Учим математике-11

Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2023

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-11.** Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2023. — 84 с.

ISBN 978-5-4439-1786-3

В этом сборнике представлены избранные материалы десятой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики. Он прошел в Московской области на базе гимназии им. Е. М. Примакова с 30 апреля по 7 мая 2022 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-11
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Оригинал-макет: *А. Ширяева*, *Т. Струков*

Подписано в печать 03.04.2023 г. Формат $60 \times 90\ {}^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 5,5 печ. л. Тираж 250 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии «Белый ветер».

6+

ISBN 978-5-4439-1786-3

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***одиннадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики***. Этот семинар прошел в Московской области на базе гимназии им. Е.М. Примакова с 30 апреля по 7 мая 2022 года. Организаторами семинара являлись автономная некоммерческая общеобразовательная организация «Областная гимназия им. Е.М. Примакова», ГАОУ ДПО «Центр Педагогического Мастерства» г. Москвы (ЦПМ) и Московский Центр Непрерывного Математического Образования (МЦНМО) совместно с Всероссийской ассоциацией учителей математики.

Материалы десяти предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018, 2019, 2021 и 2022 гг. Кроме того, материалы первых девяти семинаров можно найти в интернете по адресу https://mccme.ru/nir/seminar/conf.htm.

В семинаре могли принять участие все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие около 120 человек, представлявших разные уголки России. Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение школы-семинара дало прекрасную возможность его участникам познакомиться с работой ряда московских учебных заведений: школы «Интеллектуал», лицея «Вторая школа», гимназии 1543, школ 218 и 2101, в которых проходили мастер-классы со школьниками. Эти мастер-классы проводили как ведущие учителя перечисленных школ, так и специально приглашённые преподаватели. Проведенные занятия «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия также проводили приглашенные опытные преподаватели. Кроме того, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, каждый участник семинара имел возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением. Это происходило в вечернее время в дополнение к заранее разработанной программе.

По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от ГАОУ ЦПМ. Успешное проведение школы-семинара обеспечили представительные программный и организационный комитеты.

Программный комитет семинара:

- Ященко И.В. — научный руководитель ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики ЦО «Пятьдесят седьмая школа» г. Москвы, кандидат физико-математических наук, лауреат премии правительства РФ в сфере образования — председатель;
- Блинков А.Д. — научный сотрудник МЦНМО, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования — заместитель председателя;
- Гладких А.В. — руководитель кафедры математики и информатики АНОО «Областная гимназия им. Е.М. Примакова», учитель в. к. к., старший эксперт ЕГЭ по математике, автор видеоуроков по подготовке к ЕГЭ и ОГЭ в рамках проекта Министерства Просвещения «Моя школа Online», член Всероссий-

ского экспертного педагогического совета при Министерстве Просвещения, председатель регионального отделения Всероссийской ассоциации учителей математики;

- Андреев Н.Н. — заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В.А. Стеклова РАН, лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых учёных, создатель проекта «Математические этюды», член Координационного Совета Кавказской математической олимпиады, лауреат Золотой медали РАН за пропаганду научных знаний, кандидат физико-математических наук;
- Высоцкий И.Р. — зав. Лабораторией теории вероятностей МЦНМО, ведущий научный сотрудник ФИПИ, научный руководитель кафедры математики АНОО «Областная гимназия им. Е.М. Примакова»
- Кожевников П.А. — председатель Задачного комитета Кавказской математической олимпиады, кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, старший научный сотрудник лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, член тренерского совета национальной команды России на международной математической олимпиаде, заместитель главного редактора по математике журнала «Квант», член Центральной предметной методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике, золотой медалист международной математической олимпиады 1992 года;
- Столбов К.М. — заместитель директора и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга, Почетный работник общего образования РФ;
- Чулков П.В. — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ.

Организационный комитет семинара:

- Блинков А.Д. — научный сотрудник МЦНМО, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования — председатель;
- Майсурадзе М.О. — директор АНОО «Областная гимназия им. Е.М. Примакова», победитель конкурса «Директор года России 2021», Почётный работник общего образования РФ, Почётный член Cambridge University Russian Society — заместитель председателя;
- Наконечный Н.А. — учитель математики, старший методист лицея «Вторая школа» г. Москвы — координатор и секретарь семинара;
- Зубарева С.И. — учитель математики школы №218 г. Москвы — координатор и секретарь семинара.
- Эдлин Ю.М. — учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга — координатор семинара;
- Баранова Т.А. — председатель МО учителей математики и информатики школы №218, куратор ресурсного центра проекта «Математическая вертикаль», член методической комиссии ряда олимпиад, лауреат гранта мэра Москвы;
- Барышев И.Н. — завуч школы №2101, учитель высшей категории, член РПМК по математике Московской области, куратор ресурсного центра проекта «Математическая вертикаль», неоднократный победитель и призёр творческих конкурсов учителей по математике;
- Бибиков П.В. — заведующий кафедрой математики лицея «Вторая школа», кандидат физико-математических наук, тренер сборной Москвы на Всероссийской олимпиаде школьников по математике;
- Сгибнев А.В. — заведующий кафедрой математики школы «Интеллектуал», кандидат физико-математических наук, неоднократный победитель и призёр творческих конкурсов учителей по математике;
- Хачатурян А.В. — заведующий кафедрой математики «Московской школы на Юго-западе №1543», Почётный работник образования г. Москвы, член методических комиссий и жюри многих математических олимпиад.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершать прогулки и экскурсии по Москве, посетить музеи и выставки. Кроме того, была возможность для спортивных занятий. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом. Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем, кто нашел силы и время подготовить статьи для этого сборника. Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда отличаются от названий докладов.

Программа одиннадцатой открытой школы-семинара

1 мая	
Время	Докладчики и содержание
9.30–10.30	Регистрация участников
10.30–10.45	Открытие и оргвопросы
10.45–11.45	**М.О. Майсурадзе** О гимназии Е.М. Примакова
12.00–13.30	**В.А. Рыжик** Камни преткновения учителя математики на извилистом профессиональном пути длиной 62 года
12.45–13.30	**А.Д. Блинков** О математической литературе для школьников и учителей
15.00–15.40	**К.М. Столбов** Как решить задачу

Время	Докладчики и содержание
15.50–17.20	**В.Б. Лецко** Применение векторов к решению задач по геометрии

2 мая	
Время	Докладчики и содержание
10.30–12.00	**М.Ю. Панов** Котёнок на лестнице и обобщённый эллипсограф да Винчи
12.15–13.00	**А.И. Сгибнев** Как содержание учебного материала может определять формат урока
13.15–14.00	**А.Е. Панкратьев** Задачи, допускающие различные решения
15.00–15.45	**И.В. Ященко** Новый ФГОС старших классов
Время	Круглый стол
16.00–17.15	**И.В. Ященко** Круглый стол по обсуждению ФГОС старших классов

3 мая	
Время	Докладчики и содержание
10.30–11.35	**А.С. Штерн** Линейные системы и линейные преобразования в профильном курсе алгебры
11.50–13.20	**В.А. Рыжик** Школьное геометрическое образование по А.Д. Александрову. Опыт 40 лет работы в соответствии с его идеями

Время	Докладчики и содержание
13.30–14.00	**А.П. Челкак** Смарт-Кенгуру
15.00–16.30	**П.В. Чулков** Олимпиады в работе учителя
16.40–17.25	**И.Р. Высоцкий** Примерная федеральная программа учебного курса «Вероятность и статистика» в основной школе

4 мая **Школа № 218**	
Время	Мастер-классы
10.30–11.15 11.30–12.15	9 класс **К.М. Столбов** Неравенства
10.30–11.15 11.30–12.15	7 класс **Ю.М. Эдлин** Формулы сокращенного умножения
12.35–13.20 13.40–14.25	6 класс **Н.А. Наконечный** Комбинаторика
12.35–13.20 13.40–14.25	6 класс **Ю.М. Эдлин** Логика

4 мая **Школа № 1543**	
Время	Мастер-классы
10.30–12.15	9 класс **Р.К. Гордин** Касающиеся окружности

Время	Мастер-классы
10.30–12.15	11 класс **А.С. Штерн** Алгебра
12.30–13.15 13.45–14.30	8 класс **А.А. Заславский** Делимость и комбинаторика
12.30–13.15 13.45–14.30	10 класс **Д.В. Прокопенко** Вписанный четырехугольник, прямая Симсона и средняя линия треугольника

4 мая **Школа «Интеллектуал»**	
Время	Мастер-классы
10.40–11.20 11.35–12.15	6 класс **С.В. Ламзин** Повторение курса математики 5-6 кл.
10.40–11.20 11.35–12.15	6 класс **А.В. Куликова** Нестандартные задачи
12.50–13.30 13.40–14.20	7 класс **А.О. Сысоев** Лабораторная.работа (матем. модели)
12.50–13.30 13.40–14.20	7 класс **А.И. Сгибнев** Геометрия

5 мая **Школа № 218**	
Время	Мастер-классы
10.30–11.15 11.30–12.15	6 класс **А.Д. Блинков** Вычисление некоторых сумм
10.30–11.15 11.30–12.15	10 класс **П.В. Чулков** Олимпиадные задачи на повторение
12.35–13.20 13.40–14.25	7 класс **Г.А. Мерзон** Многоугольники на клетчатой бумаге
12.35–13.20 13.40–14.25	8 класс **Д.Г. Мухин** Графики функций

5 мая **Лицей «Вторая школа»**	
Время	Мастер-классы
10.50–12.30	10 класс **П.В Бибиков** Алгебра
10.50–12.30	7 класс **А.И. Малахов** Алгебра
10.50–12.30	10 класс **К.В. Козеренко** Геометрия
12.50–14.40	9 класс **М.А. Волчкевич** Геометрия

Время	Мастер-классы
12.50–14.40	10 класс **К.В. Козеренко** Геометрия
12.50–14.40	10 класс **С.И. Васянин** Алгебра

5 мая **Школа № 2101**	
Время	Мастер-классы
10.30–12.15	11 класс **В.В. Трушков** Расположение корней квадратного трехчлена в задачах
10.30–12.15	9 класс **И.Н. Барышев** Движения плоскости: решение задач
10.30–12.15	7 класс **Г.И. Вольфсон** Делимость+формулы сокращенного умножения = ?
12.35–14.20	10 класс **И.Н. Барышев** Векторная арифметика и ее применение в решении задач
12.35–14.20	7 класс **В.В. Трушков** Параметр в линейных уравнениях
12.35–14.20	8 класс **Г.И. Вольфсон** Делимость+квадратные уравнения = ?

6 мая	
Время	Докладчики и содержание
10.30–12.00	**Г.И. Вольфсон** Найти логику в стоге сена
12.15–14.00	**К.В. Медведев** Элементы прикладной статистики
15.00–15.45	**А.С. Гусев** Онлайн проекты «Сириуса»
Время	Круглый стол
16.00–17.15	**А.Д. Блинков** Круглый стол: плюсы и минусы онлайн-образования

7 мая	
Время	Докладчики и содержание
10.30–12.00	**И.Р. Высоцкий** Графические методы решения задач по вероятности в 8-9 классах
12.15–14.00	**Д.В. Прокопенко** Несколько геометрических конструкций
Время	Подведение итогов семинара
15.00–16.30	**А.Д. Блинков** Рефлексия семинара, открытый микрофон, закрытие

Окружность девяти точек и прямая Эйлера

А. Блинков,
город Москва
ablinkov2021@gmail.com

Существует много красивых фактов геометрии треугольника и теорема об окружности девяти точек — одна из них.

Теорема 1. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности.*

Рассмотрим несколько способов её доказательства, начав с того, который требует минимума предварительных знаний.

Доказательство. Пусть дан остроугольный треугольник ABC, AA_1, BB_1 и CC_1 — его высоты, H — ортоцентр (точка пересечения высот), M — середина BC, E — середина AH (см. рис. 1). Проведём отрезок EM и докажем, что окружность с диаметром EM является окружностью, проходящей через все указанные точки. Сразу заметим, что точка A_1 лежит на этой окружности, так как $\angle EA_1M = 90°$.

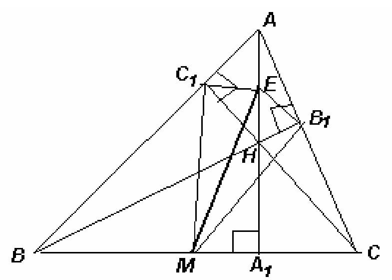


Рис. 1

Для дальнейших рассуждений воспользуемся тем, что точки A, B_1, H и C_1 лежат на окружности с диаметром AH (это следует из того, что $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90°$). Кроме того, B_1M — медиана прямоугольного треугольника BB_1C, проведённая к гипотенузе. Тогда $\angle BB_1M = \angle B_1BC = 90° - \angle ACB = \angle EAB_1 = \angle EB_1A$. Поэтому угол EB_1M прямой, то есть точка B_1 лежит на окружности с диаметром EM. Аналогично доказывается, что точка C_1 лежит на указанной окружности (это также можно вывести из равенства треугольников EB_1M и EC_1M по трём сторонам).

Рассмотрев далее окружность, диаметром которой является отрезок, соединяющий середины BH и AC, получим, что она также проходит через точки A_1, B_1 и C_1. Но эти точки однозначно определяют окружность, поэтому этот отрезок — диаметр той же окружности. Аналогично, еще одним её диаметром является отрезок, соединяющий середины CH и AB. Таким образом, все девять указанных точек лежат на одной окружности.

Упражнение 1. *Докажите, что в треугольнике ABC с ортоцентром H середины сторон AB, AC и середины отрезков BH, CH являются вершинами прямоугольника.*

Понятно, что есть ещё два аналогичных прямоугольника и все три вписаны в окружность девяти точек. Их иногда называют прямоугольниками Эйлера, а саму окружность — окружностью Эйлера.

Упражнение 2. *Докажите теорему об окружности девяти точек другим способом: используя прямоугольники Эйлера.*

Заметим, что мы провели доказательство теоремы только для остроугольного треугольника. Нужно ли отдельно рассматривать случай тупоугольного треугольника? Для ответа на этот вопрос изобразим окружность девяти точек остроугольного треугольника ABC (см. рис. 2) и заметим, что если H — ортоцентр треугольника ABC, то A — ортоцентр тупоугольного треугольника BHC. При этом, у треугольника BHC та же самая окружность девяти точек, так как середины сторон AC и BC просто меняются «ролями» с серединами отрезков BH и CH, а «роли» остальных точек не меняются!

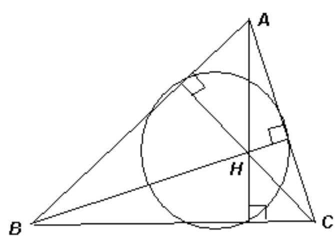


Рис. 2

Точки A, B, C и H, любая из которых является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими, обычно называют ортоцентрической четвёркой. Таким образом, у четырёх треугольников ABC, BHC, AHB и AHC окружность девяти точек одна и та же.

Упражнение 3. *Даны прямоугольный треугольник* ABC ($\angle A = 90°$) *и его окружность девяти точек. Укажите, какие из девяти точек совпадают.*

Найдём теперь радиус окружности девяти точек. Пусть R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Так как окружность девяти точек содержит середины сторон треугольника, то для срединного треугольника (его вершины — середины сторон) она является описанной. Но срединный треугольник подобен исходному с коэффициентом 0,5, поэтому радиус окружности девяти точек равен $0{,}5R$.

Леонард Эйлер (нем. Leonhard Euler; 15 апреля 1707, Базель, Швейцария — 7(18) сентября 1783, Санкт-Петербург,

Российская империя) — швейцарский, прусский и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Крупнейший математик XVIII века, считается одним из величайших математиков в истории. Эйлер — автор более чем 850 работ (включая два десятка фундаментальных монографий) по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям. Он глубоко изучал медицину, химию, ботанику, воздухоплавание, теорию музыки, множество европейских и древних языков. Академик Петербургской, Берлинской, Туринской, Лиссабонской и Базельской академий наук, иностранный член Парижской академии наук. Первый российский член Американской академии искусств и наук.

Для того, чтобы показать другой подход к доказательству теоремы об окружности девяти точек, нам потребуется важная лемма.

Она же позволит доказать теорему о прямой Эйлера, а также найдёт применение при решении многих задач.

Лемма 1. *Расстояние от центра описанной окружности до стороны треугольника в два раза меньше расстояния от противолежащей вершины до ортоцентра.*

Доказательство. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC, O — центр описанной около него окружности, AA_1 — высота, H — ортоцентр, M — середина BC (см. рис. 3а).

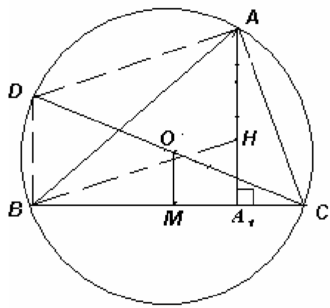


Рис. 3а

Докажем, что $OM = \frac{1}{2}AH$. Для этого проведем описанную и окружность и ее диаметр CD. Тогда $\angle DBC = 90°$, значит, $BD \parallel AH$. Кроме того, $DA \perp AC$ и $BH \perp AC$, поэтому, $DA \parallel BH$ D. Таким образом, $BDAH$ — параллелограмм. Так как O — середина DC, M — середина BC, то OM — средняя линия треугольника BCD, следовательно, $OM \parallel BD \parallel AH$ и $OM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AH$.

Следствие. *Пусть E — середина отрезка AH, тогда четырехугольники $OMHE$ и $OMEA$ — параллелограммы.*

Действительно, $OM \parallel AH$ и $OM = AE = EH$ (см. рис. 3б).

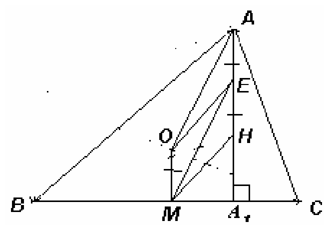


Рис. 3б

Такие параллелограммы также иногда называют именем Эйлера, но чаще — вспомогательными параллелограммами, имея ввиду, что их знание помогает при доказательстве многих фактов.

Упражнение 4. *Покажите, что лемма 1 верна и для случая, когда высота лежит вне треугольника.*

Упражнение 5. *В треугольнике* ABC *:* $BC = a$ *;* $\angle BAC = \alpha$*,* H *— ортоцентр,* R *— ее радиус описанной окружности. Докажите, что: а)* $AH^2 = 4R^2 - a^2$ *; б)* $AH = 2R|\cos\alpha|$.

Покажем использование вспомогательных параллелограммов для доказательства теоремы об окружности девяти точек.

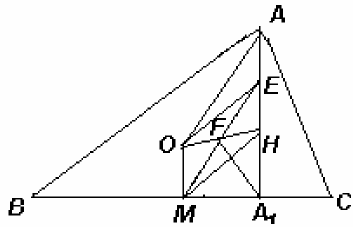


Рис. 4

Пусть F — середина OH (см. рис. 4). Так как F — точка пересечения диагоналей параллелограмма $OMHE$ и $\angle MA_1E = 90°$; то $FE = FM = FA_1 = \frac{1}{2}ME$. Значит, точки E , M и A_1 лежат на окружности с центром F . Так как $OMEA$ — параллелограмм, то $ME = OA = R$, то есть радиус этой окружности равен $\frac{1}{2}R$.

Так как положение точки F не зависит от того, середину какой стороны и основание какой высоты мы рассматриваем, то проведя аналогичные рассуждения для отрезков BH и CH , получим другие точки, лежащие на этой же окружности: середины сторон AB и AC , основания высот BB_1 и CC_1 , середины отрезков BH и CH .

Теперь сформулируем и докажем теорему о прямой Эйлера.

Теорема 2. *В любом треугольнике центр* O *описанной окружности, точка* G *пересечения медиан и ортоцентр* H *лежат на одной прямой. При этом, точка* G *делит отрезок* OH *в отношении* $1:2$*, считая от точки* O .

Доказательство. Проведем медиану AM , которая пересечет OH в точке G (см. рис. 5). Так как $OM \parallel AH$ и $OM = \frac{1}{2}AH$, то треугольники OGM и HGA подобны, следовательно,

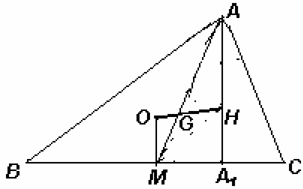


Рис. 5

$\frac{OG}{GH} = \frac{GM}{GA} = \frac{OM}{HA} = \frac{1}{2}$. Таким образом, G — точка пересечения медиан треугольника ABC, откуда и следует утверждение теоремы.

Отношение $OG:GH$ можно было найти из других соображений: прямая AM пересекает сторону OE параллелограмма $OEHM$ в ее середине (см. рис. 4), поэтому точка G её пересечения с диагональю OH делит эту диагональ в отношении $1:2$.

Ещё один способ введения теорем об окружности и прямой Эйлера основан на применении преобразований плоскости. Но сначала нам потребуется сформулировать и доказать свойство ортоцентра треугольника, которое также можно считать леммой.

Лемма 2. *Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на его описанной окружности.*

Доказательство. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC (см. рис. 6). Понятно, что достаточно провести рассуждение для одной из сторон. Это можно сделать по-разному.

Первый способ. Продлим высоту AA_1 до пересечения с описанной окружностью в точке H_1. Так как $\angle H_1BA_1 = \angle HAC = \angle HBA_1$, то точки H_1 и H симметричны относительно BC.

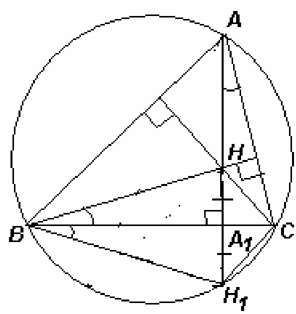


Рис. 6

Второй способ. Пусть точка H_1 симметрична точке H относительно BC. Тогда $\angle BH_1C = \angle BHC = 180° - \angle BAC$. Следовательно, точка H_1 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

Упражнение 6. *Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и BCH, где H — ортоцентр треугольника ABC, симметричны относительно BC.*

Упражнение 7. *Проверьте, что утверждение леммы 2 выполняется для случаев, когда ортоцентр не лежит внутри треугольника.*

Рассмотрим теперь треугольник ABC и точку H_1, симметричную его ортоцентру H относительно BC. По доказанному выше, H_1 лежит на описанной окружности треугольника. Проведем также прямую через центр O описанной окружности и середину M стороны BC, которая является серединным перпендикуляром к BC (см. рис. 7).

Пусть H_2 симметрична H_1 относительно прямой OM. Так как OM — ось симметрии окружности, то точка H_2 лежит на той же окружности. Так как композиция симметрий с перпендикулярными осями является центральной симметрией относительно точки пересечения осей, то H_2 симметрична H относительно точки M.

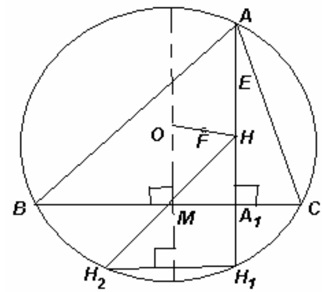


Рис. 7

Рассмотрим гомотетию с центром H и коэффициентом $k = 0{,}5$. Образами точек H_1, H_2 и A при этой гомотетии являются точки A_1, M и E (середина AH) соответственно, поэтому окружность, проходящая через эти точки, является образом окружности, описанной около ABC. Кроме того, образом точки O является середина F отрезка OH. Тем самым мы вновь получаем окружность девяти точек.

Отметим, что так как $\angle AH_1H_2 = 90°$, то AH_2 — диаметр описанной окружности.

Упражнение 8. *Докажите утверждение о композиции симметрий, использованное выше.*

Упражнение 9. *Не используя композиции симметрий, докажите, что точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины стороны, лежит на описанной окружности.*

Приведённое выше доказательство теоремы о прямой Эйлера можно трансформировать, используя гомотетию вместо подобных треугольников. Попутно это даст возможность получить важное свойство срединного треугольника.

Вернёмся к рис. 5 и рассмотрим гомотетию с центром в точке G пересечения медиан и коэффициентом $k = -0{,}5$. При этой гомотетии образом вершины A является середина M стороны BC, тогда образом луча AH является ему противоположно направленный луч MO, а из соотношения $OM = \frac{1}{2}AH$ следует, что образом точки H является точка O. Тем самым доказано, что G лежит на отрезке OH и делит его в отношении $1:2$, считая от точки O.

При этой же гомотетии образами вершин B и C являются середины сторон AC и AB соответственно, то есть образом треугольника ABC является его серединный треугольник. Тогда образами высот треугольника ABC являются высоты его серединного треугольника. Учитывая, что образом точки H является точка O, получим, что центр описанной окружности треугольника является ортоцентром его серединного треугольника.

Упражнение 10. *Через вершины треугольника ABC проведены прямые, параллельные противолежащим сторонам. Точки их попарного пересечения являются вершинами нового треугольника. Какую «роль» в этом треугольнике играет ортоцентр треугольника ABC?*

Задачи для самостоятельного решения

1. *Треугольники ABC и A_1BC вписаны в одну и ту же окружность, H и H_1 — их ортоцентры. Докажите, что $AH = A_1H_1$.*

2. *В остроугольном треугольнике ABC: AA_1 — высота, M — середина BC, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, F — середина OH. Найдите угол A_1FM, если $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.*

3. *В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AL пересекает отрезок ME в точке N (M — середина BC, E — середина AH, где H — ортоцентр). Докажите, что: а) $NE = AE$; б) $\angle ANH = 90^\circ$.*

4. *Точка* G *такова, что точки, симметричные ей относительно сторон треугольника, лежат на его описанной окружности. Верно ли, что* G *— ортоцентр треугольника* ABC*?*

5. *Найдите угол* A *треугольника* ABC*, если на его окружности девяти точек лежит середина отрезка: а)* AO*, где* O *— центр описанной окружности; б)* AI*, где* I *— центр вписанной окружности.*

6. (А. Егоров) *Докажите, что описанная окружность треугольника делит пополам отрезки, соединяющие центр ее вписанной окружности с центрами вневписанных окружностей.*

7. *Докажите, что в любом треугольнике его срединный треугольник и треугольник, образованный серединами отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, равны, а их стороны соответственно параллельны.*

8. *Докажите, что центры описанных окружностей треугольников* ABC*,* HAB*,* HBC *и* HCA *образуют четырехугольник, симметричный четырехугольнику* $HABC$*.*

9. *Через ортоцентр* H *треугольника* ABC *провели прямые, параллельные сторонам* AB *и* AC *и пересекающие прямую* BC *в точках* D *и* F *соответственно. Через точки* D *и* F *проведены перпендикуляры к* BC*, пересекающие стороны* AB *и* AC *в точках* D' *и* F'*. Докажите, что прямая* $D'F'$ *пересекает окружность, описанную около* ABC*, в точках, диаметрально противоположных вершинам* B *и* C*.*

10. (Формула Гамильтона) *В треугольнике* ABC*:* O *— центр описанной окружности,* H *— ортоцентр. Докажите, что* $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$*.*

11. *Пусть* H *— ортоцентр треугольника* ABC*. Докажите, что прямые Эйлера треугольников* ABC*,* HAB*,* HBC *и* HCA *пересекаются в одной точке.*

12. *В треугольнике* ABC *точка* H_1*, симметрична ортоцентру* H *относительно вершины* C*, а точка* C_1 *симметрична точке* C *относительно середины стороны* AB*. Докажите, что центр* O

окружности, описанной около треугольника ABC*, является серединой отрезка* H_1C_1.

13. *Из вершины* A *остроугольного треугольника* ABC *провели высоту* AE *и диаметр описанной около треугольника окружности, который пересек сторону* BC *в точке* D*. Докажите, что описанная окружность треугольника* ADE *касается окружности, девяти точек треугольника* ABC.

14. *Прямая Эйлера треугольника* ABC *пересекает прямые* AB *и* AC *в точках* P *и* Q *так, что* $AP = AQ$*. Найдите угол* A.

15. *Центр* I *вписанной окружности треугольника* ABC *лежит на прямой Эйлера. Докажите, что треугольник* ABC *— равнобедренный.*

16. *Дан треугольник* ABC*,* O *— центр его описанной окружности,* O_1*,* O_2 *и* O_3 *— точки, симметричные точке* O *относительно прямых* AB*,* BC *и* AC*. Докажите, что середины сторон треугольника* $O_1O_2O_3$ *лежат на окружности девяти точек треугольника* ABC.

17*. *Найдите геометрическое место ортоцентров всевозможных треугольников, вписанных в данную окружность.*

18*. (П. Кожевников) *Фиксированы окружность, точка* A *на ней и точка* K *вне окружности. Секущая, проходящая через* K*, пересекает окружность в точках* P *и* Q*. Докажите, что ортоцентры треугольников* APQ *лежат на фиксированной окружности.*

19. *Докажите, что в любом треугольнике отношение радиусов описанной и вписанной окружностей не меньше двух. Когда достигается равенство?*

20*. (А. Заславский) *В остроугольном треугольнике ровно один из углов равен* $60°$*. Докажите, что прямая Эйлера отсекает от него равносторонний треугольник.*

21. *Известно, что в неравностороннем треугольнике* ABC *точка, симметричная точке пересечения медиан относительно* *стороны* BC, *принадлежит описанной окружности. Докажите, что* $\angle BAC < 60°$.

22*. (Е. Диомидов) *Дан острый угол с вершиной* A *и точка* E *внутри него. Постройте на сторонах угла точки* B *и* C *так, чтобы* E *была центром окружности девяти точек треугольника* ABC.

23*. (В. Протасов) *Дана окружность, точка* A *на ней и точка* M *внутри нее. Рассматриваются все хорды* BC, *проходящие через* M. *Докажите, что окружности девяти точек, проходящие через середины сторон всех треугольников* ABC, *касаются некоторой фиксированной окружности.*

24*. (А. Заславский) *Медианы* AA_0, BB_0 *и* CC_0 *остроугольного треугольника* ABC *пересекаются в точке* M, *а высоты* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *— в точке* H. *Касательная к описанной окружности треугольника* $A_1B_1C_1$ *в точке* C_1 *пересекает прямую* A_0B_0 *в точке* C'. *Точки* A' *и* B' *определяются аналогично. Докажите, что* A', B' *и* C' *лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой* MH.

Ответы, указания, решения и комментарии

Упражнения

1. Введём обозначения середин указанных отрезков так, как на рис. 8. Тогда по теореме о средней линии треугольника: $KP \parallel AH \parallel LQ$ и $KL \parallel BC \parallel PQ$. Кроме того, $AH \perp BC$.

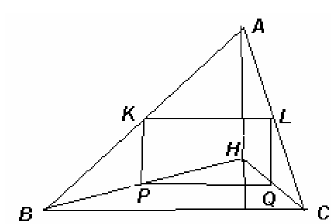


Рис. 8

2. Любые два прямоугольника Эйлера имеют общую диагональ. Окружность, у которой эта диагональ является диаметром, содержит все вершины этих прямоугольников. Аналогично и вершины третьего прямоугольника Эйлера лежат на этой окружности. А основания высот ей принадлежат, так как диаметры окружности видны из них под прямыми углами.

3. Так как A — ортоцентр треугольника, то в этой точке совпадают основания двух высот и она же является «вырожденной» серединой отрезка, соединяющего эту вершину с ортоцентром. Кроме того, середины сторон AB и BC совпадают с серединами отрезков, соединяющих вершины B и C с ортоцентром.

4. Рассуждения аналогичны доказательству леммы для остроугольного треугольника (см. рис. 9).

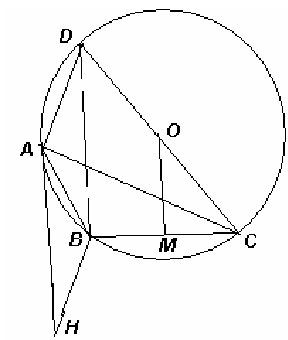


Рис. 9

5. Оба равенства можно получить из прямоугольного треугольника DBC (см. рис. 3а и рис. 9). Наличие модуля в пункте б) отражает два случая расположения центра описанной окружности относительно треугольника.

6. Утверждение следует доказанной леммы 2. Окружность, описанная около ABC, содержит точку H_1, поэтому она является описанной и около треугольника BH_1C, симметричного треугольнику BHC.

7. В прямоугольном треугольнике точки, симметричные ортоцентру относительно катетов, совпадают с ортоцентром, а, точка, симметричная относительно гипотенузы, лежит на описанной окружности, так как гипотенуза является диаметром. Для тупоугольного треугольника справедливость утверждения леммы 2 следует факта, сформулированного в упражнении 6.

8. Рассмотрим $P(x; y)$ в декартовой системе координат. При симметрии относительно оси OX получим точку $P_1(x; -y)$. Точка, симметричная P_1 относительно оси OY — это $P_2(-x; -y)$, которая симметрична точке P относительно начала координат.

9. Пусть точка H_2 симметрична точке H относительно середины M стороны BC, тогда $BHCH_2$ — параллелограмм. Значит,

$\angle BH_2C = \angle BHC = 180° - \angle BAC$, откуда следует, что H_2 лежит на описанной окружности треугольника ABC.

10. Ортоцентр треугольника ABC является центром окружности, описанной около полученного треугольника, так как ABC — его срединный треугольник.

Задачи

1. Независимо от расположения вершин A и A_1 на окружности, $AH = 2OM = AH_1$.

2. *Ответ:* $2|\beta - \gamma|$.

Так как $MOHA_1$ — прямоугольная трапеция, то $FM = FA_1$ (см. рис. 10). Пусть E — середина AH, тогда $\angle A_1FM = 2\angle A_1EM = 2\angle A_1AO$. Так как

$$\angle A_1AB = 90° - \beta,$$

$$\angle BAO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \gamma,$$

то $\angle A_1AO = |\angle A_1AB - \angle BAO| = |\beta - \gamma|$.

Следовательно, $\angle A_1FM = 2|\beta - \gamma|$.

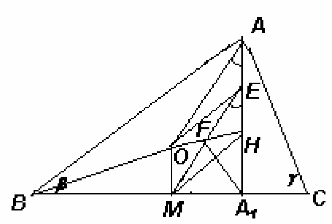


Рис. 10

3. См. рис. 11. Воспользуемся тем, что биссектриса AL угла BAC является также и биссектрисой угла OAH (лучи AO и AH симметричны относительно биссектрисы AL, так как

$$\angle OAB = 0{,}5(180° - \angle AOB) =$$
$$= 90° - \angle ACB = \angle HAC.$$

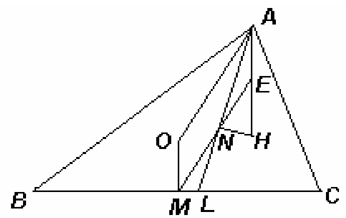


Рис. 11

а) треугольник AEN, отсекаемый от параллелограмма $OMEA$ биссектрисой его угла, — равнобедренный;

б) $EA = EH = EN$, значит, $\angle ANH = 90°$.

4. *Ответ:* верно.

Пусть точка G' симметрична G относительно BC, тогда

$$\angle BGC = \angle BG'C = 180° - \angle BAC = \angle BHC,$$

где H — ортоцентр треугольника ABC (см. рис. 12). Следовательно, G лежит на окружности, симметричной описанной относительно BC. Аналогично получим, что G также лежит на окружностях, симметричных описанной относительно AC и AB. Но три окружности не могут пересекаться более, чем в одной точке, поэтому G совпадает с H.

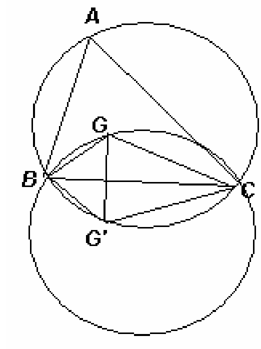


Рис. 12

Достаточно провести рассуждение для двух окружностей, симметричных описанной, если учесть, что они пересекаются не более, чем в двух точках, из которых одна — это вершина треугольника ABC.

5. *Ответ:* а), б) $60°$.

Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC. Тогда $\angle B'A'C' = \angle BAC = \alpha$.

а) Пусть K — середина AO, тогда $B'K$ и $C'K$ — средние линии треугольников AOB и AOC соответственно (см. рис. 13). Следовательно, $\angle B'KC' = \angle BOC = 2\alpha$. Так как окружность девяти точек описана около $B'A'C'K$, то $2\alpha + a = 180°$, то есть $\alpha = 60°$.

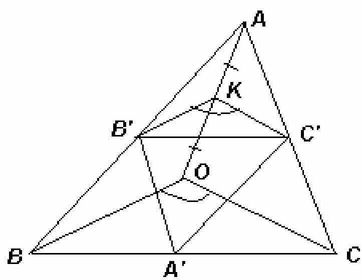


Рис. 13

б) Повторив рассуждения пункта а), но учитывая при этом, что $\angle BIC = 90° + 0{,}5\alpha$, получим: $90° + 0{,}5\alpha + \alpha = 180°$, то есть $\alpha = 60°$.

6. Пусть X, Y и Z — центры вневписанных окружностей треугольника ABC (см. рис. 14).Тогда точки A, B и C — основания высот треугольника XYZ (биссек-

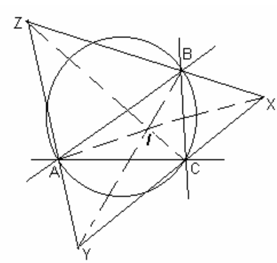


Рис. 14

трисы внутреннего и внешнего углов треугольника перпендикулярны). Следовательно, Центр I вписанной в треугольник ABC окружности — это ортоцентр треугольника XYZ, значит, окружность девяти точек этого треугольника проходит через середины отрезков IX, IY и IZ.

Доказанное утверждение также следует из теоремы Мансиона (обобщение теоремы о «трилистнике»).

7. Это следует из того, что указанные треугольники симметричны относительно центра окружности девяти точек исходного треугольника (см. прямоугольники Эйлера).

8. Из утверждения, формулированного в упражнении 6, и леммы 1 следует, что центры описанных окружностей треугольников HAB, HBC и HCA симметричны соответствующим вершинам треугольника ABC относительно центра окружности девяти точек, общей для этих треугольников. Центр описанной окружности треугольника ABC симметричен ортоцентру H относительно этой же точки.

9. См. рис. 15. Так как $AHDD'$ и $AHFF'$ — параллелограммы, то

$$DD' = AH = FF'.$$

Следовательно, $D'F' \parallel BC$. Кроме того, расстояние между этими прямыми равно $2OM$, значит, они симметричны относительно центра O окружности, что равносильно утверждению задачи.

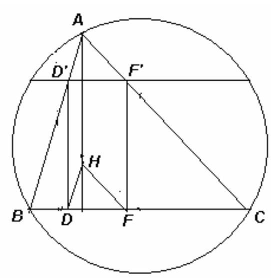


Рис. 15

10. *Первый способ.*

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \Leftrightarrow \overline{OH} - \overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC} \Leftrightarrow \overline{AH} = 2\overline{OM}.$$

Последнее равенство уже доказано (см. лемму 1).

Второй способ. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC, тогда $\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$. По теореме о прямой Эйлера $\overline{OH} = 3\overline{OG}$, откуда и следует утверждение задачи.

11. Выше доказано, что окружности девяти точек треугольников ABC, HAB, HBC и HCA совпадают. А прямая Эйлера каждого треугольника проходит через центр его окружности девяти точек.

12. *Первый способ.* Пусть D — середина стороны AB, а прямые H_1O и CC_1 пересекаются в некоторой точке C_2 (см. рис. 16а). Тогда $OD \parallel H_1C$ и $2OD = CH = CH_1$. Следовательно, OD — средняя линия треугольника H_1CC_1, то есть $CD = C_2D$. Следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают, значит, O — середина H_1C_1, что и требовалось.

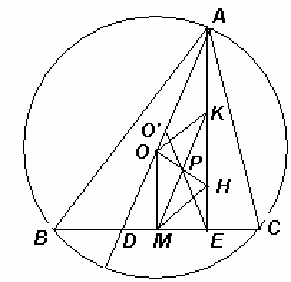


Рис. 16а

Второй способ. Воспользуемся тем, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника и диаметрально противоположны соответствующим вершинам. Тогда, если точка H_2 симметрична точке H относительно точки D — середины AB, то CH_2 — диаметр описанной окружности (см. рис. 16б). Кроме того, равны треугольники DCH и DC_1H_2. Тогда треугольник OC_1H_2 будет равен треугольнику OH_1C, из чего и следует утверждение задачи.

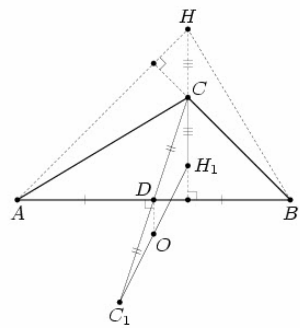


Рис. 16б

13. Пусть O и O' — центры описанных окружностей треугольников ABC и ADE соответственно, тогда O — середина проведенного диаметра, а O' — середина AD (см. рис. 17). Окружность девяти точек треугольника ABC — это окружность, проходящая через середины сторон этого треугольника.

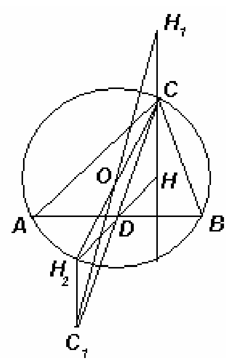


Рис. 17

Её центр P — середина отрезка OH, где H — ортоцентр треугольника ABC, и она проходит через точку E.

Опустим перпендикуляр OM на сторону BC. Пусть K — середина AH, тогда $OMHK$ — параллелограмм, следовательно, P — середина отрезка MK. Так как $OMKA$ — также параллелограмм, то прямая EP проходит через середину AD — точку O'. Таким образом, точки O', P и E лежат на одной прямой, а это означает, что окружности, указанные в условии, касаются в точке E.

14. *Ответ:* $60°$ или $120°$.

Так как радиус описанной окружности и высота треугольника симметричны относительно биссектрисы, проведенной из той же вершины (см. решение задачи 3), то условие задачи равносильно тому, что равнобедренным является треугольник AOH, где O — центр описанной окружности, H — ортоцентр $(AO = AH)$.

Так как $AH = 2OM$ и $AO = BO = R$, то из прямоугольного треугольника BOM получим, что $\angle MBO = 30°$. Тогда $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = 60°$ (остроугольный треугольник, см. рис. 18а) или $\angle BAC = 180° - \frac{1}{2}\angle BOC = 180° - 60° = 120°$ (тупоугольный треугольник, см. рис. 18б).

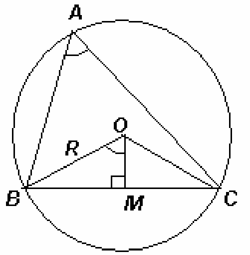


Рис. 18а

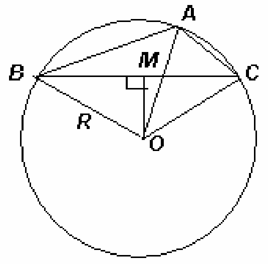


Рис. 18б

15. Пусть точка I лежит на прямой OH. Проведем биссектрисы AI и BI, которые пересекут окружность, описанную около ABC, в точках A' и B' соответственно (см. рис. 19). Тогда $OA' \perp BC$ и $OB' \perp AC$. Из подобия треугольников OIA' и HIA получим: $\frac{OI}{IH} = \frac{QA''}{AH}$. Аналогично, $\frac{OI}{IH} = \frac{QB''}{BH}$. Так как $OA' = OB' = R$, то $AH = BH$. Следовательно, $AC = BC$.

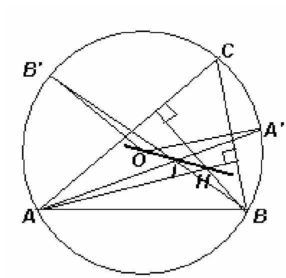


Рис. 19

16. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, A_2 — середина отрезка O_1O_3 (см. рис. 20). Так как A_2C_1 и A_2B_1 — средние линии треугольника O_1OO_3, то $A_2C_1OB_1$ — параллелограмм. Поэтому $\angle C_1A_2B_1 + \angle C_1A_1B_1 = \angle C_1OB_1 + \angle C_1AB_1 = 180°$. Следовательно, точка A_2 лежит на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, то есть на окружности девяти точек треугольника ABC. Аналогично для середин B_2 и C_2 двух других сторон треугольника $O_1O_2O_3$.

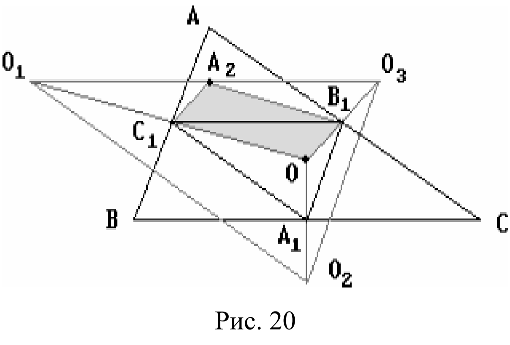


Рис. 20

17. *Ответ:* внутренность круга с тем же центром в 3 раза большего радиуса.

Докажем сначала, что геометрическое место точек пересечения медиан указанных треугольников есть внутренность круга, ограниченного данной окружностью. Действительно, точка пересечения медиан каждого указанного треугольника лежит внутри него и, значит, внутри его описанной окружности. Обратное, пусть G — произвольная точка внутри описанной окружности. Проведем через неё диаметр и пусть A — ближайший к G конец этого диаметра. На продолжении отрезка AG отложим отрезок $GM = 0{,}5AG$; тогда точка M лежит внутри круга. Проведём через M хорду BC, перпендикулярную AM. Точка M — середина этой хорды, значит, G — точкой пересечения медиан треугольника ABC.

По теореме о прямой Эйлера $\overline{OH} = 3\overline{OG}$. Следовательно, искомое ГМТ является образом внутренних точек данного круга при гомотетии с его центром O и коэффициентом $k = 3$.

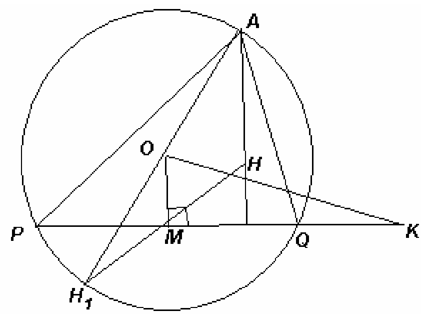


Рис. 21

18. Пусть M — середина отрезка PQ, H — ортоцентр треугольника, O — центр описанной окружности (см. рис. 21). Тогда $\angle OMK = 90°$, то есть точка M лежит на окружности с диаметром OK. Рассмотрим точку H_1, симметричную H относительно точки M. Она лежит на описанной окружности треугольника APQ и диаметрально противоположна вершине A. Следовательно, точка H_1 — фиксирована. Заметим, что при гомотетии с центром H_1 и коэффициентом $k = 2$ точка H является образом точки M. Поскольку точка M лежит на фиксированной окружности, то и точка H также лежит на фиксированной окружности.

Решение можно было завершить и по-другому. Так как точка M движется по окружности, то по фиксированной окружности движется и точка G пересечения медиан треугольника APQ. Гомотетия с фиксированным центром O и коэффициентом $k = 3$ переводит G в H, так что и H движется по окружности.

19. Пусть ABC — произвольный треугольник, R и r — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Рассмотрим окружность девяти точек треугольника ABC (см. рис. 22). Радиус этой окружности равен $0{,}5R$. Проведем касательные к ней, параллельные сторонам треугольника ABC. Точки их попарного пересечения образуют треугольник $A_1B_1C_1$, в который эта окружность вписана.

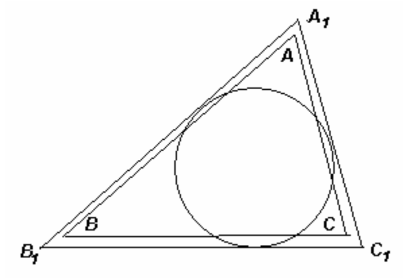


Рис. 22

Так как окружность имеет общие точки с каждой из сторон треугольника ABC, то она либо совпадает с вписанной, либо пересекает какие-то её стороны. Значит, треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом $k \geq 1$, поэтому $0{,}5R \geq r$, то есть $\frac{R}{r} \geq 2$. Равенство достигается, если $k = 1$, то есть когда треугольник $A_1B_1C_1$ совпадает с треугольником ABC. В этом случае окружность, проходящая через середины сторон, совпадает с окружностью, вписанной в треугольник ABC, значит, ABC — равносторонний.

Требуемое неравенство также можно получить из формулы Эйлера расстояния между центрами описанной и вписанной окружности треугольника.

20. Пусть O — центр окружности, описанной около данного треугольника ABC, H — ортоцентр, R — радиус описанной окружности (см. рис. 23). Тогда $CH = 2R\cos\angle ACB$ (см. упражнение 5).

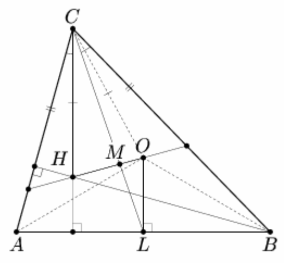


Рис. 23

Пусть теперь $AC < BC$ и $\angle ACB = 60°$, тогда $CH = R = CO$. Кроме того, биссектриса угла OCH совпадает с биссектрисой угла ACB (см. решение задачи 3). Таким образом, эта биссектриса перпендикулярна OH, поэтому прямая OH отсекает на лучах CB и CA равные отрезки. Так как

$\angle CAB > \angle CBA$ и $\angle HCA = 90° - \angle CAB$, а $\angle OCA = 90° - \angle CBA$, то $\angle HCA < \angle OCA$. Аналогично, $\angle HAC < \angle OAC$, следовательно, точка H лежит внутри треугольника OAC. Таким же образом доказывается, что точка O лежит внутри треугольника HBC. Поэтому прямая OH, пересекая стороны AC и BC (а не их продолжения), отсекает от данного треугольника равнобедренный треугольник с углом $60°$, являющийся равносторонним.

Сравните с задачей 14.

21. Пусть $\angle BAC = \alpha$, M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а точка M' симметрична ей относительно BC (см. рис. 24). Тогда $\angle BMC = \angle BM'C = 180° - \alpha$.

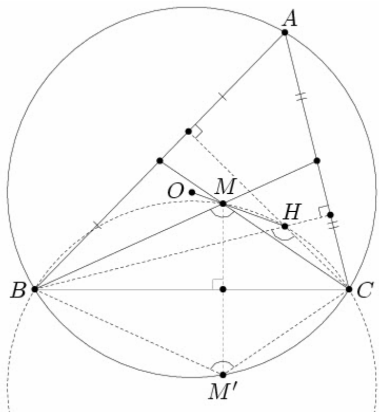


Рис. 24

Так как точка M лежит внутри треугольника ABC, то $180° - \alpha > \alpha$, то есть $\alpha < 90°$. Следовательно, центр O окружности, описанной около треугольника ABC, лежит в одной полуплоскости с вершиной A (относительно BC), поэтому $\angle BOC = 2\alpha$.

Докажем, что O лежит вне окружности, описанной около треугольника BMC. Действительно, если H — ортоцентр треугольника, то $\angle BHC = 90° + \angle HBA = 180° - \alpha = \angle BMC$, значит, точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BMC. Кроме того, точка M лежит на отрезке OH (теорема о прямой Эйлера). Следовательно, точка O лежит вне окружности, описанной около треугольника BMC.

Тогда $\angle BOC < \angle BMC$, то есть $2\alpha < 180° - \alpha \Leftrightarrow \alpha < 60°$.

В заключительной фазе решения использовано, что точки O, M и H попарно различны, так как треугольник ABC — не равносторонний.

22. *Первый способ.* Пусть в искомом треугольнике M, K и L — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Проведём окружность девяти точек (E — её центр). Тогда

$$\angle LEM = 2\angle LKM = 2\angle BAC$$

(см. рис. 25). Обозначим стороны угла A через I_1 и I_2 так, чтобы при повороте с центром A на угол BAC против часовой стрелки I_1 переходила в I_2. Тогда при повороте по часовой стрелке с центром E на $2\angle BAC$ середина стороны треугольника, лежащей на I_1, перейдет в середину стороны, лежащей на I_2. Поэтому точка M является пересечением I_2 с образом I_1 при таком повороте. Тогда точка, симметричная A относительно M, будет вершиной B искомого треугольника. Вершина C строится аналогично.

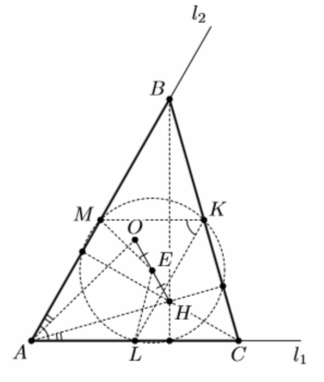


Рис. 25

Второй способ. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр искомого треугольника. Тогда E — середина отрезка OH, $\angle BAO = \angle HAC$ и $AH = 2AO\cos\angle BAC$ (см. задачу 3 и упражнение 3). Следовательно, композиция симметрии относительно биссектрисы угла BAC, гомотетии с центром A и коэффициентом $k = 2\cos\angle BAC$ и симметрии относительно E является преобразованием подобия с центром O. Соответственно, найдя центр этого подобия, можно построить точки B и C как вторые точки пересечения сторон данного угла и окружности с центром O, проходящей через A.

Отметим, что если $\angle A = 60^\circ$, то рассмотренное подобие будет симметрией относительно прямой, проходящей через E и перпендикулярной биссектрисе угла A. Соответственно, в качестве O можно брать любую точку этой прямой. В остальных случаях задача имеет единственное решение.

23. Пусть O — центр данной окружности, F — центр окружности девяти точек треугольника ABC, G — точка пересечения медиан этого треугольника. Из теорем об окружности девяти точек и прямой Эйлера следует, что G лежит на отрезке OF и делит его в отношении $2:1$. Кроме того, так как множество середин хорд, проходящих через M, — это окружность с диаметром OM, то множество всех точек G — тоже окружность, получающаяся из нее гомотетией с центром A и коэффициентом $k=\frac{2}{3}$. Значит, множество всех точек F — тоже окружность (см. рис. 26).

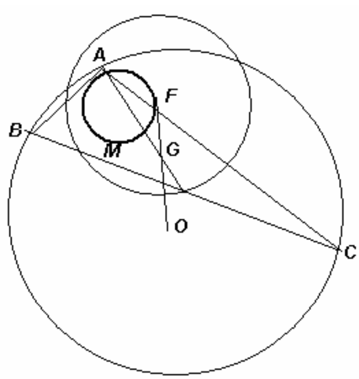


Рис. 26

Так как радиусы всех окружностей, девяти точек треугольника ABC равны половине радиуса данной окружности, то все эти окружности касаются двух окружностей, концентричных с окружностью, на которой лежат точки F (если точка M совпадает с O, то одна из этих окружностей вырождается в точку).

24. Основания высот и медиан треугольника ABC лежат на его окружности девяти точек ω_1. Прямая Эйлера MH является линией центров этой окружности и описанной окружности ω треугольника ABC. Поэтому достаточно доказать, что точки A', B' и C' принадлежат радикальной оси этих окружностей (см. рис. 27).

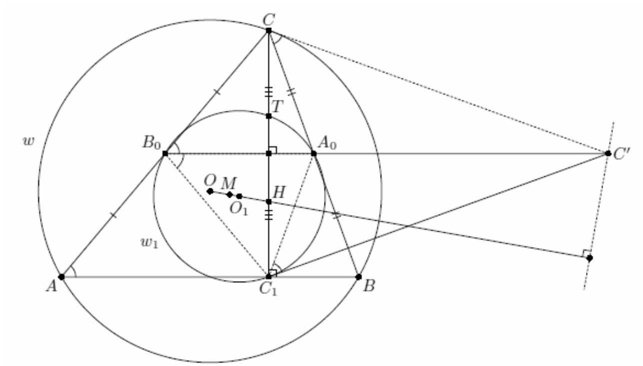


Рис. 27

Докажем этот факт для точки C' (доказательство для остальных точек аналогично). Покажем, что CC' — касательная к окружности ω.

Первый способ. Так как прямые CC_1 и A_0B_0 перпендикулярны и отрезок CC_1 делится средней линией A_0B_0 пополам, то точки C и C_1 симметричны относительно прямой B_0C', следовательно, $\angle C'CA_0 = \angle C'C_1A_0$ и $\angle CB_0A_0 = \angle C_1B_0A_0$. Кроме того, C_1C' — касательная к окружности ω_1, поэтому $\angle A_0B_0C_1 = \angle A_0C_1C'$. Из симметрии точек C и C_1 относительно B_0C' и параллельности прямых AB и A_0B_0 следует, что

$$\angle BAC = \angle A_0B_0C = \angle C'B_0C_1 = \angle A_0C_1C' = \angle C'CA_0,$$

то есть CC' — касательная к окружности ω.

Второй способ. Описанная окружность и окружность девяти точек гомотетичны с центром в точке H и коэффициентом $k = 0{,}5$. При этой гомотетии касательная к окружности ω в точке C перейдёт в касательную к ω_1 в точке T — середине отрезка CH. Эти касательные образуют с отрезком CC_1 равные углы. Касательные к ω_1 в точках T и C_1 также образуют с CC_1 равные углы. Следовательно, и касательные к окружностям ω и ω_1 в точках C и C_1 соответственно образуют с CC_1 равные углы. Значит, точка пересечения касательных лежит на серединном перпендикуляре к CC_1, то есть на A_0B_0. В силу симметрии $C'C = C'C_1$, то есть степени точки C' относительно окружностей ω и ω_1 равны. Следовательно, точка C' принадлежит радикальной оси этих окружностей, что и требовалось.

Для доказательства того, что CC' — касательная, также можно было воспользоваться симметрией описанных окружностей треугольников $C_1B_0A_0$ и CB_0A_0 и гомотетией с центром в точке C и коэффициентом 2.

Литература и веб-ресурсы

1. Бибиков П.В., Козеренко К.В., Малахов А.И. Геометрия в сюжетах. 7–8 классы. Москва, 1917.

2. Волчкевич М.А. Математическая вертикаль. Геометрия 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. орг. — М.: Просвещение, 2021.

3. С. Гиндикин. Леонард Эйлер. «Квант», №№10, 11/1983.

4. Б. Делоне. Леонард Эйлер. «Квант», №5/1974.

5. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т1. Планиметрия. — М.: МЦНМО, 2008.

6. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч1. — М.: Наука, 1991.

7. http://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php — олимпиады по геометрии имени И.Ф. Шарыгина.

8. http://olympiads.mccme.ru/regata/ — математические регаты.

9. http://olympiads.mccme.ru/ustn/ — устные олимпиады по геометрии.

10. www.problems.ru — база задач по математике.

Контрпримеры в геометрии

Н. Маслов,
Школа №179, ШЦПМ, г. Москва
polsovatel06@gmail.com

В этой статье я покажу несколько конструкций, через которые можно было бы объяснить ребёнку, почему те или иные условия в определениях и теоремах важны, и поговорю о том, что эти конструкции могут дать в преподавании. Такие конструкции удобно использовать как каверзные вопросы на устном зачёте или экзамене, а также дают материал для обсуждения на уроке. В названии статьи я делаю отсылку к замечательной книге «Контрпримеры в анализе»[1], которая, на мой взгляд, имеет схожие цели на более высоком уровне знания.

1. Окружность

Этот пример очень прост, но показателен и понятен детям. Если спросить, что такое окружность, и получить ответ «точки, расположенные на данном расстоянии от данной точки», вы можете дать контрпример в виде дуги окружности — под определение подходит, окружностью не является. В предложенном определении пропущено слово «все». Что интересно, определение «Окружность — это геометрическое место точек, расположенных на данном расстоянии от данной точки» корректно, так как в понятие ГМТ уже заложено требование необходимости и достаточности множества точек. На этой разнице мы можем показать важную для математики особенность: все слова в определении важны и несут смысл.

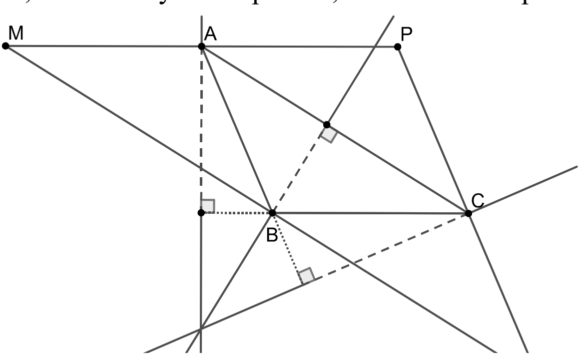
[1] Б. Гелбаум, Дж. Олстед, «Контрпримеры в анализе», изд-во «Мир», Москва, 1967

2. Ромб

В традиционном определении «Ромб — это параллелограмм, у которого все стороны равны», слово «параллелограмм» можно заменить на слово «четырёхугольник» без потери смысла. Этот пример показывает, что иногда определения можно «ослабить», оставив такой же математическую суть. Подобные примеры поощряют детей «шевелить» формулировки, не принимая их за догму, а разбирая на составляющие и проверяя, что же изменится, если то или иное условие ослабить?

3. Биссектриса, высота, медиана треугольника

В этих определениях важно требовать, чтобы все три объекта были отрезками (а не, скажем, лучом или прямой). На примере этого уточнения можно показать важную разницу между тремя утверждениями о замечательных точках в треугольнике: если для медиан и биссектрис верно, что они пересекаются в одной точке, то для высот это неверно — требуются прямые, содержащие высоты треугольника. Здесь полезно, во-первых, обсудить, что это ограничение существенно для тупоугольного треугольника, а, во-вторых, разобрать классическое доказательство этого утверждения через серединные перпендикуляры и показать, где там по существу используется то, что нам нужны прямые, а не только отрезки.



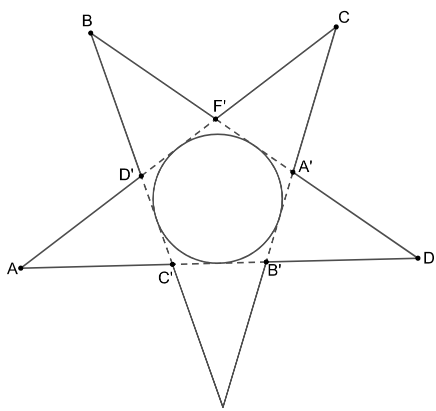
В ΔABC высоты не пересекаются в одной точке, однако прямые, их содержащие, являются серединными перпендикулярами ΔMPN и пересекаются в одной точке O.

4. Вписанная в многоугольник окружность

Окружность называется вписанной в многоугольник, если она касается всех сторон многоугольника. Если же попросить уточнить, что значит «касается стороны», то тут не всякий школьник сможет сразу дать точное определение. Наивное определение «сторона имеет одну общую точку с окружностью» лёгко развенчивается: две стороны треугольника пересекают окружность, а третья касается. Чуть сложнее, но тоже несложно, дать контрпример к такому определению: «Сторона касается окружности, если прямая, содержащая сторону, касается окружности» (достаточно взять вневписанную окружность).

Эти два неправильных определения, однако же, содержат всё необходимое, чтобы дать уже корректное определение: достаточно совместить оба требования: «Сторона многоугольника касается окружности, если прямая, содержащая сторону, касается окружности в точке на стороне».

В своей практике я также встречался с определением «Окружность является вписанной в многоугольник, если она касается каждой прямой, содержащей сторону, и находится внутри многоугольника». Опуская то, что понятие «внутри» определить может быть очень сложно, отметим, что это определение также неверно; контрпример ниже (многоугольник $AD'BF'CA'DB'FC'$). В основе конструкции лежит правильный пятиугольник $A'B'C'D'F'$, стороны которого касаются окружности.



5. Прямые и обратные теоремы Фалеса

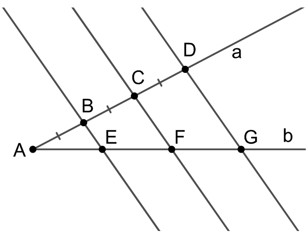
Теорема Фалеса утверждает, что если даны две прямые, a и b, и они пересекаются серией параллельных прямых так, что они отсекают равные отрезки на a, то они отсекают равные отрезки на b.

При более аккуратной формулировке теорема Фалеса применима в трёх разных случаях:

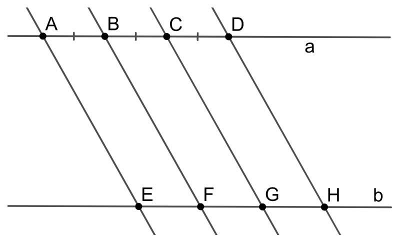
1. Прямые a и b образуют угол, отрезки на первой прямой откладываются от вершины угла;

2. Прямые параллельны, отрезки на первой прямой откладываются от некоторой точки;

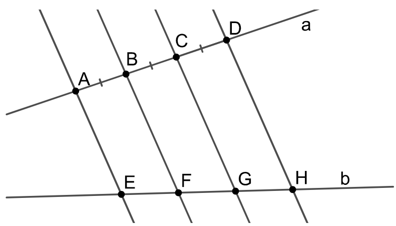
3. Прямые не параллельны, отрезки откладываются от некоторой точки первой прямой (не вершины угла).



1.

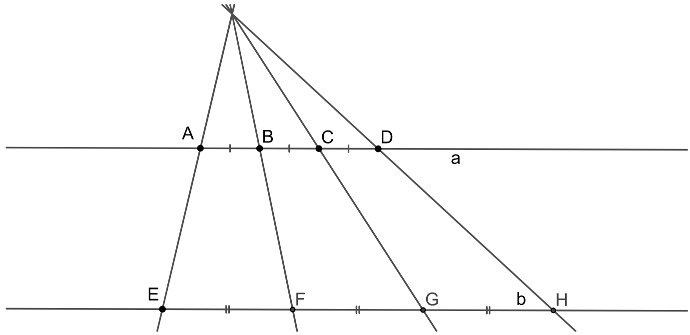


2.

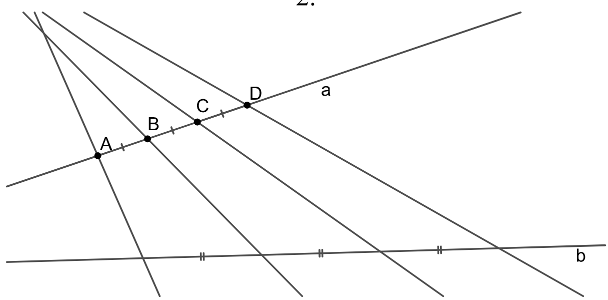


3.

Во всех трёх случаях прямая теорема Фалеса верна, а вот обратная (из равенства отрезков на двух прямых следует, что пересекающие a и b прямые параллельны), вообше говоря, нет. Если же быть точнее, то в первом случае она верна, во втором и третьем случае неверна (см. ниже). Отметим, что обратная теорема во втором случае станет верной, если сформулировать прямую теорему Фалеса более естественным образом и доказывать, что отрезки на второй прямой не просто равны между собой, но и равны высекаемым отрезкам на первой прямой.



2.



3.

Отмечу[2] ещё один интересный момент, относящийся уже не совсем к геометрии. Согласно математической логике, для того, чтобы из прямой теоремы получить обратную, нужно поменять местами посылку и заключение. По факту же мы в геометрии используем понятие прямой и обратной теоремы несколько тоньше. Например, в утверждении «В параллелограмме противоположные стороны равны» посылкой является то, что объект является параллелограммом, а заключением то, что его противоположные стороны равны. Если поменять местами заключение и посылку, то получится «Если противоположные стороны равны, то это параллелограмм». Во-первых, непонятно без контекста, что такое «противоположные стороны»; во-вторых, если этот контекст уточнить неправильно (например, рассматривать все многоугольники с чётным числом сторон), то утверждение станет неверным. Поэтому для

[2] Впервые эту мысль я услышал в докладе В.А. Рыжика на XI открытом семинаре математиков.

корректности рассуждений лучше разбить геометрическое утверждение на 3 части: конструкция, посылка и заключение. Прямой теоремой станет утверждение о том, что если верна конструкция и посылка, то верно заключение. В обратной теореме утверждается, что если верна конструкция и заключение, то верна посылка. В частности, в рассматриваемом нами примере конструкцией является утверждение «Объект — четырёхугольник», посылкой — «Четырёхугольник является параллелограммом», а заключением — «Противоположные стороны в четырёхугольнике равны». Точно так же в рассматриваемых нами прямых теоремах Фалеса конструкцией является взаиморасположение прямых a и b вместе с равными отрезками на прямой a (три случая), посылкой является утверждение «прямые, пересекающие a и b, параллельны», а заключением — «отрезки, высекаемые на прямой b, равны». Обратная теорема (где мы поменяли заключение и посылку местами, оставив на месте конструкцию) оказывается верной или неверной в зависимости от конструкции. Второй вариант обратной теоремы Фалеса оказывается верным, если усилить заключение в прямой теореме.

6. Признак описанного четырёхугольника

Утверждение «Если в четырёхугольнике сумма противоположных сторон равна, то в него можно вписать окружность» неверно. Контрпример легко строится: нужно взять невыпуклый четырёхугольник, «вырезав» в одном равнобедренном треугольнике равнобедренный треугольник поменьше. Интуитивно понятно, что, если ограничиться только выпуклыми четырёхугольниками, теорема станет верной. Точные рассуждения окажутся крайне сложными, если мы работаем со школьникаи; однако очень интересно изучить доказательства этого утверждения в поисках того места, где условие выпуклости становится важным. Мы можем показать на этом примере, что строгость в рассуждеиияx не ограничивается школьным учебником, и есть, что ещё уточнять.

Известное доказательство от противного предполагает, что мы доказали свойство описанного четырёхугольника. В доказательстве предлагается пересечь биссектрисы двух смежных углов (скажем, углов с вершинами в A и B) и построить окружность, касающуюся сторон AD, AB, BC. Остаётся доказать, что сторона CD тоже касается этой окружности. Предположим, что это не так, тогда проведём касательную из точки C, она пересечёт сторону AD в некоторой точке E. Опираясь на неравенство треугольника и доказанное свойство четырёхугольника $ABCE$, приходим к противоречию с предположением.

При всей своей наглядности, на самом деле доказательство довольно неаккуратно. Нет обоснований тому, что биссекрисы обязательно пересекутся, более того, внутри четырёхугольника. Нам остаётся лишь верить в то, что касательная пересечёт сторону AD (а не её продолжение; особенно неприятен случай, в котором точка пересечения оказалась за точкой A). Самая же большая проблема в том, что окружность, которую нам предлагается построить, действительно касается требуемых *сторон угла*. Но касается ли она нужных *сторон четырёхугольника*? Повторив построения для невыпуклого контрпримера, мы быстро обнаружим, что ровно в этот момент доказательство дало осечку.

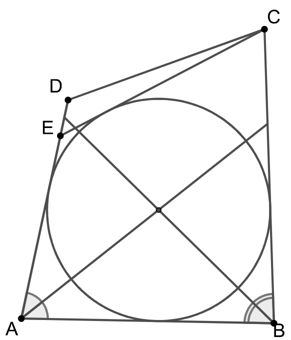
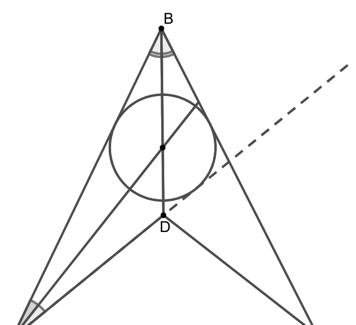


Чертёж к доказательству



Повтор доказательства для невыпуклого контрпримера

Второе, чуть менее известное доказательство[3] состоит в явном построении центра нужной окружности. Рассмотрев отдельно слу-

[3] Я впервые нашёл его в задачнике Гордина Р.К., в издании 2006 года эта задача имела номер 1.261; что интересно, условие выпуклости присутствует в условии, но не используется в доказательстве.

чай, когда все стороны между собой равны, предполагаем без ограничения общности, что $AB > AD$, $BC > CD$. Тогда выберем точки $T \in AB$, $S \in BC$ так, что $AT = AD$, $CD = CS$. Треугольники ADT, CDS, BTS равнобедренные (первые два по построению, третий — из-за условия на равенство сумм сторон). Далее заметим, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника TSD совпадают с биссектрисами углов при вершинах A, B, C, и, так как перпендикуляры пересекаются в одной точке, то и биссектрисы углов пересеклись в одной точке, скажем, O. Так как все точки на биссектрисах равноудалены от сторон угла, то, получается, точка O равноудалена от всех сторон четырёхугольника и поэтому существует вписанная окружность с центром в точке O.

Читатель, внимательно разобравшийся с проблемами предыдущего доказательства, может понять, что здесь проблема аналогична: касание сторон угла не гарантирует касание сторон четырёхугольника. Попытка провести доказательство на контрпримере приводит нас к тому же чертежу.

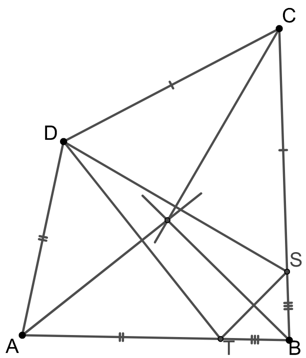
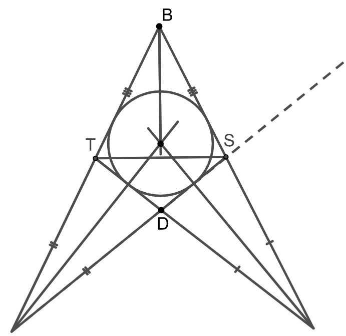


Чертёж к доказательству



Повтор доказательства для невыпуклого контрпримера

Мы рассмотрели несколько, на мой взгляд, ярких и интересных тонкостей геометрии, разговор о которых в той или иной мере будет полезен при попытке разобраться с геометрией в глубину. Напоследок отмечу, что, несмотря на заявляемую строгость школьного курса геометрии, я не сторонник аксиоматически строгого подхода (это дело университетов). Наша задача как преподавателей — *показать*, как выглядит строгость в математике, а не *построить теорию* по всем стандартам современной науки. И для этого, с одной стороны, нужно по возможности отдавать предпочтение наглядности (яркие контрпримеры, особые случаи), а, с другой, держать в уме несколько уровней строгости, варьируя их в зависимости от детей, часов и ваших потребностей. Я надеюсь, что приведённые примеры вдохновят и вас на «спуск в глубину», когда вам этого захочется.

Теорема Виета и геометрия графиков

Д. Мухин,
Школа №91, Школа №179, г. Москва
dmitry.g.mukhin@gmail.com

В этой заметке собраны несколько задач, посильных для школьников 8-9 классов. Изучать мы будем самые привычные объекты: графики квадратичной функции и обратной пропорциональности — параболу и гиперболу. Мы обсудим некоторые их геометрические свойства, причем обойдемся без классических свойств кривых второго порядка. Неожиданно часто нам будет помогать самая, пожалуй, известная теорема школьной алгебры: Теорема Виета. Эта подборка может пригодиться как на элективном курсе, так и на уроках алгебры, при повторении темы «Графики функций», в том числе и в более старших классах. Многие задачи в разные годы входили в варианты Московской математической олимпиады и других олимпиад.

Гипербола

Задача 1. *Дан график функции* $y = \dfrac{k}{x}$. *Его пересекает произвольная прямая. Докажите, что отрезки AB и CD равны:*

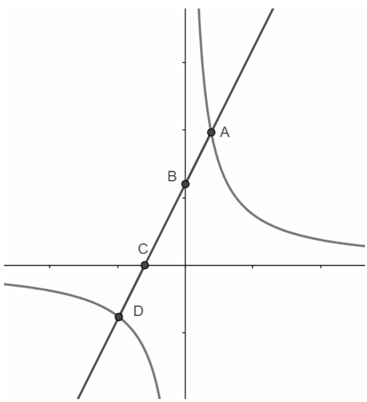


Рис. 1

Доказательство. Достаточно доказать, что равны проекции указанных отрезков на ось Ox. Пусть уравнение прямой имеет вид $y = mx + n$. Тогда абсциссы точек пересечения прямой и гиперболы — это решения уравнения $\frac{k}{x} = mx + n \Leftrightarrow mx^2 + nx - k = 0$. По теореме Виета абсциссы точек A и D удовлетворяют условию: $x_A + x_D = -\frac{n}{m}$. Абсцисса точки B равна нулю, абсцисса точки C удовлетворяет равенству $x_C = -\frac{n}{m}$. Тогда получается, что $x_A + x_D = x_B + x_C \Leftrightarrow x_A - x_B = x_C - x_D$, а это и значит, что проекции отрезков AB и CD на ось абсцисс равны. Задача решена.

Упражнение. *Останется ли утверждение задачи верным, если картинка будет немного другой (рис.2)?*

Задача 2. *Прямая касается графика функции* $y = \frac{k}{x}$ *в точке* B *и пересекает оси координат в точках* A *и* C. *Докажите, что* $AB = BC$ *(рис. 3).*

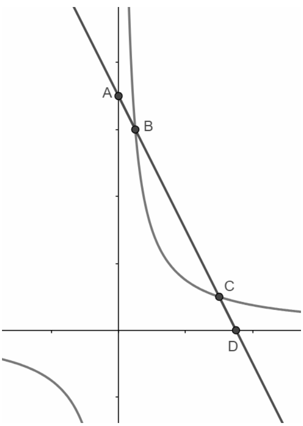


Рис. 2

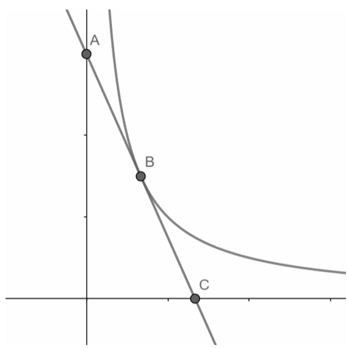


Рис. 3

Доказательство. Заметим, что перед нами частный случай предыдущей задачи: точки пересечения прямой и гиперболы совпали (у соответствующего квадратного уравнения оказалось два совпадающих корня). Это станет совсем ясно, если посмотреть на второй чертеж. Решение можно повторить буквально, поэтому утверждение верно.

Задача 3. *Как построить касательную к гиперболе циркулем и линейкой?*

Решение. Построение сводится к известной задаче: построить через данную точку внутри угла отрезок с концами на сторонах угла так, чтобы он делился данной точкой пополам. Это можно сделать, например, с помощью дополнительного построения: параллелограмма.

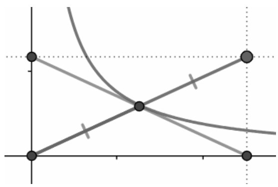


Рис. 4

Задача 4. *Докажите, что касательная к гиперболе отсекает от осей координат треугольник постоянной площади (см. рис. 5). Чему равна эта площадь, если уравнение гиперболы имеет вид* $y = \frac{k}{x}$*?*

Доказательство. Опустим из точки касания перпендикуляры на оси. Они образуют прямоугольник, соседние стороны которого равны x_0 и $\frac{k}{x_0}$, где x_0 — абсцисса точки касания.

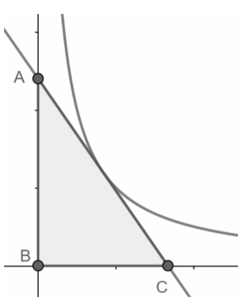


Рис. 5

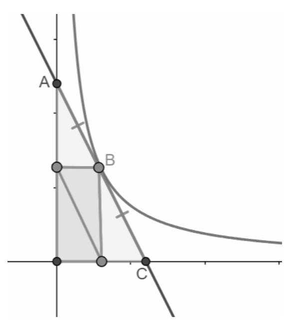


Рис. 6

Тогда площадь этого прямоугольника равна $x_0 \cdot \dfrac{k}{x_0} = k$. Ясно, что площадь искомого треугольника вдвое больше (см. рис. 6). Таким образом, для любого положения касательной площадь треугольника равна $2k$.

Парабола

Теперь перейдем к циклу задач про параболу $y = x^2$. Интересно, что возникающие задачи решаются очень похоже, хотя графики совершенно разные. Это, конечно, связано с тем, что и гипербола и парабола — это кривые второго порядка.

Задача 5. *Параллельные прямые высекают на параболе $y = x^2$ две дуги. Докажите, что проекции этих дуг на ось абсцисс равны.*

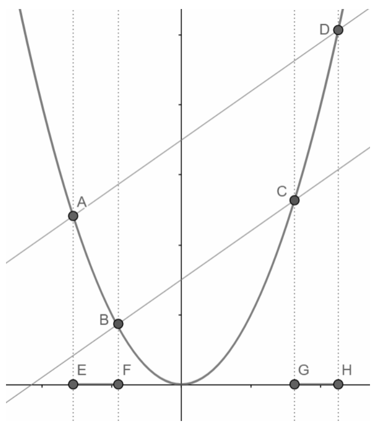


Рис.7

Доказательство. Прямые параллельны, поэтому угловые коэффициенты у них одинаковые. Пусть прямая AD задана уравнением $y = kx + m$, прямая BC задана уравнением $y = kx + n$. Тогда абсциссы точек A и D это решения уравнения $x^2 = kx + m$, тогда по теореме Виета $x_A + x_D = k$. Аналогично $x_B + x_C = k$. Тогда получается, что $x_A + x_D = x_B + x_C \Leftrightarrow x_B - x_A = x_D - x_C$, а это и значит, что проекции дуг AB и CD на ось абсцисс равны.

Задача 6. *Докажите, что прямая, проходящая через середины параллельных хорд параболы, параллельна оси этой параболы.*

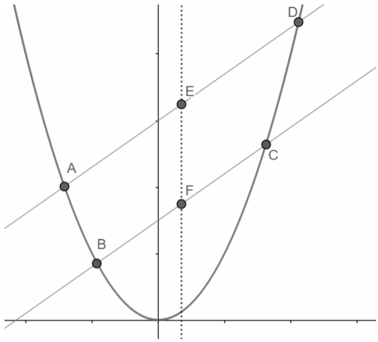


Рис. 8

Доказательство. Рассмотрим параболу $y = x^2$. По предыдущей задаче $x_A + x_D = x_B + x_C$, тогда $\frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2}$. Тогда прямая, проходящая через середины хорд, будет вертикальной, то есть параллельной оси Oy. Что и требовалось доказать.

Упражнение. *Убедитесь, что утверждение остается верным и для параболы* $y = ax^2 + bx + c$.

Упражнение. *Сформулируйте обратное утверждение к задаче 6. Верно ли оно?*

Задача 7. (А.А.Егоров, Турнир Городов). *Дан график функции* $y = x^2$. *Циркулем и линейкой восстановите оси координат.*

Рис. 9

Решение. Здесь сильно помогает предыдущая задача. Действительно:

1) Проведем две параллельные прямые, пересекающие параболу в двух точках каждая.

2) Через середины получившихся хорд проведем прямую, она будет параллельна оси Oy.

3) Проведем прямую, перпендикулярную предыдущей и найдем её пересечения с параболой A и B.

4) Построим середину отрезка AB — точку K.

5) Решение почти закончено: проведем серединный перпендикуляр к AB. Это ось Oy. Через точку её пересечения с параболой проведем ось Ox.

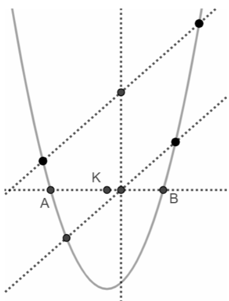


Рис. 10

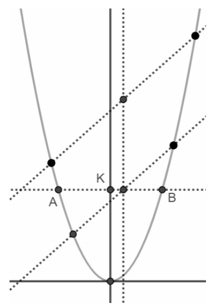


Рис. 11

Задача 8. (Н.Н.Андреев. А.Д.Блинков, Московская математическая олимпиада). *Хорды AB и CD параболы $y = x^2$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат. Абсциссы точек A, B, C равны a, b, c соответственно. Найдите абсциссу точки D.*

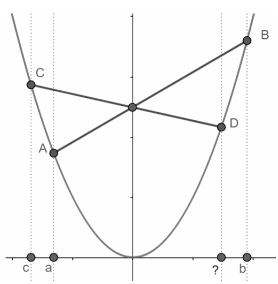


Рис. 12

Решение. Уравнения прямых, которые пересекаются на оси ординат можно записать как $y = k_1 x + m$ и $y = k_2 x + m$. a и b — решения уравнения $x^2 = k_1 x + m$, поэтому по теореме Виета $ab = -m$. Пусть d — абсцисса точки D. Тогда c и d — корни уравнения $x^2 = k_2 x + m$, откуда $cd = -m$. В итоге, получаем что $ab = cd \Rightarrow d = \dfrac{ab}{c}$. Ответ: $\dfrac{ab}{c}$.

Задача 9. (Окружная олимпиада, Москва). *Прямая пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а также пересекает ось Ox в точке x_3. Докажите, что $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_3}$.*

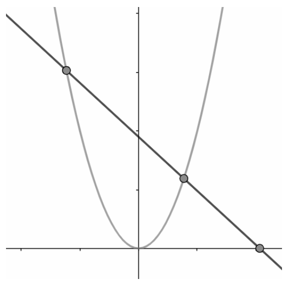


Рис. 13

Доказательство. Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$. Тогда x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + b$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = -b$. Несложно найти x_3 — это корень уравнения $0 = kx + b$, то есть $x_3 = -\dfrac{b}{k}$. Заметим, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{k}{b} = \frac{1}{x_3}.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 10. *Касательная к параболе $y = x^2$ пересекает ось абсцисс в точке B. Проекция точки касания на ось Ox — точка C. Докажите, что $OB = BC$.*

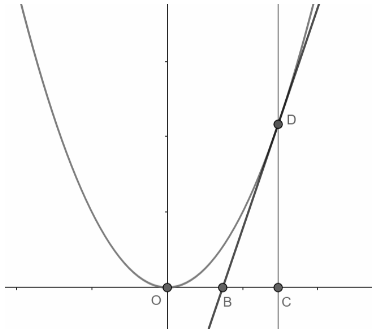


Рис. 14

Доказательство. Воспользуемся предыдущей задачей. Касание — это частный случай пересечения, когда точки x_1 и x_2 совпадают. Тогда получаем равенство: $\frac{2}{x_1}=\frac{1}{x_3}$, то есть $x_3=\frac{x_1}{2}$. А это равносильно тому, что и требовалось доказать.

Упражнение. *Постройте циркулем и линейкой касательную к параболе $y=x^2$ в данной точке.*

В конце рассмотрим две несколько более сложные задачи. В задаче 12 комбинируются идеи алгебры и геометрии, а в задаче 13 теорема Виета применяется для уравнения четвертой степени.

Задача 12. (Творческий конкурс учителей математики, заочный тур). *Рассматриваются все параболы вида $y=x^2+ax+b$, пересекающие оси координат в трех точках. Для каждой такой параболы через три точки пересечения проводим окружность (рис. 15). Докажите, что все построенные таким образом окружности пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Докажем, что все окружности проходят через точку $(0;1)$. Посмотрим на рисунок 16: заметим, что $OA=-x_1$, $OB=x_2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+ax+b=0$. По теореме Виета $x_1x_2=b$. Ордината точки C равна b, поэтому $OC=-b$. По свойству пересекающихся хорд $OA\cdot OB=OC\cdot OD$, то есть

$-b=-b\cdot OD$. Отсюда координаты точки D это $(0;1)$. Таким образом, все окружности проходят через одну и ту же точку.

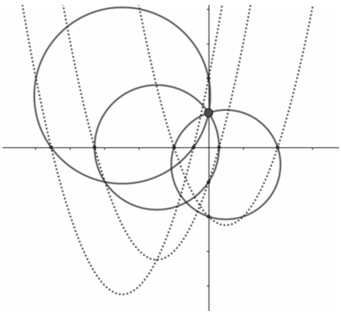


Рис. 15

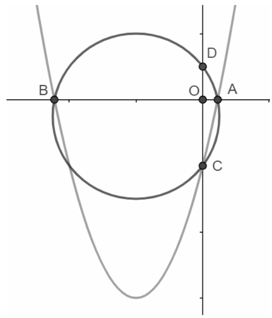


Рис. 16

Задача 13. (Творческий конкурс учителей математики, очный тур). *Парабола проходит через точки пересечения двух окружностей так, как показано на рисунке. Докажите, что хорды CD и EF параллельны.*

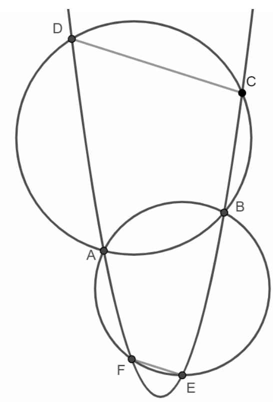


Рис. 17

Доказательство. Систему координат всегда можно ввести таким образом, чтобы парабола имела уравнение $y=x^2$. Рассмотрим сначала окружность $ABCD$, пускай её уравнение $(x-m)^2+(y-n)^2=R^2$. Координаты точек A, B, C, D — это решения системы:

$$\begin{cases}(x-m)^2+(y-n)^2=R^2\\ y=x^2\end{cases}$$

Покажем, что абсциссы середин хорд AB и CD симметричны относительно нуля. Пусть абсцисса точки A равна x_1, абсцисса точки B равна x_2. x_3 и x_4 — абсциссы точек C и D соответственно. Тогда x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения $(x-m)^2+(x^2-n)^2=R^2$, полученного из системы. Далее, заметим, что коэффициент при x^3 в этом уравнении равен 0. Значит, по теореме Виета (только уже для уравнения четвертой степени!), $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Дальше несложно: $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{x_3+x_4}{2}$, а это и означает, что абсциссы середин хорд AB и CD симметричны относительно нуля.

Теперь вернемся к исходному чертежу. Абсциссы середин хорд AB и CD симметричны относительно нуля, и совершенно аналогично абсциссы середин хорд AB и FE симметричны относительно нуля. Значит, абсциссы середин хорд CD и EF совпадают. Тогда, по упражнению к задаче 6, получаем, что $CD \parallel EF$. Что и требовалось доказать.

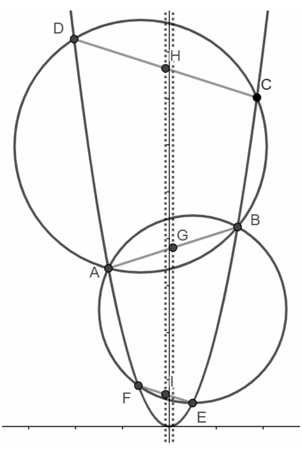


Рис. 18

Пять видов урока математики

А. Сгибнев,
Школа «Интеллектуал», г. Москва
a.i.sgibnev@gmail.com

Широко распространены две формы работы на уроке математике — фронтальная (учитель объясняет новый материал всему классу) и индивидуальная (каждый ученик выполняет задания самостоятельно). В них не предполагается взаимодействия учеников между собой. Однако преподавательский опыт знает ещё несколько ходовых форм работы, которыми можно пользоваться достаточно регулярно. Мы расскажем о пяти видах урока, которые можно проводить раз в 1-3 недели каждый. Они не предполагают выставления оценок всему классу, а только поощрение хорошей работы.

1) «Объясни соседу»
2) «Ответы на доску»
3) «Вброс задач по одной»
4) «Решаем в группах»
5) «Практикум».

«Объясни соседу»

Ученики работают в парах за партой (если учеников нечётное количество, учитель составляет пару одному из них). Каждый должен изучить свой материал по учебнику (распечатке, реже видео или интерактивной модели), а затем объяснить его соседу. При объяснении можно пользоваться только своим конспектом, но не источником. После взаимного объяснения полезно провести опрос: пусть каждый ученик ответит по тому материалу, который объясняли ему. Или же учитель просматривает и оценивает конспекты.

Эта форма работы применима, когда надо изучить две теоремы или разобрать два ключевых примера, которые имеют примерно одинаковый сложность и объём и не зависят друг от друга. Один ученик изучает и рассказывает первый пример, а другой ученик — второй.

Достоинства этой формы работы такие:

1) Ученик в течение урока меняет четыре роли: читателя, конспектирующего, объясняющего и слушающего.

2) Читающий разбирается в материале в своём темпе, объясняющий подстраивается под темп слушающего.

3) Форма урока разнообразится — монолог учителя сменяется диалогами учеников. Ученики практикуются говорить о математике (а не только писать), подобно практике речи в парах на уроках иностранного языка.

«Ответы на доску»

На доске выписаны задания, которые нужно решить в течение урока. Ученики решают в свободном порядке, и первый решивший номер выписывает на доску ответ к нему и своё имя. Другие решившие имеют возможность сравнить ответы, и если они не совпадают, перепроверить своё решение, подойти к автору ответа и сравнить ход решения. Возможно, после этого ответ на доске будет скорректирован.

Эта формы работы уместна, когда изучен значительный блок теории и ученикам надо практиковаться в её применении. При этом ответ у заданий должен быть краткий — число, выражение, формула или слово (например, решение уравнений, текстовых задач, геометрические задачи на нахождение). Нежелательны задания на доказательство или задания, ответ к которым легко угадать или получить неверным способом.

Для подготовки к уроку учителю надо подобрать список заданий, слегка избыточный, но не слишком большой, чтобы ученики не «разъехались по номерам», от простого к сложному. Надо прорешать задания заранее и иметь список ответов, а также неправильные ответы, возникающие в случае типичных ошибок. Учитель подтверждает ответ к заданию (ставит рядом плюс) не сразу после его появления на доске, а через некоторое время. И вмешивается, если ученики даже коллективно не могут прийти к верному ответу.

Достоинства этой формы работы такие:

1) Каждый ученик работает в своём темпе, успевает решить столько, сколько позволяют его способности.

2) Отсутствие заранее заданных ответов сохраняет интригу — кто же прав?

3) Ребята имеют возможность коммуницировать по поводу заданий друг с другом и с учителем. Например, это естественный момент для ученика задать учителю вопрос по пройденному материалу, а для учителя — выяснить пробелы у отдельных учеников (так как у него на таком уроке нет необходимости держать весь класс в поле зрения каждую минуту).

4) Поскольку плохих оценок за неправильные ответы нет, ребята не боятся пробовать и ошибаться.

Последнее достоинство может превратиться в недостаток, когда не стимулируется самопроверка и решение превращается в неограниченное число попыток угадать верный ответ. Отчасти это лечится уроком «Практикум» (см. ниже).

«Вброс задач по одной»

Учитель формулирует и фиксирует на доске одну задачу. Ученики решают её самостоятельно (по желанию можно советоваться с соседом) и устно сдают решения учителю. Ученик, сдавший задачу, становится экспертом и имеет право принимать решение у других учеников. Процесс останавливается, когда те, кто мог, сдали задачу, а остальные надолго задумались или «выключились». После этого формулируется новая задача или происходит разбор (только если задача была ключевая — разбирать все задачи с урока не стоит, чтобы не терять динамику).

Для этого формата подходят непростые задачи, требующие догадки или нескольких шагов.

Его достоинство в том, что он очень гибкий и процесс легко перестроить, так как все заняты одной и той же задачей. Если задача оказалась слишком сложной и решить её не получается, учитель может дать подсказку (сам или попросить экспертов придумать подсказку). Если слишком простой — ученики быстро сдадут её друг другу и получат следующую. Если на урок оказалось запланировано слишком много задач, то неиспользованная их часть не «засветилась» и её спокойно можно использовать в дальнейшем. Для экспертов полезно иметь в запасе индивидуальную задачу «со звёздочкой».

Одну-две ключевые задачи, решённые на таком уроке, полезно давать на дом. Ученики вспомнят решения, рассказанные устно, структурируют и запишут.

«Решаем в группах»

Ученики объединены в команды по 3-4 человека (если 4, то удобно составить две парные парты квадратом, чтобы все друг друга видели). Каждой команде выдаётся набор из 4-6 заданий (на листочках или списком из учебника). Сдача решений устная. Команда объявляет, что готова сдать задание номер такой-то, а учитель выбирает ученика, который будет отвечать. При ответе можно пользоваться тетрадью. Результаты сдачи фиксируются на доске. Команда, сдавшая больше всех задач, может получить по пятёрке.

Эта форма работы полезна в конце изучения темы, когда ученики уже знают теорию и умеют решать простые задачи (в том числе с помощью уроков «Ответы на доску» и «Практикум») и пора решить несколько сложных задач, комбинирующих разные идеи и требующих обсуждения. Правило «учитель выбирает отвечающего» стимулирует коммуникацию между учениками и исключает вариант, когда каждый решил и сдал свою задачу независимо от других (или один сильный ученик решил и сдал все задачи).

Достоинства этой формы работы:

1) Ученики заинтересованы в том, чтобы объяснить решения друг другу и понять их.

2) Можно обсуждать задачи на доказательство и задачи, в которых важны варианты, логические переходы и т.д. — есть где ошибиться и есть о чём поговорить.

Опасность состоит в том, что группа может «утонуть» из-за одного слабого участника, который не понимает решений. Этот вопрос снимается с помощью такта учителя: можно спрашивать у слабого ученика самую простую задачу или давать время подготовиться ко второй попытке. Если разница в уровне критична, стоит отделить более слабых учеников в группу с простыми заданиями.

Можно ввести такое правило подачи заявки на ответ: все члены команды вместе поднимают руки. Это гарантирует, что все участники поняли решение и готовы отвечать.

«Практикум»

Каждому ученику раздаётся печатная основа, на которой он выполняет задания. Сделав очередной пункт, он подходит к учителю, и тот проверяет письменное решение — ставит плюсы за верно выполненное, указывает на ошибки, отправляет дорабатывать. Результаты фиксируются в таблице учителя, по итогам урока лучшие результаты оцениваются пятёркой.

Эта форма работы помогает индивидуально отрабатывать технические навыки в алгоритмизированных заданиях, которые не требуют идей и обсуждений, но требуют «набить руку» (вычисления, преобразования выражений, решение уравнений, построения графиков, типовые счётные задачи по геометрии и т.д.). При подготовке учителю надо составить набор из 6-8 заданий на урок, от простого к сложному, сверстать бланк так, чтобы оставалось место для решений, выполнить образцовое решение на таком же бланке и подготовить таблицу для результатов. Бланк, образец и таблица требуются для организации максимально быстрой проверки, поскольку придётся «на лету» не только проверять ответы, но и находить ошибки в решениях. Ошибки можно указывать прямо, а можно локализовать место ошибки и отправить ученика искать её самостоятельно. Рекомендуемое количество попыток сдать одну задачу — две-три. При сдаче с первой попытки ставим $+$, со второй $\pm$, с третьей $\mp$.

Достоинства практикума:

1) Быстрая обратная связь.

2) Можно выловить ошибки в понимании, которые не проявлялись во фронтальной или командной работе.

3) Поскольку задание локализовано, работа индивидуальна, а результат контролируется, такой урок можно проводить даже с усталым, не очень держащем внимания классом на позднем уроке.

В практикуме важно, чтобы каждый школьник регулярно подходил показывать очередное выполненное задание и не зависал бесконтрольно до конца урока. Это помогает сделать таблица, в которой учитель фиксирует результаты. Важно найти оптимальное количество заданий на урок. Если в практикуме будет слишком много мелких заданий, то ученики будут бегать к учителю с каждым и выстроятся в постоянную очередь. Если слишком мало, но крупные — все будут сидеть и думать над одним и тем же.

Возможна и работа в тетради по номерам из учебника, однако в этом случае лучше, чтобы учитель ходил по классу в строгой очерёдности и проверял решения, накопившиеся у учеников с его прошлого подхода. Этот вариант менее технологичен (учитель тратит время на переходы между партами, ему неудобно фиксировать результаты в таблицу), но не требует подготовки и распечатки бланка.

Заключение

Вид урока учитель выбирает в зависимости от характера изучаемого материала (теория/отработка, задания с кратким ответом/с полным решением, одноходовки/многоходовки и т.д.). Чередование таких видов уроков позволяет избегать однообразия в преподавании и равномерно развивать разные навыки учеников. По опыту, с разными классами «приживаются» разные виды уроков — всё зависит от склонностей учеников, но главное, чтобы им было из чего выбирать.

При большом количестве уроков в неделю возможна даже фиксация видов уроков по дням недели. Например, «во вторник на 4-м уроке у нас обычно решения в группах, а в четверг на 7-м уроке практикум».

Автор благодарен Наталье Сопруновой за интересные идеи.

Немного олимпиадной тригонометрии (на уроке)

П. Чулков,
Школа 2007 ФМШ, г. Москва
chulkov2007@yandex. ru

— Все не нужное сложно,
а все сложное не нужно…
Спорный тезис

Принято думать, что самые лучшие задачи элементарной математики — олимпиадные.

Понятно, что сам факт, что задача предлагалась на олимпиаде привлекает внимание школьников, поэтому несложная олимпиадная задача — хороший повод для разговора, тем более что многие такие задачи вполне могут быть решены (и разобраны) на уроке.

Учащимся решать и разбирать такие задачи обычно нравится, помогает поверить в свои силы.

Для учителя решение и разбор олимпиадных задач является средством профессионального роста, а умение решить (и рассказать решение), помогает поддержать авторитет в глазах учителя.

Здесь представлены несколько тригонометрических задач, довольно простых, но полезных для рассмотрения на уроках повторения. Задачи взяты из известных сборников (см. список литературы).

Публикация является продолжением [8].

Тригонометрия одной-двух формул

Тригонометрию можно понимать как алгебру с некоторыми дополнительными условиями (тригонометрическими формулами)

Пример 1[1] (ММО, 1993). Известно: $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = a$, $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = b$.

Найдите: $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$.

---

[1] Зачем «утешительная» задача на олимпиаде? Для того, чтобы нормальный школьник не уходил с нулем (и с комплексом неполноценности, «выученной беспомощностью» и т.п.).

Здесь достаточно знать одну тригонометрическую формулу (тангенс суммы) и то, что тангенс и котангенс одного и того же угла — противоположные числа: Это хорошая задача на повторение.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Сумма тангенсов у нас есть, осталось найти произведение:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=b,\ \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=b,\ \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=b,\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{a}{b}.$$

Осталось подставить в формулу и немного упростить и получить ответ:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{a}{1-\frac{a}{b}}=\frac{ab}{b-a}.$$

Следующая задача хороша для разговора на кружке.

Пример 2. (ММО, 1995). Известно, что $\sin\alpha=a$. Какое наибольшее число значений может принимать число $\sin\alpha/3$?

И здесь из тригонометрии достаточно знать лишь одну формулу (синус тройного угла): $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

Все остальное — алгебра. Обозначим: $\sin\alpha=a$, $\sin\alpha/3=t$.

Выясним, сколько корней (по модулю, не превосходящих единицу) может иметь уравнение $4t^3-3t+a=0$, если $|a|\le 1$.

Кубическое уравнение имеет не более трех корней.

Осталось привести пример, когда корней ровно три.

Поскольку $f(-1)=f(0{,}5)=a-1$, $f(1)=f(-0{,}5)=a+1$, то уравнение имеет ровно три подходящих корня, например, если $a=0{,}5$.

$$f(-1)=f(0{,}5)=-0{,}5,\ f(1)=f(-0{,}5)=0{,}5.$$

Корни расположены на промежутках $(-1;-0{,}5)$, $(-0{,}5;0{,}5)$, $(0{,}5;1)$, поскольку на концах промежутков $f(t)$ принимает значения разных знаков.

«Длинная» тригонометрическая задача часто вызывает у школьников определенный испуг. Испуг этот можно преодолеть, если рассматривать «короткие» частные случаи.

Пример 3. Для каких значений n система уравнений $\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \ldots + \operatorname{tg} x_n = 3$ и $\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_2 + \ldots + \operatorname{ctg} x_n = 3$ имеет решения $x_i \in (0; \pi/2)$?

Путь от тригонометрии к алгебре здесь очень короток, да и алгебраическая часть решения не является длинной …

Обозначим: $\operatorname{tg} x_1 = a_1$, $\operatorname{tg} x_2 = a_2$, …, $\operatorname{tg} x_n = a_n$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3, \\ \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} = 3 \end{cases}$$

Если система имеет решения, то

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right) + \ldots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = 6,$$

что в случае $n > 3$ приводит к противоречию $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$.

Теперь достаточно рассмотреть случаи.

Ответ: решения есть при $n = 2$, $n = 3$.

Тригонометрия «в себе»

Пример 4. (ВсОШ, окружной тур, 1994–1995). Для углов A, B, C справедливо неравенство $\sin A + \sin B + \sin C \geq 2$. Докажите, что $\cos A + \cos B + \cos C \leq \sqrt{5}$.

Докажем методом от противного: пусть

$$\cos A + \cos B + \cos C > \sqrt{5}.$$

Возведем неравенства в квадрат и сложим. Получим:

1) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A \sin B + 2\sin C \sin A + 2\sin B \sin C \geq 4$

2) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B + 2\cos C \cos A + 2\cos B \cos C > 5$.

Приведем подобные, применим формулу косинус разности. Получим: $\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)>3$. Противоречие.

Геометрические вопросы

По понятным причинам некоторые тригонометрические задачи можно рассматривать, как геометрические.

Пример 5. (ММО, 2005). Существует ли четырехугольник у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

Ответ: замечательный[2] невыпуклый четырехугольник, у которого три угла равны 45°, а четвертый — 225°. Первое, что приходит в голову — неверно.

Как придумать? Так как равными углы быть не могут[3], понятно, что различаться углы могут только на 180°.

Следующая задача похожая, но более сложная.

Пример 6. Косинусы углов одного треугольника равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов треугольников.

Ответ: 135°.

Понятно, что первый треугольник — остроугольный, так как синусы углов любого треугольника — положительны. Из формул приведения следует, что сумма (или разность соответственных углов треугольников равна 90°). То есть:

$$B_1 = 90° \pm A_1,\ B_2 = 90° \pm A_2,\ B_3 = 90° \pm A_3 .$$

Поскольку во втором треугольнике тупой угол один, то (без потери общности) можно считать, что:

$$B_1 = 90° + A_1,\ B_2 = 90° - A_2,\ B_3 = 90° - A_3 .$$

Сложим равенства: $180° = 270° + A_1 - A_2 - A_3$, $90° = A_2 + A_3 - A_1$. Кроме того: $180° = A_1 + A_2 + A_3$, $90° = 2A_1$, $A_1 = 45°$.

Пример. Треугольники с углами: 135°, 25°, 20° и 45°, 65°, 70°.

---

[2] Почему четырехугольник замечательный? Например, потому, что диагонали в нем перпендикулярны.

[3] Прямоугольник — не годится: тангенсы прямых углов не определены.

Тригонометрическая окружность

Неравенство $x \geq \sin x$ (при $x \geq 0$) помогает решить многие задач (само неравенство в школьном курсе обычно получают из определения синуса на тригонометрической окружности).

Пример 7. Решите уравнение $x + \sin x = \pi$

Перепишем уравнение: $\sin x = \pi - x$. Обозначим: $y = \pi - x$.

Получим уравнение: $\sin(\pi - y) = y$, откуда $\sin y = y$.

При $y > 0$, $\sin y < y$, $y < 0$, $\sin y > y$, следовательно, $y = 0$ — единственное решение.

Пример 8. Докажите, что сумма синусов углов выпуклого n-угольника меньше 2π.

Сумма внешних углов многоугольника равна 2π.

Каждый синус внутреннего угла равен синусу внешнего угла.

Следовательно, 2π больше суммы синусов внешних углов, а, значит, и суммы внутренних.

Пример 9. Дано: $f(x) = 1 + a\cdot\cos x + b\cdot\sin x + c\cdot\cos 2x + d\cdot\sin 2x$. Докажите, что если $f(x) > 0$ при всех x, то и $f(x) < 3$ при всех x.

Рассмотрим равенства:

$$f(x) = 1 + a\cdot\cos x + b\cdot\sin x + c\cdot\cos 2x + d\cdot\sin 2x$$

$$f(x+\tfrac{2\pi}{3}) = 1 + a\cdot\cos(x+\tfrac{2\pi}{3}) + b\cdot\sin(x+\tfrac{2\pi}{3}) + c\cdot\cos(2x+\tfrac{4\pi}{3}) + d\cdot\sin(x+\tfrac{2\pi}{3})$$

$$f(x+\tfrac{4\pi}{3}) = 1 + a\cdot\cos(x+\tfrac{4\pi}{3}) + b\cdot\sin(x+\tfrac{4\pi}{3}) + c\cdot\cos(2x+\tfrac{8\pi}{3}) + d\cdot\sin(x+\tfrac{8\pi}{3})$$

Сложим: $f(x) + f(x+\tfrac{2\pi}{3}) + f(x+\tfrac{4\pi}{3}) = 3$, откуда (в силу положительности всех значений функции) $f(x) < 3$.

Тригонометрическая замена

Обычно мы использовали алгебру при решении тригонометрических задач. А как тригонометрия может помочь алгебре?

Посмотрим на простой задаче.

Пример 10. (ММО, 1991). Найдите наибольшее значение выражения $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

Обозначим: $x=\sin\alpha$, $y=\sin\beta$, где $\pi/2\le\alpha,\beta\le\pi/2$. Получим:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta).$$

Ответ: 1.

Фактически установлена область значений данного выражения.

Значительно труднее (технически) решить следующую задачу

Пример 11. (ЛМО, 1981, отбор). Известно: $0\le a,b,c\le 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\le 1+\sqrt{abc}.$$

Обозначим $a=\sin^2\alpha$, $b=\sin^2\beta$, $\sin^2\gamma$. Получим:

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le 1,$$

$$\cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)+\sin\gamma(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\le 1,$$

$$\cos\gamma\sin(\alpha+\beta)+\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+\gamma)\le 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Докажите: если $0<x<\pi/3$, то $\sin 2x+\cos x>1$.

Задача 2. Найдите все значения A, при которых наборы чисел $\sin A$, $\sin 2A$, $\sin 3A$ совпадают с наборами $\cos A$, $\cos 2A$, $\cos 3A$.

Задача 3. Докажите неравенство

$$\sin 2+\cos 2+2(\sin 1-\cos 1)>1.$$

Задача 4. Известно, что число $\operatorname{tg} x+\sqrt{3}$ — целое. Может ли число $\operatorname{ctg} x+\sqrt{3}$ также быть целым?

Задача 5. Значение a подобрано так, что число корней уравнения $4^x-4^{-x}=2\cos ax$ равно 2007. Сколько корней при том же значении a имеет уравнение $4^x+4^{-x}=2\cos ax+4$?

Задача 6. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\operatorname{tg}^2 x+1\le\sqrt{2}|\operatorname{tg} x|(\sin x+\cos x).$$

Задача 7. Известно: $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \pi/2$. Докажите, что

$$\operatorname{tg}^2 x_1 < \frac{\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \ldots + \operatorname{tg} x_n}{\operatorname{ctg} x_1 + \operatorname{ctg} x_2 + \ldots + \operatorname{ctg} x_n} < \operatorname{tg}^2 x_n$$

Задача 8. Известно, что A, B, C — углы треугольника. Докажите, что $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

Задача 9. Докажите: если $0 \le x \le 1$, то $x\sin x + \cos x \ge 1$.

Задача 10. Дано: $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ и $\cos x + \cos y + \cos z = 0$. Докажите: $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$, $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

Задача 11. При каких натуральных n система

$$\begin{cases} \cos x_1 + \cos x_2 + \ldots + \cos x_n = 0, \\ \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n = 0, \\ \left| x_i - x_j \right| \le \pi, i, j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

имеет решение?

Задача 12. Известно: $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$. Найдите $ab + cd$.

Задача 13. Найдите область значений выражения

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Задача 14. Сумма положительных углов A, B, C равна $\pi/2$. Докажите, что $\cos A + \cos B + \cos C > \sin A + \sin B + \sin C$.

Задача 15. Может ли так быть, что $\cos A$ — иррационально, а $\cos 2A$, $\cos 3A$, $\cos 4A$, $\cos 5A$ — рациональны?

Ответы, решения и комментарии

1. (ВсОШ, окружной тур, 1993–1994). Воспользуемся формулами понижения степени и синуса двойного угла, а также свойствами монотонности косинуса и тангенса. Получим:

$$\sin 2x > 1 - \cos x,\ 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x > 2\sin^2\frac{x}{2},\ 2\cos x > \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Понятно, что если $0 < x < \pi/3$, то

$$2\cos x > 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 > \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} > \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

2. (ВсОШ, окружной тур, 2003–2004). Задача вполне «утешительная». В ней почти ничего нет, кроме простых тригонометрических манипуляций. Но как же все-таки избежать перебора?

Помогает простое соображение: если наборы совпадают, то совпадают и их суммы. Осталось решить уравнение (и не забыть сделать проверку):

$$\sin A + \sin 2A + \sin 3A = \cos A + \cos 2A + \cos 3A.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

3. (ЛМО, 1970). Равносильно:

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 + 2(\sin 1 - \cos 1) > 1 - 2\sin 1\cos 1,$$

$$(\sin 1 - \cos 1)(2 - \sin 1 - \cos 1) > (\sin 1 - \cos 1)^2$$

Так как $\sin 1 > \cos 1$, то $2 - \sin 1 - \cos 1 > \sin 1 - \cos 1$, $2 > 2\sin 1$, что очевидно.

4. От противного. Пусть $m = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}$, $n = \operatorname{ctg} x + \sqrt{3}$, где m, n — целые числа. Избавимся от тригонометрии. Из равенств $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} - m$, $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3} - n$ следует, что $\left(\sqrt{3} - m\right)\left(\sqrt{3} - n\right) = 1$.

После преобразований получим: $mn + 2 = (m + n)\sqrt{3}$.

Два случая:

1) $m + n \neq 0$, тогда $\sqrt{3} = \frac{mn + 2}{m + n}$ — противоречие;

2) $m + n = 0$, тогда $mn + 2 = 0$, $m^2 = 2$, что невозможно, так как m — целое.

5. (ММО, 2007). Ответ: 4014.

Преобразуем второе уравнение:

$$4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4,\ \left(2^x - 2^{-x}\right)^2 = 4\cos^2\frac{ax}{2}.$$

Получим совокупность: $2^x - 2^{-x} = 2\cos\frac{ax}{2}$ и $2^x - 2^{-x} = -2\cos\frac{ax}{2}$, равносильную $4^{\frac{x}{2}} - 4^{-\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{ax}{2}$ и $4^{\frac{x}{2}} - 4^{-\frac{x}{2}} = -2\cos\frac{ax}{2}$.

Количество корней в каждом из уравнений последней совокупности совпадает с количеством корней в первом уравнении (замены $m = 2x$, $n = -2x$). Совпадающих корней нет.

6. (Киев, 1972) Перепишем в виде:

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}} \le -\operatorname{tg}^2 x - 1 + \sqrt{2}|\operatorname{tg} x|(\sin x + \cos x)$$

Поскольку $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$, то

$-\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2}|\operatorname{tg} x|(\sin x + \cos x) - 1 \le -(|\operatorname{tg} x| - 1)^2$ и $0 \le -(|\operatorname{tg} x| - 1)^2$.

Следовательно, $|\operatorname{tg} x| = 1$ и $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{|x|+|y|}{\pi}$.

То есть $\frac{|x|+|y|}{\pi} = 1$, $|x| + |y| = \pi$, а $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \pm\frac{3\pi}{4}$.

7. (Киев, 1969) Обозначим: $\operatorname{tg} x_1 = a_1$, $\operatorname{tg} x_2 = a_2$, …, $\operatorname{tg} x_n = a_n$. $\operatorname{ctg} x_1 = b_1$, $\operatorname{ctg} x_2 = b_2$, …, $\operatorname{ctg} x_n = b_n$.

Достаточно доказать, что

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

при условии $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$.

Заменим в числителе все слагаемые на a_n — числитель, а, значит, и дробь увеличится. Заменим в знаменателе все слагаемые на b_1 — знаменатель уменьшится, а, значит дробь увеличится.

Получим:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}<\frac{na_n}{nb_n}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Вторая часть неравенства доказывается аналогично.

8. Из теоремы косинусов получим:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos A=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-\frac{a^2}{2bc}\geq 1-\frac{a^2}{2bc}.$$

Следовательно, $2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A\leq\frac{a^2}{2bc}$, $\sin\frac{A}{2}\leq\frac{a}{2\sqrt{bc}}$,

Далее: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ca}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}$, что и требовалось доказать.

9. Воспользуемся утверждением: если $x>0$, то $x>\sin x$.

Получим: $x\sin x+\cos x\geq\sin^2 x+\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

10. (Киев, 1976). Рассмотрим векторы $\overline{m}(\sin x;\cos x)$, $\overline{n}(\sin y;\cos y)$, $\overline{p}(\sin z;\cos z)$. Их концы расположены на тригонометрической окружности и образуют правильный треугольник. То есть углы между векторами (рассмотренными, например, по часовой стрелке) равны 120°.

Следовательно, концы векторов $\overline{M}(\sin 2x;\cos 2x)$, $\overline{N}(\sin 2y;\cos 2y)$, $\overline{P}(\sin 2z;\cos 2z)$ расположены на тригонометрической окружности и углы ними (рассмотренные последовательно, например, по часовой стрелке) равны 120°.

Следовательно, $\overline{M}+\overline{N}+\overline{P}=\overline{0}$, откуда: $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$ и $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$.

11. («Покори Воробьевы горы», 2006).

Ответ: n — четно.

Сумма единичных векторов $\overline{a_1}(\cos x_1;\sin x_1)$, $\overline{a_2}(\cos x_2;\sin x_2)$, …, $\overline{a_n}(\cos x_n;\sin x_n)$, что возможно, только если все векторы расположены на прямой таким образом, что каждому вектору соответствует противоположный вектор. Сумма равна нулю, поэтому количество векторов четно.

12. (ЛМО, 1975). Обозначим: $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$, где $\pi/2 \le \alpha,\beta \le \pi/2$, тогда $\sin\alpha \cdot \sin\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha-\beta) = 0$ и требуется найти $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$.

То есть $ab + cd = \cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) = 0$.

13. Ответ: $[-1/2;1/2]$.

$x = \mathrm{tg}\alpha$, $y = \mathrm{tg}\beta$, $\pi/2 \le \alpha,\beta \le \pi/2$, тогда получим:

$$\frac{(1+\mathrm{tg}\,\alpha)(1+\mathrm{tg}\,\beta)}{(1+\mathrm{tg}^2\alpha)(1+\mathrm{tg}^2\beta)} = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta).$$

Дальнейшее очевидно.

14. Неравенство равносильно

$$\cos A + \cos B + \cos C > \cos(90^\circ - A) + \cos(90^\circ - B) + \cos(90^\circ - C).$$

При этом: $\cos A > \cos(90^\circ - B)$, так как $A + B < 90^\circ$ и $A < 90^\circ + B$

Аналогично: $\cos B > \cos(90^\circ - C)$ и $\cos C > \cos(90^\circ - A)$.

Сложим полученные неравенства.

15. От противного: $\cos A + \cos 5A$ — иррационально, но $2\cos 2A \cdot \cos 3A$ — рационально. Противоречие.

Литература

1. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. — Всероссийские олимпиады школьников по математике. 1993-2009. — М.: МЦНМО, 2010.

2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. — Муниципальные олимпиады Московской области по математике. — М.: МЦНМО, 2019.

3. Бегунц А.В., Гашков С.Б., Горяшин Д.В., Косухин О.Н., Флеров А.А. Московские математические олимпиады. 1981–1992. — М.: МЦНМО, 2017.

4. Вышенский В.А., Карташев Н.В. , Михайловский В.Н., Ядренко М.И. Сборник задач киевских математических олимпиад. — Киев:Вища школа, 1984.

5. Прасолов А.А. Голенищева-Кутузова Т.И., Канель-Белов А.Я., Кудряшов Ю.Г., Ященко И.В. Московские математические олимпиады. 1935–1957. — М.:МЦНМО, 2010.

6. Фомин Д.В., Кохась К.П. Ленинградские математические олимпиады. 1961–1991. — М.:МЦНМО, 2022.

7. Федоров Р.М., Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Ященко И.В. Московские математические олимпиады. 1993-2005. — М.:МЦНМО, 2006.

8. Чулков П.В. Олимпиадная тригонометрия (без формул) // Учим математике–7 М.:МЦНМО, 2018. С. 89-97.

Эксперимент — критерий истинности

В. Шабанова,
Школа №619, г. Санкт-Петербург
kirasvera@yandex.ru

Впервые о том, что математика — экспериментальная наука, я задумалась после того, как посмотрела открытый урок Константина Михайловича Столбова («Суммы степеней натуральных чисел», ОЦ «Сириус»). Можно ли проводить эксперименты именно на математике? Снова поднять этот вопрос в моей голове и попробовать реализовать на своём уроке натолкнула цитата, которая является девизом кружка по физике «КВАРК»: «Эксперимент — критерий истинности». Это маленькое предложение стало основной идеей для создания целого занятия, которое я провела для коллеги, пришедшего работать к нам в школу с минимальным опытом в должности учителя. Хотелось показать максимально много в небольшой временной интервал, в рамках темы сокращение обыкновенных дробей.

Ход урока

1. Актуализацию знаний провели с использованием даты проведения урока. Так как он проходил 30 сентября 2021 года, то мы рассмотрели различные дроби, которые можно составить из этих цифр. Вспомнили, каким образом на предыдущем занятии происходило сокращение дробей, и какую дробь мы договорились назвать несократимой.

$$\frac{30}{20}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2};\ \frac{30}{21}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7};\ \frac{20}{21}\text{ — несократимая дробь.}$$

2. Поработав с конкретными примерами, продолжили работать с теоретическими знаниями, которые пригодятся на этом уроке. Ответили на вопросы:

1) *Что означает выражение «сократить дробь»?*

При ответе ребят на этот вопрос могут прозвучать высказывания, связанные с их пониманием этого действия.

2) *Сформулируйте определение несократимой дроби.*

Дробь $\frac{a}{в}$ называется несократимой, если $НОД(a; в) = 1$.

3) *Какие возможны способы сокращения дробей?*

Последовательное деление числителя и знаменателя на общие делители *(1 способ)*.

Разложение числителя и знаменателя на простые множители и сокращение на общие *(2 способ)*.

Нахождение НОД числителя и знаменателя и сокращение на НОД *(3 способ)*.

4) *Сократи дробь* $\frac{42}{720}$ *тремя различными способами.*

1 способ: $\frac{42}{720} = \frac{42:2}{720:2} = \frac{21}{360} = \frac{21:3}{360:3} = \frac{7}{120}$.

Преимущество данного способа в том, что мы сокращаем дробь до несократимой, даже не зная её чёткого определения. Сокращаем на то, что видим.

2 способ: $\frac{42}{720} = \frac{\mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 5} = \frac{7}{120}$.

Преимущество данного способа в том, что ребята просто раскладывают числитель и знаменатель на множители и сокращают дробь на общие простые делители.

3 способ: $\frac{42}{720} = \frac{42:6}{720:6} = \frac{7}{120}$.

Данный способ позволяет сразу получить несократимую дробь.

5) *Какой способ понравился больше?*

Большинство ребят проголосовали за второй и первый способы сокращения. И лишь небольшой процент ребят сказали, что им понравился третий способ сокращения.

3. После актуализации знаний я попросила ребят записать девиз нашего урока и попытаться объяснить, что это значит.

«Эксперимент — критерий истинности».

В процессе работы с этим предложением мы решили, что на этом уроке будет проведён эксперимент. Благодаря нашему исследованию мы сможем найти какую-то истину. Но что за эксперимент мы будем проводить никто не смог предположить.

После того, как было озвучено первое задание, суть нашего исследования стала понятна. Определить какой из трёх способов, названных ранее, работает лучше и всегда ли это так.

Далее всех ребят разбили на три группы (3 варианта). Каждой предстояло выполнить одно и то же задание, но разными способами. На выполнение задания у всех было максимально 7 минут.

1. *Сократите дроби.*

После окончания выполнения задания поднимите вверх один палец, если вы выполняли задание 1 способом, 2 пальца, если вторым и 3, если третьим.

$$\frac{125}{75};\frac{75}{100};\frac{24}{360};\frac{125}{1000};\frac{42}{320};\frac{75}{300};\frac{33}{243};\frac{820}{41};\frac{45}{900};\frac{105}{1200}.$$

Первая группа ребят должна была выполнить задание первым способом. Вторая — вторым и третья — третьим. На доске я фиксировала количество учащихся, которые справились с заданием.

После окончания эксперимента мы перевели количество справившихся с заданием ребят в проценты. Оказалось, что на первом месте по скорости выполнения работы были ребята, которые считали 1 способом, т.е. постепенно сокращали данные дроби. На втором месте те, которые считали вторым способом, т.е. через разложение числителя и знаменателя на простые множители. И почётное 3 место заняли ребята, выполнявшие сокращение 3 способом, т.е. находя НОД числителя и знаменателя дроби.

После подведения первых результатов пришла пора проверить правильность полученных результатов. Каким же было удивление некоторых ребят из 1 группы, когда они поняли, что не выполнили задание до конца и показали самый низкий результат качества.

Лучше всего с заданием справилась 3группа. Они выполнили задание со 100% результатом качества. Во второй группе процент оказался чуть ниже.

Вспомнив ту фразу, с которой начали этот урок, мы подвели итог нашего эксперимента и выбрали лучший (по мнению ребят) способ сокращения дробей до несократимых. Несмотря на то, что в качестве нет равных третьему способу, ребята решили, что наиболее разумно применять 2 способ, так как позволяет сэкономить время на записи решения и получить в ответе несократимую дробь.

Далее возник разумный вопрос. А зачем вообще первый способ, если он настолько ненадёжен? И зачем третий способ, если он слишком громоздкий?

Для решения этих вопросов мы выполнили следующие задания.

2. *Докажите, что дроби сократимы.*

$$\textit{а)}\ \frac{360}{945};\frac{624}{768};\frac{3950}{350};\ \textit{б)}\ \frac{1260}{1980};\frac{5184}{5472};\frac{4140}{9315}.$$

Решение этого задания необходимо начать с его формулировки. Ребята заметили, что для того, чтобы доказать сократима ли дробь, не требуется её сократить до несократимой. Достаточно привести аргументы, которые покажут, что числитель и знаменатель можно разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

Решение:

а) 36**0** оканчивается на 0, 94**5** оканчивается на 5. Следовательно, оба числа делятся на 5 (по признаку делимости на 5).

62**4** оканчивается на 4, 76**8** оканчивается на 8. Следовательно, оба числа точно делятся на 2 (по признаку делимости на 2). Некоторые ребята могут заметить, например, что они делятся и на 4.

395**0** оканчивается на 0, 35**0** оканчивается на 0. Следовательно, оба числа делятся на 10.

б) Данное задание выполняется аналогично предыдущему. В нем можно проверить работу других признаков делимости.

Подводя итог проделанной работе, ребята должны сделать вывод, что для решения этого задания отлично подходит 1 способ сокращения дробей, так как надо увидеть только одно конкретное число, на которое делятся и числитель и знаменатель дроби.

3. *Объясните, почему несократимы дроби:*

$$\frac{5}{49}; \frac{18}{193}; \frac{41}{67}; \frac{2007}{2008}.$$

Решение:

1 дробь: $\text{НОД}(5; 49) = 1$. Следовательно, дробь является несократимой.

2 дробь: число 193 — простое, поэтому не делится на 18. $\text{НОД}(18; 193) = 1$. Следовательно, дробь является несократимой.

3 дробь: 41 — простое число и 67 — простое число. $\text{НОД}(41; 67) = 1$. Следовательно, дробь является несократимой.

4 дробь: $2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$; $2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$. Числа 251 и 223 — простые. $\text{НОД}(2008; 2007) = 1$. Следовательно, дробь является несократимой.

*Отдельно можно обсудить с ребятами возможность сокращения дроби вида $\frac{n}{n+1}$.

Подводя итоги выполненного задания, ребята должны оценить помощь нахождения НОД для его решения.

4. *Запишите множество натуральных значений x и y, при которых:*

$\frac{x}{12}$ — правильная несократимая дробь;

$\frac{18}{y}$ — неправильная сократимая дробь.

Приведу пример рассуждений одного из учащихся.

Для того, чтобы дробь была правильной, в числителе могут стоять числа из следующего множества: $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$. Так как дробь должна быть несократимой, то мы должны исключить следующие элементы этого множества: 2, так как $12 : 2 = 6$; 3, так как $12 : 3 = 4$; 4, так как $12 : 4 = 3$; 6, так как $12 : 6 = 2$. Все исключённые числа — делители числа 12. Но у пар чисел 8 и 12; 9 и

12; 10 и 12 есть общие делители. Следовательно, если эти числа оставить, то дробь можно будет сократить. Исключая все вышеперечисленные числа получаем, что $x = \{1; 5; 7; 11\}$.

Аналогично выполняется и задание 2.

Подводя итоги выполненного задания необходимо сделать акцент на способе решения этого задания и обсудить другие способы его выполнения.

Так как приведённые выше задания опирались по большей степени на 1 и 3 способ сокращения дроби, то в завершении занятия можно предложить ребятам решить вот такое задание с применение 2 способа.

5. *Сократите дроби:*

$$\frac{mn^2}{mnk};\ \frac{3a^2b}{6ab};\ \frac{4c}{8c^2d};\ \frac{15xy^2}{20x^2yz};\ \frac{3a-ab}{ax};\ \frac{5n-n^2}{3n};\ \frac{4a^2-2a^2}{6ay}.$$

Это задание позволяет вспомнить понятие степень числа, закрепить полученные за урок знания и поработать с буквенными выражениями.

1) $\dfrac{mn^2}{mnk} = \dfrac{mnn}{mnk} = \dfrac{n}{k}$.

2) $\dfrac{3a^2b}{6ab} = \dfrac{3aab}{2 \cdot 3ab} = \dfrac{a}{2}$.

3) $\dfrac{4c}{8c^2d} = \dfrac{4c}{2 \cdot 4ccd} = \dfrac{1}{2cd}$.

4) $\dfrac{15xy^2}{20x^2yz} = \dfrac{3 \cdot 5xyy}{4 \cdot 5xxyz} = \dfrac{3y}{4xz}$.

5) $\dfrac{3a-ab}{ax} = \dfrac{a(3-b)}{ax} = \dfrac{3-b}{x}$.

6) $\dfrac{5n-n^2}{3n} = \dfrac{n(5-n)}{3n} = \dfrac{5-n}{3}$.

7) $\dfrac{4a^2-2a^2}{6ay} = \dfrac{4a^2-2a^2}{6ay} = \dfrac{2a^2}{6ay} = \dfrac{2aa}{3 \cdot 2ay} = \dfrac{a}{3y}$.

Общий итог занятия

Наш эксперимент показал, что все способы сокращения дробей равнозначно применимы. В каждой конкретной ситуации нужно выбирать самый удобный из них. Истиной же данного исследования стало то, что необходимо знать различные пути решения задачи. Если же всегда опираться только на один из них, то могут возникнуть трудности при выполнении упражнений, которые требуют более широкого спектра знаний.

На этом уроке мы показали, что действительно, математику можно назвать экспериментальной наукой. Именно исследование той или иной проблемы позволяет понять глубину изучаемого предмета.

Содержание