

Учим математике-10

Материалы открытой школы-семинара
учителей математики

Под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2022

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

Учим математике-10. Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2022. — 116 с.

ISBN 978-5-4439-1731-3

В этом сборнике представлены избранные материалы десятой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики. Он прошел в г. Майкопе с 30 апреля по 8 мая 2021 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-10

Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Технические редакторы *Т. Струков, А. Ширяева*

Подписано в печать 31.03.2022 г. Формат 60 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 7,5 печ. л. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.



ISBN 978-5-4439-1731-3

© МЦНМО, 2022.

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы *десятой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики*. Он прошел в г. Майкопе с 30 апреля по 8 мая 2021 года. Организаторами семинара являлись Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Республиканская естественно-математическая школа (р. Адыгея), ГАОУ ДПО «Центр Педагогического Мастерства» г. Москвы, Московский Центр Непрерывного Математического Образования и Российская ассоциация учителей математики.

Материалы девяти предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018, 2019 и 2020 гг.

На семинар приглашались все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие около ста пятидесяти человек, представлявших разные уголки России.

Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение семинара дало прекрасную возможность организовать большое количество мастер-классов со школьниками Адыгеи, которые проводили приглашенные преподаватели (в основном из

Москвы и Санкт-Петербурга). Проведенные занятия со школьниками «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия проводили наиболее опытные преподаватели — участники семинара. Помимо этого, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников и подготовке учителей математики. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, каждый участник семинара имел возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением. По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от ГАОУ ЦПМ.

Успешное проведение школы-семинара обеспечили представительные научный и программный комитеты.

Программный комитет семинара:

- Яценко И.В. — научный руководитель ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики ЦО «Пятьдесят седьмая школа» г. Москвы, кандидат физико-математических наук — председатель;
- Блинков А.Д. — методист ЦПМ, сотрудник МЦНМО, Заслуженный учитель РФ — заместитель председателя;
- Мамий Д.К. — ректор Адыгейского государственного университета, заместитель руководителя Кавказского математического центра АГУ, кандидат физико-математических наук, Заслуженный работник образования Республики Адыгея — заместитель председателя;
- Андреев Н.Н. — заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых учёных, создатель проекта «Математические этюды», член Координационного Совета Кавказской математической олим-

пиады, лауреат Золотой медали РАН за пропаганду научных знаний, кандидат физико-математических наук;

- Кожевников П.А. — председатель Задачного комитета Кавказской математической олимпиады, кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, старший научный сотрудник лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, член тренерского совета национальной команды России на международной математической олимпиаде, заместитель главного редактора по математике журнала «Квант», член Центральной предметной методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике, золотой медалист международной математической олимпиады 1992 года;
- Столбов К.М. — заместитель директора и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга, Почетный работник общего образования РФ;
- Чулков П.В. — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ.

Организационный комитет семинара:

- Блинков А.Д. — методист ЦПМ, сотрудник МЦНМО, Заслуженный учитель РФ — председатель;
- Мамий Д.К. — ректор Адыгейского государственного университета, заместитель руководителя Кавказского математического центра АГУ, кандидат физико-математических наук, Заслуженный работник образования Республики Адыгея — заместитель председателя;
- Мамышев Ю. Т. — исполняющий обязанности директора Республиканской естественно-математической школы;
- Сташ А.Х. — декан факультета математики и компьютерных наук АГУ, кандидат физико-математических наук;

- Литвинов Н.И. — руководитель отдела сопровождения проектов Кавказского математического центра АГУ;
- Юров А.В. — проректор Адыгейского государственного университета;
- Наконечный Н.А. — учитель математики, старший методист Лицея «Вторая школа» – координатор и секретарь семинара;
- Эдлин Ю.М. — учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга — координатор семинара;
- Зубарева С. И. — учитель математики школы №218 г. Москвы — секретарь семинара;
- Тур Я.В. — методист Республиканской естественно-математической школы;
- Троицкая Т.С. — методист Республиканской естественно-математической школы;
- Меретукова Е.Н. — заместитель декана факультета математики и компьютерных наук АГУ;
- Панеш Т.А. — заместитель декана факультета математики и компьютерных наук АГУ.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить увлекательную экскурсию в предгорья Кавказа. Кроме того, была возможность для спортивных занятий. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем, кто нашел силы и время

подготовить статьи для этого сборника. В сборник также включены материалы нескольких преподавателей, которые в этот раз не смогли стать участниками семинара.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

Программа десятой открытой школы-семинара

1 мая	
Адыгейский государственный университет	
Время	Докладчики и содержание
9.00–9.20	Регистрация участников
9.20–9.45	Открытие и оргвопросы
9.45–11.15	Н.Н. Андреев П.Л. Чебышев: 200 лет со дня рождения
11.45–12.30	К.М. Столбов Математика, приятная во всех отношениях (памяти О.А. Иванова)
12.45–13.30	П.А. Кожевников Математические матрешки
Время	Круглый стол
15.30–16.30	А.Д. Блинков, Н.Н. Андреев Как готовить учителей математики
Время	Докладчики и содержание
16.45–17.05	В.А. Лецко Новые свойства автомедианных треугольников
17.05–17.25	А.Е. Панкратьев Но есть нюанс... (разговор о важных мелочах)
17.25–17.45	А.В. Шкловер Почему непрофильные классы почти не решают задачи на построение

2 мая Адыгейский государственный университет	
Время	Докладчики и содержание
9.30–11.00	А.С. Штерн Расширение понятия функции в углубленном курсе алгебры
11.30–13.00	А.М. Райгородский
13.15–14.00	Ю.А. Блинков Как можно придумать олимпиадную задачу
16.00–16.45	Г.И. Вольфсон Поиск аналогий
17.00–17.30	А.В. Морозов О книгах и планах издательства «СМИО ПРЕСС»

3 мая Адыгейский государственный университет	
Время	Мастер-классы
9.30–11.00	5–6 класс Ю.М. Эдлин Логические задачи
9.30–11.00	7 класс Г.И. Вольфсон Как построить пример
9.30–11.00	8 класс Ю.А. Блинков Антипараллельность
9.30–11.00	9 класс Д.Э. Шноль Кубический многочлен

9.30–11.00	10–11 класс П.А. Кожевников Полярное соответствие
Время	Докладчики и содержание
11.30–13.00	А.В. Савватеев Школьникам — о группах: конкретно и доступно
13.15–14.15	М.А. Волчкевич Мои новые учебники геометрии
16.15–16.30	А.В. Ядрин Математические понятия в произведениях искусства
16.30–17.00	Д.Б. Невидимый Модуль в задачах с параметрами
Время	Круглый стол
17.00–18.00	А.Д. Блинков, М.А. Волчкевич О преподавании геометрии в школе

4 мая	
Адыгейский государственный университет	
Время	Мастер-классы
9.30–11.00	5–6 класс К.М. Столбов Задачи на сообразительность
9.30–11.00	7 класс Н.А. Наконечный Логика
9.30–11.00	8 класс М.А. Волчкевич Геометрия на клетчатой бумаге
9.30–11.00	9 класс Д.В. Прокопенко Степень точки относительно окружности

9.30–11.00	10–11 класс А.С. Штерн Бинарные операции
Время	Докладчики и содержание
11.30–13.00	Л.Д. Беклемишев Элементарная геометрия с точки зрения логики
13.15–14.00	Д.В. Швецов Геометрические преобразования по И.М. Яглому
16.00–17.30	Л.А. Емельянов, Е.А. Труфанова Геометрические вариации. Параллелограммы и окружность Эйлера

6 мая Адыгейский государственный университет	
Время	Мастер-классы
9.45–11.20	7 класс Н.М. Нетрусова Два сюжета: Многоделимые числа. Исследуем меандры
9.45–11.20	8 класс Н.А. Наконечный Графы
9.45–11.20	8–9 класс Д.В. Швецов Середина отрезка
9.45–11.20	9 класс Д.Г. Мухин Правильные многоугольники
9.45–11.20	10–11 класс Н.Н. Андреев Конические сечения (лекция)

6 мая	
Адыгейский государственный университет	
Время	Докладчики и содержание
12.00–12.45	П.А. Кожевников Вспомогательный граф
13.00–14.30	Л.А. Емельянов, Е.А. Труфанова Геометрический практикум в среде GeoGebra. Задачи на восстановление треугольника / Окружность Эйлера для четырёхугольника
Время	Круглый стол
16.30–17.30	И.В. Ященко Линейная алгебра в школе

7 мая	
Адыгейский государственный университет	
Время	Мастер-классы
9.45–11.20	7 класс А.Д. Блинков Треугольники и квадраты
9.45–11.20	8 класс Д.Г. Мухин Теория вероятностей
9.45–11.20	8–9 класс Н. А. Наконечный Неравенства
9.45–11.20	9 класс Г.И. Вольфсон Дополнительные построения в планиметрии
9.45–11.20	10 класс Д.В. Швецов Гомотетия

9.45–11.20	11 класс Д.В. Прокопенко Равногранный тетраэдр
Время	Докладчики и содержание
12.00–12.45	Д.Г. Мухин Примеры творческих работ по математике
13.00–14.30	Л.А. Емельянов, Е.А. Труфанова Геометрический практикум в среде GeoGebra. Задачи на восстановление треугольника / Окружность Эйлера для четырёхугольника
16.30–17.30	Подведение итогов семинара

Вслед за теоремой Пифагора...

А.Д. Блинков,
город Москва
blinkov@mcsme.ru

В школьном курсе 8 класса все изучают теорему Пифагора. К сожалению, большинство школьных учебников ограничиваются вычислительными задачами на её применение и упоминанием о египетском треугольнике. На нашей встрече я попытаюсь показать, что еще интересного можно извлечь из теоремы Пифагора и надеюсь, что какие-то фрагменты вам пригодятся для уроков или факультативных занятий.

I. Обратная теорема

В большинстве школьных учебников теорема, обратная теореме Пифагора, либо только формулируется, либо вообще не рассматривается. А если рассматривается, то применяется только на уровне: является ли треугольник с такими-то сторонами прямоугольным?

Понятно, что после изучения теоремы косинусов эта теорема становится её следствием, но теорема косинусов изучается позже. Вместе с тем, отдельное доказательство обратной теоремы весьма несложно и очень полезно, так как иллюстрирует принцип, часто встречающийся в математике.

Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник — прямоугольный.

Дано: $\triangle ABC$, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Доказать: $\angle C = 90^\circ$.

Доказательство (рисунки — по необходимости). Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1 | \angle C_1 = 90^\circ$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора:

$$A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

то есть, $A_1B_1 = AB$. Следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ (по трем сторонам), значит, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, ч.т.д.

В качестве закрепления: задачи 1–3.

Задача 1. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b , его гипотенуза равна c , а высота, проведенная к гипотенузе, равна h . Докажите, что треугольник со сторонами $a+b$, h и $c+h$ также является прямоугольным.

Сначала надо понять, какая сторона будет наибольшей. Попробуем обе.

Решение. Так как

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \text{ и} \\ (c+h)^2 = c^2 + 2ch + h^2,$$

то докажем, что $ab = ch$. Действительно, каждое из этих выражений — удвоенная площадь данного прямоугольного треугольника. Тогда $(a+b)^2 + h^2 = (c+h)^2$, откуда и следует требуемое утверждение.

Если площадь еще не пройдена, то равенство $ab = ch$ можно получить и по-другому: $a^2b^2 = (c \cdot a_c)^2 \cdot (c \cdot b_c)^2 = c^2h^2$.

Задача 2. Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = 5c^2$?

Эта задача полезна, так как сбивает привычные стереотипы в обозначениях.

Решение. Пусть c — катет, b — гипотенуза, тогда

$$2a^2 + c^2 = 5c^2 \Leftrightarrow a^2 = 2c^2.$$

Например, $c = 1$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$.

Задача 3. Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов их длин равна квадрату суммы длин оснований.

Эта задача полезна и для формирования умения понимать условие, и для отработки понятия тогда и только тогда.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD ($BC < AD$). Через вершину C проведем прямую, параллельную BD , которая пересечет прямую AD в точке E (см. рис. 1).

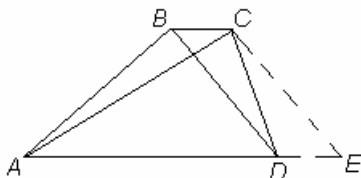


Рис. 1

Тогда:

$$AC^2 + BD^2 = AC^2 + CE^2 = AE^2 = (AD + BC)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \angle ACE = 90^\circ \Leftrightarrow AC \perp BD.$$

II. Принцип Карно

Перпендикулярность каких-либо прямых требуется доказать во многих задачах и теорема, обратная теореме Пифагора, «спасает» далеко не всегда. Существует ещё один, достаточно «мощный» метод доказательства перпендикулярности.

Задача. Пусть дана прямая, к которой из одной точки проведены две наклонные MA и MB (см. рис. 2а, б). Пусть длины этих наклонных равны a и b , а длины их проекций равны a' и b' .

1) Докажите, что $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$. 2) Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

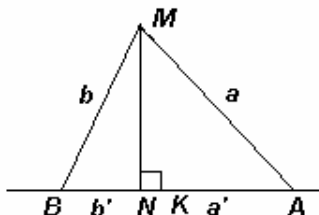


Рис. 2а

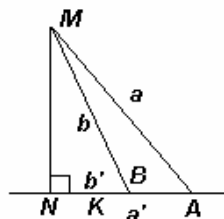


Рис. 2б

Решение. 1) Рассмотрим точку N — ортогональную проекцию точки M на прямую AB . Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам AMN и BMN , получим равенство, равносильное требуемому. 2) Если для точки K , лежащей на прямой AB , выполняется равенство: $a^2 - b^2 = KA^2 - KB^2$, то она является ортогональной проекцией точки M на AB .

Из равенства, данного в условии, и равенства, доказанного в пункте 1), следует, что

$$\begin{aligned} NA^2 - NB^2 &= KA^2 - KB^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (NA - NB)(NA + NB) &= (KA - KB)(KA + KB). \end{aligned}$$

Значит, если $N \in [AB]$, то $NA - NB = KA - KB$, а если $N \notin [AB]$, то $NA + NB = KA + KB$. В обоих случаях $N = K$.

Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Эта фамилия вам наверняка знакома. Французский математик, механик, военный инженер, государственный деятель Лазарь Карно (1753–1823), ученик Гаспара Монжа (создателя начертательной геометрии), занимался, в том числе, и проблемами элементарной геометрии.

Полученный результат можно сформулировать на языке ГМТ.

Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B — постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB .

Отсюда можно получить интересный результат для четырехугольников. *Диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон.*

Доказательство. Для четырехугольника $ABCD$:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 \Leftrightarrow BA^2 - BC^2 = DA^2 - DC^2,$$

а это, в свою очередь, равносильно тому, что точки B и D лежат на прямой, перпендикулярной AC (см. рис. 3).

Отметим, что утверждение справедливо как для выпуклого, так и для невыпуклого четырехугольников.

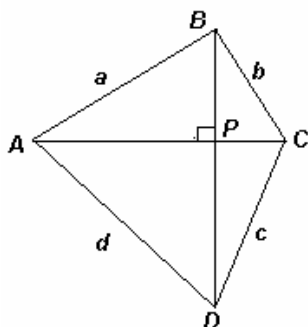


Рис. 3

Рассмотрим задачи 4 – 7.

Задача 4. Даны четыре палочки, из которых можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них также можно составить контур четырехугольника с двумя прямыми углами.

Решение. Пусть палочки с длинами a , b , c и d образуют контур данного четырехугольника (см. рис. 3), тогда $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Следовательно, расположив эти же палочки так, как показано на рис. 4, получим требуемый четырехугольник.

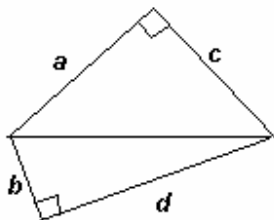


Рис. 4

Задача 5. Дан треугольник ABC . Постройте отрезок, который разобьет его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

Решение. Пусть углы B и C данного треугольника — острые, тогда проведем высоту AH , которая будет лежать внутри тре-

угольника (см. рис. 5). На стороне BC построим такую точку D , что $BD = CH$. Докажем, что отрезок AD — искомый.

Действительно, $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$. Так как $BD = CH$ и $BH = CD$, то

$$AB^2 - CD^2 = AC^2 - BD^2 \Leftrightarrow AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2.$$

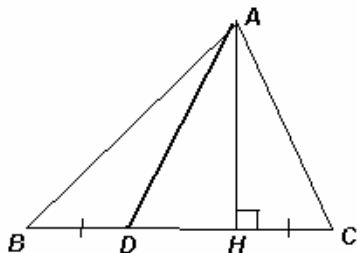


Рис. 5

Следовательно, $AB^2 + BD^2 + AD^2 = AC^2 + CD^2 + AD^2$, что и требовалось.

Задача 6. В шестиугольнике $ABCDEF$: углы A и C — прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что прямые DF и BE перпендикулярны.

Решение. Из прямоугольных треугольников BCD и BAF : $BD^2 = BC^2 + CD^2$ и $BF^2 = BA^2 + AF^2$ (см. рис. 6). Тогда, учитывая равенства, заданные в условии задачи, $BD^2 + EF^2 = BF^2 + ED^2$. Следовательно, в четырехугольнике $BDEF$ диагонали DF и BE перпендикулярны.

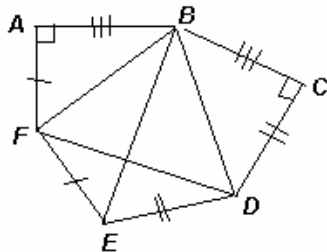


Рис. 6

Задача 7. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q . Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC .

Решение. Рассмотрим четырехугольник $APMQ$ (см. рис. 7). Для того, чтобы доказать перпендикулярность его диагоналей PQ и AM , достаточно доказать, что $AP^2 + MQ^2 = AQ^2 + MP^2$. Так как $AP = BP$ и $AQ = CQ$, то это равносильно тому, что $BP^2 + MQ^2 = CQ^2 + MP^2$. А это равенство верно, так как $MP^2 - BP^2 = MB^2 = MC^2 = MQ^2 - CQ^2$.

Если считать, что $APBMCQ$ — «вырожденный шестиугольник», то задача становится эквивалентной предыдущей.

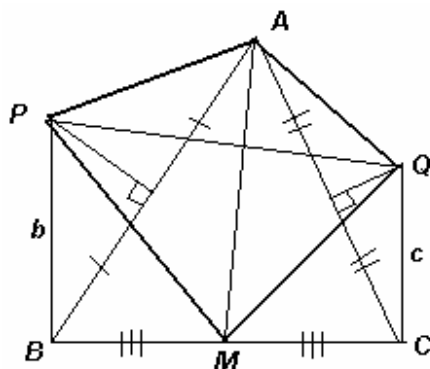


Рис. 7

III. Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

Естественным продолжением свойств суммы квадратов сторон четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями является его частный случай, когда такой четырёхугольник вписан в окружность. Рассмотрим цепочку задач.

Задача 8. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями вписан в окружность с центром O , то $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

Решение. По теореме о вписанном угле $\angle AOB = 2\angle ACB$ и $\angle COD = 2\angle CBD$ (см. рис. 8). Так как $\angle ACB + \angle CBD = 90^\circ$, то $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

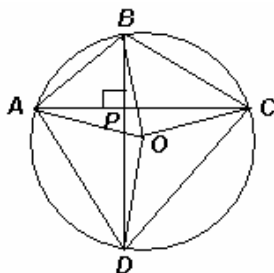


Рис. 8

Задача 9. Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями расстояние от центра описанной окружности до стороны равно половине противоположной стороны.

Решение. Пусть OK — перпендикуляр к AB , тогда K — середина AB . Аналогично, $OM \perp CD$, M — середина CD (см. рис. 9). Так как $\angle KOB + \angle COM = 90^\circ$ (следует из доказанного в задаче 8), то $\angle KOB = \angle OCM$, тогда прямоугольные треугольники KOB и MCO равны (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OK = CM = \frac{1}{2}CD$.

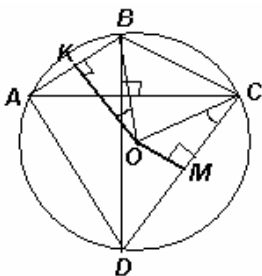


Рис. 9

Задача 10. Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями прямая, проведенная из точки пересечения диагоналей перпендикулярно стороне, делит противоположную сторону пополам.

Решение. Первый способ. Пусть $PQ \perp BC$ и PQ пересекает AD в точке M (см. рис. 10а). Тогда $\angle ADB = \angle ACB = \angle BPQ = \angle DPM$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике APD : $PM = MD$, значит, PM — его медиана, то есть M — середина AD .

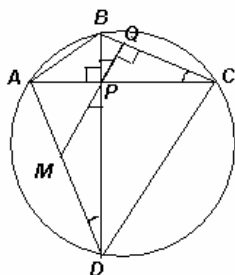


Рис. 10а

Второй способ. Пусть L и M — середины сторон BC и AD соответственно (см. рис. 10б). По доказанному в задаче 2, $OM = \frac{1}{2}BC = PL$ и $OL = \frac{1}{2}AD = PM$. Следовательно, $OMPL$ — параллелограмм, тогда $MP \parallel OL$. Так как $OL \perp BC$, то $MP \perp BC$.

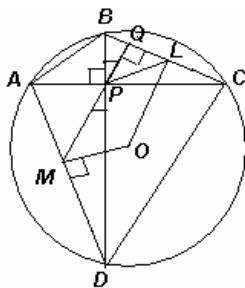


Рис. 10б

Задача 11. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R , перпендикулярны и пересекаются в точке P . а) Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$. б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника $ABCD$.

Решение. а) *Первый способ.* Заметим, что $AP^2 + DP^2 = AD^2$ и $BP^2 + CP^2 = BC^2$. Учтывая, что $AD = 2OL$ и $BC = 2BL$ (см. рис. 10б), получим:

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AD^2 + BC^2 = 4(OL^2 + BL^2) = 4OB^2 = 4R^2.$$

Второй способ. Заметим, что $AP^2 + BP^2 = AB^2$ и $CP^2 + DP^2 = CD^2$. Пусть K — середина AB (см. рис. 11). Проведем диаметр AE , тогда угол ABE — прямой и OK — средняя линия треугольника ABE , значит, $CD = 2OK = BE$. Следовательно,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AB^2 + CD^2 = AB^2 + BE^2 = AE^2 = 4R^2.$$

Третий способ. По следствию из теоремы синусов: $AB = 2R \sin \angle ACB$ и $CD = 2R \sin \angle CBD$. Тогда

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 &= AB^2 + CD^2 = \\ &= 4R^2(\sin^2 \angle ACB + \sin^2 \angle CBD) = 4R^2(\sin^2 \angle ACB + \cos^2 \angle ACB) = 4R^2 \end{aligned}$$

(сумма указанных углов равна 90°).

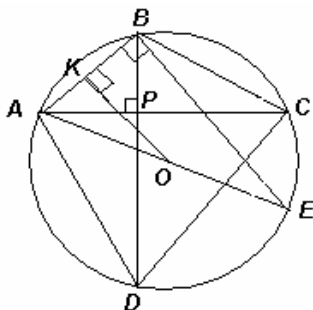


Рис. 11

б) Так как $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 = 4R^2$, то искомая сумма равна $8R^2$.

IV. В заключение

В заключение: задача на теорему Пифагора.

Задача 12. Даны два лоскута материи, имеющие форму квадратов (их размеры — различны). Каким образом их нужно раскроить, образовав не более пяти кусков, чтобы из всех получившихся кусков можно было сшить скатерть, также имеющую форму квадрата?

Решение. Пусть a и b — длины сторон данных квадратов, тогда новый квадрат получится, если эти квадраты приложить друг к другу и разрезать так, как показано на рис. 12.

Решение этой задачи является одним из «классических» доказательств теоремы Пифагора.

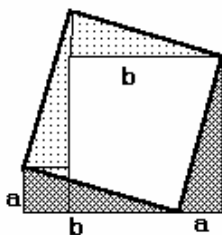


Рис. 12

Как переформулировать задачу?

Ю.А. Блинков,
школа № 57, школа «Летово», г. Москва
y.a.blinkov@gmail.com

Консерватория. Два студента разговаривают:

– Завтра сдавать курсовую по композиции, а у меня ничего не готово.

– А ты сыграй сочинение своего преподавателя, только наоборот, задом наперед.

– Да пробовал я уже это делать, Моцарт получается...

В статье будет рассмотрена конструкция, связанная с ортоцентром треугольника. Используя классические факты, можно заметить эквивалентность двух, вроде бы изначально не похожих друг на друга задач, переформулировать уже известную олимпиадную задачу или попытаться придумать свою. Об этом и пойдет речь.

Итак, вспомним.

Факт 1. *Высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника.*

Ортоцентр остроугольного треугольника является центром вписанной окружности ортотреугольника, а вершины треугольника — центрами его внеписанных окружностей.

Упражнение. *Докажите факт 1.*

Указание (см. рис.1). Можно использовать, например, что точки A , A_1 , B и B_1 (и аналогичные четверки точек) лежат на одной окружности. Из этого следует, что угол

B_1A_1C равен углу BAC (и аналогичные равенства углов).

Как же можно использовать эти факты?

Пусть в какой-то задаче речь идет о высотах треугольника. Тогда задачу можно переформулировать, заменив треугольник на ортотреугольник, а высоты — на биссектрисы. И наоборот, если в задаче рассматриваются, например, биссектрисы внутренних или

внешних углов и точки их пересечения (центры вписанных или невписанных окружностей), то можно заменить, например, центры невписанных окружностей на вершины треугольника, его биссектрисы — на высоты полученного треугольника и, соответственно, инцентр исходного — на ортоцентр полученного.

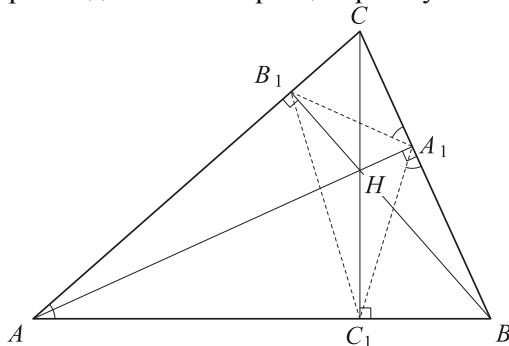


Рис. 1

Чем может быть привлекательна такая переформулировка?

Во-первых, это приводит к другим способам доказательств известных утверждений. Рассмотрим классические примеры.

Пример 1. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

Доказательство (см. рис. 1):

Для любого треугольника рассмотрим треугольник, образованный основанием его высот (ортотреугольник). Тогда высоты будут являться биссектрисами ортотреугольника, которые, как известно, пересекаются в одной точке.

Может возникнуть вопрос. А как быть с тупоугольным треугольником?

На самом деле, проблем никаких нет: прямые, содержащие две высоты станут биссектрисами внешних углов ортотреугольника, и пересечением будет являться центр невписанной окружности ортотреугольника (вершина исходного треугольника).

Пример 2. (окружность девяти точек) *Средины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершину с ортоцентром, лежат на одной окружности.*

Доказательство (см. рис.2):

Пусть $A_1B_1C_1$ ортотреугольник треугольника ABC , M — середина AB , K — середина CH , где H — ортоцентр. Достаточно показать, что точки M и K лежат на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$. Заметим, что обе эти точки равноудалены от A_1 и B_1 и лежат на внешней и, соответственно, внутренней биссектрисах угла $A_1B_1C_1$. Осталось заметить, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса противоположного угла (внутреннего или внешнего) пересекаются на описанной окружности треугольника.

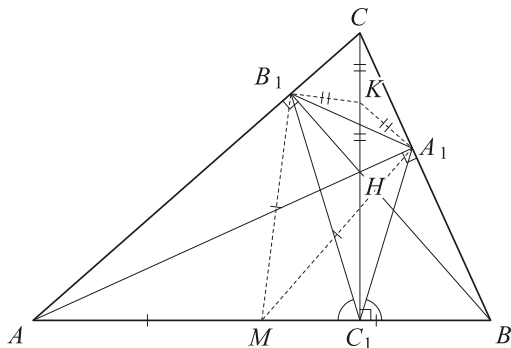


Рис. 2

Во-вторых, мы можем переформулировать уже известные задачи и получать «новые», и наоборот, решения незнакомых задач сводить к уже известным.

Для этого потребуется вспомнить еще некоторые факты, связанные с ортоцентром треугольника.

Факт 2. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , O — центр описанной окружности. Тогда прямые CO и A_1B_1 перпендикулярны.

Упражнение. Докажите факт 2.

Указание (см. рис 3). Воспользуйтесь тем, что угол B_1A_1C равен углу BAC и тем, что угол BCO дополняет угол BAC до 90° .

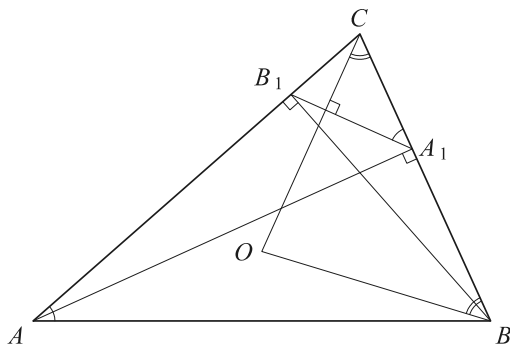


Рис. 3

Факт 3. Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем от центра описанной окружности до противоположной стороны.

Упражнение. Докажите факт 3.

Указание (см. рис. 4). Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, C_0 , B_0 , K и L — середины AB , AC , CH и BH соответственно. Докажите равенство треугольников C_0OB_0 и KHL . Возможны и другие способы доказательства.

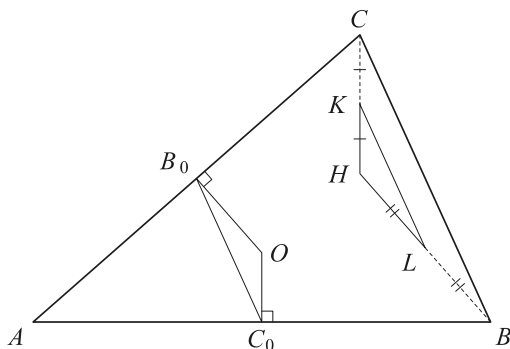


Рис. 4

Факт 4. Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Тогда радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH , BCH , ACH и ABC , равны.

Упражнение. Докажите факт 4.

Указание. Используйте симметрию относительно прямой AC или следствие из теоремы синусов.

Отметим, что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и ACH симметричны относительно прямой AC .

Рассмотрим несколько задач. Для начала — классическая задача.

Задача 1. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на его стороны, пересекаются в одной точке (см. рис. 5а).

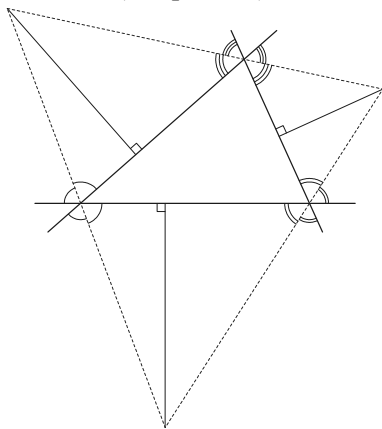


Рис. 5а

Отметим, что задача допускает различные способы решения, в том числе, использование теоремы Карно.

Но проще всего ее не решать, а свести к уже известной.

В качестве треугольника, указанного в задаче, рассмотрим ортотреугольник треугольника ABC . Тогда вершины треугольника ABC — центры вневписанных окружностей и задача будет выглядеть так (см. рис. 5б):

Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 , пересекаются в одной точке.

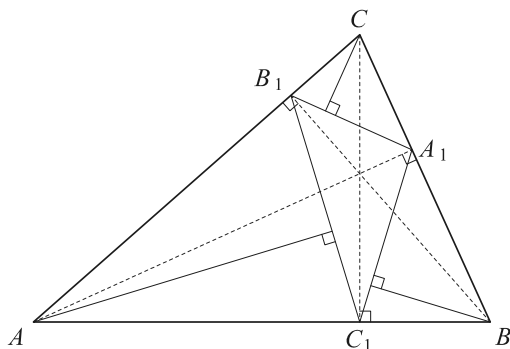


Рис. 5б

Доказательство. Согласно факту 2, указанные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC .

Теперь — несколько олимпиадных задач.

Задача 2. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2012) В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точки I_A , I_C — центры внеписанных окружностей, касающихся сторон BC и AB соответственно. Точка O — центр описанной окружности треугольника II_AI_C . Докажите, что $OI \perp AC$ (см. рис. 6а).

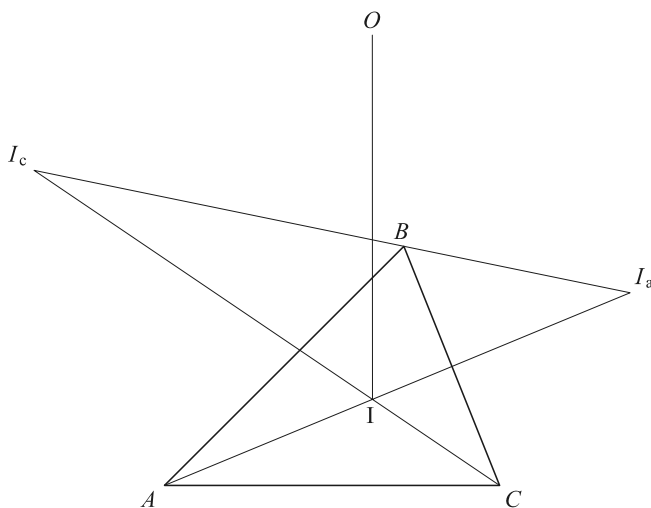


Рис. 6а

Доказательство. В качестве треугольника, указанного в задаче, рассмотрим ортотреугольник треугольника ABC . Тогда задача переформулируется следующим образом:

Высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке H . O_1 — центр описанной окружности треугольника AHC . Докажите, что $O_1H \perp A_1C_1$.

Этот факт нам уже знаком и является классической задачей (см. рис. 6б). Действительно, если O — центр окружности, описанной около треугольника ABC , то O и O_1 симметричны относительно AC (см. факт 4). Учитывая факт 3, получим, что BOO_1H — параллелограмм, откуда, используя факт 2, и можно получить утверждение задачи.

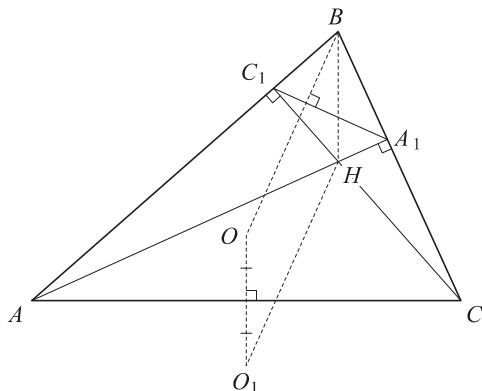


Рис. 6б

Теперь чуть более сложная задача.

Задача 3. (Московская устная олимпиада по геометрии, 2016) Точки I_A , I_B , I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон BC , AC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из I_A на AC , пересекает перпендикуляр, опущенный из I_B на BC , в точке X_C . Аналогично определяются точки X_A и X_B . Докажите, что прямые $I_A X_A$, $I_B X_B$ и $I_C X_C$ пересекаются в одной точке (см. рис. 7а).

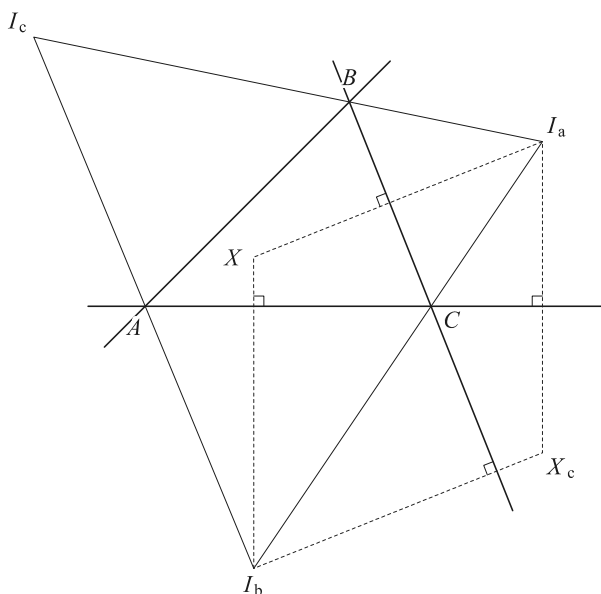


Рис. 7а

Доказательство. Рассмотрим треугольник $I_A I_B I_C$. Заметим, что перпендикуляры, опущенные из I_A на BC , из I_B на AC и из I_C на AB пересекаются в одной точке X , равноудаленной от вершин треугольника $I_A I_B I_C$ (см. задачу 1). Кроме того, в силу параллельности перпендикуляров, $I_A X I_B X_C$ — параллелограмм. Следовательно, он является ромбом и точки X и X_C симметричны относительно $I_A I_B$. Переформулируя, получим следующую задачу:

Пусть O_B — точка симметричная центру O описанной окружности треугольника ABC относительно прямой AC . Аналогично определяются точки O_A и O_C . Докажите, что прямые AO_A , BO_B и CO_C пересекаются в одной точке.

Заметим, что это утверждение мы фактически доказали при решении задачи 2. Действительно, если H — ортоцентр треугольника, то точка O_B — центр окружности, описанной около треугольника ACH и $BOO_B H$ — параллелограмм (см.рис. 7б). Тогда его

диагональ BO_B проходит через середину отрезка OH . Рассуждая аналогично, получим, что прямые AO_A и CO_C также проходят через эту точку.

Отметим, что эта точка является центром окружности девяти точек.

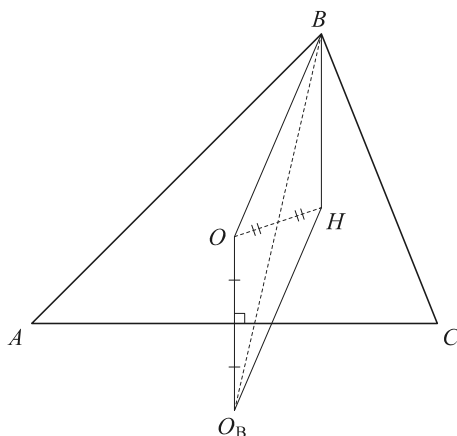


Рис. 76

Разумеется, идея подобных переформулировок не нова. Например, в задачнике В.В. Прасолова можно встретить такую пару задач-близнецов.

Задача 4. а) В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Прямые AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 пересекаются в точках C_0 , A_0 и B_0 . Докажите, что точки C_0 , A_0 и B_0 лежат на радикальной оси окружности девяти точек и описанной окружности.

б) Биссектрисы внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон в точках C_0 , A_0 и B_0 . Докажите, что точки C_0 , A_0 и B_0 лежат на одной прямой, причем эта прямая перпендикулярна прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC .

Упражнение. Попробуйте свести пункт б к пункту а.

Упражнение. Докажите пункт а.

Указание. Используйте, что точки A , A_1 , B и B_1 лежат на одной окружности. Рассмотрите степень точки C_0 относительно этой окружности, окружности девяти точек и описанной окружности треугольника.

Рассмотрим еще один пример задач-близнецов. Первая задача взята со всероссийской олимпиады по математике. Вторая же предлагалась на олимпиадных сборах и известна, судя по всему, очень давно.

Задача 5. а) *(Всероссийская олимпиада по математике, 2002)* Пусть A' — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC . Прямая a проходит через точку A' и параллельна биссектрисе внутреннего угла A . Аналогично строятся прямые b и c . Докажите, что прямые a , b и c пересекаются в одной точке.

б) Пусть $A_1B_1C_1$ ортотреугольник треугольника ABC , A_2 , B_2 , C_2 проекции вершин A , B , C на прямые B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_2 , B_2 , C_2 на прямые BC , CA , AB соответственно, пересекаются в одной точке.

Упражнение. Попробуйте свести пункт б к пункту а.

Упражнение. Докажите пункт а.

Указание. Используйте, что точки касания вписанной и вневписанной окружности симметричны относительно середины стороны и гомотетию исходного и срединного треугольника.

Попробуем теперь придумать задачу сами. Возьмем, например, такой факт:

Пусть B_1 и A_1 — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами AC и BC соответственно. Тогда $BA_1 = AB_1$.

Упражнение. Докажите этот факт.

Указание (см. рис. 8а). Используйте равенство отрезков касательных.

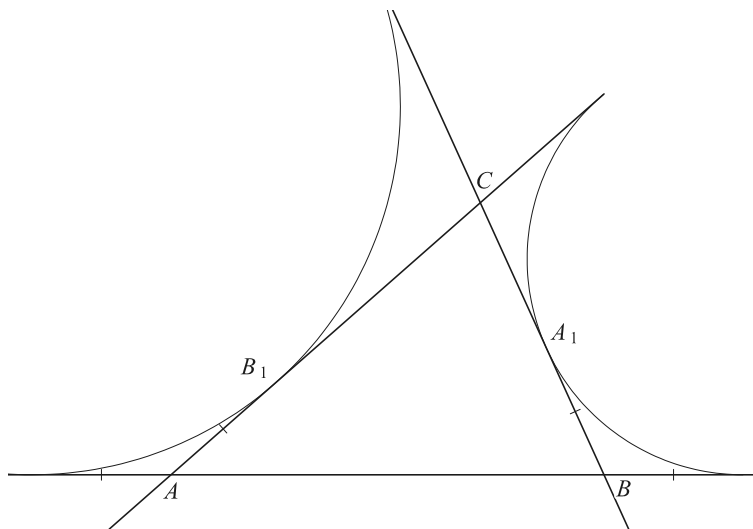


Рис. 8а

Попробуем переформулировать?

Обозначим треугольник, указанный в условии, через $A_1B_1C_1$, и пусть он является ортотреугольником треугольника ABC . Тогда указанные точки касания — основания перпендикуляров, опущенных из вершин A и B на соответствующие стороны ортотреугольника. Обозначив точки касания через A_2 и B_2 , получим: $A_1B_2 = B_1A_2$ (см. рис. 8б).

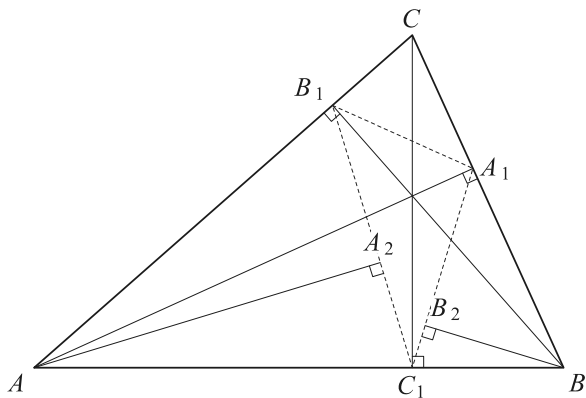


Рис. 8б

Задача не кажется совсем известной, но узнать можно.... Попробуем еще чуть-чуть переформулировать. Из задачи 1 нам известно, что перпендикуляры из вершин треугольника к соответствующим сторонам ортотреугольника пересекаются в одной точке (центре O описанной окружности треугольника).

Используя эти соображения, получим следующую «новую» задачу:

Задача 6. (ММО, 2019) В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что расстояние от точки A' до прямой BO равно расстоянию от точки B' до прямой AO .

Задача предлагалась в трех классах (9, 10 и 11).

Ну что ж, мы немного опоздали. Попробуем еще?

Упражнения для самостоятельного решения.

Попробуйте переформулировать следующие факты:

а) Факт 4.

б) Биссектрисы двух внутренних и одного внешнего угла неравностороннего треугольника пересекают прямые, содержащие противоположные стороны, в трех точках, лежащих на одной прямой.

в) Описанная окружность треугольника делит пополам отрезок, соединяющий центры вписанной и невписанной окружностей этого треугольника.

г) (Всероссийская олимпиада по геометрии, 2009, заочный тур) В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1 . Докажите, что H , O , C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

Алгоритмы подсчёта вариантов в комбинаторике

**В.В. Буланкина,
ФМШ 2007, город Москва
tirenadr@gmail.com**

Предисловие

Классическая комбинаторика является довольно востребованным предметом изучения, как в олимпиадной математике, так и для, например, освоения теории вероятностей. Если углубиться в предмет, то полезна она и в биологии, в популярном сегодня Machine learning'e и много где ещё. В данной статье речь пойдёт об одном из важных моментов, на который имеет смысл обратить внимание обучающегося, находящегося, скорее, в начале своего пути освоения классической комбинаторики. Однако мы поостережёмся называть конкретный возраст, класс или даже уровень знаний целевой аудитории, потому что на практике акцентировать внимание на данном моменте приходилось в группах различных возрастов и подготовки.¹

Также мы не будем уделять много внимания непосредственно азам классической комбинаторики, они изложены в достаточно большом количестве хорошей литературы.²

Алгоритмы подсчёта

Обычно изучение классической комбинаторики начинается с так называемых «задач про сервисы» — простейших примеров на правила сложения и умножения. После чего идёт «знакомство с факториалом» — перестановки, затем исключение повторяющихся вариантов путём деления на количество перестановок одинаковых эле-

¹Усвоить идею, изложенную в данном тексте полезно уже при изучении правил сложения и умножения, однако потом её стоит иногда повторять.

²Например, Н.Я. Виленкин «Комбинаторика» или И.В. Яковлев «Комбинаторика для олимпиадников».

ментов (факторизация), биномиальные коэффициенты (сочетания) и далее до полиномиальных коэффициентов и прочего.

Стандартные, похожие на разобранные учителем примеры, особенно на правила сложения и умножения, учащиеся любого возраста усваивают достаточно быстро. Однако потом возникают проблемы. При решении задач, отличающихся от стандартных, начинается «проверка учителя на прочность» — ученики подставляют имеющиеся в задаче числа в известные им формулы с различными арифметическими знаками и ждут, пока «очередной вариант прокатит». При этом, конечно, основная беда заключается вовсе не в страданиях учителя, а в том, что сами ученики воспринимают таким образом комбинаторику, как некоторый набор формул-приёмов, полученных «таинственным образом». Такое восприятие конечно же существенно усложняет решение любых комбинаторных задач, отличающихся от тех, с которыми дети уже работали.

В общем-то, в связи с этим, достаточно важно донести до ученика то, что существенными частями решения задачи на подсчёт количества вариантов являются (до какого-либо взаимодействия с числами задачи):

- понимание того, что именно эти варианты из себя представляют (как выглядит один конкретный вариант);
- некоторый алгоритм, которым эти варианты набираются (таким, что с его помощью каждый из нужных нам вариантов выбран ровно один раз).

Собственно, этот «алгоритм» потом и раскладывается на какие-то базовые составляющие («подзадачи»), которые известно как считать. В результате вся магия чаще всего сводится к уже известным правилам сложения и умножения и к делению на количество повторяющихся вариантов (факторизации). При этом прочие «приёмы» и формулы — решения самых стандартных «подзадач», возникающих естественным образом. Они не являются чем-то глобально новым, а просто сокращают решение. Например, биномиальный коэффициент C_n^k — решение задачи про количество способов выбрать k неупорядоченных элементов из n различных.

Можно сказать, что в этой задаче содержится «комбинаторный смысл» C_n^k . Поняв его, не придётся каждый раз решать аналогичную задачу и выводить формулу числа сочетаний заново.

Посмотрим на примеры задач. При разборе этих примеров с учениками, автор данной статьи обычно сначала даёт какое-то время на самостоятельное решение. В результате иногда весь разбор сводится к тому, что несколько детей рассказывают у доски свои решения одной и той же задачи, после чего происходит обсуждение того, почему все эти решения правильные и дают в результате один и тот же ответ.

Предложенная ниже схема решения «сначала только алгоритм, а потом все числа» полезна для тренировки. Конечно «в боевых условиях», освоившись, учащиеся обычно совмещают алгоритм и подсчёт.

Пример 1.³ *В зале стоят 2020 стульев в два ряда — по 1010 стульев в каждом, один ряд ровно за другим. В зал пришли 2020 человек различного роста. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы каждый человек, сидящий в первом ряду, был ниже человека, сидящего за ним?*

Решение. Для начала поймём как выглядит один из нужных нам вариантов рассадки. В данной задаче (как и во многих других) это достаточно удобно делать, подставив вместо чисел 2020 и 1010 что-нибудь маленькое. Если, например, стульев всего два, то вариант рассадки будет один — тот, кто выше, сядет на второй ряд, а тот, кто ниже, перед ним. Если стульев четыре (по два в каждом ряду), то пронумеруем людей так, что человек с номером 1 будет самым низким, а с номером 4 — самым высоким. Тогда, например, вариант, когда в первом ряду сидят 1 и 3, а во втором 2 над 1 и 4 над 3 нам подходит, а из вариантов, когда в первом ряду сидит человек с номером 4, не подходит ни один. После подобных экспериментов найдём алгоритм, которым мы будем набирать «удачные»

³В варианте для 6 человек задача была дана в Московской математической регате 2017/18 года.

варианты. Ниже приведено три варианта алгоритма с их дальнейшими подсчётами уже без каких-либо наводящих рассуждений, поскольку эти рассуждения на самом деле у каждого свои.

Алгоритм 1. 1) Возьмём самого высокого человека (с номером 2020), он может сидеть только в верхнем ряду. Выберем для него место среди стульев верхнего ряда. 2) Выберем из оставшихся людей того, кто сидит ровно под этим 2020м человеком (это может быть любой из оставшихся 2019 людей, поскольку все они ниже). 3) Заметим, что у нас осталось 2018 человек, упорядоченных по росту и 2018 стульев по 1009 в каждом из рядов. То есть, мы получили аналогичную задачу, но для меньших чисел. Тогда будем проводить выбор аналогично пунктам 1) и 2) до тех пор, пока люди и стулья не закончатся.

Теперь посчитаем общее количество способов, пользуясь нашим алгоритмом. 1) Выбрать самого высокого — один вариант, а место для него — одно из 1010 мест верхнего ряда, то есть, 1010 вариантов. 2) Выбрать того, кто сидит под ним — 2019 вариантов. Итого посадить пару с самым высоким (согласно правилу умножения) — $1010 \cdot 2019$ вариантов. 3) Применив аналогичные рассуждения еще 1009 раз, получим итоговую формулу:

$$(1010 \cdot 2019) \cdot (1009 \cdot 2017) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 1).$$

Алгоритм 2. 1) Выберем двух человек, которых мы посадим на первое место обоих рядов. Внутри пары они рассядутся однозначно, поэтому надо не забыть учесть тот факт, что порядок выбора этих двоих нам не важен. 2) Заполним так, выбирая пары сидящих один за другим, все места.

Подсчёт количества способов в этом случае. 1) Первого человека мы выберем 2020 способами, второго — 2019, но при этом мы посчитали каждый из способов выбрать «Васю и Петю» дважды — если первым выбрали Васю, а вторым Петю и наоборот. Поэтому

выбрать сидящих на первом месте — $\frac{2020 \cdot 2019}{2}$ способов.⁴ 2)

Применяя аналогичные рассуждения, получим итоговую формулу:

$$\frac{2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot \dots \cdot 1}{2^{1010}}.$$

Не сложно заметить, что если сократить все чётные числа числителя с двойками знаменателя, то ответ, полученный с помощью второго алгоритма, примет тот же вид, что и ответ, полученный ранее (что позволяет проверить равенство ответов, не производя умножение).

Алгоритм 3. 1) Рассадим всех людей как получится. Заметим, что каждую «хорошую рассадку» можно испортить, поменяв местами любую пару человек, сидящих один под другим. При этом две «плохие» рассадки, полученные из разных хороших, не совпадут и на каждую хорошую приходится одно и то же количество плохих. 2) Посчитаем количество плохих раскрасок, приходящихся на одну хорошую — каждую пару из 1010 можно либо поменять, либо нет. 3) Посчитаем количество хороших рассадок, как долю от общего количества.

Посчёт количества способов в этом случае. 1) Всего рассадок 2020! (на первое место — любого из 2020, на второе — любого из 2019 и т.д.). 2) Количество способов поменять/не поменять пару — 2^{1010} (так как всего 1010 пар), при этом из них только один вариант хороший. 3) Итоговая формула будет выглядеть так:

$$\frac{2020!}{2^{1010}},$$

что совпадает с ответом, полученным предыдущими двумя способами.

⁴Учащиеся, знакомые с биномиальными коэффициентами в этом месте могут сразу написать C_{2020}^2 и так далее, соответственно, итоговая формула будет произведением «цешек».

Алгоритмы, которые мы придумываем при решении комбинаторных задач, надо проверять на две вещи. Первая — что каждый из вариантов с помощью придуманного алгоритма можно получить. Вторая — что мы не получим с помощью нашего алгоритма один и тот же вариант несколько раз (или умеем убирать все такие повторы). Однако сейчас мы не будем подробно останавливаться на подобных проверках.

В следующем примере первый способ решения придуман учеником седьмого класса. Второй, впрочем, тоже. Во время разбора задачи ученик, придумавший первый способ, был весьма впечатлён решением второго ученика.

Пример 2. *Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (то есть, чтобы какое-то число встречалось на обеих костях).*

Решение. Сначала посмотрим как «доминошки» устроены. У нас есть 7 видов чисел от 0 до 6, на каждой кости встречается пара чисел. В том числе есть дубли — когда пара чисел на одной кости совпадает (например (0:0)), их всего 7. Заметим (это нам потом понадобится), что если зафиксировать конкретную цифру, то доминошек, её содержащих, тоже 7 вместе с дублем (все возможные цифры от 0 до 7 в паре с зафиксированной). Нам нужно выбрать пару костей, на которых есть совпадающие числа. Например (2:3) и (3:5) можно приложить друг к другу тройками.

Алгоритм 1. 0) Разделим наши варианты на два вида. В первом из них есть доминошка-дубль, а во втором нет. Потом сложим количества вариантов обоих видов. 1) Посчитаем количество вариантов с дублем. Для этого сначала 1.1) выберем дубль, а потом 1.2) выберем к нему пару из оставшихся, содержащих цифру с дубля, доминошек. 2) Отдельно посчитаем количество вариантов второго вида. То есть 2.1) выберем какую-нибудь доминошку из всех НЕ-дублей, затем 2.2) выберем к ней пару НЕ-дубль 2.3) при таком выборе у нас возникнут повторения, от которых нужно будет избавиться (например мы могли сначала в 2.1) выбрать доминошку

(2:3), а затем в 2.2) к ней (3:5) в пару, а могли в 2.1) выбрать (3:5), а в 2.2) (2:3)). 3) Сложим количество вариантов первого и второго видов.

Теперь посчитаем количество вариантов, согласно приведённому алгоритму. 1.1) Выбрать дубль мы можем 7 способами: от (0:0) до (6:6). 1.2) Для каждого из выбранных дублей осталось ещё по 6 вариантов не-дублей, содержащих подходящую цифру. Таким образом количество способов выбрать пару с дублем — $7 \cdot 6$. 2.1) Не-дублей у нас всего $28 - 7 = 21$ штука. Соответственно, 21 способ выбрать одну из них. 2.2) Вторую доминошку выбираем из тех не-дублей, у которых совпадает с первой выбранной одна из цифр. Таких доминошек осталось 10 (по 5 с каждой цифрой). Итого $10 \cdot 21$ способ. 2.3) При этом каждая пара посчитана дважды, поэтому на самом деле вариантов в два раза меньше, то есть $5 \cdot 21$. 3) Общее же количество вариантов равно

$$7 \cdot 6 + 5 \cdot 21 = 147.$$

Алгоритм 2. 1) Выбираем цифру, которой мы будем прикладывать доминошки друг к другу. 2) Выбираем две доминошки, которые эту цифру содержат.

Посчитаем количество вариантов согласно второму алгоритму. 1) Вариантов выбрать цифру у нас 7 (от 0 до 6). 2) Будем рассматривать только доминошки, содержащие выбранную цифру. Их 7 штук. Выбрать из них две можно $7 \cdot 6 : 2$ способами — сначала выбираем, первую, потом вторую, потом делим на количество повторов, возникающих из-за перестановки первой и второй доминошек местами. Итого количество вариантов равно: $7 \cdot 7 : 2 = 24.5$. Поскольку оба алгоритма дают нам одну и ту же величину, не удивительно, что в обоих случаях ответы совпали.

Если в первом примере приведённые алгоритмы просто разные, то во втором один из алгоритмов обеспечивает существенно более простой счёт, что довольно ценно, если задача сложная. Или, например, если речь идёт о задаче, которую нужно запрограммировать и важна скорость выполнения программы. С другой стороны, как говорится, «победителей не судят» и, если ученик пришёл к

правильному ответу с помощью не самого наглядного и простого в подсчётах алгоритма, то ничего страшного в этом нет.

Однако умение решать одну и ту же комбинаторную задачу с помощью разных алгоритмов набора вариантов, кроме хорошей практики и более глубокого понимания комбинаторики, может пригодиться ещё в одном достаточно важном виде задач. А именно, при доказательстве некоторых тождеств.

Доказательство тождеств комбинаторным способом заключается в том, что мы «придумываем задачу» по комбинаторике, которая при решении её двумя различными алгоритмами даёт сначала одну часть тождества при подсчёта, а затем — вторую. А так как считали мы по сути одно и то же количество вариантов, таким образом тождество доказывается.

Поскольку в данном тексте комбинаторное доказательство тождеств это «побочный продукт», которому на самом деле вполне можно посвятить отдельную статью, рассмотренный ниже пример мы сформулируем как задачу по комбинаторике. Именно в таком виде она чаще всего предлагается школьникам, потому что симпатична не как тождество, а сама по себе. Тем не менее, решив её с помощью двух алгоритмов, один из которых будет более простым и даст нам более красивую «свёрнутую» формулу, мы докажем не самое простое алгебраическое тождество.

Предупредим заранее, что для решения данного примера мы будем использовать формулу биномиального коэффициента

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — количество способов выбрать k неупорядочен-

ных предметов из n различных. Она, конечно, также сводится к правилу умножения, но мы уже не будем на это отвлекаться.

Пример 3. *На танцы пришли s юношей и s девушек. Сколькими способами можно из них выбрать компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?*

Решение. Сразу приведём два алгоритма набора вариантов.

Алгоритм 1. Отдельно посчитаем способы выбрать компанию из 2 человек (отдельно юношу, отдельно девушку), из 4 человек (двух

юношей и двух девушек), и так далее и, наконец из $2s$ человек. А потом сложим все эти варианты.

Алгоритм 2. Тут будем действовать более хитро. Заметим, что если мы возьмём произвольных s человек и среди них будет, к примеру, m юношей, то девушек будет, очевидно, $s - m$. В то же время среди тех, кого мы не выбрали, будет обратная ситуация: юношей будет $s - m$, а девушек будет $s - (s - m) = m$. Тогда будем набирать наши компании так: отметим случайных s человек, после чего в нашу компанию будут попадать юноши, которых мы отметили и девушки, которые остались неотмеченными. Таким образом, мы тоже переберём все возможные варианты.

Приступим к подсчётам. Если считать согласно первому алгоритму, то выбрать компанию из одного юноши и одной девушки, то это — $C_s^1 = s$ способов выбрать юношу и столько же девушек, итого $(C_s^1)^2$ способов. Аналогично для компании из четырёх человек $(C_s^2)^2$ способов и так далее.

Общая формула будет равна

$$(C_s^1)^2 + (C_s^2)^2 + \dots + (C_s^s)^2.$$

В то же время, согласно второму алгоритму, это же количество способов совпадает с количеством выбора s человек, то есть равно (C_{2s}^s) .

Таким образом, кроме непосредственно решения задачи, мы доказали, что

$$(C_s^1)^2 + (C_s^2)^2 + \dots + (C_s^s)^2 = (C_{2s}^s).$$

Ниже приведено несколько задач, на которых можно потренироваться придумывать различные алгоритмы набора вариантов. В том числе несколько задач, при решении которых возникают алгебраические тождества.

Примеры задач

Сначала несколько задач для тех, кто только познакомился с правилами сложения и умножения. Первую и вторую задачи интереснее давать вместе.

1. Том Сойер хочет покрасить забор из ста досок. Каждую доску он красит в белый или жёлтый цвет полностью, при этом соседние доски можно красить одним и тем же цветом. Сколько можно придумать разных раскрасок забора?

2. Теперь у Тома Сойера есть белая, жёлтая и зелёная краски. И по-прежнему забор из ста досок. Каждую доску он красит в один из цветов, но соседние доски красить одним и тем же цветом не хочет. Сколько можно придумать разных раскрасок забора в этом случае?

3. На окружности стоит 3 красных, 5 зелёных и 4 жёлтых точек.

а) Сколько отрезков с разноцветными концами можно провести между ними?

б) Сколько можно провести отрезков, концы которых будут одного цвета?

в) Сколько существует треугольников, с вершинами в трёх предложенных точках разных цветов?

Следующая порция задач посложнее. Они будут интересны и тем, кто уже знает, что такое биномиальные коэффициенты. Задача на выбор карт, на самом деле, можно придумать великое множество.

1. Сколько различных а) прямоугольников б) фигурок вида «Т» можно найти внутри квадрата $n \times n$? (Если прямоугольники одинаковых размеров, но по-разному расположены, они тоже считаются различными. Фигуркой вида «Т» является фигура толщиной в одну клеточку, но с произвольными длинами концов, не обязательно симметричная.)

2. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать а) 4 карты разных мастей и достоинств? б) 6 карт так, чтобы среди них были представители всех четырех мастей? в) 6 карт таких же, как в пункте б, но чтобы среди них была ровно одна дама.

3. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт а) есть ровно один туз? б) есть ровно два туза? в) нет ни одного туза? г) есть хотя бы один туз?

4. Есть 22 одноклассника разного роста. Они хотят построиться в ряд так, чтобы каждый из них (кроме последнего) был выше: а) хотя бы половины; б) хотя бы трети своих товарищей, стоящих справа от него. Сколькими способами они могут это сделать?

Наконец три несложные задачи на доказательство тождеств. Эти задачи интереснее давать в формулировке «докажите тождество комбинаторным способом», однако под некоторыми тождествами пунктом б) написан вариант задачи, с помощью которой эти тождества можно доказать. Давать одновременно и тождество и задачу, скорее, не рекомендуется. При желании, можно найти и более сложные задачи.

1. а) Докажите тождество: $C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}$;

б) Сколькими способами можно выбрать из r людей команду для участия в интеллектуальной игре и назначить игрокам роли, если известно, что в команде m человек и k из них должны участвовать в дополнительном туре?

2. а) Докажите тождество: $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$;

б) В классе n человек. Один из них, Вася, попросил учительницу выбрать из их класса m человек для участия в школьной постановке. Сколько вариантов у учительницы выбрать команду? А команду в которой есть Вася? А команду в которой нет Васи?

3. Докажите тождество $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \dots + C_n^k C_m^0$.

Эта задача очень похожа на разобранную в статье, поэтому мы не будем формулировать её аналог.

Занятие

Г.Г. Левитас,
г. Москва
gglevitas@gmail.com

План занятия

1. Неравенство Коши.
2. Задача о 12 монетах.
3. Понижение степени уравнения.
4. Задача-песенка.

1. Неравенство Коши

Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$$

равенство достигается лишь при условии равенства всех данных чисел.

Доказательство с помощью леммы (любил С.И. Шварцбурд, я в Интернете не нашел):

Если произведение n положительных чисел равно 1, то их сумма не меньше числа n :

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1 \Rightarrow a_1 + \dots + a_n \geq n$$

равенство достигается лишь при равенстве данных чисел.

Доказательство леммы по индукции.

1) База для $n = 2$ — сумма двух положительных взаимно обратных чисел.

2) Пусть $a_1 \cdot \dots \cdot a_k = 1 \Rightarrow a_1 + \dots + a_k \geq k$ и пусть $a_1 \cdot \dots \cdot a_{k+1} = 1$.

Если не все данные числа равны между собой, то среди них найдется хоть одно, большее 1, и хоть одно, меньшее 1.

Поставим их в этом порядке на два последних места:

$$a_k > 1, \quad a_{k+1} < 1.$$

Рассмотрим k положительных чисел $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \cdot a_{k+1}$, произведение которых равно 1. Из предположения $a_1 + \dots + a_k \cdot a_{k+1} \geq k$ имеем

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} &= a_1 + \dots + a_k a_{k+1} - a_k a_{k+1} + a_k + a_{k+1} > \\ &> k - a_k a_{k+1} + a_k + a_{k+1} > k + 1. \end{aligned}$$

так как

$$a_k + a_{k+1} - a_k a_{k+1} - 1 = (a_k - 1)(1 - a_{k+1}) > 0.$$

Пусть произведение данных n положительных чисел равно числу p . Разделив каждое из этих чисел на $\sqrt[n]{p}$, получим числа, удовлетворяющие лемме, откуда сразу следует неравенство Коши.

Доказательство Коши методом спуска (Полиа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, часть 1, Москва, 1956, стр. 76).

1. Доказывается по индукции неравенство Коши для $2n$ чисел.

2. Пусть чисел $k \neq 2n$. Тогда найдется такое натуральное число n , что $k < 2n$. Добавим к имеющимся k числам $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ несколько (а именно $2n - k$) их средних арифметических, то есть одинаковых чисел $\frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$. Всего получится 2^n чисел, к которым применимо доказанное неравенство Коши.

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_k + \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}(2^n - k)}{2^n} &\geq \\ &\geq \sqrt[2^n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_k \left(\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \right)^{2^n - k}}, \\ \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} &\geq \sqrt[2^n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_k \left(\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \right)^{2^n - k}}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{k} \right)^{2^n} \geq \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{k} \right)^{2^n - k},$$

$$\left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{k} \right)^k \geq \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k,$$

$$\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}{k} \geq \sqrt[k]{\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k}.$$

Вместо средних арифметических можно взять в качестве дополнительных членов средние геометрические данных k чисел.

Многие полезные следствия:

Обобщенное неравенство Бернулли:

$(1 + \alpha)^r > 1 + \alpha r$, где α — положительное число, r — рациональное число, большее 1.

При $m > n$

$$\begin{aligned} 1 + \alpha \frac{m}{n} < (1 + \alpha)^{\frac{m}{n}} &\Leftrightarrow \sqrt[m]{\left(1 + \alpha \frac{m}{n}\right)^n} < 1 + \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[m]{\left(1 + \alpha \frac{m}{n}\right)^n} &= \sqrt[m]{\left(1 + \alpha \frac{m}{n}\right)^n} \cdot 1^{m-n} < 1 + \alpha. \end{aligned}$$

Возрастание последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} &= \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot 1 < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Формула корня из положительного числа

Последовательность x_n , задаваемая соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right),$$

где k — натуральное число, большее 1, $a > 0$, $x_1 = 1$ сходится к числу $\sqrt[k]{a}$.

Сходимость по теореме Вейерштрасса.

Эта последовательность, начиная со второго ее члена, ограничена снизу и убывает:

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k} \geq \sqrt[k]{x_n^{k-1} \cdot \frac{a}{x_n^{k-1}}} = \sqrt[k]{a},$$

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k} \leq x_n \Leftrightarrow a \leq x_n^k.$$

В пределе получаем $\sqrt[k]{a}$.

Популярная задача:

Доказать, что $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$ при положительных a , b и c . Равенство достигается только при равенстве всех трех переменных.

2. Задача о 12 монетах.

Среди 12 монет есть только одна фальшивая. Как тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь найти эту монету, установив, легче она или тяжелее настоящей?

Интернет, Александр, 04. 06. 2010:

А, В, Г, Д, Е, И, К, Л, Н, О, Р, С.

ВОДА—НЕГР; СЛОГ—ВИРА; САНИ—ВЕКО.

24 возможных варианта. Как решать?

Первое взвешивание — по 4. А если не равны?

Основная трудность — второе взвешивание. Идея — обеспечить вторым взвешиванием выполнимость третьего, если во втором равенство!

Если в первом взвешивании нет равенства, а во втором есть, то надо оставить для третьего две или три монеты известного дефекта!

Например, 7 и 8. Остаются 1, 2, 3, 4, 5, 6. Взвешивать по три. Но без нахождения на одной чашке тройки монет одного дефекта!

Например, можно так: 1, 2, 5 и 3, 4, 6. Проанализируем.

(1)

$$1 + 2 + 3 + 4 > 5 + 6 + 7 + 8,$$

$$1 + 2 + 5 = 3 + 4 + 6.$$

Одна из 7, 8 более легкая.

(2)

$$1 + 2 + 3 + 4 > 5 + 6 + 7 + 8,$$

$$1 + 2 + 5 > 3 + 4 + 6.$$

Либо одна из 1, 2 более тяжелая, либо 6 — более легкая.

(3)

$$1 + 2 + 3 + 4 > 5 + 6 + 7 + 8,$$

$$1 + 2 + 5 < 3 + 4 + 6.$$

Либо одна из 3, 4 более тяжелая, либо 5 — более легкая.

Но тогда можно рассмотреть и вариант с 13 монетами. 13-я монета — допустимое усложнение третьего взвешивания (без выяснения, тяжелее ли она остальных монет).

3. Алгоритм.

Если у целого уравнения $f(x) = 0$ известен корень $x = a$, то можно понизить его степень на единицу подстановкой $x = y + a$.

Пример. $x^3 + x - 2 = 0$, $x_1 = 1$.

$$x = y + 1,$$

$$(y + 1)^3 + y + 1 - 2 = 0,$$

$$y^3 + 3y^2 + 4y = 0,$$

$$y(y^2 + 3y + 4) = 0,$$

$$y = x - 1,$$

$$(x-1)(x^2-2x+1+3x-3+4)=0,$$

$$(x-1)(x^2+x-2)=0.$$

4. Задача-песенка.

Доказать, что для любого натурального числа n либо сумма $n^3 + n$, либо разность $n^3 - n$ делится на 10.

Если n кончается на 2, То n^3 кончается на 8. А если n кончается на 8, То n^3 кончается на 2. И в случаях таких, И в случаях таких $n^3 + n$ окончится нулем, И в случаях таких, И в случаях таких $n^3 + n$ разделится на 10.	$n = \dots 2$ $n^2 = \dots 4$ $n^3 = \dots 8$ $n = \dots 8$ $n^2 = \dots 4$ $n^3 = \dots 2$ $n^3 + n = \dots 0$ $n^3 + n \div 10$
Если n кончается на 3, То n^3 кончается на 7. А если n кончается на 7, То n^3 кончается на 3.	$n = \dots 3$ $n^2 = \dots 9$ $n^3 = \dots 7$ $n = \dots 7$ $n^2 = \dots 9$ $n^3 = \dots 3$

И в случаях таких, И в случаях таких $n^3 + n$ окончится нулем,	$n^3 + n = \dots 0$
И в случаях таких, И в случаях таких $n^3 + n$ разделится на 10.	$n^3 + n \div 10$

Ну а другим-то Что ж не повезло? Но ведь не плюс — Плюс-минус в той задаче,	$n = \dots 0, \dots 1, \dots 5, \dots 6$		
Там если чем Кончается число,	$n^m = \dots 0, \dots 1, \dots 5, \dots 6$		
Тем же и куб, Ну и никак иначе.	<table> <tr> <td> $n = \dots 4$ $n^2 = \dots 6$ $n^3 = \dots 4$ </td><td> $n = \dots 9$ $n^2 = \dots 1$ $n^3 = \dots 9$ </td></tr> </table>	$n = \dots 4$ $n^2 = \dots 6$ $n^3 = \dots 4$	$n = \dots 9$ $n^2 = \dots 1$ $n^3 = \dots 9$
$n = \dots 4$ $n^2 = \dots 6$ $n^3 = \dots 4$	$n = \dots 9$ $n^2 = \dots 1$ $n^3 = \dots 9$		
И в случаях таких, И в случаях таких $n^3 - n$ окончится нулем,	$n^3 - n = \dots 0$		
И в случаях таких, И в случаях таких $n^3 - n$ разделится на 10.	$n^3 - n \div 10$		

Новые свойства автомедианных треугольников

В.А. Лецко,
г. Волгоград
val-etc@yandex.ru

Подбирая тему для самостоятельного исследования старшеклассников, автор пришел к некому обобщению понятия срединного треугольника.

Пусть на сторонах (или продолжениях сторон) AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки K , L и M соответственно таким образом, что выполнены два условия:

- $\overrightarrow{AK} = s\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = s\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = s\overrightarrow{CA}$, для некоторого s , отличного от 0 и 1;
- треугольник KLM подобен треугольнику ABC (при подходящем сопоставлении вершин).

Треугольники, обладающие двумя указанными свойствами, мы назвали подобно-вписанными в исходный.

Легко выяснить, что, если исходный треугольник равносторонний, любое допустимое s приводит к подобно-вписанному треугольнику. В то же время, у равнобедренного треугольника, отличного от равностороннего, единственным подобно-вписанным треугольником является срединный. С разносторонними треугольниками дело обстоит интереснее. У любого из них есть ровно три подобно-вписанных треугольника, для которых $0 < s < 1$. Кроме того, у разностороннего треугольника, как правило, есть еще один подобно-вписанный треугольник, вершины которого лежат на продолжениях сторон исходного треугольника. На рисунке 1 представлены подобно-вписанные треугольники треугольника ABC (мы переименовали вершины так, чтобы имена вершин, соответствующих друг другу при подобии, отличались только индексами).

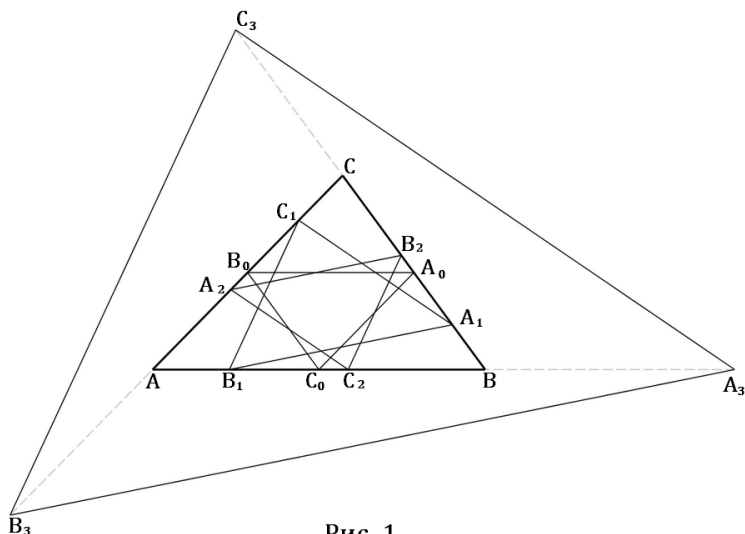


Рис. 1

Однако существует особый класс разносторонних треугольников, не имеющих внешнего подобно-вписанного треугольника. Такие треугольники называются автомедианными (это название обусловлено тем, что автомедианные треугольники и только они подобны треугольникам, составленным из их медиан). Еще одним критерием автомедианности треугольника является соотношение $a^2 + c^2 = 2b^2$, где b — средняя по длине сторона треугольника. Обоснование этого и некоторых других свойств автомедианных треугольников можно найти, например, в [1]. Все подобно-вписанные треугольники автомедианного треугольника представлены на рисунке 2. Отметим, что в случае автомедианности исходного треугольника (и только в этом случае) два подобно-вписанных треугольника центрально-симметричны. Вершины подобно-вписанных треугольников, отличных от срединного, делят стороны исходного треугольника в отношении 1:2 (2:1). С другими свойствами подобно-вписанных треугольников можно познакомиться в [2].

Уже обнаружив и доказав эти свойства, мы выяснили, что многие из них были выявлены пятью годами раньше (см. [3]). Поэтому мы решили поискать какие-либо другие, новые свойства автомеди-

анных треугольников. В частности, мы заинтересовались вопросом, обладают ли какими-нибудь дополнительными интересными свойствами и без того замечательные точки треугольника при условии, что этот треугольник автомедианный.

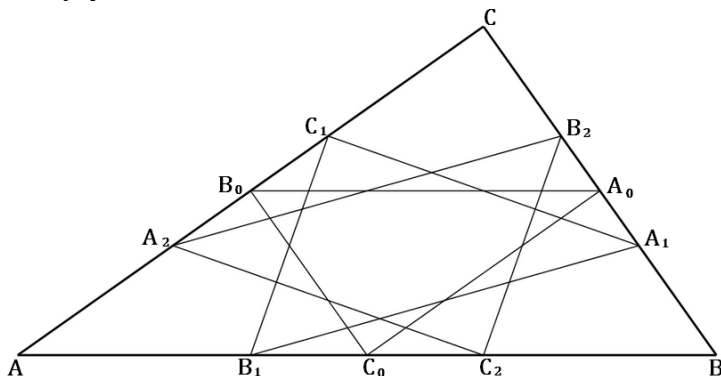


Рис. 2

Но как искать такие свойства? В настоящей статье мы опишем достаточно простой метод поиска. Его можно было бы назвать примитивным и даже тупым, если бы не его поразительно высокая эффективность, обусловленная использованием возможностей современных математических пакетов. В нашем случае исследование проводилось с помощью СКА *maple*.

В основу поиска положен компьютерный эксперимент. Мы задались двумя экспериментальными и одним контрольным треугольниками: ABC_1 , ABC_2 , ABC_0 . Мы использовали параметризацию всех треугольников с точностью до подобия, при которой большая сторона треугольника фиксирована на координатной плоскости (соответствующие вершины $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$), а третья вершина принадлежит области T , ограниченной первым квадрантом и дугой окружности $(x+1)^2 + y^2 = 4$ (в этом случае $BC \leq AC \leq AB$). В частности, мы взяли $C_1(\frac{1}{5}; \frac{2\sqrt{11}}{5})$, $C_2(\frac{2}{5}; \frac{\sqrt{11}}{5})$, $C_0(\frac{1}{5}; \frac{7}{5})$ так, что треугольники ABC_1 и ABC_2 автомедианные, а ABC_0 — нет.

Предварительная часть работы заключалась в составлении баз координат замечательных точек для трех выбранных треугольников. Мы ограничились рассмотрением точек, представленных в онлайн энциклопедии центров треугольников, ЕТС ([4]) под номерами 1–116, 125, 351 (последние две точки были добавлены на основании промежуточных результатов исследования). В дальнейшем мы будем придерживаться обозначений, принятых в этом источнике: каждый из центров треугольника обозначается буквой « X » с индексом, соответствующим его порядковому номеру в энциклопедии.

Большинство координат были получены переводом соответствующих трилинейных координат, представленных в ЕТС. Трилинейные координаты привязаны к треугольнику (обозначим его ABC) и представляют собой упорядоченную тройку чисел, определенных с точностью до ненулевого числового множителя. Если точка расположена внутри треугольника, в качестве трилинейных координат можно взять расстояния от этой точки до прямых, содержащих стороны BC , AC и AB соответственно. Если же точка лежит снаружи треугольника, то в качестве ее трилинейных координат можно взять ориентированные расстояния до прямых, содержащих стороны: расстояние берется со знаком плюс, если точка лежит по одну сторону с вершиной, не принадлежащей данной стороне, и со знаком минус в противном случае. Естественно, что для точки, лежащей на прямой, содержащей сторону, соответствующая координата равна нулю. В частности, трилинейные координаты вершин A , B и C равны $(1: 0: 0)$, $(0: 1: 0)$ и $(0: 0: 1)$ соответственно (напомним, что трилинейные координаты определены с точностью до ненулевого числового множителя).

Для автоматизации процесса перевода нами были созданы специальные `maple`-функции. Для некоторых точек автоматический перевод технически сложен или даже невозможен (деление на 0). Для таких точек мы искали декартовы координаты вручную, следуя их определению.

Следующая часть — собственно эксперимент по выявлению свойств автомедианных треугольников. Мы подразделили искомые свойства на четыре класса: свойства, характеризующие одну замечательную точку; свойства, характеризующие взаимное расположение пар замечательных точек; троек замечательных точек; четверок замечательных точек.

Каждую из точек $X_1 - X_{116}$, X_{125} , X_{351} мы проверили на принадлежность сторонам треугольника и вписанной окружности. Почему проверялась принадлежность именно этим объектам, объясним ниже. Прямые, проходящие через каждую пару точек из того же списка, мы проверили на параллельность и перпендикулярность каждой из сторон. Каждую тройку мы проверили на коллинеарность (принадлежность одной прямой), а каждый треугольник с вершинами в данных точках на наличие равных сторон и прямого угла. Для четверок точек выполнялась проверка на принадлежность одной окружности. Кроме того, точки в каждой четверке всеми возможными способами разбивались на пары, а прямые, определяемые этими парами, проверялись на параллельность и перпендикулярность.

Для проверяемых точек выполняется немало свойств, справедливых для любого треугольника. Например, целых 15 центров расположены на прямой Эйлера, сразу 16 замечательных точек лежат на описанной окружности и так далее. Поэтому для фиксации какого-либо свойства автомедианных треугольников требовалось, чтобы оно выполнялось для обоих экспериментальных треугольников, но не присутствовало у контрольного. Отметим, что одного экспериментального треугольника недостаточно. Например, если использовать только первый, можно обнаружить принадлежность X_{22} (эксетерской точки) прямой AB . А X_{66} (как и положено точке, изогонально сопряженной точке, принадлежащей стороне треугольника) и вовсе совпадает с C_1 . Но это свойство конкретного треугольника ABC_1 , а не всех автомедианных треугольников.

Поясним, почему мы остановились на вышеприведенном списке проверяемых свойств. В частности, ответим на вопрос, почему проверялась принадлежность замечательных точек сторонам, но не

проверялось совпадение их с вершинами. Все просто – совпадение какой-то точки с вершиной означает принадлежность ее сразу двум сторонам и не ускользнет от нашего внимания. По тем же причинам мы проверяли принадлежность исследуемых точек вписанной окружности, но не проверяли их на принадлежность к описанной окружности или, например, окружности 9 точек. Среди исследуемых замечательных точек достаточное количество принадлежит этим объектам. Поэтому наличие точки, которая в общем случае не обязана принадлежать, скажем, описанной окружности, но принадлежит ей в случае автомедианного треугольника, не останется незамеченным. Аналогично, мы отдельно не анализировали четверки точек на принадлежность четырехугольникам специального вида, но это не помешало нам «выловить» несколько параллелограммов и прямоугольников. Наконец, разумеется, наш выбор свойств субъективен. Например, мы не проверяли принадлежность замечательных точек внеписанным окружностям или расположение их на каких-либо кривых второго порядка (за исключением окружностей). В последнем случае нам пришлось бы рассматривать шестерки точек, поскольку любые пять точек лежат на некоторой кривой второго порядка.

На первый взгляд, кажется, база из 118 точек не столь велика и посильна даже для ручного перебора. Но 118 точек образуют более семи с половиной миллионов четверок, для каждой из которых по три раза выполнялась проверка на наличие параллельных и перпендикулярных прямых, а также более громоздкая в вычислительном плане проверка на принадлежность одной окружности. Причем все эти проверки проводились для трех треугольников, что дает сотни миллионов обращений к простейшим процедурам (таким как вычисление определителя второго порядка или скалярного произведения). Очевидно, что такие объемы вычислений посильны только компьютеру.

Будучи системой компьютерной алгебры, *maple* по умолчанию проводит вычисления с абсолютной точностью. Но, учитывая объем вычислений и громоздкость точного выражения координат

большинства рассматриваемых точек, мы выполняли вычисления приближенно, с точностью до 18 значащих цифр. При этом выводы о совпадении итоговых данных делались, когда совпадали первые 13 знаков.

Но позвольте, какие выводы?! Да, один контрпример достаточен для опровержения предположения, что свойство выполняется для любых треугольников. Но два подтверждающих примера ничего не доказывают! Тем более что и они получены в результате приближенных вычислений.

Конечно, не доказывают! Но мы и не ставили такой цели! Целью эксперимента было выяснение того, что же следует доказывать. Само доказательство, как и положено, велось в общем виде. Но вновь с использованием *maple*.

Но, прежде чем приступить к формулировке и доказательству обнаруженных свойств, кратко опишем замечательные точки, участвующие в формулировках этих свойств, и соотношения между ними, справедливые для любого разностороннего треугольника (все излагаемые факты есть в [4]).

X_2 , X_3 , X_4 — это наши добрые знакомые: центроид, центр описанной окружности и ортоцентр. Эти точки лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом X_2 лежит между X_3 и X_4 и вдвое ближе к X_3 чем к X_4 .

На прямой Эйлера лежит и точка X_5 — центр окружности 9 точек (она же — окружность Эйлера, она же — окружность Фейербаха). Эта окружность проходит через основания всех медиан и высот треугольника, а также середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами исходного треугольника. Замечательно, что эта окружность касается вписанной и трех внеписанных окружностей.

Для определения X_6 (и еще нескольких центров) нам потребуется изогональное сопряжение. Пусть точка M отлична от вершин треугольника ABC . Можно доказать, что три прямых, являющихся отражениями прямых AM , BM и CM относительно соответствующих биссектрис, пересекаются в одной точке M' . Эта точка и есть точка, изогонально сопряженная M . В свою очередь, M изо-

гонально сопряжена M' . Более подробно про изогональное сопряжение можно почитать, например, в [5].

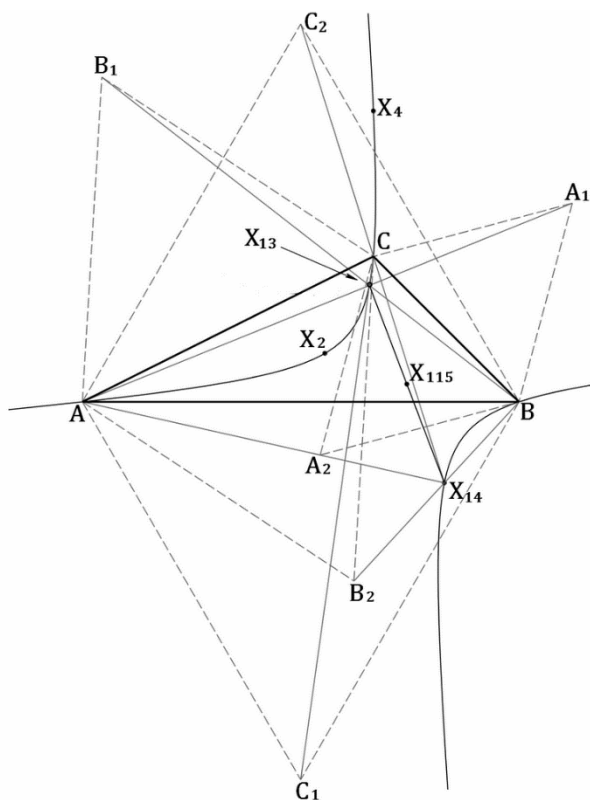


Рис.3

X_6 — это точка, изогонально сопряженная центроиду. Она называется точкой Лемуана и обладает целым рядом красивых альтернативных описаний. Сумма квадратов расстояний от сторон треугольника до точки Лемуана меньше аналогичной суммы для других точек плоскости. Точка Лемуана является центроидом треугольника, образованного проекциями точки Лемуана на стороны, и иных точек с подобным свойством не существует. Расстояния от точки Лемуана до сторон треугольника пропорциональны длинам сторон. Точка Лемуана является точкой пересечения прямых, со-

единяющих середины сторон треугольника с серединами соответствующих им высот. Точка Лемуана есть точка пересечения прямых, соединяющих соответствующие вершины исходного и тангенциального (его стороны — касательные к описанной окружности в вершинах исходного треугольника) треугольников. И это лишь малая толика свойств точки Лемуана. (Точка X_{69} на рисунке 6 является точкой Лемуана по отношению к треугольнику $A'B'C'$.)

X_{13} — 1-я изогональная точка. Она является точкой пересечения трех прямых, соединяющих вершины треугольника с вершинами равносторонних треугольников, построенных вовне на противоположных сторонах. Кроме того, если больший угол треугольника меньше 120° , то сумма расстояний от вершин треугольника до точки X_{13} меньше, чем до любых других точек плоскости. В этом качестве X_{13} называется точкой Ферма. При том же ограничении на больший угол X_{13} является еще и точкой Торичелли, то есть точкой, из которой все три стороны треугольника видны под одинаковыми углами.

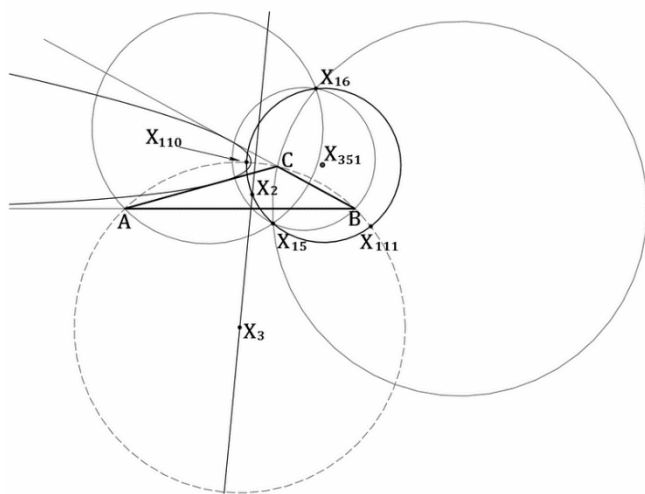


Рис. 4

X_{14} – 2-я изогональная точка. Она строится так же, как и 1-я, с той разницей, что правильные треугольники на сторонах строятся вовнутрь. X_{13} и X_{14} являются диаметрными точками гиперболы Киперта, то есть, гиперболы, на которой лежат вершины, центроид и ортоцентр. Середина отрезка $X_{13}X_{14}$ является центром гиперболы Киперта и обозначается X_{115} (см. рис. 3). Отметим, что X_{115} лежит также на окружности 9 точек.

Прежде чем описывать следующие замечательные точки, напомним, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до концов данного отрезка есть величина постоянная, является окружность (в частном случае, когда отношение равно 1, она вырождается в срединный перпендикуляр), называемая окружностью Аполлония. Окружность Аполлония к стороне AB треугольника ABC , проходящая через вершину C , очевидно проходит через основание биссектрисы CC_1 и точку пересечения C_2 биссектрисы внешнего угла с продолжением стороны AB и опирается на отрезок C_1C_2 как на диаметр. Окружности Аполлония к каждой из сторон треугольника, проходящие через вершины, не принадлежащие данной стороне, пересекаются в двух точках X_{15} и X_{16} , называемых точками Аполлония или 1-й и 2-й изодинамическими точками. Причем первой (X_{15}) считается та из них, для которой прямая $X_{13}X_{15}$ параллельна прямой Эйлера (для второй точки прямая $X_{14}X_{16}$ параллельна прямой Эйлера). Педальный треугольник точки X_{15} является равносторонним. Обе изодинамические точки лежат на прямой X_3X_6 .

Окружность, проходящая через точки Аполлония и центроид, называется окружностью Парри (на рисунке 4 она ярче окружностей Аполлония и описанной окружности). X_{351} — центр окружности Парри. Одна из точек пересечения окружности Парри с описанной окружностью (X_{110}) является фокусом параболы Киперта. Эта парабола касается стороны и продолжений двух других сторон исходного треугольника и имеет в качестве директрисы прямую

Эйлера. Вторая точка пересечения окружности Парри и описанной окружности (X_{111}) тоже носит имя Парри.

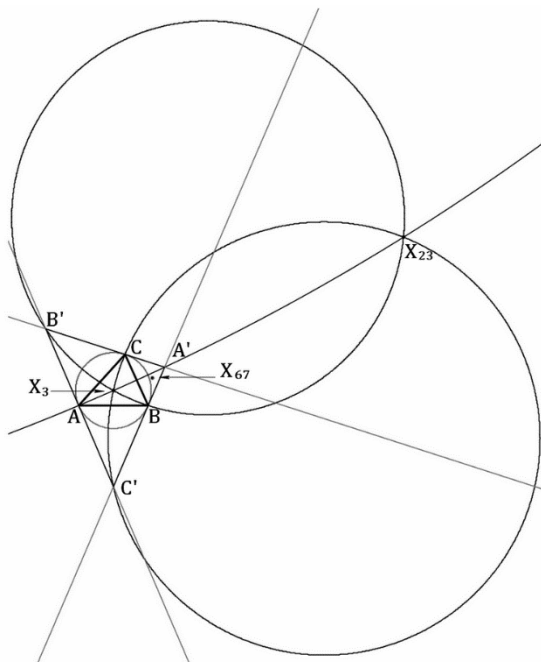


Рис. 5

Пусть $A'B'C'$ — тангенциальный треугольник треугольника ABC . Три окружности, проходящие через тройки точек (A, A', X_3) , (B, B', X_3) и (C, C', X_3) (на рисунке 5 попала лишь дуга первой из этих окружностей), пересекаются в двух точках. Одной из них, естественно, является X_3 , а вторая обозначается X_{23} и называется *очень далекой точкой (Far-out point)*. Она лежит на окружности Парри. X_{67} — точка, изогонально сопряженная X_{23} .

Теперь пусть $A'B'C'$ — антидополнительный треугольник к треугольнику ABC (то есть ABC является срединным треугольником для $A'B'C'$). Точка Лемуана антидополнительного треугольника по отношению к ABC является точкой X_{69} (рис. 6).

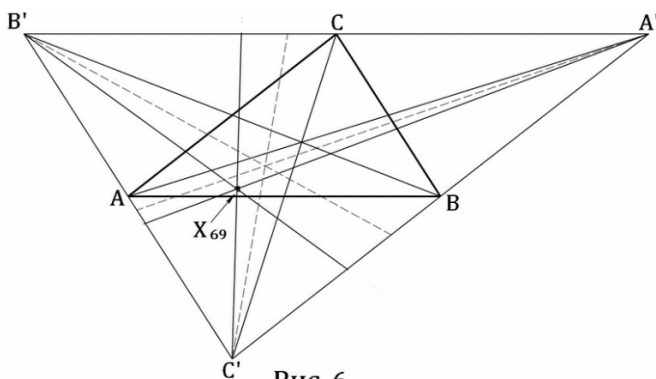


Рис. 6

X_{74} — точка, изогонально сопряженная бесконечно удаленной точке прямой Эйлера. Для ее построения нужно провести через вершины исходного треугольника прямые, параллельные прямой Эйлера. Отражения этих прямых от биссектрис пересекутся в одной точке, лежащей на описанной окружности. Это и есть X_{74} (рис. 7).

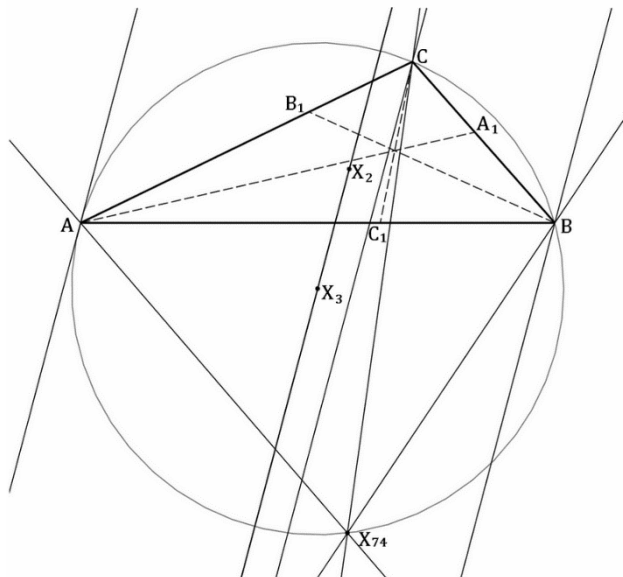


Рис. 7

Отметим, что X_3 является серединой отрезка $X_{74}X_{110}$. Таким образом, точки X_{74} и X_{110} диаметрально противоположны на описанной окружности.

Опишем еще одну пару замечательных точек, служащих концами одного из диаметров описанной окружности. Одно из определений точки Штейнера (X_{99}) таково. На отрезке, соединяющем центр описанной окружности (X_3) с точкой Лемуана (X_6), как на диаметре построим окружность (см. рис. 8). Она называется окружностью Брокара. Пусть A_1 — точка пересечения окружности Брокара и перпендикуляра к BC , опущенного из X_3 . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Треугольник $A_1B_1C_1$ тоже носит имя Брокара.

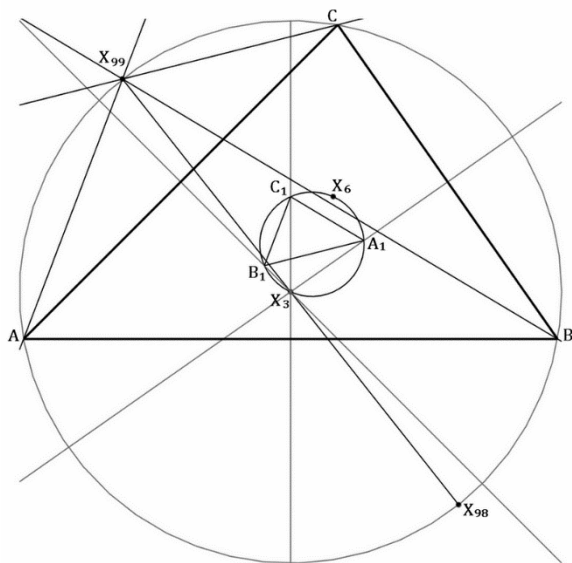


Рис. 8

Через вершины исходного треугольника проведем прямые, параллельные соответствующим сторонам треугольника Брокара. Эти три прямые пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности. Это и есть X_{99} . X_{98} можно определить аналогично, с той разницей, что на последнем этапе через вершины исходного

треугольника нужно проводить прямые не параллельные, а перпендикулярные сторонам треугольника Брокера. На пересечении этих трех прямых и описанной окружности лежит точка, диаметрально противоположная точке Штейнера. Это X_{98} — точка Тарри (здесь нет опечатки: точки Парри и Тарри — две разные замечательные точки).

Поскольку отрезки $X_{74}X_{110}$ и $X_{98}X_{99}$ — два диаметра одной и той же окружности, четырехугольник $X_{74}X_{98}X_{110}X_{99}$ является прямоугольником с центром в X_3 .

Рассмотрим еще одну кривую второго порядка, связанную с произвольным разносторонним треугольником — гиперболу Ержабека. Подобно гиперболу Киперта, она проходит через вершины и ортоцентр (рис. 9). Еще одной точкой, определяющей данную гиперболу, является центр описанной окружности.

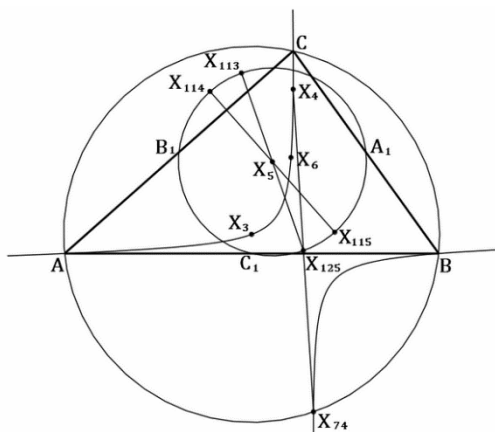


Рис. 9

Кроме перечисленных пяти точек, определяющих гиперболу Ержабека, на ней лежат еще несколько центров треугольника. Например, точка Лемуана. Центр самой гиперболы Ержабека (X_{125}) является серединой отрезка X_4X_{74} . Таким образом, X_{74} является четвертой (наряду с вершинами исходного треугольника) точкой пересечения описанной окружности и гиперболы Ержабека. Точка X_{125} лежит еще и на окружности 9 точек, а диаметрально противоположная ей точка

на этой окружности, согласно ЕТС, обозначается X_{113} . Еще одной парой диаметрально противоположных точек окружности Фейербаха являются X_{115} (центр гиперболы Киперта), и точка, обозначенная в ЕТС как X_{114} . Таким образом, в любом разностороннем треугольнике четыре замечательных точки X_{113} , X_{114} , X_{125} , X_{115} являются вершинами прямоугольника с центром в X_5 . Заметим, что этот и предыдущий прямоугольники переходят друг в друга при гомотетии с центром в X_2 , переводящей описанную окружность в окружность 9 точек. Далее, прямая X_3X_{67} параллельна прямым $X_{74}X_{99}$, $X_{98}X_{110}$ и лежит ровно посередине между ними. Таким образом, имеются две четверки прямых: $X_{74}X_{99}$, X_3X_{67} , $X_{98}X_{110}$ (на ней лежат также точки X_2 , X_{114} , X_{125}), $X_{13}X_{14}$ (на ней лежат также точки X_6 , X_{113} , X_{115}); $X_{113}X_{114}$, $X_{99}X_{110}$, $X_{115}X_{125}$, $X_{74}X_{98}$. Прямые каждой из четверок параллельны между собой, а прямые из разных четверок попарно перпендикулярны. Заметим также, что для любого треугольника X_{114} — середина отрезка X_4X_{99} .

Приступим к изложению особенностей взаимного расположения замечательных точек, справедливых для автомедианных треугольников (как мы увидим, многие из них справедливы исключительно для автомедианных треугольников). Очевидно, что в случае равносильного треугольника каждый из его центров либо не определен, либо совпадает с центром симметрии. Поэтому мы будем рассматривать треугольники, отличные от равносильного.

Следуя изложенной выше программе, мы сначала обнаружили, а затем доказали следующие факты, равносильные автомедианности исходного треугольника.

1. Окружность Аполлония для стороны AC и вершины B , проходит через центроид. Это условие, очевидно, равносильно следующим: эта окружность совпадает с окружностью Парри; точка Парри (X_{111}) совпадает с вершиной B .

2. Центр окружности Парри (X_{351}) лежит на продолжении стороны AC за точку C .

3. Точка Штейнера (X_{99}) совпадает с точкой B_2 , в которой продолжение медианы BB_1 за B_1 пересекает описанную окружность.
4. Медиана BB_1 перпендикулярна прямой Эйлера.
5. Центроид (X_2) — середина отрезка BB_2 .
6. Середина AC (B_1) — середина отрезка X_2B_2 .
7. Центр гиперболы Киперта (X_{115}) — середина отрезка BX_2 .
8. Прямая, проходящая через центроид и точку Лемуана (X_2X_6), перпендикулярна высоте из вершины B .
9. Прямые X_2X_6 и $X_{13}X_{14}$ перпендикулярны.
10. Прямые $X_{67}X_{111}$ и X_4X_{111} перпендикулярны.

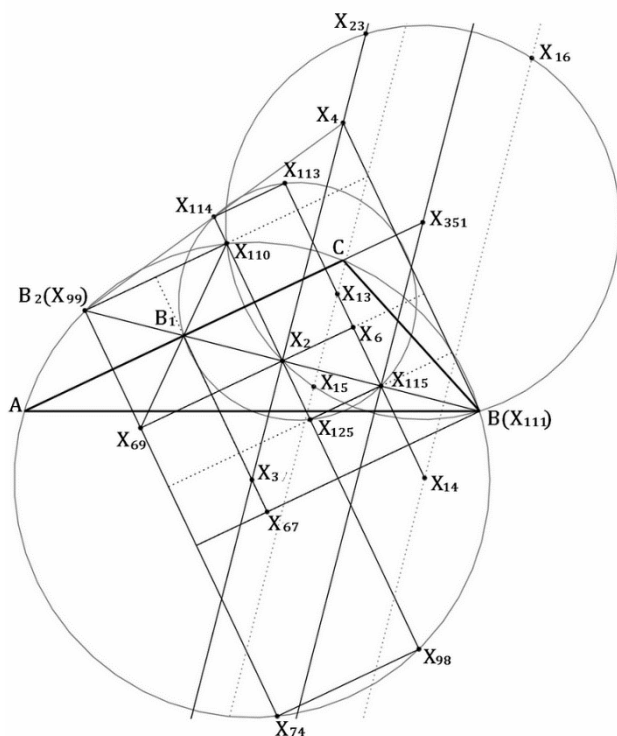


Рис. 10

Временно прервем перечисление критериев, чтобы обсудить некоторые сопутствующие моменты.

Критерии 4–6 не новы (см., например, [1]). Из них следует, что точки X_{115} , X_2 и B_1 делят отрезок BB_2 на 4 равные части. Комбинируя критерии из приведенного списка и учитывая изложенные выше факты, справедливые для любого треугольника, а также очевидную перпендикулярность AC и BX_4 , получаем, что две пятерки прямых ($X_{74}X_{99}$, X_3X_{67} , $X_{98}X_{110}$, $X_{13}X_{14}$, X_4X_{111}) и ($X_{99}X_{110}$, AC , X_2X_6 , $X_{115}X_{125}$, $X_{67}X_{111}$) для автомедианного треугольника образуют равномерную прямоугольную сетку (рис. 10).

Еще две прямые $X_{113}X_{114}$ и $X_{74}X_{98}$, как было отмечено раньше, параллельны прямым второго семейства.

Многие прямые указанных семейств пересекаются в рассматриваемых точках. Это позволяет нам, в дополнение к двум упомянутым ранее, указать для автомедианных треугольников еще несколько прямоугольников с вершинами в замечательных точках. Так, прямоугольники $X_2X_{69}X_{99}X_{110}$ и $X_2X_{69}X_{74}X_{98}$ при гомотеции с центром в X_2 и коэффициентом $-\frac{1}{2}$ перейдут соответственно в прямоугольники $X_2X_6X_{115}X_{125}$ и $X_2X_6X_{113}X_{114}$ (в дальнейшем мы увидим, что это не последние прямоугольники с вершиной в X_2). Отметим, что центром $X_2X_{69}X_{99}X_{110}$ является середина стороны AC .

На рисунке 10 можно обнаружить и другие закономерности. Например, треугольники $X_2X_{99}X_{114}$ и $X_2X_4X_{114}$ являются равнобедренными, поскольку X_2X_{114} — медиана прямоугольного треугольника.

Продолжим перечень утверждений, равносильных автомедианности исходного треугольника.

11. Прямая, проходящая через центры гиперболы Киперта (X_{115}) и окружности Парри (X_{351}), параллельна прямой Эйлера (а значит, и прямым $X_{13}X_{15}$ и $X_{14}X_{16}$).

12. Первая и вторая изодинамические точки (X_{15} и X_{16}) диаметрально противоположны на окружности Парри.

13. Точка Парри (X_{111}) диаметрально противоположна Far-out point (X_{23}) на окружности Парри.

14. Прямые X_2X_{113} и X_2X_{14} перпендикулярны.

15. Прямые $X_{13}X_{111}$ и $X_{14}X_{111}$ перпендикулярны.

16. Прямые X_2X_{13} и $X_{13}X_{111}$ перпендикулярны.

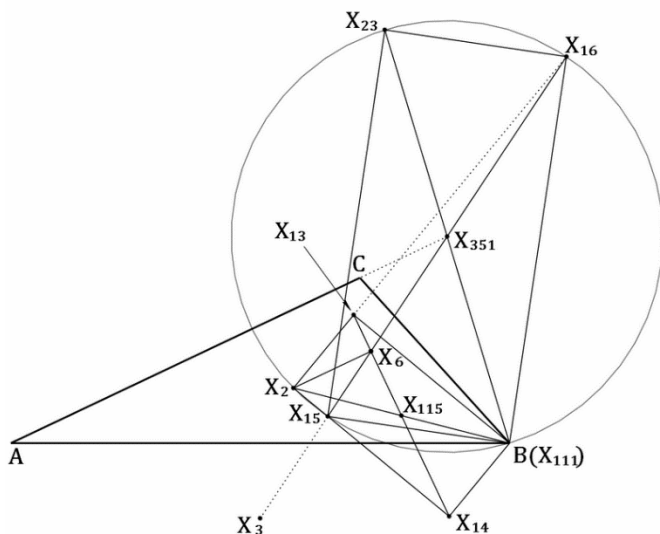


Рис. 11

Из критериев 12-16 следует, что еще две четверки замечательных точек автомедианного треугольника являются вершинами прямоугольников. И если прямоугольники с вершиной X_2 , представленные на рисунке 10, без предположения об автомедианности исходного треугольника являются прямоугольными трапециями, то у прямоугольников $X_2X_{13}X_{111}X_{14}$ и $X_{111}X_{15}X_{23}X_{16}$ с рисунка 11 в общем случае нет ни прямых углов, ни параллельных сторон. Зато для любого исходного треугольника справедливо соотношение

$\frac{|X_2X_{13}|}{|X_2X_{14}|} = \frac{|X_{15}X_{111}|}{|X_{16}X_{111}|}$, откуда следует, что прямоугольники на рисунке 11 подобны. Продолжая тему подобия, заметим, что, согласно критерию 9, для автомедианного треугольника X_2X_6 является высотой прямоугольного треугольника $X_2X_{13}X_{14}$ (X_6 лежит на прямой $X_{13}X_{14}$ для любого треугольника), что дает массу подобных треугольников на рисунке 11.

На рисунках 12 и 13 представлены еще несколько соотношений, каждое из которых равносильно автомедианности исходного треугольника.

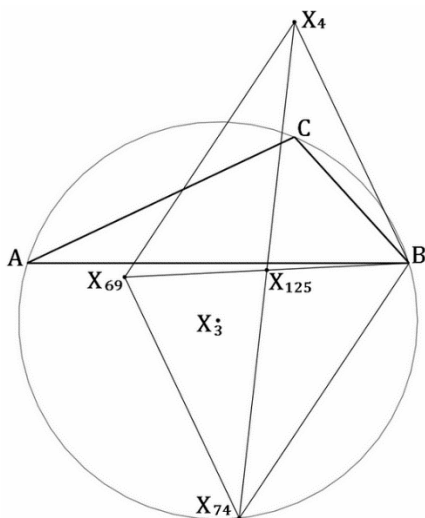


Рис. 12

17. Центр гиперболы Ержабека (X_{125}) является серединой отрезка $X_{69}X_{111}$. С учетом того, что X_{125} — середина X_4X_{74} , получаем, что $X_4X_{69}X_{74}X_{111}$ — параллелограмм (рис. 12).

18. Центр окружности 9 точек (X_5) равноудален от X_{67} , и точки Штейнера (X_{99}).

19. Центр окружности 9 точек (X_5) равноудален от центроида (X_2) и точки Лемуана (X_6).

$$20. \frac{|X_2 X_5|}{|X_2 X_6|} = \frac{|X_{99} X_5|}{|X_{99} X_{67}|}.$$

Из соотношений пунктов 18, 19 и 20 следует, что треугольники $X_2 X_5 X_6$ и $X_{99} X_5 X_{67}$ подобны (рис. 13).

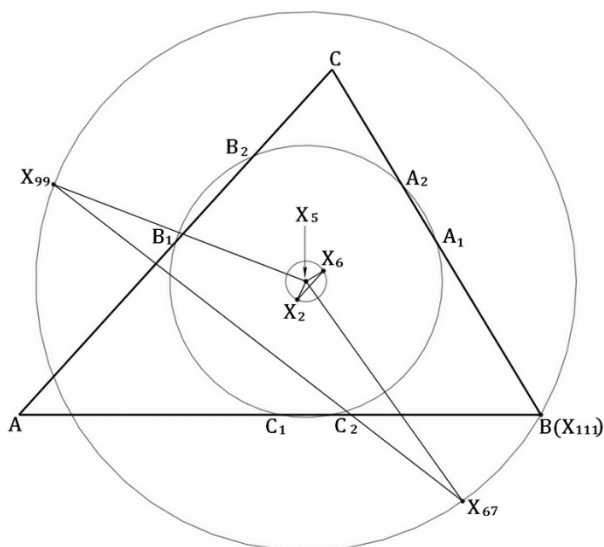


Рис. 13

Каждое из приведенных 20 условий необходимо и достаточно для автомедианности треугольника. Но нами выявлены и некоторые свойства автомедианных треугольников, которые могут быть справедливы и для некоторых треугольников, не являющихся автомедианными. Как правило, в формулировке этих свойств фигурируют не только центры треугольника, но и его вершины, стороны и т. д. Например, прямая, проходящая через центры гипербол Киперта и Ержабека, параллельна стороне AC тогда и только тогда, когда исходный треугольник автомедианный или равнобедренный.

Еще один пример: треугольник с вершинами в 1-й и 2-й изогональных точках (X_{13} и X_{14}) и в точке B является прямоугольным тогда и только тогда, когда исходный треугольник автомедианный или угол при вершине B равен 60° .

Приступим к доказательствам вышеприведенных свойств. Начнем с последнего. Действуя по определению изогональных точек, найдем их координаты в нашей параметризации, где $(x; y)$ — координаты вершины C .

$$X_{13} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{xy + \sqrt{3}x}{x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{-3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3}{x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3} \right)$$

$$X_{14} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{-xy + \sqrt{3}x}{x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3}; \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}y - 3}{x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3} \right)$$

Вычитая по 1 из первых координат, найдем координаты векторов $\overrightarrow{BX_{13}}$ и $\overrightarrow{BX_{14}}$. Скалярное произведение этих векторов равно

$$\frac{2}{3} \frac{(x^2 + y^2 + 6x - 3)(-6x^2 + y^2 + 6x - 3)}{(x^2 + y^2 + 3)^2 - 12y^2}$$

Легко убедиться, что знаменатель этого выражения не обращается в 0 нигде в области T (напомним, что она ограничена положительными полуосями координат и дугой окружности $(x+1)^2 + y^2 = 4$), за исключением точки $D(0; \sqrt{3})$, соответствующей равносторонним треугольникам. Обращение в 0 первой скобки числителя означает, что треугольник автомедианный. Второй множитель числителя разлагается на линейные множители:

$$-6x^2 + y^2 + 6x - 3 = \frac{1}{3}(-2x + \sqrt{3}y + 3)(3x + \sqrt{3}y - 3)$$

Прямая, соответствующая первому множителю, не имеет общих точек с областью T (она проходит через точку B , лежащую на границе, но не принадлежащую области T). Обращение в ноль второго множителя имеет место для точек C , соответствующих треугольникам с углом при вершине B , равным 60° .

Найдем необходимые и достаточные условия того, что центроид лежит на второй окружности Аполлония (1-й пункт списка).

По формулам деления отрезка в данном отношении найдем координаты точек B_1 и B_0 , делящих AC в отношении $2:a$ внутренним и внешним образом

$$B_1 \left(\frac{2x - \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}}{2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}}; \frac{2y}{2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}} \right)$$

$$B_0 \left(\frac{2x + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}}{2 - \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}}; \frac{2y}{2 - \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}} \right)$$

Середина отрезка B_1B_0 — центр второй окружности Аполлония, четверть квадрата расстояния — квадрат ее радиуса. Вычитая эту величину из квадрата расстояния от $X_2 \left(\frac{x}{3}; \frac{y}{3} \right)$ до центра, по-

сле упрощений получим $\frac{1}{9}(x^2 + y^2 + 6x - 3)$. Таким образом, центроид лежит на второй окружности Аполлония тогда и только тогда, когда исходный треугольник является автомедианным.

Мы не будем приводить доказательства остальных утверждений, поскольку они проводятся совершенно аналогично. Правда, координаты некоторых из рассматриваемых центров весьма громоздки. Поэтому соответствующие преобразования мы вели с помощью *maple*. Разумеется, на этот раз все вычисления велись с абсолютной точностью.

Ситуация, когда итоговое выражение, равенство которого нулю равносильно выполнению проверяемого свойства, с точностью до числового множителя совпадает с $x^2 + y^2 + 6x - 3$ достаточно редка. Как правило, в этом выражении присутствуют и другие множители, зависящие от координат вершины C . Но во многих случаях эти множители не обращаются в 0 в точках области T , отличных от D . Во всех этих случаях проверяемое свойство равносильно автомедианности исходного треугольника. В остальных случаях со-

ответствующее свойство является лишь следствием автомедианности. Например, равенство $|BX_5| = |X_{67}X_5|$ справедливо не только для автомедианных треугольников (дуга DE на рис. 14), но и для треугольников, у которых вершина C лежит на кривой $2x^3 + 2xy^2 + x^2 + y^2 = 3$ (пунктирная линия на рис. 14). В то же время, равенство $|X_{111}X_5| = |X_{67}X_5|$ (а в автомедианных треугольниках, как мы знаем, точки B и X_{111} совпадают) равносильно автомедианности треугольника.

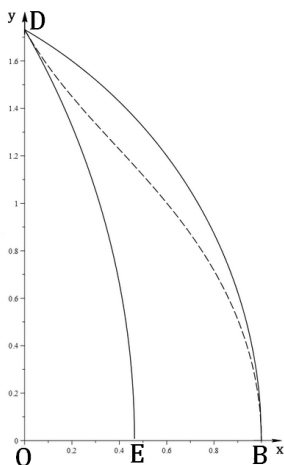


Рис. 14

Работа Ярослава Сысоева, получившего (при частичном участии автора) описанные результаты, удостоена диплома II степени на Всероссийском конкурсе научно-исследовательских работ школьников «Юниор-2020».

В заключение отметим, что доказанные (и, тем более, экспериментально обнаруженные) нами свойства далеко не исчерпываются приведенными в данном сюжете. Так, нами найдены 14 окружностей. Каждая из них проходит через три замечательных точки треугольника, отличных от точки Парри. Но если исходный треугольник является автомедианным, каждая из этих окружностей проходит еще и через точку Парри.

Литература

1. Блинков А. Д., Классические средние в арифметике и в геометрии. — Издание 2-е, стереотипное. М.: МЦНМО, 2013. — 168 с.
2. Лецко В. А. От задачи к исследованию. — СПб: СММО Пресс, 2021 — 336 с.
3. Gregoire Nicollier. Convolution Filters for Triangles, Forum Geometricorum. Volume 13 (2013), 61–85.
4. Kimberling, Clark Encyclopedia of Triangle Centers, 2020. [Электронный ресурс]. URL: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
5. Прасолов В. В., Точки Брокара и изогональное сопряжение. Издание 2-е, стереотипное. — М.: МЦНМО, 2012

А если не монотонна?

Д.Б. Невидимый,
Школа № 1530 «Школа
Ломоносова», г. Москва
ndb1530@mail.ru

Монотонность функции часто используется при решении уравнений и неравенств.

Например:

— если функция $y = f(x)$ является возрастающей на некотором промежутке A , а $y = g(x)$ — убывающей на этом промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

— если функция $y = f(x)$ строго монотонна на некотором промежутке A , то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

— если функция $y = f(x)$ возрастает, $a \in D(f)$ и $b \in D(f)$, то $f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b$.

И многие другие свойства. Я бы хотел рассмотреть одно из них.

Если функция $y = f(t)$ строго монотонна на своей области определения, и значения функций $h(x)$ и $g(x)$ попадают в $D(f)$, то уравнение $f(h(x)) = f(g(x))$ равносильно уравнению $h(x) = g(x)$.

Факт достаточно известный, но напомним, как он работает.

Пример 1. Решите уравнение

$$(x-2)^3 - (x-2)^2 + 2x = x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2.$$

Преобразуем уравнение:

$$(x-2)^3 - (x-2)^2 + (x-2) = x\sqrt{x} - x + \sqrt{x}.$$

Сделаем замену: $x-2 = a$, $\sqrt{x} = b$. Получим

$$a^3 - a^2 + a = b^3 - b^2 + b.$$

Или $f(a) = f(b)$, где $f(t) = t^3 - t^2 + t$.

Функция $f(t)$ строго возрастает на R , так как $f'(t) = 3t^2 - 2t + 1 > 0$. Следовательно, $a = b$.

Осталось решить уравнение $x - 2 = \sqrt{x}$. Получим $x = 2$.

Ответ: 2.

Уравнение может иметь другой вид, но решается аналогично.

Пример 2. Решите уравнение

$$\sin^3 2x - \sin^2 2x + \sin 2x = 8\cos^3 x - 4\cos^2 x + 2\cos x.$$

Сделаем замену: $\sin 2x = a$, $\cos 2x = b$. Получим

$$a^3 - a^2 + a = b^3 - b^2 + b$$

Или $f(a) = f(b)$, где $f(t) = t^3 - t^2 + t$.

Про монотонность этой функции мы уже говорили, поэтому делаем вывод, что $a = b$ или $\sin 2x = 2\cos x$.

$$2\sin x \cos x = 2\cos x,$$

$$2\cos x(\sin x - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z; \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Но что же делать, если в подобной ситуации функция окажется не монотонна?

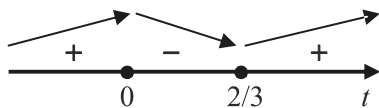
Пример 3. Решите уравнение

$$(\sin x + 2)^3 - (\sin x + 2)^2 = -\cos^6 x - \cos^4 x.$$

Очевидная замена: $\sin x + 2 = a$, $\cos^2 x = b$ не поможет, получим $a^3 - a^2 = -b^3 - b^2$. Обозначим тогда: $\sin x + 2 = a$, $-\cos^2 x = b$. Теперь вроде все правильно: $a^3 - a^2 = b^3 - b^2$. Осталось рассмот-

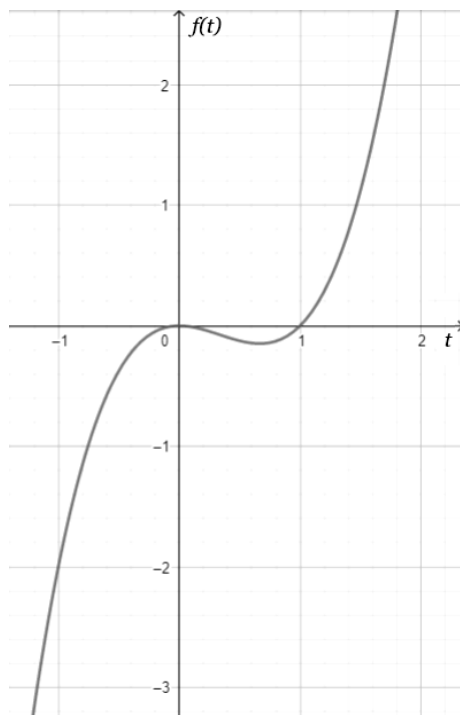
реть уравнение $f(a) = f(b)$, где $f(t) = t^3 - t^2$. И хотя функция $f(t)$ определена на всей числовой прямой, она при этом не является монотонной.

Действительно, $f'(t) = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$, т.е. имеет интервалы и возрастания, и убывания.



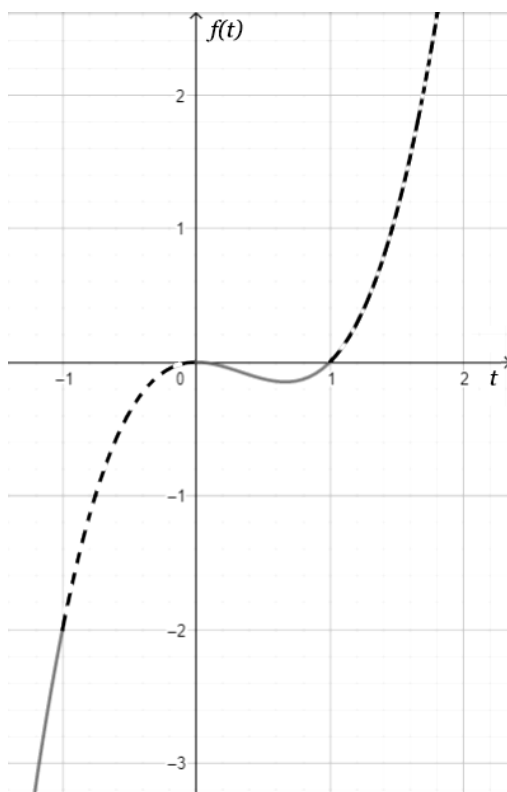
Пойдём дальше. Построим график этой кубической функции. Найдём значения в точках экстремума: $f(0) = 0$,

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}.$$



Осталось рассмотреть, какие значения принимают a и b . $a = \sin x + 2$, следовательно, $a \in [1; 3]$.

$b = -\cos^2 x$, следовательно, $b \in [-1; 0]$.



При $a \in [1; 3]$ $f(t) \in [0; 18]$.

При $b \in [-1; 0]$ $f(t) \in [-2; 0]$.

И вот тут мы можем заметить, что равенство $f(x) = f(b)$ может выполняться только в случае, когда $a = 1$ и $b = 0$, т.е.

$$\begin{cases} \sin x + 2 = 1; \\ \cos^2 x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1; \\ \cos^2 x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Даже то, что функция оказалась не монотонной, не помешало нам решить уравнение! Конечно, при этом нам потребовалась производная для исследования. Но подготовиться к решению таких номеров можно и в 8-9 классе, без применения производной.

Пример 4. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} 2|\sqrt{3+2x-x^2}-1| - \sqrt{3+2x-x^2} + 1 - |\sqrt{3+2x-x^2}-2| = \\ = 2|\sqrt{2x-x^2}-2| - \sqrt{2x-x^2} - |\sqrt{2x-x^2}-3|. \end{aligned}$$

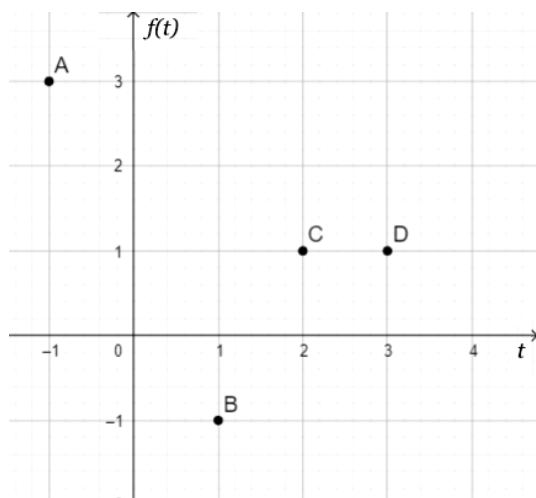
Сделаем замену: $\sqrt{3+2x-x^2} = a$, $\sqrt{2x-x^2}-1 = b$.

Получим $2|a-1|-a+1-|a-2| = 2|b-1|-b+1-|b-2|$ или $f(a) = f(b)$, где $f(t) = 2|t-1|-t+1-|t-2|$. Является ли $f(t)$ монотонной — не очень понятно, поэтому построим график этой функции.

Рассматривать несколько интервалов, раскрывая на каждом модули с плюсом и минусом, мы не будем. Здесь важно понять, что, как бы мы не раскрыли модуль, получим линейную функцию. Т.е. на промежутке $(-\infty; 1]$ графиком будет часть прямой (точнее — луч), на отрезке $[1; 2]$ — также часть прямой (точнее отрезок) и на последнем промежутке $[2; +\infty)$ — часть прямой (луч).

Для построения графика мы составим табличку. В неё войдут вершины нашей ломаной ($t=1$ и $t=2$) и пара дополнительных точек, для построения лучей.

t	-1	1	2	3
$f(t)$	3	-1	1	1

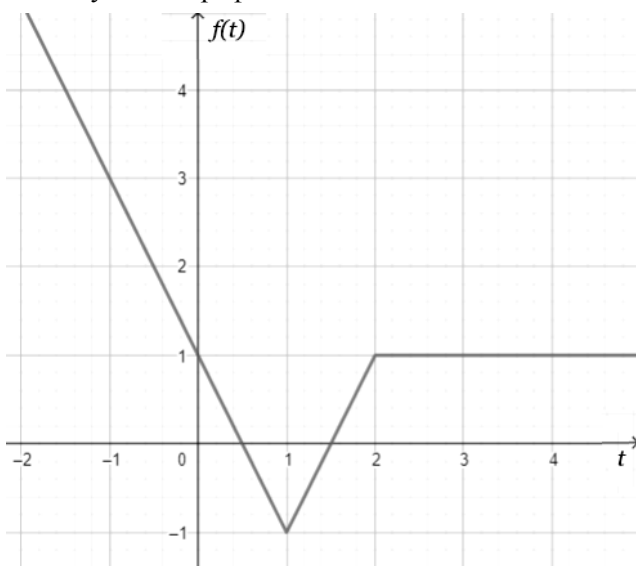


На промежутке $(-\infty; 1]$ строим луч BA .

На отрезке $[1; 2]$ — отрезок BC .

На промежутке $[2; +\infty)$ — строим луч CD .

Получим следующий график:



Как мы видим, функция снова не является монотонной. Поэтому придётся исследовать, какие значения могут принимать a и b .

Сначала рассмотрим a :

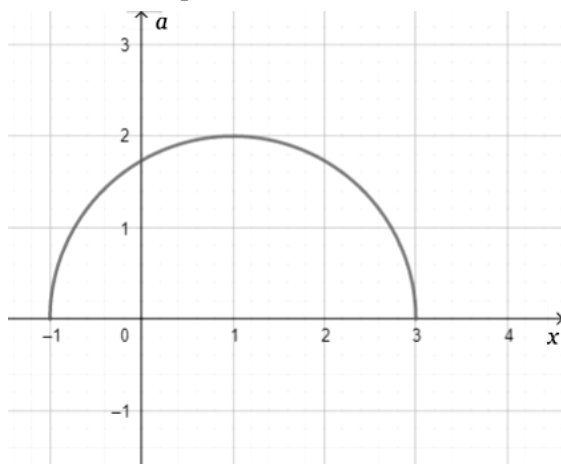
$$\sqrt{3+2x-x^2} = a,$$

$$\begin{cases} 3+2x-x^2 = a^2; \\ a \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + a^2 = 4; \\ a \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + a^2 = 4; \\ a \geq 0, \end{cases}$$

Графиком функции $a = \sqrt{3+2x-x^2}$ является полуокружность, по которой видно, что a принимает значения от 0 до 2.



Рассмотрим b :

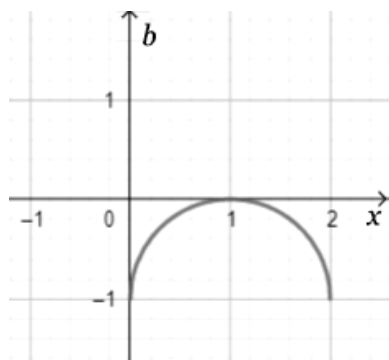
$$\sqrt{2x-x^2-1} = b,$$

$$b+1 = \sqrt{2x-x^2},$$

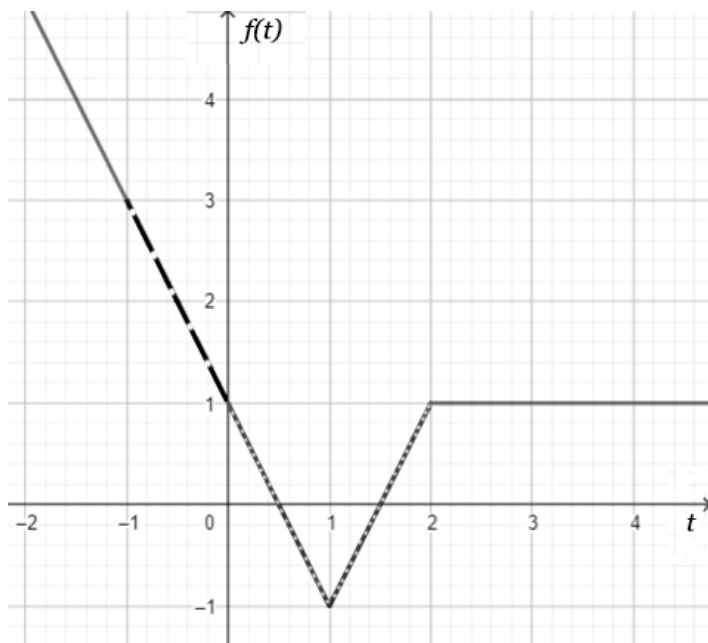
$$\begin{cases} (b+1)^2 + x^2 - 2x = 0; \\ b+1 \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b+1)^2 + (x-1)^2 = 1; \\ b+1 \geq 0, \end{cases}$$

Графиком функции $b = \sqrt{2x - x^2} - 1$ является также полуокружность. По графику можем сделать вывод, что $b \in [-1; 0]$.



Заметим, что при $a \in [0; 2]$ функция $f(t)$ принимает значения от -1 до 1 , а при $b \in [-1; 0]$ $f(t)$ принимает значения от 1 до 3 .



При этом равенство $f(a) = f(b)$ может выполняться только в двух случаях: $\begin{cases} a = 0; \\ b = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 2; \\ b = 0. \end{cases}$

Первый случай:

$$\begin{cases} \sqrt{3+2x-x^2} = 0; \\ \sqrt{2x-x^2} - 1 = 0, \\ \begin{cases} 3+2x-x^2 = 0; \\ 2x-x^2 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x-3) = 0; \\ (x-1)^2 = 0, \end{cases} \end{cases}$$

Данная система решений не имеет.

Второй случай:

$$\begin{cases} \sqrt{3+2x-x^2} = 2; \\ \sqrt{2x-x^2} - 1 = 0, \\ \begin{cases} 3+2x-x^2 = 4; \\ 2x-x^2 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1)^2 = 0; \\ (x-1)^2 = 0, \end{cases} \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ: 1.

Треугольник с углом 60°

Д.В. Прокопенко,
ФМШ 2007, г. Москва
prokop.dm@mail.ru

В 2010 году на региональном этапе Всероссийской олимпиады в 9 классе была предложена

Задача В треугольнике ABC угол B равен 60° . Пусть AA_1 и CC_1 биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка B_1 , симметричная вершине B относительно прямой A_1C_1 , лежит на стороне AC (рис. 1).

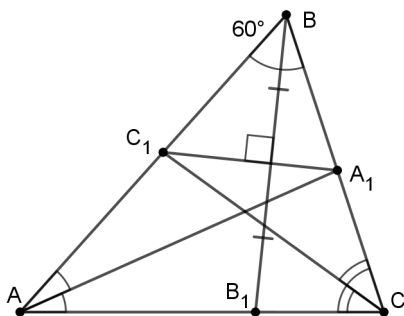


Рис. 1

Оказалось, что решить эту задачу можно разными способами, которые связаны с классическими геометрическими конструкциями, знакомству с которыми и посвящена данная статья. Мы покажем, что каждый новый содержательный способ решения позволяет узнать больше о задаче, а также даст возможность решить совершенно другие задачи. Чтобы не разбирать различные случаи, будем считать, что треугольник ABC из условия — остроугольный, $BA > BC$, и будем доказывать, что точка B_1 лежит на прямой AC . В дальнейшем для краткости эту задачу мы будем называть **основная задача**.

1. Много окружностей

Сначала немного повторим теорию. Для работы со вписанными четырехугольниками часто используется

Теорема 1. Свойство и признак вписанного четырехугольника. Внешний угол четырехугольника равен противоположному углу тогда и только тогда, когда этот четырехугольник — вписанный.

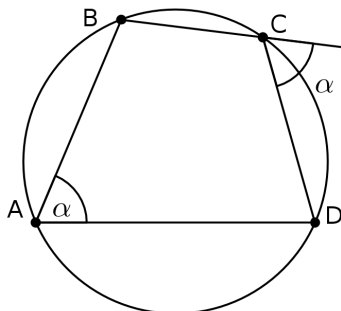


Рис. 2

Нам пригодится простая, но полезная формула.

Теорема 2. Формула угла между биссектрисами. В треугольнике ABC угол B равен α . Биссектрисы AA_1 , CC_1 пересекаются в точке I (рис. 3). Тогда

$$\angle AIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

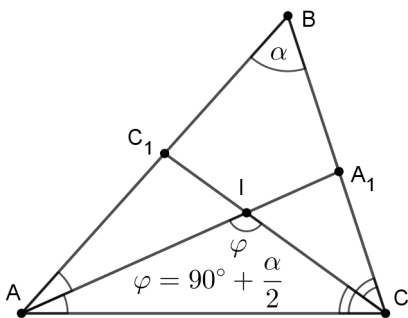


Рис. 3

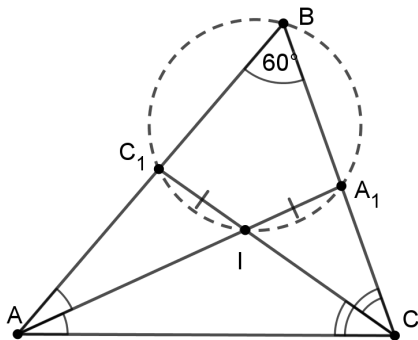


Рис. 4

Упражнение 1. Докажите эту формулу.

Сформулируем полезные свойства треугольника с углом 60° , которые можно использовать в решении задач.

Теорема 3. В треугольнике ABC угол B равен 60° . Биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I . Тогда 1) четырехугольник A_1BC_1I — вписанный; 2) $IA_1 = IC_1$ (рис. 4).

Упражнение 2. Докажите эти свойства.

Теорема 4. На сторонах треугольника ABC выбрали точки: A_1 на BC , B_1 на AC , C_1 на AB . Тогда окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C пересекаются в одной точке (рис. 5).

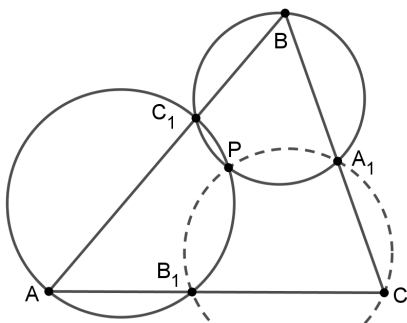


Рис. 5

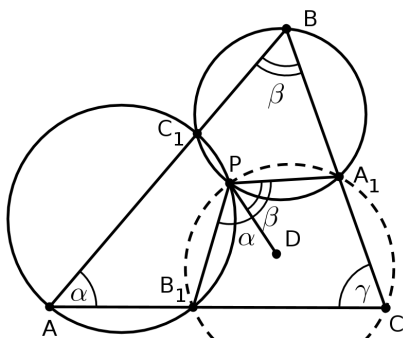


Рис. 6

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1 пересекаются в точке P (рис. 6). Докажем, что точки C , A_1 , B_1 и P лежат на одной окружности. Рассмотрим случай, изображенный на рис. 6 (другие случаи взаимного расположения точек доказываются аналогично). Обозначим углы треугольника ABC : $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

На продолжении отрезка C_1P отложим точку D . Тогда для вписанных четырехугольников B_1AC_1P и A_1BC_1P по теореме 1 $\angle B_1PD = \angle BAC = \alpha$ и $\angle A_1PD = \angle A_1BC_1 = \beta$. В четырехугольнике

$\angle A_1PB_1C = \angle B_1PA_1 + \angle ACB = (\alpha + \beta) + \gamma = 180^\circ$. Следовательно, точки C , A_1 , B_1 и P лежат на одной окружности.

Оказывается, что теорема 4 верна для произвольного расположения точек A_1 , B_1 и C_1 на прямых BC , AC , и AB соответственно (точки не должны совпадать с вершинами треугольника ABC).

Вернемся к решению **основной задачи**. По свойству треугольника с углом 60° (теорема 3) четырехугольник A_1BC_1I — вписанный (рис. 7). Пусть описанная окружность ω_A треугольника AC_1I пересекает сторону AC в точке B_1 . Тогда по теореме 4 точки C , A_1 , B_1 и I тоже лежат на одной окружности. По теореме 1 для вписанного четырехугольника BC_1IA_1 получаем, что $\angle AIC_1 = \angle A_1BC_1 = 60^\circ$ (1). Заметим, что вписанные в ω_A углы AIC_1 и AB_1C_1 равны (2). Тогда из (1) и (2) $\angle AB_1C_1 = \angle A_1BC_1 = 60^\circ$. Следовательно, четырехугольник CBC_1B_1 — вписанный (почему?).

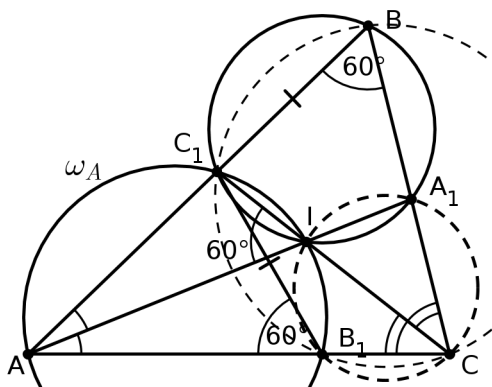


Рис. 7

Биссектриса CC_1 вписанного угла B_1CB проходит через середину дуги BC_1B_1 . Следовательно, $BC_1 = C_1B_1$. Аналогично, $BA_1 = A_1B_1$. Треугольники A_1BC_1 и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам и симметричны относительно общей стороны A_1C_1 . Тогда точка B

при симметрии относительно A_1C_1 попадает в точку B_1 на прямую AC . Задача решена.

В этом способе нам пришлось использовать четыре (!) вспомогательные окружности. Но хорошо проделанная работа должна принести свои плоды. Надеемся, что теперь задача из книги А. Акопяна «Геометрия в картинках» ([2]) не вызовет затруднений. Попробуйте также решить обратную задачу.

Упражнение 3. Докажите, что пунктирные окружности на рис. 8 пересекаются на стороне AC .

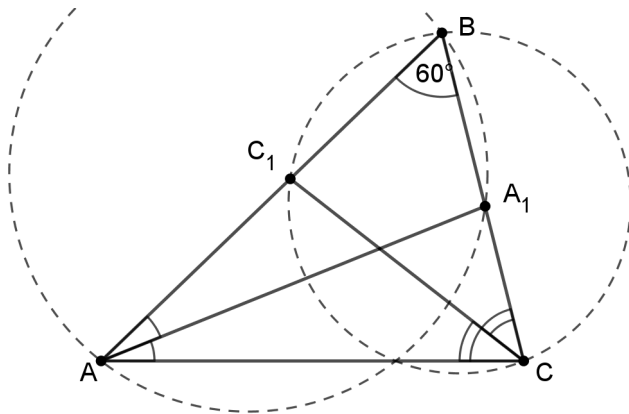


Рис. 8

Упражнение 4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1 . Докажите, что если описанные окружности треугольников BA_1A и BCC_1 пересекаются в точке, лежащей на стороне AC , то $\angle B = 60^\circ$.

Еще одно интересное свойство треугольника с углом 60° .

Задача 1 (Турнир Савина). В треугольнике ABC угол B равен 60° . AA_1 , CC_1 — его биссектрисы. Точку D выбрали так, что треугольник A_1DC_1 — равносторонний, и точки D и B лежат в разных полуплоскостях относительно A_1C_1 . Докажите, что точка D лежит на прямой AC (рис. 9).

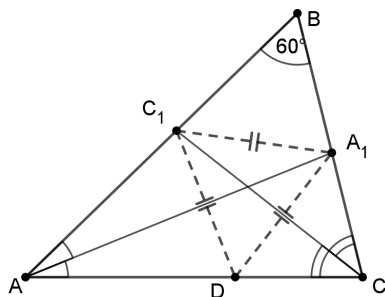


Рис. 9

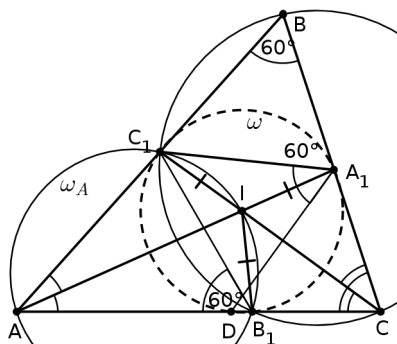


Рис. 10

Доказательство. Воспользуемся знаниями, полученными при решении **основной задачи**. Как мы уже знаем точки C_1 , A , B_1 и I лежат на одной окружности ω_A (рис. 10). Биссектриса угла B_1AC_1 проходит через точку I — середину дуги B_1IC_1 . Следовательно, $IC_1 = IB_1$. По свойству треугольника с углом 60° $IC_1 = IA_1$. Тогда I — центр окружности ω , описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (появилась еще одна окружность!).

Пусть ω повторно пересекает прямую AC в точке D . Докажем, что треугольник A_1C_1D — правильный. Заметим, что $\angle C_1A_1D = \angle C_1B_1D$ (1) (как вписанные в ω). Из решения **основной задачи** мы уже знаем, что $\angle C_1B_1D = 60^\circ$ (2). Из (1) и (2) $\angle C_1A_1D = 60^\circ$. Аналогично, $\angle A_1C_1D = 60^\circ$. Следовательно, треугольник A_1C_1D — правильный.

Интересное свойство треугольника с углом 60° обнаружил Г.Фельдман. Прежде, чем перейти к задаче сформулируем одно неравенство.

Теорема 5. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \alpha$. Точка D находится в той же полуплоскости относительно BC , что и A , но вне описанной окружности треугольника ABC . Тогда $\angle ADC < \alpha$.

Доказательство очевидно из рис. 11. Перейдем к задаче. Для удобства сохраним обозначения рис. 10.

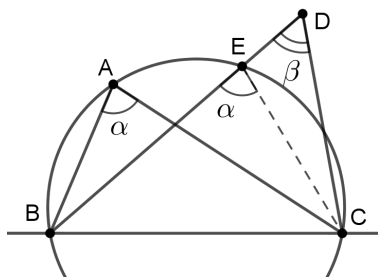


Рис. 11

Задача 2. (финал Всероссийской олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, 2018 год) В треугольнике ABC угол B равен 60° , AA_1 , BE , CC_1 — биссектрисы. Докажите, что $\angle A_1EC_1 = 60^\circ$ (рис. 12).

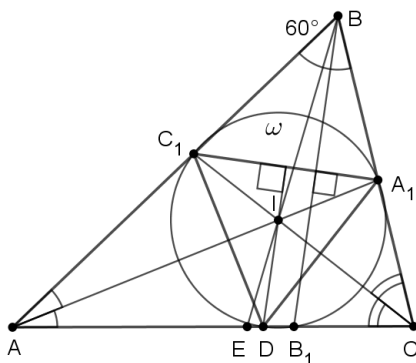


Рис. 12

Доказательство. Приведем решение члена жюри олимпиады Ю. Блинкова. Опять воспользуемся полученными знаниями.

Покажем, что точка E лежит вне окружности ω . По Теореме 5 это равносильно условию задачи. В правильном треугольнике A_1DC_1 (задача 1) точка I является точкой пересечения высот (почему?). Следовательно, $DI \perp A_1C_1$. Из решения **основной задачи** мы знаем, что точки B и B_1 симметричны относительно A_1C_1 , поэтому $BB_1 \perp A_1C_1$. Прямая BI пересекает параллельные прямые BB_1 и DI в точках B и I . Точка E лежит на продолжении отрезка BI за точку I , поэтому она не может лежать между точками B_1

и D , через которые проходит окружность ω . Значит, E лежит вне окружности. Поэтому $\angle A_1EC_1 60^\circ$. Равенство достигается для правильного треугольника.

Эту задачу можно, конечно, решить проще, не используя столько фактов. С таким решением можно познакомиться на сайте олимпиады [3]. К чему тогда такие сложности? Мы считаем полезным видеть связи между различными задачами и фактами.

Интересно, что треугольник с углом 60° обладает еще одним уникальным свойством. На окружности, проходящей через две вершины лежат сразу три замечательные точки треугольника.

Упражнение 5. В треугольнике ABC угол B равен 60° . O и I — центры описанной и вписанной окружностей соответственно, H — точка пересечения высот. Докажите, что точки A , C , O , H , I лежат на одной окружности.

Указание. Найдите под каким углом виден отрезок AC из точек O , H и I . Полезно использовать формулу угла между биссектрисами.

Много лет назад автор многих красивых задач В.В. Произволов обнаружил еще один правильный треугольник, «вписанный» в треугольник с углом 60° . Хочется напомнить читателям эту задачу.

Упражнение 6. В треугольнике ABC угол B равен 60° . AA_1 и CC_1 — его высоты. M — середина AC . Докажите, что треугольник A_1MC_1 — правильный.

2. Точка Микеле

Вспомним теорему 4 (рис. 5). Оказывается, если точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то в точке P пересекаются уже четыре окружности.

Теорема 6. Точка Микеле. Прямая пересекает стороны BA и BC треугольника ABC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямую AC в точке B_1 . Тогда окружности, описанные около тре-

угольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C и ABC пересекаются в одной точке P (рис. 13).

Точка P называется **точкой Микеле**.

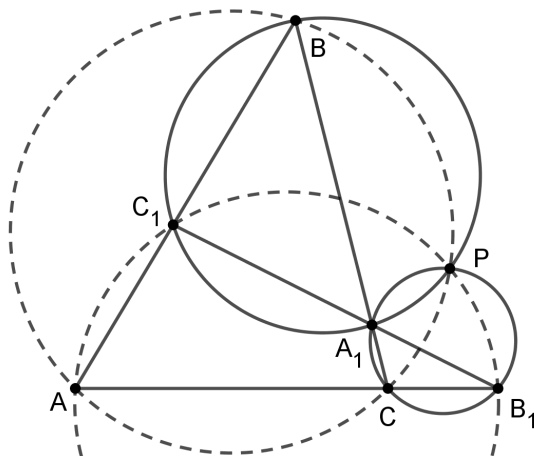


Рис. 13

Вместо треугольника и секущей часто говорят про четверку прямых, которые образуют четыре треугольника. Тогда описанные окружности этих треугольников имеют общую точку точку P , которую называют точкой Микеле этой четверки прямых (на рис. 13: AB , BC , AC и A_1C_1).

Доказательство. Пусть описанные окружности ω_B и ω_C треугольников A_1BC_1 , A_1B_1C пересекаются в точке P (рис. 14). Докажем, что точки A , C_1 , B_1 и P тоже лежат на одной окружности.

Обозначим углы треугольника ABC : $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. Вписанные в ω_B углы $\angle C_1PA_1 = \angle C_1BA_1 = \beta$. Для вписанного в ω_C четырехугольника A_1PB_1C получим $\angle A_1PB_1 = \angle A_1CA = \gamma$. Тогда $\angle C_1PB_1 + \angle C_1AB_1 = (\beta + \gamma) + \alpha = 180^\circ$. Следовательно, точки A , C_1 , B_1 и P лежат на одной окружности. Аналогично, описанная окружность треугольника ABC тоже проходит через точку P . Доказано.

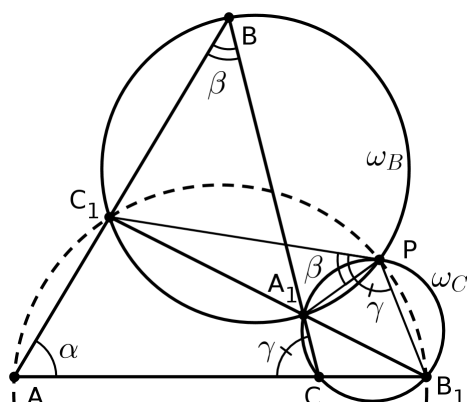


Рис. 14

Нам понадобится частный случай расположения точек в теореме 6. Если в условии потребовать дополнительно, что четырехугольник AC_1A_1C — вписанный, то точка Микеле P лежит на прямой BB_1 .

Теорема 7. Точка Микеле для вписанного четырехугольника. Прямая пересекает стороны BA и BC треугольника ABC в точках C_1 и A_1 соответственно, а прямую AC в точке B_1 . Четырехугольник AC_1A_1C — вписанный. Тогда окружности, описанные около треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C и ABC пересекаются в одной точке P на прямой BB_1 (рис. 15).

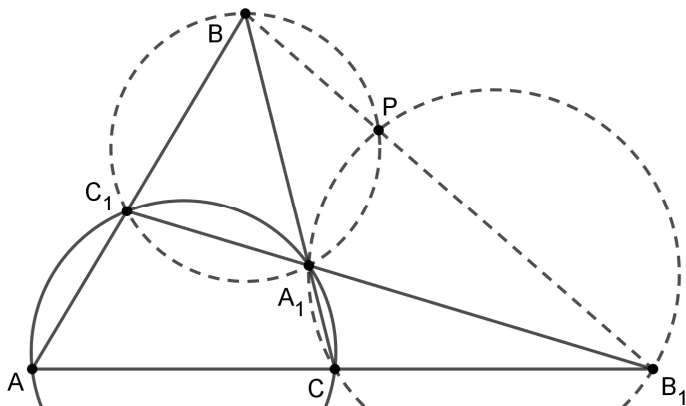


Рис. 15

3. Прямая Симсона

Теорема 8. Прямая Симсона. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC . Тогда проекции точки P на прямые AB , BC и AC лежат на одной прямой (рис. 17).

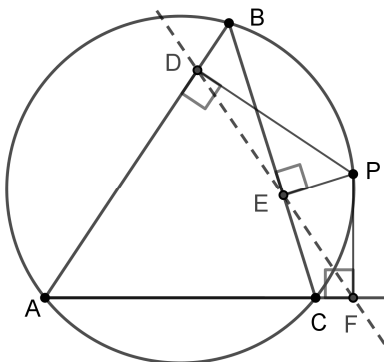


Рис. 17

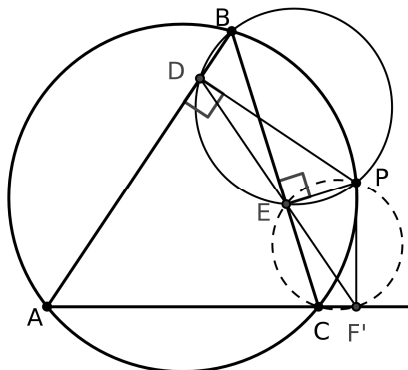


Рис. 18

Доказательство. Пусть прямая DE пересекает прямую AC в точке F' (рис. 18). Докажем, что F' и F совпадают. Четверка прямых AB , BC , AC и DE образует четыре треугольника. Описанные около них окружности пересекаются в точке Микеле. Из них можно выбрать любые две. Например, описанные окружности треугольников ABC и BDE повторно пересекаются в точке P , которая и является точкой Микеле. Следовательно, описанная окружность треугольника ECF' проходит через точку P . PC — диаметр, $\angle PF'C = \angle PEC = 90^\circ$. Поскольку $\angle PF'C = \angle PFC = 90^\circ$, то точки F' и F совпали.

При решении задачи нам понадобится еще один полезный факт.

Теорема 9. Докажите, что проекции точки B на биссектрисы внутренних и внешних углов при вершинах A и C треугольника ABC лежат на средней линии треугольника (рис. 19).

Упражнение 7. Докажите эту теорему.

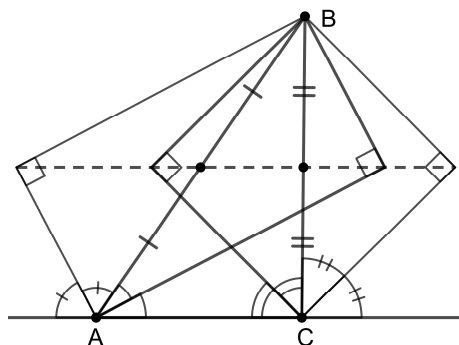


Рис. 19

Перейдем к решению **основной задачи** (предложил А.Заславский). Пусть D , E и F — проекции точки B на прямые A_1C_1 , AA_1 , CC_1 соответственно (рис. 20). По свойству треугольника с углом 60° точка B лежит на описанной окружности треугольника A_1IC_1 . Тогда D , E и F лежат на прямой Симсона точки B . Как мы уже знаем проекции точки B на биссектрисы (E и F) лежат на средней линии треугольника ABC . Следовательно, и точка D лежит на той же средней линии. Пусть прямая BD пересекает AC в точке B_1 . По теореме Фалеса D — середина BB_1 . Тогда A_1C_1 — серединный перпендикуляр к BB_1 . Следовательно, при симметрии относительно прямой A_1C_1 точка B попадет в точку B_1 на сторону AC .

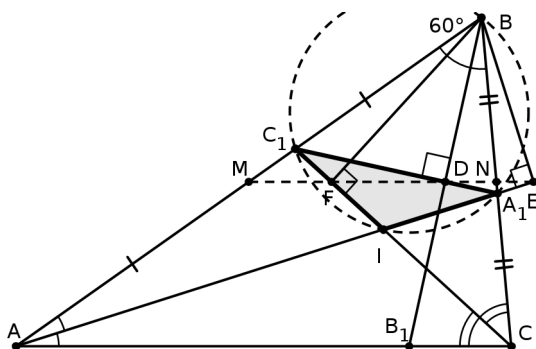


Рис. 20

О применении прямой Симсона можно прочитать в статье [6] журнала «Квант». Для более углубленного изучения рекомендуем статью [7].

Следующие три способа объединяет одна и та же вспомогательная прямая. Но идеи решений будут совершенно разные.

4. Дополнительное построение

На Московской Математической конференции школьников (сайт [1]) в 2017 году интересное решение **основной задачи** представил ученик 8 (на тот момент) класса 57 школы Куянов Федор. Он провел дополнительную прямую и дважды воспользовался формулой угла между биссектрисами. Очень экономное решение.

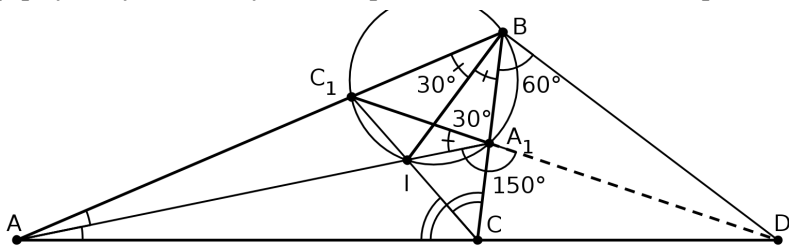


Рис. 21

Проведем прямую BD так, что $\angle CBD = 60^\circ$ и точка D лежит на продолжении стороны AC за вершину C (рис. 21). Докажем, что точки C_1 и A_1 лежат на биссектрисе угла ADB . A_1 — точка пересечения биссектрис треугольника ABD , поэтому DA_1 — биссектриса угла ADB . По формуле угла между биссектрисами $\angle AA_1D = 90^\circ + \frac{\angle ABD}{2} = 150^\circ$. Как мы уже знаем по свойству треугольника с углом 60° точки B , A_1 , C_1 и I лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle IA_1C_1 = \angle IBC_1 = 30^\circ$ (углы равны как вписанные).

Заметим, что $\angle IA_1C_1 + \angle IA_1D = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$. Поэтому точки C_1 , A_1 и D лежат на одной прямой — биссектрисе угла ADB . При

симметрии относительно биссектрисы угла ADB луч DB перейдет в луч DA , а точка B — в точку на луче DA .

Вопрос: в решении формула угла между биссектрисами использовалась дважды, а в тексте упомянута только один раз. Где второй?

5. Основание внешней биссектрисы

Эlegantное решение предложил Г.Б. Филипповский на семинаре учителей в МЦНМО (видеозапись доступна на сайте семинара [8]). Свойства внешней биссектрисы обычно знают хуже, поэтому напомним их. Сначала вспомним теорему из школьного курса.

Теорема 10. Свойство биссектрис. В треугольнике ABC провели биссектрису BE и внешнюю биссектрису BD . Тогда

$$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{BA} \text{ и } \frac{CD}{DA} = \frac{BC}{BA}.$$

Из теоремы 10 следует, что $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DA}$. Про такие точки D и E говорят, что они делят отрезок AC в одном отношении внутренним и внешним образом.

Еще одна полезная теорема.

Теорема 11. Основание внешней биссектрисы. В треугольнике ABC провели биссектрисы AA_1 и CC_1 и внешнюю биссектрису BD . Тогда прямая A_1C_1 проходит через точку D (рис. 22).

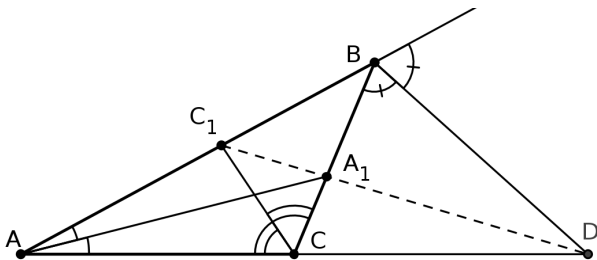


Рис. 22

Доказательство. Обозначим стороны треугольника ABC : $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Пусть прямая A_1C_1 пересекает прямую

AC в точке D' . На рис. 22 вместо точки D надо представить точку D' . Докажем, что BD' — внешняя биссектриса.

По теореме Менелая для треугольника ABC и секущей A_1C_1 :

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CD'}{D'A} = 1.$$

Заменим в (1) по свойству биссектрис первые две дроби $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{CD'}{D'A} = 1$ и получим, что $\frac{CD'}{D'A} = \frac{a}{c}$ (1).

По свойству внешней биссектрисы $\frac{CD}{DA} = \frac{a}{c}$ (2). Сравним (1) и (2) и заметим, что $\frac{CD}{DA} = \frac{CD'}{D'A}$. Тогда $\frac{CD}{DA} = \frac{CD'}{D'A}$. Известно, что на прямой существуют ровно две точки (одна на отрезке и одна вне), которые делят отрезок в данном отношении. Следовательно, точка D' совпадала с D . Тогда прямая A_1C_1 проходит через точку D .

Вернемся к решению **основной задачи** (рис. 23). Пусть BE и BD — биссектрисы внутреннего и внешних углов при вершине B .

По теореме 11 прямая A_1C_1 проходит через точку D . Заметим, что в треугольнике ABD точка A_1 — пересечение биссектрис углов B и A . Следовательно, прямая A_1C_1 содержит биссектрису угла ADB . Вспомним, что биссектриса угла является его осью симметрии. Тогда точка B при симметрии относительно биссектрисы угла попадает на другую его сторону, т.е. на прямую AC .

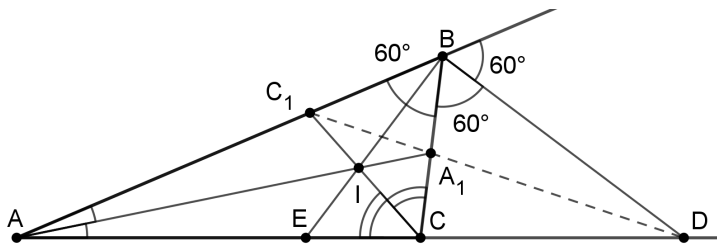


Рис. 23

На сайте [9] можно найти подборку задач разной сложности, в которых используется основание внешней биссектрисы треугольника.

6. Вписанные и невписанные окружности

Вот мы и дошли до самого удивительного решения. Оказывается, что **основную задачу** можно решить средствами 7 класса. Вспомним некоторые факты про биссектрисы.

Рассмотрим треугольник ABC . Пусть биссектрисы угла BAC и внешнего угла B пересекаются (почему они не могут быть параллельны?) в некоторой точке Q (рис. 24).

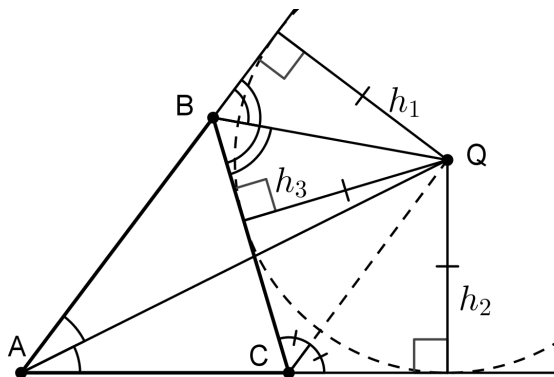


Рис. 24

Обозначим расстояния от точки Q до прямых AB , AC и BC h_1 , h_2 и h_3 соответственно. Все точки на биссектрисе угла BAC равноудалены от его сторон, поэтому для точки Q верно равенство $h_1 = h_2$. Аналогично BQ — биссектриса внешнего угла B , поэтому $h_1 = h_3$. Тогда $h_2 = h_3$, следовательно, точка Q лежит на биссектрисе внешнего угла C .

Сформулируем теорему.

Теорема 12. Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC , а также биссектриса внутреннего угла A пересекаются в одной точке Q .

Точку Q называют центром *невписанной окружности*, которая касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Подробнее о невписанной окружности можно прочитать в статье журнала «Квант» [10].

Прежде чем переходить к основной задаче, решим знаменитую задачу Шебаршина, ставшую классической. Мы научимся одному приему работы с углом 120° , который пригодится и для угла 60° .

Задача 3. В треугольнике ABC угол B равен 120° . AA_1 , BB_1 и CC_1 — его биссектрисы. Докажите, что угол $A_1B_1C_1$ равен 90° (рис. 25).

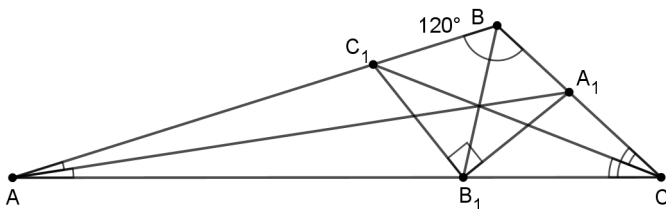


Рис. 25

Проведем луч CB (рис. 26). Заметим, что внешний угол при вершине B равен 60° . Сторона BA треугольника ABC теперь превратилась во внешнюю биссектрису треугольника CBB_1 . Тогда биссектриса угла C и внешнего угла B этого треугольника пересекаются в точке C_1 . Следовательно, по теореме 12 точка C_1 — центр вневписанной окружности треугольника CBB_1 , а B_1C_1 — биссектриса внешнего угла BB_1A . Аналогично B_1A_1 — биссектриса угла BB_1C . Биссектрисы смежных углов перпендикулярны. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

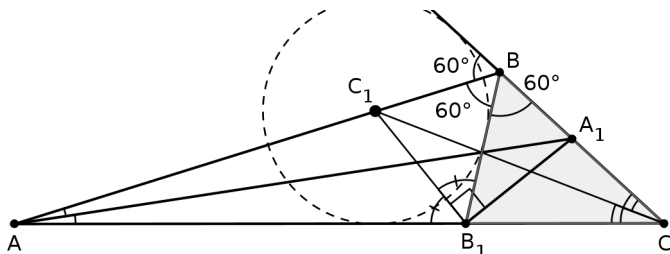


Рис. 26

Запомним, что ключевым дополнительным построением было дополнение угла 120° до развернутого. Сторона одного треуголь-

ника превратилась в биссектрису другого треугольника. Вернемся к решению **основной задачи**. Этот способ автор узнал от Д.Швецова.

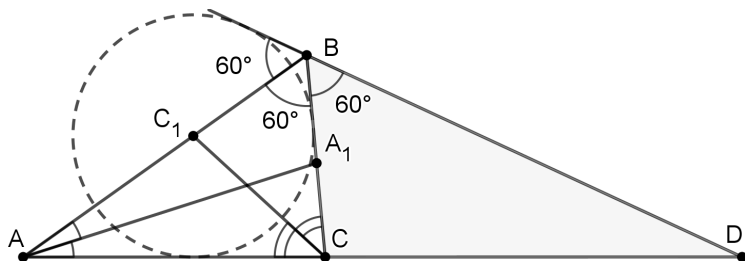


Рис. 27

Проведем через вершину B прямую, которая образует со сторонами BA и BC углы по 60° (рис. 27). Пусть она пересекает прямую AC в точке D . Внешние биссектрисы треугольника BCD пересекаются в центре вневписанной окружности — точке C_1 . Следовательно, DC_1 — биссектриса угла BDA . A_1 — точка пересечения биссектрис треугольника ABD , DA_1 — биссектриса угла BDA . Точки C_1 и A_1 лежат биссектрисе угла BAD . Следовательно, точка B при симметрии относительно биссектрисы угла BDA , т.е. прямой A_1C_1 , попадает на другую сторону этого угла — прямую AC .

Следующая задача является достаточно трудной, но приемы, необходимые для ее решения, нам уже знакомы. Оставляем ее для самостоятельного решения самых заинтересованных читателей.

Упражнение 8. (Д. Швецов, Турнир им. А.П.Савина) В треугольнике ABC угол ABC равен 135° . На стороне AC отмечены точки M и N (M между A и N) так, что $MB \perp NB$. Отрезки MP и NQ — биссектрисы треугольников AMB и CNB . Докажите, что точка, симметричная точке B , относительно прямой PQ , лежит на AC .

Указание. Проведем через вершину B прямую, которая образует со сторонами BA и BC углы, равные углам ABM и CBN соответственно. Это возможно, поскольку $\angle ABM + \angle CBN = 45^\circ$. Точки P и Q являются центрами вписанной и внеписанной окружностей вспомогательных треугольников. Осталось их найти.

Конечно, у треугольника с углом 60° еще много замечательных свойств, связанных, например, с точкой пересечения высот, но это уже выходит за рамки данной статьи. Школьники иногда задают вопрос «А зачем решать задачу разными способами? Ведь мы ее уже решили...» Надеемся, что данная статья хотя бы частично ответила на этот вопрос.

Литература

1. Московская Математическая конференция школьников, <https://www.mccme.ru/mmks>
2. Акопян А., Геометрия в картинках. — М., 2016.
3. сайт Всероссийской олимпиады по геометрии им. И.Ф.Шарыгина, <http://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php>
- 4.Блинков Ю. А., Горская Е. С., Вписанные углы — М.: МЦНМО, 2017.
5. Ю. А. Блинков. Точка Микеля, Базовые факты о точке Микеля, <http://geometry.ru/articles.php#simson>.
6. Швецов Д., От прямой Симсона к теореме Дроз-Фарни, Квант, №6, 2010 г.
7. Куланин Е. Д., О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя, Матем. просв., сер. 3, 10, Изд-во МЦНМО, М., 2006, 243–264.
8. <https://www.mccme.ru/nir/seminar>, видеозапись лекций семинара учителей математики в МЦНМО, см. январь 2018 года
9. Филипповский Г.Б., Точка Q — основание внешней биссектрисы, <http://filippovsky.com/articles/point-q/>
10. Блинков А.Д., Блинков Ю.А., Внеписанная окружность, Квант, №2, 2009 г.

Доказательство неравенств (огрубление, уточнение, оценка)

П.В. Чулков,
ФМШ 2007, город Москва
chulkov2007@yandex.ru

*Если слагаемые уменьшать,
то сумма уменьшится...
Если знаменатель уменьшать,
то дробь увеличится...
Народная мудрость*

Доказательство некоторых неравенств может быть проведено почти без всякой теории — на основе простого здравого смысла. Так здравый смысл подсказывает, что если в сумме уменьшить хотя бы одно из слагаемых, то вся сумма уменьшится, а если в произведении (положительных чисел) увеличить один из сомножителей, то произведение увеличится, а если в дроби уменьшить знаменатель, то дробь увеличится.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Известно, что $a \geq b \geq c$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

Из условия задачи следует, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1.$$

Заменим кое-где переменные на «меньшие», тем самым «уменьшим» (точнее «не увеличим») слагаемые:

$$2ab \geq 2b^2, \quad 2bc + 2ca \geq 2c^2 + 2c^2 = 4c^2.$$

Сумма не увеличится:

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq a^2 + 3b^2 + 5c^2$$

Неравенство доказано.

Пример 2. Докажите, что если $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

Уменьшим числители дробей, тем самым уменьшим сумму. Получим:

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > \frac{a^2 - b^2}{a-b} + \frac{b^2 - c^2}{b-c} \Rightarrow a + 2b + c.$$

Пример 3. Докажите неравенство для натуральных чисел n , больших 1:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Заменим каждое слагаемое на $\frac{1}{2n}$. Левая часть неравенства уменьшится и будет равна $\frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$. Неравенство доказано.

Пример 4. Известно, что $0 \leq a, b, c \leq 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b+ca} + \frac{b}{1+c+ab} + \frac{c}{1+a+bc} \leq \frac{3}{a+b+c}.$$

Увеличим первую дробь, уменьшив знаменатель:

$$\frac{a}{a+b+ca} \leq \frac{a}{a^2+ab+ca} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Сложим три аналогичных дроби, получим требуемое неравенство.

Отметим, что метод огрубления можно «усилить», если использовать для увеличения (уменьшения) величин какие-нибудь известные неравенства. Часто с этой целью используется неравенство Коши, в самом простом варианте: $a^2 + b^2 \geq 2ab$, но это тема следующих занятий.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Известно, что $a \leq b \leq c \leq d$ и $a + b + c + d \geq 1$.

Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geq 1$.

Задача 2. Известно, что $a > b > c > d > 0$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} + \frac{c^2}{c-d} > 3b + 3d.$$

Задача 3. Докажите, что если $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

Задача 4. Положительные числа a и b меньше 1. Докажите неравенство $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} < 1$.

Задача 5. Докажите, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Задача 6. Известно, что $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$a) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1; \quad б) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

Задача 7. Известно, что $0 < a \leq b \leq a+b \leq c$. Найдите наибольшее значение $a/b + b/c$.

Задача 8. По положительным числам x и y вычисляют $a = 1/y$ и $b = y + 1/x$. После этого находят c — наименьшее число из трех: x, a, b . Какое наибольшее значение может принимать c ?

Задача 9. Известно, что $a, b, c > 0$. Докажите, что

$$3abc + |a^3 - b^3| + |b^3 - c^3| + |c^3 - a^3| \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Задача 10. Докажите, что если $a + b + c \geq abc$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.

Задача 11. Известно, что $0 \leq x, y, z \leq 1$. Докажите:

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \leq 1.$$

Задача 12. Докажите, что

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Ответы, решения, комментарии

1. См. пример 1.

2. См. пример 2.

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} + \frac{c^2}{c-d} > a+2b+2c+d > 3b+3d.$$

3. Заменим в числителе некоторые слагаемые большими:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < \frac{3a_3 + 3a_6 + 3a_9}{a_3 + a_6 + a_9} = 3.$$

4. Уменьшим знаменатели дробей. Получим:

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} = 1.$$

5. Обозначим: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = a$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} = b$.

Тогда $a^2 < ab = \frac{1}{100}$, так как $a < b$. То есть $a < \frac{1}{10}$.

6. Увеличим знаменатели дробей. Получим:

$$a) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.$$

б) Заметим, что $\frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} = 3$. Доказано, что

$$\frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} > 1,$$

поэтому $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

7. Ответ: 1,5. Будем действовать последовательно.

1) Уменьшим значение c , как только возможно: заменим его $a+b$. То есть уменьшим знаменатель второй дроби, тем самым увеличим дробь, а значит, увеличим и сумму дробей:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a+b}.$$

2) Заменим a на b в числителе первой дроби, тем самым увеличим первую дробь, а значит и сумму дробей:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a+b} \leq \frac{b}{b} + \frac{b}{a+b} = 1 + \frac{b}{a+b}.$$

3) Заменим b на a в числителе, а a на b в знаменателе второй дроби, тем самым увеличим числитель и уменьшим знаменатель второй дроби — увеличим вторую дробь, а значит и сумму дробей:

$$1 + \frac{b}{a+b} \leq 1 + \frac{a}{a+a} \leq \frac{3}{2}.$$

Доказали, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \leq \frac{3}{2}$.

Проверим, что равенство достигается. Заметим, что, $a+b=c$ (1), $a=b$ (2), то есть $2a=2b=c$, то есть равенство достигается, например, при $a=b=1$, $c=2$.

8. Перепишем равенство в виде: $b = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$. Заменим значения на наименьшее: $c \leq \frac{1}{c} + \frac{1}{c}$, откуда $c \leq \sqrt{2}$. Равенство достигается при $x=c=\sqrt{2}$.

9. Симметрия. Без потери общности можно считать, что $a \geq b \geq c$. Раскроем модули и используем огрубление

$$3abc + 2a^3 - 2c^3 \geq 3c^3 + 2a^3 - 2c^3 = 2a^3 + c^3 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

10. Если одновременно $|a|, |b|, |c| \geq 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c \geq abc.$$

Если, например, $|a| < 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq b^2 + c^2 \geq |bc| \geq abc.$$

11. Уменьшим знаменатель каждой дроби:

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} \leq \frac{x^2}{x+x^2+xyz} = \frac{x}{1+x+yz}.$$

Далее, действуем аналогично примеру 4.

12. Увеличим каждое слагаемое, уменьшив знаменатель:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Затем просуммируем правую часть неравенства, представив для этого каждое слагаемое в виде суммы. Получим:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Литература

1. Арбит А.В. Неравенства и основные способы их доказательства. Часть I — М.: МЦНМО, — 2016.
2. Бибилов П.В. Неравенства в задачах. — М.: МЦНМО, — 2020.
3. Штерн А.С., Железная Н.О. Огрубление как способ доказательства неравенств. // Математика в школе, №1, — 2002.

Учимся доказывать неравенства

А.В. Шевкин,
город Москва
avshevkin@mail.ru

Рассмотрим несколько задач на доказательство неравенств.

Задача 1. Докажите неравенство:

$$4\pi - 4 < \sqrt{1 \cdot 7} + \sqrt{2 \cdot 6} + \sqrt{3 \cdot 5} < 4\pi \quad (1)$$

«Ну и чего же здесь сложного?» — скажет читатель. Сумма трёх корней — это $\sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{15}$.

Выпишем двойные неравенства для данных корней:

$$2 < \sqrt{7} < 3, \quad 3 < \sqrt{12} < 4, \quad 3 < \sqrt{15} < 4 \quad (2)$$

Сложим неравенства (2):

$$8 < \sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{15} < 11.$$

Неравенство $\sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{15} < 11 < 4\pi$ верно, так как $4\pi = 12,5\dots > 11$.

А неравенство $4\pi - 4 < 8$ неверно, но можно уточнить нижние границы в неравенствах (2):

$$2,6 < \sqrt{7} < 3, \quad 3,4 < \sqrt{12} < 4, \quad 3,8 < \sqrt{15} < 4 \quad (3)$$

Тогда после сложения неравенств (3) получим верное неравенство

$$9,8 < \sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{15} < 11.$$

Теперь неравенство $4\pi - 4 < \sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{15}$ верно, так как $4\pi - 4 < 4 \cdot 3,15 - 4 = 8,6 < 9,8$, а $9,8 < \sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{15}$.

Тем самым неравенство (1) доказано.

А если корней будет много? Складывать 99 неравенств занятие хлопотное, а если ещё придётся 99 раз уточнять границы неравенств... Можно, конечно, но хочется придумать более изящное решение. Давайте вернёмся к решению задачи 1 и понаблюдаем.

В неравенстве (1) два раза использовано число π — это можно попробовать связать с длиной окружности или с площадью круга. Под знаком корня записаны произведение двух множителей, суммы которых равны одному и тому же числу 8. Может быть, это подсказка? Винни-Пух в этом месте сказал бы: «Это ж-ж-ж неспроста!» Где мы встречали среднее геометрическое двух отрезков $\sqrt{a \cdot b}$?

В теореме о высоте, проведённой к гипотенузе прямоугольного треугольника.

А эти треугольники легко связать с окружностью...

Итак, строим полуокружность с диаметром 8. От одного конца диаметра откладываем отрезки длины 1, 2, 3, 4. Строим три прямоугольных треугольника, у которых проекции катетов равны 1 и 7, 2 и 6, 3 и 5. Высоты, проведённые к гипотенузе каждого из этих треугольников, равны соответственно $\sqrt{1 \cdot 7}$, $\sqrt{2 \cdot 6}$, $\sqrt{3 \cdot 5}$. Сумму этих высот не удаётся сравнить с длиной отрезка, выраженного через π . Тогда сложим площади прямоугольников с основаниями 1 и высотами $\sqrt{1 \cdot 7}$, $\sqrt{2 \cdot 6}$, $\sqrt{3 \cdot 5}$ и сравним эту сумму с площадью четверти круга. Получим:

$$\sqrt{1 \cdot 7} + \sqrt{2 \cdot 6} + \sqrt{3 \cdot 5} < 0,25 \cdot 16\pi = 4\pi \text{ — это как раз то, что надо!}$$

Теперь нам нужны такие прямоугольники, сумма площадей которых будет больше площади четверти круга. Получим четыре прямоугольника и верное неравенство:

$\sqrt{1 \cdot 7} + \sqrt{2 \cdot 6} + \sqrt{3 \cdot 5} + 4 > 4\pi$, дающее нам окончательный результат:

$$4\pi - 4 < \sqrt{1 \cdot 7} + \sqrt{2 \cdot 6} + \sqrt{3 \cdot 5}.$$

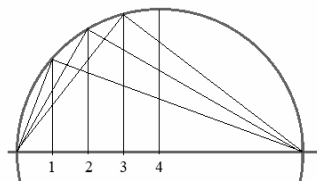


Рис. 1

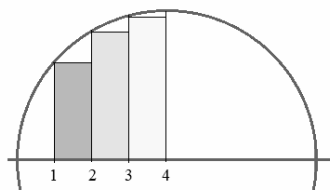


Рис. 2

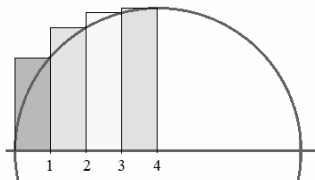


Рис. 3

Тем самым, мы доказали двойное неравенство (1).

Теперь у вас должна получиться чуть более трудная задача 2, а потом и трудная задача 3 из учебника И.Ф. Шарыгина «Геометрия, 7-9».

Задача 2. Докажите неравенство:

$$9\pi - 6 < \sqrt{11} + \sqrt{20} + \sqrt{27} + \sqrt{32} + \sqrt{35} < 9\pi.$$

Задача 3. Докажите неравенство:

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + \dots + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi.$$

Содержание

<i>Введение</i>	3
А.Д. Блинков <i>Вслед за теоремой Пифагора</i>	13
Ю.А. Блинков <i>Как переформулировать задачу?</i>	24
В.В. Буланкина <i>Алгоритмы подсчета вариантов в комбинаторике</i>	36
Г.Г. Левитас <i>Занятие</i>	47
В.А. Лецко <i>Новые свойства автомедианных треугольников</i>	54
Д.Б. Невидимый <i>А если не монотонна?</i>	78
Д.В. Прокопенко <i>Треугольник с углом 60°</i>	87
П.В. Чулков <i>Доказательство неравенств (огрубление уточнение, оценка)</i>	107
А.В. Шевкин <i>Учимся доказывать неравенства</i>	113