа и группа, мало отличающаяся от группы $\mathbb{Z}$, соответственно), для совсем полного решения большой проблемы остается избавиться от тех самых предположений, что мы сделали для групп с одним концом.

Что, по-моему, даже более важно, чем решение конкретной (пусть и большой) проблемы, — это что сквозь доказываемые утверждения начала проступать «картина мира»: как нам сейчас кажется, «правильное» деление действий на окружности идет не (или не только) по тому, плотны ли орбиты, а по тому, есть ли в группе отображения, локально сколь угодно похожие на тождественное.

Если есть — действие «очень богатое» (им можно приблизить сдвиг вдоль векторного поля), и отсюда уже следуют все естественные утверждения вроде эргодичности (или негрубости, доказанной в недавней работе Жюлио Ребело и Анаса Эскифа: непрерывное сопряжение двух таких действий оказывается гладким). Если же таких отображений нет, а свойство «звездочка» выполнено, то динамика допустит марковское разбиение (что позволяет описывать группу как почти конечно-комбинаторный объект). Наконец — свойство «звездочка» мы умеем доказывать почти во всех случаях, кроме одного (про который предполагаем, что он невозможен), поэтому предположительно ничего больше вообще не бывает. (А если и бывает, то это такой совсем странный живущий отдельно «монстр».)

И вот это возникшее понимание, «как правильно описывать действия», повторяюсь, мне кажется даже более важным, чем конкретная теорема об эргодичности.

Действия на окружности — пусть и интересный, но, конечно, не единственный сюжет, которым я на протяжении этих лет занимался. Еще один большой сюжет, который хочется упомянуть, — это случайные метрики.

Представим себе, что (топологическая) сфера склеена из большого количества N квадратиков. Конечно, есть очень много способов это сделать (и это количество очень быстро растет с ростом N). А какая метрика на сфере получится, если мы будем считать все квадратики единичными (принеся тем самым на сферу риманову метрику)?

Понятно, что в зависимости от способа склейки ответ будет разный. Но если способ склейки выбирать случайно, то оказывается, что с очень большой вероятностью диаметр такой случайной сферы ведет себя как $\sqrt[4]{N}$. Это утверждает теорема Шассанга—Шеффера 2002 года; интересно, что такая необычная степень появляется из-за сочетания двух случайных блужданий — одно задает случайное дерево из N ребер, уходя в среднем на $\sqrt{N}$ от корня, а второе, «идущее» вдоль ребер этого дерева, уходит от нуля на $\sqrt{\sqrt{N}} = \sqrt[4]{N}$. И это, конечно, гораздо меньше, чем «естественный» диаметр $\sqrt{N}$, т. е. сфера получается сильно «скомканной» (и на картинках симуляций это хорошо видно).

Более того, теорема, доказанная в 2011 году одновременно Ле Галлем и Мьермонтом, утверждает, что если поделить метрику на $\sqrt[4]{N}$ (или, что то же самое, считать исходные квадратики имеющими размер $1/\sqrt[4]{N}$), то получающееся семейство случайных метрик сходится по распределению — выполнена своеобразная «центральная предельная теорема». И предельное распределение сконцентрировано на метриках, относительно которых сфера имеет хаусдорфову размерность 4; это очень естественно, ведь до перехода к пределу она склеена из N квадратиков размера $1/\sqrt[4]{N}$ каждый.

А как вообще устроена эта случайная метрика? На это есть подходящий из физики ответ: «как регуляризация экспоненты от гауссова свободного поля». Проблема в том, что придавать этому математический смысл — а точнее, доказывать существование и нетривиальность предела, стоящего в выражении регуляризации, — пока никто не умеет.

Чуть-чуть огрубленная и упрощенная, но столь же нерешенная версия этой задачи такова. Возьмем единичный квадрат с обычной метрикой на нем — и растянем его в случайное число раз, умножив метрику на случайную константу. Потом разделим квадрат на четыре вдвое меньших — и метрику на каждом из них дополнительно умножим на свою (независимую) случайную константу. Потом

разделим каждую из четвертинок еще на четыре части и умножим метрику в каждой из 16 получившихся частей на свою константу. И так далее. А что будет в пределе? Куда такие метрики (правильно отнормированные) сойдутся?

Пределом не может быть риманова метрика — в каждой точке мы умножаем метрику на каждом шаге на свой множитель, и бесконечное произведение равно случайных сомножителей не может сходиться. А вот обычная метрика может быть пределом: «растяжения» и «сжатия» на совсем мелком масштабе усредняются и почти не меняют расстояния между далекими точками.

Наконец, произведение случайных множителей — это экспонента от суммы их логарифмов; эта сумма не сходится ни в одной точке, но она (в разумной ситуации) сходится в обобщенном смысле. И, взяв в качестве самого удобного случая распределение сомножителей с гауссовым логарифмом («лог-нормальное»), в качестве суммы мы получим «дискретное гауссово свободное поле». Чуть-чуть огрубленную версию настоящего — отсюда и слово «дискретное».

Поэтому предельная метрика тут должна быть регуляризованной экспонентой от дискретного гауссова свободного поля. Но опять же, никто не умеет доказывать сходимость процедуры регуляризации. И это все безумно интересно: как же так, очень геометрический вопрос, известный (приходящий из физики) ответ, известная «картина» того, что и как устроено, а не получается доказать существование предела?

Как всегда, когда есть большая открытая проблема, хорошо посмотреть на самый простой из нерешенных случаев. Здесь таким случаем оказались мультипликативные каскады на графах.

А именно: пусть вместо метрик на квадрате мы будем менять метрики на графах. Например, начнем просто с одного ребра случайной длины (вместо исходного квадрата). Вместо деления квадрата на четыре четверти заменим это ребро на ромб из четырех ребер вдвое меньшей длины — и потом умножим длину каждого из них на случайный множитель. Теперь заменим каждое из этих ребер на ромб и умножим длину полученных 16 ребер на 16 случайных множителей и т. д. Можем ли мы доказать сходимость получающихся метрик?

Оказывается, это очень хорошее упрощение исходной задачи. С одной стороны, поскольку на каждом шаге объект (граф) одномерен, с ним еще можно достаточно удобно работать. С другой — там уже проявляется главная трудность плоской задачи: огромное количество «кандидатов в геодезические», путей из одной точки

в другую. И, решая эту версию, можно «наработать технику» и в упрощенных условиях понять, что и как должно происходить.

Правда, даже такая упрощенная версия оказывается нетривиальной. Как утверждает фольклор, когда-то Итаи Беньямини на одной из посвященных этой тематике конференций предложил ее в качестве хорошего первого шага, надеясь, что за неделю-то эта «игрушечная версия» сделается, а потом можно будет идти дальше. С тех пор прошло несколько лет...

В 2012 году я побывал на замечательной летней школе «St. Petersburg Summer School in Statistical Physics» — и Дима Челкак нам с Мишей Христофоровым эту задачу рассказал. И мы начали ее грызть. Потом к нам присоединился Микеле Триестино — и для каскадов на графах мы-таки доказали сходимост! В итоге получилась статья на 76 страниц — самая большая из тех, где я когда-либо участвовал (и одна из тех, которыми я горжусь).

Более того, метод, который мы тогда придумали, позволяет решать и некоторые соседние задачи (связанные уже не со случайными метриками, а просто с ветвящимися процессами). И мне кажется, это здорово.

Рассказав о случайных метриках, конечно, нельзя не вспомнить работы Ясона Миллера и Скотта Шеффилда про лиувиллеву квантовую гравитацию — другой, красивый и геометрический, подход к их описанию. В 2017 году Миллеру и Шеффилду была присуждена премия Клея за эти работы¹.

И вообще — возвращаясь к случайным метрикам и поверхностям в целом — это очень красивая область, где сплетаются вероятность, геометрия и динамика. Живая, современная и интенсивно развивающаяся. И безумно интересная.

¹См. <http://www.claymath.org/jason-miller-and-scott-sheffield>.

Леонид Рыбников



Кандидат физико-математических наук, доцент факультета математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

Победитель Шестого конкурса Мёбиуса (2002), лауреат конкурса Пьера Делиня для молодых математиков (2006), лауреат премии Московского математического общества за цикл работ по методу Годена (2007).

Благодаря премии Мёбиуса я остался в аспирантуре в Москве и не уехал на Запад. Это дало мне возможность работать с Борей Фейгиным и заниматься той наукой, которой я занимаюсь и сейчас.

Теория представлений в математической физике и геометрии

Теория представлений является универсальным инструментом для работы с симметриями какой-либо математической задачи (из любой области математики, в частности теории чисел, математической физики, геометрии и комбинаторики). Грубо говоря, идея состоит в том, что группа симметрий всегда действует линейными преобразованиями векторного пространства, связанного с задачей,

а все такие действия (называемые представлениями группы) можно классифицировать и (уже в зависимости от группы, а не от исходной задачи) более или менее явно описать. Первым шагом была созданная в конце XIX — начале XX века Фробениусом теория характеров, следующим была созданная Вейлем и Картаном теория представлений компактных групп Ли. Важнейшим прорывом, открывшим массу приложений теории представлений к квантовой физике, явилась работа Гельфанда и Наймарка 1950 года о бесконечномерных унитарных представлениях классических групп, продолженная Кирилловым, Костантом и многими другими. Примерно к тому же времени относятся работы Ленгледса, связывающие теорию представлений полупростых групп с автоморфными формами и, таким образом, с современной алгебраической геометрией и теорией чисел. Гипотезы Ленгледса до сих пор являются важнейшим двигателем современной теории представлений.

За более чем столетний период развития теории представлений было накоплено много примеров, когда представление (группы, алгебры Ли или какого-нибудь более сложного объекта) возникает сразу с выделенным базисом, который, во-первых, нумеруется некоторым естественным комбинаторным данным и, во-вторых, позволяет выписать представление в виде явных формул для матричных элементов. Это оказывается очень важным для задач теории интегрируемых систем и перечислительной комбинаторики. Простейшим примером такого рода являются базисы Гельфанда—Цетлина в представлениях симметрической и полной линейной групп. Более нетривиальным и общим примером являются канонические базисы в представлениях квантовых групп и алгебр Гекке. Всякий раз, однако, оказывается, что естественный базис можно получить следующим образом: существует такая абелева категория (или триангулированная категория с Т-структурой) с действием данной квантовой группы, что на ее К-группе Гротендика реализуется данное представление, а классы простых (проективных или еще какого-нибудь естественного класса) объектов образуют данный базис. Общая теория категорных действий сейчас только зарождается, однако много важных примеров изучено (усилиями М. Хованова, А. Лауды, Р. Рукье, Р. Безрукавникова, Б. Вебстера, К. Штроппель, И. Лосева и многих других) уже сейчас. Как правило, категория в этих примерах является категорией когерентных пучков на каком-нибудь пространстве модулей расслоений, а категорное действие происходит из некоторых естественных геометрических соответствий, обобщающих соответствия Стейнберга. Этот подход сейчас активно развивается также Х. Накаджимой, А. Окуньковым,

Д. Мауликом, А. Обломковым, А. Браверманом, М. Финкельбергом, А. Негуцем, М. Вараньоло, Э. Вассеро и многими другими.

Теория интегрируемых систем доставляет много примеров, когда естественный базис в представлении, скажем, простой алгебры Ли или квантовой группы естественным образом включается в многопараметрическое семейство базисов. С точки зрения математической физики, пространство представления является пространством состояний некоторой квантовой гамильтоновой системы (зависящей от параметров), а базис состоит из собственных состояний для законов сохранения системы. Простейшим примером такой системы является магнитная цепочка Гейзенберга (XXX) и ее вырождения, самое глубокое из которых приводит к базисам Гельфанда—Цетлина. Уже в этом простейшем случае собственный базис может быть выписан явно только в предельных случаях, а при общих значениях параметров задача его нахождения сводится к довольно сложным уравнениям анзаца Бете. Геометрически коммутативные алгебры законов сохранения таких интегрируемых систем возникают как операторы квантового умножения на классы когомологий (или К-теории) соответственно в кольце когомологий или в К-теории подходящего многообразия (как правило, это некоторое пространство модулей пучков). Таким образом, деформация стандартных базисов в представлениях простых алгебр Ли, квантовых групп и т. д. несет в себе информацию, с одной стороны, о решениях уравнений анзаца Бете, а с другой — об инвариантах Громова—Виттена пространств модулей пучков.

Эти геометрические примеры категорных действий, их комбинаторные и геометрические аспекты, а также связанные с ними задачи анзаца Бете и являются предметом моих исследований.

Сергей Чулков



Кандидат физико-математических наук, заместитель генерального директора в ООО «Ингосстрах ОНДД Кредитное Страхование». Лауреат первой премии Седьмого конкурса Мёбиуса (2003).

Участие в конкурсе прежде всего придало уверенности и в работе, и в публичных выступлениях. Стипендия победителя оказала, без сомнения, неоценимую поддержку во время обучения в аспирантуре.

Актuariяная математика

Для меня период занятий чистой математикой закончился достаточно резко. В начале 2007 года я по семейным обстоятельствам не смог вернуться на postdoc в Торонто. Сразу же встал вопрос финансов, и уже летом 2007 года я устроился на работу актуарием в страховую компанию в Москве.

Актuariяная математика может рассматриваться как прикладная смесь статистики, случайных процессов и теории вероятностей. Я не пересекался ранее в своих работах со статистикой, но восстановить базовые университетские знания было несложно. В профессии

актуария или, немного более общим образом, специалиста по оценке рисков доля реальных (прикладных) математических задач варьируется во времени и может составлять от близких к нулю значений до практически полной загрузки. Работая в страховых компаниях, я развивал и расширял область своих компетенций на различные смежные вопросы от управления рисками до финансов. Параллельно, при наличии времени, преподавал. На данный момент я продолжаю свою карьеру в страховании.

Я думаю, что математика в широком смысле играла и играет определяющую роль в моей жизни. Образ мышления, подход к решению прикладных задач, систематизация процессов, стремление к ясному пониманию проблем и проникновению в их суть это то, что лично мне дали годы работы и занятий математикой. Математика — это удивительный инструмент, который может быть успешно применен к огромному кругу задач, как внешних, так и внутренних. Умение думать, рассуждать и структурировать мир вокруг себя является, с моей точки зрения, одним из базовых на пути к повышению уровня осознанности человека в целом, что критически важно для дальнейшего развития социума и цивилизации.

Сергей Облезин



Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института теоретической и экспериментальной физики имени А. И. Алиханова (ИТЭФ),

Лауреат второй премии Седьмого конкурса Мёбиуса (2003), лауреат конкурса Пьера Делиня для молодых математиков (2009), лауреат премии фонда «Династия» (2012).

Участие в конкурсе Мёбиуса 2003 года оказало существенное влияние на мой выбор профессии математика. Когда я решил принять участие в конкурсе, я был аспирантом МФТИ 3-го года; я заканчивал написание диссертации, и для меня был актуальным вопрос о выборе дальнейшего рода занятий. Я помню, что приглашение на финальный (очный) тур было просто приятным сюрпризом, однако именно непосредственное участие в очном туре произвело на меня большое впечатление и, как мне представляется, повлияло на мой выбор профессии. Особенно запомнилась яркая и насыщенная атмосфера финального тура, которую я бы сравнил с атмосферой неформального многочасового семинара в «русском стиле» — с открытой дискуссией, вопросами и комментариями из аудитории (как

от членов жюри, так и от остальных слушателей) по ходу докладов. Я думаю, что именно эта непередаваемая атмосфера открытого научного обсуждения, нацеленного на научный результат сам по себе, и оказала на меня наибольшее влияние, и сыграла свою роль в дальнейшем.

Топологические теории поля, операторы Бакстера и соответствие Ленгленса

Теория чисел представляется наиболее сложным разделом математики; несмотря на значительные усилия ведущих математиков второй половины XX века, на сегодняшний день нет четкого и полного понимания конструкции многомерного обобщения теории. Одно из основных направлений в современной теории чисел связано с поиском и описанием новых аналитических симметрий и их применением для построения подходящей геометрической модели.

1. Классическая теория чисел описывает поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и его расширения. Дзета-функция (Римана) поля $\mathbb{Q}$ определяется следующим рядом:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad (1)$$

и имеет представление в виде бесконечного произведения по всем простым числам (формула Эйлера):

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $s \in \mathbb{C}$ обеспечивается функциональным уравнением

$$\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s), \quad \zeta^*(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s);$$

таким образом, представляется естественным рассматривать

$$\zeta^*(s) = \prod_{p \leq \infty} \zeta_p(s), \quad \zeta_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{1 - p^{-s}}, & p < \infty; \\ \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), & p = \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Важно подчеркнуть: чтобы получить корректное определение дзета-функции на комплексной плоскости, нужно ее домножить на $\zeta_{\infty}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

Далее можно заметить, что бесконечное произведение в формуле (2) можно проинтерпретировать как произведение по множеству

нормирований $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$, состоящему из множества неархимедовых нормирований, отвечающих множеству $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ простых идеалов кольца целых $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, и архимедова нормирования $|\cdot|_\infty = |\cdot|$, задаваемого обычной абсолютной величиной. Каждое нормирование $|\cdot|_p$, $p \leq \infty$, определяет локальное пополнение исходного поля рациональных чисел — архимедово, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, в случае $p = \infty$ или p -адическое, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$, в случае неархимедова нормирования.

Возникает ряд естественных вопросов о природе архимедова фактора $\zeta_\infty(s)$ — например, можно ли описать $\zeta_\infty(s)$ в терминах исходного поля $\mathbb{Q}$; можно ли единообразно описать архимедовы и неархимедовы локальные множители? Следует ожидать, что попытки ответить на поставленные вопросы могут способствовать решению задачи об инвариантном определении дзета-функции и её геометрическом смысле.

2. В основе программы Ленглендса лежит изучение дзета-функций с нетривиальными коэффициентами, построенных по некоторому бесконечномерному (сферическому) представлению редуктивной группы $G(F_v)$; в этом обзоре мы ограничимся рассмотрением случая $G = \text{GL}(N, F_v)$, где $F_v = \mathbb{Q}_p$ или $F_v = \mathbb{R}$. Программа включает в себя широкий ряд утверждений и гипотез в теории чисел, теории представлений и геометрии; одним из результатов является классификация некоторого класса бесконечномерных представлений группы $G(F_v)$. В качестве примера обобщенной дзета-функции рассмотрим L -функцию, заданную своими локальными факторами:

$$L_p(s; V) = \frac{1}{\det_v(1 - A_p p^{-s})}, \quad L_\infty(s; V) = \prod_{i=1}^N \pi^{-\frac{s-\lambda_i}{2}} \Gamma\left(\frac{s-\lambda_i}{2}\right); \quad (3)$$

здесь $V = \mathbb{C}^N$ — представление двойственной по Ленглендсу группы $G^\vee(\mathbb{C})$ (вообще говоря, отличной от исходной группы $G(F_v)!$), $A_p \in \text{GL}(V)$ — набор обратимых операторов, действующих в V , а $A_\infty := \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. При определенных условиях на операторы A_p построенная L -функция

$$L^*(s; V) := L_\infty(s; V) \prod_p L_p(s; V)$$

удовлетворяет функциональному уравнению следующего вида:

$$L^*(1-s; V) = \epsilon(s) L^*(s; V), \quad (4)$$

где $\epsilon(s) = ab^s$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Первым шагом к единообразному изучению архимедовых и неархимедовых локальных множителей является рассмотрение функций Уиттекера $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}(g)$ на редуктивной группе $G_v = G(F_v)$ (Жаке,

Ленглендс, см. [10]), т. е. вместо дзета-функций и L -функций, инвариантный смысл которых неясен, мы будем изучать групповые объекты — специальные функции на группе.

Зафиксируем максимальную унитарную подгруппу U_v и максимальную компактную подгруппу K_v в G_v , тогда $G_v = U_v H_v K_v$, где $H_v \subset G(F_v)$ — максимальный тор. Функция Уиттекера строится по характеру ψ подгруппы $U_v \subset G_v$ и удовлетворяет следующему условию:

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{G(F_v)}(ugk) = \psi(u) \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{G(F_v)}(g), \quad u \in U_v, k \in K_v. \quad (5)$$

Локальные функции Уиттекера $\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{G(F_v)}(g)$ позволяют восстановить соответствующие L -факторы (3) в виде спектра локальной алгебры Гекке $\mathcal{H}_v = \mathcal{H}(G_v, K_v)$, $v = p, \infty$, относительно действия которой функции Уиттекера являются собственными.

Локальной алгеброй Гекке $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ называется векторное пространство K_v -биинвариантных функций (с дополнительным условием на степень роста): $\phi(g) = \phi(k_1 g k_2)$, $k_1, k_2 \in K_v$ на группе G_v . Умножение задается конволюцией:

$$(\phi_1 * \phi_2)(g) = \int_G d\mu_v(h) \phi_1(gh^{-1}) \phi_2(h), \quad (6)$$

где $d\mu_v(h)$ — мера Хаара на группе G_v ; алгебра $\mathcal{H}_v$ коммутативна. Заметим, что K_v -биинвариантные функции естественным образом действуют посредством конволюций на K_v -правоинвариантные функции, в частности на функции Уиттекера. Например, в случае $G_v = \mathrm{GL}(N; \mathbb{Q}_p)$ классические операторы Гекке $T_p^{(r)}$, $1 \leq r < N$, задаются конволюциями с характеристическими функциями $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_r}$ двойных смежных классов:

$$\mathcal{O}_r = K_p \cdot \underbrace{\mathrm{diag}\{p, \dots, p, 1, \dots, 1\}}_r \cdot K_p \subset G_p;$$

относительно их действия функция Уиттекера является собственной:

$$T_p^{(r)} \cdot \Psi_\lambda = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_r} * \Psi_\lambda = \int_{\mathcal{O}_r} d\mu_p(h) \Psi_\lambda(h) = s_{(1^r, 0^{N-r})}(z_\lambda) \Psi_\lambda. \quad (7)$$

Здесь $s_{(1^r, 0^{N-r})}(z_\lambda)$ обозначает функцию Шура, являющуюся характером r -го фундаментального представления двойственной группы $G^\vee = \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$, а $z_\lambda = \mathrm{diag}\{z_{\lambda_1}, \dots, z_{\lambda_N}\} \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$. Можно рассмотреть аналогичные операторы Гекке $T_p^{\mathrm{Sym}(n)}$, для которых

$$T_p^{\mathrm{Sym}(n)} \cdot \Psi_\lambda = s_{(n)}(z_\lambda) \Psi_\lambda, \quad (8)$$

где $s_{(n)}(z_\lambda)$ — характер представления $\text{Sym}^n \mathbb{C}^N$ двойственной группы $G^V = \text{GL}(N, \mathbb{C})$.

И. И. Пятецкий-Шапиро была рассмотрена следующая производящая функция [11]:

$$\mathcal{Q}_p(s) := \sum_{n \geq 0} p^{-ns} T_p^{\text{Sym}(n)}; \quad (9)$$

ее действие на p -адическую функцию Уиттекера воспроизводит неархимедов L -фактор (3):

$$\mathcal{Q}_p(s) \cdot \Psi_\lambda^{\text{GL}(N, \mathbb{Q}_p)} = L_p(s; V) \Psi_\lambda^{\text{GL}(N, \mathbb{Q}_p)}. \quad (10)$$

Архимедов аналог производящей функции Пятецкого-Шапиро (11) для сферической алгебры Гекке

$$\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}(\text{GL}(N; \mathbb{R}), \text{O}(N; \mathbb{R}))$$

оказывается связанным с так называемым оператором Бакстера.

Теорема 1 (см. [3]). $\text{O}(N; \mathbb{R})$ -биинвариантная функция

$$Q_s(g) = 2^N |\det(g)|^{s + \frac{N-1}{2}} e^{-\pi \text{Tr}(g^\top g)}$$

определяет однопараметрическое семейство $\mathcal{Q}_\infty(s)$ элементов алгебры Гекке $\mathcal{H}_\infty$, при этом

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\infty(s) \cdot \Psi_\lambda^{\text{GL}(N, \mathbb{R})}(g) &= \int_G d\mu_\infty(h) Q_s(gh^{-1}) \Psi_\lambda^{\text{GL}(N, \mathbb{R})}(h) = \\ &= L_\infty(s; V) \Psi_\lambda^{\text{GL}(N, \mathbb{R})}(g). \end{aligned} \quad (11)$$

4. В качестве следующего шага в нашем подходе к описанию локального соответствия Ленглендса рассмотрим q -деформацию функций Уиттекера.

В архимедовом случае при ограничении на максимальный тор $H_\infty \subset G_\infty$ функция Уиттекера является собственной относительно коммутативного семейства дифференциальных операторов, определяемых центром универсальной обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G_\infty)$; в частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cdot \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{\text{GL}(N, \mathbb{R})}(e^x) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{\text{GL}(N, \mathbb{R})}(e^x), \\ \mathcal{D} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{r=1}^{N-1} e^{x_r - x_{r+1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $e^x = \text{diag}\{e^{x_1}, \dots, e^{x_N}\} \in H_\infty$. Определим q -деформацию функции Уиттекера как решение q -разностного уравнения:

$$\begin{aligned} M \cdot \Psi_{z_1, \dots, z_N}^q(\Lambda) &= (z_1 + \dots + z_N) \Psi_{z_1, \dots, z_N}^q(\Lambda), \\ M &= \sum_{r=1}^{N-1} (1 - q^{\Lambda_r - \Lambda_{r+1} + 1}) T_r + T_N. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, $0 < q < 1$, — параметр деформации, а T_r — оператор сдвига, действующий на функциях от $\Lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$:

$$\begin{aligned} T_r \cdot f(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N) &= \\ &= \begin{cases} f(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{r-1}, \Lambda_r + 1, \Lambda_{r+1}, \dots, \Lambda_N), & \Lambda_{r-1} \geq \Lambda_r + 1; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Теорема 2 (см. [5]). Для q -функции Уиттекера имеет место следующее представление типа Гельфанда—Цетлина:

$$\begin{aligned} \Psi_z^q(\Lambda) &= \\ &= \begin{cases} \sum_{\mathcal{P}_N} \prod_{n=1}^N z_n^{|p_n| - |p_{n-1}|} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (p_{n,i} - p_{n,i+1})_q!}{\prod_{i=1}^n (p_{n,i} - p_{n-1,i})_q! (p_{n-1,i} - p_{n,i+1})_q!}, & \Lambda_1 \geq \dots \geq \Lambda_N \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

где суммирование ведется по схемам Гельфанда—Цетлина $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}_N(\Lambda)$, состоящим из всевозможных целочисленных наборов $\{p_{n,k} : 1 \leq k \leq n \leq N\}$, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$p_{n,k} \geq p_{n-1,k} \geq p_{n,k+1}, \quad \underline{p}_N = (p_{N,1}, \dots, p_{N,N}) = \Lambda.$$

Также используются обозначения $|p_n| := p_{n,1} + \dots + p_{n,n}$, а $(n)_q! = (1 - q) \cdot \dots \cdot (1 - q^n)$.

Из формулы (14) вытекает ряд важных следствий и интерпретаций.

Во-первых, поскольку $(n)_q! \rightarrow 1$ при $q \rightarrow 0$, в пределе формула (14) воспроизводит формулу Гельфанда—Цетлина для характера конечномерного представления $G^V(\mathbb{C}) = \text{GL}(N, \mathbb{C})$ [2]:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Psi_z^q(\Lambda_1 \geq \dots \geq \Lambda_N) = s_\Lambda(z) = \sum_{\mathcal{P}_N(\Lambda)} \prod_{n=1}^N z_n^{|p_n| - |p_{n-1}|}. \quad (15)$$

Формулу (14) следует понимать как q -деформацию формулы Ленглендса—Шинтани [12]:¹

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{\text{GL}(N; \mathbb{Q}_p)}(p^{n_1}, \dots, p^{n_N}) = \begin{cases} p^{-\varrho(\mathbf{n})} s_{\mathbf{n}}(p^{\lambda_1}, \dots, p^{\lambda_N}), & \mathbf{n} = (n_1 \geq \dots \geq n_N); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (16)$$

Более того, можно показать, что сама q -функция Уиттекера (14) является характером некоторого (бесконечномерного) представления группы $\mathbb{C}^* \times G^\vee(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \times \text{GL}(N; \mathbb{C})$, а нормализованная q -функция Уиттекера $\Psi_z^q(\Lambda) \prod_{n=1}^{N-1} (\Lambda_n - \Lambda_{n+1})_q!$ является характером (конечномерного) модуля Демазюра бесконечномерной алгебры Каца—Муди $\widehat{\mathfrak{gl}}_N$; точное утверждение можно найти в работе [5]. Формула Ленглендса—Шинтани и ее q -деформация являются непосредственным (без привлечения алгебры Гекке) проявлением локального соответствия Ленглендса: спецфункция на p -адической группе $G(\mathbb{Q}_p)$ отождествляется с характером представления двойственной комплексной группы $G^\vee(\mathbb{C})$.

Во-вторых, существует архимедов предел формулы (14), воспроизводящий интегральную формулу Гивенталя [9] для $\text{GL}(N; \mathbb{R})$ -функции Уиттекера, возникающую в конструкции зеркальной симметрии на многообразии флагов $G^\vee/B^\vee$.

Теорема 3 (см. [6]). Пусть $q = e^{-\varepsilon}$ и $m_\varepsilon := -[\varepsilon^{-1} \log \varepsilon]$ — целая часть от $-\frac{\log \varepsilon}{\varepsilon}$. Положим

$$p_{n,k} = (n+1-2k)m_\varepsilon + \frac{x_{n,k}}{\varepsilon}, z_n = e^{\varepsilon \lambda_n}, \quad 1 \leq k \leq n \leq N,$$

и обозначим $A(\varepsilon) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \log \frac{\varepsilon}{2\pi}$. Тогда имеет место следующее:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\varepsilon^{\frac{N(N-1)}{2}} e^{\frac{(N_1)(N+2)}{2}} \Psi_z^q(\underline{p}_N) \right] = \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{\text{GL}(N; \mathbb{R})}(e^{x_{N1}}, \dots, e^{x_{NN}}), \quad (17)$$

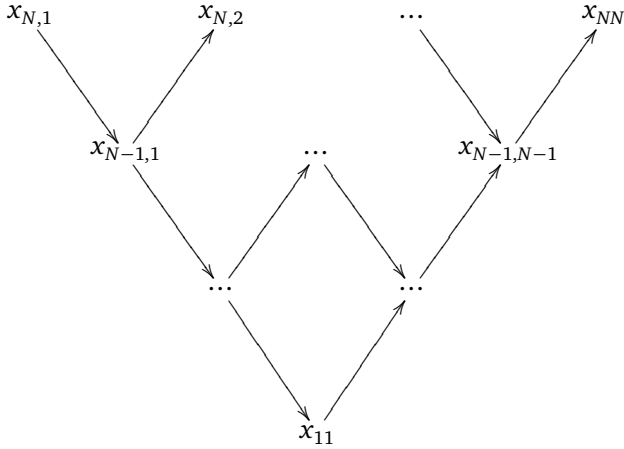
¹Обобщение формулы (16) на случай расщепимых редуктивных групп было получено Кассельманом и Шалайкой [1].

где правая часть задана в виде интеграла Гивенталья [9], [7]:

$$\Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{\text{GL}(N; \mathbb{R})}(e^{\underline{x}_N}) = \int_C \prod_{k \leq n < N} dx_{nk} e^{\mathcal{F}_\lambda(\underline{x}_N, x_{nk})}, \quad C \sim \mathbb{R}^{\frac{N(N-1)}{2}} \subset \mathbb{C}^{\frac{N(N-1)}{2}}, \quad (18)$$

$$\mathcal{F}_\lambda(\underline{x}_N, x_{nk}) = \sum_{n=1}^N i\lambda_n \left(\sum_{k=1}^n x_{n,k} - \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1,i} \right) - \sum_{a \in \Gamma_N} e^{\text{голова}(a) - \text{хвост}(a)};$$

здесь суммирование ведется по всем стрелкам в графе Γ_N Гельфанда—Цетлина:



5. Важной конструкцией в нашем подходе к программе Ленглендса является описанная выше интерполяция между архимедовыми и неархимедовыми функциями Уиттекера, обеспечиваемая представлением типа Гельфанда—Цетлина (14) для q -деформированной $\text{GL}(N)$ -функции Уиттекера:

$$\begin{array}{ccc} & \Psi_z^q(\Lambda) & \\ \swarrow_{\substack{q \rightarrow 0 \\ z = p^\Lambda}} & & \searrow_{q \rightarrow 1} \\ \Psi_{z_{\lambda_1}, \dots, z_{\lambda_N}}^{\text{GL}(N; \mathbb{Q}_p)}(p^\Lambda) & & \Psi_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}^{\text{GL}(N; \mathbb{R})}(e^x) \end{array}$$

Другим ключевым результатом является описание связи с зеркальной симметрией на многообразиях флагов двойственной комплексной группы и отождествление соответствия Ленглендса в архимедовом случае с зеркальной симметрией. Явная конструкция соот-

ветствующих топологических теорий поля приведена в работе [4] и дает геометрический смысл архимедовых L -факторов (3).

Теорема 4 (см. [4]). *Архимедов фактор $L_\infty(s; V)$ совпадает с $S^1 \times U(N)$ -эквивариантным объемом (бесконечномерного) пространства голоморфных отображений диска $D = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq 1\}$ в векторное пространство $V = \mathbb{C}^N$.*

Важным следствием данной конструкции является новое интегральное представление для гамма-функции Эйлера в виде бесконечномерного (гауссова) интеграла [4].

В заключение отметим, что настоящий обзор, ввиду ограниченности объема, касается лишь наиболее ярких конструкций, полученных в ходе разработки оригинального подхода к программе Ленглендса в течение последних лет. Более детальное изложение основных результатов и методов можно найти, например, в работе [8].

Литература

- [1] W. Casselman, J. Shalika. The unramified principal series of p -adic group II. The Whittaker function // Compos. Math. 1980. V. 41. P. 207—231.
- [2] И. Гельфанд, М. Цетлин. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. С. 825—828.
- [3] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. Baxter operator and Archimedean Hecke algebra // Commun. Math. Phys. 2008. V. 284. P. 867—896.
- [4] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. Archimedean L -factors and topological field theories I, II // Commun. Number Th. Phys. 2011. V. 5. P. 57—100, 101—133.
- [5] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. On q -deformed $\mathfrak{gl}_{\ell+1}$ -Whittaker function III // Lett. Math. Phys. 2011. V. 97. P. 1—24.
- [6] A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. On a classical limit of q -deformed Whittaker functions // Lett. Math. Phys. 2012. V. 100. P. 279—290.
- [7] А. Герасимов, Д. Лебедев, С. Облезин. Новые интегральные представления функций Уиттекера для классических групп // УМН. 2012. Т. 67. С. 3—96.
- [8] A. Gerasimov. Archimedean Langlands duality and exactly solvable quantum systems // Proc. ICM Seoul. 2014. V. 3.
- [9] A. Givental. Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture // Topics in Singularity

- Theory. Providence, RI: AMS, 1997. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; V. 180). P. 103—115.
- [10] *H. Jacquet, R. Langlands*. Automorphic forms on $GL(2)$. Berlin; New York: Springer, 1970. (Lect. Notes Math.; V. 114).
- [11] *I. Piatetski-Shapiro*. Invariant theory and Kloosterman sums // Algebraic Groups (Utrecht 1986). Berlin: Springer, 1987. (Lect. Notes. Math.; V. 1271). P. 229—236.
- [12] *T. Shintani*. On an explicit formula for class-1 «Whittaker functions» on GL_n over P -adic fields // Proc. Japan Acad. 1976. V. 52. P. 180—182.

Александр Эстеров



Кандидат физико-математических наук, доцент и заместитель декана факультета математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

Лауреат первой премии Восьмого конкурса Мёбиуса (2004), лауреат премии фонда «Династия» (2011).

С практической точки зрения, это был первый случай, когда научная работа принесла мне постоянный доход. На тот момент это было важно и материально, и психологически.

Что еще важнее, участие в конкурсе стало, наверное, первым моментом, когда я обратил серьезное внимание на научную работу своих сверстников и осознал, как важно в науке смотреть вокруг, а не только в книгу.

Наконец, участие в конкурсе преподнесло мне возможность обсудить свою работу с членом жюри — Аскольдом Георгиевичем Хованским, которого я на тот момент знал только по публикациям и который с тех пор стал для меня одним из главных ориентиров в математике.

Не могу также не отметить, что опыт участия в конкурсе Мёбиуса теперь помогает мне стоически переносить подачу заявок на

более официозные конкурсы и гранты и не забывать, что свойственная им зубодробительная бюрократия — это не норма, а отклонение. А норма и образец для подражания всем менеджерам науки на свете — конкурс Мёбиуса.

Простая математика

Одно из самых удивительных, на мой взгляд, свойств математики — это необычайно короткая дистанция от элементарных задач, понятных школьникам, до открытых проблем на переднем крае науки, сколь бы он далеко ни продвинулся. Все, например, знают Великую теорему Ферма (ныне — теорему Уайлза) о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не допускает решений в натуральных числах при $n > 2$, или другой знаменитый, но до сих пор открытый вопрос — бесконечно ли число пар простых чисел, различающихся на два (так называемых близнецов: 3–5, 5–7, 11–13, 17–19, ...).

Эти примеры, конечно, слишком брутальны — условие понятно школьнику, а решение ищут веками лучшие умы. Но математика изобилует куда более дружелюбными задачами: их решение вы можете получить самостоятельно, даже не будучи профессионалом, а условие задачи само «напрашивается» на обобщения, которые немедленно уведут вас вглубь актуальной науки и провоцируют ее изучать.

В 2011–13 годах я активно занимался развитием новой математической олимпиады для школьников — «Высшая проба» — и старался придумывать для нее как раз такие задачи. Приведу один пример.

(2013, 10 класс, № 2) Вдоль берега круглого озера периметром 1,1 км плывут два лосося: один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 600 м/мин против. По краю мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?

Ответ 65 получается буквально в несколько строчек совершенно элементарно (см. решения на сайте олимпиады), хотя додуматься до этих строчек не так просто. А что если медведь будет бежать чуть медленнее — скажем, со скоростью 45 м/мин? Задача сразу становится содержательным вопросом из области динамических систем, и ответ мне неизвестен. В то же время этот вопрос не кажется безнадежно сложным. Он может послужить хорошей мотивацией для ознакомления с основами теории динамических систем и направ-

ной точкой для самостоятельных исследований начинающего математика.

Мне кажется, такие обращения к точным наукам оказываются полезными и интересными каждому человеку, независимо от его возраста и профессии — точно так же, как обращения к поэзии, музыке и другим искусствам, к числу которых принадлежит, безусловно, и математика.

Геометрия многочленов с неопределенными коэффициентами

Один из классических предметов изучения в математике — степени многочленов и многочлены данной степени.

Пример 1. Основная теорема алгебры гласит, что почти все многочлены степени d одной переменной (точнее, все многочлены с ненулевым дискриминантом) имеют d комплексных корней. Ее обобщает теорема Безу: почти все системы n полиномиальных уравнений степени d от n неизвестных имеют d^n комплексных решений.

Пример 2. 16-я проблема Гильберта — задача о топологической классификации кривых, заданных уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен данной степени. Почти для всех таких многочленов кривая нулей получается гладкой, а значит, состоит из нескольких компонент, гомеоморфных прямой или окружности. Топологический тип такой кривой определяется числом компонент и тем, сколько из них лежат в областях, ограниченных другими компонентами. В идеале (видимо, недостижимом) хочется описать все возможные топологические типы кривых данной степени. Для степени 2 классификация общеизвестна (кривые второго порядка), для степени 4 этот вопрос — интересная учебная задача, для степени 6 ответ был получен только в 1969 г., а для степени 8 вопрос открыт.

В обоих примерах речь идет о «почти любых» многочленах данной степени, или «общих» многочленах. В то же время их изучение приводит к отнюдь не общим многочленам.

Пример 3. Дискриминант многочлена — это многочлен от его коэффициентов. Например, дискриминант многочлена $ax^2 + bx + c$ равен $b^2 - 4ac$, а дискриминант многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ равен $b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - 27a^2d^2 + 18abcd$.

Пример 4. При работе с 16-й проблемой Гильберта существование кривой нужного топологического типа чаще всего доказывается с помощью теоремы Виро о патчворкинге. Эта теорема дает комбинаторное описание топологического типа кривой $f(x, y) = 0$ в случае, когда коэффициенты многочлена f сами являются многочленами общего положения данных степеней от одной новой переменной t , а значение этой переменной выбрано достаточно большим:

например, $f = t^5 - t^{10}x - t^{10}y + t^5xy$, где $t = 1000$. В этом случае мы имеем дело с многочленом Виро трех переменных $f(x, y, t)$, задающим кривую $f(x, y, t_0) = 0$, $t_0 \gg 1$.

Дискриминанты и многочлены Виро — примеры многочленов, которые не годятся на роль «почти любых многочленов данной степени»: например, теорема Безу к ним неприменима. Иными словами, степень не отражает их геометрических свойств. Зато их отражает другая характеристика многочлена, уточняющая понятие степени.

Будем отождествлять мономы $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ с точками $(a_1, \dots, a_n)$ целочисленной решетки. Будем изучать многочлены, составленные из заданного конечного набора мономов A , или, как еще говорят, имеющие носитель A . Понятие носителя многочлена обобщает понятие степени: в частном случае, когда $A = S_d$ — множество всех мономов степени не выше d , мы изучаем многочлены степени d . А вот носитель дискриминанта или многочлена Виро — куда более сложное множество.

Пример 5. Теорема Кушниренко: почти все системы полиномиальных уравнений с носителем A от n неизвестных имеют $n!V$ комплексных корней, где V — объем выпуклой оболочки множества A (она называется многогранником Ньютона). В частном случае, когда $A = S_d$, получаем теорему Безу.

Пример 6. Для каких A существует формула в радикалах, выражающая корни систем уравнений с носителем A через коэффициенты этих систем? Оказывается, ровно для тех, выпуклая оболочка которых имеет объем не выше $4n!$. Например, при $n = 1$ получаем теорему Абеля о неразрешимости в радикалах уравнений выше четвертой степени.

Изучение носителей многочленов и многочленов с данным носителем имеет почти полувековую историю. Эта связь между алгебраической геометрией и геометрией многогранников оказалась чрезвычайно важной для обеих этих дисциплин.

Михаил Скопенков



Кандидат физико-математических наук, доцент факультета математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики, старший научный сотрудник Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича (РАН).

Лауреат второй премии Восьмого конкурса Мёбиуса (2004), лауреат премии фонда «Династия» (2011).

Помню, насколько престижным считался конкурс Мёбиуса, когда мы были студентами. Объявление о результатах на первом этаже Независимого было настоящим событием. Да и сама стипендия — как сейчас помню, это было 100 \$ в месяц — по тем временам была значительной суммой для студента, позволяющей, по крайней мере, решить базовые финансовые проблемы. Поэтому и для меня участие в конкурсе было важным шагом — по сути это была первая возможность заявить о себе и первый научный заработок на родине.

Поверхности, на которых через каждую точку проходят две окружности

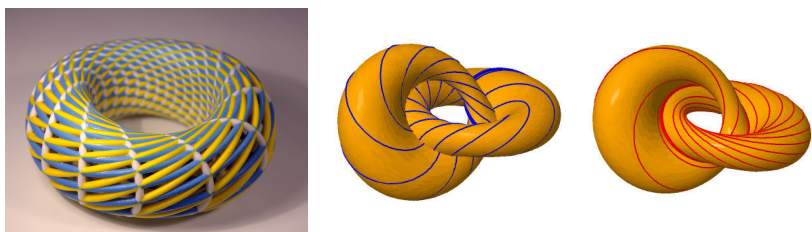
Одну из самых известных в мире криволинейных конструкций изобрел русский архитектор и инженер В. Г. Шухов. Его конструк-

ции, несмотря на свою форму, строятся из прямых балок. На языке геометрии это означает, что имеется поверхность, через каждую точку которой проходят две прямые, целиком лежащие на поверхности. Старинная теорема геометрии описывает все поверхности с таким свойством — их только три вида.

Простейшая форма после прямой — окружность. А что если помимо прямых балок использовать также балки в форме дуги окружности? Начиная еще с работ Ж.-Г. Дарбу в XIX веке, вопрос оставался открытым.

Но в последние пару лет случился прорыв: ответ получен в совместных работах Римвидаса Красаускаса, Алексея Пахарева и Михаила Скопенкова (на момент написания этого текста еще не опубликованных). Решение основано на сведениях к красивой алгебраической задаче описания пифагоровых n -ок многочленов, которая решается с помощью нового метода разложения кватернионных многочленов на множители.

Некоторое представление о форме таких поверхностей дают рисунки и следующая теорема.



Теорема. Если через каждую точку аналитической поверхности в $\mathbb{R}^3$ проходят две трансверсальные дуги окружностей, которые лежат на этой поверхности и аналитически зависят от точки, то некоторой композицией инверсий эту поверхность можно перевести в подмножество одного из следующих множеств:

множество $\{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}$, где α и β — две окружности в $\mathbb{R}^3$;

множество $\left\{2 \frac{[p \times q]}{|p + q|^2} : p \in \alpha, q \in \beta, p + q \neq 0\right\}$, где α и β — две окружности на единичной сфере S^2 ;

множество $\{(x, y, z) : Q(x, y, z, x^2 + y^2 + z^2) = 0\}$, где $Q \in \mathbb{R}[x, y, z, t]$ имеет степень 2 или 1.

Олег Карпенков



Кандидат физико-математических наук, старший лектор Ливерпульского университета, кафедры математических наук.

Лауреат третьей премии Восьмого конкурса Мёбиуса (2004), лауреат премии Московского математического общества за цикл работ по многомерным цепным дробям (2005).

Конкурс Мёбиуса, несомненно, очень хорошее начинание, направленное на поддержку первых шагов молодых математиков. В моем случае это была и моральная, и финансовая поддержка. С одной стороны, победа на конкурсе Мёбиуса была некоторым сертификатом, который помогает разрешить сомнения в том, что ты занимаешься чем-то правильным, и придать новые силы для дальнейших научных исследований. А с другой стороны, стипендия Мёбиуса позволила уменьшить количество часов репетиторства и прочей околomатематической работы, которая все же отвлекает от серьезных исследований.

Цепные дроби

Цепные дроби возникают в различных разделах математики: в теории диофантовых приближений, алгебраической теории чисел,

теории кодирования, динамических системах, топологии, торической геометрии, эргодической теории и т.д. Одним из метаматематических объяснений этому явлению можно считать наличие некоторой интересной структуры на множестве вещественных чисел, связанной с цепными дробями. Эта структура похожа на структуру поля, в ней имеется две операции: сложение $f(a,b) = a + b$ и обращение $g(a) = 1/a$. Эта структура известна на протяжении нескольких тысячелетий. Ее признаки имеются в большом количестве задач, в частности, на ней основана идея алгоритма Евклида. Возможно, это и есть причина важности обыкновенных цепных дробей.

Недавно я разработал целочисленную тригонометрию, основанную на фундаментальных свойствах приведенных выше операций. Целочисленная тригонометрия имеет много общего с обычной тригонометрией на плоскости, которую изучают в школе. К примеру, целочисленные арктангенсы в точности совпадают с обычными, также похожи формулы тригонометрических функций смежных углов. С другой стороны, эти две тригонометрии очень разные. Например, в целочисленной геометрии все косинусы и синусы — неотрицательные целые числа. При этом в целочисленной геометрии определены два неэквивалентных прямых угла. Новая тригонометрия оказывается очень полезной при изучении глобальных свойств особенностей торических поверхностей.

Большую часть своих исследований я посвятил обобщению цепных дробей на многомерный случай. Изучение многомерных цепных дробей восходит к Клейну и Эрмиту. Здесь следует отметить, что различных определений многомерных цепных дробей достаточно много. И это неудивительно. Цепные дроби содержат в себе такое огромное количество замечательных свойств, что любое многомерное обобщение неспособно в полной мере обобщить их все одновременно. Существуют геометрические, динамические и даже алгоритмические обобщения цепных дробей. Заниматься многомерными цепными дробями мне предложил мой научный руководитель В. И. Арнольд, который понимал важность и своевременность их изучения. В работе, представленной мной на соискание премии Мёбиуса, изучается обобщение теоремы Уайта. Оказывается, описание граней геометрических цепных дробей по Клейну тесно связано с полной классификацией многоэтажных вполне пустых пирамид на целочисленной решетке. Впоследствии эта теорема легла в основу алгоритма построения периодических цепных дробей для кубических иррациональностей. Теория многомерных цепных дробей остается и по сей день малоизученной, но очень любопытной и

многообещающей областью математики, имеющей приложения в теории приближений, теории алгебраических чисел, алгебраической геометрии, динамических системах, топологии и выпуклом анализе.

Кроме многомерных цепных дробей я занимаюсь теорией энергий узлов, задачей Максвелла о напряженности реализаций графов, дискретной и полудискретной дифференциальной геометрией и другими интересными задачами, связанными с дискретной и непрерывной геометрией.

Александр Гайфуллин



Доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, профессор Центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий, старший научный сотрудник Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН

Лауреат первой премии Девятого конкурса Мёбиуса (2005), лауреат премии фонда «Династия» 2009 и 2012 гг., лауреат премии Московского математического общества (2012), лауреат премии правительства Москвы для молодых ученых (2014), лауреат премии Президента РФ в области науки и инноваций для молодых ученых за 2016 г.

Участие в конкурсе Мёбиуса было для меня очень важным событием. Прежде всего, мне было очень приятно, что мою работу оценили таким образом, притом что я видел, что в наш год (а потом понял, что и почти каждый год) в финальном туре было очень много сильных и интересных работ. Ну и, конечно, финансовая составляющая тоже играла существенную роль: я участвовал в конкурсе

еще студентом и примерно в течение года после него стипендия премии Мёбиуса оставалась моим основным доходом.

Алгебраическая топология и комбинаторная геометрия

Мои научные интересы относятся, прежде всего, к двум разделам математики: алгебраической топологии и комбинаторной геометрии.

В алгебраической топологии основными задачами, которыми я занимался и занимаюсь сейчас, являются задача о комбинаторном вычислении классов Понтрягина многообразий и задача о комбинаторной реализации циклов. В обоих случаях речь идет о том, чтобы некоторый объект, существование которого уже доказано другими методами, описать явно и по возможности эффективно в комбинаторных терминах. Имеется два принципиально разных способа работать с многообразиями и некоторыми другими схожими объектами: гладкий и комбинаторный. В первом случае понятие многообразия является естественным дальнейшим развитием понятия гладкой поверхности в пространстве. Во втором многообразия изучают с точки зрения комбинаторики их разбиений на мельчайшие элементарные кусочки, например их триангуляций. При этом перевод конструкций и результатов с гладкого языка на комбинаторный и обратно часто весьма непрост и содержателен. Одним из классических примеров такого рода задачи как раз и является задача комбинаторного вычисления классов Понтрягина — инвариантов многообразий, первоначальное определение которых существенным образом использует гладкую структуру на многообразии.

В области комбинаторной геометрии мои интересы сосредоточены вокруг теории изгибаемых многогранников. Представьте себе поверхность многогранника, состоящую из жестких граней, соединенных шарнирами «типа дверных петель» в ребрах. Если такой шарнирный механизм допускает нетривиальную деформацию, то он называется изгибаемым многогранником. Изгибаемые многогранники довольно непросто строить, и они обладают рядом замечательных свойств. Жемчужиной теории изгибаемых многогранников является теорема И. Х. Сабитова (исторически называемая гипотезой о кузнечных мехах) о том, что объем любого многогранника постоянен в процессе изгиба. Эта область исследований интересна, прежде всего, тем, что, с одной стороны, имеет дело с очень естественными, наглядными и встречающимися на практике объектами, а с другой стороны, связана с большим количеством разных разделов математики, таких как алгебра и алгебраическая гео-

метрия (нормирования полей), комбинаторная топология (сдавливания симплициальных комплексов), комплексный анализ (аналитическое продолжение функций), теория специальных функций (эллиптические функции). Мои результаты в теории изгибаемых многогранников связаны в первую очередь с распространением результата о постоянстве объемов изгибаемых многогранников на случай пространств больших размерностей и пространств постоянной ненулевой кривизны.

Фёдор Петров



Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, доцент Санкт-Петербургского государственного университета и Санкт-Петербургского академического университета РАН

Лауреат третьей премии Девятого конкурса Мёбиуса (2005), лауреат премии «Молодому математику» Санкт-Петербургского математического общества (2011)

Состав участников финального тура был очень сильным, что подтвердилось и продолжает подтверждаться дальнейшими достижениями. Призовое место в такой компании серьезно добавило мне уверенности. Подкреплялось это и местом проведения, и составом жюри во главе с Пьером Делинем.

Комбинаторика

Работа, представленная мной в 2005 году на конкурс Мёбиуса, относилась к геометрии чисел. (Я сохраняю интерес к этой области, но занимаюсь ей только время от времени.) Целочисленный выпуклый многоугольник можно понимать как набор целочисленных

векторов (сторон многоугольника) с нулевой суммой, что связывает эту область с теорией разбиений, которая является исторически одной из первых тем комбинаторики. Именно эта связь привела в теорию целочисленных многоугольников и многогранников Анатолия Моисеевича Вершика, поставившего (и мне, и вообще) вопрос, ответ на который — отрицательный, но так уж сложилось, — был дан в той работе. Я нередко сталкиваюсь с пренебрежением к комбинаторике как области занятий. Поэтому считаю полезным рассказать, что меня в ней привлекает.

Комбинаторика имеет дело с самыми базовыми структурами — конечными множествами и их подмножествами, — и многие важные прорывы связаны с привлечением дополнительных структур. Приведу несколько примеров.

Перечислительные вопросы комбинаторики («сколько есть способов выбрать k элементов из n », «сколько есть способов разбить число n на натуральные слагаемые?», «сколько есть путей между двумя вершинами данного графа?» и т. д.) часто являются вопросами о коэффициентах многочленов или степенных рядов (так, ответ на первый из вопросов — коэффициент многочлена $(1+x)^n$ при x^k , что известно как «бином Ньютона»). Этот взгляд, известный как «метод производящих функций», идущий от Эйлера, — основа современной перечислительной комбинаторики.

Глубокие связи с гармоническим анализом и эргодической теорией имеет комбинаторика групп, часто называемая «аддитивной комбинаторикой» (с намеком, что изучаются абелевы группы, часто аддитивная группа целых чисел, в этой ситуации говорят также «аддитивная теория чисел»). Знаменитое соответствие Гиллеля Фюрстенберга позволяет сводить свойства группы целых чисел (пример, приведенный самим Фюрстенбергом, — теорема Саркози: множество целых чисел положительной плотности содержит два числа, разность которых — точный квадрат) к свойствам ее действия на пространстве с мерой. Это позволяет использовать весь инструментарий эргодической теории.

Следующий пример положил начало так называемой топологической комбинаторике (не путать с комбинаторной топологией). Рассмотрим k -элементные подмножества n -элементного множества. Требуется разбить их на наименьшее число классов так, чтобы любые два множества в одном классе пересекались. При $n < 2k$ хватает одного класса, что тривиально. При $n \geq 2k$ ответ — $(n - 2k + 2)$ класса: если $n - 2k + 1$ элементов назвать мышками, а остальные $2k - 1$ — лягушками, то каждая мышка задает класс множеств, ее содержащих (эти классы пересекаются, что не страш-

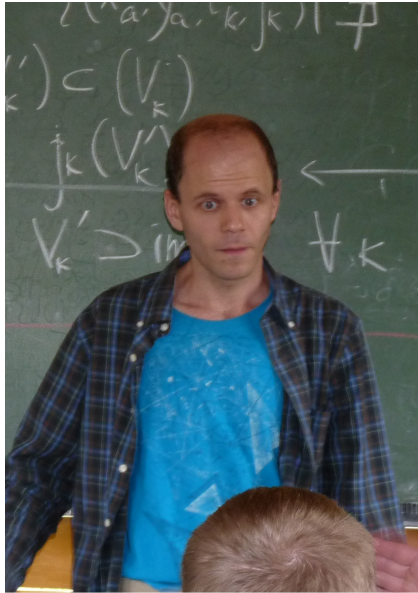
но), и еще один класс — множества, состоящие только из лягушек. Поставленный Мартином Кнезером вопрос минимальности был открытым долгое время. Решение, предложенное знаменитым венгерским математиком Ласло Ловасом, основано на том, что вместо абстрактных элементов следует рассматривать точки на сфере подходящей размерности. Из топологических соображений получается, что найдутся два k -элементных множества на дополняющих полусферах. Подробности можно восстановить самостоятельно или по популярной книге «Proofs from the book» — «Доказательства из Книги» — Айгнера и Циглера. Книга — термин Эрдёша — есть собрание идеальных математических доказательств, заглянуть в Книгу — счастье математика.

Обладающие достаточной симметрией комбинаторные структуры часто происходят из алгебры. Один из важнейших примеров — конечная проективная плоскость порядка k : по $k^2 + k + 1$ точек и прямых, на каждой прямой по $k + 1$ точек, каждые две прямые имеют ровно одну общую точку, через каждые две точки проходит ровно одна прямая. При k , равном степени простого числа, можно рассмотреть проективную плоскость над полем из k элементов (ее «точки» — прямые в трехмерном пространстве над этим полем, проходящие через начало координат, а «прямые» — плоскости, проходящие через начало координат). Неизвестно, обязан ли порядок конечной проективной плоскости быть степенью простого числа. Но кое-что известно: если число k дает остаток 1 или 2 при делении на 4, то оно должно быть суммой двух квадратов. Например, не годится $k = 6$. Это теорема Брука—Райзера, основанная на интерпретации комбинаторного условия как алгебраического тождества: если точкам сопоставить переменные, а каждой прямой — сумму соответствующих переменных, то нам известна сумма квадратов линейных форм, построенных по всем прямым.

Подобное использование многочленов носит название полиномиального метода. Многочлены интересны и полезны связью между их коэффициентами и значениями (доказательство теоремы Брука—Райзера тоже это подтверждает). Есть замечательное общее утверждение на этот счет, нашедшее множество приложений. Автор, выдающийся израильский математик Алон, назвал его комбинаторной теоремой о нулях (Combinatorial Nullstellensatz, по аналогии с Nullstellensatz — теоремой Гильберта о нулях). Эта теорема утверждает, что многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ степени не выше $d_1 + \dots + d_n$, равный нулю на «решетке» — прямом произведении $A_1 \times \dots \times A_n$ множеств A_i размера $|A_i| = d_i + 1$ в поле коэффициентов, обязан иметь нулевой коэффициент при одночлене $x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}$. Тради-

ционная схема применения комбинаторной теоремы о нулях такова: переформулировать то, что хочется доказать, как существование ненулевого значения многочлена на решетке. Это сведет дело к проверке того, что соответствующий коэффициент не равен 0. Но как вычислить коэффициент? Это не всегда просто. Как я уже говорил, к вычислению коэффициентов многочленов сводятся очень многие задачи. Оказалось, что та же комбинаторная теорема о нулях допускает модификацию в виде явной формулы для коэффициента через значения на решетке (по сути эта формула была известна еще Якоби, но она несколько раз переоткрывалась уже в этом веке). Использование этой формулы позволило единообразно и коротко передоказать многие известные тождества и доказать ряд новых, в том числе имевших статус известных гипотез. Эта деятельность продолжается. Помимо конкретных вопросов большой интерес представляет осознание связи с алгебраической топологией (использованной Романом Карасёвым в нашей совместной работе для доказательства тех же теорем, что получаются с помощью комбинаторной теоремы о нулях, и некоторых, которые пока не получаются) и тождествами Макдональда для систем корней.

Иван Лосев



Профессор математики Северо-Восточного университета (США), научный сотрудник Международной лаборатории теории представлений и математической физики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

Лауреат первой премии Десятого конкурса Мёбиуса (2006), приглашенный секционный докладчик на Международном математическом конгрессе в 2010 г. (Хайдарабад), лауреат Слоуновской стипендии (2014).

Участие (и победа) в конкурсе Мёбиуса имели для меня большое значение, придав уверенности в своих силах. Ну и плюс премия, что очень важно для иногороднего студента.

Теория представлений

Я занимаюсь теорией представлений и тесно связанными с ней вопросами алгебраической и симплектической геометрии и комбинаторики. Грубо говоря, теория представлений пытается изучать реализацию алгебраических объектов — групп, алгебр Ли, ассоциативных алгебр — посредством матриц. Этот раздел математики

тесно связан со многими другими областями математики (теория групп, геометрия, теория чисел, комбинаторика, функциональный анализ) и теоретической физики (квантовая механика и квантовая теория поля).

Теория представлений берет свое начало в работах Фробениуса и Шура, конец XIX — начало XX века. Фробениус в основном интересовался представлениями конечных групп, например симметрических (т. е. групп подстановок), а Шур начал изучать представления полной линейной группы (т. е. группы всех невырожденных матриц). Изучение представлений групп естественно приводит к необходимости изучения представлений ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Один из основных вопросов в теории представлений, который занимает исследователей с самого рождения теории, — это вычисление характеров неприводимых представлений. Неприводимые представления — это базовые блоки общих представлений, а характер — численная характеристика представления, которую можно себе мыслить как улучшенное понятие размерности. При вычислении характеров используются совершенно разные методы, от комбинаторики до современной теории категорий и алгебраической топологии.

Представления можно изучать с коэффициентами в разных полях. Оказывается, представления с коэффициентами в поле характеристики 0 устроены проще, чем в простой характеристике (и чем меньше характеристика, тем сложнее). Скажем, характеры неприводимых представлений симметрических групп в нулевой характеристике были посчитаны еще Фробениусом, а в положительной характеристике они неизвестны. Немалая часть моих недавних исследований связана с представлениями в положительной характеристике. Скажем, в препринте этого года мы с Беном Элайасом (Ben Elias) свели задачу вычисления характеров неприводимых представлений симметрических групп и всяких других интересных алгебраических объектов «типа A » к вычислению характеров в «модельной категории», которую нужно мыслить как правильный аналог категории для аффинных алгебр Ли типа A в положительной характеристике.

Павел Мнёв



Доцент университета Нотр-Дам (США), научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова РАН.

Лауреат второй премии Десятого конкурса Мёбиуса (2006), лауреат премии «Молодому ученому» Санкт-Петербургского математического общества (2010), награжден медалью РАН для молодых ученых (2010).

Участие в конкурсе Мёбиуса дало мне понять, что задача о дискретизации топологических теорий поля, которой я занимался, вызывает интерес у математического научного сообщества. Успешное участие в конкурсе, несомненно, привело к увеличению моей международной «видимости». Кроме того, участие в конкурсе столкнуло меня с замечательными московскими математиками, обсуждения с которыми были для меня крайне полезны.

Топологическая теория поля

Топологическая теория поля как специальный случай квантовой теории поля, приводящий к интересным инвариантам узлов и

многообразий, была разработана Шварцем, Виттенем, Концевичем и другими начиная с первых работ в конце 1970-х гг. и получила колоссальное развитие в начале 1990-х гг. после работы Виттена, посвященной квантовой теории Черна—Саймонса. В работе Концевича 1997 года вычисление некоторой корреляционной функции в двумерной топологической теории поля на диске приводит к решению знаменитой задачи деформационного квантования пуассоновых многообразий. Ключевым местом «физического» построения квантовой теории поля (в том числе и топологической) является фейнмановский континуальный интеграл — интеграл по пространству функций (или сечений пучка, или отображений в фиксированный таргет) на «пространстве-времени» — многообразии, на котором теория «живет». Понимание континуального интеграла (почему его разные определения дают совместимые ответы, почему он иногда удовлетворяет, а иногда не удовлетворяет ожидаемым свойствам) является очень важным вопросом математической физики. Программа построения точных дискретизаций топологических теорий поля, в которой триангуляциям (или более общим клеточным разбиениям) многообразия сопоставляется конечномерное пространство полей (смоделированное на клеточных коцепях) с конечно-разностным функционалом действия, согласованным с клеточными сборками, приводит к пониманию континуального интеграла в топологических теориях в духе теории меры, т. е. функциональная мера на пространстве полей «измеряется» системой согласованных прямых образов на клеточных коцепях. Другая, связанная с данной, программа, которой мы занимаемся с Н. Ю. Решетихиным и А. Каттанео, — построение пертурбативного (т. е. полученного с помощью формулы стационарной фазы с поправками — диаграммами Фейнмана) континуального интеграла на многообразиях с границей или углами, таким образом, что ответы согласованы со склейкой-разрезанием. Эта программа должна, в частности, привести к математическому доказательству гипотезы начала 1990-х годов о том, что асимптотика $q \rightarrow 1$ инвариантов Решетихина—Тураева 3-многообразия (построенных по теории представлений квантовой группы в корне из единицы) дается пертурбативной статсуммой теории Черна—Саймонса (которая выражается в терминах интегралов по пространствам конфигураций точек на 3-многообразии).

КОНКУРС МЁБИУСА ГЛАЗАМИ ЕГО ПОБЕДИТЕЛЕЙ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru
