Воспоминания
об И. Р. Шафаревиче

Москва
2018

Памяти Игоря Ростиславовича Шафаревича

А. Н. Паршин

Дорогие Нина Ивановна, Ольга Игоревна и Андрей Игоревич!

Уважаемые коллеги!

Мы собрались здесь, чтобы проститься с Игорем Ростиславовичем Шафаревичем, нашим учителем, человеком, дорогим и близким не только родным, ученикам, коллегам в науке, но и многим людям, далеким от науки и ее интересов. Весь жизненный путь Игоря Ростиславовича связан с математикой. Он вошел в науку в послевоенные годы, решив труднейшую проблему теории чисел: нахождение явной формы закона взаимности, идущего от Гаусса, Гильберта и многих других. Это его вклад в девятую проблему Гильберта. Затем было получено решение обратной задачи теории Галуа для разрешимых групп, позднее, в конце 50-х гг., были опубликованы работы по теории диофантовых уравнений, связанных с эллиптическими кривыми и абелевыми многообразиями. В этих работах появилась знаменитая группа Шафаревича—Тейта, обозначаемая теперь во всей литературе русской буквой Ш. В это же время Игорь Ростиславович понимает необходимость и важность развития алгебраической геометрии, до того почти неизвестной в нашей стране. Два года, с 1961 по 1963, работает семинар по теории алгебраических поверхностей, основанный на старых работах итальянских геометров, не понятых до тех пор нигде в мире. Алгебраические кривые были к тому времени достаточно хорошо изучены. В результате работы семинара вышла книга по алгебраическим поверхностям и появилась группа учеников — ядро будущей огромной школы алгебраических геометров и алгебраистов, приобретшей мировую известность. Среди авторов книги и Юрий Иванович Манин, и Андрей Николаевич Тюрин. Из

Выступление А. Н. Паршина во время прощания с И. Р. Шафаревичем 22 февраля 2017 г. в здании Президиума РАН.

глав книги выросла наша бирациональная алгебраическая геометрия, развитая Василием Алексеевичем Исковских и его учениками. Вместе с учениками учеников школа Шафаревича насчитывает более двухсот человек.

В последующие годы Игорь Ростиславович занимался многими трудными задачами алгебраической геометрии. Среди них теорема Торелли, известная для римановых поверхностей, но сформулированная и доказанная для поверхностей типа К3 (вместе с Ильей Иосифовичем Пятецким-Шапиро), теоремы о строении бесконечномерных групп автоморфизмов алгебраических многообразий и многие другие.

Занимаясь алгебраической геометрией в 60–70 гг., Игорь Ростиславович находил время и для решения задач в теории чисел и в алгебре. В 1964 г. была решена проблема башни в теории полей классов (совместно с Евгением Соломоновичем Голодом). Отсюда развились новые направления в алгебре, в теории групп и теории колец, получили известность неравенство Голода—Шафаревича, алгебры Голода—Шафаревича. Другое направление работ (совместных с Алексеем Ивановичем Кострикиным) относится к классификации бесконечномерных псевдогрупп преобразований Эли Картана и их применения к классификации простых конечномерных алгебр Ли над конечным полем. Первые возникают в дифференциальной геометрии, вторые принадлежат к совсем далекой алгебре.

Ученики Игоря Ростиславовича помнят о том огромном, можно сказать магнетическом влиянии, которое он оказывал на них, да и на многих коллег. Его стиль работы в науке притягивал очень многих. Мне думается, что сюда можно отнести такие черты.

• Подход к трудным задачам, начиная с простых, иногда простейших примеров (это особенно проявилось в его таланте педагога, его лекциях, семинарах, учебниках). Главным тут был выбор правильного простого примера как исходного пункта для перехода к более сложным, чтобы наконец прийти и к решению самой задачи. Я бы сравнил это с достижением труднодоступной горной вершины, когда интуиция должна подсказать, с какого направления начать восхождение, чтобы не попасть в тупик, а дойти до самой вершины. Вспомним, что Игорь Ростиславович и многие его ученики были еще и альпинистами.

• Поразительная интуиция, умение получать такие результаты, в которых содержатся в скрытой форме будущие точки роста в совсем разных и неожиданных областях математики и не только математики. Таких примеров у него много. К ним относится и теория арифметических поверхностей середины 1960-х годов, из которой выросла знаменитая геометрия Аракелова, созданная еще одним его учеником, Суреном Юрьевичем Аракеловым. Она нашла применения и в теоретической физике, в теории струн и в физике высоких энергий.

• Блестящее нахождение и использование аналогий между, казалось бы, никак не связанным (аналогия между символами в теории чисел и вычетами на римановых поверхностях или переход от групп преобразований Картана над полем вещественных чисел к алгебрам Ли над конечным полем, о чем мы уже говорили).

В какой-то степени это общие черты российской математической школы, которыми Игорь Ростиславович владел в совершенстве.

Его работы в таких областях математики, как алгебра, теория чисел и алгебраическая геометрия, о которых здесь говорилось, единодушно признаются выдающимися достижениями Игоря Ростиславовича. Но сфера его интересов и влияния была гораздо шире. Так, в 60-е годы он занимался вопросом о предельных циклах обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости (16-я проблема Гильберта) и пытался найти доказательство этой гипотезы. Его идея была в получении аналога известной в топологии формулы Лефшеца для неподвижных точек автоморфизмов многообразий на случай не автоморфизмов, а векторных полей. Тогда предельные циклы будут выступать в качестве «неподвижных» кривых этих полей. В семинарах под его руководством при разборе многих ярких достижений второй половины XX века находилось место и эллиптическим уравнениям на многообразиях, и теореме Атьи—Зингера об индексе, и теории Морса на пространствах калибровок в теориях поля Янга—Миллса.

В середине XX века в математике произошел переворот. Сплотились почти воедино такие науки, как топология, алгебраическая и гладкая, алгебраическая и дифференциальная геометрия, алгебры и группы Ли, теория представлений, дискретные группы и автоморфные функции, алгебраическая теория чисел и даже комплексный анализ и динамические системы, хотя и в меньшей степени. Важным объединяющим принципом был язык гомологической алгебры. Это была, конечно же, не вся математика, но очень большая ее часть. В 60–70-х гг. Игорь Ростиславович сыграл огромную роль в становлении и развитии в нашей стране этих направлений в математике.

По широте интересов и пониманию внутренних связей я могу сопоставить Игоря Ростиславовича с Андреем Николаевичем Колмогоровым. Их области почти не пересекались, но, сложенные вместе, охватывали почти всю математику, ту, что раньше называлась Reine Mathematik, а теперь зовется теоретической. Так два великих математика нашей страны представляют математику перед всем миром.

Вглядываясь в жизненный путь Игоря Ростиславовича, мы видим силу, с которой он не только решал труднейшие задачи науки, но и отстаивал свои взгляды на судьбу нашей страны. Мы видим мужество, с которым он встречал все жизненные невзгоды, удары судьбы, выпавшие на его долю.

С Игорем Ростиславовичем Шафаревичем ушла целая эпоха, великая эпоха нашей науки. Прощайте, дорогой Игорь Ростиславович. Светлая Вам память.

Игорь Ростиславович Шафаревич — великий математик и Учитель

Вик. С. Куликов, Г. Б. Шабат

§ 0. Введение

Авторы этой статьи — уже немолодые математики [1], которым в юности выпало счастье начать профессиональную жизнь под руководством Игоря Ростиславовича Шафаревича. Первые темы исследований, предложенные нам нашим учителем, его идеи, его общее понимание математики, его серьёзность в отношении к научной работе — всё это определило содержание и стиль наших занятий на многие десятилетия. В данной статье мы хотим поделиться с читателем частью того, что вынесли из общения с Игорем Ростиславовичем и из чтения и продумывания написанных им текстов.

Выдающийся математик силён не столько способностью решать задачи, поставленные своими предшественниками, сколько непостижимым умением задавать ключевые вопросы; в ходе размышлений над ними его последователи развивают науку. К этому же умению примыкает получение результатов (иногда даже не полностью обоснованных), продумывание и обобщение которых привлекает исследователей последующих поколений и определяет направления развития математики. Великие математики прошлого — Эйлер, Гаусс, Риман, Пуанкаре, Гильберт — в высочайшей степени обладали упомянутыми выше свойствами, и Игорь Ростиславович вполне может быть поставлен в их ряд.

Игорь Ростиславович прожил долгую жизнь. Родившись в 1923 году, он умер совсем недавно, в возрасте 93 лет. Ещё больше впечатляет его профессиональное долгожительство: между первой журнальной публикацией в 1943 году ([4]) и последней в 2013 году ([11]) прошло 70 лет! Статьи посвящены весьма разнообразной тематике, и среди них нет ни одной малозначительной. Сколько–нибудь полный обзор

Математическое просвещение. — 2018. — Сер. 3, вып. 22. — С. 37–63.

[1] Мы дружим с 1967 года, с тех пор как оказались одноклассниками во *Второй школе* в пору её расцвета.

математического наследия Шафаревича невозможен в рамках статьи разумных размеров, да и компетенция авторов вряд ли достаточна для такого обзора. Частичный анализ этого наследия проведён в [24] и [2]. Во вторую часть статьи мы включили несколько математических тем, которые затрагивались при нашем личном общении с ним, о которых можно рассказать достаточно широкому кругу математиков. Мы расскажем о нескольких поставленных им проблемах с весьма ограниченных и личных позиций — с точки зрения двух (из многих) его бывших студентов, получавших от научного руководителя темы для курсовых работ и диссертаций. Это ограничение не является принципиальным — Игорь Ростиславович щедро делился с учениками идеями на любой стадии продумывания и, видимо, не проводил границы между темами «для себя» и «для учеников».

К сожалению, Шафаревич имел возможность реализовывать свои идеи через научное руководство студентами лишь в течение трёх с небольшим десятилетий. Его первым учеником был его студенческий друг, Андрей Иванович Лапин, которого Игорь Ростиславович обогнал в «карьере», закончив мехмат за один год. Последними были авторы настоящей статьи: когда мы в 1974 году заканчивали МГУ, Шафаревич был уволен из МГУ за «антиобщественную» деятельность — он входил в созданный А. Д. Сахаровым Комитет защиты прав человека.

Первая часть статьи содержит наши личные воспоминания о Шафаревиче и о некоторых событиях, связанных с ним, свидетелями или участниками которых мы были. Из–за недостатка места мы в данной статье совершенно не касаемся общественно–политических статей и книг И. Р. Шафаревича (см. [12]) и наших разговоров с ним на эти темы, но общение с ним оказало огромное влияние на наше мировоззрение.

§ 1. Воспоминания

1.1. Шафаревич на мехмате МГУ

Наша студенческая юность, конец шестидесятых — начало семидесятых годов прошлого века, пришлась на разгар *застоя*. Возможности для самореализации у советских людей были весьма ограничены, и уход в науку, в частности в занятия чистой математикой, был одной из них. Утечка мозгов ещё только начиналась [2]. Советские

[2] Она тогда носила гораздо более трагический характер, чем в последующие десятилетия: с уезжающими, например, с нашим замечательным школьным учителем математики И. Х. Сивашинским, прощались навсегда.

математики работали на родине, в основном — в нескольких больших городах. Концентрация математиков мирового класса в Москве была уникальной и не сравнимой с другими ведущими математическими державами — например, с Францией или США, где сильные математики были распределены по многим городам. При этом мехмат МГУ был единственным местом в Москве, где студенты получали «чистое» математическое образование. На доске объявлений о спецкурсах и спецсеминарах можно было найти имена Арнольда, Гельфанда, Кириллова, Манина, Синая... — глаза разбегались!

Но и на этом блистательном фоне Игорь Ростиславович был одним из самых «модных» профессоров мехмата. Спецкурсы, читаемые им, собирали полные аудитории. Слушателями этих спецкурсов были не только студенты и аспиранты, но и уже вполне состоявшиеся математики. Лекции Шафаревича отличались прозрачностью и ясностью изложения, обилием неформальных примеров и мотивировок, постепенным переходом от простейших ситуаций к более сложным. На его семинарах разбирались работы любого уровня сложности, и их участники, несмотря на *железный занавес*, не чувствовали себя оторванными от мировой науки.

Особую роль в нашей жизни сыграл спецкурс Шафаревича по теории алгебраических чисел, прочитанный им в 1970 году. Перед нами открывалась бездна классической математики, имена Кронекера, Вебера..., полученные ими фундаментальные результаты и остающиеся открытыми проблемы. Но наибольшее впечатление производил сам лектор, прекрасно владеющий материалом и последовательно, внешне неэмоционально передающий слушателям свою любовь к числам и к структурам, помогающим проникать в их тайны. Мы учились на втором курсе, и нам надо было выбирать научного руководителя; примерно к середине спецкурса сомнения, если и были, то развеялись.

1.2. Семинар по алгебраической геометрии

Семинар Шафаревича работал с самого начала шестидесятых годов (и продолжает работу по сегодняшний день, несмотря на уход Игоря Ростиславовича). Обстановка на семинаре была очень демократичной: любой участник, студент он или академик, если что–то не понял или что–то не знал, мог остановить в любой момент докладчика и попросить его пояснить более подробно непонятное место или дать необходимые ссылки.

Семинар работал на мехмате по вторникам на четвёртой паре вплоть до осени 1974 года. Осенью того года работа семинара на мехмате стала невозможной, так как Игорь Ростиславович был уже уволен из МГУ за «антиобщественную» деятельность и каждый раз минут через 15 после начала семинара в аудиторию заглядывал один из заместителей декана (фамилия забыта), прерывал работу семинара и говорил, что Игорь Ростиславович не может находиться в аудитории, так как он уволен. В итоге было решено перенести работу семинара в Стекловку [3], где он существует и по сей день.

В течение нескольких десятилетий мы были участниками этого семинара — слушали чужие доклады, иногда делали свои. Его роль в нашей жизни невозможно переоценить; открытость, уважительное отношение к докладчику в сочетании с требованием *понятности* (Игорь Ростиславович всегда понимал всё) навсегда останутся для нас идеалом сотрудничества математиков разных поколений, интересов и уровней.

Дальше мы будем делиться воспоминаниями по отдельности.

1.3. Воспоминания Куликова

Весной 1971 года, когда надо было выбирать кафедру и научного руководителя, я думал, что попасть в ученики к Шафаревичу будет очень просто, так как в моей «зачётке» были только одни отличные оценки и, кроме того, мой брат Валентин, студент пятого курса, был учеником Игоря Ростиславовича и к тому времени уже был рекомендован им в аспирантуру. Однако всё оказалось не так просто. При встрече Игорь Ростиславович спросил меня, что я знаю из области алгебраической геометрии. На мой ответ, что я слушаю его спецкурс и прочитал первые две главы его книги «Основы алгебраической геометрии», опубликованные в «Успехах математических наук» в 1969 году, он предложил мне сдать экзамен по этим двум главам, который через пару недель я успешно и сдал.

Как научный руководитель, Игорь Ростиславович старался вырастить из своих учеников самостоятельных математиков, способных самим находить конкретные темы своих исследований. Он никогда не ставил конкретную задачу для курсовых и дипломных работ своим ученикам. Обычно каждый год на протяжении моей учёбы на мехмате мы встречались в начале сентября на кафедре алгебры (ауд. 13-01), я сидел на диване, а он, стоя у небольшой доски, в течение нескольких часов рассказывал о тех теоретико–числовых и алгебро–геометрических проблемах, которые его интересовали в то время. Затем я несколько дней «переваривал» полученную информацию, пытаясь вспомнить всё, о чём рассказывал Игорь Ростиславович. Это было трудно сделать, особенно на третьем курсе, во–первых, из–за недостатка моей «образованности», а во–вторых, его рассказы было практически невозможно конспектировать, сидя

[3] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

на диване. После этих встреч Игорь Ростиславович как бы «забывал» обо мне, но если у меня возникали вопросы или если я хотел сообщить ему о ходе моей работы, то мы по телефону договаривались о встречах, которые затем обычно проходили у него дома. На четвёртом курсе одной из задач, предложенных Игорем Ростиславовичем, была задача исследования свойств $K3$-поверхностей[4]. Результатом моих исследований была курсовая работа, написанная от руки на четырёх листах ученической тетради «в клеточку», в которой доказывалось некоторое утверждение о $K3$-поверхностях. Однако в ночь перед подачей курсовой Игорю Ростиславовичу я заметил, что в доказательстве имеется «дыра», и из–за отсутствия времени переписать текст я только подчеркнул недоказанное место и сделал на полях соответствующую пометку. Через две недели была защита моей курсовой. Рецензентом был А. Н. Тюрин. Мы встретились втроём на кафедре алгебры и «защита» проходила следующим образом. Игорь Ростиславович и я сидели на диване, а Андрей Николаевич, стоя у доски, пытался «заклеить дыру» в моей курсовой. В течение двух часов я убеждал его, что недоказанное утверждение, скорее всего, неверно, и в итоге смог убедить. В результате моя курсовая работа была оценена на «отлично»

Когда в 1974 году встал вопрос о начале времени работы семинара в Стекловке, то было предложено начинать в то же время, что и на мехмате. Однако мне было это крайне неудобно, так как я тогда посещал и семинар В. И. Арнольда по теории особенностей, который тоже работал на мехмате по вторникам на пятой паре. Поэтому участники семинара, соблюдая демократию, решили начинать работу семинара в 11 часов, чтобы я мог успевать на семинар Арнольда. Несколько позже, так как один из активных участников семинара, Ф. А. Богомолов, обычно опаздывал на 15 минут, решили начинать работу семинара в 11:15, а уже в девяностые годы было решено начинать в 15:15. Время окончания работы семинара не оговаривалось и зависело от количества материала, который хотел сообщить слушателям докладчик, и от физических возможностей слушателей воспринимать этот материал. Если количество материала было слишком велико, то в семидесятые — восьмидесятые годы прошлого века организовывались выездные сессии либо на даче Ф. А. Богомолова (платформа Семхоз Ярославского направления), либо на даче И. Р. Шафаревича (платформа Турист Савёловского направления).

В конце семидесятых годов в Москву на несколько дней приезжал Д. Мамфорд. Чтобы иметь больше времени для общения с ним, решили отвезти его на дачу Богомолова. Он очень боялся ехать (у него

[4] Определение $K3$-поверхностей см. в пункте 2.6

была виза, разрешавшая уезжать из Москвы не далее чем на 20 км, а Семхоз находится на расстоянии в два раза дальше), но мы всё–таки уговорили Мамфорда поехать. Для безопасности одели его в ватник, резиновые сапоги и посоветовали в электричке не разговаривать на английском (русского он не знал), чтобы не привлекать внимания других пассажиров. К сожалению, никто из нас тогда не догадался взять фотоаппарат, чтобы для истории запечатлеть Мамфорда в таком экстравагантном одеянии.

В те же годы мне также пришлось на даче Шафаревича в течение двух дней подробно рассказывать доказательство теоремы о перестройках вырождений $K3$-поверхностей, так как в некоторых работах, появившихся на Западе, утверждалось (безосновательно), что в моём доказательстве якобы имеется какая–то «дыра», и, кроме того, Игоря Ростиславовича очень интересовало, какие из полученных результатов о вырождениях $K3$-поверхностей, определённых над полем комплексных чисел, можно перенести на случай конечной характеристики.

1.4. Воспоминания Шабата

Хотя мой отец и Шафаревич хорошо друг друга знали, моё общение с Игорем Ростиславичем редко выходило за пределы довольно формальных контактов ученика и учителя; тем не менее, я не могу назвать никого другого, кто бы так сильно повлиял на меня.

В феврале 1971 года в возрасте 18 лет я отправился на первую в весеннем семестре лекцию вышеупомянутого спецкурса по алгебраической теории чисел — и вышел с неё с изменившимися взглядами на жизнь. На этой лекции я понял далеко не всё: не хватало математической культуры и базовых знаний. Но у доски я видел не только настоящего мастера, но и человека, *живущего* в мире *настоящей* математики (о внематематической деятельности Игоря Ростиславовича я тогда не знал). До того, поскольку я рос в семье математика, я воспринимал занятия математикой как очень естественный вид творческой деятельности — но лишь один из очень многих возможных; меня в те годы больше всего интересовали литературоведение и театр, и лишь благодаря советской власти я не задумывался о выборе соответствующих профессий. После лекции я уже знал, что постараюсь сделать математику главным делом своей жизни.

Научный руководитель был выбран, и оставалось получить его согласие руководить мной. Опираясь на опыт Куликова, я бегло просмотрел доступную тогда версию «Основ алгебраической геометрии». Затем была назначена встреча с Игорем Ростиславовичем. Но он был совершенно не удовлетворён моими «познаниями»! Так я узнал, что есть огромный разрыв между требованиями мехмата, позволяющими нам, выпускникам Второй школы, без особого труда получать пятёрки, научившись воспроизводить простые доказательства и решать стандартные задачи, — и требованиями Шафаревича. В то лето я впервые по–настоящему напряжённо занимался математикой, прорабатывая «Основы» параграф за параграфом и вдумываясь в многочисленные примеры. Осенью я был вознаграждён за эти труды принятием в ученики Игоря Ростиславовича.

Расскажу ещё об одном эпизоде, связанном с излечением Игорем Ростиславовичем меня от математической поверхностности. На третьем курсе я получил от него задание освоить теорию кэлеровых многообразий по доступному тогда переводу книги А. Вейля. Однажды он спросил меня об успехах, и я с юношеской искренностью пожаловался на то, что в конце книги — *очень громоздкие формулы с тета–функциями*. Игорь Ростиславович смерил меня ледяным взглядом (он вообще не был излишне разговорчив) и переспросил: **«Очень громоздкие?»** Мне стыдно за произнесённую мной глупость до сих пор, но именно со времени того полуминутного разговора я знаю, что тета–функции замечательны и что современный математик должен уметь обращаться с ними не хуже коллег XIX века.

Выбор темы курсовой происходил следующим образом. Игорь Ростиславович спросил меня, что́, помимо алгебраической геометрии, мне нравится в математике. Я ответил, что в топологии мне нравится теория накрытий и, в частности, конструкция универсальных накрывающих — и этот ответ определил тематику моей работы на десяток лет. Игорь Ростиславович предложил мне заняться универсальными накрывающими комплексных алгебраических многообразий; в случае кривых эта теория была построена в XIX веке (Б. Риманом и несколькими его последователями), а в размерностях $\geqslant 2$ были известны лишь разрозненные примеры. (Главное отличие одномерной теории от многомерной заключается в том, что односвязных комплексно–аналитических многообразий в размерности один имеется всего три, тогда как в высших размерностях их класс совершенно необозрим.) Меня это предложение вполне устроило — возможные трудности в 18 лет не рассматривались.

Игорь Ростиславович привёл класс примеров (симметрические квадраты кривых), в которых[5] происходит явление, невозможное в одномерном случае: *комплексная алгебраическая поверхность восстанавливается по своей универсальной накрывающей*. Мне было предложено выяснить, насколько это явление типично; точнее: со своей непостижимой интуицией Игорь Ростиславович предположил, что оно очень типично, и мне удалось это предположение под-

[5] За исключением римановой сферы.

твердить. Соответствующие результаты были опубликованы в [34] и составили содержание моей кандидатской диссертации.

Хотя в этой области осталось много открытых вопросов, интересующих меня и по сей день, в 80–е годы идеи Белого и Гротендика, которые будут упомянуты ниже, увлекли меня настолько, что я сменил тематику. Игорь Ростиславович прочёл нашу с В. А. Воеводским статью [43], являющуюся первой публикацией по теории детских рисунков [6)], и одобрил мой выбор. Один комментарий Игоря Ростиславовича (он подчеркнул: *здесь надо рассматривать ВСЕ вложения алгебраического замыкания* $\bar{\mathbb{Q}}$ *поля рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ *в поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$!) на моём докладе на его семинаре об этой теории был очень важен для дальнейших моих работ и работ моих учеников.

В студенческие годы я занимался альпинизмом, и мне посчастливилось однажды участвовать в особом походе альпсекции МГУ — в нём принял участие 80–летний Борис Николаевич Делоне, учитель Игоря Ростиславовича. Он был очень бодр; у костра он, разумеется, был в центре внимания, рассказывая нам разнообразные истории, в основном весёлые. Потом почти все разошлись по палаткам, а Борис Николаевич, узнав, что в походе участвует ученик его любимого ученика, задержался, и в другом, более серьёзном, тоне говорил об Игоре Ростиславовиче — и как о математике, и как о человеке (в том числе — о трудных походах Игоря Ростиславовича). Б. Н. Делоне — автор классических трудов и по геометрии, и по теории чисел, и Игорь Ростиславович продолжал традиции учителя, всю жизнь изучая скрытые связи между разными разделами математики. В ту незабываемую ночь у костра мне было очень важно почувствовать причастность к математической школе двух выдающихся математиков, родившихся в XIX и XX веках и подтверждающих в своих работах *единство мира*. Остаётся пожелать научным «внукам» Игоря Ростиславовича и в XXI веке продолжать развивать его идеи и идеи его предшественников.

§ 2. О математическом наследии Шафаревича

2.1. Алгебра и её место среди других разделов математики

При всей широте математических интересов Шафаревич был прежде всего *алгебраистом*. Своё понимание и самой алгебры, и её места среди других разделов математики он с особой ясностью выразил в своей книге [8] «Основные понятия алгебры». Уникален адресат этой книги: её с интересом могут читать и младшекурсники–математики, и учителя математики (которым мы бы это

[6)] Основоположная работа Гротендика [39] не была опубликована до 1997 года.

настоятельно порекомендовали), и учёные–нематематики, интересующиеся математикой. Правда, читателям всех этих категорий придётся пропускать некоторые тщательно разобранные примеры, поскольку они адресованы математикам–профессионалам, причём на весьма современном и высоком уровне! Однако читатель любого уровня, прочитавший и продумавший эту книгу, углубит своё понимание алгебры и математики в целом.

Приведём несколько цитат из этой книги:

Что такое алгебра? Является ли она областью математики, методом или психологической установкой?

Алгебра играет приблизительно ту же роль, что и язык или письменность при контакте человека с внешним миром.

Алгебро–геометрический дуализм занимает существенное место в этой книге. При сопоставлении с искусством геометрию можно сравнить с живописью, алгебру — с музыкой.

Любые объекты, являющиеся предметом математического исследования, — кривые и поверхности, отображения, симметрии, кристаллы, квантово-механические величины и т. д. — могут быть «координатизованы» и «измерены». Однако для такой координатизации «обычных» чисел далеко не достаточно.

Одна из целей книги [8] — широкое обсуждение возможностей аксиоматических обобщений понятий числа. Это обсуждение начинается с *теории полей*; в согласии с приведёнными цитатами, эта теория — центральная в алгебре: в ней аксиоматизированы **четыре действия арифметики**.

2.2. Теория полей

В классических полях — таких как поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, поле $\mathbb{R}$ вещественных и поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел — наряду с алгебраическими присутствуют и другие структуры, такие как топология, норма, а в первых двух — порядок. Первая работа Шафаревича [4] была посвящена изучению соотношений между этими дополнительными структурами. Удивительно, что она, опубликованная в 1943 году, была замечена мировым сообществом. В работе [41], опубликованной в 1948 году, известный канадско–американский математик И. Капланский пишет об *элегантном* результате Шафаревича, в котором на основе подходящим образом введённого понятия *ограниченного множества* охарактеризованы топологические поля, допускающие определение топологии через нормирование. В дальнейшем, защитив по этой тематике кандидатскую диссертацию в 19 лет, Игорь Ростиславович к ней не возвращался. Однако в теорию полей он в дальнейшем внёс огромный вклад; отечественное признание и мировую известность Шафаревичу принесли его результаты по *обратной задаче теории Галуа*.

Задача классификации (здесь и далее — с точностью до *изоморфизма*) «разумных» классов полей [7] обладает двумя важными преимуществами по сравнению с задачами классификации многих других алгебраических систем.

Во–первых, все поля из рассматриваемого класса, как правило, вкладываются в некоторое «универсальное» поле (обычно алгебраически замкнутое). Так, все *поля алгебраических чисел*, т. е. *конечные* расширения поля рациональных чисел [8] $\mathbb{Q}$, изоморфны подполям алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ поля $\mathbb{Q}$, а все поля рациональных функций на всех алгебраических кривых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или, что то же самое, поля мероморфных функций на компактных римановых поверхностях) — подполям *поля формальных рядов Пюизо*, т. е. (алгебраически замкнутого) поля [9] $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{C}\big(\big(z^{\frac{1}{N}}\big)\big)$, где $\mathbb{C}((u)) := \big\{ \sum_{n\gg-\infty} c_n u^n \mid c_n \in \mathbb{C}\big\}$, с естественно определяемыми операциями; под $\sum_{n\gg-\infty}$ понимается сумма по всем неотрицательным и конечному множеству отрицательных целых чисел n.

Во–вторых, в любом поле имеется *самое маленькое подполе*, которое можно определить, например, как пересечение всех подполей. Это поле изоморфно одному из полей: $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \ldots, \mathbb{Q}$, где $\mathbb{F}_p$ — поле из простого числа p элементов, т. е. знакомое всем поле вычетов по модулю p.

В силу приведённых двух замечаний задача классификации полей распадается на различные задачи классификации *промежуточных* полей, т. е. описания (частично упорядоченного включением) множества

$$[\Bbbk, \mathbb{K}] := \{\mathscr{K} \mid \Bbbk \subseteq \mathscr{K} \subseteq \mathbb{K}\}$$

при фиксированной паре полей $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$.

---

[7] Разумеется, задачи классификации полей реалистичны лишь при каких–либо ограничениях на мощность рассматриваемых полей, на мощность *порождающих* их множеств или на тип расширений.

[8] Конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ состоит из чисел, которые получены из рациональных чисел и корней конечного числа многочленов с рациональными коэффициентами посредством четырёх действий арифметики. Так, например, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$.

[9] В рамках обсуждаемой ниже аналогии между полем $\mathbb{Q}$ и полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$ полю алгебраических чисел $\bar{\mathbb{Q}}$ соответствует не всё поле формальных рядов Пюизо, а его подполе $\overline{\mathbb{C}(z)}$, состоящее из разложений в ряды Пюизо *алгебраических* (многозначных) «функций» от z, т. е. рядов $w = \sum_{n\gg-\infty} c_n z^{\frac{n}{N}}$, удовлетворяющих соотношениям $F(z, w) = 0$, где $F(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$ — это многочлены, степень $\deg_w F$ по w которых больше 1 и $\dfrac{\partial F}{\partial z} \not\equiv 0$.

Далее в случае группы автоморфизмов поля $\Gamma \subseteq \operatorname{Aut}\mathbb{K}$ будет использоваться стандартное обозначение $\mathbb{K}^\Gamma := \{x \in \mathbb{K} \mid \Gamma \cdot x = \{x\}\}$ для множества элементов поля, неподвижных относительно действия этой группы. Например, $\mathbb{C}^{\{\mathrm{id}_\mathbb{C}, z\mapsto\bar{z}\}} = \mathbb{R}$.

Если для пары $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ существует такая группа $\Gamma \subseteq \operatorname{Aut}\mathbb{K}$, что $\Bbbk = \mathbb{K}^\Gamma$ (такие расширения называются *нормальными*), то при некоторых дополнительных предположениях описание множества $[\Bbbk, \mathbb{K}]$ почти сводится к описанию подгрупп группы Γ. Точнее, на группе Γ обычно вводится топология (дискретная в случае конечных групп), и речь идёт о *замкнутых* подгруппах.

В любом случае, введя (частично упорядоченное включением) множество подгрупп

$$[\{1\}, \Gamma] := \{\text{замкнутые подгруппы } G \subseteq \Gamma],$$

можно определить (обращающее порядок) *соответствие Галуа*

$$\mathsf{gal}\colon [\{1\}, \Gamma] \longrightarrow [\Bbbk, \mathbb{K}]\colon G \mapsto \mathbb{K}^G,$$

и при упомянутых выше дополнительных предположениях это соответствие является биекцией.

Предположения заведомо выполняются в центральном для теории чисел случае, когда $\Bbbk = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{Q}}$, и $\Gamma = \operatorname{Aut}\bar{\mathbb{Q}}$. Таким образом, классификация полей алгебраических чисел (и, тем самым, корней многочленов от одной переменной с целыми коэффициентами) сводится к изучению замкнутых подгрупп конечного индекса одной–единственной группы $\operatorname{Aut}\bar{\mathbb{Q}}$.

Изучение *всех* расширений данного поля в значительной степени сводится к изучению его *нормальных* расширений. В случае $\Bbbk = \mathbb{Q}$ мы приходим к задаче описания нормальных подгрупп конечного индекса в $\operatorname{Aut}\bar{\mathbb{Q}}$.

Эта задача называется *обратной задачей теории Галуа*. Она не решена полностью и по сегодняшний день, и именно в неё Шафаревич довольно молодым человеком внёс вклад, поставивший его в ряд ведущих мировых специалистов по алгебраической теории чисел.

Задача имеет две традиционные переформулировки.

- Каковы конечные факторгруппы группы $\operatorname{Aut}\bar{\mathbb{Q}}$?
- Какие конечные группы реализуются как группы Галуа расширений поля $\mathbb{Q}$?

Предположительный ответ на оба вопроса — *все*. Доказательство этой гипотезы современной математике недоступно, и удаётся продвигаться в ней, лишь постепенно расширяя класс конечных групп, для которых обратная задача теории Галуа разрешима.

В случае *коммутативных групп* положительный ответ был известен уже в девятнадцатом веке. Требуемые поля получаются присоединением к $\mathbb{Q}$ подходящих корней из единицы.

Для *p-групп*, т. е. групп порядка p^k при простом p и натуральном k, положительный ответ был получен Шафаревичем в работе [5]. Работа была удостоена премии Московского математического общества, но это достижение оказалось лишь промежуточным.

Для *разрешимых групп* положительный ответ был получен Шафаревичем в работе [9], удостоенной Ленинской премии [10].

В связи с теорией Галуа в школе Шафаревича произошло ещё одно весьма важное событие, сыгравшее важную роль в математической жизни одного из авторов (ГШ). А именно, ученик Шафаревича Г. В. Белый в работе [22], посвящённой реализации некоторых серий групп Шевалле как групп Галуа расширений некоторых круговых полей, в качестве вспомогательной леммы привёл замечательный критерий определяемости алгебраической кривой над полем алгебраических чисел: *определённая над $\mathbb{C}$ алгебраическая кривая имеет модель* [11] *над $\bar{\mathbb{Q}}$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде накрытия проективной прямой, разветвлённого всего в трёх точках*. Этот результат произвёл сильнейшее впечатление на А. Гротендика, который использовал его для наглядного описания всех кривых над числовыми полями с помощью вложенных графов, разбивающих компактные ориентированные поверхности на клетки. В «самиздатской» [12] работе [39] Гротендик назвал такие графы *детскими рисунками*; разумеется, такие объекты под несколькими другими названиями изучались и до него, но Гротендик обнаружил совершенно неожиданную *связь* между арифметико–геометрическими и комбинаторно–топологическими объектами — точнее, эквивалентность подходящим образом определённых *категорий* [13].

[10] Существует миф об «ошибке» в статье [9]. Действительно, она содержала не вполне корректную ссылку на работу [33], хотя цитированных результатов из [33] было по существу достаточно для рассуждений в [9]. Однако в работе [6] (написанной Шафаревичем в контакте с Ж.-П. Серром, одним из самых «строгих» математиков своего поколения) все необходимые уточнения были произведены. Удивительно, что и после публикации статьи [6] некоторые авторитетные математики продолжают распространять мнение о том, что в доказательстве теоремы Шафаревича о разрешимых группах что–то не так.

[11] Говорят, что алгебраическая кривая *имеет модель над полем* $\Bbbk$ (т. е. *определена над полем* $\Bbbk$), если поле рациональных функций на ней изоморфно полю рациональных функций на неприводимой плоской кривой, заданной уравнением с коэффициентами в $\Bbbk$.

[12] Работа [39] была опубликована в 1997 году, через 13 лет после её появления, а до этого циркулировала в виде ксерокопий препринта, в том числе в Москве.

[13] Читатели, незнакомые с понятием категории, могут ограничиться представлением о том, что обсуждаемые объекты восстанавливаются друг по другу.

Эта эквивалентность определяет действие абсолютной группы Галуа $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{Q}})$ на детских рисунках и, таким образом, даёт уникальную возможность *визуализации* абсолютной группы Галуа. Некоторое время после появления теории детских рисунков многие математики надеялись, что с её помощью будет решена обратная задача теории Галуа; однако за прошедшие десятилетия этого не произошло, несмотря на довольно интенсивную работу. По мнению авторов, результаты этой работы показывают, что на данный момент мы научились понимать в комбинаторно–топологических терминах действие лишь весьма специальных и, как правило, небольших групп; для общих же конечных групп требуется дальнейшее развитие теории. С её современным состоянием можно познакомиться по нескольким обзорам, например по [42].

2.3. Числа и функции

Аналогия между числовыми и функциональными кольцами известна с XIX века; Шафаревича эта аналогия вдохновила на первый из результатов, принёсших ему мировое признание и поставивших его в ряд классиков нашей науки [14)].

Хотя речь идёт о весьма продвинутой математике, Игорь Ростиславович умел объяснять фундаментальное сходство между числами и функциями для широкой публики. В книге [8] он пишет: ...*Коммутативное кольцо очень часто может быть интерпретировано как кольцо функций на множестве, «точки» которого соответствуют гомоморфизмам исходного кольца в поля. Исходным примером является кольцо $\Bbbk[V]$, где V — аффинное многообразие* [15)] *над полем $\Bbbk$, а с него геометрическая интуиция распространяется на более общие кольца. Таким образом, концепция, согласно которой «всякий геометрический объект координатизируем некоторым кольцом функций на нём», дополняется другой, согласно которой «любое кольцо координатизирует какой–то геометрический объект».*

Для Шафаревича приведённая пара концепций играла исключительно важную роль, позволяя как применять интуицию выдающегося алгебраического геометра к трудным теоретико–числовым задачам, так и ставить алгебро–геометрические вопросы, отталкиваясь от теоретико–числовых аналогий. Мы здесь ограничимся иллюстрацией лишь одного применения Шафаревичем геометрической интуиции к теории чисел, кратко рассказав об упомянутом выше результа-

[14)] О развитии школы И. Р. Шафаревича см. также обзорную статью А. Н. Паршина «Numbers as functions (the development of an idea in the Moscow school of algebraic geometry)» (`https://arxiv.org/abs/0912.3785`). — *Прим. ред.*

[15)] То есть множество решений системы полиномиальных уравнений с коэффициентами из поля $\Bbbk$.

те, принёсшем ему мировую известность — обнаружение *общего закона взаимности* в работе [7]; об алгебро–геометрических проблемах теоретико–числового происхождения мы поговорим ниже.

Законы взаимности имеют многовековую историю; они начинались с элементарных, чуть ли не развлекательных (см. название книги [35], первой в европейской теории чисел) арифметических наблюдений, в которых очень трудно было бы увидеть алгебро–геометрическое содержание.

В XVII веке Пьер Ферма интересовался представлением натуральных чисел в виде сумм двух квадратов. Простые делители таких чисел обладают некоторыми бросающимися в глаза свойствами, которые особенно ярко проявляются в важном частном случае (к которому с помощью *гауссовых чисел*, появившихся в XIX веке, сводится общая теория) простых делителей чисел вида n^2+1. Действительно, $1^2+1=2$, $2^2+1=5$, $3^2+1=2\cdot 5$, $4^2+1=17$, $5^2+1=2\cdot 13$ и т. д. — в ряду простых делителей этих чисел встречается только 2 и простые числа, дающие остаток 1 при делении на 4; это было замечено Ферма и век спустя доказано Эйлером. Введя конечные поля $\mathbb{F}_p$, этот факт можно переформулировать так: *уравнение* $x^2=-1$ *разрешимо в поле* $\mathbb{F}_p$ *для простого* p *тогда и только тогда, когда* $p=2$ *или* $p\equiv 1 \mod 4$. С помощью *символа Лежандра*

$$\left(\frac{c}{p}\right) := \begin{cases} 1, & \text{если } x^2=c \text{ разрешимо в } \mathbb{F}_p, \\ -1, & \text{если } x^2=c \text{ неразрешимо в } \mathbb{F}_p, \end{cases}$$

наблюдение Ферма можно сформулировать для нечётного простого p в виде

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)}{2}};$$

в последующие столетия эта формула неуклонно обобщалась.

Квадратичный *закон взаимности* устанавливает далеко не очевидную связь между $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$: как заметил Эйлер и доказал Гаусс [16)], для нечётных простых p и q

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Этот результат можно интерпретировать как связь между разложимостью многочлена x^2-p в поле $\mathbb{F}_q$ и разложимостью x^2-q в поле $\mathbb{F}_p$ (разумеется, в обоих случаях имеются в виду редукции многочленов по соответствующим модулям). В такой форме закон взаимности был распространён на некоторые многочлены 3-й и 4-й степени

[16)] Точнее, Гаусс, называвший квадратичный закон взаимности *золотой теоремой*, в течение своей долгой жизни привёл 8 существенно разных доказательств.

самим Гауссом и Эйзенштейном, а на циклотомические многочлены — Куммером. Сравнительно современный обзор соответствующих результатов можно найти в [47].

В дальнейшем выяснилось, что для получения обобщённых законов взаимности важны не столько многочлены, сколько расширения поля $\mathbb{Q}$, получаемые присоединением их корней; существенным ограничением, не преодолённым и на сегодняшний день, оказалось условие *абелевости* этих расширений, т. е. коммутативности соответствующих групп Галуа. Именно в этом контексте работа И. Р. Шафаревича [7] завершила трёхвековой цикл исследований выдающихся математиков.

Квадратичный закон взаимности оказался частным случаем общего, при $n=2$, а поле $\mathbb{Q}$ оказалось возможным заменить на поле алгебраических чисел Ω, содержащее все корни n-й степени из единицы. Символ Лежандра $\left(\frac{p}{q}\right)$, принимающий значения ± 1, стал интерпретироваться (при переходе от уравнений вида $x^2=c$ к уравнениям вида $ax^2+by^2=1$) как частный случай *символа норменного вычета* $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, определённого для $\alpha,\beta\in\Omega$ и для простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца целых поля Ω и принимающего значения в группе корней n-й степени из 1. Центральным результатом теории [17)] является *формула произведения*

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)=1,$$

и именно в её осознании сходство между числами и функциями играет решающую роль [18)]. Как пишет сам Шафаревич в [7], *идея о глубокой аналогии между полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций была подготовлена работами Гаусса и Куммера и впервые высказана, видимо, Кронекером. Было замечено, что простые идеалы в теории алгебраических чисел играют такую же роль,*

[17)] Даже понимание точных *формулировок* упомянутых результатов требует довольно глубоких знаний алгебраической теории чисел; обзор для неспециалистов можно найти в [45]. Современное изложение теории см. в [31].

[18)] При $\Omega=\mathbb{Q}$ и $n=2$ символ норменного вычета превращается в *символ Гильберта*, который определяется формулой

$$(a,b)_p:=\begin{cases}1, & \text{если уравнение } ax^2+by^2=1 \text{ разрешимо в } \mathbb{Q}_p,\\ -1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Для $a,b\in\mathbb{Q}^\times$ формула произведения принимает вид $\prod_p(a,b)_p=1$, где произведение берётся по множеству простых чисел p, к которому добавлен символ ∞ (подразумевается $\mathbb{Q}_\infty:=\mathbb{R}$); произведение имеет смысл, поскольку в нём лишь конечное число сомножителей отлично от 1.

как точки римановых поверхностей в полях алгебраических функций, простым делителям дискриминанта соответствуют точки ветвления римановой поверхности и т. д. Далее Шафаревич пишет о желательности перенесения в теорию алгебраических чисел результатов теории абелевых интегралов и чуть–чуть «поправляет» Гильберта, указав, что формула произведения *является аналогом не интегральной формулы Коши, а теоремы... о сумме вычетов абелева дифференциала*. Это простое замечание приводит Шафаревича к одной из ключевых идей работы:

символ норменного вычета $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)$ *аналогичен вычету абелева дифференциала* $\alpha \cdot \mathrm{d}\beta$ *в точке* $\mathfrak{p}$.

Работа [7] обладает характерным для наиболее известных работ Шафаревича свойством: завершая некоторый этап классических исследований, она содержит понятия и идеи, которые будут развиваться многими математиками в работах будущего.

2.4. Теоремы конечности

В рамках аналогии, которой был посвящён предыдущий раздел, Игорь Ростиславич в [10] сформулировал алгебро–геометрический аналог теоремы Эрмита [40], утверждающей конечность числа полей алгебраических чисел с заданным дискриминантом (современное доказательство см. в [23]). Формулировка Шафаревича в [10] такова: *Конечно ли число расслоений* [19] *на кривые рода* $g > 1$*, если фиксирована базисная кривая и множество критических точек расслоения?* (В дальнейшем эти точки будут называться точками *плохой редукции*). Шафаревич получил утвердительный ответ на свой вопрос в некоторых частных случаях и отметил, что *доказательство в общем случае должно быть значительно труднее... аналогично тому как конечность числа расширений с заданными точками ветвления поля алгебраических чисел доказывается гораздо труднее, чем теорема Эрмита в теории алгебраических чисел* — мы видим аналогию между числами и функциями в действии! Предположение оказалось правильным: гипотеза была доказана лишь два десятилетия спустя в результате напряжённой работы ряда выдающихся математиков, многие из которых принадлежали к школе Шафаревича.

Гипотеза Шафаревича сыграла решающую роль в доказательстве *гипотезы Морделла* — одном из центральных результатов математики двадцатого века, сформулированной Л. Морделлом в 1922 году и доказанной Г. Фальтингсом в 1983 году. Гипотеза формулируется

[19] Здесь исключаются из рассмотрения *изотривиальные семейства*, т. е. становящиеся тривиальными после подъёма на конечное накрытие базы.

просто: *пусть дана произвольная алгебраическая кривая над числовым полем; если её род равен* 1, *то группа рациональных точек на ней конечно порождена, а если её род больше* 1, *то множество рациональных точек на ней конечно*. Однако доказательство гипотезы Шафаревича растянулось на два десятилетия и потребовало огромных усилий, а также развития многих понятий, которые оказались важны и полезны сами по себе.

Почти одновременно с [10] появилась работа [30] одного из первых учеников Шафаревича Ю. И. Манина, в ней был установлен *функциональный аналог* гипотезы Морделла; хотя напрямую в доказательстве гипотезы Морделла этот результат не использовался, психологически он был очень важен: после довольно продолжительного затишья стали появляться недоступные ранее теоремы конечности; кроме того, это был один из первых результатов несомненно мирового класса, полученных в Москве учениками Шафаревича.

Далее ученик Шафаревича А. Н. Паршин в [32] доказал, что гипотеза Морделла вытекает из гипотезы Шафаревича; для этого он изобрёл так называемый трюк Паршина, состоящий в построении (с помощью остроумной геометрической конструкции) по каждой рациональной точке кривой рода $\geqslant 2$ над полем алгебраических чисел другой кривой над расширением этого поля [20)]. Род этой новой кривой существенно больше исходного, а множество *простых чисел плохой редукции* (это и есть числовой аналог *критических точек* в формулировке Шафаревича) контролируется. Некоторые геометрические соображения вместе с *теоремой де Франкиса* о конечности множества непостоянных отображений любой кривой в кривую рода $\geqslant 2$ позволяют свести одну гипотезу к другой.

Существенный вклад в доказательство гипотезы Морделла внесли ученик Шафаревича С. Ю. Аракелов ([21]) и ученик Манина Ю. Г. Зархин ([25]); их идеи и конструкции слишком специальны, чтобы обсуждать их здесь; отметим лишь, что заложенная в работе [21] *геометрия Аракелова* — огромный раздел современной математики, вышедший далеко за пределы решённых в этой работе задач.

Наконец, сильнейшее средство изучения арифметики и геометрии алгебраических кривых ввёл американский математик Дж. Тейт [21)]. *Модуль Тейта* абстрактной кривой [44] извлекается из якобиана этой кривой и представляет собой конечнопорожденный модуль над коль-

---

[20)] Если дана кривая $\mathbf{X}$ над числовым полем $\mathbb{K}$ и точка $P \in \mathbf{X}(\mathbb{K})$, то сначала строится накрытие $\alpha\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ по подгруппе $\ker\big(\pi_1(\mathbf{X} \setminus \{P\}) \to \mathrm{H}_1(\mathbf{X} \setminus \{P\}, \mathbb{F}_2)\big)$, а затем накрытие $\mathbf{X}' \to \mathbf{Y}$ по подгруппе $\ker\big(\pi_1(\mathbf{Y} \setminus \alpha^{-1}(P)) \to \mathrm{H}_1(\mathbf{Y} \setminus \alpha^{-1}(P), \mathbb{F}_2)\big)$.

[21)] Соавтор Шафаревича — они опубликовали в 1967 работу [19] в «Докладах Академии Наук СССР». Группа *Тейта — Шафаревича* эллиптической кривой $\mathbf{E}$ на всех языках обозначается Ш($\mathbf{E}$).

цом ℓ–адических чисел. Он отчасти играет роль первых гомологий римановой поверхности, но несёт в себе гораздо больше информации о кривой — на нём определено действие группы Галуа поля определения кривой.

Г. Фальтингс в статье [38] завершил работу своих предшественников. Он доказал теорему о полупростоте действия группы Галуа на модуле Тейта, ещё одну (несколько более техническую) теорему и — главное для нас — гипотезу конечности Шафаревича. Для вывода гипотезы Морделла из этих результатов всё уже было подготовлено.

Так завершился примерно двадцатилетний период математики прошлого века, начавшийся с работ И. Р. Шафаревича и Ю. И. Манина. Исследования продолжаются: изучаются количественные и алгоритмические проблемы диофантовой геометрии, ищутся многомерные обобщения и т. д.

2.5. Классическая алгебраическая геометрия

Классификация гладких проективных алгебраических[22] кривых была получена к середине XIX века благодаря работам Римана, Клебша, М. Нётера, Бриля и др. Проективные кривые распадаются на три класса в зависимости от числа g линейно независимых регулярных дифференциальных 1–форм на них (*рода* кривой): $g=0$, $g=1$ и $g>1$. С точностью до изоморфизма имеется единственная кривая рода $g=0$ — это проективная прямая $\mathbb{P}^1$ (*рациональная* кривая). Кривые рода $g = 1$ — это *эллиптические кривые*, т. е. кривые, на которых существует единственная с точностью до умножения на константу регулярная нигде не обращающаяся в нуль дифференциальная 1–форма. С точностью до изоморфизма эллиптические кривые образуют одномерное семейство и могут быть заданы однородным уравнением третьей степени в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Для каждого $g > 1$ кривые рода g зависят от $3g - 3$ параметров (так называемых *модулей*). Кривые рода $g = 2$ могут быть представлены в виде двулистного накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$, разветвлённого в шести точках (другими словами, эти кривые бирационально изоморфны кривым в $\mathbb{C}^2$, заданным уравнениями вида $w^2 = f(z)$, где $f(z)$ — это многочлены степени шесть без кратных корней), а при $g > 2$ это либо также двулистные накрытия проективной прямой $\mathbb{P}^1$, разветвлённые в $2g + 2$ точках, либо с точностью до проективного преобразования это кривые степени $2g - 2$, вложенные в проективное пространство $\mathbb{P}^{g-1}$ с помощью дифференциальных 1–форм на этих кривых. Для

[22] Алгебраическое многообразие называется *проективным,* если при некотором $n > 1$ оно может быть задано как множество в проективном пространстве $\mathbb{P}^{n-1}$ решений системы однородных полиномиальных уравнений от n переменных.

каждой кривой рода $g>1$ регулярные сечения кратного канонического класса mK (т. е. дифференциальные формы вида $f(\mathrm{d}z)^m$) при $m\geqslant 2$ (если $g=2$, то $m\geqslant 3$) задают вложение кривой в $\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)}$.

В конце девятнадцатого — начале двадцатого веков благодаря работам Клебша, Нётера, Пуанкаре, а также блестящей плеяды итальянских алгебраических геометров: Кремоны, Сегре, Бертини, Кастельнуово, Энриквеса, Севери и др. — была получена классификация алгебраических поверхностей, основные положения которой были изложены в книге [36] Энриквеса. Основным инвариантом в этой классификации является κ — максимум размерности образов поверхности X при её отображениях в проективные пространства, задаваемых регулярными сечениями кратных канонических классов mK_X (т. е. дифференциальными формами вида $f\cdot(\mathrm{d}z_1\wedge \mathrm{d}z_2)^m$). Инвариант κ может принимать следующие значения: $-1, 0, 1, 2$ ($\kappa=-1$, если для любого $m>0$ кратный канонический класс mK_X не имеет регулярных нетривиальных сечений). После этого в классификации для каждого значения κ даётся характеристика поверхностей с данным значением κ в терминах так называемых численных инвариантов (индекса самопересечения канонического класса K_X, кратных родов P_m, равных размерностям пространств регулярных сечений кратных канонических классов mK, и иррегулярности q, равной размерности пространства регулярных дифференциальных 1–форм на X), и даётся конструктивное описание таких поверхностей. Так, например, поверхности с $\kappa=-1$ — это рациональные поверхности (т. е. поверхности, бирационально изоморфные проективной плоскости) и иррегулярные линейчатые поверхности (т. е. поверхности, расслоённые на рациональные кривые над кривой положительного рода).

Следует отметить, что доказательства многих утверждений, содержащихся в [36] неполны, по обычаям того времени Энриквес часто ограничивается рассмотрением «общего» случая, не разбирая наиболее неприятные случаи, которые могут представиться.

В 1961–1963 годах на семинаре по алгебраической геометрии, работавшем на мехмате в МГУ, И. Р. Шафаревич совместно со своими учениками Б. Г. Авербухом, Ю. Р. Вайнбергом, А. Б. Жижченко, Ю. И. Маниным, Б. Г. Мойшезоном, Г. Н. Тюриной и А. Н. Тюриным разбирали результаты по теории алгебраических поверхностей, полученные итальянской школой. Итогом этой работы стало написание книги [20], в которой даны строгие (основанные на появившейся в то время теории когерентных пучков и теории Ходжа) доказательства основных положений классификации алгебраических поверхностей, а также доказательство теоремы М. Нётера о структуре группы всех бирациональных преобразований проективной плоскости, изложены теория бирациональных преобразований поверхностей и теория минимальных моделей. Кроме этого, в [20] был изложен и ряд оригинальных результатов, относящихся к теории поверхностей с пучком эллиптических кривых и теории $K3$-поверхностей. Книга [20] стала настольной книгой для целого поколения алгебраических геометров. Она оказала большое влияние на дальнейшие исследования алгебраических поверхностей во всём мире и долгое время служила единственным систематическим изложением теории поверхностей, соединив красоту классических геометрических методов итальянской школы с мощью новейших аналитических и топологических методов.

2.6. Теорема Торелли для $K3$-поверхностей

Один из важнейших и интереснейших классов алгебраических поверхностей, исследованию свойств которого, начиная с Куммера, уделяли огромное внимание (и уделяют до сих пор) многие выдающиеся алгебраические геометры, в том числе и И. Р. Шафаревич, — это поверхности типа $K3$ (названные так в честь Куммера, Кэлера и Кодаиры). По определению, гладкая комплексная компактная односвязная поверхность X, на которой существует нигде не обращающаяся в нуль голоморфная 2–форма ω, называется поверхностью типа $K3$ (или просто $K3$-поверхностью). Примерами $K3$-поверхностей являются гладкие квартики в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, гладкие пересечения квадрики и кубики в $\mathbb{P}^4$ и гладкие пересечения трёх квадрик в $\mathbb{P}^5$. Ещё одним важным примером $K3$-поверхностей являются *куммеровы поверхности* — комплексные поверхности, которые получаются в результате разрешения шестнадцати особых точек фактора двумерной абелевой поверхности (двумерного комплексного тора) по действию инволюции $x \mapsto -x$.

Прежде чем сформулировать теорему Торелли для $K3$-поверхностей, напомним классическую теорему Торелли для алгебраических кривых. Как хорошо известно, с топологической точки зрения неособая проективная кривая C рода g, определённая над полем $\mathbb{C}$, — это двумерная сфера с g «ручками». Поэтому первая группа гомологий $H_1(C, \mathbb{Z})$ — это свободная абелева группа ранга $2g$. На $H_1(C, \mathbb{Z})$ определена унимодулярная кососимметрическая билинейная целочисленная форма

$$(\cdot, \cdot)\colon H_1(C, \mathbb{Z}) \times H_1(C, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

(индекс пересечения одномерных циклов), относительно которой можно выбрать базис в $H_1(C, \mathbb{Z})$, состоящий из «меридианов» $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ и «параллелей» $\gamma_{g+1}, \ldots, \gamma_{2g}$, т. е. из таких элементов, что $(\gamma_i, \gamma_{g+i}) = 1$ для $i = 1, \ldots, g$ и $(\gamma_i, \gamma_j) = 0$, если $|i - j| \neq g$. Если также выбран базис

$\omega_1, \ldots, \omega_g$ пространства одномерных голоморфных форм на кривой C, то $(2g \times g)$–матрица

$$\Omega(C) = \left(\int_{\gamma_i} \omega_j \right)$$

называется *матрицей периодов* кривой C. Классическая теорема Торелли ([46]) гласит, что две кривые C_1 и C_2 изоморфны тогда и только тогда, когда на C_1 и C_2 можно выбрать такие базисы пространств одномерных голоморфных форм, что $\Omega(C_1) = \Omega(C_2)$.

Классическая теорема Торелли даёт ключ к исследованию пространств модулей кривых рода g. Аналоги этой теоремы, в которых утверждается, что многообразия, принадлежащие к некоторому классу алгебраических многообразий, однозначно определяются матрицами периодов базиса пространства дифференциальных (p, q)–форм на этих многообразиях (рассматриваемыми с точностью до некоторой эквивалентности), играют ту же роль в многомерной геометрии, что и классическая теорема Торелли, и также называются *теоремами Торелли*.

Вернёмся к $K3$-поверхностям. Как известно, все $K3$-поверхности, как вещественные четырёхмерные многообразия, диффеоморфны друг другу (Кодаира). Индекс пересечения во второй группе гомологий $H_X = H_2(X, \mathbb{Z})$ $K3$-поверхности X определяет на H_X такое целочисленное скалярное произведение, что скалярный квадрат любого элемента $\gamma \in H_X$ чётен, его определитель Грама равен -1 и сигнатура псевдоевклидова пространства $H_X \otimes \mathbb{R}$ равна $(3, 19)$. Как известно, решётка, т. е. свободная абелева группа H, на которой определено целочисленное скалярное произведение, обладающее перечисленными свойствами, определяется однозначно с точностью до изоморфизма этими свойствами.

В [14] Шафаревичем было введено понятие отмеченной $K3$-поверхности типа l. Зафиксируем в H элемент l, $l^2 > 0$. По определению, *отмеченной $K3$-поверхностью* называется тройка (X, φ, ξ), где $\varphi\colon H_X \to H$ — изоморфизм евклидовых решёток и $\xi \in H_X$ — такой класс гиперплоского сечения $K3$–поверхности X (т. е. поверхность X рассматривается вместе с некоторым её вложением в проективное пространство), что $\varphi(\xi) = l$.

Пусть $E = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C})$ — множество линейных функций на H со значениями в $\mathbb{C}$. Скалярному произведению в H соответствует скалярное произведение в E, $\omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathbb{C}$ для $\omega_1, \omega_2 \in E$. Пусть $\mathbb{P}^{21} = \mathbb{P}(E)$ — проективизация векторного пространства E над полем $\mathbb{C}$, и пусть

$$K_{20} = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}^{21} : \omega^2 = 0\} \quad \text{и} \quad K_{20}^0 = \{\mathbb{C}\omega \in K_{20} : \omega \cdot \bar{\omega} > 0\}.$$

Элемент $l \in H$ определяет гиперповерхность (обозначим её той же буквой) $l = \{\mathbb{C}\omega \in \mathbb{P}^{21} : \omega(l) = 0\}$. Комплексное многообразие $D_l = K_{20}^0 \cap l$ называется *пространством периодов отмеченных $K3$-поверхностей типа l*. Каждая отмеченная $K3$-поверхность X типа l определяет точку $\tau(X) \in D_l$ следующим образом. На $K3$-поверхности X существует единственная с точностью до умножения на константу голоморфная форма

$$\omega \in H^{2,0}(X) \subset H^2(X, \mathbb{C}).$$

Композиция

$$H \xrightarrow{\varphi^{-1}} H_X \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}$$

определяет точку в $K_{20} \subset \mathbb{P}^{21} = \mathbb{P}(E)$, где

$$\omega(\lambda) = \int_\lambda \omega \quad \text{для } \lambda \in H_2(X, \mathbb{Z}).$$

Так как ξ — алгебраический класс, имеем $\omega(\xi) = 0$ и, следовательно, эта точка лежит в D_l. Получаем *отображение периодов* τ из множества отмеченных $K3$-поверхностей типа l в D_l.

В [14] И. Р. Шафаревич и И. И. Пятецкий-Шапиро доказали теорему Торелли для отмеченных $K3$-поверхностей. А именно, ими было доказано, что существует семейство $\mathscr{X} \to S$ отмеченных $K3$-поверхностей [23)], содержащее (с точностью до изоморфизма) все отмеченные $K3$-поверхности типа l, $\dim S = 19$, отображение периодов $\tau \colon S \to D_l$ инъективно и $\tau(S)$ является открытым всюду плотным множеством в D_l. Доказательство этой теоремы основано на доказанной ранее участницей семинара Шафаревича по алгебраической геометрии Г. Н. Тюриной локальной теореме Торелли для $K3$-поверхностей, утверждающей, что дифференциал отображения периодов τ невырожден (см. [20]), а также на детальном исследовании периодов отмеченных куммеровых поверхностей. В кандидатской диссертации одного из авторов этой статьи (см. [26] и [29]), написанной под руководством Шафаревича, была получена классификация полустабильных вырождений комплексных $K3$-поверхностей, из которой следовала эпиморфность отображения периодов τ для отмеченных $K3$-поверхностей. Впоследствии Шафаревич уделил большое внимание исследованию вырождений $K3$-поверхностей, определённых над полями конечной характеристики (см. [17, 18]).

23) То есть слои X_s голоморфного отображения $\mathscr{X} \to S$ над точками $s \in S$ — это отмеченные $K3$-поверхности типа l.

2.7. Бесконечномерные алгебраические многообразия

Конечно, Игорю Ростиславовичу на протяжении его долгой жизни удалось решить не все математические проблемы, которые вызывали у него интерес. Тем не менее, его идеи и подходы к решению этих проблем имеют большую самостоятельную ценность и могут быть применены к решению многих других задач. Одной из таких проблем является так называемая *проблема якобиана*, которая состоит в следующем. Пусть якобиан

$$J(F) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

полиномиального отображения

$$F = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$$

аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ в себя, определённого над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ характеристики нуль, нигде не обращается в нуль. Легко видеть, что тогда $J(F) \in \Bbbk^*$, т. е. является ненулевой константой. *Верно ли, что в этом случае отображение F обратимо, т. е. является изоморфизмом аффинных пространств?*

Очевидно, что проблема якобиана имеет положительное решение при $n = 1$. Также легко видеть, что её аналоги имеют отрицательное решение в случае, когда $\Bbbk$ является полем положительной характеристики p (пример: $F = (x + x^p)\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$) и в случае, когда F задано целыми аналитическими функциями (пример: $F = (xe^y, e^{-y})\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$).

Впервые проблема якобиана была сформулирована в 1939 году Келлером (O.-H. Keller). Ввиду простоты формулировки эта проблема привлекала (и привлекает до сих пор) внимание огромного числа математиков, однако она остаётся открытой для $n \geqslant 2$.

Размышляя над проблемой якобиана, Шафаревич предложил рассматривать не отдельные отображения $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ с якобианом $J(F) \in \Bbbk^*$, а сразу всю полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ пространства $\mathbb{A}^n$ с якобианами $J(F) = c \in \Bbbk^*$ и естественное вложение группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ пространства $\mathbb{A}^n$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$. Для этого он в [13] ввёл понятия бесконечномерных алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$ как индуктивных пределов X направленных систем $\{X_i, f_{i,j}\}$ алгебраических многообразий над полем $\Bbbk$, причём морфизмы $f_{i,j}\colon X_i \to X_j$, $i < j$, являются замкнутыми вложениями, рассмотрел морфизмы между ними и в [3] исследовал основные свойства этих многообразий. Для аффинных бесконечномерных многообразий X (т. е. когда все X_i в $\{X_i, f_{i,j}\}$ являются аффинными многообразиями) он определил понятие кольца регулярных функций $\Bbbk[X]$ на X, понятие касательного пространства $T_{X,x}$ в точках $x \in X$ и понятие гладкости многообразия X в точке, а также доказал следующие утверждения. Во–первых, если $f: Y \to X$ — замкнутое вложение бесконечномерных аффинных многообразий, X неприводимо, Y гладко в точке $y \in Y$ и дифференциал $(df)_y: T_{Y,y} \to T_{X,x}$ вложения f в точке y является изоморфизмом, то f тоже является изоморфизмом. Во–вторых, бесконечномерная алгебраическая группа, определённая над полем характеристики 0, является гладким многообразием, и, в–третьих, дифференциал $(df)_{\mathrm{id}}$ естественного вложения группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ в точке, соответствующей тождественному отображению $\mathrm{id}: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, является изоморфизмом. Поэтому для положительного решения проблемы якобиана осталось доказать, что естественное отображение из $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ в $\mathrm{End}_{\Bbbk^*}(\mathbb{A}^n)$ является замкнутым вложением. В своём докладе [1] на семинаре в Стекловке 17 июня 2008 года Шафаревич наметил пути проверки замкнутости вложения в двумерном случае [24].

Список литературы

1. *Шафаревич И. Р.* Бесконечномерные группы и проблема якобиана для аффинной плоскости A(2).
   `http://www.mi.ras.ru/~shafarev/doklad_17_06_2008.pdf`
2. Шафаревич Игорь Ростиславович. Математическая биография.
   `http://www.mi.ras.ru/~shafarev/biogr.html`
3. *Шафаревич И. Р.* О некоторых бесконечномерных группах. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 1. С. 214–226.
4. *Шафаревич И. Р.* О нормируемости топологических полей // ДАН СССР. 1943. Т. 40, № 1. С. 133–135.
5. *Шафаревич И. Р.* О построении полей с заданной группой Галуа порядка ℓ^α // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18, № 3. С. 261–296.
6. *Шафаревич И. Р.* О факторах одного убывающего центрального ряда // Матем. заметки. 1989. Т. 45, вып. 3. С. 114–117.
7. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Т. 26, № 1. С. 113–146.
8. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. Алгебра-1 // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 11. С. 5–279.
9. *Шафаревич И. Р.* Построение полей алгебраических чисел с заданной разрешимой группой Галуа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18, № 6. С. 525–578.

[24] О некоторых других подходах к решению проблемы якобиана см. в [27] и [28]; общий обзор результатов по этой проблеме можно найти в [37].

10. *Шафаревич И. Р.* Поля алгебраических чисел // Proc. Internat. Congr. Math. (Stockholm, 1962). Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963. P. 163–176.
11. *Шафаревич И. Р.* Проблема десятого дискриминанта // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25, вып. 4. С. 260–277.
12. *Шафаревич И. Р.* Собрание сочинений. Т. 1, 2. М.: Феникс, 1994.
13. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups // Rend. Mat. Appl. (5). 1966. Vol. 25, № 1–2. P. 208–212.
14. *Пятецкий–Шапиро И. И., Шафаревич И. Р.* Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа *K*3 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 3. С. 530–572.
15. *Рудаков А. Н., Цинк Т., Шафаревич И. Р.* Влияние высоты на вырождения алгебраических поверхностей типа *K*3 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46, № 1. С. 117–134.
16. *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа К3 // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1050–1052.
17. *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа К3 // Совр. пробл. мат. Дифф. уравнения, матем. анализ и их прил. Тр. МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 222–234.
18. *Рудаков А. Н., Шафаревич И. Р.* О вырождении поверхностей типа К3 над полями конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 3. С. 646–661.
19. *Тэйт Дж. Т., Шафаревич И. Р.* О ранге эллиптических кривых // ДАН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 770–773.
20. *Авербух Б. Г., Вайнберг Ю. Р., Жижченко А. Б., Манин Ю. И., Мойшезон Б. Г., Тюрина Г. Н., Тюрин А. Н.* Алгебраические поверхности / Ред. И. Р. Шафаревич, И. Г. Петровский // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 75.
21. *Аракелов С. Ю.* Семейства алгебраических кривых с фиксированными вырождениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35, № 6. С. 1269–1293.
22. *Белый Г. В.* О расширениях Галуа максимального кругового поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 2. С. 267–276.
23. *Вейль А.* Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
24. *Демушкин С. П., Кострикин А. И., Новиков С. П., Паршин А. Н., Понтрягин Л. С., Тюрин А. Н., Фаддеев Д. К.* Игорь Ростиславович Шафаревич (к шестидесятилетию со дня рождения) // УМН. 1984. Т. 39, вып. 1(235). С. 167–174.
25. *Зархин Ю. Г.* Эндоморфизмы абелевых многообразий над полями конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 2. С. 272–277.
26. *Куликов Вик. С.* Вырождения *K*3 поверхностей и поверхностей Энриквеса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41, № 5. С. 1008–1042.

27. *Куликов Вик. С.* Гипотеза о якобиане и нильпотентные отображения. Алгебраическая геометрия — 11 // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз. М.: ВИНИТИ, 2001, Т. 70. С. 120–133.
28. *Куликов Вик. С.* Обобщённая и локальная проблемы якобиана // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56, № 5. С. 1086–1103.
29. *Куликов Вик. С.* Эпиморфность отображения периодов для поверхностей типа K3 // УМН. 1977. Т. 32, вып. 4(196). С. 257–258.
30. *Манин Ю. И.* Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27, № 6. С. 1395–1440.
31. *Манин Ю. И., Панчишкин А. А.* Введение в современную теорию чисел. М.: МЦНМО, 2013.
32. *Паршин А. Н.* Алгебраические кривые над функциональными полями, I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 5. С. 1191–1219.
33. *Скопин А. И.* Факторгруппы одного верхнего центрального ряда // ДАН СССР. 1950. Т. 74. С. 425–428.
34. *Шабат Г. Б.* О комплексной структуре областей, накрывающих алгебраические поверхности // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 2. С. 67–75.
35. *Problèmes plaisans et délectables, qui se font par les nombres,* par Claude Gaspar Bachet, Sr. de Méziriac. (1612). Переиздание: A. Blanchard, Paris, 1993. Рус. перев.: *Баше де Мезирьяк К.-Г.* Игры и задачи, основанные на математике. М., 1877.
36. *Enriques F.* Le superficie algebriche. Bologna: N. Zanichelli Ed., 1949.
37. *Van den Essen A.* Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture. Birkhauser, 2000.
38. *Faltings G.* Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // Invent. Math. 1983. Vol. 73, № 3. P. 349–366.
39. Geometric Galois actions. 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; Vol. 242).
40. *Hermite Ch.* Extrait d'une lettre de M. C. Hermite à M. Borchardt sur le nombre limité d'irrationalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés // J. Reine Angew. Math. 1857. Vol. 53. P. 182–192.
41. *Kaplansky I.* Topological rings // Bull. AMS. 1948. Vol. 54, № 9. P. 809–826.
42. *Shabat G.* Calculating and drawing Belyi pairs // Зап. науч. сем. ПОМИ. СПб.: ПОМИ, 2016. Т. 446. С. 182–220.
43. *Shabat G. B., Voevodsky V. A.* Drawing curves over number fields // The Grothendieck Festschrift. Vol. III. Boston, MA: Birkhäuser, 1990. (Progr. Math.; Vol. 88). P. 197–227.

44. *Tate J.* Endomorphisms of abelian varieties over finite fields // Invent. Math. 1966. Vol. 2. P. 134–144.
45. *Taylor R.* Reciprocity laws and density theorems // Shaw Prize Book 2007. Cambridge, USA: Harvard University, 2007.
46. *Torelli R.* Sulle varietà di Jacobi // Rendiconti della Reale accademia nazionale dei Lincei. 1913. Vol. 22, № 5. P. 98–103.
47. *Wyman B. F.* What is a reciprocity law? // Amer. Math. Monthly. 1972. Vol. 79, № 6. P. 571–586. Correction, ibid. Vol. 80. P. 281.

Igor Rostislavovich Shafarevich: in Memoriam

Igor Dolgachev

The prominent Russian mathematician Igor Rostislavovich Shafarevich passed away on February 19, 2017. He has made outstanding contribution in number theory, algebra and algebraic geometry. The influence of his work on the development of these fields in the second half of the 20th century is hard to overestimate. Besides the fundamental results authored by him and his collaborators he single-handedly created a school of Russian algebraic geometers and number theorists, many of his numerous students consider their time spent under his guidance as the happiest time in their life as mathematicians. He was awarded the Lenin prize in 1959 for his work on the inverse Galois problem, had been elected to the Russian Academy of Sciences in 1958 as a correspondent member and as a full member in 1991. Shafarevich was also a foreign member of the Italian Academy dei Lincei, the German Academy Leopoldina, the National Science Academy of the USA (from which he resigned in 2003 as a protest against the Iraq War), a member of the London Royal Society, and received a honorary doctorate from the University of Paris. Shafarevich was an invited speaker at the International Congresses of Mathematicians in Stockholm (1962) and Nice (1970). His name is associated with such fundamental concepts and results in mathematics as the Shafarevich—Tate group, Ogg—Shafarevich theory, Shafarevich map, Golod—Shafaevich Theorem, Golod—Shafarevich groups and algebras, Deuring—Shafarevich formula and several Shafarevich Conjectures. His influential textbooks in algebraic geometry and number theory (jointly with Zinovy Borevich) have been translated into English and served as an introduction to these subjects for several generations of mathematicians. His book «Basic Notions in Algebra» [46] is a bird's-eye view on algebra that reveals its vast connections with many other fields of mathematics and has become a favorite book in the subject for many mathematicians. We quote from the preface to a collection of papers «Arithmetic and Geometry» published in two volumes by Birkhäuser in 1983 and edited by M. Artin and J. Tate [2]:

https://arxiv.org/abs/1801.00311

«Igor Rostislavovich Shafarevich has made outstanding contributions in number theory, algebra and algebraic geometry. The flourishing of these fields in Moscow since World War II owes much to his influence. We hope these papers, collected for his sixtieth birthday, will indicate to him the great respect and admiration which mathematicians throughout the world have for him.»

In the Preface to [41] Shafarevich writes «At the end of the sixties the perception of life began to change. The passiveness of thinking and muteness became feel as irresponsibility. This new feeling seemed to turn me to another road. Otherwise I would stay till the end of my life in my profession as a mathematician, and my interest to history would remain as a hobby. Instead of this I had acquired the second working profession to which I devoted with more and more strength.» The subsequent non-mathematical activity that led to his numerous publications on social issues had at the same time tarnished and magnified his reputation among different layers of society in Russia and the West.

Biography

Igor Rostislavovich Shafarevich was born in 1923 in Ukrainian town Zhitomir. The name of the town is explained by the old Russian word «zhito» that means «rye». The same town was the birth-town for many famous Russians, for example, the pianist Svyatoslav Richter who remained a life-long friend of Shafarevich.

Shafarevich's father Rostislav Stepanovich graduated from the mathematical department of the Moscow State University (MGU) and, after moving to Moscow, lectured in theoretical mechanics at one of the Institutes of Higher Learning. His mother Julia Yakovlevna was a philologist and a gifted pianist. Apparently, she comminicated to his son his life-long passion of classical music and the Russian literature.

Igor's first serious interest as a child was in history to which he was devoted till the end of his life. His other love was mathematics. Still at school, he took exams in mathematics at MGU from which he had graduated in 1940 at age 17. Although he did not have a formal thesis adviser, his advisor for the master thesis was Boris Nikolaevich Delone. Other mathematicians whom he acknowledged as his mentors were Israel Moiseevich Gelfand and Alexander Gennadievich Kurosh. He had finished the graduate school at MGU with a Ph.D. dissertation with topic 'On normiering of topological fields' in 1943 at age 20. During the World War II, together with the university, he was evacuated to Ashkhabad, and later to Kazan. After returning to Moscow, he had defended his second thesis (a Russian version of German Habilitation) in 1946. In his thesis he described all p-extensions of the field of p-adic numbers and non-ramified extensions of the fields of algebraic numbers. His doctoral committee included such prominent Russian mathematicians as Dmitry Konstantinovich Faddeev, Anatoly Ivanovich Maltsev and Nikolai Grigorievich Chebotarev. After the defense of his thesis and until his death he worked at the Steklov Institute of Mathematics. Also since 1944 he was teaching at MGU where in the sixties he founded his famous Seminar in Algebraic geometry. In 1975 he was fired from the university because of his dissident activity. His seminar had been moved to the Steklov Institute where it still weekly meets on Tuesdays. For many years he was directing the Algebra section of the Institute and was credited to make it into the worldwide renowned center of mathematical activity in algebra, algebraic geometry and number theory. Although he was sometimes addressed by his students as a «boss», there was never anything bossy in his relationship with his students, colleagues and ordinary Russian people who later were coming to him for an advice on social issues. He always respected his numerous students and colleagues, treated them as equal, and was ready to help them in their mathematical careers and difficult periods of their life. Some of them were his true friends with whom he shared his passion for mountains hikes and who helped him in his dissident activity.

Shafarevich's scientific honesty is revealed clearly in his mathematical writings. His attribution of known results and historical references should serve as instructive examples for mathematicians of later generations. On several occasions he stood up to express critical opposition to theses defenses in the mathematics department at MGU (including the Habilitation thesis of his former student A. Zhizhenko, now a full member of the Russian Academy of Science, who became a Soviet bureaucrat).

Students

Since late forties, Shafarevich began advising Ph.D. dissertations. If he were not fired from the University his list of students would be much larger. The following is, hopefully complete, list of his Ph.D. students. Together with the descendants the list contains more than 300 names.

Scientific work: Number Fields

In his Habilitation dissertation Shafarevich studied non-abelian p-extensions of local and global fields. For example, he proves that given a finite degree n extension of the field $\mathbb{Q}_p$ of rational p-adic numbers that does not contain p-roots of unity, the Galois group of its finite p-extension is a quotient of a free group with $n+1$ generators [20]. For this work Shafarevich was awarded the prize of the Moscow Mathematical Society. In his next work he made a major contribution to number theory by giving an explicit formula for the local symbol $\left(\frac{\alpha,\beta}{p}\right)$ [21]. The formula is reminiscent of a familiar formula for the residue of an differential on a

Таблица 1: Ph.D. Students

Abrashkin	Victor	MGU	1976
Arakelov	Suren J.	MGU	1974
Averbuch	Boris G.	MGU	1964
Belyi	Gennady V.	MIAN	1979
Berman	Samuil D.	MGU	1952
Demyanov	V. V.	MGU	1952
Demushkin	Sergei,	MGU	1959
Dolgachev	Igor V.	MGU	1970
Drozd	Yurii A	MGU	1970
Gizatullin	Marat H.	MGU	1970
Golod	Evgeny S.	MGU	1960
Koch	Helmut	MGU	1964
Kolyvagin	Victor A.	MGU	1981
Kostrikin	Alexsei I.	MIAN	1960
Kulikov	Valentine S.	MGU	1975
Kulikov	Viktor S.	MGU	1977
Nikulin	Vyacheslav V.	MGU	1977
Lapin	Andrei I.	MGU	1952
Manin	Yuri I.	MGU	1961
Markshaitis	Gamlet N.	MGU	?
Medvedev	P. A.	MGU	?
Milner	A.A.	MGU	?
Neumann	Olaf	MGU	1966
Pavlov	?	MGU	?
Parshin	Alexei N.	MGU	1967
Rudakov	Alexei N.	MGU	?
Shabat	George B.	MGU	1976
Todorov	Andrey N.	MGU	1976
Tyurina	Galina N.	MGU	1963
Tyurin	Andrei N.	MGU	1965
Vvedenskii	Oleg N.	MGU	1963
Zhizhchenko	Alexei B.	MGU	1958

Riemann surface. The theory developed in his dissertation gave a new approach to the global and local class theory (see [14]). His next work was even more impressive. In paper [22] of 1954 he solves the inverse Galois problem for solvable groups in the case of fields of algebraic numbers. A gap in the proof of this fundamental result pointed out much later by H. Koch and A. Schmidt was fixed by Shafarevich in 1980 in one of the footnotes to his Collected Works [36], p. 752. The proof was based on his earlier paper on construction of p-extensions of algebraic number fields and uses new pioneer methods of homological algebra developed around this time by D. K. Faddeev. A complete proof using new tools can found in the book [19].

The next problem addressed by Shafarevich was the problem of embedding of local and global fields k. Given a Galois extension L/k with Galois group G and its Galois subextension K/k, the subgroup of G fixing elements from K is a normal subgroup of G with quotient group G' isomorphic to the Galois group of K/k. Giving a surjective homomorphism of groups $G \to G'$, the embedding problem asks whether there exists an embedding of a Galois extension K/k with Galois group G' into a Galois extension L/k with Galois group G that realizes the surjective homomorphism as the quotient map. In the case when G is abelian and the surjection $G \to G'$ with kernel H makes G to be a semi-direct problem $H \rtimes G'$, the problem was solved in 1929 by A. Scholz. Shafarevich generalizes this result to the case where H is a nilpotent group of certain class. He returns to the embedding problem later in a joint work with his former student Sergei Demushkin first considering the case of local fields [9] and later the case of global fields [10].

In 1963 he published an impostant paper in Publ. Math. IHES [25] (a rather rare event after War World II when a Soviet mathematician publishes in a Western journal) on the problem of p-extensions of algebraic number fields by considering finite extensions of these fields with a fixed set S of ramified divisors. In the case when S is the empty set, he shows that the minimal number d of generators of the Galois group of the extension and the number r of minimal relations between generators satisfies inequality $r \leqslant d + \rho$, where ρ is the number of generators of the group of units of the field.

At his talk at the ICM in Stockholm, he remarks that if one proves that $r(G) - d(G) \to \infty$, where the limit is taken over the set of all p-groups, then the class field tower problem on the existence of infinite unramified extensions of an algebraic number field has a negative solution. In a joint work with his former student Evgeny Golod [11] he proves that the limit is in fact goes to infinity solving in this way a classical fundamental problem in number theory of more than 40 years old.

Scientific work: Elliptic curves

The transition of Shafarevich's interests from number theory to algebraic geometry was rather smooth and was based on his, now famous, work on elliptic curves. Already in 1956 in his talk at a Third Congress of Soviet Mathematicians he points out to the analogy between the problem of embedding of fields of algebraic number fields and the problem of classification of elliptic curves over such fields. Both problems use the local-to-global approach: find a solution for all completions of the field and decide whether it leads to a solution over a global field. In the case of elliptic curves this leads to a question whether the set of elliptic curves with a fixed absolute invariant isomorphic to a fixed curve over all completions of the field is finite. In a short announcement note [23] published in Doklady AN SSSR he shows that the set of elliptic curves isomorphic to a fixed curve over some extension of the ground field form a group that admits a cohomological interpretation as the first Galois cohomology group with coefficients in the group of points of the Jacobian curve. The fact that such a set forms an abelian group was not new; in the case when the ground field is the field of real numbers it was discovered by Francois Châtelet in 1947 whose construction uses the same cocycles. In 1955 A. Weil extends this result to the case of abelian varieties of arbitrary dimension although he did not give a cohomological interpretation of the group. The paper of S. Lang and J. Tate of 1958 gives a foundation of the theory of principal homogeneous spaces over abelian variety based on its cohomological interpretation (without reference to Shafarevich's paper). They call the group the Châtelet group, later known under the name the Weil-Châtelet group. In the same paper Shafarevich proves that the subgroup of the Weil-Châtelet group of elements that admit a point of degree n over the ground field (and hence birationally isomorphic to an elliptic curve of degree $n+1$ in $\mathbb{P}^n$) and isomorphic to its Jacobian curve over all completions of the field is a finite group. In the subsequent paper [24] in Doklady Shafarevich proves the existence of elliptic curves of arbitrary degree n not isomorphic to any curve of smaller degree giving a solution of an old problem in the theory of diophantine equations.

In 1967 during his stay in Paris, Shafarevich cooperates with John Tate to construct examples of elliptic curves over the functional field $k(t)$ with finite field k whose Mordell-Weil group of rational points has arbitrary large rank [50]. The analogous statement where the field $k(t)$ is replaced with the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers is still a conjecture in number theory.

In 1961 Shafarevich publishes a paper devoted to a systematic study of the Weil-Châtelet group $H^1(K, A)$ of an abelian variety A over a field K of algebraic function in one variable over an algebraically closed field k. Thus he divides this study into three parts by determining the structure of three groups: the local group $H^1(K_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{p})$, where the field K is replaced by its completion, the kernel and the cokernel of the restriction homomorphisms to the product of these groups with respect to the set of all completions of K. The kernel group (where K is replaced by an arbitrary field) was later named the Shafarevich—Tate group and Shafarevich's contribution to the theory of elliptic curves was specially honored by a common acceptance of using the Russian letter for its notation Ш(A). The similar theory and about the same time was independently developed by Andrew Ogg in Berkeley. Later on, the theory was given a more modern approach by Grothendieck who gave a cohomological interpretation of Ш(A) as the first ètale cohomology group with coefficients in a sheaf over a curve C with the field $k(C)$ of rational functions isomorphic to K which is represented by the Néron model of A. The main result of Ogg and Shafarevich on the structure of Ш(A) is now known as the Grothendieck—Ogg—Shafarevich formula. In their work, Ogg and Shafarevich restricted themselves only with the part of the Weil—Châtelet group prime to the characteristic of k. The subsequent work of several people including Oleg Vvedensky, a student of Shafarevich, finished the work by settling the p-part [5].

It is remarkable that the last published work of Shafarevich at the age of 90 years was in number theory. In [35] he gives a new proof using the theory of modular forms of Stark's theorem that there are only nine imaginary quadratic fields with class number one.

Scientific Work: Algebraic Geometry

It seems that Shafarevich was always interested in algebraic geometry, for example, in 1950 he authored an article on algebraic geometry in Russian Encyclopedia. In his paper [24] he gives a reference to a paper of Enriques of 1899 that contains some geometric analogs of some of his results. It should be said that algebraic geometry and the theory of algebraic functions in one variable were always outside of interests of Russian schools in mathematics. The only textbook in this field was Chebotarev's book [7] published in 1948 that gives an exposition of algebraic theory of algebraic curves. In 1961–1963 Shafarevich and a group of his students run a seminar on algebraic surfaces whose goal was to understand some of the classical works of Italian algebraic geometers from a modern point of view. The new techniques based on topological methods and the use of the new theory of cohomology of algebraic coherent sheaves developed earlier by Jean-Pierre Serre were common tools in their work. The same activity was also undertaken about the same time by Oscar Zariski and David Mumford in the USA and Kunihiko Kodaira in Japan. A book 'Algebraic surfaces' had appeared in Russian in 1965 and had been translated into English in the same year. For many years this book has been the only source of learning the classification of algebraic surfaces from a modern point of view. Shafarevich himself contributed two chapters to the book. In one of them he translated his previous work on principal homogeneous spaces of elliptic curve into geometric language, in particular, reconstructing Enriques' work on elliptic surfaces. In another he gave a modern proof of Enriques's criterion of ruledness of algebraic surfaces. As his students acknowledge, his influence on the book as a whole was much greater than just contributing two chapters. A very appropriate epigraph chosen to the book reflects very well Shafarevich's admiration of classical works «Aischylos said that his tradegies were leftovers from great feasts of Homer.»

In I971 Shafarevich turned his attention to the study of complex K3 surfaces which represent the most interesting two-dimensional analogs of elliptic curves. Their occurrence in many areas of mathematics and even mathematical physics is really remarkable. They share one common property with elliptic curves: the existence of a unique, up to proportionality, holomorphic differential form of highest degree. However they differ from elliptic curves by the property that they are simply-connected. It is a simple fact that the complex structure of an elliptic curve is determined by its periods, i.e. the values of integrals of its holomorphic form on a basis of 1-homology of the curve. Considered as a vector $\left(\int_{\gamma_1}\omega, \int_{\gamma_2}\omega\right)$ modulo proportionality and modulo of the group $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ acting via basis changes, it represent a point in $\mathbb{C}$ that determines the curve up to isomorphism. The proof of this fact follows easily from representing an elliptic curve as the quotient of $\mathbb{C}$ by the lattice spanned by the periods. The absence of this representation for K3 surfaces made André Weil's guess that the periods of K3 surfaces should also determine its holomorphic structure seemed to be too daring to attempt to prove. Weil himself recognized this by giving the naming K3 surfaces: «il s'agit des variétes kähleriennes dites K3, ainsi nominées en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire.»

Nevertheless, a joint joint work with Ilya Iosephovich Pyatetsky-Shapiro has done exactly this. They proved that a projective complex algebraic K3 surface is uniquely determined by its vector of periods modulo proportionality and changes of a basis in the subgroup of 2-homology group orthogonal to the class of its hyperplane section. This result became known as the *Global Torelli Theorem* for algebraic K3 surfaces named after an Italian algebraic geometer Ruggiero Torelli who proved a similar result for algebraic curves [29]. A corollary of this theorem allowed them to reduce the study of the automorphism group of a K3 surface to some arithmetical property of an integral quadratic intersection form of algebraic cycles on the surface. This became an essential tool in subsequent extensive study of automorphism groups of K3 surfaces.

The absence of topological and analytical methods in study of K3 surfaces defined over fields of positive characteristic seemed to be unsurpassable obstacle for the extension of study of K3 surfaces in this case. A paper of Michael Artin [3] (which Shafarevich acknowledged to me as one of the most beautiful paper he had read in his life) was a breakthrough in this direction. In it Artin introduced the periods of supersingular K3 surfaces, the surfaces that are distinguished by the property that they have maximal possible number of linearly independent algebraic cycles. In a long series of influential papers with his former student Alexei Rudakov, Shafarevich undertook a comprehensive study of K3 surfaces over fields of positive characteristic. Thus, they prove unirationality of K3 surfaces in this case, prove non-degeneracy of supersingular K3 surfaces, the absence of non-trivial regular vector fields on K3 surfaces and laid the foundations for theory of inseparable morphisms of algebraic varieties. Using the non-degeneracy results of Shafarevich and Rudakov, Arthur Ogus was able to prove a Global Torelli Theorem for supersingular K3 surfaces over fields of odd characteristic.

The Global Torelli Theorem for K3 surfaces together with the Surjectivity Theorem for K3 surfaces proved by his former student Andrei Todorov allows one to construct a coarse moduli space for algebraic K3 surfaces as an arithmetic quotient of a Hermitian symmetric domain of orthogonal type. Apparently Shafarevich was interested in the theory of arithmetic groups and automorphic functions for a long time. In 1954 he wrote a preface and edited the Russian translation of Siegel's book [48]. In his paper with Pyatetski-Shapiro [26] he studies a pro-algebraic variety with the field of rational functions equal to the limit of the fields of automorphic functions of subgroups of finite index of a discrete arithmetic group of automorphisms of a bounded symmetric domain. The second volume of his 'Basic Algebraic Geometry' ends with a discussion of a problem of uniformization of algebraic varieties and makes his famous Shafarevich Conjecture that suggests that the universal cover of a complex projective variety X must be holomorphically convex. Equivalently, it conjectures that its universal cover admits a proper map to a Stein manifold with connected fibers. Another reformulation, due to Janos Kollár, is that there is a proper map $\mathrm{sh}_X\colon X \to Ш(X)$ onto a normal variety $Ш(X)$ with connected fibers that contracts all closed subvarieties Y of X such that the natural homomorphism of the fundamental group $\pi_1(Y')$ of a a resolution of singularities of Y to the fundamental group $\pi_1(X)$ has finite image. Kollár named a map with this property the Shafarevich map. His monograph [15] contains an extensive study of the Shafarevich Conjecture and culminates with a proof of an existence of birational map sh'_X with the similar properties. The Shafarevich conjecture is closely related to the group-theoretical properties of $\pi_1(X)$, for example, with the existence of its faithful representation in a simple compact Lie group with dense image.

The Shafarevich map sh_X should be considered as a non-abelian generalization of the Albanese map $a_X\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ that has the same property with respect to abelian unramified covers of X. In his popular article in Mathematical Intelligencer in 2009 [32] he proposes that the deepest challenges of the modern mathematic can be summed up as a «non-abelianization of mathematics». He acknowledges that the «non-abelian mathematics of the future» philosophy also inspired him when he was starting his work in mathematics.

The combining interest of Shafarevich to number theory and algebraic geometry is explained by many close analogies between the two theories that goes back to Leopold Kronecker and David Hilbert. Shafarevich's talk at the ICM in Stockholm in 1962 is entirely devoted to the connections between the two fields. In particular, he stated two very influential conjectures in his talk. The analog of the Hermite conjecture about the finiteness of the number of finite extensions of an algebraic number field with the fixed discriminant becomes his conjecture about the finiteness of the set of algebraic curves of fixed genus $g > 0$ over a number field k with fixed discriminant and an analog of Minkowski's theorem that there are no unramified extensions of $\mathbb{Q}$ that now states that there are no smooth families of curves of positive genus over $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. The attempts to prove the firt conjecture played a crucial role in Falting's proof of the Mordell Conjecture.

The beginning of the sixties was the time when many algebraic geometers of the present and earlier generations had to reeducate themselves in learning the new language of algebraic geometry developed by the fundamental work of Alexander Grothendieck. Bombay Lectures of Shafarevich on minimal models of two-dimensional schemes over a discrete valuation ring [27] together with Mumford's Lectures of curves on algebraic surfaces [17] were instrumental tools for accomplishing this goal.

In [39] Shafarevich stated a conjecture: the set of Picard lattices of K3 surfaces defined over a field of algebraic numbers of degree n over $\mathbb{Q}$ is finite. He proves this conjecture for K3 surfaces with maximal Picard number equal to 20. He proves a geometric analog of this conjecture for one-dimensional families of Kummer surfaces. In a paper [40] published in the same year he studies the Shimura variety of abelian surfaces with quaternionic multiplication (fake elliptic curves) and proves that the number of isomorphism classes of non-constant fake elliptic curves defines over an extension $K/\mathbb{C}(t)$ of degree $\leqslant n$ is finite.

Scientific Work: Algebra

The work of Shafarevich in number theory led him to some fundamental problems in group theory. Thus, the solution of the problem of the existence infinite tower of class field towers led him and Golod to proving that $r > (\frac{d-1}{2})^2$, where r is the smallest number of generators of a p-group G and d is the smallest number of its generators. It is known the numbers r and $t = r - d$ can be interpreted in terms of the group cohomology as $r = \dim H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ and $t = \dim H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Thus the Golod—Shafarevich inequality becomes an equality on the Betti numbers

b_i of the graded algebra of cohomology $H^*(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. The main implication of the Golod—Shafarevich inequality (later improved by E. Vinberg and P. Roquette to the form $r \leqslant d^2/4$) is that the small number of relations compared to the number of generators implies that the group must be infinite. In this way, a statement of this sort in different categories can be proved by similar methods and is referred as a Golod—Shafarfevich Theorem. This led also to the definition of a *Golod—Shafarevich group* as a p-group with certain properties of its presentation that implies that the group is infinite. There is an extensive study of Golod—Shafarevich groups and their analogs in other categories. Also there are new applications of the Golod—Shafarevich theory. For example, Alexander Lubotsky proved that the fundamental group of a hyperbolic 3-manifold of finite volume contains a Golod—Shafarevich subgroup of finite index.

In 1964–66 Shaferevich run a seminar at the Steklov Insitute on Cartan's classification of simple transitive transformation Lie pseudogroups. A result of this seminar is a joint paper of Shafarevich and his former student Alexei Kostrikin [16] in which they make a very important observation that Cartan's classification is closely related with the classification of restricted Lie algebras over a field of characteristic $p > 0$. A transitive Lie algebra of a Lie pseudogroup admits a natural filtration defined by transformations that preserve k-jets of function at a fixed point that becomes an infinite-dimensional graded Lie sometimes infinite-dimensional Lie algebra. An important role in Cartan's classification is played by four algebras realized as subalgebras of the algebra of derivation of the algebra of formal power series $k[[t_1, \ldots, t_n]]$ over a field k of characteristic 0: algebra of all derivations $\mathcal{D}_n$; all derivations ∂ that preserve the volume form $\omega = dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$; all derivations that preserve a symplectic form; all derivations ∂ such that $\partial(\omega) = f\omega$ for some $f \in k[[t_1, \ldots, t_n]]$. The algebras have ideals of finite codimension that consist of derivations $\partial = \sum f_i \frac{\partial}{\partial t_i}$ with $f_i \in (t_1^p, \ldots, t_n)^p$. In characteristic $p > 0$ they represent new so-called nonclassical restricted Lie algebras. They further made a bold conjecture that the class of restricted Lie algebras consists of classical ones and the four algebras as above. In 1988 Richard Block and Robert Wilson proved this conjecture [6].

The study of Cartan pseudogroups led Shafarevich to study of infinite-dimensional groups of biregular transformations of affine algebraic varieties. In his brief note [28] (named the «Italian paper») Shafarevich announced some fundamental results about the structure of the group of automorphisms of the ring of polynomials in n variables based on his theory of infinite-dimensional algebraic groups. Answering some criticism of the lengthy review of the paper by T. Kambayashi, he returns to this topic 15 years later by giving in [30] some detailed proofs of the announced results and laying a foundation for the concept of an infinite-dimensional algebraic group. He proves that in the case when the characteristic is zero, it is nonsingular infinite-dimensional algebraic variety. Another important result is that the group of automorphisms $\mathrm{Aut}(k[x_1, \dots, x_n]$ is generated as an algebraic group by affine transformations and de Jonquiéres transformations and its subgroup $\mathrm{Aut}(k[x_1, \dots, x_n]^0$of automorphisms with trivial jacobian is simple as an algebraic group. Note that both results are not true for the group of abstract automorphisms of the ring. According to I. Shestakov and U. Umirbaev [47], the group generated by affine and de Jonquiéres transformation is a proper subgroup of $\mathrm{Aut}(k[x_1, \dots, x_3]$ and according to a result of Vladimir Danilov [8] the group $\mathrm{Aut}(k[x_1, \dots, x_2]^0$ is not simple as an abstract group. In 2004 he returns to his theory of infinite-dimensional groups by studying the group $\mathrm{GL}(2, K[t])$. He defines two different structures of an infinite-dimensional algebraic group on $\mathrm{GL}(2, K[t])$ and studies singular points of their finite-dimensional closed subschemes.

In a paper [31] Shafarevich studies the algebraic variety $\mathscr{A}_n$ parameterizinng finite-dimensional nilpotent commutative algebras of dimension n over a field. For example, in [31], he considers such algebras N of nilpotent class 2, i.e. satisfying $N^3 = 0$. In the case when the ground field is algebraically closed and of characteristic zero he proves that the irreducible components of $\mathscr{A}_n$ coincide with its subvarieties $\mathscr{A}_{n,r}$ parameterizing algebras N satisfying $\dim N^2 = r$ assuming that $1 \leqslant r \leqslant (n-r)(n-r+1)/2$. He reveals an interesting behavior of the number of the irreducible components of $\mathscr{A}_n$.

Books

The name of Shafarevich is familiar to any mathematician, especially to a student, who looks for a background in algebraic geometry. His textbook ‘Basic Algebraic geometry’ first published in Russian in 1968, then republished in 1972, and later published in an vastly extended version in 1988, and finally republished in 2007. The 1972 edition was translated into English by K.A. Hirsch in 1974 and in German by Rudolf Fragel. The 1988 and 2007 editions were translated in English by Miles Reid in 1994 and in 2007.

Another well-used textbook written jointly with Zinovy I. Borevich is «Theory of numbers». Its first edition was published in Russian in 1964 and republished in 1972. It was translated into German by Helmut Koch, into English by Newcomb Greenleaf in 1966, and into French by Myriam and Jean-Luc Verley in 1967.

Shafarevich published also several books for a broad audience. A book «Geometry and groups» written jointly with his former student Vyacheslav V. Nikulin and published in Russian in 1983 deals with 2-and

3-dimensional locally Euclidean geometries and their transformation groups. It was translated to English by Miles Reid in 1987.

A book «Discourses on algebra' translated to English from Russian by William Everett in 2003 is addressed to high school students and teachers. In words of the author, the task of the book is to show that algebra is juts as fundamental, just as deep, and just as beautiful as geometry.

For many years Shafarevich was one of the editors of several volumes of «Encyclopedia of Mathematical Sciences» published by Springer as translations from Russian originals published in Itogi nauki i tekniki. Sovremennye problemy in matematiki. Fundamentaln'ya napravleniya. He contributed to the volumes himself writing jointly with Vassily A. Iskovskikh an article about algebraic surfaces in 'Algebraic geometry', vol. 3. His other contribution to the series is his book 'Algebra I» published in 1990 and reprinted in 1997. This masterpiece gives a beautiful exposition of main concepts and ideas of algebra from a broader perspective of a mathematician working in different areas of mathematics. This confirms Shafarevich's life-view of mathematics as a whole body with ideas freely circulating from one field to another.

Non-mathematical activity

Dissident movement

We refer to Krista Berglund's dissertation [4] for a meticulously researched comprehensive study of this part of his life. Another rather detailed account of Shafarevich's activity as a dissident can be founs in the book of Robert Horvath [13]. Here we restrict ourselves only with a brief summary of Shafarevich's public life outside of mathematics.

Already in 1955 Shafarevich was courageous enough to sign a letter, along with other 300 scientists, denouncing the works of the Soviet biologist Trofim Lysenko who, using his power under Stalin, opposed and prosecuted scientists working in genetics theory. In 1968, he was one of the 99 cosigners of a letter in defense of a mathematical logician Aleksander Esenin—Volpin who was forcible taken to psychiatric hospital. writing the letter deprived many of them of a possibility to travel abroad. Since 1971 he took part in the Moscow Human Rights Committee organized by Andrei Sakharov. In September 1973 Shafarevich wrote an open letter in defense of Sakharov. In 1975, because of his dissident activity, he was fired from his teaching position at the University (in 1949, for unknown reason, he was also briefly fired from this position). It deprived the university of a brilliant mathematician, a popular lecturer and a mentor of graduate students. As in the case of Sakharov, the membership in the Soviet Academy of Sciences and the worldwide fame as a scientist prevented the authorities to impose a harsher punishment.

In 1974 Shafarevich leaves Sakharov Human Rights Committee and begins to collaborate with Alexander Solzhenitsyn in publishing an anthology «Is pod glyb' ('From under the rubble') [49]). First published in Russian by IMCA-Press in 1974, it had been translated next year in France, USA, England and Germany. In this collection of articles, the authors who resided in Russia at that time discuss the present and the possible future of their country. It has been condemned by official Soviet propaganda as expressing the hatred of socialistic ideas. The book had been also condemned by many left-inclining Russian dissidents as expressing Russian nationalism, chauvinism and an attempt to replace a democratic society with an autocratic one. Shafarevich contributed three essays, on ethics, on the national problem, and on socialism. The latter one was the synopsis of his book [43] which he has already written a year before but would publish later with a foreword by Solzhenitsyn in 1977 by YMCA Press. The book had been translated into French the same year. Even before the book was released in the West, Solzhenytsyn was forcefully deported from Russia, so Shafarevich had to take the responsibility to discuss the book at several press-conferences for foreign journalists (New-York Times, Frankfurter Algemeine, BBC). On many occasions Solzhenitsyn expressed his respect of Shafarevich. Thus he writes in his essay «Bodalsia telenok s dubom» of 1975: «We have two thousand people in Russia with world-wide fame, for many of them, it was much louder than for Shafarevich (mathematicians exist on Earth in weak minority), however as citizens they are zeros because of their cowardice; and from this zero only a dozen took over and have grown to a tree, and among them is Shafarevich.» On another occasion he wrote: «The depth, the solidity of this man, not only in his figure, but in all his live-image, were immediately noticed and attach.» In 1973 Shafarevich was among a very few members of the Academy of Sciences who protested against the malicious campaign in Soviet Press directed at Andrey Sakharov. He writes an Open Letter distributed in Samizdat and abroad. Next year he writes two letters protesting against the deportation of Alexander Solzhenitsyn with a bitter reproach to the Russian population for the unconcerned silence and even supporting of this decision. On many other occasions Shafarevich's name could be found on various petitions in defense of unlawfully prosecuted human right activists (including mathematicians Leonid Plusz, Yuri Gastev and a physicist Yuri Osipov). Together with Sakharov he continued to appear at the court processes.

After 1979 Shafarevich had stepped aside from the dissident movement. Although some of the dissidents tried to relate it to a crackdown on the dissident movement that started this year, this is no way explained by his cowardice as his whole life amply justifies. As Shafarevich writes himself, he got disappointed with the movement causes (like the preoccupation with the right to the Jewish emigration) that he considered minor comparing to the real problems of the Russian people.

Political activity

After Perestroika, Shafarevich began taking an active part in Russian political life. First supporting Yeltsyn and Sakharov, in series of articles in «Nash Sovremennik» he began to criticize the current regime for the drastically economical changes that left ordinary people with shortages and poverty. He also critizised the plans for the creation of the Soviet Sovereign Republics which de facto should be dissolving the USSR. His main complaint was this important issue had to be given a serious public discussion. The announcement of the decision had appeared five days before the date of its signature. The August Putsch of 1991 that followed after this was a tragic event (unfortunately one of many!) in Russian history. In his post-putsch articles he compared the dissolvment of the Soviet Union and the Communist Party with the revolution that led wide circles of ordinary people to despair with the new idealogical and economical situation.

As a result of this event Shafarevich made a decision to «to go into politics». Joining the opposition camp to the regime that was claimed in the Western media as a progressive one made another blow to his reputation. In December 1991 he joined the All-Union of Russia and spoke at its first congress. The new political body that united representatives of many patriotic and democratic movements disillusioned with Yeltsin was claimed in the West as «the new right», (proto)-fascist and the «red-browns». The address of Shafarevich appealed to droping all sectarian interests and work on behalf of the Russian people. In February 1992, he was elected (although he did not stand for this) to the central council of the similar new organization the People Gathering of Russia (Rossiiskoe Narodnoe Sobranie, RNS). The biased coverage of this organization by the official media, in particular blaming it for the assault of its members of the Moscow TV station at Ostankino was the subject of sharp criticisim of Shafarevich.

In October 1992 Shafarevich joins the organizing committee of the National Salvation Front representing various idealogical doctrines. Very soon, by decree, Yeltsin banned the Front. In his statement at the Front's press-conference, Shafarevich compared this with his experience as a dissident 20 year ago. At that time, Yeltsin was able to consolidate his power granted to him after the August Putsch and his relationship with the Congress of the Deputies (DUMA) had reached its worst. The statement of the organizing committee signed by Shafarevich demanded that Yeltsin and his government take the responsibility for the hardship of ordinary people and suggested that the Front is ready to take the new executive power to prevent the country from collapsing. As Krista Berglund suggests «the moderation and sanity penetrating the Front's statement together with lucid style and many formulations and emphases familiar from Shafarevich's statements make it plausible that he significantly contributed to it."The subsequent confrontation between Yeltsin and the Congress of the Deputies led to Yeltsin's decision to have a referendum that should choose his power versus the power of the Congress. To this referendum Shafarevich vehemently opposed by demanding instead of general elections of the President and the new Congress. As is well-known this confrontation had ended in the bloodshed near the building of the Parliament that left hundreds dead. Although the Front did not play any organizational role in this conflict, many of his members participated in it on the side of the Parlament, compromising the Front itself. After an unsuccessful attempt to get elected in the new Parliament as representative of the Party of the Constitutional Democracy, Shafarevich ended his political activity. Ten years later, when asked by Krista Berglund 'whether he had a feeling that this thing [participating in political organizations] was not quite «my own», his answer was emphatic Yes except when he participated in the National Salvation Front. After 1995, he had left all the political parties. However, since 2012 he agreed to be on the editorial board of the journal «Questions of Nationalism» of the National Democratic Party of Konstantin Krylov.

Non-mathematical writings

A three volumes collected works of Shafarevich were published in 1994 [41]. In 2014 the Institute of Russian Civilization Later published a six-volume collected works that contains a lengthy introduction [45]. The last volume is devoted to his mathematical works. From the preface: «Shafarevich is a classic of Russian national thought. His books enter into the golden fund of Russian national heritage. For millions of Russians, the thoughts expressed in them become a guide in their spiritual and social life.» Many of the non-mathematical works collected in the first five volumes were published abroad in Russian or other languages. The first such publication that appeared in YMCA Press in 1973 was his report «Zakonodatelstvo o religii v SSSR» (The legislation on religion in USSR») for the Human Rights Committee. The French translation had been published in 1974 by Éditions du Seuil, Paris. His second book «Socialism kak yavlenie mirovoy istorii» («Socialism as a phenomenon of world history») was published by YMCA Press in Russian in 1977 and translated into French in the same year by the same publishers as the previous book. Later it has been translated into English as «The socialist Phenomenon» by Harper Collins in 1980 and published by Pegnery Publ. The first translation contains a preface written by A. Solzhenitsyn.

Around the same period of the seventies Shafarevich began writing his most controversial opus «Russophobia» that brought him at the same time love and admiration from wide circles in Russia and made him a person non-grata among wide circles of Russian and Western democratic intelligentsia. Although not invented by Shafarevich, the word «Russophob» became often associated with his book. Being distributed in Samizdat in Russia since 1982, it had been officially published (in abridged version) in Russia in 1988 by a literary magazine «Nash Sovremennik». In the same year the Russian original was by Munich-based journal Veche. It was followed by translations into Italian (Insigna del Veltro, 1990), French (Edition Chapitre Douze, 1993), Serbian (Pogledi, 1993) and German (Verlag der Freunde, 1995). It is amazing that no commercial English translation has appeared so far (although Hitler's Mein Kampf is widely available both in Press and in Internet). A non-commercial translation was made by Joint Publication Research Service of the US Department of Commerce in 1990 and by a mathematician Larry Shepp in 1992 on his own initiative. Never considered by Shafarevich as his most important work, it nevertheless made his name first time widely known in the West outside of mathematical circles. In this book Shafarevich borrows the theory of French historian Augustin Cochin (1876–1916) who claimed that the French revolution of 1789 had been initiated by a small group of intellectuals constituting Malyi Narod («Lesser or Small People») and was opposed to the «Large People» who represent the organic basis of the given society. Although Shafarevich did not claim that in the modern Russian history the «Small People' consisted entirely of Jews, he tried to demonstrate that they indeed occupied the major part among this group. As probably happens in any historical study, some of the factual material and citations were chosen rather selectively to prove his point.

The second volume of the collected works reprints «Russophobia» together with other important articles written in the nineties. Among them is one of the most important article « Dve dorogi k odmomu obryvu» («Two roads to the same abyss"). In this article written for the collection «Iz pod Glyb» which we mentioned earlier, Shafarevich rejects both the Socialistic and the Western Democratic style for the future development of Russia and searches for a middle way via spiritual reborn of the nation.

Volume 4 of the collected works reprints another book of Shafarevich «Three thousand years of mystery. History of the Jews from perspectives of modern Russia» published in Russia in 2002. Volume 5 contains many articles of historical and current political issues appeared in the Russian Press, including three articles about Shostakovich and his music.

Many articles of Shafarevich were of not political nature but rather of more philosophical, historical and religious nature. The leading thread of his thinking was the eternal fight between the Good and the Evil.

From this view he discussed the work of Plato as well as the music of Shostakovich.

Accusation in anti-semitism

The accusation is based on Shafarevich's attempt to defend Russia from Russophobia by expressing Judeophobia in his works. According Wikipedia, anti-semitism is based on religious, economic, racist, ideological, anti-Israel, cultural and social prejudices toward Jews. Only the last one may directly apply to Shafarevich. The main purpose of his book, as well of his other writings and of his whole life outside mathematics, was not to express his hatred of Jewish people and Jewish culture but rather to defend Russian people, Russian Culture and Russian History from accusation of their responsibility for bending under different political regimes, incapability to grow into a democratic society, poor cultural traditions (sic!), racism towards other nations and hostility to the Western social ideas.

The reaction of the mathematical community to publishing «Russophobia» is well known and widely available on Internet. Unfortunately, the reason for the negative reaction of many mathematicians, many of whom probably did not bother or were not able to read Shafarevich's writings, was not the understandable concern about the fate of Russia in its turbulent time of the nineties but the outrage of what Shafarevich wrote concerning the Jewish people. Some of the mathematicians (including, for example, Jean-Pierre Serre) considered this nothing more as a witch-hunt. Citing from a recent letter of David Mumford [18] «I did not believe then and do not believe now that he was anti-semite, but rather that he was a fervent believer in his country, its people, its traditions perhaps one should say its soul.» For most people the love of their country, its history and its traditions and less interest or indifference to other countries and its traditions is natural. Unfortunately, Russia in modern time was exceptional in this way. The assault to the nationalistic feeling of Russian people came from many sides: political, cultural, religious, intellectual, foreign and domestic. Shafarevich and Solzhenitsyn were among a few people who dedicated their life to defend the right of the Russian people to the respect they deserve among other nations.

Shafarevich expressed his own creed in the following words: "A possibility to influence the future depends on capability to evaluate and comprehend the past. Indeed, we belong to the species of Homo Sapiens, and the mind is one of the most powerful tools that allows us to find our own path in life. For this reason, it seems to me, this is now one of the most important for Russia concrete questions: stand up for the right to comprehend your own history without any tabu and forbidden topics.

One may disagree with many of Shafarevich's views, some of them unwillingly historically distorted, but there is a good reason to remind oneself Voltaire's quotation: «I disapprove of what you say, but I will defend to the death your right to say it."

Many accusations of Shafarevich being hostile to individual Jews and, especially doing harm to Mathematics, have not been supported by any evidence. Thus the foreign secretary of the NAS accused Shafarevich of interfering in the careers of young Jewish mathematicians and preventing them from publishing their papers. He had never apologized for this blatant lie. One in four of Shafarevich's Ph.D. students were of Jewish or partly Jewish origin. Among his non-Jewish students were students of Armenian, Bulgarian, German, Litvanian, Tartar and Ukrainian origin. His close associate, a friend and one of the contributors to «Algebraic Surfaces» was Boris Moishezon, one of the pioneers of the Jewish emigration movement. The coauthor of one of his most influential paper on the Torelli Theorem for K3 surfaces was Ilya Iosifovich Piatetsky-Shapiro. One of his friends (for whom he wrote a memorial article) was the famous topologist Vladimir Rokhlin. Shafarevich had taken a lot of efforts and troubles to secure jobs for his students, Jewish or not, for example, arguing before Vinogradov for the merit of giving a position at the Steklov Institute to Yuri Manin. Since 1950 until his death, Shafarevich served on the editorial board of the most important and prestigious Russian mathematical journal «Izvestia». In the period of 10 years 1967–1977, he was the associate editor of the journal. The chief editor Ivan Matveevich Vinogradov played only nominal role in editorial decisions. During this period many Jewish mathematicians (e.g. Victor Kac or Boris Weisfeiler who later emigrated to the USA) were able to publish their important papers in this journal.

Igor Shafarevich had lived a long and productive life as a mathematician, as a philosophical thinker, a publicists, a historian and a Russian patriot. His mathematical heritage will certainly last forever, only the future will tell whether his other contributions to intellectual life will be of the equal value.

References

1. Algebraic surfaces. By the members of the seminar of I. R. Shafarevich / Translated from the Russian by Susan Walker. Translation edited, with supplementary material, by K. Kodaira and D. C. Spencer // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 1965. № 75. (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1965.)
2. Arithmetic and geometry: papers dedicated to I. R. Shafarevich on the occasion of his sixtieth birthday / Michael Artin, John Tate, editors. 2 vols. Boston: Birkhäuser, 1983.

3. *Artin M.* Supersingular K3 surfaces // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1974. V. 7, № 4. P. 543–567.
4. *Berglund K.* The vexing case of Igor Shafarevich, a Russian political thinker. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2012.
5. *Bertapelle A.* Local flat duality of abelian varieties // Manuscripta Math. 2003. V. 111. P. 141–161.
6. *Block R., Wilson R.* Classification of the restricted simple Lie algebras // J. Algebra. 1988. V. 114, № 1. P. 115–259.
7. *Čebotarëv N. G.* Teoriya Algebraičeskih Funkciĭ. (Russian) [Theory of Algebraic Functions]. Moscow–Leningrad: OGIZ, 1948.
8. *Danilov V. I.* Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane. (Russian) // Mat. Zametki. 1974. V. 15. P. 289–293.
9. *Demuškin S. P., Šafarevič I. R.* The imbedding problem for local fields. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1959. V. 23. P. 823–840.
10. *Demuškin S. P., Šafarevič I. R.* The second obstruction for the imbedding problem for the field of algebraic numbers. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1962. V. 26. P. 911–924.
11. *Golod E., Shafarevich I.* Factors of decreasing central series. (Russian) // Mat. Zametki. 1989. V. 45, № 3. P. 114–117.
12. *Golod E., Shafarevich I.* On the class field tower. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1964. V. 28. P. 261–272.
13. *Horvath R.* The legacy of Soviet Dissent: Dossidents, Democratization and radical nationalism in Russia. Taylor and Francis, 2012.
14. *Koch H.* The history of the theorem of Shafarevich in the theory of class formations // Class field theoryCits centenary and prospect (Tokyo, 1998). P. 87–105. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2001. (Adv. Stud. Pure Math., 30.)
15. *Kollàr J.* Shafarevich maps and automorphic forms. M. B. Porter Lectures. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.
16. *Kostrikin A. I., Shafarevich I. R.* Cartan's pseudogroups and the p-algebras of Lie. (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1966. V. 168. P. 740–742.
17. *Mumford D.* Lectures on curves on an algebraic surface. With a section by G. M. Bergman. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1966. (Annals of Mathematics Studies, № 59.)
18. David Mumford's blog; `www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2016/Shaf.htm`.
19. *Neukirch J., Schmidt A., Wingberg K.* Cohomology of number fields. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer-Verlag, 2000. (Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 323.)

20. *Shafarevitch I.* On p-extensions. (Russian. English summary) // Rec. Math. [Mat. Sbornik]. N. S. 1947. V. 20 (62). P. 351–363.
21. *Šafarevič I. R.* A general reciprocity law. (Russian) // Mat. Sbornik. N. S. 1950. V. 26 (68). P. 113–146.
22. *Šhafarevič I.* On the construction of fields with a given Galois group of order 1. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1954. V. 18. P. 261P–296.
23. Birational equivalence of elliptical curves. (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. N. S. 1957. V. 114. P. 267–270.
24. *Shafarevich I. R.* Exponents of elliptic curves. (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. N. S. 1957. V. 114. P. 714–716.
25. *Šafarevič I. R.* Extensions with prescribed ramification points. (Russian) // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1963. V. 18. P. 71–95.
26. *Pjatesky-Shapiro I. I., Shafarevich I. R.* Galois theory of transcendental extensions and uniformization. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1966. V. 30. P. 671–704.
27. *Shafarevich I. R.* Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes. Notes by C. P. Ramanujam. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1966. (Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, № 37.)
28. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups // Rend. Mat. e Appl. 1966. V. (5) 25, № 1–2. P. 208–212.
29. *Pjateckiĭ-Šapiro I.I., Šafarevič I. R.* Torelli's theorem for algebraic surfaces of type K3. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1971. V. 35. P. 530–572.
30. *Shafarevich I. R.* On some infinite-dimensional groups. II. (Russian) // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1981. V. 45, № 1. P. 214–226, 240.
31. *Shafarevich I. R.* Deformations of commutative algebras of class 2. (Russian) // Algebra i Analiz 1990. V. 2, № 6. P. 178–196; translation in Leningrad Math. J. 1990. V. 2, № 6. P. 1335–1351.
32. *Shafarevich I. R.* Abelian and nonabelian mathematics / Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska // Math. Intelligencer. 1991. V. 13, № 1. P. 67–75.
33. *Shafarevich I. R.* On the arithmetic of singular $K3$-surfaces // Algebra and analysis (Kazan, 1994). P. 103P–108. Berlin: de Gruyter, 1996.
34. *Shafarevich I. R.* On some families of abelian surfaces. (Russian. Russian summary) // Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. 1996. V. 60, № 5. P. 213–223; translation in Izv. Math. 1996. V. 60, № 5. P. 1083–1093.
35. *Shafarevich I. R.* A problem on the tenth discriminant. (Russian. Russian summary) // Algebra i Analiz. 2013. V. 25, № 4. P. 260–277; translation in St. Petersburg Math. J. 2013. V. 25, № 4. P. 699–711.

36. *Shafarevich I. R.* Collected mathematical papers. Reprint of the 1989 edition. Heidelberg: Springer, 2015. (Springer Collected Works in Mathematics.)
37. *Shafarevich I.* Birational equivalence of elliptic curves. (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. N. S. 1957. V. 114. P. 267–270.
38. *Shafarevich I. R.* Abelian and nonabelian mathematics. Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska // Math. Intelligencer. 1991. V. 13, № 1. P. 67P–75.
39. *Shafarevich I. R.* On the arithmetic of singular $K3$-surfaces // Algebra and analysis (Kazan, 1994). P. 103–108. Berlin: de Gruyter, 1996.
40. *Shafarevich I. R.* Families of reducible abelian surfaces. (Russian) // Mat. Zametki. 1996. V. 60, № 6. P. 946–949; translation in Math. Notes. 1996. V. 60, № 5–6. P. 717–720.
41. *Shafarevich I. R.* Sochineniiya v trekh tomakh. [Collected Works in three volumes]. Moskva: Feniks, 1994.
42. *Shafarevich I. R.* 3000-letniya zagadka: taynaiya istoriiya evreistva. Moskva: Algoritm, 2011.
43. *Shafarevich I. R.* The Socialist Phenomenon. Translated by W. Tjalsma, with a foreword by A. Solzhenitsyn. HarperCollins Publishers, 1980.
44. *Shafarevich I. R.*, *Rusofobiya*. Moskva: IKSMO Algoritm, 2005.
45. *Shafarevich I. R.* Polnoe sobranie sochinenij v shesti tomakh. [Complete collection of Works in six volumes]. Moscow: Insitute of Russian Civilization, 2014.
46. *Shafarevich I. R.*, *Basic notions of algebra*. Translated from the 1986 Russian original by Miles Reid. Reprint of the 1997 English translation, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 11. Algebra, I. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
47. *Shestakov I.*, *Umirbaev U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17, № 1. P. 197–227.
48. *Siegel C.* Analytic functions of several complex variables. Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1948–1949. With notes by P. T. Bateman. Reprint of the 1950 edition. Heber City, UT: Kendrick Press, 2008.
49. *Solzhenitsyn A. et all*. From under the rubble. Translated by A. M. Brock et al. under the direction of Michael Scammell; with an introduction by Max Hayward. Boston: Little Brown and Co., 1975; New York: Bantam Books, 1976.
50. *Tĕĭt D. T.*, *Šafarevič I. R.* The rank of elliptic curves. (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1967. V. 175. P. 770–773.

Сведения об авторах

Паршин Алексей Николаевич (р. 1942), заведующий отделом алгебры Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Куликов Виктор Степанович (р. 1952), ведущий научный сотрудник отдела алгебры Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Шабат Георгий Борисович (р. 1952), профессор Российского государственного гуманитарного университета, Московского государственного университета и Независимого Университета.

Долгачев Игорь Владимирович (р. 1944), профессор Мичиганского университета.