Учим математике - 12

Материалы открытой школы-семинара
учителей математики

Под редакции А.Д. Блинкова и П.В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2024

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-12.** Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2024. — 120 с.

ISBN 978-5-4439-1851-8

В сборнике представлены избранные материалы двенадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики. Семинар прошел в Санкт-Петербурге с 1 по 7 мая 2023 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-12
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Оригинал-макет: *А. Обрубов*, *А. Ширяева*, *А. Чехович*, *П. Чулков*

Подписано в печать 02.04.2024 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 7,5 печ. л. Тираж 250 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии «Белый ветер».

6+

ISBN 978-5-4439-1851-8

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы двенадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики.

Этот семинар прошел в Санкт-Петербурге с 1 по 7 мая 2023 года. Организаторами семинара являлись Академический лицей «Физико-техническая школа» им. Ж.И. Алфёрова, Президентский физико-математический лицей №239, Санкт-Петербургский губернаторский физико-математический лицей №30, ГАОУ ДПО «Центр Педагогического Мастерства» г. Москвы (ЦПМ) и Московский Центр Непрерывного Математического Образования (МЦНМО) совместно с Всероссийской ассоциацией учителей математики.

Материалы десяти предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022, 2023 гг. Кроме того, материалы первых девяти семинаров можно найти в интернете по адресу https://mccme.ru/nir/seminar/conf.htm. Там же размещены видеозаписи некоторых лекций и докладов.

В семинаре могли принять участие все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие более 150 человек, представлявших разные уголки России. Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение школы-семинара дало прекрасную возможность его участникам познакомиться с работой трёх ведущих школ Санкт-Петербурга, которые и организовывали этот семинар. В них проходили мастер-классы со школьниками. Эти мастер-классы проводили как ведущие учителя этих школ, так и специально приглашённые преподаватели. Проведенные занятия «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия также проводили приглашенные опытные преподаватели. Кроме того, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, некоторые участники семинара имели возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением.

По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от ГАОУ ЦПМ. Успешное проведение школы-семинара обеспечили представительные программный и организационный комитеты.

Программный комитет семинара:

- Ященко И.В. – научный руководитель ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики ЦО “Пятьдесят седьмая школа” г. Москвы, кандидат физико-математических наук, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – председатель;
- Блинков А.Д. – методист ЦПМ, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – заместитель председателя;
- Андреев Н.Н. – заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В.А. Стеклова (МИАН РАН), лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых ученых, создатель проекта "Математические этюды", член Координационного Совета Кавказской математической олимпиады, лауреат Золотой медали РАН за пропаганду научных знаний, лауреат премии Лилавати международного математического конгресса 2022 г., кандидат физико-математических наук;
- Кожевников П.А. – председатель Задачного комитета Кавказской математической олимпиады, доцент МФТИ, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В.А. Стеклова (МИАН РАН), член тренерского совета национальной команды национальной команды России на международной математической олимпиаде, заместитель главного редактора журнала "Квант", член Центральной предметной методической комиссии и член Жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике, золотой медалист Международной математической олимпиады 1992 года
- Пратусевич М.Я. – директор и учитель математики Президентского ФМЛ №239, Заслуженный учитель РФ;
- Рыжик В.А. – старший методист и учитель математики лицея “Физико-техническая школа”, Народный учитель РФ;
- Столбов К.М. – заместитель директора и учитель математики лицея “Физико-техническая школа”, Почетный работник общего образования РФ;

- Третьяков А.А. – директор и учитель математики СПб губернаторского ФМЛ №30, Почетный работник образования РФ;
- Чулков П.В. – доцент кафедры элементарной математики и теории чисел МПГУ, зам.директора ФМШ №2007 г.Москвы, Заслуженный учитель РФ.

Организационный комитет семинара:

- Блинков А.Д. – методист ЦПМ, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – председатель;
- Наконечный Н.А. – учитель математики, старший методист лицея “Вторая школа” г. Москвы – координатор и секретарь семинара;
- Зубарева С.И. – учитель математики школы №218 г. Москвы – координатор и секретарь семинара.
- Ильина А.Н. – заместитель директора и учитель математики СПб губернаторский физико-математический лицей №30”, Почетный работник общего образования РФ» – координатор семинара;
- Карачинский Е.Я. – учитель математики и методист Президентского ФМЛ №239 г. Санкт-Петербурга, Почетный работник общего образования РФ – координатор семинара;
- Челкак А.П. – учитель математики СПб губернаторского ФМЛ №30, методист конкурса «Смарт кенгуру» – координатор семинара;
- Эдлин Ю.М – учитель математики Академического лицея “Физико-техническая школа” г. Санкт-Петербурга – координатор и секретарь семинара.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершать прогулки и экскурсии по Санкт-Петербургу, посетить музеи и театры. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом. Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем, кто нашел силы и время подготовить статьи для этого сборника.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда отличаются от названий докладов.

Программа двенадцатой открытой школы-семинара учителей математики

1 мая ФТШ	
Время	**Докладчики, содержание**
9.30 – 10.00	Регистрация участников
10.00 – 10.15	Открытие и оргвопросы
10.15 – 10.40	Презентация базовых школ семинара
10.45 – 12.15	**В.А. Рыжик** Камни преткновения учителя математики на извилистом пути длиной 64 года. Продолжение.
12.30 – 14.00	**М.Я. Пратусевич** Математические основы блокчейна
15.30 – 17.00	**М.А. Волчкевич** Новые версии учебников геометрии
17.15 – 18.00	**Г.И. Вольфсон** Искусственный интеллект в помощь учителю математики

2 мая школа №30	
Время	**Докладчики, содержание**
10.00 – 11.30	**П.В. Чулков** Решаем задачи вместе со школьниками
11.45 – 12.30	**Н.Н. Андреев, Ф.Е. Вылегжанин, Г.А. Мерзон** Особенности: миры уравнений и дискриминанты; графические рисунки
12.45 – 13.30	**А.Е. Панкратьев** О критериях оценивания решений заданий ЕГЭ с развернутым ответом
15.00 – 16.30	**И.Р. Высоцкий** Задачи о случайных перестановках.
16.45 – 17.30	**А.С. Гусев** Дистантное образование школьников, Сириус - курсы
17.45 – 18.30	**В.Н. Соломин** Каким должен быть сборник задач по алгебре и началам анализа для физмат классов

3 мая ФТШ	
Время	**Докладчики, мастер - классы, содержание**
10.45 – 12.15 3-4 урок 9Б	**А.И. Авила - Реесе** Решение геометрических задач (дополнительные построения)
10.45 – 12.15 3-4 урок 10Б	**А.Ю. Иванов** Задачи с параметром
10.45 – 12.15 3-4 урок 10А	**А.Д. Блинков** Степень точки относительно окружности
13.00 – 14.30 5-6 урок 11АБВ	**А.Е. Панкратьев** Различные подходы к решению сложных задач ЕГЭ
16.00 – 17.00	**Ю.В. Маслова, Л.А.Антипова** Красота звездчатых многогранников
17.15 – 18.15	**И.Е. Шендерович** Как физик решает квадратные уравнения

3 мая Лицей №239	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.10 – 11.55 2-3 урок 9_4	**И.Н. Макарова** Обобщающее повторение в 9 классе. Трапеция.
10.10 – 11.55 2-3 урок 6_2, 7_2	**Н.Н. Тыртов** Обобщающий зачет по геометрии.
10.10 – 11.55 2-3 урок 11_7	**П.А. Кожевников** Элементы проективной геометрии
12.10 – 14.10 4-5 урок 10_5	**М.С. Житомирский** Повторение курса алгебры в 10 классе
12.10 – 14.10 4-5 урок 8_1	**П.А. Кожевников** Расстановка по кругу и арифметика остатков
12.10 – 14.10 4-5 урок 8_1	**Д.В. Прокопенко** Прямой угол в окружности, ГМТ разность квадратов
16.00 – 16.30	**В.А. Лецко** Школьные проекты, математический спорт, открытые вопросы

16.40 – 17.00	**М.С. Житомирский** Проблемы современного образования
17.10 – 18.00	**И.Н. Барышев** О текущей программе по математике (роль дискретной математики)

3 мая школа №30	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.20 – 12.25 3-4 урок 11_4	**О.В. Ренёв** Условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса
10.20 – 12.25 3-4 урок 11_6	**И.Р. Высоцкий** Откуда приходит везенье
10.20 – 12.25 3-4 урок 8_1	**Н.А. Наконечный** Комбинаторная оптимизация. Задача о рюкзаке.
12.35 – 14.20 5-6 урок 9_1	**А.А. Тимофеев** Уравнения прямой и плоскости (вывод и демонстрация в Geogebra)
12.35 – 14.20 5-6 урок 8_2	**И.Р. Высоцкий** Как формируются колоколообразные распределения
12.35 – 14.20 5-6 урок 9_2	**И.Н. Барышев** Композиция движений
16.00 – 17.00	**А.П. Челкак, Е.В.Житная, Е.В. Осипова** Об особенностях преподавания математики в ГФМЛ 30. Единство творчества и структуры.
17.15 – 18.15	**И.Р. Высоцкий** Содержание ТВС в 10-11 классах

5 мая ФТШ	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.45 – 12.15 3-4 урок 8-9	**Н.Н Андреев** Математика и музыка: геометрическая прогрессия
13.00 – 14.30 5-6 урок 8	**Т.А. Логунова** О знаменитых задачах древности

13.00 – 14.30 5-6 урок 9А	**К.М. Столбов** Обобщающее повторение: квадратичная функция
13.00 – 14.30 5-6 урок 10А	**И.В. Селиванова** Поэтический мастер-класс
16.00 – 17.00	**В.П. Чуваков** Программа по математике для трёхгодичного набора в СУНЦ НГУ
17.15 – 18.15	**В.Н. Шабанова, Л.М. Тарасова** Опыт организации работы математического кружка по олимпиадной математики в 4 классах общеобразовательной школы

5 мая Лицей №239	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.10 – 11.55 2-3 урок 8_3	**Е.Я. Савич** Окружность
10.10 – 11.55 2-3 урок 9_1	**Г.А. Мерзон** Формула Пика и ее обобщения.
10.10 – 11.55 2-3 урок 11_6	**Г.Д. Мухин** Математическое ожидание
12.10 – 14.10 4-5 урок 11_3	**Е.Я. Карачинский** Обобщающее повторение: задачи с параметром
12.10 – 14.10 4-5 урок 9_6	**Д.В. Швецов** Медианы в подобных треугольниках
12.10 – 14.10 4-5 урок 10_3	**Г.Д. Мухин** Геометрическая вероятность
16.00 – 16.45	**Е.Я. Карачинский** Система преподавания математики, различные виды и формы контроля знаний
17.00 – 17.20	**Г.А. Мерзон** О летней школе "Современная математика"

5 мая школа №30	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.20 – 12.25 3-4 урок 10_5	**Е.В.Житная** Касательная к графику функции в различных точках
10.20 – 12.25 3-4 урок 11_3	**В.О. Шурухин** Физика
10.20 – 12.25 3-4 урок 9_1	**Н.П. Стрелкова** Обобщение теоремы Помпею
12.35 – 14.20 5-6 урок 11_6	**И.С. Гнедина** Графическое решение задач с параметром
12.35 – 14.20 5-6 урок 8_1	**Т.Л. Ниренбург** Высоты и ортоцентр: от простого к сложному.
12.35 – 14.20 5-6 урок 9_2	**Н.П. Стрелкова** Вспомогательные вписанные сферы
16.00 – 16.45	**О.В. Ренёв** О проведении ЕГЭ по математике в Санкт-Петербурге.
17.00 – 17.15	**Л.Ю. Лазарева** Математические мероприятия в Татарстане
17.15 – 17.35	**З.В. Абдурахманова** Центр развития талантов РД Алтаир

6 мая ФТШ	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.45 – 12.15 3-4 урок 10Б	**А.Г Зарембо** Вычисление углов и расстояний в пространстве
10.45 – 12.15 3-4 урок 9Б	**И.Н. Барышев** Векторная арифметика
10.45 – 12.15 3-4 урок 10В	**Г.А. Мерзон** Сумма степеней и числа Бернулли
13.00 – 14.30 5-6 урок 9А	**Ю.М. Эдлин** Вневписанная окружность
13.00 – 14.30 5-6 урок 8А	**Л.А. Сгибнев** Вокруг треугольника Паскаля
13.00 – 14.30 5-6 урок 10А	**В.Б. Некрасов** Задачи с параметром

16.00 – 16.45	**В.А. Рыжик** Новое в старом (о преподавании стереометрии)
17.10 – 17.45	**Ю.М. Эдлин** Игры на уроках математики

6 мая Лицей №239	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.10 – 11.55 2-3 урок 9_10	**Н.Н. Андреев** Конические сечения: общий взгляд
12.10 – 14.10 4-5 урок 11_8	**В.Н. Соломин** Трехгранный угол
12.10 – 14.10 4-5 урок 11_1	**В.И. Франк** О 18 задаче ЕГЭ
12.10 – 14.10 4-5 урок 11_2	**Д.В. Швецов** Скрытая проективная геометрия
16.00 – 17.00	**А.В. Александрова** Дайте детям в руки циркуль
17.15 – 17.45	**С.Л. Синякова** Не панацея, но… - о хороших привычках. И об удивлении - лекарстве от ошибок.

6 мая школа №30	
Время	**Докладчики, мастер-классы, содержание**
10.20 – 12.25 3-4 урок 8_2	**К.А. Рингман** Задачи с параметром. 8 класс
10.20 – 12.25 3-4 урок 8_1	**Г.И. Вольфсон** В команде переменных произведена замена
10.20 – 12.25 3-4 урок 10_4	**Т.Ю. Иванова** Параметры в тригонометрии
12.35 – 14.20 5-6 урок 9_2	**Е.В. Осипова** "Страшная" задача ОГЭ 25: как догадаться
12.35 – 14.20 5-6 урок 9_3	**Д.В. Прокопенко** Площади без вычислений
12.35 – 14.20 5-6 урок 10_1	**И.В. Черняев** Геометрия масс

16.00 – 16.45	**Н.А. Жарковская** Как организовать математическое мероприятие на основе Всероссийского конкурса Смарт Кенгуру
17.00 – 17.50	**О.С. Калимулина** Новая роль учителя

7 мая лицей №239	
Время	**Докладчики, содержание**
10.00 – 11.30	**А.И. Сгибнев** Динамическая математика: возможности, программы, ресурсы
11.45 – 12.30	**В.Н. Соломин** Выпуклость функции и ее применение для широкого круга задач в 8-11 классах
12.45 – 13.30	**П.А. Кожевников** Расстановка по кругу и арифметика остатков
15.00 – 15.45	**Ю.А. Блинков** Теорема о трех плоскостях
16.00 – 16.45	**Д.Г. Мухин** Урок одной задачи (алгебра 9 класс)
17.00 – 17.45	**Д.В. Швецов** Г.Б. Филипповский: обзор творчества
18.00 – 18.30	**Закрытие семинара**
17.45 – 18.30	**В.Н. Соломин** Каким должен быть сборник задач по алгебре и началам анализа для физмат классов

Теорема о трех плоскостях

Ю.А. Блинков,
г. Москва
ablinkov2021@gmail.com

В статье будет рассмотрено одно важное утверждение, которое можно формулировать и использовать сразу после изучения аксиом стереометрии. Отметим, что в виде теоремы оно встречается только в (1) и привязано к теме «Параллельность прямой и плоскости».

Иногда это утверждение встречается (в упрощенной или другой формулировке) в виде задач (см, например, (3), (4), (5)), но внимание на нем не акцентируется. Мы постараемся частично восполнить этот пробел.

Итак, формулировка **теоремы**.

Если три плоскости пересекаются по трем различным прямым, то эти три прямые либо параллельны друг другу, либо пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c, β и γ — по прямой a, α и γ — по прямой b.

Поскольку каждая пара прямых (например, a и b), лежит в одной плоскости, то они либо пересекаются, либо параллельны.

Если никакие две из указаных прямых не пересекаются, то они попарно параллельны и условие теоремы выполняется.

Пусть какие-то две из прямых пересекаются, например, a и b пересекаются в точке C. Тогда точка C принадлежит плоскостям β и γ, поскольку принадлежит их пересечению (прямой a). С другой стороны, эта точка принадлежит плоскостям α и γ, так как она лежит на прямой b. Следовательно, точка C принадлежит все трем плоскостям, в частности, принадлежит пересечению α и β, то есть прямой c.

Итак, прямые a, b и c либо параллельны, либо пересекаются в одной точке, что и требовалось.

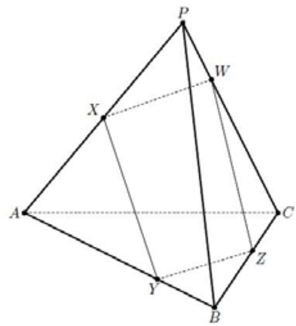
Заметим, что в доказательстве использовалось лишь то, что две плоскости пересекаются по прямой. То есть данное утверждение можно формулировать сразу после изучения аксиом стереометрии.

Теперь рассмотрим применение доказанного утверждения.

Сначала — построение сечений.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. А) *Построили сечение тетраэдра (см. рис. 1). Верно ли выполнено построение?*



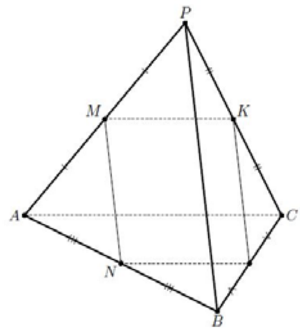
Б) *Постройте сечение тетраэдра* $PABC$*, проходящее через середины ребер* PA*,* PC *и* AB.

Решение. А) Нет, неверно.

Рассмотрим три плоскости: PAC, ABC и плоскость сечения. По теореме о трех плоскостях прямые их попарного пересечения либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Остается заметить, что на данном чертеже не выполняется ни то, ни другое.

Б) Пусть M, K и N — указанные середины ребер.

Рассмотрим три плоскости: PAC, ABC и плоскость сечения (см.рис. 2). По теореме о трех плоскостях прямые их попарного пересечения либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Поскольку MK и AC параллельны, то имеет место первый случай. Следовательно, сечение проходит также через середину отрезка BC и является параллелограммом.



Упражнение 1. *Решите задачу 1, используя другие «тройки» плоскостей.*

Еще раз подчеркнем, что теорема о трех плоскостях использует только пересечение плоскостей, поэтому задачи на эту тему становятся доступны в самом начале изучения стереометрии.

Задача 2. *Прямые a и b параллельны. Точка O не лежит на этих прямых. Плоскость α проходит через O и a, а плоскость β проходит через O и b. Пусть эти плоскости пересекаются по прямой c. Докажите, что прямая c параллельна данным прямым.*

Решение. Рассмотрим три плоскости: α, β и γ, проходящую через прямые a и b. По теореме о трех плоскостях, прямые a, b и c их попарного пересечения либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Поскольку a и b параллельны, то имеет место первый случай.

В этой задаче мы использовали, что две параллельные прямые задают плоскость.

Упражнение 2. *Докажите это.*

На самом деле, мы научились решать достаточно широкий класс задач, связанных с взаимным расположением прямых в пространстве. Например, аналогичным образом можно решить следующее

Упражнение 3. *Прямые a и b параллельны. Прямая c не лежит с ними в одной плоскости и пересекает прямую b. Докажите, что прямые c и a скрещиваются.*

Попробуйте решить эту задачу, не используя признаки скрещивающихся прямых.

Рассмотрим еще одну задачу на построение.

Задача 3. *Пусть $PABCD$ — четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$, причем AB и CD параллельны. Нарисуйте прямую пересечения плоскостей PAB и PCD.*

Решение. Рассмотрим три плоскости: $ABCD$, PAB и PCD. Они пересекаются по трем прямым, две из которых параллельны. Следовательно, прямая пересечения плоскостей PAB и PCD параллельна AB и CD.

Упражнение 4. *Решите ту же задачу, если AB и CD пересекаются.*

Заметим, что в формулировке теоремы и в задачах 1б, 2 и 3 возникает конструкция, связанная с тремя параллельными прямыми. Поэтому следующим шагом логично будет рассмотреть транзитивность параллельности прямых.

Задача 4. *Две прямые, параллельные третьей, параллельны.*
Дано: $a \| c$; $b \| c$. Доказать: $a \| b$.

Решение. Рассмотрим точку B на прямой b и проведем плоскости через B и c и через B и a. Тогда эти плоскости должны пересекаться по прямой, параллельной прямым a и c (см. задачу 2). Но прямая, проходящая через B и параллельная c единственна (докажите!), то есть b параллельна a.

Отметим, что доказательство с той же идеей есть в некоторых учебниках (см. например,(4)), но не совсем понятно, как до него додуматься. Здесь же эта идея выглядит вполне естественно.

Двигаемся дальше. На очереди — параллельность плоскостей.

Для начала вспомним одно важное **утверждение**.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны.

Упражнение 5. *Докажите это.*

Заметим, что это утверждение тоже можно считать одним из случаев теоремы о трех плоскостях, если принять, что две параллельные плоскости пересекаются по бесконечно удаленной прямой.

Теперь вспомним второй признак параллельности плоскостей.

Задача 5. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Дано: $a \| a'$; $b \| b'$; $a \subset \alpha$; $b \subset \alpha$; $a \cap b = O$; $a' \subset \beta$; $b' \subset \beta$. *Доказать:* $\alpha \| \beta$.

Решение. Рассмотрим плоскость, содержащую a и a', а также плоскости α и β. Если α и β пересекаются, то по прямой c, параллельной a и a' (см. задачу 2). Рассмотрев плоскость, проходящую через b и b', получим, что прямая с также параллельна b и b', то есть через точку O проходят две прямые, параллельные прямой c. Противоречие.

Теперь рассмотрим **утверждение**, связанное с параллельностью прямой и плоскости.

Отметим, что теорема о трех плоскостях позволяет изучать параллельность плоскостей и параллельность прямой и плоскости независимо друг от друга, то есть порядок изучения тем можно менять в зависимости от целей и вкусов учителя.

Задача 6. *Если прямая параллельна двум пересекающимся плоскостям, то она параллельна их линии пересечения.*

Решение. Обозначим плоскости через α и β, их прямую пересечения — через c, а данную прямую — через x. Рассмотрим произвольную плоскость γ, проходящую через прямую x и пересекающую α и β. Пусть она пересекает эти плоскости по прямым b и a соответственно. Поскольку прямая x параллельна α и β, то она параллельна прямым b и a (докажите!). Применив теорему о трех плоскостях к плоскостям α, β и γ, получим, что прямые a, b и c параллельны, откуда, учитывая транзитивность параллельности, и следует параллельность прямых c и x.

Теперь — менее стандартные утверждения. В некоторых случаях увидеть эти три плоскости не так просто. Следующая задача взята из задачника (2).

Задача 7. *Треугольники* ABC *и* $A_1B_1C_1$ *не лежат в одной плоскости. Известно, что прямые* AB *и* A_1B_1, BC *и* B_1C_1, AC *и* A_1C_1 *попарно пересекаются. Докажите, что прямые* AA_1, BB_1, *и* CC_1 *пересекаются в одной точке или параллельны.*

Решение. Воспользуемся тем, что две пересекающиеся прямые задают плоскость. Рассмотрим три плоскости, заданные парами прямых: 1) AB и A_1B_1; 2) BC и B_1C_1; 3) AC и A_1C_1.

Тогда по теореме о трех плоскостях прямые AA_1, BB_1, и CC_1 их попарного пересечения пересекаются в одной точке или параллельны.

Заметим, что пересечение прямых мы используем только для того, чтобы они образовывали плоскость, то есть условие задачи остается верным, если какие-то из этих пар прямых параллельны.

Кроме того, эти прямые пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, так как они принадлежат прямой пересечения плоскостей указанных треугольников.

И, наконец, нельзя не отметить связь этого утверждения с теоремой Дезарга (см., например, (3)).

Теперь рассмотрим задачу В.В. Произволова с турнира городов 2009 года, которая использовалась потом и на окружной олимпиаде (участникам тургора она предлагалась в немного другой формулировке).

Задача 8. *В пространстве (но не в одной плоскости) расположены шесть различных точек:* A, B, C, D, E *и* F. *Известно, что отрезки* AB *и* DE, BC *и* EF, CD *и* FA *попарно параллельны. Докажите, что эти же отрезки и попарно равны.*

Решение. Рассмотрим три плоскости, заданные парами параллельных прямых:

1) $(ABDE)$; 2) $(BCEF)$; 3) $(CDFA)$. Они пересекаются по прямым (BE), (CF) и (AD). Тогда эти три прямые либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

В первом случае (если он возможен), из параллельности (BE) и (AD) и параллельности (AB) и (DE) следует, что $ABED$ — параллелограмм, то есть $AB = DE$, и аналогично для других пар отрезков.

Во втором случае имеем пространственный шестиугольник с попарно параллельными противоположными сторонами и пересекающимися в одной точке главными диагоналями.

Тогда из подобия нескольких пар треугольников следует, что противоположные стороны еще и равны, то есть коэффициент подобия не может быть отличным от единицы (докажите!).

Упражнение 6.

А) *Докажите, что первый случай невозможен.*

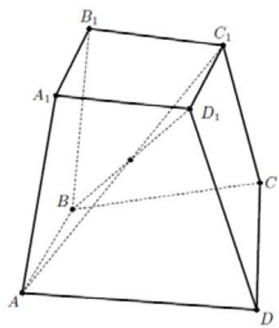
Б) *Используя подобие и метод от противного, доведите доказательство до конца во втором случае.*

Упражнение 7. *Решите задачу 8, используя второй признак параллельности плоскостей или векторные соотношения.*

Отметим, что, как и в задаче 7, взаимное расположение прямых мы использовали для задания плоскости. В следующей олимпиадной задаче (предложил В. А. Лецко), мы используем этот прием еще раз.

Задача 9. *Все грани выпуклого шестигранника — четырехугольники. Докажите, что если у такого многогранника найдется пара пересекающихся диагоналей, то у него найдется еще одна такая пара.*

Решение. Пусть диагонали AC_1 и BD_1 шестигранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются (см. рис. 3). Тогда точки A, B, C_1 и D_1 лежат в одной плоскости α, то есть прямые AB и C_1D_1 параллельны или пересекаются. Рассмотрим еще две плоскости: AA_1B_1B и $A_1B_1C_1D_1$. Тогда по теореме о трех плоскостях прямая A_1B_1 параллельна прямым AB и C_1D_1 в первом случае и проходит через точку их пересечения во втором. Проведя аналогичные рассуждения для плоскостей α, $ABCD$ и DCC_1D_1, получим, что C_1D_1 также параллельна AB и C_1D_1 в первом случае и проходит через точку их пересечения во втором. Следовательно, A_1B_1 и CD либо параллельны, либо пересекаются, то есть точки A_1, B_1, C и D лежат в одной плоскости, а диагонали A_1C и B_1D пересекаются как диагонали выпуклого четырехугольника, что и требовалось.



Продолжение этого сюжета — задача 5 (также предложенная В.А. Лецко) из задач для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Сечением пирамиды $PABCD$, проходящим через точки A и D, является трапеция с основанием AD. Определите вид четырехугольника $ABCD$ ABCD, лежащего в основании пирамиды.*

2. *В пространстве проведены три прямые, не лежащие в одной плоскости, но при этом никакие две не являются скрещивающимися. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку либо параллельны.*

3. *Пусть на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Эти четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда*

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$

4. *Докажите, что можно пересечь выпуклый четырехгранный угол плоскостью так, чтобы получился параллелограмм.*

5. *Все грани выпуклого шестигранника — четырехугольники.*

А) *Сколько пар диагоналей этого шестигранника могут пересекаться?*

Б) *Каково возможное количество различных точек пересечения?*

Список литературы

1. Я.П. Понарин «Элементарная геометрия, том 2. Стереометрия», 2006 г.

2. В.В. Прасолов «Задачи по стереометрии», 2010 г.

3. А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик «Геометрия, 9-10», 1988 г.

4. А.В. Погорелов «Геометрия 10-11», 2010 г.

5. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков «Геометрия 10. Углубленный уровень», 2019 г.

6. Л.С. Атанасян «Геометрия 10-11», 2013 г.

7. И. Ф. Шарыгин «Геометрия 10-11. Базовый уровень», 2013 г.

8. Е.В. Потаскуев, Л. И. Звавич «Геометрия 10 класс», 2012г.

9. А.Ю. Калинин, Д.А. Терешин «Геометрия 10-11. Углубленный уровень», 2011 г.

10. А.П. Киселев «Стереометрия», 2013 г.

Автор благодарен участникам выездного семинара учителей (Санкт-Петербург, май, 2023) за проявленный интерес к докладу, содержательные вопросы и некоторые предложенные задачи. Кроме того, автор благодарит за внимание и положительный отклик учеников 10 класса школы 2007, которым также была прочитана соответствующая лекция.

Задача о разборчивой невесте

А.Р. Высоцкий,
г. Москва
ivanvysotsky@yandex.ru

Постановка задачи и небольшое обсуждение

Задача, о которой пойдет речь, известна под разными именами. Впервые она была опубликована в Scientific American[1] в феврале 1960 г. популяризатором математики Мартином Гарднером[2] как «задача секретаря». Сам Гарднер не является автором задачи.

Суть такова — нужно найти наибольший элемент некоторой неизвестной случайной последовательности при однократном просмотре. Известно количество членов последовательности, но неизвестно, насколько велики они могут быть. При этом формулировка довольно запутанная, поскольку требуется множество естественных условий и ограничений, которые нужно явно оговорить. Ясно, что такую задачу разные люди пытались «завернуть» в разные сюжеты.

Например, задача секретаря формулируется следующим образом. Секретарь ищет машинистку для шефа. К нему по очереди приходят претендентки. Секретарь измеряет скорость письма и должен сейчас же принять машинистку на работу или отказать ей. Трудность в том, что секретарь не может сказать: «Спасибо, мы с вами свяжемся». Задача — найти стратегию, при которой вероятность выбрать самую быструю машинистку становится наибольшей.

История появления задачи довольно темная. Если заменить секретаря капризной невестой, а машинисток — чередой женихов, то

---

[1] Старейший научно-популярный журнал в США (с 1845 г.) Издание этого журнала на русском языке «В мире науки» выходило с 1983 по 1993 год и возобновлено в 2003 г.

[2] Мартин Гарднер (1914 – 2010) – математик-любитель, популяризатор науки.

получается задача, которую сформулировал Меррилл Флад в своих лекциях в 1950-х годах[3]. В 1958 г. он направил ряду математиков письма, в которых излагал стратегию, которая сводится к тому, что невеста должна отвергнуть некоторое количество женихов, а потом выбрать того из следующих, кто лучше всех отвергнутых (стоп - стратегия). Разумеется, если таковой отыщется. Стратегия предполагает, что достоинства жениха могут быть сколь угодно высокими без ограничений, то есть невеста не имеет никакого представления о том, насколько хорош наилучший кандидат.

Немедленно началось соревнование за право считаться автором решения. Лео Мозер и Дж. Р. Паундер — авторы анализа стратегии. В 1963 г. Евгений Борисович Дынкин дал решение в частном случае. Более общее решение принадлежит Сабиру Меджидовичу Гусейну-Заде (1966)[4]. Разумеется, нашлись свидетельства того, что подобные задачи всплывали в XIX веке, и даже сам Иоганн Кеплер вроде бы что-то такое писал или говорил.

Автор этих строк познакомился с задачей в формулировке не про секретаря и не про невесту, а про жестокого шаха и любвеобильного визиря, который должен либо жениться, либо умереть, причем второе вероятнее. В таком виде задачу сформулировала Евгения Васильевна Веретенникова на матфаке МГПИ на своей лекции в 1987 г., совершенно не обращая внимания на культурно-исторические несоответствия[5].

***

Даже самая элегантная с математической точки зрения задача выглядит непривлекательно, если у нее запутанное, перегруженное и неестественное условие. Спасти ее и заставить сверкать можно лишь литературной обработкой. Задача о разборчивой невесте —

---

[3] В российской литературе чаще всего задача встречается как раз в формулировке о разборчивой невесте.

[4] Известна популярная брошюра С.М. Гусейна-Заде «Разборчивая невеста», вышедшая в серии «Библиотека «Математическое просвещение» (вып.25, Москва, МЦНМО, 2003).

[5] Например, в большинстве восточных стран принято платить за невесту, а не получать приданое.

яркий пример. Позвольте представить версию Евгении Васильевны в моей обработке.

Жил-был шах, и был у него молодой, умный и красивый визирь, слухи о достоинствах которого дошли даже до шахского гарема, что с точки зрения шаха было уже слишком.

Наказать наглеца! Но, с другой стороны, — рассуждал шах, — малый и вправду толковый, к тому ж визирь, как-никак. Надо бы дать ему шанс, хоть и небольшой. Пусть испытает судьбу.

После недолгих приготовлений шах пригласил визиря на беседу. В богато убранной спальне стояла кровать под балдахином, а с потолка свисали два шнура, какие обычно используют для вызова прислуги. Визирь с изумлением разглядывал интерьер, а шах обратился к нему с речью.

Слышал я, визирь, ты беден
И ни разу не женат…
Значит, честный! Не мздоимец
И, видать, не казнокрад.

В наши дни такой феномен
Трудно встретить меж людьми.
Но пора тебе жениться.
Так что слушай, шер ами.

Сто наложниц из сераля,
Все красавицы, поверь,
По одной к тебе проходят
В эту узенькую дверь.

В совершенном беспорядке,
Безо всяких там систем.
Сам Ахмет — мой старший евнух —
Без понятья, кто за кем.

Подойдет к тебе девица,
В ухо ласково шепнет,
Сколь за ней как за невестой
Шах в приданое дает.

Чье-то больше, чье-то меньше,
Одинаковых двух нет.
Про других она не скажет —
Вредно знать чужой секрет.

Можешь ты ее потрогать,
Ущипнуть и укусить.
Можешь даже деликатно
О деньгах переспросить.

После краткого знакомства
Должен ты мне дать ответ:
Ты берешь себе невесту
Или твердо скажешь «нет».

Если ты ее отвергнешь,
Потяни за черный шнур,
Мол, пардон, у этой крали
Недостаточный гламур.

Не подходите друг другу?
Невеликая печаль.
Пусть походкою упругой
Возвращается в сераль.

Но возврата к этой деве,
У тебя, мой милый, нет.
Евнух шлет тебе другую
Кандидатку для бесед.

Если ж ты решил жениться,
Потяни за красный шнур:
Кончен конкурс, найден главный
И единственный лямур.

Время дам вам до восхода…
Хорошо провесть досуг,
А потом есть два исхода
Для тебя, мой юный друг.

Если вдруг твоя невеста
Всех богаче остальных,
Так и быть — с тобою место
И пособье для родных

И, конечно же, девица,
Свадьба, отпуск — пять ночей!
Я не стану мелочиться,
Смету пишет казначей.

Если ж хоть одна другая
Состоятельней твоей,
То, прости, не будет свадьбы.
Сэкономлю я на ней.

Не из скаредности, что ты!
С этих денег оплачу
Нестандартную работу
Мухаммеду-палачу.

Для простоты будем считать, что наложниц не сто, а n. Пусть a_j — приданое j-й кандидатки (в томанах или риалах, например). Визирь имеет дело со случайной перестановкой n неизвестных заранее чисел. Самое неприятное, что неизвестно наибольшее значение, которое очень волнует визиря, поскольку дает единственный шанс остаться в живых. Будем дополнительно предполагать, что визирь не может оценить наибольшее из чисел a_j или не задумывается об этом.

В этих условиях после того, как визирь услышит от k-й кандидатки число a_k, он имеет информацию обо всех числах от a_1 до a_k.

Если a_k больше, чем все предыдущие значения, то перед визирем серьезная кандидатка, и он должен принять решение: взять ее в жены или отвергнуть и надеяться на то, что где-то впереди есть еще более богатая невеста. Таким образом, появление каждой серьезной кандидатки является не только испытанием для нервов визиря, но и ключевой точкой в построении алгоритма. Рано или поздно визирь должен выбрать одну из серьезных кандидаток: иначе он останется без головы. Проблема лишь в том, что он не уверен, что за очередной серьезной кандидаткой когда-нибудь последует еще более серьезная.

Казалось бы, дело сводится к изучению последовательности только серьезных кандидаток: визирь в какой-то момент должен принять решение о женитьбе на следующей серьезной кандидатке (это и есть стоп-стратегия).

Вереницы кандидаток

Первая кандидатка — серьезная, поскольку перед ней никого нет. Каждая последующая будет серьезной, если она богаче всех предыдущих. Мы получаем разбиение перестановки на вереницы. Каждую вереницу возглавляет лидер — серьезная кандидатка (число, которое больше всех предыдущих).

Тогда цель визиря — жениться на кандидатке, которая возглавляет последнюю вереницу, а для этого нужно отвергнуть всех кандидаток из предпоследней вереницы. Отпустив кандидатку с некоторым номером k, визирь должен надеяться на то, что скоро появится абсолютная чемпионка, то есть лидер последней вереницы. Это все равно, что надеяться на то, что лидер предпоследней вереницы имеет номер не больше k, а лидер последней — номер больше k.

Итак, задача формализована: нужно найти такое k, что вероятность p_k события «элемент a_k принадлежит предпоследней веренице» наибольшая. Разбиение на вереницы условно показано на рис. 1.

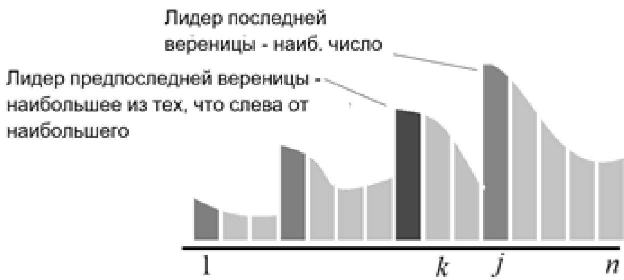


Рис.1. Схема случайной последовательности a_k .

Небольшая проблема в том, что перестановка может состоять из единственной вереницы, а предпоследней вереницы нет вовсе. Этот случай рассмотрим отдельно. Вероятность того, что первое же число a_1 самое большое из всех, равна $p_0 = 1/n$. Будем надеяться, что при каком-то k из отрезка от 1 до n вероятность p_k больше $1/n$. Кстати, случай $k = n$ рассматривать бессмысленно: $p_n = 0$.

Чтобы не запутаться, разобьем задачу на три части. Сначала найдем вероятности p_k, потом посмотрим, при каком k вероятность p_k наибольшая, а затем — чему равна эта наибольшая вероятность.

Задача 1. *Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ является случайной перестановкой некоторого множества попарно различных положительных чисел. Найти вероятность p_k события «элемент a_k является членом предпоследней вереницы».*

Решение. Событие «элемент a_k принадлежит предпоследней веренице» наступает тогда и только тогда, когда происходят два следующих события (см. рис.1).

1. Наибольший элемент перестановки находится на позиции с каким-то номером $j > k$ из n равновозможных (вероятность - $\frac{1}{n}$).

2. При этом условии лидер предпоследней вереницы (наибольшее из чисел, расположенных левее наибольшего) находится на одной из первых k позиций из $j-1$ равновозможных. Вероятность этого $\frac{k}{j-1}$.

Суммируя произведения $\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{j-1}$ по всем $j = k+1, \ldots, n$, получим:

$$p_k = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1}), \qquad (1)$$

где, как обычно, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ — $n-$е гармоническое число.

***

Формально задача решена — получена формула для p_k, хотя и не очень удобная с вычислительной точки зрения. Придумаем другую. Например, рекурсивную. Для этого введем дополнительно индекс n, маркирующий длину перестановки:

$$p_{n,k} = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1}).$$

Поищем рекурсию. При $k = n$ получаем: $p_{n,n} = 0$, в частности $p_{1,1} = 0$, если считать, что $H_0 = 0$. При $1 \le k < n$

$$p_{n,k} = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1}) = \frac{k}{n} \cdot \left(H_{n-2} - H_{k-1} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{k}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{k} p_{n-1,k} + \frac{1}{n-1} \right),$$

откуда

$$p_{n,k} = \frac{n-1}{n} p_{n-1,k} + \frac{k}{n(n-1)}. \qquad (2)$$

Равенства (2) достаточно, чтобы построить таблицу чисел $p_{n,k}$ последовательно по столбцам сверху вниз, опираясь на диагональ нулевых вероятностей $p_{n,n}$, которые выделены на рис. 2.

Задача о неразборчивой невесте. Вероятности p_n_k

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1,00000**	0,00000									
2	**0,50000**	**0,50000**	0,00000								
3	0,33333	**0,50000**	0,33333	0,00000							
4	0,25000	**0,45833**	0,41667	0,25000	0,00000						
5	0,20000	0,41667	**0,43333**	0,35000	0,20000	0,00000					
6	0,16667	0,38056	**0,42778**	0,39167	0,30000	0,16667	0,00000				
7	0,14200	0,35000	**0,41429**	0,40714	0,35238	0,26190	0,14286	0,00000			
8	0,12500	0,32411	0,39821	**0,40982**	0,37976	0,31845	0,23214	0,12500	0,00000		
9	0,11111	0,30198	0,38175	**0,40595**	0,39312	0,35251	0,28968	0,20833	0,11111	0,00000	
10	0,10000	0,28290	0,36579	**0,39869**	0,39825	0,37282	0,32738	0,26528	0,18889	0,10000	0,00000
11	0,09809	0,26627	0,35072	0,38972	**0,39841**	0,38438	0,35216	0,30480	0,24444	0,17227	0,09091
12	0,08333	0,25166	0,33665	0,37997	**0,39551**	0,39023	0,36827	0,33243	0,28468	0,22652	0,15909
13	0,07692	0,23871	0,32356	0,36997	0,39073	**0,39226**	0,37840	0,35173	0,31406	0,26678	0,21096
14	0,07143	0,22715	0,31145	0,36003	0,38480	**0,39171**	0,38434	0,36507	0,33559	0,29718	0,25083
15	0,06667	0,21677	0,30021	0,35031	0,37819	**0,38941**	0,38729	0,37406	0,35131	0,32022	0,28173
16	0,06250	0,20739	0,28978	0,34092	0,37122	0,38590	**0,38809**	0,37990	0,36269	0,33771	0,30579

Рис. 2. Построение вероятностей $p_{n,k}$ в MS Excel с помощью (2). Наибольшая вероятность при каждом n выделена.

В качестве задач для самостоятельного решения мы предложим еще два равенства:

$$p_{n,k} = \frac{k}{k-1}\left(p_{n,k-1} - \frac{1}{n}\right) \text{ при } 1 < k \le n \quad (3)$$

и

$$p_{n,k} = \frac{k}{n} p_{n-1,k-1} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) p_{n-1,k} \text{ при } 1 \le k \le n. \quad (4)$$

Равенство (4) наводит на мысль о том, что главным героем всей конструкции является отношение k/n. Можно было бы использовать это соображение в дальнейших рассуждениях, но мы пойдем другим путем.

***

Таблица на рис. 2 убеждает в том, что положение визиря не так безнадежно, как могло показаться вначале. Наибольшие вероятности, конечно, уменьшаются с ростом n, но не очень стремительно. Более того, кажется, что они вовсе не стремятся к нулю. Проблема в том, чтобы поймать закономерность.

Если $n = 2$, то $p_0 = p_1 = 0{,}5$, и в таком случае у визиря была бы сложная дилемма — в обоих вариантах одинаково вероятно лишиться головы. Но при $n \ge 3$ сомнений нет. Если наложниц трое, то наибольшая вероятность p_1, поэтому нужно отпустить первую наложницу в сераль и затем соглашаться на брак с той, которая окажется богаче первой. Вероятность того, что такая найдется и действительно будет самой богатой, равна $p_1 = 0{,}5$. И так далее. Например, если наложниц $n = 16$, то отпустить с миром нужно шестерых, поскольку наибольшая в 16-й строке вероятность — это p_6, которая равна 0,38809. Это и есть вероятность того, что 6-я наложница оказалась в предпоследней веренице, а значит, скоро появится следующая серьезная кандидатка, которая и есть лидер последней вереницы, то есть самая богатая из всех.

Ну хорошо: если наложниц 3 или 4 то пропустить нужно одну, если 5, то нужно пропустить двоих, а если $n = 16$, то шестерых. А где закономерность? Вообще-то она тоже видна на рис. 2. Наибольшие числа, выделенные, группируются вдоль некоторой прямой. Собственно, ее-то нам и нужно найти.

Задача 2. *При каком значении k вероятность p_k наибольшая?*

Чтобы узнать, при каком k вероятность p_k наибольшая, нужно найти наибольшее решение неравенства $p_k - p_{k-1} \geq 0$. Преобразуем разность:

$$p_k - p_{k-1} = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1}) - \frac{k-1}{n}(H_{n-1} - H_{k-2}) =$$

$$= \frac{1}{n}(k(H_{k-2} - H_{k-1}) - H_{k-2} + H_{n-1}) = \frac{1}{n}\left(-\frac{k}{k-1} - H_{k-2} + H_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(-1 - \frac{1}{k-1} - H_{k-2} + H_{n-1}\right) = \frac{1}{n}(H_{n-1} - H_{k-1} - 1).$$

Задача свелась к решению неравенства

$$H_{n-1} - H_{k-1} \geq 1. \qquad (5)$$

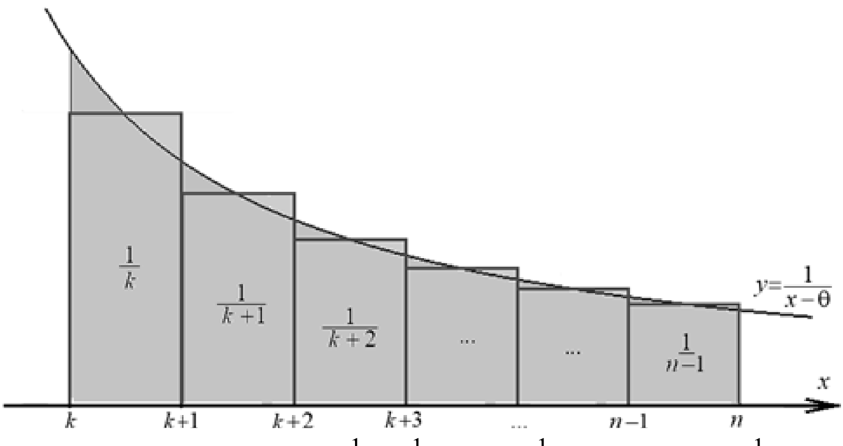


Рис. 3. Приближение суммы $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ *функцией* $y = \frac{1}{x-\theta}$.

Представим число $H_{n-1} - H_{k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ как площадь фигуры, составленной из столбиков на отрезке $[k; n]$ (рис. 3). Верхняя граница фигуры лежит заключена между линиями $y = \frac{1}{x}$

и $y=\dfrac{1}{x-1}$. Значит, существует некоторое число $\theta\in(0;1)$, при котором

$$H_{n-1}-H_{k-1}=\int_k^n \frac{1}{x-\theta}dx=\ln\frac{n-\theta}{k-\theta}; \qquad (6)$$

разумеется, θ зависит от k и n.

Неравенство (5) принимает вид $\ln\dfrac{n-\theta}{k-\theta}\geq 1$, откуда $k\leq\dfrac{n}{e}+\theta\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$.

Значит, наибольшее целое k равно $\left[\dfrac{n}{e}+\theta\left(1-\dfrac{1}{e}\right)\right]$, то есть именно при таком k вероятность p_k будет наибольшей. Полученный результат говорит, что

$$k=\left[\frac{n}{e}\right] \text{ или } k=\left[\frac{n}{e}\right]+1, \qquad (7)$$

поскольку $0<\theta\left(1-\dfrac{1}{e}\right)<1$.

Результат (7) можно уточнить. Число θ зависит от k и n слабо: при больших k (и, стало быть, n) число θ близко к 0,5. Это видно на рисунке 3: чем правее, тем меньше должны различаться по длине горизонтальные катеты «верхних» и «нижних» треугольников. Сейчас будем считать это очевидным, а ниже докажем. Тогда, зная, что k велико $\left(k>\dfrac{n}{e}-1\right)$, положим $\theta=0{,}5$. Получим уточнение равенств (7):

$$k=\left[\frac{n}{e}+0{,}5\left(1-\frac{1}{e}\right)\right]\approx\left[\frac{n}{e}+0{,}316\right]$$

K10 f_x =ЦЕЛОЕ(J10/EXP(1)+0,5*(1-EXP(-1)))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		n	k	n	k	n	k	n	k	n	k	n	k	n	k
3		13	5	33	12	53	19	73	27	93	34	113	41	133	49
4		14	5	34	12	54	20	74	27	94	34	114	42	134	49
5		15	5	35	13	55	20	75	27	95	35	115	42	135	50
6		16	6	36	13	56	20	76	28	96	35	116	43	136	50
7		17	6	37	13	57	21	77	28	97	36	117	43	137	50
8		18	6	38	14	58	21	78	29	98	36	118	43	138	51
9		19	7	39	14	59	22	79	29	99	36	119	44	139	51
10		20	7	40	15	60	22	80	29	**100**	**37**	120	44	140	51

Рис. 4. Расчет по формуле (8). Для вычисления целой части использована функция ЦЕЛОЕ.

Непосредственная проверка показывает, что (8) дает точное решение для малых n. При больших n решение тем более точное в силу сходимости

$$(H_{n-1}-H_{k-1})-\ln\frac{n-0{,}5}{k-0{,}5}\xrightarrow{n,k\to\infty}0\,.$$

Значит, наилучшая стоп-стратегия визиря такова: нужно пропустить $k=[n/e+0{,}316]$ претенденток, запомнив лишь наибольшее из приданых $M=\max(a_1,\ldots,a_k)$. Например, при $n=100$ пропустить нужно $k=37$ претенденток (рис. 4). После этого нужно ждать кандидатку, чье приданое больше M, и объявить ее невестой. Вероятность p_k того, что такая кандидатка найдется и окажется богаче не только всех отвергнутых, но и всех еще не пришедших, больше, чем при любом другом k.

Осталось найти, чему равна эта наибольшая вероятность (хотя визирю это знание уже ничего не даст — больше от него ничего не зависит).

Задача 3. *Найти значение наибольшей вероятности* p_k.

Из равенства (1) и неравенства (5), учитывая, что $k=[n/e+0{,}316]>\dfrac{n}{e}-1$, получаем оценку снизу:

$$p_k=\frac{k}{n}(H_{n-1}-H_{k-1})\geq\frac{k}{n}>\left(\frac{n}{e}-1\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}\,.$$

Найденное k является наибольшим целым решением неравенства (5), а потому $H_{n-1} - H_k < 1$. Это значит, что $H_{n-1} - H_{k-1} < 1 + \frac{1}{k}$. Тогда, учитывая, что $k = [n/e + 0{,}316] > \frac{n}{e} - 1$, получаем оценку сверху:

$$p_k = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1}) < \frac{k}{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left(\frac{n}{e} + 1\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{e} + \frac{2}{n}.$$

Объединим оценки: $\frac{1}{e} - \frac{1}{n} < p_k < \frac{1}{e} + \frac{2}{n}$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} p_k = \frac{1}{e}$. Шансы визиря не так ничтожны, как могло показаться вначале. Если все сделать правильно, то вероятность благополучного исхода равна примерно $1/e \approx 0{,}368$, а на самом деле немного больше.

***

В заключение поясним, что имелось в виду, когда речь шла о предположении, будто визирь (секретарь, невеста), не имеет представления о том, насколько велико может быть число $\max(a_1, \ldots, a_n)$, то есть наибольшее приданое (скорость машинописи или добродетель жениха). Предположим, что от кого-то (скажем, от Ахмета) визирь узнал, что на приданое наложницам шах ассигновал всего 10000 томанов. В этом случае при появлении наложницы с приданым 5000 томанов или больше, визирь должен забыть все стратегии и немедленно жениться.

Но даже при отсутствии инсайдерского слива визирь имеет ненулевую информацию о возможном максимальном приданом. Дело в том, что на множестве натуральных чисел отсутствует равномерное распределение. Иными словами, шах не может выбрать совершенно случайное натуральное число, не имеющее преимуществ ни перед каким другим. В любом случайном опыте, где выбирается случайное натуральное число $n \in N$, элементарные события не равновозможны. Даже бесконечно богатый шах не может выдать просто большое, невероятно большое и поистине колоссальное приданое с равными вероятностями. Предполагая противное, мы попадаем в ситуацию, похожую на парадокс двух конвертов[6].

Эта неравновозможность теоретически может быть использована в построении наилучшей стратегии. Например, если у очередной наложницы чрезвычайно большое приданое, визирь должен выбрать ее, нарушив стоп-стратегию. К сожалению, все эти рассуждения не помогут визирю, поскольку он не знает, где граница, отделяющая просто большое приданое от чрезвычайно большого, и не может сколько-нибудь правдоподобно ее установить в процессе эксперимента. Чем-то похоже на хороший детектив: улики есть, а как ими распорядиться — неизвестно. Поэтому разумно предполагать полное отсутствие информации о максимуме, и в этом предположении мы задачу решили.

Приложение (доказательство того, что $\theta \to 0{,}5$).

Покажем, что число θ из равенства (6) стремится к 0,5 при $n, k \to \infty$ снизу, то есть все время оставаясь меньше чем 0,5.

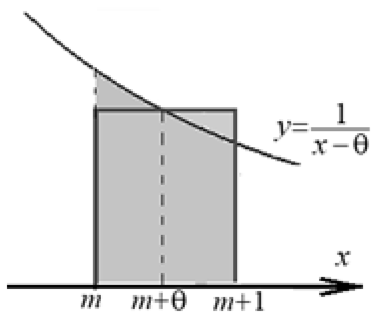


Рис. 4.

Из всех столбиков на рис. 3 достаточно рассмотреть один. Пусть столбик высотой $1/m$ построен на отрезке $[m; m+1]$ (рис. 4). Если мы докажем, что в равенстве

[6] Ведущий шоу выдает двоим участникам по конверту. Известно, что в одном из них денег вдвое больше, чем в другом. Участники могут поменяться конвертами. Если считать, что в конверте соперника денег вдвое меньше или вдвое больше с равными шансами, то обоим выгодно меняться: математическое ожидание суммы в конверте после обмена у каждого игрока оказывается в 1,25 раза больше, чем до обмена. С другой стороны, если у одного ожидание суммы растет, то у другого оно должно уменьшиться. Противоречие.

$$\frac{1}{m}=\int_m^{m+1}\frac{dx}{x-\theta}=\ln\frac{m+1-\theta}{m-\theta} \qquad (9)$$

верно, что $\theta \to \frac{1}{2}$ при $m \to \infty$, то тем самым докажем это для всего равенства (6).

Доказательство. Из (9) получаем:

$$\frac{1}{m}=\ln\left(1+\frac{1}{m-\theta}\right), \text{ то есть } e^{\frac{1}{m}}=1+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{1-\theta/m}.$$

Разложим обе части в степенные ряды:

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{6m^3}\ldots=1+\frac{1}{m}+\frac{\theta}{m^2}+\frac{\theta^2}{m^3}+\ldots.$$

После очевидных преобразований получаем:

$$\theta=\frac{1}{2}+\frac{1-6\theta^2}{6m}+\ldots+\frac{1-k!\cdot\theta^{k-1}}{k!m^{k-2}}+\ldots\xrightarrow{m\to\infty}\frac{1}{2}.$$

Утверждение доказано.

И уж совсем просто показать, что $\theta<0{,}5$ для всех k и n. Предположим, что $\theta\le 0{,}5$. Тогда площадь «верхнего» треугольника на рис. 4 больше площади «нижнего», что противоречит предположению о равенстве этих площадей.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найдите вероятность того, что в перестановке длины* $n=45$ *девятый по счету элемент принадлежит предпоследней веренице.*

Ответ: прибл. 0,331.

2. *Докажите соотношение (3).*

Указание. В равенстве $p_{n,k}=\frac{k}{n}(H_{n-1}-H_{k-1})$ нужно представить H_{k-1} как $H_{k-2}+\frac{1}{k-1}$.

3. *Докажите соотношение (4).*

Нужно воспользоваться равенствами **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и

Ошибка! Источник ссылки не найден. или формулой из задачи 4*.

4*. *Докажите, что при* $1 \le k \le n$

$$p_{n,k} = \frac{1}{C_n^k} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{C_{n-i-1}^{k-1}}{i}.$$

Доказательство. Равенство можно получить алгебраически из $p_{n,k} = \frac{k}{n}(H_{n-1} - H_{k-1})$ или составить из комбинаторных соображений. Пойдем вторым путем. Заменим числа a_j их рангами — натуральными числами от 1 до n, расположенными по величине в том же порядке, что и числа a_j.

Всего равновозможных перестановок чисел от 1 до n ровно $n!$. Пусть число i равно количеству чисел в последней веренице, которые больше, чем лидер предпоследней вереницы. Нужно найти число перестановок, где среди первых k чисел наибольшее число равно $n-i$, а среди чисел $n, n-1, \ldots, n-i+1$ первым встречается число n, причем нужно это сделать для каждого $i = 1, \ldots, n-k$ и сложить полученные выражения. Применим правило умножения.

1. Число $n-i$ поставим на одно из k первых мест — k способов это сделать.

2. Выберем среди $n-k$ последних мест (последняя вереница) i мест для самых больших чисел $n, n-1, \ldots, n-i+1$ — C_{n-k}^i способов. Число n поставим на первое из выбранных мест, а остальные $i-1$ чисел от $n-1$ до $n-i+1$ разместим на прочих местах $(i-1)!$ способами.

3. Осталось $n-i-1$ чисел, которые расположим в оставшихся местах $(n-i-1)!$ способами.

Получаем:

$$p_{n,k} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n-k} k \cdot C_{n-k}^i \cdot (i-1)! \cdot (n-i-1)!$$

Осталось выполнить очевидные преобразования.

Подобно-вписанные треугольники

В.А. Лецко,
г. Волгоград
val-etc@yandex.ru

Откуда взять тему для школьного исследования в области математики? Такую, чтобы она была оригинальна, содержательна и одновременна посильна школьнику. Возможно ли в принципе такое сочетание? Свой опыт разработки тематики математических исследований старшеклассников автор обобщил в работе [1]. В данной статье рассказано об одном из самых интересных, но, в то же время, не самых успешных школьных исследований, описанных в этой книге.

Естественный и, по-видимому, самый распространенный способ получения новых результатов в математике — это обобщение и аналоги имеющихся. Иногда обобщение некоторого понятия или задачи напрашивается само собой. Но часто обобщение, приводящее к интересным результатам, не бросается в глаза. В предлагаемой вниманию читателя статье мы рассмотрим одно такое обобщение.

Мы будем обобщать срединный треугольник, то есть треугольник, образованный средними линиями исходного треугольника. Обобщать это понятие (как и практически все другие) можно в разных направлениях. Например, вполне естественно перейти от треугольников к рассмотрению многоугольников с большим числом сторон. Для четырехугольников аналогичное срединному треугольнику понятие изучено давным-давно, французским математиком Вариньоном. Его теорема и следствия из нее — стандартный материал школьных геометрических кружков и факультативов.

Можно продолжать наращивать число сторон и дальше. Но мы пойдем другим путем. Середины сторон делят стороны пополам. Мы же заменим их точками, делящими стороны треугольника (или их продолжения) в фиксированном отношении. Более точно: пусть точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC, и AC треугольника ABC или их продолжениях и при этом $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \lambda\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CA}$ для некоторого фиксированного числа λ. Соединив точки K, L и M получим некоторое обобщение срединного треугольника. Дабы исключить совпадение треугольника KLM с исходным, договоримся считать λ, отличным от 0 и 1.

Отметим некоторые свойства полученного треугольника. Его стороны отсекают от исходного не равные, как в случае срединного треугольника, но равновеликие треугольники. При этом площадь треугольника KLM будет равна $S_{KLM} = (1 - 3\lambda + 3\lambda^2)S_{ABC}$. Еще одно свойство, унаследованное новым треугольником от срединного — его центроид совпадает с центроидом исходного треугольника. Однако, более никаких интересных свойств у нового треугольника не наблюдается (что, конечно же, не означает их отсутствия). Не слишком много для полноценного исследования. Но это не значит, что идею рассмотреть треугольник, вершины которого делят стороны в одном и том же отношении, следует отбросить. Ее можно усовершенствовать.

Срединный треугольник всегда подобен исходному. Очевидно, что для нашего обобщения это не всегда так. Возникают вопросы:

- Может ли треугольник KLM быть подобен исходному при $\lambda \neq \frac{1}{2}$?
- Много ли существует значений λ, для которых ΔKLM подобен ΔABC ?
- Как ответы на предыдущие вопросы зависят от формы исходного треугольника?

Очевидно, что, если треугольник ABC равносторонний, то треугольник KLM тоже будет равносторонним при любом λ. В дальнейшем мы будем предполагать, что исходный треугольник отличен от равностороннего.

В остальных случаях ответы на поставленные вопросы требуют аккуратного исследования. При этом ясно, что ответы зависят лишь от формы, но не от размеров исходного треугольника. Это позволяет нам ограничиться рассмотрением некоторой параметризации, в которой каждый класс подобных треугольников будет представлен одним экземпляром.

Опишем такую параметризацию.

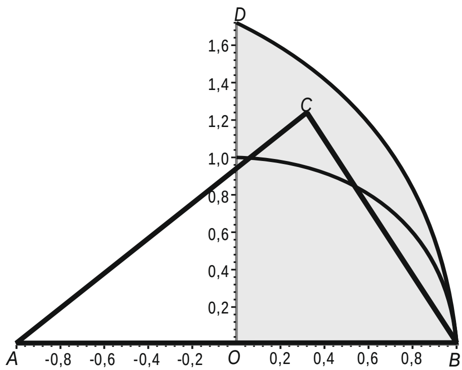


Рис. 1

Зафиксируем одну из сторон треугольника. Удобнее всего зафиксировать наибольшую сторону треугольника, ведь в этом случае длины остальных сторон будут ограничены сверху длиной большей стороны. Возьмем на координатной плоскости две точки $A(-1;0)$ и $B(1;0)$. Это будут вершины большей стороны нашего треугольника. Рассмотрим на плоскости область ODB, ограниченную положительными полуосями системы координат и дугой окружности радиуса 2 с центром в точке A. Эту область мы будем рассматривать вместе с границей, за исключением отрезка OB (см. рис. 1). Обозначим эту область буквой T. Легко показать, что для каждого данного треугольника в области T найдется ровно одна точка C такая, что треугольник ABC подобен данному.

В частности: равнобедренным (и равностороннему) треугольникам соответствует расположение точки C на границе области; принадлежность C дуге окружности радиуса 1 с вершиной в точке O приводит к прямоугольным треугольникам; выше и ниже этой дуги лежат области остроугольных и тупоугольных треугольников соответственно. Расположение точки C на отрезке OB приводит к вырожденным «треугольникам», у которых сумма двух сторон равна третьей.

Таким образом, нам удалось представить все многообразие треугольников на одном рисунке. Пусть $0 \le x < 1$ и $0 < y \le \sqrt{4-(1+x)^2}$ — координаты C. Тогда каждый треугольник с точностью до подобия однозначно определяется параметрами x, y.

Перейдем к поиску ответов на поставленные вопросы.

Пусть ABC — некоторый треугольник, точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC, и AC, а s — некоторое действительное число, отличное от 0 и 1. Треугольник KLM будем называть подобно-вписанным в ΔABC, если

- $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CA}$;
- треугольник KLM подобен треугольнику ABC.

Очевидно, что срединный треугольник является частным случаем подобно-вписанного (иначе какое же это было обобщение?!). Поэтому у каждого треугольника есть, по крайней мере, один подобно-вписанный.

В рассматриваемой параметризации координаты точек K, L, M будут такими:

$K(2\lambda-1;0)$, $L(1+\lambda x-\lambda;\lambda y)$, $M(x-\lambda-\lambda x;y-\lambda y)$.

Существует 6 разных способов сопоставить вершины треугольников ABC и KLM. Приступая к их рассмотрению, мы сомневались в успехе нашей затеи. Ведь для подобия треугольников требуется выполнение двух равенств. Это может быть равенство косинусов двух пар соответствующих углов (в отличие от синуса, косинус угла треугольника однозначно определяет этот угол) или пропорциональность соответствующих сторон. Но все равно требуемых равенств будет два. А у нас всего одна степень свободы — λ. Поэтому мы ожидали, что нетривиальные подобно-вписанные треугольники, возможно, существуют не для всех исходных треугольников, а для какого-то специального класса треугольников.

С другой стороны, некоторые из систем, описывающих пропорциональность сторон, несмотря на переопределенность (два уравнения, одна неизвестная), заведомо обязаны быть совместными. Например, пропорция $\frac{LM}{AB}=\frac{KM}{BC}=\frac{KL}{AC}$ приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{(1+\lambda x-x)^2+(2\lambda y-y)^2}=\frac{\sqrt{(\lambda x+3\lambda-x-1)^2+(\lambda y-y)^2}}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{(1+\lambda x-x)^2+(2\lambda y-y)^2}=\frac{\sqrt{(\lambda x-3\lambda+2)^2+(\lambda y-y)^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}} \end{cases} \qquad (1)$$

которая при любом наборе значений параметров x и y обязана иметь, по крайней мере, одно решение $\lambda=\frac{1}{2}$, поскольку это значение λ соответствует срединному треугольнику ΔABC.

Эти соображения настраивают на оптимистический лад. Почему бы и пропорциям при других сопоставлениях вершин не приводить к разрешимым системам?

Система (1) и в самом деле имеет решение $\lambda_0=\frac{1}{2}$. Причем это решение — единственное.

Каждая из пропорций $\frac{KL}{AB}=\frac{LM}{BC}=\frac{KM}{AC}$ и $\frac{KM}{AB}=\frac{KL}{BC}=\frac{LM}{AC}$ также имеет единственное решение. В первом случае, это 0, а во втором 1. Но мы договорились исключить из рассмотрения эти значения.

Рассмотренные пропорции исчерпывают все случаи, когда треугольники ABC и KLM одинаково ориентированы. Таким образом, у неравностороннего треугольника не существует нетривиальных подобно-вписанных треугольников, одинаково ориентированных с исходным.

Пропорция $\frac{KL}{AB}=\frac{KM}{BC}=\frac{LM}{AC}$ приводит к системе с единственным решением $\lambda_1=\frac{-4x}{x^2+y^2-6x-3}$. И у нас появился первый нетривиальный подобно-вписанный треугольник.

Пропорция $\frac{LM}{AB}=\frac{KL}{BC}=\frac{KM}{AC}$ дает решение $\lambda_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-2x-3}{x^2+y^2-3}$.

Наконец, пропорция $\frac{LM}{AB}=\frac{KL}{BC}=\frac{KM}{AC}$ приводит к последнему решению $\lambda_3=\frac{x^2+y^2+2x-3}{x^2+y^2+6x-3}$.

Таким образом, имеется 4 значения λ, для которых возможны подобно-вписанные треугольники:

$$\lambda_0=\frac{1}{2};\ \lambda_1=\frac{-4x}{x^2+y^2-6x-3};\ \lambda_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-2x-3}{x^2+y^2-3};$$

$$\lambda_3=\frac{x^2+y^2+2x-3}{x^2+y^2+6x-3}\quad(2)$$

Однако, не любой треугольник, отличный от равностороннего, имеет 4 подобно-вписанных треугольника. Пусть ΔABC — равнобедренный (но не равносторонний). Тогда $x=0$ или $x^2+y^2+2x=3$. В первом случае имеем: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=1$. Во втором — $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$. То есть для равнобедренного треугольника единственным подобно-вписанным треугольником является срединный. Факт, что решения, полученные в предположении, что ΔKLM противоположно ориентирован с ΔABC, совпали с решениями, полученными в предположении одинаковой ориентированности этих треугольников, не должен нас смущать, поскольку речь идет о равнобедренных треугольниках.

Перейдем к рассмотрению разносторонних треугольников. Для удобства заменим названия вершин K, L и M на A_n, B_n и C_n, где n — номер решения, таким образом, что $\angle A = \angle A_n$, $\angle B = \angle B_n$ и $\angle C = \angle C_n$. Еще раз (теперь уже без оговорок) отметим, что все треугольники, кроме срединного $(\Delta A_0 B_0 C_0)$, будут иметь ориентацию, противоположную исходному.

Поскольку ΔABC разносторонний, точка C лежит внутри области ODB (которую, как и в предыдущем сюжете, мы обозначим через T). Чтобы изучить поведение λ_1, λ_2 и λ_3, рассмотрим, где обращаются в 0 числители и знаменатели этих выражений. Легко видеть, что правее оси ординат (а значит, и в области T) числитель λ_1 отрицателен.

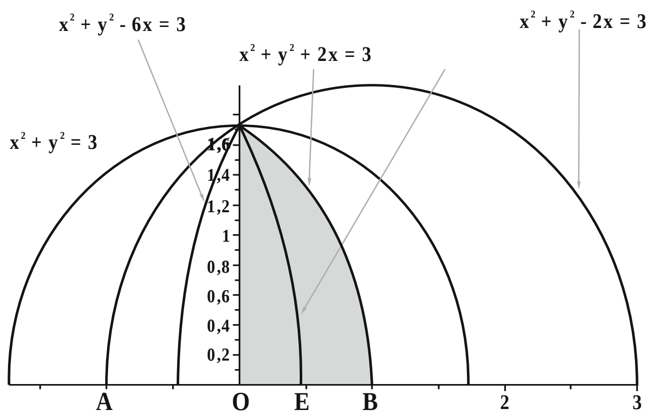


Рис. 2

Разобраться со знаками остальных выражений поможет рисунок 2. Знаменатель λ_1 обращается в 0 в точке D (как и все остальные интересующие нас величины), а во всех остальных точках области T отрицателен. Поэтому $\lambda_1 > 0$.

В то же время, для C справедливо $x^2 + 2x + y^2 < 3$. Это равносильно тому, что $x^2 + y^2 - 6x - 3 < -8x$. Поделив обе части последнего неравенства на отрицательное число $2(x^2+y^2-6x-3)$, получим $\lambda_1<\frac{1}{2}$. Итак, $0<\lambda_1<\frac{1}{2}$.

Заметим, что $\lambda_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2-2x-3}{x^2+y^2-3}=\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2-3}$. Внутри области T вычитаемое отрицательно, поэтому $\lambda_2>\frac{1}{2}$. И вновь учтем, что внутри T $x^2+y^2+2x<3$, то есть $x^2+y^2-3<-2x$. Отсюда, учитывая отрицательность обеих частей,

$$\lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+y^2-3}<\frac{1}{2}-\frac{x}{-2x}=1.$$

Окончательно, получаем $\frac{1}{2}<\lambda_2<1$.

Осталось рассмотреть λ_3. Приравнивая к нулю числитель, получим граничную дугу области T. А знаменатель обращается в ноль, когда C принадлежит дуге DE, характеризующей автомедианные треугольники ([1], [2], [3]). Если C лежит левее дуги этой окружности, то $\lambda_3>1$, а если правее, то $\lambda_3<0$. В любом случае вершины треугольника $A_3B_3C_3$, отвечающего значению λ_3, лежат на продолжениях сторон исходного треугольника. Область значений λ_3 — $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Оказывается, значения λ_1, λ_2 и λ_3 определяются не парой чисел (координатами точки C), а всего одним числом. Рассмотрим семейство окружностей, проходящих через точку D, центры которых, принадлежат лучу $(-\infty;-1]$. Дуги этих окружностей вместе с отрезком оси ординат (который можно считать дугой окружности бесконечного радиуса) заметают область T. Непосредственно проверяется, что значения λ_1, λ_2 и λ_3 зависят только от радиуса соответствующей окружности. Впрочем, более удобно принять за параметр не радиус, а расстояние от центра до начала координат. Обозначим это расстояние через t. Каждой внутренней точке области T (с границей области, соответствующей равнобедренным треугольникам, мы уже разобрались) соответствует одно значение $t \in (0;\infty)$.

Выражая y^2 из уравнения окружности $(x+t)^2 + y^2 = t^2 + 3$ и подставляя в (2), получим:

$$\lambda_1 = \frac{2}{t+3},\ \lambda_2 = \frac{t+1}{2t},\ \lambda_3 = \frac{t-1}{t-3} \quad (3)$$

Через координаты C параметр t выражается так: $t = \dfrac{3 - x^2 - y^2}{2x}$.

Любопытно, что выражения для λ_1, λ_2, λ_3 (не важно, через t или через x и y) удовлетворяют некоторому правилу «сложения» дробей, часто применяемому двоечниками. А именно, $\lambda_2 = \lambda_1 \langle + \rangle \lambda_3$, где $\langle + \rangle$ — «сложение» дробей по правилу: числитель с числителем, знаменатель со знаменателем.

Обозначим через S площадь исходного треугольника. При движении центра окружности по оси абсцисс от минус бесконечности до точки A значения λ_1 и λ_2 монотонно возрастают соответственно от 0 до $\frac{1}{2}$ для λ_1 и от $\frac{1}{2}$ до 1 для λ_2. При этом площадь $\Delta A_1B_1C_1$ монотонно уменьшается от S до $\frac{1}{4}S$, а площадь $\Delta A_2B_2C_2$ наоборот возрастает от $\frac{1}{4}S$ до S. Поэтому существует ровно одно значение t, при котором эти площади равны. Значение λ_3 также монотонно растет от 1 до $+\infty$ при движении центра от $-\infty$ до точки $G(-3;0)$ и от $-\infty$ до 0 при движении центра от точки G до точки A. При этом площадь $\Delta A_3B_3C_3$ сначала возрастает от S до $+\infty$, а затем (на участке от G до A) вновь убывает до S.

Обозначим через F центроид исходного и всех подобно-вписанных треугольников. Не сложно убедиться, что треугольники $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ и $\Delta A_3B_3C_3$ гомотетичны с центром гомотетии в точке F.

Треугольники $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ и $\Delta A_3B_3C_3$ противоположно ориентированы по отношению к исходному и подобны, но не равны ему. Поэтому каждый из них может быть получен из исходного центрально-подобной симметрией, то есть, композицией осевой симметрии и гомотетии, центр которой лежит на оси симметрии (подробнее почитать про геометрические преобразования плоскости и их представление в виде композиции простейших можно, например, в [2]).

Зная центр центрально-подобной симметрии (F) и координаты исходных точек и их образов, не сложно найти возможные оси. В качестве оси симметрии можно взять любую из перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке F, угловые коэффициенты которых удовлетворяют уравнению: $k^2 + \dfrac{x^2+y^2-3}{xy}k - 1 = 0$.

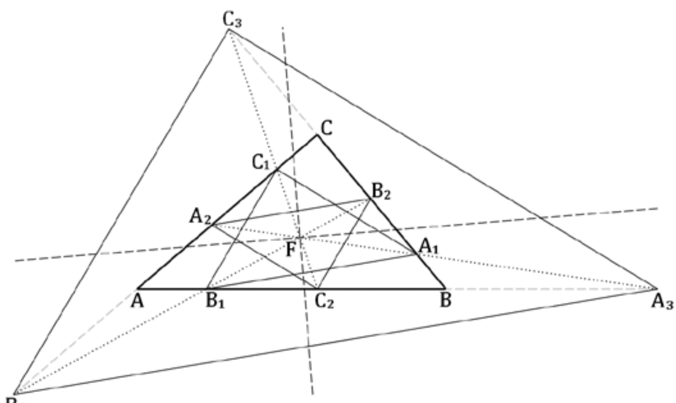


Рис. 3.

На рис. 3 представлен исходный треугольник и три подобно-вписанных в него треугольника для случая, когда вершина C лежит левее дуги DE, а именно для $C\left(\dfrac{1}{6};1\right)$. На рисунке нет срединного треугольника, поскольку читатель и так хорошо его представляет, а линий на рисунке хватает и без него.

Для этого случая $t = \frac{71}{12}$, $\lambda_1 = \frac{24}{107}$, $\lambda_2 = \frac{83}{142}$, $\lambda_3 = \frac{59}{35}$.

Для внешнего подобно-вписанного треугольника равновеликими являются треугольники AB_3A_3, BA_3C_3 и CC_3B_3. Пунктирные линии, пересекающиеся в точке F — оси центрально-подобной симметрии. А точечные пунктирные линии, пересекающиеся в той же точке, иллюстрируют гомотетичность треугольников $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ и $\Delta A_3B_3C_3$.

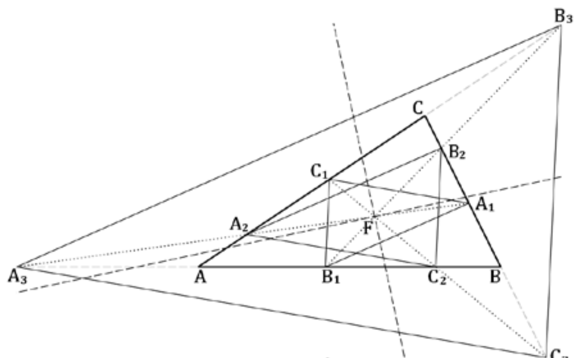


Рис. 4.

Случай расположения точки C правее дуги DE представлен на рис. 4. Для изображенного на нем треугольника $C\left(\frac{1}{2};1\right)$, $t = \frac{4}{7}$,

$\lambda_1 = \frac{8}{19}$, $\lambda_2 = \frac{11}{14}$, $\lambda_3 = -\frac{3}{5}$.

Коэффициент гомотетии для $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ всегда отрицателен. Треугольник $\Delta A_3B_3C_3$ гомотетичен с положительным коэффициентом большему из треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда C лежит на дуге DE. Он соответствует автомедианным треугольникам ([3]). Разносторонние автомедианные треугольники не имеют внешнего подобно-вписанного треугольника. Зато они имеют целый ряд красивых свойств, сформулированных в терминах подобно-вписанных треугольников (см. [1], [4]).

Пусть треугольник ABC — разносторонний и $\alpha < \beta < \gamma$ — углы при вершинах A, B и C.

Тогда следующие 9 утверждений попарно эквивалентны.

1. Треугольник ABC — автомедианный.

2. Существуют ровно три подобно-вписанных треугольника.

3. Два подобно-вписанных треугольника равны между собой.

4. Два подобно-вписанных треугольника центрально-симметричны.

5. Площадь хотя бы одного подобно-вписанного треугольника равна третьей части площади треугольника ABC.

6. Вершина, по крайней мере, одного подобно-вписанного треугольника делит соответствующую сторону исходного треугольника в отношении $1:2$.

7. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

8. $t = 3$.

9. $\mathrm{tg}^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\beta - 2\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta - 2\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta = 0$.

Равносильность первых 8 утверждений в значительной мере уже проверена выше. Недостающие импликации легко выводятся из формул (2) и (3).

Чтобы обосновать равносильность автомедианности 9-му утверждению, заметим, что $y = (1+x)\mathrm{tg}\alpha$, $y = \mathrm{tg}\beta(1-x)$. Из этих соотношений выразим x и y через α и β.

$$x = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta},\ \ y = \frac{2\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}$$

Для получения требуемого результата остается подставить эти выражения в формулу $a^2 + c^2 = 2b^2$, характеризующую автомедианные треугольники.

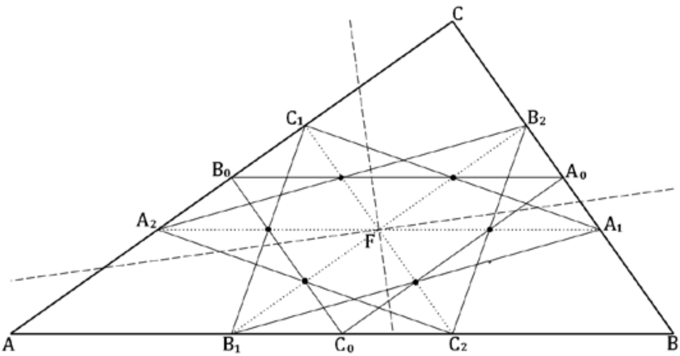


Рис. 5.

На рисунке 5 приведены подобно-вписанные треугольники для автомедианного треугольника с вершиной $C\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. На этот раз мы включили в их число срединный (на освободившееся место внешнего подобно-вписанного). Чтобы не загромождать чертеж, мы не стали подписывать 6 жирных точек пересечения отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 со сторонами подобно-вписанных треугольников, но это не помешает читателю выяснить, в каких отношениях эти точки делят все пересекающиеся в них отрезки.

Подведем промежуточные итоги.

- У равностороннего треугольника существует бесконечно много подобно-вписанных.
- У равнобедренного, но не равностороннего треугольника всего один подобно-вписанный — срединный.
- У разностороннего автомедианного треугольника есть три подобно-вписанных треугольника. Один срединный, а два других противоположно ориентированы с исходным и центрально-симметричны между собой.
- У остальных треугольников по четыре подобно-вписанных. Один срединный. Остальные три противоположно ориентированы с исходным и гомотетичны между собой. Причем вершины ровно одного из них лежат на продолжениях сторон исходного треугольника.

Мы не случайно назвали итоги промежуточными. С точками, делящими стороны в фиксированном отношении, можно связать и другие треугольники.

Пусть ABC — некоторый треугольник, точки K, L, M лежат соответственно на прямых AB, BC и AC, а λ — некоторое действительное число, отличное от 0 и 1. Треугольник образованный пересечением прямых CK, AL и BM, будем называть подобно-высекаемым из ΔABC, если

- $AK = \lambda AB$, $BL = \lambda BC$, $CM = \lambda CA$;
- этот треугольник подобен треугольнику ABC.

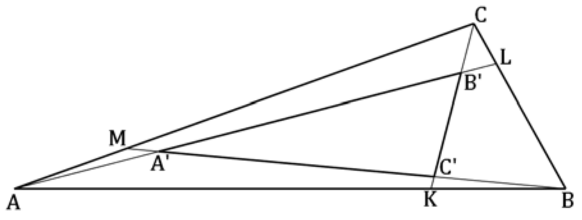


Рис. 6

На рисунке 6 изображены: треугольник ABC и единственный для ABC внутренний (точки K, L, M лежат на сторонах ABC) подобно-высекаемый треугольник $A'B'C'$. Кроме этого, существуют еще два внешних подобно-высекаемых треугольника (делящие точки лежат на продолжениях сторон).

Мы не будем углубляться в изучение подобно-высекаемых треугольников, поскольку достаточно очевидно, что это некоторое обращение подобно-вписанных треугольников: исходный треугольник является внешним подобно-вписанным по отношению к внутреннему подобно-высекаемому и внутренним подобно-вписанным по отношению к каждому из внешних подобно-высекаемых.

Почему в начале статьи мы назвали описанный нами опыт обобщения понятия «срединный треугольник» не совсем удачным? Ведь мы получили целый ряд достаточно красивых результатов. Дело в том, что уже после их получения автор узнал, что большинство описанных выше результатов были получены несколькими годами ранее Грегуаром Николье (см. [5]). В то же время, мы полагаем, что наш подход имеет некоторую самостоятельную ценность. Николье исследовал проблему, используя технику, далеко выходящую за рамки средней школы (конволюции комплексной плоскости). Наша же техника получения результатов вполне посильна заинтересованному старшекласснику. Это было подтверждено на практике: автор предложил провести исследование, следуя описанному плану, Екатерине Поляковой, на тот момент ученице 11-го класса Волгоградского лицея №2. Екатерина успешно справилась с поставленной задачей. Однако, докладывая о своем исследовании на Всероссийском конкурсе «Юниор» в 2019 году, она была вынуждена сообщить, что полученные результаты не новы. Скорее всего, именно это обстоятельство не позволило Е. Поляковой занять высокое место: жюри конкурса (и автор солидарен с ним в этом вопросе) любит новые результаты.

В заключение отметим, что изложенный в статье подход, не исчерпывает возможных идей исследований, связанных с выбором точек, делящих стороны треугольника в фиксированном отношении. Альтернативные подходы ждут своих героев.

Литература

1. Лецко В. А., От задачи к исследованию. − СПб: СМИО Пресс, 2021 − 336 с.

2. Моденов П. С., Пархоменко А. С., Геометрические преобразования. – М.: МГУ, 1961. – 232 с.

3. Блинков А. Д., Классические средние в арифметике и в геометрии. □ Издание 2-е, стереотипное. М.: МЦНМО, 2013. □ 168 с.

4. Лецко В. А., Новые свойства автомедианных треугольников // в сб. «Учим математике-10. Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. – М.: МЦНМО, 22. – С. 54□77.

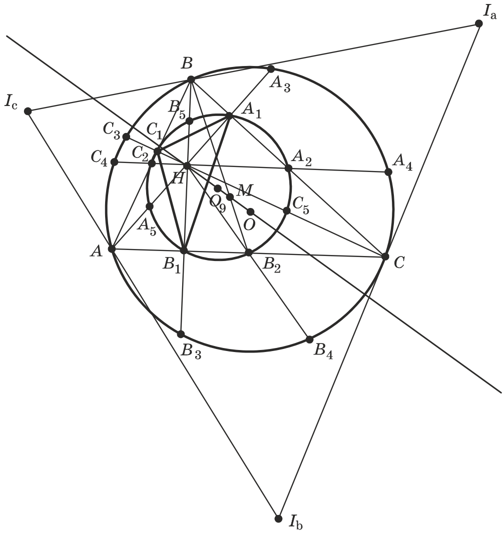
5. Grergoire Nicollier. Convolution Filters for Triangles, Forum Geometricorum. Volume 13 (2013), 61□85.

Высоты и ортоцентр треугольника
(и другие замечательные точки, прямые и окружности треугольника)

Т.Л. Ниренбург,
СПб ГФМЛ №30, г. Санкт-Петербург
nirenburgtatyana@gmail.com

В курсе геометрии 8 класса появляется понятие замечательных точек треугольника (точки пересечения биссектрис, медиан, высот или их продолжений, серединных перпендикуляров к сторонам треугольника). Что же узнают учащиеся об их «замечательности», кроме пересечения в одной точке? Точка пересечения биссектрис — центр вписанной в треугольник окружности; точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам — центр описанной окружности; точка пересечения медиан — центр масс — делит медианы в отношении 2 к 1, считая от вершины треугольника. А что же замечательного в ортоцентре (точке пересечения высот или их продолжений)? Этот вопрос, как правило, обходится стороной. Да и в целом задач о замечательных точках треугольника решается немного. Поэтому в рамках проведения открытых занятий на прошедшем Съезде учителей математики был предложен сдвоенный урок, организованный в виде проведения обобщающего повторения курса геометрии 8 класса на примере задач об ортоцентре (и не только). Побочная цель урока — познакомить учащихся с прямой и окружностью Эйлера.

Для решения были предложены следующие задачи (см. перечень далее). Основная идея — использовать при решении этих задач максимальный спектр понятий и теорем, изученных в течение года — они в скобках после формулировки задачи. При разной организации работы эти задачи можно выполнять за разное время. И про каждую из этих задач есть, что сказать дополнительно.



1. *Точки A, B, C, H ортоцентричны.* (понятие высот треугольника)

2. *Точки A, B_1, H, C_1 и т.п. лежат на одной окружности.* (признаки вписанного четырёхугольника)

3. *Точки B, C_1, B_1, C и т.п. лежат на одной окружности.* (признаки вписанного четырёхугольника)

4. *Треугольники C_1AB_1, ABC, A_1CB_1, BC_1A_1 подобны с коэффициентом подобия — косинусом общего угла.* (подобные треугольники, признаки подобия треугольников, тригонометрические функции углов треугольника)

5. *Треугольники AA_1C и BB_1C и т.п. подобны. Треугольники ABH и A_1HB_1 и т.п. подобны.* (подобные треугольники, признаки подобия треугольников, вписанные углы)

6. *Центр описанной окружности — ортоцентр серединного треугольника.* (средняя линия треугольника, понятие серединного треугольника, общий перпендикуляр параллельных прямых)

7. *Углы при ортоцентре равны углам исходного треугольника.* (вычисление углов в треугольнике)

8. *Ортоцентр треугольника — инцентр ортотреугольника.* (вычисление углов в треугольнике)

9. *Для ортотреугольника точки* A, B, C *— центры вневписанных окружностей.* (вневписанная окружность, положение её центра)

10. *Лемма о дважды биссектрисе (биссектриса угла* A *треугольника является биссектрисой угла* HAO*).* (равные треугольники, центр описанной окружности, вписанный и центральный угол)

11. *Касательная к описанной окружности, проведенная в вершине треугольника, параллельна стороне ортотреугольника.* (касательная, углы, связанные с окружностью)

12. *Радиус описанной окружности, проведенный в вершину треугольника, перпендикулярен стороне ортотреугольника.* (свойство касательной к окружности)

13. *Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.* (равенство треугольников, вписанные углы, признак вписанного четырёхугольника)

14. *Точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны треугольника, лежит на описанной окружности и диаметрально противоположна вершине треугольника.* (параллелограмм, вписанные углы, признак вписанного четырёхугольника, вписанный угол, опирающийся на диаметр)

15. *Расстояние от вершины треугольника до ортоцентра в 2 раза больше расстояния от центра описанной окружности до стороны, противолежащей этой вершине.* (подобие треугольников, средняя линия треугольника)

16. *Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до ортоцентра и противолежащей этой вершине стороны равна квадрату диаметра описанной окружности.* (теорема Пифагора)

17. *Треугольник и его серединный треугольник подобны и имеют общий центр масс.* (подобные треугольники, медианы треугольника)

18. *Центр масс* M *треугольника лежит на прямой, проходящей через ортоцентр* H *треугольника и его центр описанной окружности* O, *причём* $|HM|:|MO| = 2:1$. *(прямая Эйлера)* (подобные треугольники, отношения отрезков)

19. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков от вершин треугольника до ортоцентра лежат на одной окружности.* (Окружность Эйлера или окружность девяти точек) (введение в понятие «гомотетия»)

20. *Центр окружности Эйлера* O_9 *лежит на прямой Эйлера, причём* $|OO_9|:|O_9M|=2:1$ *и* O_9 *— середина* $[HO]$. (отношения отрезков)

21. *Окружность, описанная вокруг треугольника, является окружностью 9 точек для треугольника с вершинами в центрах его вневписанных окружностей.* (при желании — выход на лемму о трезубце)

22. *Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника зависит только от радиусов этих окружностей и определяется по формуле:* $|OI|^2=R^2-2Rr$ *(формула Эйлера).* (вычисления в треугольнике)

Задачи на дом

1. *Угол* B *равен* $30°$, $|C_1A_1|=2\sqrt{3}$. *Найдите* $|AC|$.

2. *Углы* A *и* B *равны соответственно* $32°$ *и* $75°$. *Найдите углы* BHA_1, C_1HA, C_1A_1H.

3. *Углы* A *и* B *равны соответственно* $104°$ *и* $20°$. *Найдите углы* BHA_1, C_1HA, C_1A_1H.

4. *Углы* A_1 *и* B_1 *ортотреугольника равны соответственно* $44°$ *и* $66°$. *Найдите угол* A_1.

5. *Длины сторон треугольника равны 13, 14, 15. Найдите длины сторон его ортотреугольника.*

6. *Для треугольника со сторонами 13, 14, 15 найдите периметры треугольников* $A_2B_2C_2$ *и* $A_4B_4C_4$.

7. *Площадь треугольника* BHC *равна 13, площадь треугольника* AHC *равна 14, а площадь треугольника* AHB *равна 15. Найдите площадь треугольника* BOC.

8. *Постройте ортоцентр треугольника не менее чем двумя способами при помощи циркуля и линейки.*

9. *Назовите несколько современников Эйлера: учёных, писателей, музыкантов.*

Красота структуры и творчества в единстве процесса творения

Е.В. Осипова,
ГФМЛ №30, ЦОП «Круг Света»
Е.Г. Осипова,
СПбГАСУ, Санкт-Петербург

В своей работе мы хотим предложить к обсуждению давно и прочно устоявшееся мнение о непреодолимом различии между математиками и гуманитариями. Об их образе мышления, подходах, стилях рассуждений, упорядоченности и творчестве.

На эту тему можно смотреть под разным углом, что мы и попробуем сделать. Прежде всего, с позиции школьного учителя математики, которому приходится учить своему предмету, как программно-обязательному, всех ребят. И тех, кто математикой увлечен, и тех, кто не очень-то увлечен, но при этом дисциплинированно старается хоть что-нибудь запомнить. И, увы, тех, у кого эта самая математика вызывает только отторжение. С первыми все здорово и понятно, с ними легко быть на одной волне, а вот с остальными сложнее.

И для того, чтобы предложить таким детям и их учителям один из возможных инструментов взаимопомощи, мы хотим рассмотреть процессы решения математической задачи и создания художественного произведения, как единые и принципиально родственные. Если аккуратно и систематически транслировать детям это единство, проводя комфортные и близкие им параллели, то чужеродность непонятного, другого и потому страшного предмета начинает потихоньку уходить, уступая место спокойному принятию.

А для того, чтобы смысл такого подхода стал еще более прозрачен, посмотрим на нашу тему под иным углом. Так ли безгранично велика пропасть между представителями «точных наук» и «творческих профессий»? Какой смысл мы часто вкладываем в эти прилагательные: точный и творческий, в контексте специализаций, и какой содержат они на самом деле, если посмотреть более широко?

Зайдем, казалось бы, несколько издалека. Сделаем это для того, чтобы иметь возможность опереться на глобальность темы — условности разделений — и разнообразие ее проявлений в некоторых сферах жизнедеятельности.

Немного о том, что говорят традиции о математиках и гуманитариях. Традиционно считается, что в математике все однозначно определено, задано, описано и распределено. Поэтому математику остается при помощи логических рассуждений и выводов проделать серию сухих шагов, дабы прийти к необходимому результату.

Про гуманитариев, чаще всего, ведутся противоположные рассуждения. Что у них ничего не формализовано, да это и невозможно, поскольку так устроен творческий процесс. В нем всегда все по-разному и потому непредсказуемо. Логикой они, вроде как, и не пользуются вовсе, а только интуицией, по той же самой причине.

Возможно, наше описание покажется слегка гипертрофированным, с чем мы, с радостью, готовы согласиться. Это, скорее, иллюстрация крайних точек зрения, но при этом весьма нередких. Особенно часто подобные рассуждения приходится слышать от родителей наших учеников, размышляющих на тему нынешнего и будущего специально-профессионального определения пути своих детей. При этом из виду совсем упускается его величество Здравый смысл, выраженный в балансе.

Математическая лингвистика… Странно, что приверженцев жесткого разделения на математиков и гуманитариев не смущает это необычное словосочетание. Хотя, может и смущает, да прижилось в народе.

Любая жизнеспособная система устроена так, что в ней обязательным, органичным образом представлены обе компоненты: и точность, и неопределенность, и одна без другой, рано или поздно, приведет систему к саморазрушению. Хаос и порядок, структура и творчество, упорядочивание и игра, направленность и размашистость, интуиция и логика, свобода и ответственность всегда идут рука об руку, причем порой так просто и естественно, что трудно и заметить их разделение, они просто живут.

В природе это проявляется самым непосредственным образом, о чем с детьми можно и нужно говорить постоянно. Конечно, в контекстах, без нарочитого подчеркивания важности, тогда естественность процессов сама нас выручает. Тема единства мира настолько же проста, стара и всеобъемлюща, насколько и сложна в своей многогранности. Если убрать ненужную помпезность и квазифилософский подтекст, то ребята очень благодатно воспринимают контекстные обсуждения с ними связей между школьными предметами, как кусочками или прелюдиями соответствующих областей наук. Которые, в свою очередь, как раз-таки и занимаются не чем иным, как изучением и описанием законов построения мира. Во всяком случае, так оно задумано. И если предложить ребятам, например, выглянуть в окно и убедиться в том, что береза под окнами школы не перестает быть березой, вне зависимости от того, как мы попробуем ее описать — то ли с позиции биологии, рассмотрев вегетативную систему. С точки зрения химии ли, о повышении плодородности почвы. С позиции физики, например, в строительстве или столярном деле. Или геометрии — то же золотое сечение или расчет отбрасываемой тени. Неважно, ей все равно, она просто живет своей жизнью. Даже осиной не станет.

Такие маленькие связки потихоньку убирают из головы детей противостояние, из-за которого, по большей части, как раз возникает ощущение «мое — не мое», а отсюда — и «здесь могу, а здесь уже нет», потому что чуждое.

К сожалению, часто мы банально выкидываем из рассмотрения то, что нам чуждо. То, что не вписывается в нашу привычную картину мира. Если я чего-то не знаю, или не понимаю, или не согласен, то зачастую проще всего сказать, что этого нет, или не может быть, или это попросту неверно. В свое время в околопсихологических кругах обсуждался стародавний эксперимент с туземцами и вертолетом.

Над островом, где жило племя туземцев, далеких от цивилизации, некоторое время кружил вертолет, и местные его просто-напросто «не заметили», поскольку такая штуковина, во-первых, была им неведома, и во-вторых, не принимала никакого участия в их жизни. Во всяком случае, очевидного для них. Вокруг этого эксперимента велось довольно много непростых дискуссий, но, как бы там ни было, приходится признать, что все мы немного туземцы.

Это не история про Сентинельцев, агрессивно реагирующих на попытки цивилизации установить с ними контакт. Да и тема агрессии – не тематика данной статьи. Но увы, такое поведение, действительно, может быть реакцией на чужеродное. Причем, очень часто, она является вторичным проявлением первичной реакции защиты от этого чужеродного. Особенно у детей, и еще больше подростков, в силу бурного изменения гормонального фона. В Петербурге такое поведение может усиливаться в силу естественного дефицита витамина D. Его восполнение, конечно, не прерогатива учителей, но минимизировать чуждость своего предмета, сделав его максимально дружественным для детей, мы можем постараться.

Здесь уже упоминалось природное естество единства мира. И дети, которые пока еще близки к природе, крайне чувствительны ко всем проявлениям этого мира. Если мы хорошенько убедим их в том, что они «гуманитарии», в противоположность «математикам», естественным образом возникает «здесь мое, а здесь уже нет», а значит чуждое. При этом, будучи изначально в гармонии с природой, дети внутренне чувствуют единение структуры и хаоса, точности и неопределенности, в едином балансе. И чем лучше чувствуют, тем больше противоречий возникает при жестком разделении этого баланса на составляющие. Тем более, что это разделение касается их непосредственно, вмешиваясь в непростой поиск себя и своего места в профессиональной сфере. А также в их школьную бытность, являющую существенную часть жизненного пути.

Система образования советского времени, которую мы сейчас безуспешно пытаемся заменить Болонской системой, была великолепно продумана именно с точки зрения баланса. Понятно, что идеализировать ее, как и любое другое, будет неправильно, хотя бы с позиции некоторой тоталитарности. Но сочетание разнообразных предметов, их порядок, организация и взаимопроникновение давали ребятам все возможности попробовать себя в разных областях знаний и их взаимодействии. К счастью, сейчас пока еще сохранены остатки старых программ, а в нашем окружении много прекрасных неравнодушных учителей-энтузиастов, в том числе из молодого поколения. И очень хочется опереться на эту кладезь, как на устоявшийся надежный фундамент, на котором можно и нужно непрерывно иллюстрировать детям идеи всеобщего единения. Для таких учителей, с безграничным уважением к коллегам, мы и хотим предложить один из возможных инструментов подобной иллюстрации.

Серьезная современная особенность, на которую следует обратить внимание и которую надо обратить во благо — это информатизация общества. У детей формируется конкретное, излишне конкретно-визуальное частное мышление, клипово-картиночное. Замена реальности иллюзией. Неумение проводить многоходовые последовательные рассуждения. Непонимание того, что «Очевидно то, что легко доказать». Уже существует достаточно большое количество готовых решений типовых задач, и у ребят вырабатывается привычка бездумно применять эти решения. Поэтому основной задачей учителя любого предмета является создание в хорошем смысле некомфортных для такого образа мышления условий: новых принципов ведения урока, различных неожиданных комбинаций задач, межпредметных связей в задачах. И особенной важной становится идея о единстве процесса Творения в, казалось бы, совершенно разных сферах деятельности. Если мы говорим о математических дисциплинах и детях «не математиках», то как раз трансляция такого глобального единства с гуманитарными может стать хорошим инструментом связности.

Попробуем выделить основные этапы решения математической задачи и процесса создания конструктивного рисунка, сведя их в табличку.

Единство процесса творения в решении задач и создании конструктивного рисунка	
Решение задачи	***Создание рисунка***
Первый вопрос — что надо сделать по условию?	Первый вопрос — что надо сделать по заданию/заказу?
Второй вопрос — что для этого дано из возможных величин и их сочетаний?	Второй вопрос — какие фигуры или техники для этого можно использовать
Третий вопрос — как будем связывать первые два?	Третий вопрос — как будем связывать первые два?
Четвертый — какая теория из пройденной нами ранее здесь нужна?	Четвертый — какая теория из известной мне на данный момент может здесь пригодиться?
Пятый — как ее грамотно и органично применить?	Пятый — как ее грамотно и органично применить?
Шестой — как сделать решение задачи завершенным	Шестой — как сделать рисунок цельным.

Как видно, общая канва примерно одинакова. Конечно, все эти этапы довольно условны, как и любое разделение цельного процесса. Хотя бы в том смысле, что вряд ли нам придет в голову сказать своим ученикам: «Все, ребята, третий этап закончен, переходим к четвертому». Это было бы довольно забавно. Хотя, с другой стороны, в едином непрерывном процессе мы зачастую, вольно или невольно, ставим себе некие плавающие метки, что уже сделано, а что еще осталось. Главное, не сделать случайно это доминантой, тогда творчество рискует приобрести дискретный характер. Теперь немного уточним, что скрывается за каждым этапом в том и другом случае.

Общее в схеме решения математических и художественных задач

1. Выяснение условий. В таблице за него фактически отвечают первый и второй шаги.

В математике за этот пункт берётся чтение условия задачи, первичное ознакомление с ней. В рисунке же выясняют пропорции того, что собираются изобразить. Знакомятся со списком фигур, которые можно использовать в композиции.

И там, и там пока что почти ничего не понятно, начинает лишь понемногу очерчиваться будущая работа. Действие маленькое и порой не такое сложное, но чаще всего самое важное и решающее. Времени чисто на этот пункт обычно уходит не слишком много, вскоре параллельно с ним начинается работа уже и над следующим этапом.

2. Основная идея. Третий и четвертый шаги из таблицы.

Выявление основной мысли. В математике это выяснение теорем или законов, которые встречаются в задаче. В классическом рисунке это примерная компоновка предметов в листе. В менее традиционном варианте это может быть выяснением стиля, в котором художник будет работать, и лишь после этого компоновка.

На этом этапе больше всего задействуется интуиция и чётче всего виден опыт «автора». Чем больше различных задач успел рассмотреть человек, тем больше идей, приёмов и теорем он увидит, уже просто прочитав условие. Чем больше картин написал или увидел художник, тем проще ему будет определиться со стилем и наилучшей компоновкой.

3. Основной ход. Пятый шаг из таблицы. Он один, зато глобальный.

Один из самый долгих, трудозатратных этапов. Скрупулезное расписывание хода решения задачи. И такое же тщательное простраивание всех предметов и их схем на полотне.

Здесь задача понемногу раскрывается, в какой-то момент может стать окончательно понятной автору работы, но не читателю. К сожалению, для читателя чаще всего есть возможность предугадать дальнейшее развитие задачи, и в этом заключается риск для творца. Нередко люди заканчивают работу на этом пункте, либо теряя интерес, «ведь уже и так всё понятно», либо просто не зная, что можно чем-то дополнить решение. Однако дополнять можно и нужно. Более того, основной ход работы, при грамотном его ведении, часто идёт параллельно с этим «дополнением».

4. Дополнения и добавки. Последний, шестой шаг из таблицы.

Связки, отсылки, объяснения. В математике ими могут быть логические связки между разными частями решения, или же отсылки к ним, пояснения к теоремам, сами тексты теорем, выносные рисунки. В рисовании же на этом этапе добавляются пятно, светотеневая проработка, и выявляется объём.

Здесь работа становится понятна как автору, так и читателю, её легко читать и нет необходимости самостоятельно додумывать решение. Более того, чем проще читается или воспринимается работа, тем грамотнее она проработана. Читатель должен видеть всю картину завершённой, а автору необходимо убедиться, что он пришёл именно к тому результату, к которому хотел, ведь окончательный ответ остаётся неясен и может меняться на протяжении всей работы, вплоть до полного её завершения.

Из этого описания видно, что действительно, процесс решения мало-мальски содержательной математической задачи и создания рисунка очень родственны, и по сути своей едины. Более того, этим же единством обладает любой процесс творения, именуемый творческим. И было бы здорово помочь детям осознать в полной мере, что креативная, творческая личность — это не тот, кто одет в желтые штаны с синими ботинками, фиолетовой кофтой и с розово-голубыми волосами. Барышня Мальвина как раз творческой ноткой обладала слабо. А тот, кто может пройти весь процесс творения от начала и до конца, органично соединив в нем структурность и хаотичность, интуитивность и последовательность.

Напоследок рассмотрим, в качестве кратких примеров иллюстрации этого процесса, одну математическую задачу и один конструктивный рисунок.

I. Математическая задача. *Решите неравенство* $x^2 - 2b - cx + a^2 > 0$*, если* a, b, c *— длины сторон треугольника.*

1 шаг. Выяснение условий. Три параметра, это очень страшно. Еще что-то сказано про треугольник. Странно. В чем подвох? Мы не на геометрии… С другой стороны, есть a^2. Может, теорема Пифагора? Как-то надо бы найти оценки на эти странные параметры.

Здесь неравенство. Неравенство точно квадратное, при x^2 параметра нет. Уже хорошо. Левая сторона неравенства задает параболу ветвями вверх.

2 шаг. Основная идея. Итак. Квадратное неравенство обычно решается методом интервалов. Тогда надо найти корни уравнения. А если их нет? В любом случае надо найти D или сразу $\frac{D}{4}$. Наверняка чем-нибудь для оценки на параметры это нам поможет. И посмотреть, что там с параболой.

3 шаг. Основной ход. $D/4 = (b-c)^2 - a^2$. Теорема Пифагора не получилась. Зато получилась разность квадратов. Попробуем разложить на множители, это часто помогает.

$$D/4 = (b-c)^2 - a^2 = (b-c-a)(b-c+a) = (b-(a+c))((a+b)-c)$$

О! Так вот, при чем тут треугольник! В силу неравенства треугольника $D/4 < 0$. Корней уравнения и правда нет. Значит, нет пересечений нашей параболы с осью OX. А раз она ветвями вверх, значит полностью находится в верхней полуплоскости, где $y > 0$.

Значит, неравенство при таком условии на параметры верно всегда!

4 шаг. Дополнения и добавки. В этой задаче дополнения — это скорее роль учителя. Если в предыдущих трех шагах мы примерно моделировали возможные рассуждения автора решения задачи, то есть школьника. А точнее, описывали частые умозаключения наших ребят. То на этом шаге было очень полезно, если бы их старший наставник подытожил все тематические связки и возможные ветвления рассуждений. Тогда задача приобретает еще большую связность и красоту. А без этих резюме часть истинного, глубинного смысла задачи может остаться для детей скрыта, в силу неопытности.

Во второй задаче, посвященной созданию конструктивного рисунка, мы тоже представим примерные рассуждения автора. А перед этим, сразу после формулировки условия, предложим Вашему вниманию скан поэтапных набросков, на который автор и будет ссылаться в своем рассказе. Он выглядит, как черновик, но любая незавершенная работа и может быть рассмотрена в качестве черновика. А полностью готовая композиция будет представлена после обсуждения этапов ее создания. Иным образом описать шаги решения такой задачи довольно сложно. Сама задача подобрана учебная, она формулируется преподавателем в виде некоего билета с определенными критериями.

II. Конструктивный рисунок. *Составьте композицию по следующим критериям. Фигуры: треугольная пластина, треугольная призма, конус, круглая пластина, четырёхугольная пирамида. Вертикальное развитие, линия горизонта у основания композиции.*

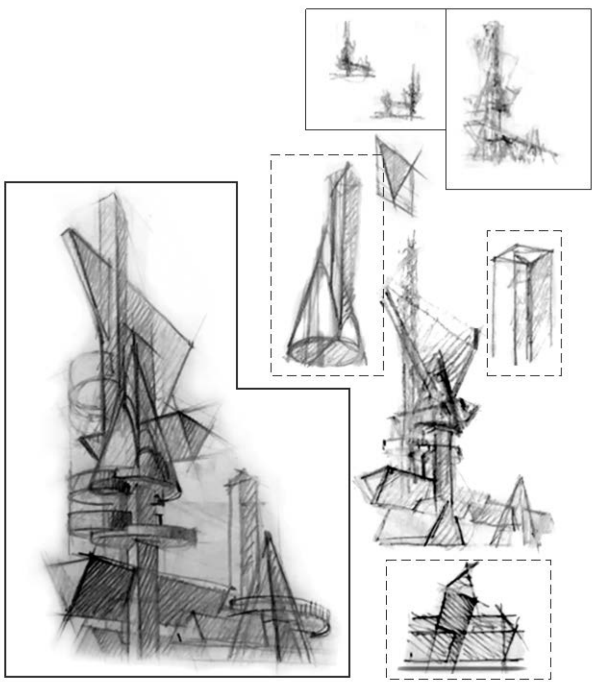


Рисунок 1. Первые три этапа решения задачи

1 шаг Выяснение условий. В проработке любого билета имеются четко заданные правила, выполнение которых неукоснительно. Есть четыре основные части, на которые надо опираться. Ни одну упустить нельзя, все они равно важны. 1. Развитие (горизонтальное/вертикальное). 2. Горизонт (ниже композиции/выше композиции). 3. Количество типов фигур (всего есть 11 типов, в билете перечислены конкретные 5, которые мы можем и должны использовать. Не можем использовать иные типы и обязаны использовать все, что перечислены). 4. Общее количество фигур в финальной композиции (их должно быть не менее 12, но не более 15). Фигуры мы можем поворачивать только на 90 и 180 градусов.

Тогда, исходя из заданного условия и этих правил, я формирую первые наброски, выделенные на черновике зеленым цветом. Зелёные части: 1) общий силуэт; 2) тот же силуэт, но уже то, как его можно применить к моей задаче.

2 шаг. Основная идея. По мере осознания условия, появляются идеи по его реализации, а также необходимая для этого теория. Синяя область — это всякие теоремы, построения, врезки, которые я буду использовать. Их я начинаю понимать и разбирать по ходу того, как параллельно разрабатывается рыжая область. То, что выделено рыжим — это более уточнённый, продуманный эскиз по билету, тут выбирается то, как он будет выглядеть, развитие, «движение», перспектива. Это и становится основной идеей для реализации.

3 шаг. Основной ход. Здесь замысел предыдущего этапа превращается в финальный эскиз. На черновике он выделен красным. Тут уже использованы все «теоремы-врезки», проявлен силуэт, развитие, резкость перспективы. В этот момент я уже полностью поняла решение, могу переносить его на чистовик или рассказывать преподавателю, коллегам, слушателям.

4 шаг. Дополнения и добавки. В этой задаче особенно хорошо видна важность четвертого этапа и неразрывность его с третьим. Если на третьем шаге стала понятна вся концепция решения, и благодаря этому известен и понятен силуэт, то теперь к нему добавляются пятно, свето-теневая проработка, и композиция становится во всех смыслах объёмной. Так же, как на четвертом шаге решения математической задачи, здесь подытоживается все, что было необходимо из теории, а также все ключевые идеи и связки.

Без этого не будет видна глубина замысла композиции, и она не будет «играть». Если этот этап опустить, то зачастую у зрителя возникает внутреннее ощущение, что что-то не так, хотя непонятно, почему же. Это эффект незавершенности, глубинной недоработанности.

Итог представлен на рисунке 2, ниже.

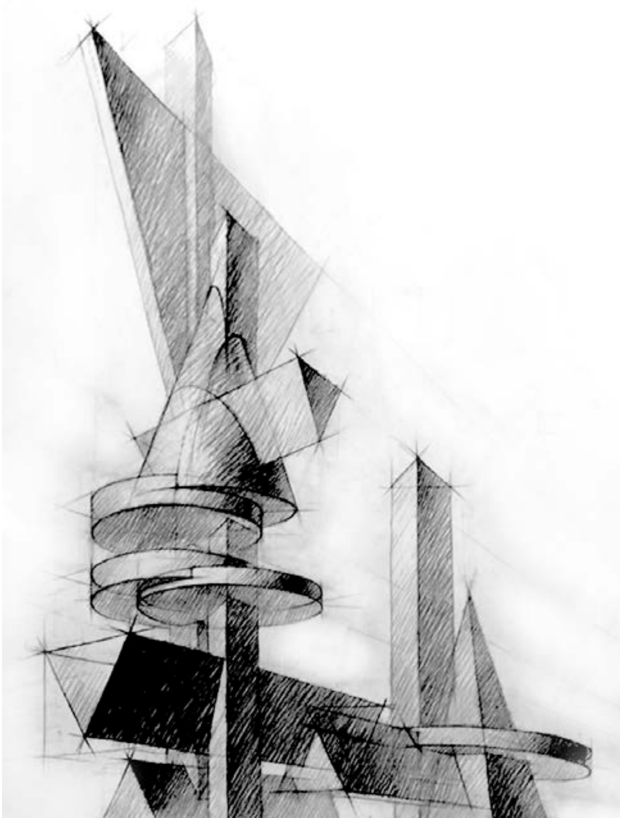


Рисунок 2. Четвертый, последний этап решения задачи

Урок-конференция

А.И. Сгибнев,
Школа «Интеллектуал», г. Москва
a.i.sgibnev@gmail.com

В этой заметке я расскажу про интересный формат урока: урок-конференция. Точнее, на конференцию обычно требуется даже два урока. Такое занятие уместно проводить в конце большой темы, перед каникулами, чтобы подытожить учебный процесс и эмоционально перезарядиться. Или же самостоятельно продвинуться в новой, но не очень сложной теме. Этот формат хорошо подходит для школьников 8-11 классов.

Школьники объединяются в группы по 2-4 человека. Каждая группа получает свою тему (вопрос, задачу или серию задач). Группы выполняют задание, оформляют результаты на ватмане, а затем рассказывают друг другу решения в формате стендовой конференции.

Опишем этапы работы подробно.

Сначала учитель выбирает темы. Они должны быть достаточно интересными, чтобы их хотелось обсуждать, в меру сложными, желательно — связанными между собой, чтобы ученики находили переклички между темами в процессе конференции (примеры тем см. в приложениях 1-3).

1) Объединение в группы *(5 мин)*. Важно иметь налаженный контакт между школьниками внутри группы, а также удобное рабочее место для группы. Двум человекам хватит одной парты, а вот для четырёх традиционное расположение парт в классе, ориентированное на учителя, не подойдёт — надо будет две парты поставить квадратом и сесть друг напротив друга.

2) Выполнение задания *(20-25 мин)*. Школьники отвечают на поставленные вопросы самостоятельно или с привлечением литературы, интернета, интерактивных математических сред. Учитель по очереди обходит все группы, помогая точнее понять задание, давая подсказку тем, кто «завис» или дополнительный вопрос тем, кто далеко продвинулся.

3) Оформление результатов *(20-25 мин)*. Учитель предлагает шаблон постера (см. приложение 4) или образцы плакатов с предыдущих конференций. Затем он просит группу предъявить эскиз постера, обсуждает его и выдаёт ватман для оформления и фломастеры. Полезно сначала сделать заголовок и разметку на ватмане в карандаше, а уже потом обвести его. Приветствуется разнообразие в оформлении, дизайнерские находки, а также распечатки графиков, чертежей и таблиц.

4) Развеска постеров по кабинету *(5 мин)*. Здесь пригодятся магниты и малярный скотч. В идеале постеры развешивают на мобильные стенды на ножках, но чаще приходится использовать подручные поверхности — классные доски, шкафы, дверь. Важно размещать постеры по классу равномерно, на достаточном удалении один от другого, чтобы группы слушателей разных докладов не мешали друг другу.

5) Доклады *(20-25 мин)*. Важно, чтобы каждый ученик поочередно докладывал и слушал доклады других групп. Для этого можно объявить две-три «смены» докладов: в первую смену от каждой группы выступает докладчик №1 (а остальные слушают другие рассказы), во вторую — докладчик №2 и т.д. На доклады хорошо бы позвать нескольких внешних экспертов — старшеклассников, учителей и т.д. Важно следить, чтобы ни один докладчик не остался без слушателей. Постерный формат позволяет провести свой рассказ несколько раз для небольшой группы заинтересованных слушателей, раз от раза улучшая его.

6) Итоги, голосование *(5 мин)*. После докладов полезно провести неформальное анкетирование, например, выбрать самый понятный доклад, самый интересный доклад, самый красивый постер и т.д. Можно также прокомментировать решения учеников, связи между темами. Ну и не забыть привести класс в надлежащий вид после конференции.

Таким образом, каждый школьник за два урока побывал во многих ролях: выполнял задание, оформлял его, докладывал, слушал другие темы, задавал вопросы и оценивал. Обычно ученики охотно берутся за такое необычное дело. Основная организационная сложность в том, что группы проходят этапы работы с очень разной скоростью: одни уже оформили постер, а другие ещё только дорешивают задание. Учителю приходится всё время балансировать, ускорять одних и задерживать других. Можно направить быстро рисующих на оформительскую помощь в отстающую группу или устроить для готовой команды тренировку доклада друг другу.

После конференции лучшие постеры стоить вывесить на некоторое время в школе на всеобщее обозрение, а затем сохранить до следующей конференции, где использовать для вдохновения.

Урок-конференцию можно проводить и при дистанционном обучении: ученики обсуждают свою тему в сессионных залах zum, а в роли постера используют коллективную виртуальную доску (см. приложение 2).

С форматом урока-конференции я познакомился благодаря М.А. Ройтбергу и Н.М. Нетрусовой.

Приложение 1.
Примеры тем для конференции по алгебре 8 класса

Вокруг треугольника Паскаля
Тема 1 (комбинаторная)

1. *Сколькими способами можно прочитать слово* ABRACADABRA *на рисунке? Начинаем с северного* A *и читаем сверху вниз, переходя к соседней юго-восточной или юго-западной букве, пока не достигнем южного* A*. (При чём тут треугольник Паскаля?)*

A
B B
R R R
A A A A
C C C C C

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A & & A & & A & & A & & A & & A \\
& D & & D & & D & & D & & D & \\
& & A & & A & & A & & A & & \\
& & & B & & B & & B & & & \\
& & & & R & & R & & & & \\
& & & & & A & & & & &
\end{array}$$

2. *Обобщив предыдущую задачу (взяв слово длины* $2n$*), докажите тождество:*

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

3. *Докажите тождество* $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$*, придумав соответствующую комбинаторную задачу и найдя в ней число вариантов двумя способами.*

Тема 2 (аналитическая, нужен построитель графиков)

1. *Постройте в Геогебре или Десмосе график функции* $f(x) = (1+x)^4$*. Постройте в той же координатной плоскости графики функций*

$$f_1(x) = 1 + 4x;$$

$$f_2(x) = 1 + 4x + 6x^2;$$

$$f_3(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3.$$

Рассмотрите графики при $-1 < x < 1$*, подберите удобный масштаб для* y.

2. *Предложите линейное, квадратичное, кубическое приближения для графика функции* $g(x) = (1+x)^5$ *вблизи точки* $x = 0$*. Постройте графики, проверьте своё предположение, обоснуйте его. Оцените погрешность при* $x \pm 0{,}5$.

Тема 3 (алгебраическая)

1. *Вычислите* 11^2 *и* 11^3*. Как полученные числа связаны с треугольником Паскаля? Почему? Вычислите с помощью треугольника Паскаля* 11^4*. Что удобнее вычислять:* 11^5 *или* 101^5 *?*

2. *Вычислите суммы:*

а) $1+2C_n^1+2^2\cdot C_n^2+\ldots+2^n\cdot C_n^n$;

б) $1+3C_n^1+3^2\cdot C_n^2+\ldots+3^n\cdot C_n^n$;

в) *Докажите алгебраически тождество:*

$$C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}.$$

Тема 4 (делимость)

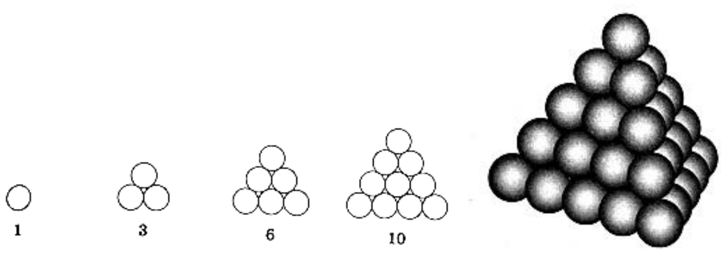
Будем рассматривать в каждой строке треугольника Паскаля внутренние числа (все, кроме двух крайних единиц).

1. *В каком случае все внутренние числа строки делится на номер строки? Проверьте для первых десяти строк, найдите закономерность, попробуйте доказать.*

2. *Чему равен наибольший общий делитель внутренних чисел строки с номером* k *?*

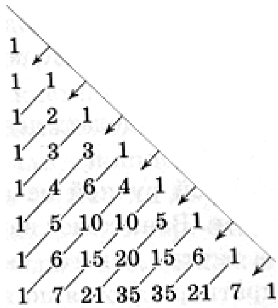
Тема 5 (числа)

1. *Число кружочков, образующих правильный треугольник, называют треугольным. Число шаров, образующих правильную треугольную пирамиду, называют пирамидальным. Запишите первые шесть членов каждой из последовательностей. Найдите их в треугольнике Паскаля. Объясните причину их появления на этих местах.*



2. *Рассмотрите сумму* $1+4+10+20+35+56=126$. *Найдите, где эти числа и результат расположены в треугольнике Паскаля. Найдите аналогичные факты. Запишите формулу. Докажите.*

3. *Строки в треугольнике Паскаля выровняли по левому краю. Найдите суммы чисел, расположенных вдоль диагоналей, идущих слева снизу направо вверх. Угадайте последовательность. Докажите.*



Тема 6 («узоры»)

1. *Постройте треугольник Паскаля (первые десять строк), заменив каждое число его остатком при делении на 2. Та же задача при делении на 3.*

2. *Найдите закономерности полученных узоров. Докажите.*

3. *В каких строках треугольника Паскаля все внутренние числа делятся на 2? В каких строках — ни одно число не делится на 2?*

4. *В каких строках треугольника Паскаля все внутренние числа делятся на 3? В каких строках — ни одно число не делится на 3? Обоснуйте.*

Комментарий. Перед конференцией был введён треугольника Паскаля как числовой объект. Задачей конференции было познакомить школьников с многообразием связей треугольника Паскаля с различными разделами математики. Конференция проводилась в ФТШ г. Санкт-Петербург в рамках семинара учителей математики в мае 2023 г. При составлении тем были использованы формулировки задач и рисунки из книг Д. Пойа «Математическое открытие» (М., Наука, 1976) и И.В. Раскиной, А.В. Шаповала «Комбинаторика: заседание продолжается» (М., МЦНМО, 2023).

Приложение 2.
Примеры тем для конференции по алгебре 11 класса

Тема 1. *Постройте графики функций* $y = \log_3 3^x$ *и* $y = 3^{\log_3 x}$. *На какие недавно изученные графики они похожи? Почему?*

Тема 2. *Изучите график уравнения* $|x|^a + |y|^a = 1$ *в зависимости от показателя* a. *Объясните его свойства. Выделите основные типы графиков. Используйте модель*

https://www.desmos.com/calculator/n1tl3igi4t

Тема 3. *Как связаны графики функций* $y = a^x$ *и* $y = \log_a x$? *Сколько общих точек они имеют в зависимости от* a? *Как расположены эти точки?*

Комментарий. Конференция проводилась для непрофильной группы, изучившей перед тем взаимно обратные функции на примере x^n и $\sqrt[n]{x}$. Работа велась в дистанционном режиме зимой 2020-2021 года, поэтому объём заданий невелик. Всего работали шесть групп, т.е. одну и ту же тему получили по две группы, и можно было сравнить их подходы. Постеры доступны по ссылке https://clck.ru/37N6kC. На седьмом слайде — результаты анкетирования после конференции.

Приложение 3.
Примеры тем для конференции по геометрии 8 класса

Хорошо идут темы, в которых математическая задача требует уточнения и «доформулирования» по ходу решения. Таковы, например, упражнения на объяснение действий механизмов из учебного пособия М.А. Волчкевича «Геометрия. 8 класс» (М., Просвещение, 2021): стр. 9 упр. 1 и упр. 5; стр. 13 упр. и упр. 14; стр. 34 упр. 2; стр. 78 упр. 9.

Именно этот набор упражнений был дан 8-классникам школы «Интеллектуал» г. Москва для докладов на уроке-конференции зимой 2021-22 учебного года после изучения темы «Четырёхугольники». Целесообразнее оказалось не давать упражнения на механизмы к каждому виду четырёхугольников по отдельности, а сделать однократное погружение сразу во все виды механизмов в конце темы в формате конференции.

Приложение 4.
Пример расположения материалов на постере

<table>
<tr><td>Авторы</td><td colspan="3">Название</td></tr>
<tr><td colspan="2">Постановка задачи</td><td colspan="2">Чертёж</td></tr>
<tr><td colspan="3">Результат (ответ, алгоритм построения…)</td><td>Решение (доказательство результата), формулы, чертежи</td></tr>
</table>

Между соседними квадратами квадратов нет или о пользе тавтологий

П.В. Чулков,
г. Москва
chulkov2007@yandex.ru

Средства у нас есть…
Диалоги из Простоквашино.

Казалось бы, что можно извлечь из такой тавтологии?

Соседние квадраты они потому и соседние, что между ними никаких других квадратов нет.

Оказывается кое-что извлечь можно. При решении следующих задач достаточно сведений из курса алгебры 7-8 класса.

Начнем с простой задачи (на такой задаче идея не затемняется техническими моментами).

Задача 1. *При каких натуральных n значение выражения n^2+5n+1 — квадрат натурального числа*?

Поищем квадраты, расположенные "недалеко" от данного выражения.

Заметим, что почти всегда (то есть при всех натуральных $n>3$)

$$(n+2)^2 < n^2+5n+1 < (n+3)^2$$

Никаких квадратов между соседними квадратами быть не может, поэтому осталось проверить числа $1 \le n \le 3$.

Ответ: при $n=2$.

Собственно говоря, между соседними кубами кубов тоже нет.

Как нет четвертых степеней натуральных степеней натуральных чисел между соседними четвертыми степенями целых чисел.

В следующей задаче ситуацию немного осложняет идет, то, что речь идет о всех целых числах (не только натуральных).

Задача 2. *При каких целых n число n^3+2n^2+11 является кубом натурального числа?*

Заметим, что почти при всех целых n (кроме $-2 \le n \le -1$) верно неравенство:

$$(n+3)^3 > n^3 + 2n^2 + 11 > n^3$$

Рассмотрим два случая:

$$(n+2)^3 = n^3 + 2n^2 + 11 \text{ и } (n+1)^3 = n^3 + 2n^2 + 11$$

Первое уравнение корней не имеет, а второе имеет корни: $n = 2$ и $n = -5$

Задача 3. *При каких целых n выражение $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ - квадрат целого числа*?

Попытка оценить данное выражение квадратами не удается.

Умножим данное выражение на 4: нужная оценка находится.

Почти при всех целых значениях n (кроме $0 \le n \le 2$) верно неравенство:

$$(2n^2 + n)^2 < 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 4 \le (2n^2 + n + 1)^2$$

Искомые значения получаются, если

$4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 4n + 4 = 4n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n + 1$, $n^2 - 2n - 3 = 0$.

Осталось проверить числа $0 \le n \le 2$.

Ответ: $n = 0$, $n = -1$, $n = 3$

Задача 4. *Найти все пары целых чисел и, удовлетворяющих уравнению* $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

Здесь речь не идет о квадратах…однако, преобразуем уравнение. Получим:

$$4x^2 + 4x + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1,$$

$$(2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

Выясним, когда правая часть уравнения является полным квадратом. Итак, если это квадрат:

$(2y^2 + y)^2 \le 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 \le (2y^2 + y + 1)^2$, так как

$(2y^2 + y)^2 = 4y^4 + 4y^3 + y^2$ и $(2y^2 + y + 1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 5y^2 + 2y + 1$.

То есть, равенство достигается, если:

$4y^4 + 4y^3 + y^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$, $3y^2 + 4y + 1 = 0$, $y = -1$.

Или: $4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = 4y^4 + 4y^3 + 5y^2 + 2y + 1$, $y^2 = 2y$.

Ответ: $(0;0)$, $(-1;0)$, $(5;2)$, $(-6;2)$, $(-1;-1)$, $(0;-1)$.

В следующем уравнении используем метод замены.

Задача 5. *Решите уравнение в целых числах*

$$x(x+1)(x+7)(x+8)=y^2.$$

Перепишем уравнение в виде. Обозначим $x^2+8x=z$,

Получим: $(x^2+8x)(x^2+8x+7)=y^2$, $z(z+7)=y^2$, $z^2+7z=y^2$.

Осталось узнать, когда выражение z^2+7z - является полным квадратом. При $z>9$, $(z+3)^2<z^2+7z<(z+4)^2$, а между соседними квадратами - квадратов нет.

Останется решить $x^2+8x\le 9$.

Ответ: $(0;0)$, $(-1;0)$, $(-7;0)$, $(-8;0)$, $(1;\pm12)$, $(-2;\pm12)$, $(-9;\pm11)$.

Приведем две задачи не по теме, выражения в которых похожи на "тематические". В решениях похожих задач нередко используются похожие идеи…

Задача 6. *Представить многочлен* $x^4+x^3+x^2+x+1$ *в виде разности квадратов двух многочленов неодинаковых степеней с вещественными коэффициентами.*

Понятно, что первый многочлен степени 2, а второй степени (или 0).

Вспомним, что в задаче мы уже рассматривали многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$. Как и там возьмем вместо него многочлен $4x^4+4x^3+4x^2+4x+4$.

Рассмотрим квадрат $(2x^2+x+2)^2=4x^4+4x^3+9x^2+4x+4$

Получим: $(2x^2+x+2)^2-(\sqrt{5}x)^2=4x^4+4x^3+4x^2+4x+4$.

Окончательно: $\left(x^2+\dfrac{1}{2}x+1\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2=x^4+x^3+x^2+x+1$

Задача 7. При каких a и b многочлен $x^4+x^3+ax^2+x+b$ является полным квадратом?

Поступим аналогично предыдущей задаче — будем рассматривать многочлен $4x^4+4x^3+4ax^2+4x+4b$.

Квадрат многочлена запишем в виде:

$$\left(2x^2+x+c\right)^2=4x^4+4x^3+\left(1+4c\right)x^2+2xc+c^2, \text{ тогда } c=2$$

Ответ: $b=1$, $a=\dfrac{9}{4}$.

Материал, приведенный в заметке может быть использован на уроках и занятиях кружка в 9-11 классе.

Дополнительные задачи

Задача 8. *Найдите наименьшее натуральное число, начиная с которого* 2024 *натуральных числа не являются точными квадратами*?

Задача 9. *При каких натуральных* n *значение выражения* $n^2+13n+24$ *– квадрат натурального числа*?

Задача 10. *При каких целых* n *значение* выражения n^2+n+1 – *квадрат натурального числа*?

Задача 11. *Может ли произведение трех последовательных натуральных чисел быть кубом натурального числа*?

Задача 12. *При каких целых* n *значение данного выражения* $n^2+19n+19$ *– квадрат натурального чи*сла?

Задача 13. *При каких целых* n *значение данного вы*ражения $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ - *квадрат целого числа*?

Задача 14. *Может ли произведение* 8 *последовательных натуральных чисел быть четвертой степени натурального числа*?

Задача 15. *При каких целых* n *значение данного выражения* $1+2n+3n^2+4n^3+5n^4+4n^6+2n^7+n^8$ - *квадрат целого числа*?

Ответы, решения, указания, комментарии

3. В книге Р. Хонсбергера ($[10]$, задача 74) приведено два интересных, но довольно длинных решения этой задачи и указывалось, что "задача оставалась нерешенной в течение 7 лет с момента опубликования" и ее доказательство считалось "значительным дос-

тижением". Довольно сложное решение этой задачи приведено также в книге ([3] – задача 6)

В дальнейшем задача также предлагалась на одной олимпиаде в Казахстане. [5]

4. (ВсОШ, 1967). См. также решение в книге [10]

5. (ГДР, 1973) [4]

6. (Польша, 1954-1955) [8]

7. Лоповок Л.М. [6]

8. Между соседними квадратами $(n+1)^2$ и n^2 расположены $(n+1)^2 - n^2 - 1$ натуральных чисел. Получим $2n \geq 2024$, $n \geq 1012$.

9. Соседние квадраты: $(n+6)^2 \leq n^2 + 13n + 24 < (n+7)^2$

Осталось рассмотреть: $n^2 + 12n + 36 = n^2 + 13n + 24$, откуда $n = 12$

10. При $n \geq 0$ получим: $(n+1)^2 \geq n^2 + n + 1 \geq n^2$, иначе $(n+1)^2 < n^2 + n + 1 \leq n^2$.

Ответ: $n = 0$, $n = -1$.

11. Из неравенства $(n+1)^3 > (n-1)n(n+1) = n^3 - n > n^3$ следует ответ задачи.

12. Достаточно заметить, что

$$(n+4)^2 < n^2 + 19n + 19 < (n+10)^2$$

и рассмотреть случаи "промежуточных" квадратов:

$$(n+5)^2 = n^2 + 19n + 19, \ \ldots, \ (n+9)^2 = n^2 + 19n + 19$$

13. $(n^2 + n)^2 \leq n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 \leq (n^2 + n + 1)^2$.

Ответ: $n = 0$, $n = -1$.

14. (Р. Хонсбергер, [10] задача 60) Рассмотрим равенство:

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = y^4$$

$$(x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) = y^4$$

Пусть: $x^2 + 7x + 6 = a \geq 14$, при натуральных x, тогда

$$(a-6)a(a+4)(a+6) = y^4, \ a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a = y^4$$

Можно проверить, что равенство

$$a^4 < a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a < (a+1)^4$$

верно при $a^3 - 9a^2 - 36a > 0$, $a(a+3)(a-12) > 0$.

Следовательно, произведение 8 последовательных натуральных чисел быть четвертой степенью натурального числа не может.

Смотри также ([3] - задача 98)

15. Ответ: при любых.

Данное выражение равно: $(1 + n + n^2 + n^3 + n^4)^2$.

Литература

1. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. - 2е изд. – М.: МЦНМО, 2010.

2. Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л. Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров решения. – Донецк.: ООО ПКФ "БАО", 2005.

3. Избранные задачи. – М.: Мир, 1977.

4. Зарубежные математические олимпиады. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., Наука, 1987.

5. Кунгожин А.М., Кунгожин М.А., Конаныхин А.М. Областная олимпиада школьников по математике. 1999-2021 учебные годы. – Алматы: Центр олимпийской подготовки, 2021

6. Лоповок Л.М. 1000 проблемных задач по математике. – М.: Просвещение, 1996.

7. Математические олимпиады для школьников. 10.: Кн. для учащихся общеобразоват. Учреждений / Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко, С.В. Резниченко, А.М. Слинько. – М.: Просвещение, 1998.

8. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1973.

9. Тригг Ч. Задачи с изюминкой. – М.: Мир, 1975.

10. Хонсбергер Р. Математические изюминки. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.

Решение систем линейных уравнений. Пример совместной работы алгебры и геометрии

В.Н. Шабанова,
ГБОУ СОШ № 619, г. Санкт-Петербург
kirasvera@yandex.ru

Как часто, проводя уроки алгебры, вы вспоминаете про геометрию? Думаю, что читатели разделятся на две половины. Я хочу рассказать об одном уроке, который случился достаточно спонтанно, как обычно бывает в моей практике. Под конец учебного года, особенно когда не успеваешь выдать программу, это случается ещё чаще. В этом мне как обычно помогли мои ученики, которые в нужное время задали нужный вопрос, который решил исход урока. На этом уроке я хотела познакомить ребят с графическим методом решения систем.

Как обычно нашлись те ребята, которые опоздали. Для них всегда есть вопросы по теории из домашнего задания. В этот раз им предстояло сформулировать определение системы линейных уравнений с двумя неизвестными и рассказать, что является множеством решений системы. Ниже представлены определения, которые мы сформулировали на предыдущем уроке.

Определение 1. *Системой линейных уравнений с двумя переменными* x *и* y *называется система уравнений вида:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases},$$

где a_1; b_1; c_1; a_2; b_2; c_2 *— некоторые числа.*

Определение 2. *Множеством решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными* x *и* y *является множество пар* $(x;\, y)$, *которые удовлетворяют каждому из уравнений системы.*

Кто-то из зала решил добавить, что пара $(x; y)$ — это координата точки. И дальше события пошли не по плану.

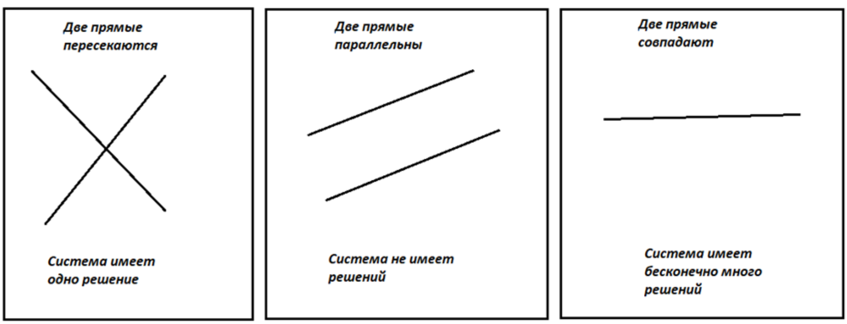
Что является графиком линейного уравнения?

Графиком линейного уравнения является прямая линия, для построения которой достаточно двух точек.

Что означает решить систему уравнений графическим способом?

Найти координату точки пересечения графиков линейных функций.

Давайте вспомним, каким может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости?



А можно ли догадаться о количестве решений по внешнему виду системы?

Да, для этого надо вспомнить какую роль играют коэффициенты k и b в линейной функции $y = kx + b$.

Рассмотрим две линейные функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Сколько решений будет иметь система из этих двух уравнений? Как это можно определить без построения графиков?

1) Система будет иметь одно решение, если $k_1 \neq k_2$.

2) Система не будет иметь решений, если $k_1 = k_2$.

3) Система будет иметь бесконечно много решений, если $k_1 = nk_2$, а $b_1 = nb_2$.

Вопрос для «подумать дома»: мы ничего не сказали про b_1 и b_2. Могут ли они повлиять на количество решений системы? Напишите дома ваши размышления на эту тему.

Давайте проверим наши размышления на конкретных примерах.

Пример 1. *Найдите решение системы графическим способом.*

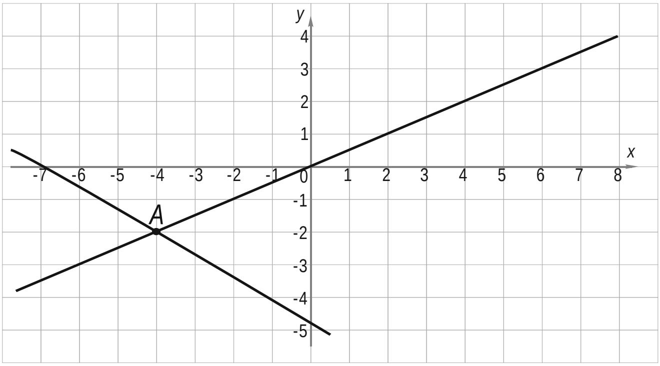
$$\begin{cases} 2x+3y=-14, & (1) \\ x-2y=0. & (2) \end{cases}$$

Решение. Выразим y из первого и второго уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{14}{3}, \\ y=\dfrac{1}{2}x. \end{cases}$$

Так как $-\dfrac{2}{3}\neq\dfrac{1}{2}$, то система уравнений имеет одно решение, так как у прямых будет одна точка пересечения.

В одной системе координат построим графики функций: $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{14}{3}$ и $y=\dfrac{1}{2}x$.



$A(-4;-2)$ — точка пересечения данных прямых.

А как проверить, что данная точка удовлетворяет каждому из уравнений системы и мы не ошиблись при построении?

Подставить получившиеся координаты в первое и второе уравнение системы и выполнить проверку.

Проверка:

(1) $2\cdot(-4)+3\cdot(-2)=-14$

$-8-6=-14$

$-14=-14$

левая часть равна правой части.

(2) $-4-2\cdot(-2)=0$

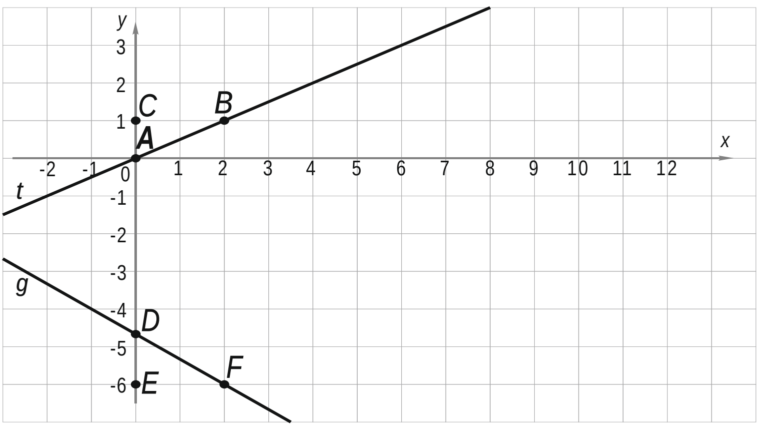
$-4+4=0$

$0=0$

левая часть равна правой части.

Ответ: $(-4;-2)$.

Давайте попробуем доказать, что прямые, которые мы изобразили, пересекаются. Что нам в этом может помочь? Вспомним геометрию.



Ребята предложили вот такое решение этой задачи.

Для этого воспользуемся признаками параллельности прямых.

Рассмотрим прямые AB и DF. Прямая y — секущая для них. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Так как угол CAB — острый, то смежный с ним угол DAB — тупой. Аналогично с прямоугольным треугольником FDE. Угол EDF — острый, а значит смежный с ним угол ADF — тупой. Рассмотрим односторонние углы при прямых AB и DF и секущей y. Так как углы DAB и ADF — тупые, то их сумма будет больше 180 градусов, поэтому прямые AB и DF не параллельны.

Пример 2. *Найдите решение графическим способом:*

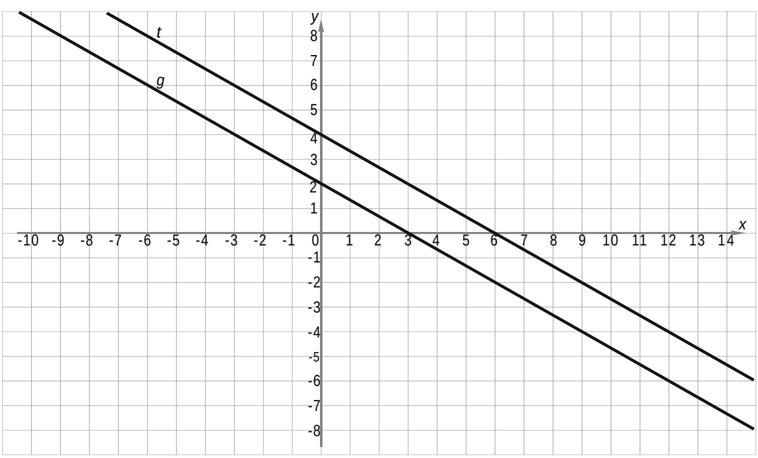
$$\begin{cases} 2x+3y=12, \\ 6x+9y=18. \end{cases}$$

Решение. Выразим y из первого и второго уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} y=4-\dfrac{2}{3}x, \\ y=2-\dfrac{2}{3}x. \end{cases}$$

Так как $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$, то решений не имеет, так как прямые будут параллельны.

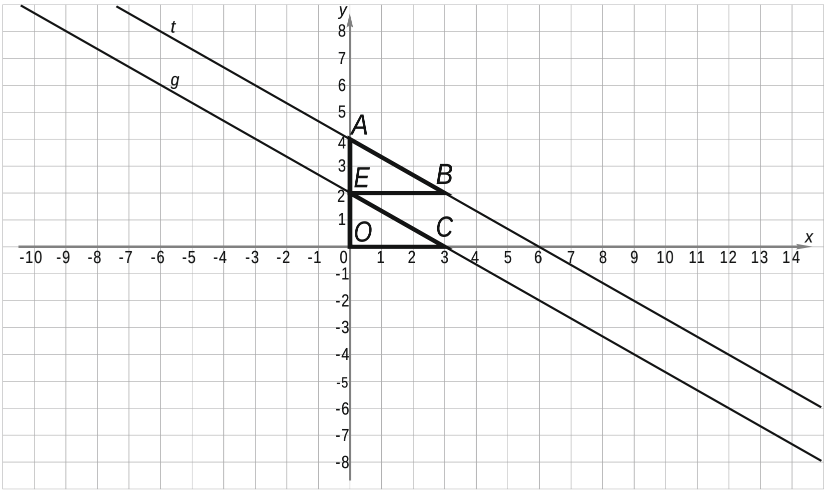
В одной системе координат построим графики функций $y=4-\dfrac{2}{3}x$ и $y=2-\dfrac{2}{3}x$.



А можно ли доказать параллельность с использований наших знаний по геометрии?

Ребята предложили вот такое решение этой задачи.

Да, для этого надо опять вспомнить признаки параллельности прямых и найти, например, равные накрест лежащие углы.



Давайте построим треугольники ABE и CEO. Точки A и B принадлежат прямой f (по построению), а точки C и O — прямой g (по построению). Так как катеты $AE = OE = 2$ единичным отрезкам, а катеты $BE = CO = 3$ единичным отрезкам, то прямоугольные треугольники ABE и CEO равны (по двум катетам). В равных треугольниках равны соответствующие элементы. Следовательно, угол BAE равен углу CEO, а они являются накрест лежащими при прямых f и g, и секущей OA. Из этого следует, что прямые параллельны.

Пример 3. *Найдите решение системы графическим способом:*

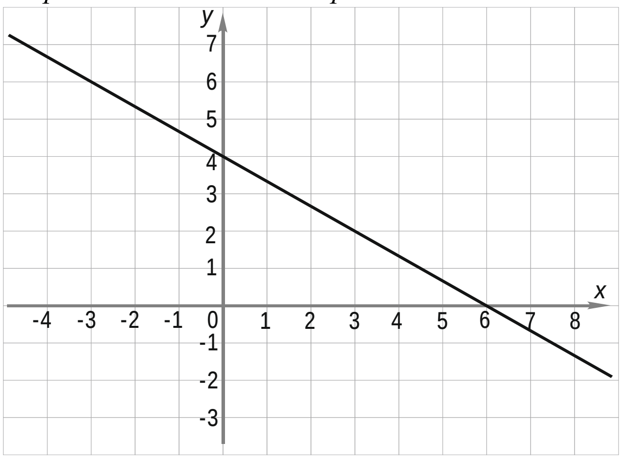
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 10x + 15y = 60. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что если разделить обе части второго уравнения системы на 5, то получится первое уравнение системы. Что это означает?

Прямые совпадают.

Как объяснить это с помощью геометрии?

Ребята предложили вот такое решение этой задачи.



Первая прямая проходит через точки $(6; 0)$; $(0; 4)$ и вторая проходит через эти же точки. Мы знаем, что через любые две точки проходит прямая, и притом только одна, следовательно, эти прямые совпадают. А это означает, что система имеет бесконечное количество решений.

Подведение итогов урока

1. Графический способ решения систем не является точным. Для проверки полученных результатов надо обязательно делать проверку.

2. Графическая интерпретация решения систем помогает наглядно увидеть количество решений системы.

3. Знания геометрии позволяют доказать полученные результаты.

Хочется добавить только то, что 45 минут урока нам не хватило, мы задержались на перемену. Но это стоило того!

Расширение понятия функции в профильном курсе алгебры

А.С. Штерн,
г. Москва
ashtern@yandex.ru

Если попытаться сформулировать основную идею реформы математического образования, инициированную Андреем Николаевичем Колмогоровым и внедрённую его коллективом в 70-е годы, сделать это, видимо, нужно так: перевод школьного математического образования в старших классах на язык функций. В 1977 году в журнале «Квант» вышла статья одного из лидеров колмогоровской команды известного математика и педагога Н.Я. Виленкина «Как возникло и развивалось понятие функции» [1]. Статья была написана в жанре исторического обзора, не очень характерного для этого журнала. Её публикацию можно объяснить только одним. Автору и его коллегам очень важно было донести свои методологические установки до аудитории «математически продвинутых» школьников, составляющих основную массу читателей «Кванта». К этому тексту мы ещё будем возвращаться.

Степень успешности реформы А.Н. Колмогорова оценивают по-разному. Несомненно одно: размах и темпы внедрения новых программ вызвали большие сложности с их восприятием учителями и школьниками. Однако теперь, по происшествии пятидесяти лет, можно сказать с уверенностью, что в сфере профильного курса алгебры идеи колмогоровской команды реализовались в очень значительной степени. Курс «Алгебра и основы математического анализа» по существу является в данной момент именно курсом основ анализа. Хорошо это или плохо? Едва ли этот вопрос допускает аргументированный ответ. Хочется, однако, чтобы хороший выпускник владел и более общим понятием функции, выработанным ко 2-й половине 19-го века. Причём речь идёт не только о знании основных определений и примеров, но и о достаточно уверенном владении хотя бы некоторыми темами, связанными с изучением функций в общей алгебре и теории чисел. Автор хочет поделиться некоторыми своими методическими разработками данной тематики. Использовать их в рамках основной профильной программы либо её вариативной части (кружки и спецкурсы), и использовать ли вообще, решать читателям.

Автор не имеет ни желания, ни знаний (второе важнее), необходимых для подробного анализа развития понятия функции. Однако, краткий экскурс в историю сделать всё-таки хочется. Такое желание в значительной степени стимулировано чтением указанной выше статьи Н.Я. Виленкина, на которую мы и опираемся.

Введение понятия функции обычно связывают с именем Ньютона, который систематически рассматривал так называемые флюксии — переменные величины, зависящие от времени. Позднее в школе Лейбница этот взгляд был расширен и уточнён: функция может зависеть не только от времени, но обязательно должна считаться по формуле. Найти функцию — значит, найти формулу, её задающую. Однако уже в середине 18-го столетия Леонард Эйлер с его гениальным предвидением дальнейших путей развития математики указал на недостаточность такого подхода. В этом контексте чрезвычайно интересно следующее его высказывание.

«Общее понятие требует, чтобы функцией называли число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. **Значение функции может быть дано аналитическим выражением, условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать, но оставаться неизвестной.** Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе».

Развитие математики в 19-м веке в полной мере подтвердило предвидение Эйлера. В работах Галуа начали детально изучаться подстановки — биекции конечного множества в себя. Примерно тогда же объектами систематического изучения стали геометрические преобразования — отображения плоскости в себя. Да и внутри математического анализа появился интерес к «функциям-монстрам» вроде функций Дирихле и Римана, которые никак не задаются «аналитическим выражением». Всё это постепенно привело к пониманию того, что функция, как однозначно определённое отображение одного множества в другое (или в то же самое) является математическим понятием, достойным серьёзного изучения.

А в школьном учебном процессе? Нужно ли мучить школьника изучением функций, заданным на всевозможных экзотических множествах, значения которых определяются всевозможными экзотическими способами? Педагогический опыт автора позволяет дать утвердительный ответ на этот вопрос. Мы начнём со списка тем профильного курса алгебры, имеющих прямое отношение к этому вопросу. При этом в списке будут присутствовать именно алгебраические темы, а, например, геометрическая тематика преобразований плоскости в нём встречаться не будет. К списку будут прилагаться краткие методические разработки занятий по данным темам.

Основные прецеденты использования предлагаемых материалов таковы:

а) занятия для учеников школы №57 г. Москвы по предмету «математический анализ» (спецматематика);

б) спецкурс «Дополнительные главы алгебры» для учеников школы «Летово» (Москва);

в) материалы занятий различных летних математических школ (ЛМШ г. Кирова, летний лагерь «Дважды Два» г. Москвы, ЛГМШ г. Омска, летние выездные лагеря Центра педагогического мастерства г. Москвы и т.д.)

Почти все занятия, материалы которых мы здесь приводим, проходили в «листочковой» форме: краткое теоретическое обсуждение плюс самостоятельное решение школьниками задач, в ходе которых уточняется и понимание теоретического материала. Образцы такого жанра можно найти, например, в материалах занятий школы 57 г. Москвы [2] или в материалах Летней многопрофильной школы г. Кирова на сайте https://cdoosh.ru/. Решения задач мы почти не приводим, поскольку их можно найти в цитируемой литературе либо соответствующих разделах сайта problems.ru.

Тема 1. Подстановки и группы подстановок

Для подробного теоретического изучения этой темы существует обширная литература, не сводящаяся к университетским учебникам, от классической книги Л.А. Калужнина и В.И. Сущанского [3] до недавно вышедшей работы А. Шеня [4]. Привлекательность этого материала для школьников так велика, что в появлении новых книг можно не сомневаться. Наша задача — представить разработки конкретных занятий, проведённых в «листочковой» форме.

Занятие 1. Что такое подстановка?

Некоторые определения и примеры

Подстановка — биекция (взаимно однозначное отображение) конечного множества в себя. Будем считать, что речь всегда идёт о множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Подстановку удобно записывать в два ряда $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\ldots n \\ x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_n \end{pmatrix}$. Эта запись означает, что $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, … $f(n) = x_n$. В нижнем ряду стоит произвольная перестановка указанного множества. Поэтому число всех подстановок $n-$элементного множества равно $n!$

Для подстановок, как для любого отображения, можно рассматривать **композицию** (последовательное выполнение). Эту процедуру обычно называют умножением подстановок, а её результат — произведением этих подстановок. Подстановки умножаются справа налево:

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 23145 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 32541 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 13452 \end{pmatrix} : 1 \to 3 \to 1, 2 \to 2 \to 3, 3 \to 4 \to 4, 4 \to 5 \to 5, 5 \to 1 \to 2$$

Задачи

1. *Найдите две композиции* $\begin{pmatrix} 12345 \\ 32451 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 23145 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 12345 \\ 23145 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12345 \\ 32451 \end{pmatrix}$.

2. *Докажите, что для умножения подстановок выполнен закон ассоциативности* $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ *(предыдущее упражнение показывает, что закон коммутативности* $f \cdot g = g \cdot f$ *не выполнен).*

Ещё немного определений

Подстановка, которая каждый элемент переводит в себя, называется **тождественной**: $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots n \\ 1 & 2 & 3 \ldots n \end{pmatrix}$. Для любой подстановки f выполнено $f \cdot e = e \cdot f = f$.

Для каждой подстановки существует единственная **обратная** — та, которая делает всё наоборот. При этом произведение этих подстановок в любом порядке есть тождественная подстановка.

Подстановка называется **циклической** (или просто **циклом**), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными. Количество «сдвигаемых» элементов называется длиной цикла. Подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} : 1 \to 3 \to 6 \to 2 \to 1$ есть цикл длины 4, подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} : 1 \to 3 \to 1$ есть цикл длины 2, а подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,6\,2)(4\,5)$ вообще не цикл, но композиция независимых циклов. Два цикла называются **незави-**

симыми, если никакой элемент не сдвигается и первым, и вторым циклом одновременно.

Для циклов принято специальное обозначение, которое показывает, как именно оно переводит элементы по циклу (неподвижные элементы в строку не пишутся):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,6\,2) = (3\,6\,2\,1) = (6\,2\,1\,3) = (2\,1\,3\,6)$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\,3)$. Удобство этого обозначения в его краткости, а неудобство в том, то оно неоднозначно. Очевидно, что

$$(2\,1\,3\,6) = (1\,3\,6\,2) = (3\,6\,2\,1) = (6\,2\,1\,3).$$

Задачи

3. *Сколько на множестве из* n *элементов существует циклов длины 2? Циклов длины* n? *Циклов длины* k *для произвольного* $k < n$?

4. *Найдите и запишите стандартным образом подстановку, обратную к подстановке* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. *Докажите, что подстановка, обратная к циклу, будет циклом той же длины.*

6. *Докажите, что любую подстановку можно разложить в композицию попарно независимых циклов.*

7. *Сколько существует различных способов расставить скобки в произведении* $f \cdot g \cdot h \cdot s$ *так, чтобы действия были корректно определены? Докажите, что результаты, которые получаются во всех этих случаях, равны.*

8. *Верна ли для произвольных подстановок какая-нибудь из следующих формул* $(f \cdot g)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$, $(f \cdot g)^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}$. *Если верна, то какая?*

Занятие 2. Чётные и нечётные подстановки

Определение. Пусть дана некоторая перестановка на множестве чисел $1, 2, \ldots, n$. Говорим, что пара чисел i, j образует **инверсию** в данной перестановке, если большее из этих чисел расположено в перестановке раньше меньшего. Перестановка называется **чётной (нечётной)**, если **чётно (нечётно)** число её инверсий. Подстановка называется чётной (нечётной), если чётна (нечётна) подстановка, составляющая её нижнюю строку в стандартной записи.

Основные задачи

1. *Найти чётность:* **а)** *подстановки* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$*;* **б)** *цикла* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 \ldots n & 1 \end{pmatrix}$.

2. *Разрешается прыгать буквой через две соседние вправо или влево (например, из ИКС сделать КСИ). Можно ли с помощью таких операций превратить* **а)** *АВТОР в ОТВАР;* **б)** *АПЕЛЬСИН в СПАНИЕЛЬ?*

3. *Найти чётность:* **а)** *подстановки* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots 2 & 1 \end{pmatrix}$*;* **б)** *произвольной транспозиции.*

4. *Докажите, что при умножении транспозиции на произвольную подстановку слева чётность подстановки изменится.*

5. *Найти чётность:* **а)** *произвольного цикла длины 3;* **б)** *произвольного цикла длины 4.*

6. *Докажите, что:* **а)** *любой цикл есть композиция транспозиций;* **б)** *любая подстановка есть композиция транспозиций.*

7. *Доказать, что композиция подстановок одинаковой чётности есть чётная подстановка, а композиция подстановок разной чётности — нечетная.*

8. *Доказать, что любую чётную подстановку можно разложить в композицию циклов длины 3.*

9. *Транспозиция называется элементарной, если она меняет местами два соседних числа. (Т.е. имеет вид* $(i; i+1)$*. Доказать, что любую подстановку можно разложить в композицию элементарных транспозиций.*

10. *В городе Урюпинске разрешены только тройные обмены квартир. Может ли в результате нескольких обменов получиться так, что семья Ивановых поменяется квартирами с семьёй Петровых, а все остальные жители останутся при своих квартирах?*

11. *В городе Урюпинске разрешены только парные обмены квартир, и каждая семья может совершить только один обмен в день. Докажите, что любой сложный обмен (но при котором каждая семья отдает одну квартиру и получает одну квартиру) можно совершить за два дня.*

12. *Докажите, что любую подстановку на множестве чисел* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *можно разложить в композицию цикла* $(1\,2 \ldots n)$ *и транспозиции* $(1\,2)$*, взятых в любом порядке любое число раз.*

Тема 2. Арифметические функции

Обычно под арифметической функцией понимают произвольную функцию на множестве натуральных чисел с комплексными значениями (например, [5]). При изучении этой темы со школьниками полезнее характеризовать арифметическую функцию, как заданную на множестве натуральных чисел с целыми значениями, **вычисление которых как-то связано с процедурой разложения аргумента на простые множители**. Из тех примеров, которые можно разобрать со школьниками, не теряется почти ничего, а внимание ученика направляется в нужное русло.

Занятие 1. Число и сумма делителей. Разбиение множества делителей на пары

Краткое обсуждение. Простейшие арифметические функции — число и сумма делителей $d(n)$ и $s(n)$. Эти функции $d(n)$ и $s(n)$ обладают следующим свойством (оно называется мультипликативностью): если числа m, n взаимно просты, то $d(n)d(m) = d(nm)$ и

$s(mn)=s(m)s(n)$. Это сразу видно из формул для вычисления этих функций

$$d(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n})=(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)\dots(\alpha_n+n)\,;\ s(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n})=$$

$$=(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{\alpha_2})\dots(1+p_n+p_n^2+\dots+p_n^{\alpha_n})$$

Вопрос: для каких нечётных натуральных n нечётно число $d(n)$? Число $s(n)$?

Задачи для самостоятельного решения

1. *Докажите, что для любых натуральных чисел m, n выполнены неравенства $d(n)d(m)\geq d(nm)$ и $s(mn)\geq s(m)s(n)$, причём неравенства превращаются в равенства тогда и только тогда, когда числа взаимно просты.*

2. *Решите уравнение $n=2d(n)$.*

3. *Докажите неравенство $d(n)\leq 2\sqrt{n}$.*

4. *Натуральное число n имеет ровно два нечётных простых делителя и удовлетворяет равенству $\sigma(n)=3n$. Найдите наименьшее такое число.*

5. *Найти все простые числа p такие, что число p^2+11 имеет ровно шесть различных делителей.*

6. *Найдите все натуральные числа n такие, что $d(n)=6$, $s(n)=3500$.*

7. *Докажите, что среднее арифметическое всех делителей натурального числа n находится между средним геометрическим и средним арифметическим пары чисел 1, n.*

8. *У натурального числа N выписали в ряд по возрастанию все собственные делители (собственный делитель натурального числа — это делитель, отличный от 1 и самого этого числа). Оказалось, что в этом ряду простые и составные числа чередуются (в частности, их не меньше двух). Сколько собственных делителей имеет число N?*

9. *У двух целых положительных чисел равны суммы делителей и равны суммы всех обратных величин к делителям. Докажите, что эти числа равны.*

10. *Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём восхитительным, если самый большой собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине, и собственного делителя, третьего по величине. (Например, число 18 восхитительное: $9 = 6 + 3$). Сколько существует восхитительных чисел, не превосходящих полтора миллиона?*

Занятие 2. Совершенные числа

Краткое обсуждение. Натуральное число n называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей (не включая само себя). Это условие удобно записывать так $s(n) = 2n$. Самые маленькие совершенные числа — 6 и 28 (проверьте!). Существуют ли нечётные совершенные числа — неизвестно, а все чётные совершенные числа мы сейчас опишем т.е. получим для них общую формулу. Чётное число можно и очень удобно рассматривать в виде $2^n N$, где n — произвольное натуральное число, а N — нечётное. Работая с такой записью числа, мы не забудем, что оно чётное, т.е. $n > 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Пусть чётное число $2^n N$ совершенно. Тогда N делится на $2^{n+1} - 1$ без остатка.*

2. *Пусть чётное число $2^n N$ совершенно. Тогда N не имеет других делителей кроме 1 и $2^{n+1} - 1$.*

3. *Чётное число $2^n N$ совершенно тогда и только тогда, когда $N = 2^{n+1} - 1$ и является простым.*

4. *Найдите ещё два совершенных числа.*

А вдруг нечётные совершенные числа всё-таки есть?

5. *Докажите, что совершенное число не может быть точным квадратом.*

6. *Найдите все совершенные числа, которые делятся на 3, но не делятся на 9.*

Занятие 3. *P* – показатель натурального числа

Показатель степени $v_p(n)$, с которым простое число p входит в разложение натурального числа n на простые множители, называется **p – показателем** этого числа. Ясно, что данная функция v_p по свойствам существенно отличается от предыдущих и напоминает логарифм. Её иногда и называют дискретным логарифмом.

Краткое обсуждение. При умножении p – показатели складываются, а при делении вычитаются.

p – показатель суммы двух натуральных чисел с **различными** p – показателями, равен наименьшему из них. Как обобщить это утверждение на случай нескольких слагаемых?

Натуральное число a без остатка делится на натуральное число b тогда и только тогда, когда p – показатель числа b не превосходит p – показателя числа a при любом простом p.

Задачи для самостоятельного решения

1. *На сколько нулей кончается число: $30!$; $n!$ для произвольного натурального n?*

2. *Найти p – показатель числа $n!$ (для записи удобно использовать обозначение $[x]$ для целой части числа x).*

3. *Найдите число двоек в разложении на простые множители числа $(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)2n$.*

4. *Можно ли подобрать натуральное число n так, чтобы число $n!$ без остатка делилось на 2^n?*

5. *Докажите, что число $1/2+1/3+\ldots+1/n$ не может быть целым ни при каком натуральном n.*

6. *Докажите, что число $1/3+1/5+1/7+\ldots+1/(2n+1)$ не может быть целым ни при каком натуральном n.*

7. *Докажите, что число $(n!)!$ без остатка делится на $(n!)^{(n-1)!}$.*

Тема 3. Многочлен, как алгебраическое выражение и как функция

Эта тема, видимо, нуждается в более пространном комментарии. Понятно, что изучение многочленов предполагает взгляд с двух различных точек зрения. Во-первых, многочлены есть формальные выражение, с которым можно производить алгебраические операции. То есть, элементы кольца многочленов. Во-вторых, функция на своём поле (или кольце) коэффициентов. Причём для решения задач надо хорошо понимать каждый из этих подходов и при необходимости уверенно переходить от одного к другому. В отличие от предыдущих тем предлагаемые занятия не рассчитаны на последовательное непрерывное изучение, а проходят со значительными перерывами.

Занятие 1. Многочлен и его коэффициенты

Краткое обсуждение. Ненулевой многочлен от переменной x — формальное выражение вида $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, a_0. Степенью ненулевого многочлена называется число $n = \deg P$.

Многочлены можно складывать, вычитать и умножать естественным образом. При этом полезно иметь в виду следующее.

А) Общая формула для коэффициентов произведения двух многочленов имеет следующий вид:

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$$

$$P(x)Q(x) = a_n b_m x^{n+m} + \ldots + c_k x^k + \ldots + a_0 b_0 \Rightarrow c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$$

Степень произведения двух многочленов равна сумме их степеней. Степень суммы двух многочленов с различными степенями равна наибольшей из них.

Б) Если мы подставим вместо переменной произвольное число и проделаем все действия, то снова получим число. Это означает, что на многочлен можно смотреть как на функцию. Этот взгляд не является для нас чем-то новым и неизвестным, поскольку мы говорим, например о графике многочлена, а графики бывают именно у функций. Значения этой функции в некоторых точках легко выражается через коэффициенты многочлена. В частности, $P(0)=a_0$,

$$P(1)=a_0+a_1+\ldots+a_n,\ P(-1)=a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^n a_n.$$

Как для любых функций, для многочленов определено понятие композиции, причём композиция двух многочленов также есть многочлен. Легко можно определить степень, старший коэффициент и свободный член композиции: $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$,

$$Q(x)=b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0,\ P(Q(x))=c_kx^k+\ldots+c_1x+c_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \deg(P(Q(x)))=\deg(P(x))\deg(Q(x)),\ c_0=P(Q(0))=P(b_0),$$

$$c_k=a_nb_m^n.$$

В) Существует ли многочлены $P(x)$, для которого выполнены следующие равенства: $(P(x))^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$,

$$(P(x))^2=x^2+1;\ (x+1)P(x)=x^n+1?$$

Задачи для самостоятельного решения

1. *Какими должны быть значения a и b, чтобы многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ был квадратом многочлена?*

2. *Найти у следующих многочленов степень, свободный член, старший коэффициент, сумму коэффициентов, сумму коэффициентов при чётных степенях: $(((x-1)^2-2)^2-3)^2$, $(2x^2-2x+1)^{17}(3x^2-3x+1)^{17}$; $(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)$.*

3. *Найдите все коэффициенты многочлена*

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots+x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}+x^{100}).$$

4. *У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при четных степенях равна сумме коэффициентов при нечетных степенях. Докажите, что для любого многочлена $Q(x)$ этим же свойством обладает и многочлен $P(x)\times Q(x)$.*

5. *Найдите все многочлены, удовлетворяющие тождеству*

$$P^3(x)+xP(x)=8x^3-10x^2+5x-1.$$

6. *Пусть* $P(x)$ *— многочлен степени 1,* $Q(x)$ *— многочлен степени 2, причём выполнено равенство* $P(Q(x))=Q(P(x))$. *Найдите все пары таких многочленов.*

7. *Докажите, что любая натуральная степень многочлена* $P(x)=x^4+x^3-3x^2+x+2$ *имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.*

8. *Значения квадратного трёхчлена с целыми коэффициентами при всех целых значениях аргумента являются точными квадратами. Докажите, что этот трёхчлен является квадратом линейного двучлена с целыми коэффициентами.*

Последнюю задачу лучше решать, владея некоторыми знаниями из математического анализа. Например, хотя бы интуитивными представлениями о сходящихся последовательностях и их свойствах.

Занятие 2. Интерполяция

Краткое теоретическое обсуждение.

А) Если два многочлена степени не выше n принимают одинаковые значения в $n+1$ точке, то эти многочлены совпадают (имеют одинаковые наборы коэффициентов). Если два многочлена совпадают как функции, то они равны (имеют одинаковые наборы коэффициентов.

Б) Что получится после приведения подобных членов:

$$\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}?$$

В) Пусть a, b, c — попарно различные числа; A, B, C — произвольные числа. Тогда существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше 2, который в точках a, b, c принимает значения A, B, C соответственно. Геометрическая интерпретация: через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную параболу.

Г) Пусть x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1} — попарно различные числа. Тогда существует многочлен $P(x)$ степени не выше n, такой, что x_1, x_2, …, x_n — его корни и $P(x_{n+1})=1$.

Д) **Теорема.** Пусть x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1} — попарно различные числа; a_1, a_2, …, a_n, a_{n+1} — произвольные числа. Тогда существует единственный многочлен $P(x)$ степени не выше n, такой, что $P(x_i)=a_i$ при всех $i=1,2,\ldots,n+1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Что получится после приведения подобных в следующих многочленах:*

$$b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)};$$

$$b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(c-b)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}?$$

2. *Постройте многочлен $f(x)$ степени не выше 2, который удовлетворяет условиям $f(-1)=-1$, $f(0)=2$, $f(1)=5$.*

3. *Для многочлена P третьей степени найдите $P(12)+P(-8)$, если известно, что $P(1)=10$; $P(2)=20$; $P(3)=30$.*

4. *Известно, что некоторый многочлен во всех рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.*

5. *Для каждого натурального $n>1$ приведите пример многочлена степени n, который во всех целых точках принимает целые значения, но все его ненулевые коэффициенты не являются целыми.*

6. *Многочлен степени n принимает значения 2^k в точках $k=0,1,2,\ldots,n$. Найдите его значение в точках $n+1$ и $n+2$.*

7. *Многочлен степени $n-1$ принимает значения $1/k$ в точках $k=1,2,\ldots,n$. Найдите его значение в точках $n+1$ и $n+2$.*

Занятие 3. Многочлены с коэффициентами в Z_p (множество остатков от деления на простое число p)

Сам по себе этот материал выглядит искусственно и нуждается в мотивации. Таковая может возникнуть, например, при изучении темы «Квадратичные вычеты».

Теоретическое обсуждение

А) **Критерий Эйлера.** Пусть $a \in Z_p$ и $a \neq 0$. Тогда остаток a есть квадратичный вычет по модулю p в том и только том случае, когда выполнено сравнение $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$.

Выполнимость сравнения очевидно вытекает из малой теоремы Ферма. А вот доказательство обратного утверждения как раз и выводит естественным образом на разговор о многочленах с коэффициентами в множестве Z_p. Более точно: рассматривается многочлен $f(x) = x^{\frac{p-1}{2}} + (p-1)$.

Б) **Теорема о делении с остатком.** Для любой пары многочленов $f(x), g(x) \neq 0$ из $Z_p[x]$ существует единственная пара многочленов $h(x), r(x) \in Z_p[x]$ таких, что $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$ и выполнено одно из условий $\deg r < \deg g$, $r(x) = 0$.

В этом месте полезно упомянуть о том, что эта теорема верна и аналогично доказывается для привычных многочленов с вещественными (целыми, рациональными) коэффициентами. Тем более, что в учебниках даже для математических классов это доказательство обычно отсутствует. Между тем, как оно ценно в качестве хорошего примера индуктивного рассуждения, да и просто как пример теоремы в алгебре, каковые встречаются в школьных курсах нечасто.

Следствие 1 (теорема Безу). При делении произвольного многочлена на приведённый многочлен первой степени $x - a$ в остатке получается значение данного многочлена в точке a.

Следствие 2. Произвольный многочлен $f(x)$ без остатка делится на приведённый многочлен первой степени $x-a$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$.

Следствие 3. Число корней не превосходит степени многочлена.

В) Ненулевой многочлен (имеющий ненулевые коэффициенты) в Z_p может представлять функцию, тождественно равную нулю. Пример: многочлен $f(x)=x^p+(p-1)x$ (малая теорема Ферма). Если два многочлена, степени меньше p, совпадают как функции на Z_p, то они равны (имеют одинаковые наборы коэффициентов).

Задачи для самостоятельного решения

1. *Сколько существует многочленов степени n с коэффициентами в Z_p?*

2. *Разложите на множители меньшей степени многочлен $f(x)=x^3+x+1$ с коэффициентами в Z_3.*

3. Тот же вопрос п*ро многочлен $f(x)=x^p+(p-1)x$ с коэффициентами в Z_p.*

4. *Поделите с остатком многочлен x^3+x^2+x+2 на многочлен $2x^2+2x+1$ с коэффициентами в Z_3.*

5. *Пусть $\varphi-$ произвольная функция, сопоставляющая каждому элементу множества Z_p элемент того же множества. Тогда найдётся такой многочлен $f\in Z_p[x]$, для которого при любом $c\in Z_p$ $f(c)=\varphi(c)$. (Другими словами, на множестве Z_p не имеет смысла рассматривать никакие функции кроме многочленов!)*

Эта задача решается ссылкой на интерполяционную теорему, которая полностью переносится на многочлены с коэффициентами в Z_p.

6. *Постройте многочлен степени не выше* $p-2$ *с коэффициентами в* Z_p*, принимающий значения* $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots, (p-2)^{-1}, -1$ *в точках* $1, 2, \ldots, p-1$ *соответственно.*

Дополнение

В этом разделе представлены материалы занятия, также связанные с рассматриваемой проблематикой: изучение функций за пределами математического анализа. Однако здесь не циклы занятий, а именно отдельные занятия по выбранным темам. Этот материал, в среднем, сложнее предыдущего и подходит, как правило, для спецкурсов и кружковых занятий.

Дополнение 1. Бинарные операции как функции 2 переменных

Как тема для занятия школьников, эта тема выглядит неожиданно и даже странно. Однако, она чрезвычайно полезна, поскольку уводит от весьма распространённого среди школьников архаического взгляда на алгебру, как на искусство решения уравнений и неравенств, и даёт представление об ином, гильбертовском взгляде на эту науку (исследование множеств с заданными на них операциями). Практика показывает, что это занятие проходит при большом интересе школьников даже в качестве вводного занятия к курсу «Дополнительные главы алгебры-9», как его автор обычно и проводит. Особенно интересно, что некоторые из представленных задач успешно предлагались на олимпиадах разных уровней.

Бинарная операции на множестве, как функции двух переменных

А) **Операции на множестве чисел.**

Пусть дано некоторое множество чисел M. Оно может состоять из целых, положительных или совершенно произвольных чисел. Будем говорить, что на нём определена операция, если есть правило, которое сопоставляет любым двум элементам этого множества какой-нибудь элемент этого же множества.

Замечание. Операции вычитания на множестве всех положительных чисел не существует. А операция деления существует. Зато она не существует на множестве всех целых чисел и даже на множестве всех ненулевых целых чисел.

Мы привыкли к тому, что первичные операции (сложение и умножение) обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Но другие, тоже вполне естественные, операции этими свойствами не обладают. Например, вычитание и деление. Вычитание зато обладает свойством антикоммутативности $x \cdot y = -(y \cdot x)$.

Упражнение 1. *Проверить следующие операции на ассоциативность и коммутативность.*

1. $M = N;\ x \cdot y = x^y$.

2. $M = N;\ x \cdot y = НОД(x, y)$.

3. $M = R;\ x \cdot y = x + y - xy$.

Число 1 обладает замечательным свойством: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для любого числа x. Отсюда определение. Число e называется единицей относительно операции * (звездочка), заданной на множестве M, если для любого элемента m множества M выполнено условие $e \cdot m = m \cdot e = m$. Обычно единицу мы будем искать для коммутативно-ассоциативных операций.

Упражнение 2. *Проверить следующие операции на наличие единицы.*

1. $M = R;\ x \cdot y = x + y$.

2. $M = N;\ x \cdot y = НОД(x, y);\ M = N;\ x \cdot y = НОК(x, y)$.

3. $M = R;\ x \cdot y = x + y - xy$.

Число $1/2$ называется обратным к числу 2, потому что $1/2 \cdot 2 = 1$. Отсюда определение. Пусть на множестве M задана операция * (звездочка) с единицей e, и m — произвольный элемент множества M. Элемент x того же множества называется обратным к m, если выполнено равенство $x \cdot m = e$.

Упражнение 3. *Проверить операции на выполнение следующего свойства: каждый элемент имеет обратный.*

1. $M = R;\ x \cdot y = x + y$.

2. $M = N;\ x \cdot y = НОК(x, y)$.

3. $M = R;\ x \cdot y = x + y - xy$.

Б) **Операции на подмножествах некоторого множества X.**

Две такие операции хорошо известны: объединение и пересечение. Добавим к ним ещё одну коммутативную операцию «симметрическая разность»: $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ (объединение двух дополнений).

Упражнение 3. *Проверьте объединение и пересечение на ассоциативность, существование единицы, существование обратного элемента у любого.*

Задачи для самостоятельного решения

1. *На множестве R определена операция, обладающая следующими свойствами: $x\cdot x=0$, $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)+z$ x*(y*z). Найдите $2000\cdot 1957$.*

2. *На множестве всех целых чисел определена ассоциативная антикоммутативная операция. Доказать, что для любых элементов этого множества x, y, z выполнено условие $(x\cdot y)\cdot z=0$.*

При решении этой задачи важно следить, чтобы не выносили необоснованно минус за скобки.

3. *(Кубок памяти А.Н. Колмогорова) Для положительных чисел m, n введем обозначение $m\cdot n=\dfrac{m+n}{mn+4}$. Найдите значение выражения $((\ldots((2017\cdot 2016)\cdot 2015)\cdot\ldots\cdot 2)\cdot 1$.*

4. *(Санкт-Петербургские олимпиады) На множестве всех целых неотрицательных чисел определена операция * (звездочка), обладающая следующими свойствами: $0\cdot y=y+1$, $(x+1)\cdot 0=x\cdot 1$, $(x+1)\cdot(y+1)=x\cdot((x+1)\cdot y)$. Найдите: $3\cdot 2018$; $4\cdot 2018$.*

5. *(Всероссийская математическая олимпиада, заключительный этап) На множестве всех действительных чисел определена операция, обладающая следующим свойством: $(x\cdot y)\cdot z=x+y+z$. Докажите, что эта операция есть обычное сложение.*

6. *В теории относительности скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта вычисляется по закону* $\dfrac{v+u}{1+\dfrac{vu}{c^2}}$.

Докажите, что тем самым мы получим операцию на интервале $(-c, c)$. *Будет ли этот операция удовлетворять условию ассоциативности? Верно ли, что существует единица? Верно ли, то каждый элемент имеет обратный?*

7. *Проверьте симметрическую разность на ассоциативность, существование единицы, существование обратного элемента у любого.*

Дополнение 2. Функция Мёбиуса

Конечно, есть все основания отнести функцию Мёбиуса к арифметическим функциям. Однако, мы решили выделить эту разработку в данный раздел, поскольку, во-первых, она существенно сложнее представленного в разделе «Арифметические функции», а во-вторых, в ней развивается теоретико-групповой подход (обратимость элемента относительно операции), что очень важно и никак не связано с остальными занятиями раздела. Изучение функции Мёбиуса даёт большой простор для исследовательской активности школьников, что иллюстрирует, к примеру, статья [6] ученика 10-го класса (к моменту написания) школы 57 г. Москва Дмитрия Воловича.

Произведение дирихле. Формула обращения Мёбиуса. Функция Мёбиуса.

Рассмотрим обычную операцию умножения на множестве формальных степенных рядов $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots$ Эта операция задаётся формулой $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$ и определяет структуру группы на множестве всех рядов с ненулевым свободным членом (каждый такой ряд обратим).

Мы будем рассматривать ряды с целыми коэффициентами и на множестве таких рядов введём похожую операцию, в которой сложение индексов заменяется на умножение $c_k = \sum_{ij=k} a_i b_j$. Эта операция выглядит довольно искусственно, к тому же перемножать конкретные ряды бывает неудобно. Ситуация станет выглядеть более естественной, если мы будем смотреть на ряды, как на функции $f : N \cup \{0\} \to Z$, $f(i) = a_i$. Значение данной функции в произвольной точке k равно коэффициенту при соответствующей степени переменного. На языке арифметических функций умножение запишется следующим образом: $(f \cdot g)(k) = \sum_{ij=k} f(i)g(j)$. Эту операцию на множестве арифметических функций (или рядов) мы будем называть **свёрткой** или **произведением Дирихле**. Используя такой язык, умножать гораздо легче. Рассмотрим, например, следующие весьма естественные функции: $1(n) = 1$, $Id(n) = n$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Выпишите ряды, соответствующие данным функциям.*

2. *Найдите произведения $1 \cdot Id$; $1 \cdot 1$; $Id \cdot Id$ (сумма делителей; число делителей; произведение числа на число его делителей).*

3. *Доказать, что операция свёртки ассоциативна и коммутативна.*

4. *Найти единичный элемент относительно произведения Дирихле (функция, отображающая 1 в 1, а остальные числа в ноль).*

5. *Найти все арифметические функции, обратимые (имеющие обратный элемент) относительно произведения Дирихле.*

6. *Найти обратный относительно произведения Дирихле элемент к функции 1. (Ищем значение функции 1^{-1} в точках 1, 2, 3, p, p^2, p^k, 6, $p_1 p_2$, $p_1 p_2 \dots p_k$, произвольное натуральное n).*

Определение. Функция μ, обратная относительно произведения Дирихле к функции 1^{-1} называется функцией Мёбиуса.

Формула обращения Мёбиуса

Пусть для некоторых арифметических функций F, f выполнено равенство $F = f \cdot 1$. Тогда $f = F \cdot \mu$.

Пусть для некоторой неизвестной арифметической функции f известна функция $F(n)=\sum\limits_{n \vdots d} f(d)$. Тогда функцию f можно восстановить по формуле $f(n)=\sum\limits_{ij=k} F(i)\mu(j)$.

Смысл: если мы умеем суммировать значение арифметической функции по всем делителям произвольного натурального числа, то с помощью данной формулы умеем находить её значение в произвольной точке.

Важно именно существование формулы, поскольку возможность нахождения значений можно увидеть, просто выписывая бесконечную систему уравнений. Использовать эту формулу трудно, но возможно в некоторых классических случаях. Что мы сейчас и продемонстрируем на самом простом примере.

Первообразные корни из единицы

Комплексный корень из 1 степени n называется первообразным корнем степени n, если ни в какой меньшей степени с натуральным показателем он не равен 1.

Каждый корень из 1 есть первообразный корень из 1 какой-нибудь степени!

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найдите все первообразные корни из 1 степени 2, 3, 4.*

2. *Пусть корень из 1 степени n является первообразным корнем из 1 степени m. Докажите, что n делится на m без остатка.*

3. *Докажите, что все корни из 1 степени n есть степени данного первообразного корня степени n.*

4. *Докажите, что число первообразных корней из 1 данной степени n равно количеству чисел, меньших n и взаимно простых с ним.*

5. *Чему равна сумма всех комплексных корней из единицы степени n? Произведение всех комплексных корней из единицы степе-*

ни n? Произведение всех первообразных комплексных корней из единицы степени n?

6. *Чему равна сумма всех первообразных комплексных корней из единицы степени 3,4,6?*

7. *Обозначим через $\lambda(n)$ сумму всех первообразных комплексных корней из единицы степени n. Доказать, что $\sum\limits_{n \vdots d} \lambda(d)=0$ при $n \neq 1$.*

8. *Чему равна сумма всех первообразных корней из 1 данной степени n? Указание: используйте формулу обращения Мёбиуса.*

Другие применения формулы обращения хорошо известны: цикличность мультипликативной группы вычетов по простому модулю, существование и количество неприводимых многочленов над Z_p и т.д. Однако их рассмотрение требует более глубоких алгебраических знаний, и мы этим здесь заниматься не будем.

Дополнение 3. Лемма Коши-Бернсайда

Эту утверждение называют чаще всего леммой Бернсайда, а иногда леммой Коши-Бернсайда-Фробениуса. Однако мы считаем наиболее справедливым упоминание двух авторов, поскольку Коши её впервые доказал, а Бернсайд впервые опубликовал доказательство. Этой темой обычно заканчивается изучение групп подстановок для школьников. Однако, если вся тема хорошо подходит для восьмиклассников, то лемму Коши-Бернсайда лучше изучать в девятом. По крайней мере, так нужно делать, если мы хотим обеспечить активность школьников и не сбиться на лекционный формат.

Занятие 1. Подготовительный материал и формулировка

Краткое обсуждение. Группой подстановок называется произвольное множество подстановок, замкнутое относительно композиции (если два элемента принадлежат группе, то и их композиция принадлежит). Примеры: группа степеней элемента, группа самосовмещений многоугольника (как группа подстановок на множестве вершин), группа вращений тетраэдра (аналогично).

1. Любая группа подстановок содержит тождественную подстановку и подстановку, обратную к любому своему элементу.

2. Орбитой группы подстановок называется множество чисел (или точек), которые переводятся друг в друга с помощью элементов этой группы. Примеры: все орбиты подгруппы степеней цикла $(1\,2\,3)$ в S_4; группы самосовмещений ромба; группы самосовмещений треугольника.

3. Группа, имеющая ровно одну орбиту, называется **транзитивной**.

4. Пусть G — произвольная группа подстановок n – элементного множества.

Стабилизатором произвольного числа $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ называется множество всех элементов этой подгруппы, оставляющих элемент i на месте. Стабилизатор любого элемента есть подгруппа. Те же примеры. Стабилизатор любой вершины тетраэдра состоит из трёх элементов (вращений относительно высоты, проходящей через данную вершину).

5. Две меры «мощности» группы подстановок: число орбит и среднее число неподвижных элементов. Сравниваем на примерах групп, приведённых выше.

Комментарий. Под мощностью данной группы подстановок естественно понимать её способность перемешивать элементы. Какими числовыми величинами мы можем выразить это понятие? Во-первых, это среднее число неподвижных точек элементов — чем их меньше, тем мощнее группа. Во-вторых, число её орбит — аналогично, группа тем сильнее перемешивает элементы, чем меньше у неё орбит. Ясно, что эти величины должны быть жёстко связаны. Но как? Лемма Коши-Бернсайда показывает, что они просто равны.

6. **Лемма Коши-Бернсайда (формулировка)**. Число орбит произвольной группы подстановок равно среднему числу её неподвижных элементов.

7. Проверяем на примере групп подстановок, разобранных выше.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Некоторая группа подстановок содержит n элементов, m из которых оставляют на месте число 1. Доказать, что n делится на m без остатка. Что представляет собой их частное?*

2. *Докажите лемму об индексе стабилизатора. Произведение порядка стабилизатора произвольного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ на порядок его орбиты равно порядку группы G.*

3. *Имеется сделанный из проволоки правильный тетраэдр и краски двух цветов. Сколькими способами можно раскрасить его вершины?*

4. *Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него четырьмя белыми и шестью чёрными шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено (переворачивать погремушки нельзя)?*

5. *Тот же вопрос,, если переворачивать можно.*

6. *Сколько различных шестиугольников можно вписать в правильный 15-угольник?*

7. *Имеется сделанный из проволоки куб и краски двух цветов. Сколькими способами можно раскрасить его вершины?*

8. *Тот же вопрос про рёбра куба.*

Занятие 2. Доказательство леммы

Первый случай: группа действует транзитивно.

Рассмотри множество пар следующего вида $\{<g, i>| \quad g \in G$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $g(i) = i\}$. Число таких пар как раз и равно $\sum_{g \in G} \eta(g)$, где $\eta(g)$ — число неподвижных точек элемента g. С другой стороны, оно равно сумме

$$\sum_i |St(i)| = \sum_i \frac{|G|}{|O(i)|} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|G|}{n} \right) = \frac{|G|}{n} \cdot n = |G|,$$

что и доказывает лемму. Значит, при транзитивном действии среднее число неподвижных точек равно единице, что и составляет содержание леммы в транзитивном случае. Первое равенство цепочки вытекает из леммы об индексе стабилизатора.

Второй случай: общий.

Рассуждаем аналогичным образом, то есть, считаем число пар того же вида. Это даёт следующие равенства $\sum_{g\in G}\eta(g)=\sum_i |St(i)|=\sum_i \frac{|G|}{|O(i)|}$. Посчитаем последнюю сумму. Те слагаемые, которые соответствуют элементам, лежащим в одной орбите, одинаковы и равны порядку этой орбиты. Их количество тоже равно порядку этой орбиты. Это значит, что сумма всех таких слагаемых равна порядку группы, а вся сумма равна числу орбит, умноженному на порядок группы. Приходим к следующему выводу: среднее число неподвижных точек при действии конечной группы на конечном множестве равно числу орбит относительно этого действия. Подробный разбор леммы можно найти, например, в прекрасной и, к сожалению, недостаточно хорошо известной книге [7].

Задача об ожерельях

1. *Круг разбит на p равных секторов. Сколькими способами можно раскрасить этот круг в n различных цветов, если раскраски, которые переводятся друг в друга поворотом круга, считаются одинаковыми?*

Понятно, что задача 1 даёт известное комбинаторное доказательство малой теоремы Ферма.

2. *Даны натуральные числа n и k, причём $k<n$. Множество всевозможных остатков от деления на n разбивается на подмножества, состоящие из чисел, дающих одинаковые остатки от деления на k. Сколько различных подмножеств получится?*

3. *Имеется неограниченный запас жемчужин q различных цветов. Требуется составить ожерелье, состоящее из n жемчужин. Два ожерелья считаются одинаковыми, если одно получается из другого некоторым поворотом. Докажите, что число различных* *ожерелий можно найти по любой из формул* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} q^{НОД(k,n)} = \frac{1}{n}\sum_{n \vdots d} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) q^{d}$.

Этот текст вырос из доклада автора на семинаре учителей математике в Майкопе. Автор выражает глубокую благодарность за ценные замечания руководителю семинара А.Д. Блинкову и академику РАН Л.Д. Беклемишеву.

Литература

1. Виленкин Н.Я. Как возникло и развивалось понятие функции // Квант. – 1977. – №7. – С. 41-45.

2. Давидович Б.М., Пушкарь П.Е., Чеканов Ю.В. Математический анализ в 57-й школе. Четырехгодичный курс. – М.: МЦНМО, 2008.

3. Калжниннин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки – М.: Физматлит, 1985.

4. Шень А. Перестановки – М.: МЦНМО, 2022.

5. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел – М.: Мир, 1974.

6. Волович Д.Е. Обобщение свойств функции количества делителей // Математическое образование. – 2023. – №1. – С. 2-7.

7. Дужин С.В., Чеботаревский Б.Д. От орнаментов до дифференциальных уравнений. Популярное введение в теорию групп преобразований – Минск: Вышэйшая школа, 1988.

Содержание