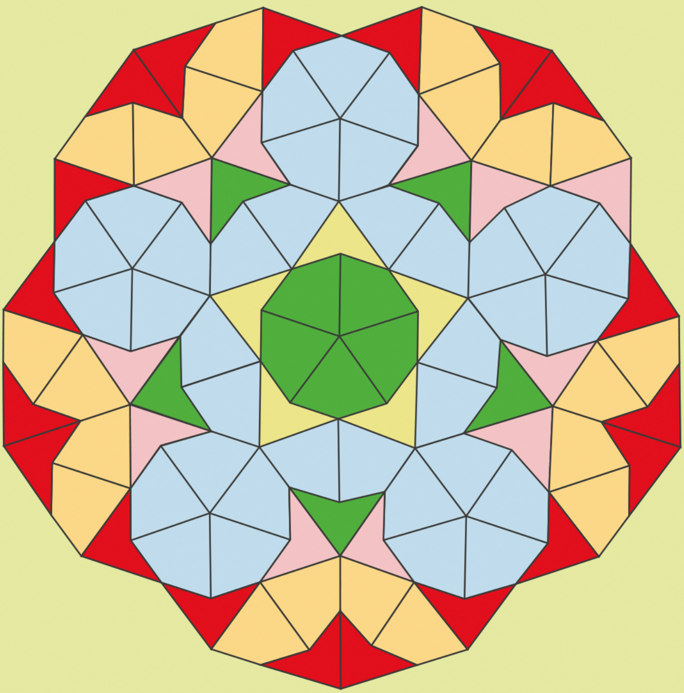
УЧИМ МАТЕМАТИКЕ 13



Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Учим математике - 13

Материалы открытой школы-семинара
учителей математики

Под редакции А.Д. Блинкова и П.В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2025

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

Учим математике-13. Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2025. — 128 с.

У92

ISBN 978-5-4439-1931-7

В сборнике представлены избранные материалы тринадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики. Семинар прошел в Казани с 29 апреля по 5 мая 2024 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-13
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Оригинал-макет: *А. Обрубов*, *А. Ширяева*, *А. Чехович*, *П. Чулков*

Подписано в печать 18.03.2025 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 8 печ. л. Тираж 250 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии «Белый ветер».

6+

ISBN 978-5-4439-1931-7

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы тринадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики, а также некоторые другие. Этот семинар прошел в Казани с 29 апреля по 5 мая 2024 года. Организаторами семинара являлись Казанский федеральный университет, Управление образования г.Казани, ГАОУ «Республиканский олимпиадный центр» Министерства образования и науки Республики Татарстан, АНО ДО «Казанский математический центр», СУНЦ IT-лицей КФУ, ОШИ «Лицей им. Н.И. Лобачевского» КФУ, МАОУ «Лицей № 131», СУНЦ Инженерный лицей-интернат КНИТУ-КАИ, ДОЛ «Дуслык», АНО «Естественно-математический центр», ГАОУ ДПО «Центр Педагогического Мастерства» г. Москвы (ЦПМ) и Московский Центр Непрерывного Математического Образования (МЦНМО) совместно с Всероссийской ассоциацией учителей математики.

Материалы предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022, 2023, 2024 гг. Кроме того, эти материалы можно найти в интернете по адресу https://mccme.ru/nir/seminar/conf.htm. Там же размещены видеозаписи некоторых лекций и докладов.

В семинаре могли принять участие все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие около 150 человек, представлявших разные уголки России. Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение школы-семинара дало прекрасную возможность его участникам познакомиться с работой ведущих школ Казани. В них проходили мастер — классы со школьниками. Эти мастер-классы проводили как ведущие учителя этих школ, так и специально приглашённые преподаватели. Проведенные занятия «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия также проводили приглашенные опытные преподаватели. Кроме того, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, некоторые участники семинара имели возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением.

По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от МЦНМО. Успешное проведение школы-семинара обеспечили представительные программный и организационный комитеты.

Программный комитет семинара

- Ященко И.В. – научный руководитель ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики ЦО «Пятьдесят седьмая школа» г. Москвы, кандидат физико-математических наук, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – председатель;
- Блинков А.Д. – методист ЦПМ, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – заместитель председателя;
- Андреев Н.Н. – заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых учёных, создатель проекта «Математические этюды», член Координационного Совета Кавказской математической олимпиады, лауреат Золотой медали РАН за пропаганду научных знаний, лауреат премии Лиловати международного математического конгресса 2022 г., кандидат физико-математических наук;
- Кожевников П.А. – председатель Задачного комитета Кавказской математической олимпиады, кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, старший научный сотрудник лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, член тренерского совета национальной команды России на международной математической олимпиаде, заместитель главного редактора по математике журнала «Квант», член Центральной предметной методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике, золотой медалист международной математической олимпиады 1992 года;
- Столбов К.М. – заместитель директора и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга, Почетный работник общего образования РФ;

- Чулков П.В. – доцент кафедры элементарной математики МПГУ, заместитель директора ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ;
- Турилова Е.А. – проректор Казанского федерального университета, директор Института математики и механики, заведующий кафедрой математической статистики, д.ф.-м.н.
- Лазарева Л.Ю. – директор АНО «Естественно-математический центр»;
- Мухаметов И.Р. – директор СУНЦ IT-лицей КФУ;
- Скобельцына Е.Г. – директор ОШИ «Лицей им. Н.И. Лобачевского» КФУ; к.п.н., Почетный работник образования РФ;
- Хабибуллина А.Б. – директор МАОУ «Лицей № 131», Заслуженный учитель РТ;
- Габидуллин Динар Дамирович – директор СУНЦ Инженерный лицей-интернат КНИТУ-КАИ;
- Исламова Гульнара Ильдаровна – директор ГАОУ «Республиканский олимпиадный центр» МОиН РТ; Заслуженный учитель РТ.

Организационный комитет семинара

- Блинков А.Д. – методист ЦПМ, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – председатель;
- Наконечный Н.А. – учитель математики, руководитель проекта Управления развития талантов и обучения Московского кредитного банка – координатор и секретарь семинара;
- Зубарева С.И. – учитель математики школы №218 г. Москвы – координатор и секретарь семинара;
- Эдлин Ю.М – учитель математики Академического лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга – координатор и секретарь семинара;
- Володина А.И. – педагог дополнительного образования АНО «Естественно-математический центр», учитель математики ОШИ «Лицей им. Н.И. Лобачевского» КФУ – координатор семинара;

- Мигаев С.В. – педагог дополнительного образования АНО «Естественно-математический центр», учитель математики СУНЦ IT-лицей КФУ, координатор семинара;
- Азимуратов Ш.Б. – заместитель директора по учебной работе СУНЦ IT-лицей КФУ;
- Сергеев К.М. – учитель математики МАОУ «Лицей № 131», педагог дополнительного образования АНО «Естественно-математический центр», координатор семинара;
- Пестова А.В. – заместитель директора по методической работе СУНЦ Инженерный лицей-интернат КНИТУ-КАИ;
- Хасанова С.А. – заместитель директора ГАОУ «Республиканский олимпиадный центр» МОиН РТ.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершать прогулки и экскурсии по Казани, посетить музеи. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом. Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем, кто нашел силы и время подготовить статьи для этого сборника. Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда отличаются от названий докладов.

Программа XIII открытого семинара учителей математики

28 апреля	Заезд участников, проживающих в ДОЛ «Дуслык»

29 апреля СУНЦ IT-лицей КФУ	
Время	**Докладчики, содержание**
9.00 – 9.45	Регистрация участников Кофе-брейк Экскурсия по лицею
9.45 – 10.30	**И.В. Ященко, А.Д. Блинков, И.Р. Мухаметов, С.И. Зубарева** Открытие семинара Организационная информация
10.30 – 11.45	**А.М. Райгородский** Избранные задачи комбинаторики и теории графов
12.00 – 13.00	**И.В. Ященко** Нужна ли математика в век искусственного интеллекта?
13.00 – 13.30	Обед
13.30 – 14.30	**К.А. Сухов** Чему надо и чему не надо учить на математическом кружке начального уровня
14.45 – 15.45	**Ю.А. Блинков** Прямоугольный треугольник. Точки касания
16.00 – 16.45	**Е.А. Турилова, М.М. Арсланов** 220 лет Казанской математической школы

30 апреля СУНЦ IT-лицей КФУ		
Мастер-классы 10.00 – 10.40; 10.55 – 11.35		
Преподаватель	Класс	Тема
М.Ю. Ляшко	10-4	Математика для физика
Ю.А. Блинков	8-1	Четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями

А.И. Сгибнев	9-1	Геометрия на листе бумаги
К.М. Столбов	9-2	Комбинаторика
Н.П. Стрелкова	10-1	Шевелим стереометрию
К.А. Сухов	7-1, 7-2	Морской бой и раскраски
Л.Р. Махмутова	10-5	Функциональные стили речи (литература)
Н.Г. Мирсаитов	10-2	Вода и ее роль в жизнедеятельности клетки (биология)
И.Н. Барышев	8-2	Решение задач с параметром
11.45 - 12.25; 12.35 - 13.15		
Преподаватель	Класс	Тема
А.С. Мишина	10-4	Кубические пирамиды
Ю.А. Блинков	9-2	Ортоцентр треугольника и угол 60 градусов
И.Р. Высоцкий	8-1	Эксперимент. Сходимость частоты и вероятности
Д.Г. Мухин	10-5	Тригонометрия
Н.П. Стрелкова	7-1, 7-2	Шевелим геометрию
К.А. Сухов	10-1	Геометрия параболы
В.Н. Дубровский	11-1, 11-3, 11-4	Метод проекции (лекция, 3 класса)
Обед		

Время	**Докладчики, содержание**
14.00 – 15.30	**В.Н. Дубровский** Математический конструктор сегодня
15.45 – 16.00	**А.И. Сгибнев** Обзор ресурсов в помощь учителю математики
16.00 – 16.45	**Н.П. Стрелкова** Эксперименты с формами обучения в 10 классе

1 мая — Выходной день

2 мая МАОУ «Лицей № 131»		
Время	**Докладчики, содержание**	
9.30 – 10.00	**А.Б. Хабибуллина** Приветственное слово	
Мастер-классы 10.00 – 10.45; 10.55 – 11.40		
Преподаватель	Класс	Тема
А. Б. Зеличёнок	10В	Применение метода координат и аналитической геометрии к решению стереометрических задач
А.Н. Юматова	8Д	Площади
К.М. Сергеев	8А	Ортоцентр и ортотреугольник
К.М. Столбов	8Б	Треугольник Паскаля
И.Р. Высоцкий	9Г	Дерево случайного опыта, условная вероятность. Парадокс трёх заключенных
И.Н. Барышев	7Б	Графы
Г.А. Мерзон	10Г	Арифметика и тригонометрия
Н.А. Наконечный	8Г	Многоугольники в комбигеометрии
Н.М. Цепкова	11Б	Критические точки. Производная, исследование функций
Кофе-брейк		
Мастер-классы 12.00 - 12.45; 12.55 - 13.40		
Преподаватель	Класс	Тема
Е.А. Хохрякова	11В	Применение свойств функций к решению задач с параметрами
Е.М. Бородова	9А	Решение текстовых задач
И.В. Диянова	9Б	Построение графиков и задачи с параметром
Г.А. Мерзон	8А	Разбиение на доминошки
Н.А. Наконечный	7А	Числа Фибоначчи

Л.В. Баева	10Б	Теорема о трёх перпендикулярах
Н.Н. Андреев	9Г, 10Г	Конические сечения: эллипс, парабола, гипербола (лекция, 2 класса)

Время	**Докладчики, содержание**
13.40 – 14.10	Экскурсия по школе
14.10 – 15.00	Обед
15.00 – 16.00	**И.Р. Высоцкий** Две задачи о взаимном выборе
	К.М. Столбов Контрпримеры в анализе
16.15 – 17.15	**Б.К. Курамшин** О математике в химии
	П.В. Чулков Задачи олимпиадной алгебры

Банкет для участников семинара

3 мая СУНЦ Инженерный лицей-интернат КНИТУ-КАИ		
Мастер-классы 10.00 – 10.45; 11.00 – 11.45		
Преподаватель	Класс	Тема
И.И. Авхадиев	8Б	Общее среднее
В.З. Фаттахова	8А	Корни многочлена. Теорема Безу
С.И. Зубарева	6Б	От поворотной геометрии к задачам на разрезание
Д.Э. Шноль	9Б	Виды графиков дробно-квадратичных функций
Г.И. Вольфсон	6А	Делимость в нестандартных задачах
И.Н. Барышев	7А	Дополнительные построения (геометрия)
Д.В. Прокопенко	9А	Разрезание и перекладывание отрезков

А.Е. Панкратьев	11	Использование свойств функций при решении задач
Е.А. Труфанова	10	Динамический урок геометрии
Экскурсия по школе Обед		

Централизованный переезд в Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева (КАИ)

Время	Докладчики, содержание
14.15 – 14.30	**Д.Д. Габидуллин** Приветственное слово
14.30 – 15.30	**А.Г. Дьяконов** Игра с картинками – как научиться читать инфографику и визуализации (интерактивная лекция)
15.45 – 17.15	**Е.А. Труфанова** Урок геометрии в инженерном классе
15.45 – 16.45	**А.Е. Панкратьев, В.В. Панкратьева** Клоны, близнецы и двойняшки одной задачи
	И.Н. Барышев Курс наглядной геометрии в 5-6 классах
16.45 – 17.30	**А.Т. Енгоян, Д.В. Швецов** О гранте для учителей старших классов от «Тинькофф»
	Д.Э. Шноль Развивающая математика в 5-6 классах без отбора

4 мая ОШИ «Лицей им. Н.И. Лобачевского» КФУ	
Время	**Докладчики, содержание**
10.00 – 10.20	**Е.Г. Скобельцына** Приветственное слово
Мастер-классы 10.20 – 11.00; 11.20 – 12.00	

Преподаватель	Класс	Тема
Д.С. Бисеров	10А	Монотонность в уравнениях с параметром

Н.В. Тележников, Т.А. Тарасов, Д.С. Цумарев	7	Лазерная резка на уроках технологии
О.С. Дунаева	10Е	Практикум по решению тригонометрических уравнений
С.А. Ерышева	7М	Решение систем уравнений
Е.А. Сошникова	6В	Красота и симметрия (мультипликация)
Д.В. Прокопенко	10М	Равные вписанные углы с общей вершиной
Л.В. Баева	9А	Иррациональные уравнения
Е.А. Труфанова	9В	Если рассмотреть параллелограмм
А.С. Зигангареева	5А	Математические головоломки
Кофе-брейк		
Мастер-классы 12.20 – 13.00; 13.20 – 14.00		
Преподаватель	Класс	Тема
Б.Р. Хисматов	10В	Технологические релевантности сквозных цифровых технологий: большие данные, графический дизайн, машинное обучение
Г.И. Вольфсон	10А	Замена переменной в уравнениях
Д.В. Швецов	10М	Угол в квадрате
Д.И. Ефремов	5А	Уравнения и задачи с обыкновенными дробями
А.Е. Панкратьев	9В	Геометрическое решение задач на движение
Д.С. Билалова	9А	Финансовая и математическая грамотность на уроках истории
Н.Н. Андреев	8А, 8В, 8С, 8М	Математика и музыка (лекция, 4 класса)

Время	Докладчики, содержание
14.00 – 14.30	Экскурсия по школе
14.30 – 15.00	Обед
15.00 – 16.30	**В.Н. Дубровский** Математическое моделирование для школьников
16.45 – 17.30	**О.Д. Огородникова** Игра как средство активизации интереса к математике на занятиях математического кружка
	Д.В. Швецов Исследовательские задачи на уроках
17.30 – 18.15	**Д.С. Билалова** Историческая игра «Он очень любил математику»
	Д.С. Бисеров Об особенностях проверки ЕГЭ в Татарстане

5 мая СУНЦ IT-лицей КФУ	
Время	**Докладчики, содержание**
9.30 – 10.00	**Н.Н. Андреев** Натягивание ниточек: и математика, и физика, и искусство
10.00 – 10.45	**Г.А. Мерзон, Д.В. Швецов** От окружностей к коникам
10.45 – 11.00	Кофе-брейк
11.00 – 12.30	**Д.В. Прокопенко** Треугольники и четырёхугольники, вписанные в окружность
12.45 – 13.30	**Г.И. Вольфсон** Мнемотехника в математике
13.45 – 15.00	**А.Д. Блинков, С.И. Зубарева** Подведение итогов и закрытие семинара

Как я учу решать квадратные уравнения

А.И. Сгибнев,
г. Москва, школа «Интеллектуал»
a.i.sgibnev@gmail.com

Квадратные уравнения — тема важная и непростая. Ученики впервые одновременно встречаются с ветвящимся алгоритмом, довольно сложными формулами и выбором из нескольких методов решения. Здесь я излагаю план изучения темы «Квадратные уравнения», который сложился у меня. Большая часть находок не придумана мной, а собрана от разных учителей и из разных книг, тем не менее, полезно это зафиксировать в одном тексте. Здесь будут изложены самые базовые вопросы. Качественно изучив их, ученик легко перейдёт к сложным задачам и продвинутым темам.

Простейшее уравнение, корень, квадраты

Начнём с уравнения $x^2 = 4$. Разумному школьнику более-менее понятно, что у него есть два решения: $x = 2$ и $x = -2$. А как насчёт уравнения $x^2 = 5$? Мы быстро понимаем, что целого числа, квадрат которого даёт 5, не существует, но вообще такое число есть, его называют $\sqrt{5}$. По аналогии с предыдущим примером понятно, что решений два: $x = \sqrt{5}$ и $x = -\sqrt{5}$.

Отметим, что в российской терминологии одним и тем же словом «корень» неудачно обозначают **два разных понятия**: «решение уравнения» и «радикал — число, квадрат которого равен данному». Это приводит к путанице, когда школьники считают, что $\sqrt{5}$ — запись сразу для обоих решений уравнения $x^2 = 5$. Полезно 1) в контексте уравнения пользоваться термином «решение», 2) опираться на аналогию с уравнением $x^2 = 4$ и подчёркивать, что $\sqrt{5}$ — это число, имеющее такие же «права», как 2.

Здесь (или ранее, при работе с квадратными корнями), полезно изучить способ устного извлечения корней из квадратов.

1) Запоминаем таблицу натуральные чисел, кратных 5:

n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
n^2	25	100	225	400	625	900	1225	1600	2045	2500

2) Локализуем число, из которого надо извлечь квадратный корень, между двумя квадратами из таблицы

3) По последней цифре числа подбираем нужный вариант.

Например, надо найти $n=\sqrt{1681}$. Имеем $1600<1681<2025$. Значит, $40<n<45$. Ясно, что n нечётное. Так как 43^2 кончается на 9, а 41^2 кончается на 1, то подходит только 41.

Важно! Этот способ выдаёт **кандидат** в целые ответы. Если нам гарантировали, что ответ целый, то это он и будет. Если нет, то надо ещё возвести наш кандидат в квадрат и проверить. Например, для $\sqrt{2109}$ наш способ даёт: $2025<2109<2500$, т.е. $45<n<49$. По последней цифре получаем кандидат 47. Но $47^2=2209$, значит, искомый корень нецелый.

Даём упражнения на поиск корней описанным способом, например:

Найдите квадратные корни из чисел: 1) 529; 2) 1156; 3) 196; 4) 784; 5) 1089; 6) 1444; 7) 2204.* В таблицу квадратов, кратных 5, на первый раз можно подглядывать. (В пункте 7 корень нецелый!)

Закрепляем навык счёта, давая подобные упражнения раз в 2-3 урока.

Ещё один полезный способ запомнить много квадратов — работа в парах («жужжим»). На пару выдаётся одна таблица квадратов. Засекаем 4 минуты, первый ученик ведущий, он имеет доступ к таблице и спрашивает второго: «назови корень из 2809, назови корень из 1156», и т.д. Через 4 минуты ребята в паре меняются ролями. В результате каждый ученик вовлечён в процесс, либо как отвечающий, либо как контролирующий.

Квадраты натуральных чисел полезно помнить и в геометрии, при работе с теоремой Пифагора. Я прошу своих учеников первые шесть пифагоровых троек выучить наизусть.

Работа с определением

Даём общее определение квадратного уравнения (уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — числа, причём $a \neq 0$, x — неизвестное), выписываем на доску уравнения:

$$x^2+4=0$$
$$2x^2-6x=0$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$x^3-2x+1=0$$
$$-x^2+2x-4=0$$
$$x^2+x+\frac{1}{x}=0$$
$$x^2=0$$
$$(p+2)x^2-x+q=0$$

Просим определить, квадратные они или нет. Если нет, то почему? А если квадратные, то чему равны коэффициенты a, b, c? (В последнем уравнении ответ зависит от p, если $p \neq -2$, то уравнение квадратное, а если $p=2$, то линейное. См. раздел «Любимая ошибка».)

Даём определение полного и неполного, приведённого и неприведённого квадратного уравнения. Просим указать каждый тип среди примеров на доске.

Замечание. Выписывание коэффициентов a, b, c нам очень пригодится в дальнейшем, полезно сразу же научиться его делать безошибочно.

Неполные квадратные уравнения

Даны уравнения:

$$x^2+4x=0$$
$$x^2-4x=0$$
$$x^2+4=0$$
$$x^2-4=0$$
$$2x^2-7x=0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Спрашиваем школьников, как бы они их решили. Вспоминаем принцип «Произведение равно 0, когда один из множителей равен 0». Решаем неполные квадратные уравнение разложением на множители. В предпоследнем уравнении лучше вынести за скобку $2x$ — со старшим коэффициентом. Учимся выписывать ответы. Обсуждаем, сколько решений может быть у квадратного уравнения (пока на примерах).

Полные квадратные уравнения

Обсуждаем уравнение $x^2 + 4x + 4 = 0$. Его можно решить, как и предыдущие, разложив на множители: $(x+2)^2 = 0$, $x = -2$. Мы разложили левую часть на две скобки, но они оказались одинаковыми, поэтому решений не два, а одно.

А если поменять одно число? $x^2 + 4x + 3 = 0$. На ум приходит такое преобразование: $(x^2 + 4x + 4) - 1 = 0$, $(x+2)^2 - 1^2 = 0$, $(x+2-1)(x+2+1) = 0$, $x = -1; -3$.

Предложим школьникам аналогично решить такие уравнения:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

У последнего уравнения нет решений, и надо уметь объяснять почему, глядя на полный квадрат.

Далее — решительный момент: переход к общей формуле. Как его мотивировать? Предложим школьникам уравнение $29x^2 - 16x + 3 = 0\ (*)$ и спросим, сколько у него решений. Понятно, что выделить полный квадрат в принципе можно, но проводить все преобразования с такими числами не очень хочется. Давайте выделим полный квадрат в общем виде!

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Домножим обе части уравнения на $4a$ (это можно сделать, так как $a \neq 0$).

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,\ (2ax+b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0,$$

$$(2ax+b)^2 = D, \text{ где } D = b^2 - 4ac \text{ — дискриминант.}$$

Это слово не случайно похоже на слово «дискриминация». Дискриминация — это обособление, различение. Дискриминант — это «различитель», он различает квадратные уравнения по количеству решений.

1) Если $D < 0$, решений нет

2) Если $D = 0$, есть единственное решение: $(2ax+b)^2 = 0$, $x = \dfrac{-b}{2a}$

3) Если $D > 0$, есть два решения $(2ax+b)^2 = D > 0$, $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

(a выделено в формуле жирным, поскольку его часто забывают).

Здесь полезно спросить, а почему мы уверены, что на a можно делить.

Возвращаясь к нашему уравнению (*), вычисляем дискриминант $D = (-16)^2 - 4 \cdot 29 \cdot 3 = 256 - 12 \cdot 29 < 0$, значит, решений нет. Отметим, что отрицательный дискриминант необязательно досчитывать.

Алгоритм решения квадратного уравнения через дискриминант.

1) Выпишите коэффициенты a, b, c

2) Вычислите дискриминант

3) Если дискриминант отрицателен, решений нет

4) Если дискриминант равен нулю, выписываем одно решение

5) Если дискриминант положителен, пробуем представить его в виде квадрата целого числа (например, $D = 25 = 5^2$) и выписываем два решения.

6) Проверяем решения подстановкой в исходное уравнение.

Первый пункт важен на раннем этапе решения квадратных уравнений. Это отдельное действие, которое приучает правильно определять коэффициенты уравнения с учётом знака, не забывать единицу и т.д. На следующих этапах действие автоматизируется и будет происходить в голове.

Представление положительного дискриминанта в виде квадрата полезно, так как выносит в отдельное действие извлечение квадратного корня, которое иногда забывают сделать.

Последний пункт нужен, поскольку формулы здесь не самые простые и ошибки при вычислении решений регулярно происходят. Особенно важен навык «встроенной» проверки решений квадратных уравнений, когда это уравнение не само по себе, а является частью более сложной задачи (текстовая, разложение на множители, метод интервалов и т.д.) и гораздо лучше отловить ошибку сразу же по вычислении, а не через полстраницы.

Для отработки решаем стандартный набор квадратных уравнений, в том числе неприведённых (чтобы a в знаменателе «работало»). Начиная со второго этапа, даём вперемежку полные квадратные уравнения и неполные, чтобы школьники привыкали выбирать подходящий метод под конкретное уравнение.

Здесь же полезно внедрять и такую чисто вычислительную идею: если в уравнении $ax^2+bx+c=0$ старший коэффициент $a \neq 1$, и при этом $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ целые, то полезно разделить обе части уравнения на a (помним, что по определению $a \neq 0$).

Любимая ошибка

Задача. *При каком* p *уравнение* $px^2+2x+1=0$ *имеет единственное решение?*

Обычно школьники рассуждают так: «Раз квадратное уравнение имеет единственное решение, то дискриминант равен нулю. Имеем $2^2-4p=0$, $p=1$.»

Но этот ответ неполный! Ведь уравнение может быть и не квадратным, так как параметр стоит при старшей степени. Полезен такой диалог:

Учитель. Когда уравнение не является квадратным?

Школьники. Когда $p = 0$.

Учитель. Сколько у него решений в этом случае?

Школьники. Уравнение превращается в $2x + 1 = 0$, итого одно решение.

Учитель. Каков же ответ задачи?

Школьники. $p = 0$; $p = 1$.

Итак, при исследовании квадратных уравнений с параметром первым делом задаём себе вопрос: «Когда уравнение не является квадратным?»

Теорема Виета

Теорему Виета школьники в состоянии открыть сами, если дать им подходящий материал и задавать вопросы в нужном направлении. А самостоятельно добытое знание, как правило, лучше осознаётся и запоминается.

Будем работать в парах, каждой паре выдадим такой листок с заданием.

1) Даны 8 уравнений, решите их, проверьте себя подстановкой и заполните таблицу.

Уравнение	a	b	c	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 + 7x + 10 = 0$							
$x^2 - 16 = 0$							
$x^2 + 13x = 0$							
$x^2 + 6x + 7 = 0$							
$-x^2 + 5x + 24 = 0$							
$2x^2 - 5x + 2 = 0$							
$-2x^2 + 7x + 9 = 0$							
$3x^2 + 7x - 6 = 0$							

2) Найдите связь между столбцами таблицы.

3) Сформулируйте и докажите закономерность.

4) Сформулируйте утверждение, обратное к найденному вами. Верно ли оно?

Школьники видят, что в первых четырёх уравнениях (т.е. для приведённых уравнений) сумма корней равна $(-b)$, а произведение равно c. Но дальше закономерность «ломается», важно понять, как влияет старший коэффициент $\boldsymbol{a}$. Приходится её подкорректировать для общего случая.

Здесь критично важно решить уравнения правильно, так как ошибка в ответе помешает найти закономерность. Поэтому важно работать в паре и проверять друг друга. А ещё потому, что закономерности лучше искать вдвоём — требуется обсуждение.

Доказать закономерность из пункта 3) (разумеется, это теорема Виета) можно впрямую, записав два решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ и непосредственно проверив, что $x_1+x_2=-\dfrac{b}{\boldsymbol{a}}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{\boldsymbol{a}}$. Но есть важная оговорка: все эти рассуждения верны, если решения существуют!

Пример-ловушка. *Не вычисляя корней уравнения* $3x^2+2x+1=0$*, найдите сумму их квадратов.*

Старательные, но невнимательные школьники произведут вычисление:

$$x_1+x_2=-\frac{2}{3};\ x_1x_2=\frac{1}{2};\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{4}{9}-2\cdot\frac{1}{2}<0\ (!?).$$

Надеюсь, отрицательная сумма квадратов заставит их искать ошибку.

Более коварный пример-ловушка такой: $3x^2+3x+1=0$ (здесь сумма квадратов получается положительной, но действительных решений тоже нет).

Обратную теорему обычно приходится доказывать (а может, и формулировать) учителю. Пусть числа α, β таковы, что

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$. Тогда α, β — решения уравнения $ax^2+bx+c=0$. Действительно, поделим обе части уравнения на a (почему это можно сделать?), получим:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Очевидно, что при подстановке в трёхчлен $x=\alpha$ или $x=\beta$ получим 0.

Замечание. В учебниках при доказательстве обратной теоремы Виета часто ограничиваются подстановкой в уравнение чисел α и β. Мне кажется важным всё же разложить трёхчлен на множители: это готовит почву для разговора о нулях многочлена и их связи с его разложением на множители.

Применение теоремы Виета

Самое простое применение теоремы Виета — проверка решений, найденных каким-либо другим способом. Если сумма и произведение корней окажутся не такими, как надо по теореме, значит, это не корни.

Про обратную теорему Виета есть два популярных мифа.

Первый миф: «даже если вы нашли подходящие под условие обратной теоремы числа, надо ещё посчитать дискриминант, и только тогда утверждать, что это решения». Неправда: вычислять дискриминант (или как-то иначе проверять существование решений) требуется только в «прямой» теореме Виета.

Второй миф: «поиск решений по обратной теореме Виета — чистая лотерея, угадал-не угадал». Не совсем правда. Уточним: если у приведённого квадратного уравнения **целые** коэффициенты, а мы ищем **целые** корни (а такие случаи очень частые!), то все варианты для поиска известны.

Пример 1. Пусть у нас есть уравнение $x^2-11x+24=0$. Если у него есть два решения, то по теореме Виета их произведение равно 24. Если решения целые, то они находятся среди делителей числа

24. Перечислим натуральные делители: $24 = 1\cdot 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6$. Подходят 3 и 8, значит, по обратной теореме Виета, это и есть решения. Всё.

Пример 2. $x^2 + 11x + 24 = 0$. Так как произведение корней положительно, то решения одного знака. Так как сумма корней отрицательна, то этот знак «—». Значит, решения -3 и -8.

Пример 3. $x^2 + 10x - 24 = 0$. Так как произведение корней отрицательно, то решения разного знака. Так как сумма корней -10, то решения 2 и -12.

Задания

Найдите с помощью обратной теоремы Виета целые корни квадратных уравнений (1-11):

1) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
2) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
3) $x^2 - 9x - 8 = 0$;
4) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
5) $x^2 + x - 12 = 0$;
6) $x^2 + 8x + 15 = 0$;
7) $x^2 - 14x - 15 = 0$;
8) $x^2 - x - 30 = 0$;
9) $x^2 + 11x + 30 = 0$;
10) $x^2 - 6x - 55 = 0$;
11) $x^2 + 16x + 55 = 0$.
12) Укажите все целые значения b, при которых решения уравнения $x^2 + bx + 24 = 0$ также целые.
13) Найдите все целые положительные значения q, при которых корни уравнения $x^2 + 5x + q$ являются целыми числами.

Замечание. Разговор про то, что целые корни приведённого квадратного уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена, не только полезны для быстрого поиска решений, но и подготавливают почву для аналогичных утверждений о многочленах третьей и более высоких степеней.

Итоги

В конце темы «Квадратные уравнения» кроме обычных проверочных работ я даю школьникам примерно такую летучку на 7 минут:

$$x^2+6x+9=0$$
$$-x^2-9=0$$
$$x^2+6x+5=0$$
$$2x^2+6x=0$$
$$x^2+6x+4=0$$
$$1{,}7x^2-5{,}1x+3{,}4=0$$

Если они решают все задания через дискриминант, я считаю, что мы плохо справились с темой. Если же они применяют к разным уравнениям разные методы (например, полный квадрат-оценка-Виет-вынесение множителя-дискриминант-деление на старший коэффициент), то всё хорошо. Данный подход не только позволяет быстро решать уравнения, но развивает гибкость мышления (подбираем к каждому уравнению свой оптимальный способ решения), что в перспективе даже важнее.

В статье использованы материалы Алексея Марачева, идеи Дмитрия Шноля и задания из учебника «Алгебра. 8 класс» Марка Ивановича Башмакова.

Приложение

Я считаю, что перечисленных методов решения квадратных уравнений специального вида достаточно — они охватывают все случаи и их немного (если способов очень много, можно запутаться). Но есть и другие методы, помогающие быстрее решить отдельные виды уравнений, которые можно ненавязчиво показывать сильным группам, например:

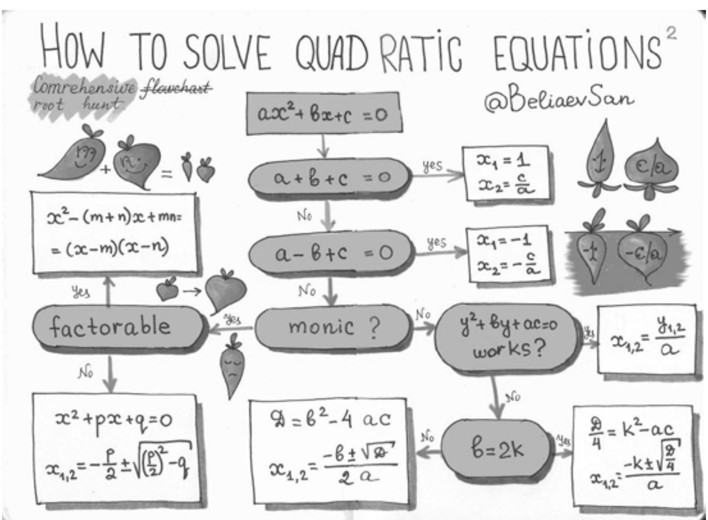
1) (Замечательные точки трёхчлена). Если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ сумма коэффициентов $a+b+c=0$, то его решением является число 1. Если же $a-b+c=0$, то его решением является число -1.

2) Если все коэффициенты чётные, то есть упрощённые формулы вычисления решений («маленький» дискриминант, см. правый нижний угол схемы).

3) (Способ «переброски»). Между уравнениями $ax^2+bx+c=0$ и $y^2+by+ac=0$ существуют такие связи: а) их дискриминанты равны, б) решения первого уравнения получаются делением корней второго на a. Этот способ позволяет сводить неприведённое квадратное уравнение к приведённому, избегая деления до последнего этапа вычислений.

Сергей Беляев даже создал блок-схему для решения квадратных уравнений, включающую все указанные способы.

(Морковка и редиска изображают корни, monic означает «приведённый». Factorable здесь означает не в принципе «разлагаемый на множители», а «можете ли вы быстро подобрать два числа, сумма и произведение которых заданы». Если «да», подбирайте, если нет, считайте через дискриминант).



К блок-схеме прилагается набор упражнений для отработки разных пунктов:

$$a+b+c=0 \xrightarrow{\text{yes}} \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{array}}$$

1. $x^2 + x - 2 = 0,$
2. $2x^2 - 3x + 1 = 0,$
3. $2018x^2 - 2019x + 1 = 0,$
4. $357x^2 + 786x - 1143 = 0.$

$$a-b+c=0 \xrightarrow{\text{yes}} \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{array}}$$

1. $2x^2 + x - 1 = 0,$
2. $7x^2 + 9x + 2 = 0,$
3. $2019x^2 + 2020x + 1 = 0,$
4. $215x^2 + 657x + 442 = 0.$

$$\text{factorable?} \xrightarrow{\text{yes}} \boxed{\begin{array}{l} x^2 - (a+b)x + ab = \\ = (x-a)(x-b) \end{array}}$$

1. $x^2 - 7x + 12 = 0,$
2. $x^2 + x - 90 = 0,$
3. $x^2 + 2x - 15 = 0,$
4. $x^2 - 9x + 18 = 0.$

$$\text{factorable?} \xrightarrow{\text{no}} \boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

1. $x^2 + 2x - 2 = 0,$
2. $x^2 + 2(1 + 2\sqrt{2})x + 8\sqrt{2} = 0,$
3. $x^2 + 4x - \sqrt{3} + 4 = 0,$
4. $x^2 + 4x - \sqrt{3} + 1 = 0.$

$$\begin{array}{c} y^2 + by + ac = 0 \\ \text{works?} \end{array} \xrightarrow{\text{yes}} \boxed{\begin{array}{l} x_1 = \frac{y_1}{a} \\ x_2 = \frac{y_2}{a} \end{array}}$$

1. $2x^2 - 7x + 3 = 0,$
2. $5x^2 + x - 18 = 0,$
3. $3x^2 + 8x - 3 = 0,$
4. $2x^2 - 9x + 9 = 0.$

$$b = 2k \xrightarrow{\text{yes}} \boxed{x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}}$$

1. $9x^2 - 4x - 2 = 0,$
2. $7x^2 + 18x + 5 = 0,$
3. $5x^2 - 4x - 12 = 0,$
4. $3x^2 + 280x - 867 = 0.$

Золотое сечение и школьная планиметрия

А.Д. Блинков,
г. Москва
ablinkov2021@gmail.com

Впервые опубликовано в журнале «Математика», №7/2023.

Напомним, что **золотое сечение отрезка** — это такое его разбиение на две части, что большая часть относится к меньшей, как весь отрезок к большей части. Если ввести обозначения так, как показано на рис. 1, то $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC}$.

Рис. 1

Глядя на эту пропорцию, можно сформулировать иначе: большая часть является средним геометрическим (пропорциональным) между всем отрезком и его меньшей частью. Переходя к обозначениям длин отрезков, это можно записать так: $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} = \Phi$, где Φ — численное значение золотого сечения, которое найдём чуть позже (обозначение дано в честь древнегреческого скульптора Фидия).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. *Два одинаковых прямоугольника $ABCD$ и $DEFG$ расположены так, что вершина E лежит на отрезке BG (см. рис. 2). Тогда отношение сторон прямоугольника равно золотому сечению*

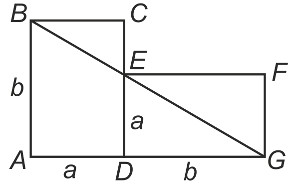


Рис. 2

Действительно, из подобия треугольников ABG и DEG получим, что $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AG}{DG}$, то есть $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a+b}{b}$. Значит, точка D делит отрезок AG в отношении Φ, что и требуется.

В некоторых источниках указано, что банковские карты устроены именно таким образом, но это не так. На самом деле, отношение их сторон чуть меньше золотого сечения.

Упражнение 1. *От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному. Докажите, что отношение сторон исходного прямоугольника равно золотому сечению.*

Пример 2. *В равнобедренном треугольнике с углом* $36°$ *при вершине отношение боковой стороны к основанию равно золотому сечению.*

Пусть в треугольнике ABC: $AB=BC=b$, $AC=a$, $\angle ABC=36°$. Проведём биссектрису AD (см. рис. 3). Так как углы при основании треугольника ABC равны по $(180°-36°):2=72°$, то биссектриса разделит угол A на два угла по $36°$. Поэтому, треугольники CAD и ADB также равнобедренные. При этом, треугольник CAD подобен исходному, поэтому $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b-a}=\Phi$.

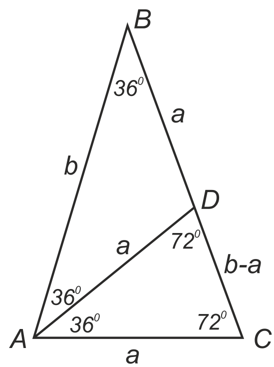


Рис. 3

Отметим, что получившуюся пропорцию можно обосновать иначе, не используя подобие, если вспомнить ***свойство биссектрисы треугольника****: биссектриса делит противолежащую сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам.*

Кроме того, треугольник ADB на рис. 3 также имеет отношение к золотому сечению.

Упражнение 2. *Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом* $36°$ *при основании отношение основания к боковой стороне равно золотому сечению.*

Золотое сечение было известно ещё древним грекам, которые считали, что любые разбиения надо уметь построить циркулем и линейкой. Для того, чтобы восстановить это построение, нам потребуется найти численное значение Φ. Вернёмся к равенству $\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b}$. По основному свойству пропорции получим, что $b^2=a^2+ab$. Обе части этого равенства почленно разделим на a^2, тогда $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1+\frac{b}{a}$. После замены $\frac{b}{a}=\Phi$ и переноса слагаемых в одну часть, получим квадратное уравнение $\Phi^2-\Phi-1=0$. Его положительные корень: $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Тогда, выбрав единичный отрезок, можно построить отрезок длины Φ, например, так (см. рис. 4): построить прямоугольный треугольник ABC с катетами $CA=1$, $CB=\frac{1}{2}$;

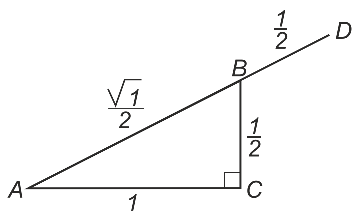


Рис. 4

его гипотенуза $AB=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$; теперь достаточно на луче AB отложить отрезок $BD=\frac{1}{2}$ и получить $AD=\Phi$*.Отметим, что аналогично строится любая квадратичная иррациональность.*

Таким образом, чтобы разбить произвольный отрезок AB золотым сечением, достаточно воспользоваться **построением четвёртого пропорционального**, которое основано на **обобщённой теореме Фалеса** (см. рис. 5):

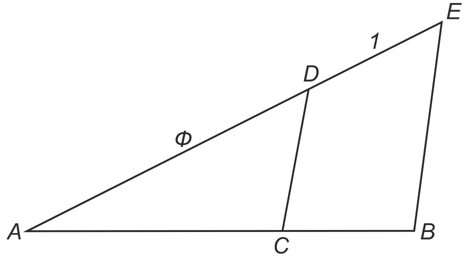


Рис. 5

провести из точки A произвольный луч, на котором последовательно отложить отрезки $AD = \Phi$ и $DE = 1$; затем провести отрезки BE и $DC \parallel BE$. Тогда точка C разобьёт AB в отношении Φ!

Вернёмся к уравнению $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$. Число, противоположное второму корню этого уравнения равно $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Его обозначают ϕ и называют **вторым золотым сечением**.

Возвращаясь к рис. 1, $\phi = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{1}{\Phi}$.

Упражнение 3. а) *Проверьте, что числа Φ и ϕ действительно являются взаимно обратными.* **б)** *Проверьте справедливость равенства $\Phi - 1 = \phi$ и объясните его геометрический смысл.*

Построение золотого сечения позволяет построить циркулем и линейкой правильный десятиугольник.

Для этого достаточно разделить окружность произвольного радиуса R на десять равных частей. Так как $360^\circ : 10 = 36^\circ$, то правильный десятиугольник состоит из десяти уже известных нам равнобедренных треугольников с углом 36° при вершине (см. рис. 6).

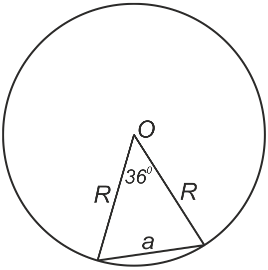


Рис. 6

Так как $\dfrac{a}{R} = \phi$, то для построения стороны a правильного десятиугольника достаточно построить ϕ, выбрав R за единицу длины.

Упражнение 4. *Постройте ϕ по аналогии с построением Φ.*

Заметим, что если окружность разделена на десять равных частей, то можно построить и правильный пятиугольник, если соединить точки деления через одну. В правильном пятиугольнике не только равны все углы, равны все стороны, но и равны все диагонали. Эта фигура «богата» золотыми сечениями.

Пример 3. *В правильном пятиугольнике:* **а)** *отношение диагонали к стороне равно золотому сечению;* **б)** *точка пересечения диагоналей делит их в золотом сечении.*

Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник (см. рис. 7). Сумма углов любого пятиугольника равна $540°$, поэтому каждый угол правильного пятиугольника равен $540° : 5 = 108°$. Диагонали CA и CE делят угол BCD на три равных угла (они опираются на равные дуги), значит, $\angle ACE = 108° : 3 = 36°$.

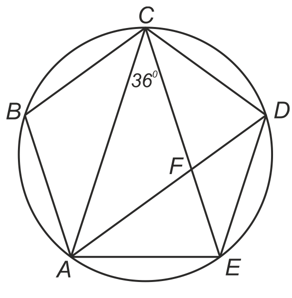


Рис. 7

Тогда равнобедренный треугольник ACE — это треугольник из примера 2, значит, пункт а) уже доказан. А для обоснования пункта б) достаточно заметить, что AD — биссектриса угла CAE. Поэтому точка F пересечения AD и CE делит диагональ CE в отношении Φ.

Упражнение 5. *Вернитесь к упражнению 2 и найдите другой способ решения, использующий правильный пятиугольник.*

Интересно, что в прошлом веке в течение многих лет в школьной программе был отдельный параграф, посвящённый золотому сечению, но назывался он иначе: «Деление в среднем и крайнем отношении». Приведём две задачи из этого параграфа (см. Н. Рыбкин. Сборник задач по геометрии. Ч1. – М.: Учпедгиз, 1941).

Пример 4. *Если радиус круга разделить в среднем и крайнем отношении и, взяв большую часть, описать ею концентрическую окружность, то площадь данного круга тоже разделится в среднем и крайнем отношении, причём большей частью будет кольцо. Доказать это.*

Обозначив через R и r радиусы данного и построенного кругов соответственно, найдём, что площадь построенного круга равна πr^2, а площадь кольца равна $\pi(R^2 - r^2)$. По условию: $\dfrac{R}{r} = \Phi$, тогда $$\frac{R^2-r^2}{r^2}=\frac{R^2}{r^2}-1=\Phi^2-1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-1=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-1=$$

$=\dfrac{2+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$, что и требовалось.

Упражнение 6. *Диаметр разделён в среднем и крайнем отношении перпендикуляром, проведённым из точки окружности. Радиус окружности равен r. Найти длину перпендикуляра.*

Есть ещё много интересных фактов, связанных с золотым сечением, но их рассмотрение выходит за рамки базового курса школьной геометрии. Об этих фактах, а также о роли золотого сечения в различных жанрах искусства можно прочесть, например, в статьях А.Д. Бендукидзе «Золотое сечение», «Квант», №8/1973 и В.О. Бугаенко, «Золотое сечение и числа Фибоначчи», «Квант», №6/2008.

Указания и ответы к упражнениям

1. Обозначьте стороны исходного прямоугольника, например, через x и y $(x<y)$. Тогда, если отрезать от него квадрат со стороной x, то из подобия прямоугольников следует равенство $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y-x}$.

2. Из вершины данного равнобедренного треугольника проведите отрезок к основанию под углом $36°$ к боковой стороне. Далее используйте подобие данного треугольника и отсечённого.

3. а) Перемножьте численные значения Φ и ϕ, используя формулу разности квадратов;

б) Удобнее проверить равенство $\Phi-\phi=1$, подставив соответствующие числа.

Если $\Phi=\dfrac{a+b}{b}$ — отношение отрезка к его большей части, то $\Phi-1=\dfrac{a}{b}=\phi$ — отношение меньшей части к большей.

4. Достаточно на последнем этапе построения Φ отложить $BD = \frac{1}{2}$ по другую сторону от вершины B.

5. Рассмотрите, например, треугольник ABC на рис. 7. В примере 3 доказано, что $AC : AB = \Phi$.

6. Соедините точку на окружности с концами диаметра и используйте среднее пропорциональное в прямоугольном треугольнике. Искомый отрезок равен $2r\sqrt{\Phi} = 2r\sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Прямоугольный треугольник. Точки касания

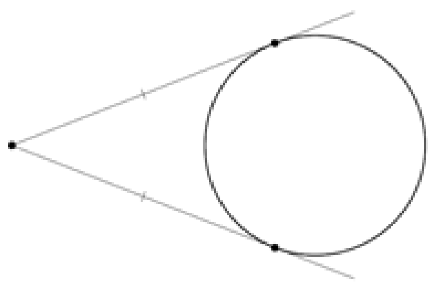
Ю.А. Блинков
Школа №57, Летово, г. Москва
y.a.blinkov@gmail.com

Введение

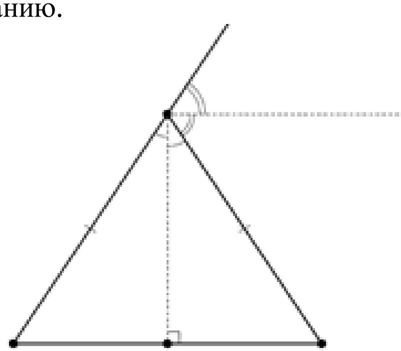
Не секрет, что для решения сложных задач иногда достаточно хорошо владеть материалом, не выходящим за рамки программы 7-8 класса. Как раз об этом и пойдет речь в данной статье.

Вспомним два базовых факта, известных каждому школьнику:

1) отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны;



2) биссектриса внутреннего (внешнего) угла при вершине равнобедренного треугольника перпендикулярна (соответственно параллельна) его основанию.



Упражнение 1. Вспомните доказательство этих фактов.

Рассмотрим окружность, вписанную в треугольник ABC, и введем стандартные обозначения: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, p — полупериметр. Что сразу следует из указанных фактов?

1. А) Отрезок касательной равен разности полупериметра и противолежащей стороны, то есть, например, $AB_1 = p-a$ (см. рис. 1).

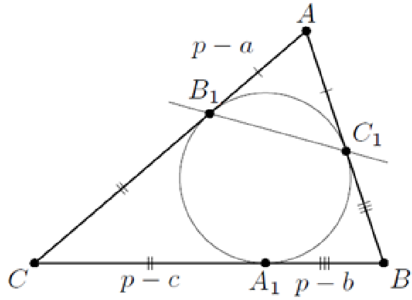


Рис. 1

Б) Прямая, проходящая через точки касания, перпендикулярна (параллельна) биссектрисе внутреннего (соответственно внешнего) угла (см. рис. 1). Например, прямая B_1C_1 перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла A и параллельна биссектрисе внешнего.

Упражнение 2. Докажите это.

Если какое-то утверждение верно для вписанной в треугольник окружности, то можно найти аналогичное утверждение для вневписанной (см. рис. 2).

2. А) Отрезок касательной — полупериметр, то есть, например, $CA_2 = p$.

Б) Отрезок касательной равен разности полупериметра и стороны, то есть, например, $CA_0 = AC_0 = p-b$.

В) Прямая, проходящая через точки касания вневписанной окружности, перпендикулярна или параллельна биссектрисам внутреннего и внешнего угла треугольника. Например, прямая B_2A_0 параллельна биссектрисе внутреннего угла C и перпендикулярна биссектрисе внешнего. А прямая B_3A_2 перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла C и параллельна биссектрисе внешнего.

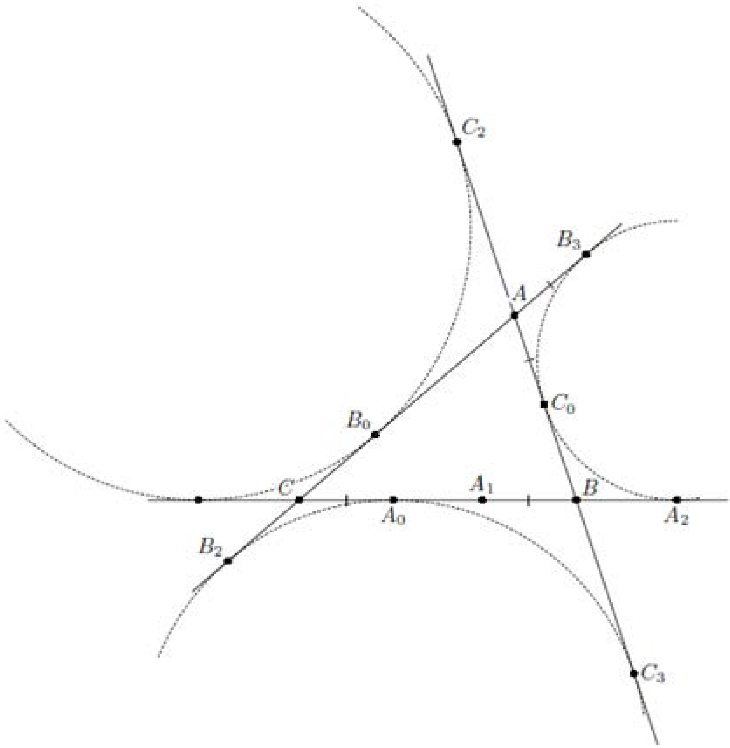


Рис. 2

Упражнение 3. Докажите это.

Если рассмотреть вписанную и вневписанную окружность одновременно, то можно получить еще и такие утверждения (см. рис. 2).

3. А) Равенство отрезков касательных во вписанных и вневписанных окружностях. $CA_0 = BA_1 = p - b$.

Б) Точки касания вписанной и вневписанной окружности (например, A_1 и A_0) симметричны относительно середины стороны.

Упражнение 4. Докажите это.

Теперь переходим к прямоугольному треугольнику. Рассмотрим вписанную окружность и три его вневписанные окружности. Вспомним формулы для нахождения их радиусов (см. рис. 3а, б).

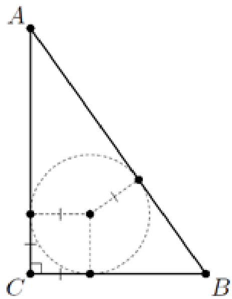


Рис. 3а

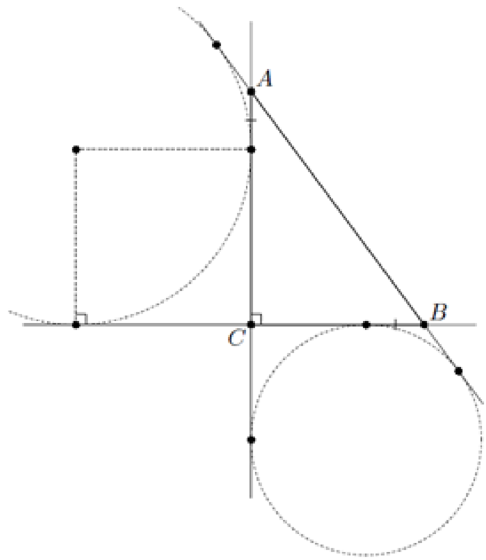


Рис. 3б

4. А) Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $p-c$, где c — гипотенуза, а p — полупериметр.

Б) Радиусы вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны p, $p-a$, $p-b$.

Упражнение 5. Докажите это.

Ну что ж, «школьные» факты вспомнили, можно двигаться дальше. Для удобства введем

Обозначения:

Окружность с центром I, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1, а гипотенузы — в точке C_1. Вневписанные окружности этого треугольника с центрами I_a, I_b, I_c касаются сторон в точках A_0, B_0, C_0 соответственно и лучей CB, BA, AC и CA в точках A_2, C_2, B_2 и B_3 соответственно.

Первая часть. Точки, лежащие на одной прямой

Утверждение 1. A_1, C_1 и B_2 лежат на одной прямой (см. рис. 4).

Решение. Заметим, что прямые A_1C_1 и BI_a параллельны (см. пункт 1б). Кроме того, $BA_1 = p - b = r_a = I_aB_2$ (см. пункты 3 и 4б). Поскольку указанные отрезки еще и параллельны, то $BA_1B_2I_a$ — параллелограмм. Следовательно, прямая A_1B_2 также параллельна BI_a, то есть совпадает с A_1C_1, откуда и следует искомое.

Стоит обратить внимание на получившуюся конфигурацию. Заметим, что $C_1BI_aB_2$ *— равнобокая трапеция. «Отрезав» от нее равнобедренный треугольник* BA_1C_1*, получим параллелограмм* $BA_1B_2I_a$.

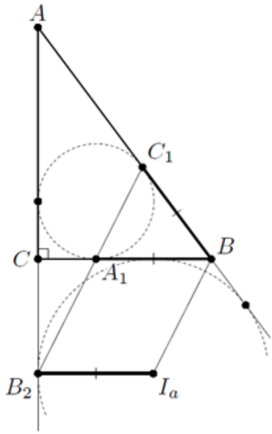


Рис. 4

Упражнение 6. Найдите еще одну такую тройку точек.

Утверждение 2. A_1, C_2 и B_0 лежат на одной прямой (см. рис. 5).

Решение. Заметим, что прямые C_2B_0 и AI параллельны (см. пункт 1б). Кроме того, $AB_0 = p - c = r = IA_1$ (см. пункты 3 и 4а). Поскольку указанные отрезки еще и параллельны, то AB_0A_1I — параллелограмм. Следовательно, прямая A_1B_0 также параллельна AI, то есть совпадает с C_2B_0, откуда и следует искомое.

Отметим, что доказательство полностью аналогично предыдущему. Кроме того, мы опять «отрезаем» от равнобокой трапеции равнобедренный треугольник и получаем параллелограмм.

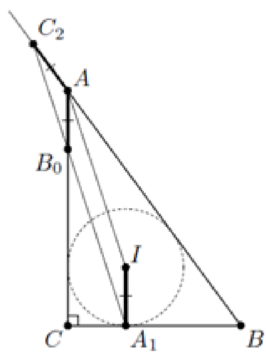


Рис. 5

Упражнение 7. Найдите еще одну такую тройку точек.

Рассмотрим еще одно похожее утверждение.

Утверждение 3. A_2, C_0 и B_0 лежат на одной прямой (см. рис. 6).

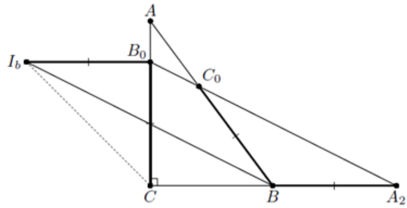


Рис. 6

Решение. Заметим, что прямые A_2C_0 и BI_b параллельны (см. пункт 1б). Кроме того, $BA_2 = p - a = r_b = I_bB_0$ (см. пункты 3 и 4б). Поскольку указанные отрезки еще и параллельны, то $BA_2B_0I_b$ — параллелограмм. Следовательно, прямая A_2B_0 также параллельна BI_b, то есть совпадает с A_2C_0, откуда и следует искомое.

Упражнение 8. Найдите еще одну такую тройку точек.

Можно доказать данные утверждения, используя теорему Менелая и соотношения в прямоугольном треугольнике.

Упражнение 9. Проделайте это.

Вторая часть. Следствия

Рассмотрим задачи, которые являются следствиями доказанных утверждений.

Задача 1. А) *(Турнир математических боев им. Савина, 2007)* В прямоугольном треугольнике с прямым углом A вписанная в него окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q. Вневписанная окружность, касающаяся стороны AB, касается продолжения стороны AC в точке R. Докажите, что P, Q и R лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что точки P, Q и R — это точки A_1, C_1 и B_2, которые, согласно утверждению 1, лежат на одной прямой (см. рис. 7).

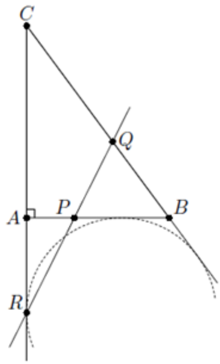


Рис. 7

Б) (*Всероссийская олимпиада по геометрии, 2014)* Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1, а гипотенузы — в точке C_1. Прямые C_1A_1 и C_1B_1 пересекают CA и CB соответственно в точках B_0 и A_0. Докажите, что $AB_0 = BA_0$.

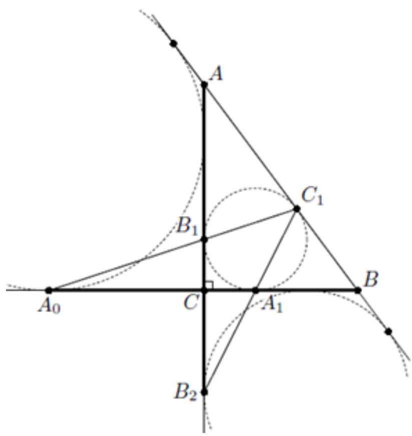


Рис. 8

Решение. Согласно утверждению 1, точка B_0 совпадает с точкой B_2 касания вневписанной окружности и продолжения стороны AC (см. рис. 8), то есть $AB_0 = p$ (см. пункт 2а). Рассуждая аналогично, получим, что $BA_0 = p$, что и требовалось.

Теперь рассмотрим задачу с Московской олимпиады.

Задача 2. *(Московская математическая олимпиада, 2007)* В прямоугольный треугольник вписана окружность. Через точку ее касания с катетом проведена прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки касания. Докажите, что она отсекает на другом катете отрезок, равный радиусу вписанной окружности.

Решение. Переформулируем задачу, используя введенные обозначения.

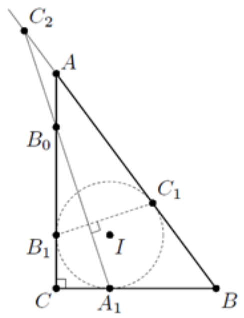


Рис. 9

Рассмотрим прямую, проходящую через точку A_1 и перпендикулярную C_1B_1 (см. рис. 9). Поскольку перпендикулярность к прямой C_1B_1 равносильна параллельности прямой AI (см. 1б), то речь идет о прямой, также проходящей через точки B_0 и C_2 (см. утверждение 2). Осталось вспомнить, что $AB_0 = p - c = r$.

Следующую задачу предлагали в свое время на устную Московскую олимпиаду по геометрии. Но в окончательный вариант она не вошла. Причина станет понятна чуть позже (конструкция встретится нам как часть более сложной задачи).

Задача 3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вневписанные окружности касаются сторон BC, AC и AB в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. Найдите угол $A_0C_0B_0$.

Вопрос выглядит вполне естественно. Аналогичная задача для точек касания вписанной окружности хорошо известна и доступна даже 7 классу.

Упражнение 10. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1, а гипотенузы — в точке C_1. Найдите угол $A_1C_1B_1$.

Возможны различные способы решения. Отметим, что искомый угол является углом между прямыми AI и BI, содержащими биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника.

Задача для вневписанных окружностей выглядит значительно сложнее… Но решение полностью аналогично, если воспользоваться **утверждением 3**!

Ответ: $135°$.

Решение. Воспользуемся тем, что A_2, C_0 и B_0 лежат на одной прямой (см. утверждение 3), то есть прямая C_0B_0 параллельна прямой BI (см. рис. 10). Аналогично, C_0A_0 параллельна прямой AI. Тогда искомый угол является углом между лучами AI и BI.

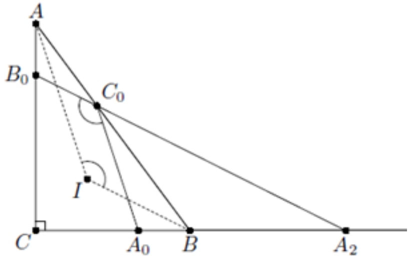


Рис. 10

Теперь попробуем решить что-то посложнее.

Задача 4. *(Всероссийская олимпиада по геометрии, 2011)* Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) касается стороны BC в точке A_1, а прямой AC в точке A_2 (см. рис. 11а). Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) вписанную окружность треугольника ABC в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC \parallel A'C'$.

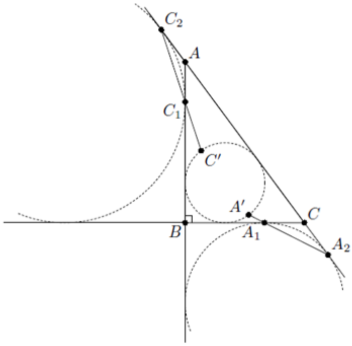


Рис. 11а

Решение. Переформулируем задачу, используя введенные обозначения (см. рис. 11б).

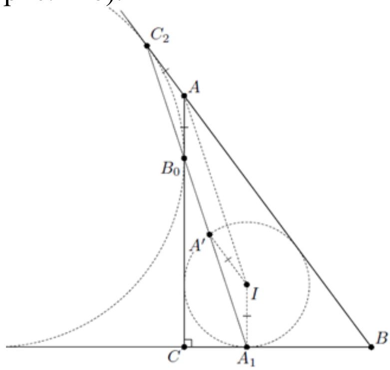


Рис. 11б

Рассмотрим прямую C_2B_0, проходящую через точки касания вневписанной окружности с катетом и продолжением гипотенузы прямоугольного треугольника. Согласно утверждению 2, эта прямая также проходит через точку A_1 и параллельна прямой AI. Следовательно, C_2AIA_1 — равнобокая трапеция с боковыми сторонами, равными радиусу вписанной в треугольник окружности. Тогда точка A' пересечения прямой C_2B_0 с вписанной окружностью такова, что C_2AIA' — параллелограмм, то есть IA' параллельна AB. Определив аналогично точку B', получим, что IB' также параллельна AB, то есть AB и $A'B'$ параллельны.

Третья часть

Прежде чем продолжить изучение конструкции, вспомним несколько важных утверждений геометрии треугольника. Для удобства используем введенные обозначения.

1. Биссектрисы ΔABC являются высотами для $\Delta I_a I_b I_c$.

Упражнение 11. Докажите это.

2. А) точки I_a, I_b, A и B лежат на одной окружности.

Б) точка O — середина $I_a I_b$ является центром этой окружности.

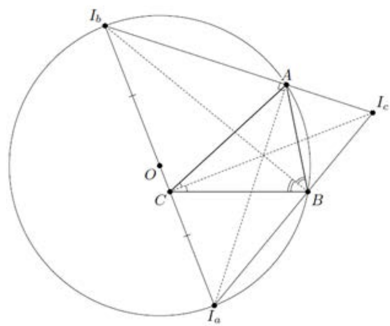


Рис. 12

Упражнение 12. Докажите это, используя предыдущее утверждение.

3. Биссектриса внешнего угла треугольника и серединный перпендикуляр к противолежащей стороне пересекаются в середине дуги описанной окружности треугольника (см. рис. 13).

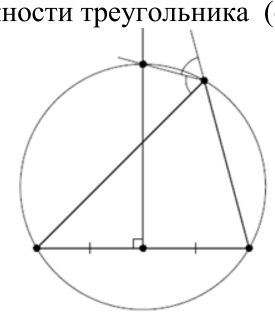


Рис. 13

Упражнение 13. Докажите это.

4. Точка O — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC.

Упражнение 14. Докажите это, используя предыдущие утверждения.

Кроме того, несложно доказать такой важный факт. Иногда его называют «первым воробьем» (см., например, https://geometry.ru/persons/polyansky/sparrows.pdf).

Факт 1. Дан неравнобедренный треугольник ABC. На его сторонах AC и BC выбраны точки B_0 и A_0 соответственно, O — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 14). Равенство $AB_0 = BA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, B_0, O, C лежат на одной окружности.

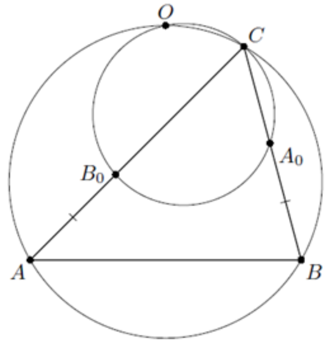


Рис. 14

Упражнение 15. Докажите это, используя равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Отметим также, что $OB_0 = OA_0$, то есть O — середина дуги A_0CB_0 соответствующей окружности.

Можно формулировать и так: эта точка равноудалена от точек, движущихся с равными скоростями по двум сторонам треугольника, прилежащих к этому углу.

И еще один факт, верный для любого треугольника.

Факт 2. *(точка Бевэна)* Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника ABC на его стороны, пересекаются в одной точке S (см. рис. 15).

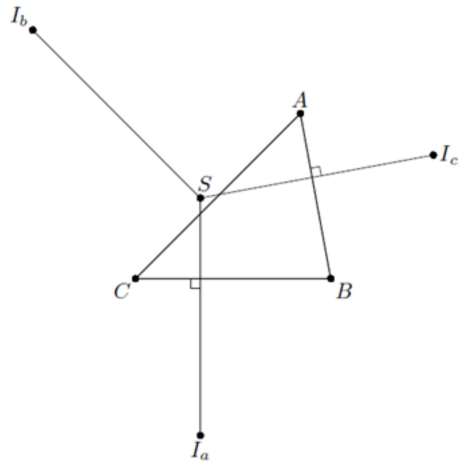


Рис. 15

Упражнение 16. Докажите факт 2, используя теорему Карно.

Упражнение 17. Докажите факт 2, используя, что треугольник ABC является ортотреугольником для треугольника $I_aI_bI_c$.

Упражнение 18. Докажите факт 2, проведя два таких перпендикуляра и показав, что они пересекаются в центре описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$. Рассмотрите равнобедренный треугольник и найдите угол при его вершине.

Упражнение 19. Докажите, что $\angle ASB_0 = \angle AC_0B_0$, а $\angle BSA_0 = \angle BC_0A_0$ (A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами).

Четвёртая часть

Вернемся к прямоугольному треугольнику. Сначала рассмотрим свойства его точки Бевэна.

Задача 4. Пусть S — точка Бевэна прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C (см. рис. 16). Докажите, что:

А) Прямые AS и BS параллельны B_0C_0 и A_0C_0 соответственно.

Б) $\angle ASB = \angle A_0C_0B_0 = 135°$.

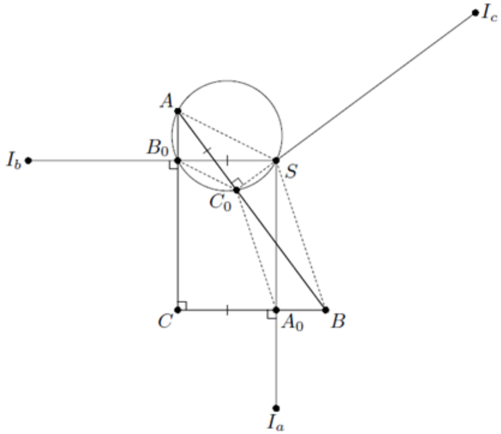


Рис. 16

Решение. А) Покажем, что AB_0C_0S — равнобокая трапеция. Заметим, что CB_0SA_0 — прямоугольник. Следовательно, $B_0S = CA_0$. Кроме того, $CA_0 = AC_0$, то есть диагонали четырехугольника AB_0C_0S равны. Осталось заметить, что он вписан в окружность с диаметром AS, то есть является равнобокой трапецией с основаниями AS и B_0C_0. Параллельность BS и A_0C_0 доказывается аналогично.

Б) Из доказанной параллельности двух пар прямых следует равенство указанных углов.

С этими углами мы еще встретимся чуть позже.

Другие свойства точки Бевэна прямоугольного треугольника — в задачах для самостоятельного решения.

Теперь рассмотрим расположение центра окружности, описанной около треугольника $A_0C_0B_0$.

Задача 5. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника $A_0C_0B_0$ (см. рис. 17). Докажите, что:

А) $\angle B_0OA_0 = 90°$.

Б) O лежит на окружности, описанной около треугольника A_0CB_0.

В) $OA = OB$.

Г) O является серединой дуги ACB окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C.

Д) O — середина I_aI_b.

Е) O — центр окружности, описанной около треугольника ASB.

Ж) точки I_a, I_b, A, S и B лежат на одной окружности.

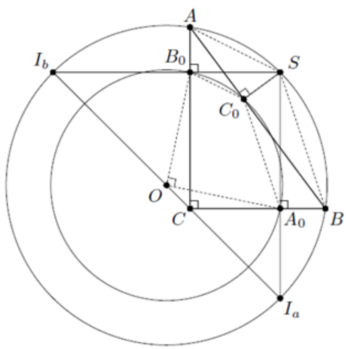


Рис. 17

Решение. А) Поскольку $\angle A_0C_0B_0 = 135°$, то центральный угол $\angle B_0OA_0 = 2\cdot(180° - \angle A_0C_0B_0) = 90°$.

Б) $\angle B_0OA_0 = \angle B_0CA_0 = 90°$, откуда и следует искомое.

В) Из пункта Б) следует равенство вписанных углов $\angle CB_0O = \angle CA_0O$. Кроме того, поскольку O — центр описанной окружности, то $OB_0 = OA_0$. И, наконец, $AB_0 = BA_0 = p - c$, откуда следует равенство треугольников OB_0A и OA_0B по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $OA = OB$.

Г) Из пункта Б) и равенства $OB_0 = OA_0$ следует, что CO — биссектриса внешнего угла C треугольника B_0CA_0. Кроме того, $OA = OB$ из пункта В). Осталось вспомнить, что биссектриса внешнего угла треугольника и серединный перпендикуляр к противолежащей стороне пересекаются в середине дуги описанной окружности треугольника (см. упражнение 13).

Отметим, что фактически мы рассмотрели конструкцию из **факта 1**. Возможно было использовать его напрямую, определив точку O как середину дуги ACB и показав, что она является центром окружности, описанной около треугольника $A_0C_0B_0$.

Упражнение 20. Проделайте это.

Д) Заметим, что точка O равноудалена от A и B и лежит на I_aI_b. Такая точка только одна.

Е), Ж) Из пункта Д) следует, что O — середина гипотенузы прямоугольных треугольников I_aAI_b и I_aBI_b. Осталось заметить, что треугольник I_aSI_b также прямоугольный с той же гипотенузой.

Следовательно, O равноудалена от всех указанных точек.

Отметим, что условие прямоугольного треугольника является существенным. Действительно, точки I_a, I_b, A и B лежат на одной окружности в любом треугольнике. А вот точка S лежит на этой окружности тогда и только тогда, когда треугольник I_aSI_b — прямоугольный, что, в свою очередь, равносильно тому, что прямоугольным является треугольник ABC.

Понимание этого нам поможет в дальнейшем.

Возможно и другое решение пункта Е) использующее величину угла ASB.

Упражнение 21. Попробуйте его найти.

Итак, мы рассмотрели некоторые свойства прямоугольного треугольника. Вполне естественно подумать про соответствующие признаки. Именно такой факт был предложен участникам международной олимпиады по математике. Мы приводим условие в исходной формулировке (см. рис. 18).

Задача 6. *(IMO, 2013)* Пусть вневписанная окружность треугольника ABC, лежащая напротив вершины A, касается стороны BC в точке A_0. Точки B_0 на стороне CA и C_0 на стороне AB определяются аналогичным образом с использованием вневписанных окружностей, лежащих напротив вершин B и C, соответственно. Известно, что центр описанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$ лежит на описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

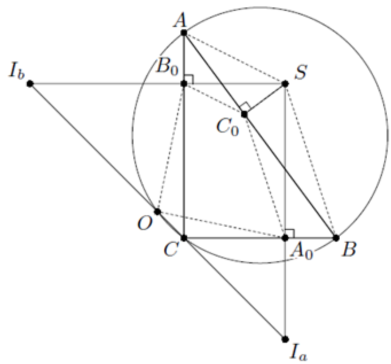


Рис. 18

Как это часто бывает, доказательство признака оказывается значительно сложнее…..

Но нам помогут факты 1 и 2 и понимание, какие из рассуждений можно обратить.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника $A_0B_0C_0$ лежит, например, на дуге ACB. Покажем, что O — точка из факта 1, которая также является центром описанной окружности треугольника ASB, где S — точка Бевэна треугольника ABC (см. факт 2).

Рассмотрим конструкцию из **факта 1**. Во-первых, $AB_0 = BA_0$ для любого треугольника. Во-вторых, $OB_0 = OA_0$. Учитывая, что O лежит на дуге ACB, получим и другие ее свойства:

1) O является серединой дуги ACB.

2) $OA = OB$.

3) O – середина I_aI_b.

4) O лежит на окружности, описанной около треугольника A_0CB_0.

Теперь достаточно показать, что $\angle AOB = 2\cdot(180^\circ - \angle ASB)$.

Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle A_0SB_0 = 180^\circ - \alpha$, а $\angle A_0OB_0 = \angle AOB = \alpha$.

Следовательно, $\angle A_0C_0B_0 = 180^\circ - 0{,}5\alpha$. Кроме того, $\angle ASB_0 = \angle AC_0B_0$, а $\angle BSA_0 = \angle BC_0A_0$ (пары равных вписанных углов из **упражнения 19**), откуда $\angle ASB = \angle A_0SB_0 + \angle ASB_0 + {}$ $+ \angle BSA_0 = 180^\circ - \alpha + 0{,}5\alpha = 180^\circ = 0{,}5\alpha$.

То есть $\angle AOB = 2\cdot(180^\circ - \angle ASB)$, что и требовалось.

Итак, $OS = OA = OB = OI_a = OI_b$, то есть треугольник I_aSI_b — прямоугольный, откуда и следует утверждение задачи.

Автор благодарен участникам XIII-го открытого семинара учителей математики (Казань, 2024 г.) за внимание к докладу и Е.С. Горской за прекрасные рисунки.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть S — точка Бевэна прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C.

Докажите, что (используем введенные обозначения):

А) S — ортоцентр треугольника ABI_c.

Б) Основания высот AS и BS треугольника ABI_c лежат на прямой A_2B_3.

2. В обозначениях факта 1, докажите, что:

А) O — один из центров поворота, переводящих отрезок AB_0 в BA_0.

Б) O — точка Микеля для прямых AC, AB, BC, A_0B_0.

3. Обобщите факт 1 для точек, движущихся по сторонам угла с постоянными, но не обязательно равными скоростями.

4. *(Всероссийская олимпиада по математике, 2005)* Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность w треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

5. *(Турнир Городов, 1999 год, сложный вариант, 10–11 класс)* Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе угла ABC.

6. Решите задачу 6, используя только факт 1.

Десять решений одной задачи

А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков,
г. Москва
y.a.blinkov@gmail.com

Впервые опубликовано в журнале «Математика», №4/2023.

Известно, что для повторения школьного курса планиметрии подобрать задачи не очень просто. Хочется, чтобы материал для повторения позволял школьникам посмотреть на уже изученное с разных точек зрения. Поэтому наиболее эффективно предлагать задачи, которые имеют много различных способов решения. Вот одна из таких задач.

Задача. *В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Оказалось, что $BD = AD$. Найдите BC, если $AC = b$, $AB = c$ $(b \neq c)$.*

Подчеркнём, что часть решений, приведённых ниже, требует только знаний базового курса, а несколько решений ориентированы на школьников, изучавших геометрию на повышенном уровне.

Теоремы косинусов и синусов, площади, подобие треугольников

Решение 1. Введём обозначения (их будем использовать и в других решениях): $BC = a$, $AD = l$, $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ (см. рис. 1).

По свойству биссектрисы треугольника $BD = kc$, $CD = kb$ (k — коэффициент пропорциональности).

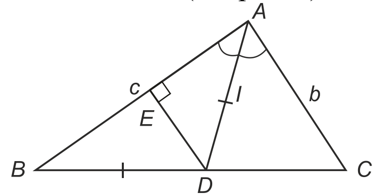


Рис. 1

Тогда $kb + kc = a$, откуда $k = \dfrac{a}{b+c}$, $BD = \dfrac{ac}{b+c} = l$, $CD = \dfrac{ab}{b+c}$.

В равнобедренном треугольнике ADB проведём перпендикуляр DE к основанию, тогда $\cos\alpha = \frac{AE}{l} = \frac{c}{2l}$. Из треугольника ACD по теореме косинусов: $CD^2 = b^2 + l^2 - 2bl\cos\alpha$. Подставим в это равенство полученные выражения для CD, $\cos\alpha$ и l: $\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 = b^2 +$

$$+\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - bc \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ac}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}-\frac{ac}{b+c}\right) = b^2 - bc \Leftrightarrow \frac{a^2(b-c)}{b+c} =$$

$$= b(b-c) \Leftrightarrow a = \sqrt{b(b+c)}$$ [1].

Решение 2. В треугольнике ABC проведём высоту AH и двумя способами выразим его площадь: $S = 0{,}5bc\sin 2\alpha = 0{,}5a\cdot AH$.

Так как $AH = c\cdot\sin\alpha$ (см. рис. 2), то, используя формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, после упрощения получим: $\cos\alpha = \frac{a}{2b}$.

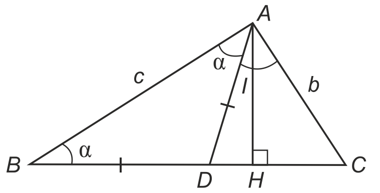


Рис. 2

Из треугольника ABC по теореме косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$, то есть $b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b} \Leftrightarrow b(b^2 - c^2) = a^2(b-c) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = \sqrt{b(b+c)}$.

Решение 3. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ACB}$. Из первого равенства получим: $\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$ (это соотношение получено в решении 2 из других соображений). Из равенства первого и третьего отношений получим, что

---

[1] Здесь и далее знак равносильности используется с учётом, что значения всех переменных положительны и $b \neq c$.

$\frac{c}{b}=\frac{\sin(180^\circ-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=3-4\sin^2\alpha$. Тогда $\sin^2\alpha=\frac{3b-c}{4b}$, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{b+c}{4b}$.

Так как $\cos\alpha>0$, то $a=2b\cos\alpha=2b\sqrt{\frac{b+c}{4b}}=\sqrt{b(b+c)}$.

Решение 4. Заметим, что треугольники DAC и ABC подобны ($\angle C$ — общий, $\angle DAC=\angle ABC$, см. рис. 2). Следовательно, $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD}$, то есть $b^2=a\cdot\frac{ab}{b+c}$. Значит, $a=\sqrt{b(b+c)}$.

Три формулы для вычисления биссектрисы

Решение 5. Воспользуемся формулой $l=\frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c}$, где p — полупериметр треугольника ABC. Учитывая, что $l=\frac{ac}{b+c}$, после возведения в квадрат получим: $\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2=$
$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)bc}{(b+c)^2}\Leftrightarrow a^2c^2=bc((b+c)^2-a^2)\Leftrightarrow b((b+c)^2=$
$=a^2b+a^2c\Leftrightarrow a=\sqrt{b(b+c)}$.

Решение 6. Воспользуемся формулой $l=\frac{2bc}{b+c}\cos\alpha$. Так как $\cos\alpha=\frac{c}{2l}$, то $l^2=\frac{bc^2}{b+c}$. Подставив сюда $l=\frac{ac}{b+c}$ и избавившись от знаменателя, получим: $a^2c^2=bc^2(b+c)\Leftrightarrow a=\sqrt{b(b+c)}$.

Решение 7. Воспользуемся формулой $l^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$ (её иногда называют формулой Лагранжа). Тогда $l^2=bc-l(a-l)$, что равносильно равенству $a = \dfrac{bc}{l}$. Подставляя в него $l = \dfrac{ac}{b+c}$, получим $a^2 = b(b+c)$, откуда $a = \sqrt{b(b+c)}$.

Три разные окружности

Решение 8. Опишем окружность около треугольника ABD (см. рис. 3).

Так как $\angle DAC = \angle ABC$, то CA — касательная к этой окружности. Тогда по теореме о секущей и касательной $CA^2 = CB \cdot CD$, что равносильно пропорции, полученной в решении 4.

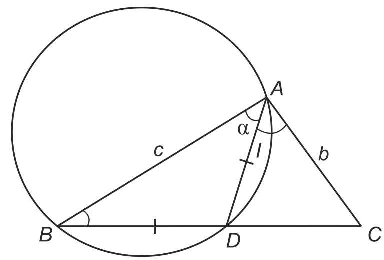


Рис. 3

Решение 9. Продлим сторону AC за точку A и на продолжении отметим точку F так, что $AF = AB$ (см. рис. 4).

Так как AD — биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника ABF, то $AD \parallel BF$, поэтому $\angle AFB = \angle CAD = \angle ABC$. Следовательно, CB — касательная к проведённой окружности. По теореме о секущей и касательной $CB^2 = CF \cdot CA$, то есть $a^2 = (b+c)b$, откуда $a = \sqrt{b(b+c)}$.

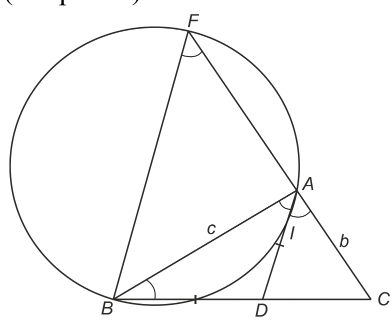


Рис. 4

Решение 10. Опишем окружность около треугольника ABC и продлим биссектрису до её пересечения с окружностью в точке W (см. рис. 5).

Их равенства углов BAW и CBA следует равенство дуг BW и AC, значит, равны стягивающие их хорды и $AB \parallel CW$. Следовательно, $ABWC$ — равнобедренная трапеция.

Таким образом,

$WC = WB = AC = b$, $AW = BC = a$.

По теореме Птолемея:

$AB \cdot WC + AC \cdot WB = BC \cdot AW$, то есть $bc + b^2 = a^2$, откуда и следует ответ.

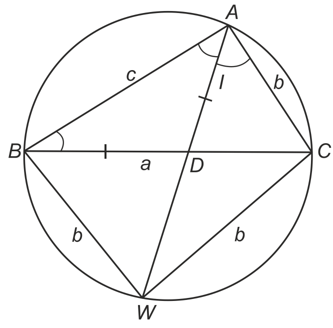


Рис. 5

В заключение отметим, что в случае $b = c$ *полученное в ответе равенство примет вид* $a = b\sqrt{2}$*, что справедливо для этого случая, так как треугольник* ABC *равнобедренный и прямоугольный.*

Обратная теорема о центральном угле

Д.В. Прокопенко,
г. Москва
prokop.dm@mail.ru

Введение

В статье будет идти речь о поиске достаточно необычной вспомогательной окружности в задачах по геометрии. Часто встречается фраза «Заметим, что четырехугольник … — вписанный». Признаки вписанного четырехугольника хорошо известны. Но бывают задачи, в которых надо заметить, что из четырех точек одна является центром окружности, описанной вокруг трех других. О таких задачах и будет идти речь. Можно было бы назвать статью «Обратные задачи», и это тоже правильно отражает суть статьи. Например, мы будем использовать не только свойство касательной, но и признак касательной (обратную теорему об угле между касательной и хордой), не только теорему о центральном и вписанном углах, но и обратную теорему как признак центра окружности. Будет много задач с числовыми данными. Самый необычный ход в наших задачах — это поиск угла, который больше развернутого.

Основная конструкция: обратная теорема о центральном угле

Пусть для различных точек A, B, C *и* D *выполняются условия:*

1) $AB = AC$;

2) $\angle BAC = 2\angle BDC$;

3) Если угол BDC *— острый, то точки* D *и* A *должны быть в одной полуплоскости относительно прямой* BC, *когда угол* BDC *— тупой, то в разных (плоский угол* BAC *больше* $180°$*).*

Тогда точка A *— центр окружности, описанной вокруг треугольника* BDC.

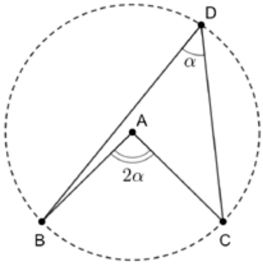


рис. 1

угол BDC — острый

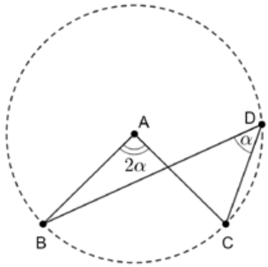


рис. 2

угол BDC — острый

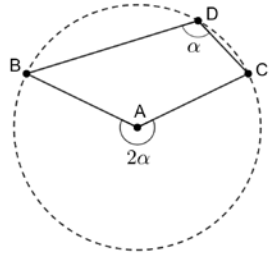


рис. 3

угол BDC — тупой

Доказательство. Рассмотрим случай на рис. 1 (см. рис. 4). Опишем окружность с центром в точке A и радиусом $R = AB$. Предположим, что точка D лежит внутри окружности. Продлим луч BD или CD до пересечения с окружностью в точке D_1. Тогда по теореме о центральном и вписанном угле $\angle BD_1C = \alpha$, $\angle BDC = \alpha$ по условию. Получаем противоречие с теоремой о внешнем угле для треугольника DD_1C. Аналогично разбираются другие случаи расположения точек.

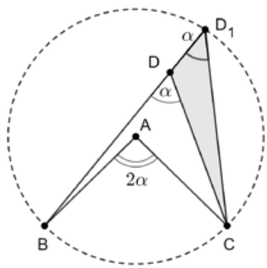


Рис. 4, доказательство

Во всех задачах мы будем искать вспомогательную окружность, а именно ее центр и радиус. Зафиксируем, что именно мы будем искать в задачах:

1) равнобедренный треугольник, $AB = AC$;

2) угол при вершине равнобедренного треугольника, $\angle BAC = 2\angle BDC$.

3) правильное расположение точек D и A.

В поисках правильного треугольника

Задача 1. *В выпуклом четырехугольнике* $ABCD$ $\angle A = 60°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 45°$ *и* $AB = BC$. *Докажите, что треугольник* ABD *— равносторонний (рис. 5).*

Эта задача была предложена на математической регате 2006/2007 годов. Ни одна команда не дала полного решения. Одна команда получила 3 балла из 7, еще одна 2 балла и все.

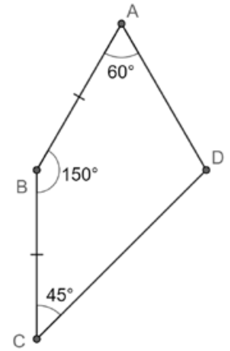


Рис.5, условие

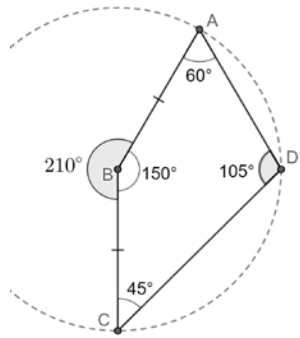


Рис. 6, основная конструкция

Сначала посчитаем углы. Мы знаем углы треугольника ABC и еще $\angle ADC = 105°$, и все. Как часто бывает в задачах с числовыми данными, счет углов быстро закончился. Теперь нужна идея. Действительно**, заметим, что** (далее мы будем часто повторять эту фразу) $BA = BC$, (**неожиданный ход!**) плоский угол ABC равен $210°$ и $\angle ADC = 105°$, т.е. кратко $BA = BC$ и $210° = 2\angle ADC = 105°$ (рис. 6), а также точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно AC. Следовательно, по основной конструкции точка B — центр описанной окружности треугольника ADC, BD — радиус. Треугольник ABD — равнобедренный с углом $60°$, следовательно, он — правильный.

Теперь используем основную конструкцию, чтобы доказать теорему трилистника, ее еще называют лемма о трезубце. Достаточно редкое доказательство, поэтому полезно его обсудить со школьниками. Заодно и саму теорему вспомним.

Теорема трилистника

В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке I. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BIC лежит на описанной окружности треугольника ABC (рис. 7).

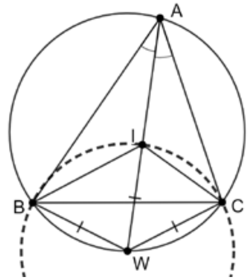


Рис. 7, окружность трилистника

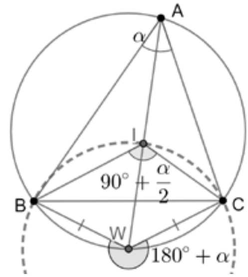


Рис. 8, основная конструкция

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда по формуле «угол между биссектрисами» $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Из вписанного четырехугольника $ABWC$ $\angle BWC = 180° - \alpha$. Тогда плоский угол при вершине W равен $180° + \alpha$ (рис. 8). Теперь ищем основную конструкцию. Итак, 1) есть равнобедренный треугольник, $WB = WC$; 2) плоский угол при вершине W $\angle BWC = 180° + \alpha = 2\angle BIC$; точки I и W расположены в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Следовательно, по основной конструкции W — центр описанной окружности треугольника BIC, т.е. $WB = WC = WI$. В дальнейшем нам понадобится факт, что центр окружности BIC лежит на середине дуги BC. Для решения задач полезно искать эту точку как пересечение описанной окружности и биссектрисы.

Задача про квадрат

Задача 2. *Внутри квадрата $ABCD$ взята точка T такая, что $\angle TBC = \angle TDB = \alpha$. Чему равен угол TAB? (рис. 9)*

На рис. 10–12 три разных способа решения. Можете попробовать решить задачу, не заглядывая далее в текст. В каждом способе решения мы задаем себе вопрос: где лежит центр описанной окружности вокруг некоторого треугольника.

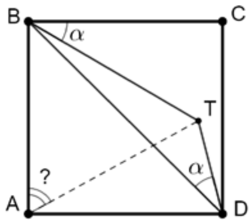


Рис. 9, условие

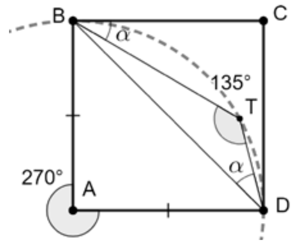


Рис. 10, конструкция

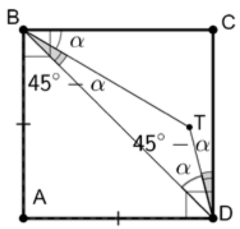


Рис. 11, признак касательной

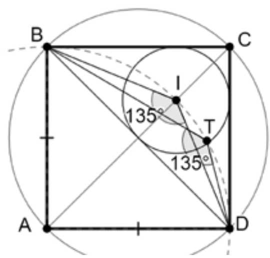


Рис. 12, окружность трилистника

Как часто бывает, сначала начнем считать все углы, потом заметим, что … (рис. 10) в треугольнике BTD уже все углы известны. Угол BTD равен 135° (почему?). Далее во всех способах решения будем доказывать, что точка A — центр окружности, на которой лежат точки B, T, D, и только потом найдем угол.

Конструкция

Рассмотрим четырехугольник $ABTD$ (рис. 10). $AB = AD$ и $\angle BTD = 135°$, осталось найти угол в два раза больше. Но плоский угол, больший развернутого, при вершине A как раз равен $360° - 90° = 270°$. Тогда согласно конструкции точка А — центр окружности, на которой лежат точки B, T, D. Угол найдем немного позже. Задача содержательная. Есть и другие идеи решения.

Угол между касательной и хордой

Заметим, что (рис. 11) в треугольнике BTD $\angle BDT = \angle CDT = \alpha$. Тогда по признаку касательной BC — касательная к описанной окружности ω треугольника BTD **(где лежит центр?)**. $\angle ABC = 90°$, следовательно, центр окружности ω лежит на луче BA. Аналогично рассмотрим углы $\angle TBD$ и $\angle CDT$ и сделаем вывод, что центр окружности ω лежит на также и на луче DA, т.е точка A — центр окружности ω.

Как мы уже знаем, $\angle BTD = 135°$. Полезно помнить, что в прямоугольном треугольнике BCD тоже есть угол, равный $135°$.

Окружность трилистника

Пусть в треугольнике BCD точка I — центр вписанной окружности (рис. 12). По формуле «угол между биссектрисами» $\angle BID = 90^\circ + \dfrac{90°}{2} = 135°$. Тогда из точек T и I отрезок BD виден под углом $135°$. Следовательно, точки B, I, T и D лежат на одной окружности (**где лежит центр?**). Заметим, что описанная окружность треугольника BID — это окружность трилистника треугольника BCD. Вспомним, что центр этой окружности лежит на пересечении описанной окружности и биссектрисы, т.е. в точке A.

Теперь осталось сделать последний шаг. Угол BAT — центральный, равен половине соответствующего вписанного, т.е. $\angle BAT = 2\alpha$.

Следующая задача заметно сложнее.

Равнобедренный треугольник с углом 80°

Задача 3. *Угол при вершине B равнобедренного треугольника равен $80°$. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MAC = 30°$, $\angle MCA = 10°$ (рис. 13). Найдите угол AMB.*

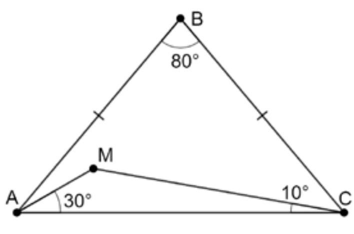


Рис. 13, условие

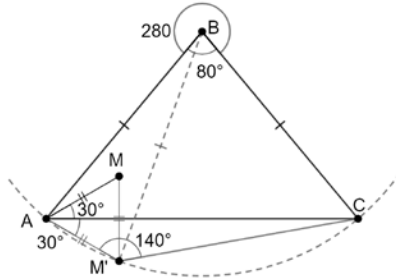


Рис. 14. Симметрия. Конструкция. Правильный треугольник

Заметим, что угол AMB равен $140°$, плоский угол при вершине B равен $280°$, т.е. в два раза больше, чем $\angle AMC$. Есть равнобедренный треугольник, и связь между углами, но точки M и B расположены в одной полуплоскости относительно прямой AC. Попробуем исправить это. Пусть точки M и M' симметричны относительно AC (рис. 14). Тогда треугольник AMM' — равносторонний (почему?). Треугольники AMB и BMM' равны по трем сторонам. Следовательно, BM — биссектриса угла ABM'. $\angle ABM' = 20°$ как центральный (Найдите соответствующий вписанный угол, на рис 14 он не отмечен). Получаем, что угол AMB равен $150°$.

Важный прием. Заметим, что при симметрии относительно прямой AC отрезка AM мы получили равносторонний треугольник AMM'. Этот прием можно использовать и в других задачах. Например, в задаче И.Ф. Шарыгина, предложенной на Московской математической олимпиаде 9 классу в 1993 году под номером 6, т.е. она была самой сложной в варианте.

Задача И.Ф. Шарыгина (угол 30º)

Дан выпуклый четырёхугольник $ABMC$*, в котором* $AB = BC$*, угол* BAM *равен* $30°$*, угол* ACM *равен* $150°$*. Докажите, что* AM *— биссектриса угла* BMC*.*

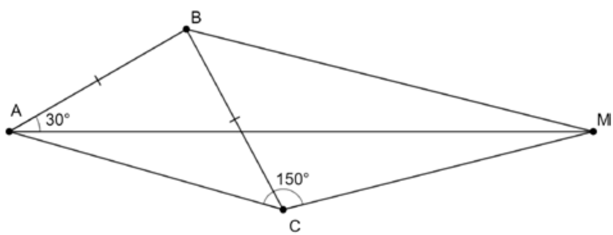


Рис. 15

Насколько простое условие, всего две строчки, и как же непросто ее решить. В конце статьи есть указание

Теперь мы готовы решить сложную задачу. Она имеет много разных способов решения. Мы обсудим тот, который использует вспомогательную окружность.

Задача с Турнира Городов

2016/2017 год, автор — А.А. Заславский

Задача 4. *Докажите, что в прямоугольном треугольнике ортоцентр треугольника, образованного точками касания сторон с вписанной окружностью, лежит на высоте, проведенной из прямого угла (рис. 16). (Ортоцентр треугольника — точка пересечения его высот.)*

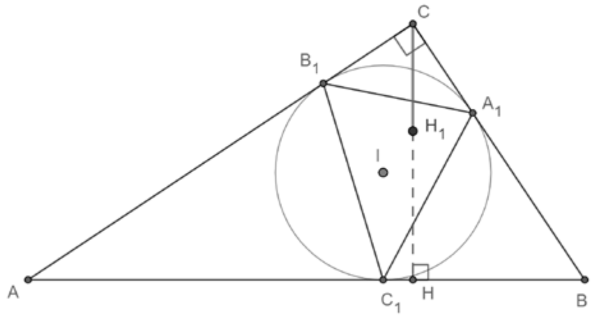


Рис. 16, условие

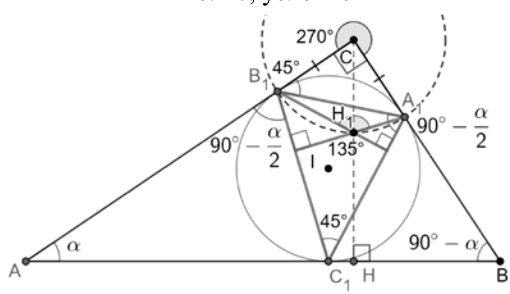


Рис. 17, условие

Как обычно начнем считать все (или почти все) углы, которые возможно. Пусть I — центр вписанной окружности, угол $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90° - \alpha$. Начнем с самого простого, с треугольника A_1B_1C (рис. 17). Итак, в треугольнике $\angle A_1B_1C = \angle B_1A_1C = 45°$ (почему?). Тогда по теореме об угле между касательной и хордой $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1B_1C = 45°$. Теперь понятно, что если $\angle A_1CH_1 = \alpha$, то прямая CH_1 перпендикулярна прямой AB (почему?). Будем доказывать, что $\angle A_1CH_1 = \alpha$.

Заметим, что в треугольнике $A_1C_1B_1$ по формуле «угол между высотами» $\angle A_1H_1B_1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Но плоский угол, больший развернутого, при вершине A как раз равен $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ и $CB_1 = CA_1$. Тогда согласно конструкции точка C — центр окружности, на которой лежат точки B_1, H_1, A_1. Но ведь эта фраза у нас уже встречалась. Действительно, **CB_1IA_1 — квадрат (полезный факт!)**. И нам опять надо найти центральный угол A_1CH_1 как в задаче 2 (рис. 9). Прямая B_1H_1 содержит высоту треугольника $A_1C_1B_1$. Поэтому $\angle A_1B_1H_1 = 90^\circ - \angle C_1A_1B_1$ (*). По теореме об угле между касательной и хордой $\angle C_1A_1B_1 = \angle AB_1C_1 = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Из равенства (*) получим, что $\angle A_1B_1H_1 = \dfrac{\alpha}{2}$. Тогда по теореме о центральном и вписанном углах $\angle A_1CH_1 = 2\angle A_1B_1H_1 = \alpha$. Мы уже знаем, что из этого следует, что прямая CH_1 перпендикулярна прямой AB. Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

1. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны по 120°, $AB = BC = n$. Найдите длину диагонали BD.*

2. Ленинградская олимпиада, 1985 год, 8 класс, №3 из 6. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол ABD равен 65°, угол CBD равен 35°, угол ADC равен 130° и $AB = BC$. Найдите углы четырехугольника.*

3. *Углы при вершинах B и C треугольника ABC равны 80° и 70° соответственно. Внутри ΔABC взята точка K такая, что ΔBKC — равносторонний. Найдите величины углов KAC и KAB.*

4. *Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC$, с углом при основании, равном 50°. Вне треугольника, но внутри угла ACB, взята точка T такая, что $\angle ATC = 10^\circ$, а $\angle BTC = 40^\circ$. Найдите величину угла CAT.*

5. *Из вершины* C *равностороннего треугольника* ABC *проведен луч внутри угла* ACB, *на котором взята точка* K. *При это оказалось, что* $\angle CKA = 10°$, $\angle CKB = 30°$. *Найдите величину угла* ACK.

6. *Дан квадрат* $ABCD$. *Отрезок* AE *пересекает сторону* BC, *причем* $\angle BAE = 30°$, *а* $\angle BCE = 75°$. *Найдите* $\angle CBE$.

7. *В выпуклом четырёхугольнике* $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60°$, $\angle BCA = \angle CAD = 30°$. *Найдите* BD, *если* $AB = 2$ *см.*

8. *Отрезок* AL — *биссектриса треугольника* ABC, K — *точка на стороне* AC, *причём* $CK = CL$. *Прямая* LK *и биссектриса угла* B *пересекаются в точке* P. *Докажите, что* $AP = PL$.

9. *В выпуклом четырёхугольнике* $ABCD$ *известны углы:* $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. *Найдите угол между диагоналями этого четырёхугольника.*

10. Лемма Архимеда о проекции на диаметр. *К окружности* ω *с диаметром* AB *проведены касательные* EC *и* ED. *Хорды* BC *и* AD *пересекаются в точке* N. *Докажите, что* $FN \perp AB$.

Вернемся в самое начало и вспомним **Задачу 1.**

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 60°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 45°$ *и* $AB = BC$. *Докажите, что треугольник* ABD — *равносторонний (рис. 18).*

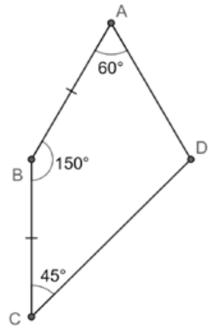


Рис. 18, условие

Самое удивительное решение предложила Олеся Москвичёва из 8 класса школы Летово. Идея простая, на уровне 7 класса, обратный ход. Давайте решать задачу на построение. По данным в задаче можно построить четырехугольник, подобный данному. Сначала строим равнобедренный треугольник ABC с углом B, равным $150°$, потом откладываем правильный треугольник ABD. Получаем, что $\angle DBC = 45°$. Решение единственное. Построенный четырехугольник удовлетворяет условию. Задача решена, треугольник ABD — правильный.

Автор благодарен ученикам 8 класса школ 1514 и Летово, с которым обсуждались конструкции и задачи из статьи, а также своим ученикам из школы 2007 ФМШ. Статья отражает опыт работы автора на уроках и кружках со статьями [1] и [2] и с книгой [3].

Задачи №1–5, 10 взяты из статей [1] и [2]. В книге [3] приведены решения задач, отличные от разобранных выше: задача 2 про квадрат — Д26, задача И.Ф. Шарыгина — Д28. В этой же книге можно найти решения задач из списка для самостоятельного решения: №6, 7 — глава 4, №4.6 и 4.8; №8 — Д40, №9 — Д18.

Методические рекомендации

Статья посвящена в основном решению обратных задач, но перед проведением занятия по задачам этой статьи полезно повторить решение задачи 4.3 из [3].

Дан равносторонний треугольник ABC со стороной a. Точка D находится от точки A на расстоянии a. Какие значения может принимать величина угла BDC?

Ответ: $30°$ и $150°$.

Решение, конечно, очевидно (рис.19а и 19б). Вспомогательная окружность возникает прямо из условия. Но часто школьники забывают случай на рис. 19б.

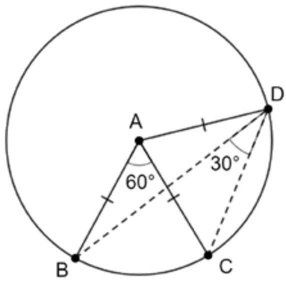


Рис. 19а

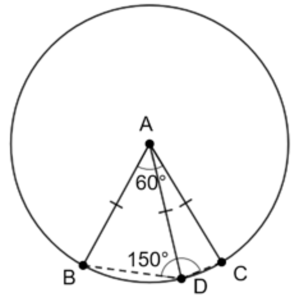


Рис. 19б

Эта конструкция с углами $30°$ и $150°$ возникает как обратная задача в разобранных выше задачах или в задачах для самостоятельного решения.

Указания к задаче И.Ф. Шарыгина

1 способ. Два факта, которые помогают придумать дополнительное построение. 1) Надо доказать, что MA — биссектриса угла BMC. 2) $\angle BAM = 30°$. Поэтому можно попробовать сделать симметрию как в задаче 3 относительно прямой AM (рис. 20). Получим правильный треугольники и вспомогательную окружность.

Попробуйте закончить решение.

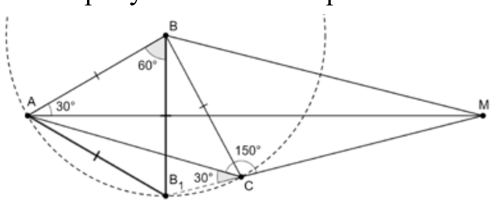


Рис. 20, указание к решению

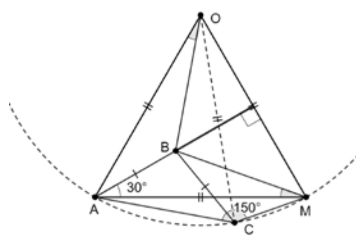


Рис. 21, указание к другому решению

2 способ. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC (рис.21). Тогда треугольник OAM — правильный как на рис. 19б. $\angle BAM = 30°$, поэтому AB — ось симметрии треугольника OAM. Следовательно, $\angle BOA = \angle BMA$.

Литература

[1] Филипповский Г.Б., Конструкция, преподносящая сюрпризы. Математика, 2008, №9.

[2] Филипповский Г.Б., Конструкция, любимая Архимедом.

[3] Блинков Ю.А., Горская А.С., Вписанные углы, М.: МЦНМО, 2017.

Метод «от противного» в алгебре
(подборка задач)

П.В. Чулков,
г. Москва, школа №2007 ФМШ
chulkov2007@yandex.ru

Чтобы доказать утверждение A методом «от противного», действуем так:

1. Предполагаем, что доказываемое утверждение A неверно, то есть верно противоположное ему утверждение $\overline{A}$;

2. Получаем из утверждения $\overline{A}$, такое следствие B, которое противоречит заведомо верному утверждению C (противоречие);

3. Из порученного противоречие делаем вывод о том, что предположение $\overline{A}$ неверно, то есть верно утверждение A, которое требовалось доказать.

В данной подборке представлено несколько задач на использование метода доказательства «от противного» в алгебре, что во многих случаях дает возможность решать задачи проще, чем прямые методы.

Это особенно интересно еще потому, что в школьном обучении алгебра (в отличие от геометрии) предстает, чаще всего, как вычисление (преобразование выражений), а логическая основа этих рассуждений проявляется не часто.

Задача 1[1]. *Вещественные числа* x, y, z *таковы, что выполнены неравенства* $2x > y^2 + z^2, 2y > z^2 + x^2$, $2z > x^2 + y^2$. *Докажите, что каждое из чисел* x, y, z *меньше* 1.

Решение. Предположим противное тому, что требуется доказать. Пусть одно из чисел не меньше 1, например, $x \geq 1$, тогда $2x > z^2 + 1$, $2z > 1 + y^2$ (огрубление). Сложим полученные неравен-

[1] ВсОШ, 2025, 11.2.

ства: $0 > (z-1)^2 + (y-1)^2$, что неверно, так как сумма квадратов не меньше 0. То есть $x < 1$.

Задача 2[2]. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c-a) = b^2(c+a-b) = c^2(a+b-c)$. Докажите, что $a = b = c$.

Решение. Докажем сначала, что среди этих чисел есть равные. Предположим, что все числа a, b, c различны. Перепишем равенство в виде $a^2(b+c+a-2a) = b^2(c+a+b-2b) = c^2(a+b+c-2c)$.

Обозначим $a+b+c = m$ и $a^2(m-2a) = b^2(m-2b) = c^2(m-2c) = n$.

То есть числа a, b, c - корни уравнения, $2x^3 - mx^2 + n = 0$, другими словами $m = m/2$ (Теорема Виета) и $m = 0$.

Следовательно, $2a^3 = 2b^3 = 2c^3$ — противоречие.

Оно означает, что все три числа различными быть не могут.

Тогда, если например, $a = b$, то $a^2c = c^2(2a-c)$, $a^2 = c(2a-c)$, $(a-c)^2 = 0$, то есть $a = c$ и все три числа равны.

Задача 3[3]. *Существуют ли такие действительные числа* a, b, c*, что равенство* $|x+a| + |x+y+b| + |y+c| > |x| + |x+y| + |y|$ *верно при всех действительных значениях переменных* x, y.

Ответ: не существует.

Решение. Предположим противное, то есть, что такие действительные числа существуют и данное неравенство верно для всех x, y.

Выберем x, y такими, чтобы значение всех подмодульных выражений было положительно. Раскроем модули и приведем подобные слагаемые, получим: $a+b+c > 0$.

Затем выберем x, y такими, чтобы значение всех подмодульных выражений было отрицательно. Раскроем модули и приведем подобные слагаемые получим: $a+b+c < 0$.

Противоречие. Следовательно, предположение, что существуют ли такие действительные числа неверно.

---

[2] ВсОШ, 2008, 9.3.

[3] (ВсОШ, 1999, 4 этап, 11-1).

Задача 4. Решите в натуральных чисел уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}=1$.

Докажем, что уравнение не имеет решений в натуральных числах. Предположим пара натуральных чисел $(x;y)$ — решение задачи. Рассмотрим случай $x \le y$. Заменим y на x. Получим: $\frac{3}{x^2} \ge 1$, $x^2 \le 3$, $x \le \sqrt{3}$, $x = 1$. Легко убедиться подстановкой, что это не решение задачи.

Задача 5[4]. Докажите, что многочлен $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами.

Предположим противное: многочлен $f(x)$ удалось представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами.

Решение. Предположим, нам это удалось и пусть

$$g(x)s(x) = f(x), \text{ где}$$

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} + x^p = g(x).$$

$$b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1} + x^k = s(x)$$

Все коэффициенты многочленов целые числа и $p + k = n$.

Раскрыв скобки, приравняв левые и правые части, заметим:

1) $a_0 \cdot b_0 = 3$ и тогда можно считать, что $|a_0| = 3$, $|b_0| = 1$

2) Если у многочлена $f(x)$ есть рациональные корни, то это делители числа 3.

3) Легко проверить непосредственной подстановкой, что многочлен $f(x)$ рациональных корней не имеет.

Следовательно, $1 < p + 1 < n$ (разложение $f(x)$ не имеет линейных множителей)

Приравняем коэффициенты многочлена $f(x)$ и произведения многочленов в левой части:

[4] IMO, 34

$$\begin{cases} a_0b_0 = 3, \\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0, \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0 \\ \ldots \\ a_{p-1}b_0 + a_{p-2}b_1 + \ldots = 0 \\ b_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \ldots 0 \end{cases}$$

Затем последовательно получаем, что, так как a_0 кратно 3 (из первого равенства), то из второго равенства, что a_1 кратно 3, из третьего, что a_2 кратно 3 и так далее.

Наконец из p-го равенства получаем, что a_{p-1} кратно 3, а из последнего равенства следует, что b_0 кратно 3, что противоречит предположению, что $|b_0| = 1$.

Совсем простые задачи

Задача **6**[5]. Существуют ли попарно различные числа a, b, c такие, что $a(b-c) = b(a-c) = c(a-b)$?

Задача **7**[6]. *В выражении* $\left(x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2\right)^{2007}$ *раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени* x *получился отрицательный коэффициент.*

Задача **8**. *Можно ли многочлен* $f(x) = 2x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 8x + 1$ *представить в виде квадрата некоторого многочлена с действительными коэффициентами?*

Задача **9**[7]. *Докажите, что неравенства* $|x| < |y - z|$, $|y| < |z - x|$, $|z| < |x - y|$ *не могут выполняться одновременно.*

---

[5] ВсОШ, 2008, 8.3.
[6] ММО, 2006, 9
[7] ММО, 1986, 7.2.

Задача **10**. Существуют ли такие положительные числа a,b,c, для которых одновременно выполняются три неравенства: $a(1-b)>1/4$, $b(1-c)>1/4$ и $c(1-a)>1/4$?

Задача **11**.[8] Решите систему уравнений $(x+y)^3=z$, $(y+z)^3=x$, $(z+x)^3=y$.

Задача **12.** Докажите, что не существует многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(7)=11$, $f(11)=13$.

Задача **13.** Существует ли функция $f(x)$, определенная на всей числовой оси, удовлетворяющая при всех x,y соотношению $|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2$.

Задача **14**[9]**.** Докажите, что уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$, в котором коэффициенты a,b,c по модулю не превосходят s не могут иметь корень, по модулю превосходящий $s+1$.

Задача **15.** Даны квадратные трехчлены $f_2(x)=x^2+2b_2x+c_2$, $f_2(x)=x^2+2b_2x+c_2$, $f_3(x)=x^2+2b_3x+c_3$. Докажите, что если выполнено условие $b_1b_2b_3=c_1c_2c_3>1$, то хотя бы один из трехчленов имеет два корня.

Задача **16.** Ненулевые числа a,b удовлетворяют равенству $a^2b^2(a^2b^2+4)=2(a^6+b^6)$. Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

Решения и комментарии

6. Ответ: нет. Предположим противное. Пусть существуют попарно различные числа, что $a(b-c)=b(a-c)=c(a-b)=x$. Сложим равенства: $x=bc-ac$, $x=ab-bc$, $x=ab-ac$. После раскрытия скобок получим: $3x=0$, то есть $x=0$, откуда $a(b-c)=b(a-c)=c(a-b)=0$, откуда $a=b=c$, что противоречит предположению, что числа a,b,c попарно различны.

[8] VI Турнир городов, 7-8
[9] ВсОШ, 1981, 9.7.

7. $f(0)=f(1)=2^{2007}$. Заметим, что $f(1)=2^{2007}$ — сумма коэффициентов данного многочлена, $f(0)=2^{2007}$ — коэффициент одного из них (свободного члена). Следовательно, среди оставшихся коэффициентов есть отрицательный.

8. Предположим противное: нам удалось представить многочлен в виде суммы квадратов. Такой многочлен не может принимать отрицательных значений. Но $f(1)<0$. Противоречие. Представить многочлен в виде сумы квадратов нельзя

9. Предположим противное. Пусть верны все три неравенства. Возведем их в квадрат: $x^2<(y-z)^2$, $y^2<(z-x)^2$, $z^2<(x-y)^2$.

Разложим на множители: $(x-y+z)(x+y-z)<0$,

$$(y-z+x)(y+z-x)<0,\ (z-x+y)(z+x-y)<0.$$

Перемножим: $-(x-y+z)^2(y-z+x)^2(z-x+y)^2<0$. Противоречие получено.

10. Предположим противное. Пусть верны все три неравенства.

Перемножим неравенства. Получим:

$$abc(1-a)(1-b)(1-c)>1/64.$$

С другой стороны: $a(1-a)\le 1/4$, что следует из неравенства Коши. Перемножим три аналогичных неравенства и получим противоречие.

11. Решения легко находятся в случае, когда $x=y=z$.

Достаточно решить уравнение $8x^3=x$. Корни: $\{0;\pm 1/2\}$, откуда и получаем ответ: $(0;0;0)$, $(1/2;1/2;1/2)$, $(-1/2;-1/2;-1/2)$.

Докажем, что других решений нет. Предположим противное. Пусть, например, $x>y$. Перепишем равенства в виде: $y+z=\sqrt[3]{x}$, $z+x=\sqrt[3]{y}$. Вычтем из одного равенства другое. Получим: $y-x=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$, что невозможно (левая часть равенства отрицательна, правая положительна).

12. Предположим, что существует многочлен, для которого $f(7)=11$, $f(11)=13$, тогда $f(11)-f(7)=2$.

Последнее равенство противоречит теореме Безу, согласно которой $f(a)-f(b)$ кратно $a-b$. Следовательно, указанного многочлена с целыми коэффициентами не существует.

13. Предположим, что существует.

Тогда при $x=3\pi/2$, $x=-\pi/2$ получим $|f(\pi)-2|<2$, а при $x=y=\pi/2$ получим $|f(\pi)+2|<2$, что не может выполняться одновременно. Из первого неравенства следует, что $f(\pi)$ — положительно, из второго, что отрицательно. Противоречие.

14. Предположим противное. Пусть $|x_1|>s$, тогда

$$\left|x_1^3\right|=\left|ax_1^2+bx_1+c\right|\le|a|x_1^2+|b||x_1|+|c|\le\frac{s}{(s+1)-1}\left(x_1^2+x_1+1\right)\le\left|x_1^3-1\right|$$

Противоречие.

15. Предположим противное. Тогда дискриминанты квадратных трехчленов D_1, D_2, D_3, неположительны, то есть $b_1^2\le c_1$, $b_2^2\le c_2$, $b_3^2\le c_3$. Следовательно, $b_1^2b_2^2b_3^2\le c_1c_2c_3$, что невозможно, так как $b_1b_2b_3=c_1c_2c_3>1$. Таким образом хотя бы один из дискриминантов положителен и имеет два корня.

16. Предположим числа a,b — рациональны.

Приведем исходное равенство к виду: $\left(a^4-2b^2\right)\left(b^4-2a^2\right)=0$. Следовательно, выполнено хотя бы одно из равенств $a^4-2b^2=0$, $b^4-2a^2=0$, то есть $\left(a^2/b\right)^2=2$ или $\left(b^2/a\right)^2=2$. Одна из дробей a^2/b или b^2/a — иррациональное число, а значит одно из чисел a,b — иррациональное число.

Литература

1. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2. – М.: Просвещение, 2009.

2. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 3. – М.: Просвещение, 2010.

3. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Всероссийские олимпиады по математике. 1993-2009. Заключительные этапы. – М.: МЦНМО, 2011.

4. Бегунц А.В., Гашков С.Б., Горяшин Д.В., Косухин О.Н., Флеров А.А. Московские математические олимпиады 1981-1992. – М.: МЦНМО, 2017.

4. Гашков С.Б., Сергеев И.Н. Задачи математических олимпиад школьников. – М.: 1986.

5. Толпыго А.К. Тысяча задач Международного математического турнира городов. – М.: МЦНМО, 2010.

6. Туманов С.И. Поиски решения задачи. – М.: Просвещение, 1969.

7. Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терешин Д.А. Российские математические олимпиады школьников. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 1996.

Системы линейных уравнений (введение в теорию линейных пространств для школьников)

А.С. Штерн,
г. Москва
ashtern@yandex.ru

А как это выглядит в двумерном случае?
Глазман И.М. (цит. по книге Глазман И.М., Любич Ю.И.
«Конечномерный линейный анализ в задачах»)

В программах профильных классов старшей школы математический анализ занимает очень существенное место. Можно даже сказать, ссылаясь, например, на учебник [1], что анализ в них доминирует. А линейная алгебра, другой базовый курс университетской программы на младших курсах, школьниками практически не изучаются. Разве что, в сильных курсах олимпиадной подготовки присутствуют задачи, которые обычно характеризуются, как посвящённые «идее линейности». Но этого совершенно недостаточно. Во-первых, потому, что такие курсы рассчитаны на очень узкий круг школьников. Во-вторых, как бы мы не расширяли понятие линейности, к нему не могут сводиться реальные трудности (достаточно большие), с которыми сталкивается студент 1-го курса при изучении линейной алгебры. Остаются, например, неумение работать с функциями, заданными не на числовой прямой, а на более непривычном множестве, недостаток понимания в вопросе эквивалентности алгебраических преобразований и многое другое. Лучший, с нашей точки зрения, путь к решению этих проблем — комплексное изучение основных понятий и алгоритмов линейной алгебры на задачах, не так далеко отходящих от школьного курса алгебры. Именно на это и нацелен небольшой пропедевтический курс (4-5 занятий), с материалами которого знакомит статья. Занятия предназначены для учеников 9-11 классов.

Курс линейной алгебры в университете состоит, грубо говоря, из двух частей. Первый можно назвать «Линейные пространства и линейная размерность», второй носит геометрический характер и условно может быть назван «Теорией линейных преобразований». Этот текст посвящён первой части. Дело не в том, что школьнику невозможно или не нужно объяснить, что такое, например, собственный вектор. Опыт автора как раз показывает обратное. Но это материал отдельного небольшого курса, опыт изложения которого школьникам у автора также имеется. Надеюсь, что подробный текст на эту тему также со временем будет написан.

Проблематика систем линейных уравнений не чужда практике математических олимпиад. В конце мы приводим несколько «олимпиадных» задач, по возможности подробно выписывая их решения.

Автор ни за что не взялся бы за работу над этим текстом, не обладай он опытом (на наш взгляд, относительно успешным) проведения подобных занятий. Площадки для их проведения были самыми разными: Летняя математическая школа «Дважды два», спецкурсы и уроки в профильных группах школы «Летово», уроки «математического анализа» в спецклассах московской школы №57, система израильских математических кружков «Юный математик» и т.д. Хочется поблагодарить всех, без одобрения и помощи которых данный курс не смог состояться. Нужно также упомянуть задачник [2], в котором немало задач посвящено вопросам линейной алгебры, причём в весьма близком автору ключе.

Необходимые предварительные знания из курса 8 класса

Векторы на плоскости

Определение, сложение вектора и умножение на число, линейная комбинация векторов; разложение вектора по базису.

Системы из двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными

Общий вид такой системы (*)

$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases},$$

где a,b,c,d,m — произвольные числа. Решением системы называется пара чисел (x,y), которые обращают в равенство каждое уравнение системы. Эту пару удобно рассматривать, как вектор или точку на координатной плоскости. Тогда уравнения системы оказываются уравнениями прямых и, в зависимости от их взаимного расположения, система либо имеет единственное решение, либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет их вовсе. Ситуация, в которой она имеет конечное число решений, отличное от одного, невозможна. Нам предстоит изучать системы уравнений, в которых произвольно, как число неизвестных, так и число самих уравнений. Сохранится ли это свойство? Или нас удастся придумать, систему, имеющую два или миллион решений? В этом нам предстоит разобраться. Из этого частного случая нам будет полезно запомнить и такое соображение. Хорошо известно, что система (*) является «нормальной», т.е. имеет единственное решение при любых правых частях в том и только случае, когда выполнено условие $bc-ad=0$. Это условие можно переписать в виде $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$, где подразумевается, что знаменатели обеих дробей не могут быть равны нулю одновременно. А это условие, конечно, означает, что вектора $(a,\,b)$ b $(c,\,d)$ неколлинеарны. Запомним этот факт — в дальнейшем он нам понадобится.

Пример.

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ x+4y=11 \end{cases}$$ — *вектор решения:* $(6,-13)$

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$$ — *вектор решения:* $(5-3y,\,y)\quad y\in R$

Матрица линейной системы

Общий вид линейной системы из n уравнений с m неизвестными выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1m}x_m = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2m}x_m = \beta_2 \\ \qquad\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nm}x_m = \beta_n \end{cases}.$$

Чтобы успешно работать с системами, нужно иметь ввиду два соображения.

А) Нам предстоит совершать разнообразные действие с уравнениями системы. В этой ситуации удобнее не носить с собой обозначения неизвестных, а ограничиться работой с табличкой коэффициентов $A = \begin{cases} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{cases}$, которую принято называть (основной) матрицей системы. Трудно сказать, кому эта идея пришла в голову впервые. Сам термина «матрица» (matrix) придумал известный англо-американский математик 19-го века Джеймс Джозеф Сильвестр, однако сложно представить, что великий Гаусс, применяя к системам свой знаменитый алгоритм, многократно переписывал множество неизвестных, в чём не было никакой необходимости. Тем не менее, термин всё-таки принадлежит Сильвестру, и мы часто будем употреблять термин «матрица Сильвестра системы». Числа a_{fj} обычно называют коэффициентами системы.

Б) Удобно представлять, что матрица Сильвестра системы есть набор n m-мерных векторов-строк $b_i = (a_{i1}\ \ a_{i2}\ \dots\ a_{im})$ или набор из m n-мерных векторов-столбцов.

В последнем случае к ним удобно добавлять вектор-столбец правых частей $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$.

Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897 гг.)

Как и в простейшем случае, решение системы — набор чисел $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$, который при подстановке в систему вместо неизвестных даёт верное равенство, причём удобно считать, что решение такой системы есть вектор длины m.

Однородные системы

Система уравнений, у которой в правой части стоят только нули, называется **однородной**. Вектор, состоящий из одних нулей, будет решением однородной системы. Такое решение будем называть **тривиальным**. Возможны и другие (нетривиальные) решения.

Пример: $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ — *однородная система;* $(4, -1, -1)$ — *её нетривиальное решение;* ***общее решение системы*** *имеет вид* $(-4y, y, y)$, y *— произвольное вещественное число.*

Замечание. В следующих случаях однородная система линейных уравнений от m неизвестных имеет нетривиальное решение.

А) $n=1$, $m>1$, то есть система из одного уравнения $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m=0$ с более, чем одним неизвестным. В самом деле, хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля и можно считать, что это коэффициент при первом неизвестном. Тогда общее решение имеет вид

$$\left(-\frac{a_2b_2+\ldots+a_mb_m}{a_1}, b_2, b_3, \ldots, b_m\right),$$

где $b_2, b_3, \ldots, b_m$ — произвольные числа. Достаточно взять $b_2\neq 0$, чтобы получить нетривиальное решение системы.

Б) $n=2$, $m>2$ — система из двух уравнений с более, чем двумя неизвестными.

Если при каждом неизвестном в каком-то из уравнений системы $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=0 \end{cases}$ коэффициент равен нулю, то это уравнение можно решать независимо, а они решаются в силу пункта А. Если, например, оба коэффициента при первом неизвестном отличны от нуля, то систему можно переписать так

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m}{a_{11}} \\ x_1=-\dfrac{a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m}{a_{21}} \end{cases}.$$

Подберём значения неизвестных так, чтобы эти дроби были равны.

$$\frac{a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m}{a_{11}}=\frac{a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m}{a_{21}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22})x_2+\ldots+(a_{21}a_{1m}-a_{11}a_{2m})x_m=0$$

— далее в силу предыдущего пункта на самом деле можно подобрать числа $x_2,\ldots,x_m$, среди которых есть ненулевое, так, чтобы выполнялось последнее равенство. Но после этого останется найти первое неизвестное по полученным формулам, и нетривиальное решение исходной системы будет найдено.

Следующая теорема обобщает разобранные примеры.

Теорема 1. *Если **в однородной** системе число уравнений меньше числа неизвестных, то эта система имеет нетривиальное решение.*

А когда имеет нетривиальное решение система, у которой число неизвестных **равно** числу уравнений? Такие системы мы будем называть **квадратными**. Ответ на этот вопрос даёт теорема 2.

Теорема 2. *Квадратная **однородная** система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда **одна из строк коэффициентов является линейной комбинацией предыдущих**.*

Полное доказательство теорем 1-2 пока отложим и приведём примеры, иллюстрирующие их формулировки.

Пример 1. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+2z+t=0 \end{cases}.$

Система решается очевидным образом $\begin{cases} y+z=0 \\ x+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=-t \end{cases}.$

Таким образом, общее решение системы имеет вид $(x,\ y,\ -y,\ -x)$. Подставляя вместо переменных ненулевые числа, получаем, нетривиальное решение системы.

Пример 2. *Решаем квадратную систему* $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ 3x+8y-5z=0 \end{cases}.$

$\begin{cases} x=2y-3z \\ 7y-7z=0 \\ 14y-14z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ z-\textit{любое} \end{cases}$ — видим, что нетривиальное решение у этой системы есть.

Вектора-строки матрицы системы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$ выглядят так

$\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(2,3,-1)$, $\vec{c}=(3,8,-5)$.

По теореме 2 один из этих векторов должен быть линейной комбинацией предыдущих. Так и есть: $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. *Найдите общее решение системы* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \ldots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \end{cases}$ *?*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ \ldots \\ x_{98} + x_{99} + x_{100} = 0 \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_4 \\ x_2 = x_5 \\ x_3 = x_6 \\ \ldots \\ x_{97} = x_{100} \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = x_4 = x_7 = \ldots = x_{100} \\ x_2 = x_5 = x_8 = \ldots = x_{98} \\ x_3 = x_6 = x_9 = \ldots = x_{99} \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$(a, b, -a-b, a, b, -a-b, \ldots, a, b, -a-b, a)$ — общее решение, причем $a = b \Rightarrow (a, a, -2a, a, a, -2a, \ldots, a, a, -2a, a)$ — общее решение.

2. *Найдите общее решение системы* $\begin{cases} x - 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + 4y - 3z - t = 5 \\ 4x - 2y + z + t = 3 \\ 3x + y + x - 2t = 10 \end{cases}$.

Разберём в следующем листочке.

3. *На координатной плоскости окружность проходит через три различные точки, у которых обе координаты рациональны. Докажите, что обе координаты центра тоже рациональны.*

Выпишем уравнение окружности.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ — точки; $O(x_0, y_0)$ — центр;

$$\begin{cases}(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=R^2\\(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2=R^2\Rightarrow\\(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2=R^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2\\(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2=(x_3-x_0)^2+(y_3-y_0)^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=2(x_1-x_2)x_0+2(y_1-y_2)y_0\\x_2^2+y_2^2-x_3^2-y_3^2=2(x_2-x_3)x_0+2(y_2-y_3)y_0\end{cases}$$

Если полученная система имеет единственное решение, то оно будет рациональным, так как выражается через рациональные числа с помощью четырёх алгебраических действий. Но, если решений, бесконечно много, то одно из неизвестных может принимать произвольные значения, в частности, иррациональные. Единственность решений означает, что вектора $(x_1-x_2,\,y_1-y_2)$ и $(x_2-x_3,\,y_2-y_3)$ неколлинеарны. Но это, в свою очередь означает, что

$$\frac{x_2-x_3}{x_1-x_2}\neq\frac{y_2-y_3}{y_1-y_2}\Leftrightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\neq\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}\Leftrightarrow k_{AB}\neq k_{BC}\Leftrightarrow A,B,C$$

неколлинеарны. А это верно, потому что три коллинеарные точки не могут лежать на одной окружности.

4. *Пусть* a, b, c, d, e *и* f *— некоторые числа, причём* $ace\neq 0$. *Известно, что значения выражений* $|ax+b|+|cx+d|$ *и* $|ex+f|$ *равны при всех значениях* x. *Докажите, что векторы* (a,c) *и* (b,d) *коллинеарны.*

Доказательство.

$$\forall x\ |ax+b|+|cx+d|=|ex+f|\Rightarrow \text{при}$$

$$x_0=-\frac{f}{e}\Rightarrow|ax_0+b|+|cx_0+d|=0\Rightarrow\frac{af}{e}=b,\ \frac{cf}{e}=d\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

5. *Имеется система уравнений* $\begin{cases} *\,x + *y + *z = 0 \\ *\,x + *y + *z = 0 \\ *\,x + *y + *z = 0 \end{cases}$. *Два человека вписывают по очереди вместо звёздочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела нетривиальное решение.*

Доказательство. Будем добиваться в системе

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

решения $(1,1,0)$.

Но $(1,1,0)$ — решение $\Leftrightarrow a_{11} = -a_{12}$, $a_{21} = -a_{22}$, $a_{31} = -a_{32}$. Значит, первый может действовать по следующему алгоритму. Первый ходит в третий столбик. Далее, когда второй ходит в один из двух первых столбиков число m, то второй ставит на соседнее место в строке число $-m$. А, когда второй пойдёт в третий столбик, первый этот столбик закроет произвольным образом. Получится система вида, нужного первому.

6. *Имеется четыре вектора* $a_1 = (0,1,1,1)$, $a_2 = (1,0,1,1)$, $a_3 = (1,1,0,1)$, $a_4 = (1,1,1,0)$. *Вася хочет подобрать целые числа* m_1, m_2, m_3, m_4, *не все из которых делятся на данное простое число* p, *так, чтобы все координаты вектора* $m_1a_1 + m_2a_2 + m_3a_3 + m_4a_4$ *делились на число* p. *При каких значениях числа* p *ему удастся это сделать?*

Ответ. $p = 3$.

Решение. При $p = 3$ достаточно взять $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$. При $p \neq 3$ из того, что на число p делятся все тройные суммы $m_i + m_j + m_k$, следует, что делятся и все числа m_1, m_2, m_3, m_4.

7. *В ряд лежат в некотором порядке семь монет (по одной с весами* $1, 2, \ldots, 7$ *граммов). Для каждой монеты (кроме крайних) известна сумма весов её соседей. У какого наибольшего количества монет можно гарантированно узнать вес?*

Ответ: у трёх — второй, четвёртой и шестой.

Решение. Обозначим веса монет по порядку $x_1, x_2, \ldots, x_7$ и выпишем по имеющимся данным систему

$$x_1 + x_3 = a_2,\ x_2 + x_4 = a_3,\ x_3 + x_5 = a_4,\ x_4 + x_6 = a_5,\ x_5 + x_7 = a_6,$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 28 \Leftrightarrow x_6 = 28 - a_2 - a_3 - a_6,\ x_4 = a_5 - x_6,$$

$$x_2 = a_3 - x_4,\ x_1 + x_3 = a_2,\ x_3 + x_5 = a_4,\ x_5 + x_7 = a_6.$$

Ясно, что в полученной системе все неизвестные с нечётными номерами выражаются через переменную x_1, которая может принимать произвольные значения. Это и показывает, что найти значения остальных неизвестных невозможно.

8. *Пусть все коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *попарно различны. Докажите, что система однородных уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + \ldots + a_n^{n-1} x_n = 0 \end{cases}$$

не имеет нетривиального решения.

Доказательство. Прежде всего сделаем также следующее очевидное замечание.

Замечание. В наборе векторов один из векторов является линейной комбинацией предыдущих тогда и только тогда, когда некоторая линейная комбинация этих векторов с коэффициентами, не все из которых равны нулю, даёт нулевой вектор. Такой набор векторов будем называть **линейно зависимым**.

Пусть теперь система имеет нетривиальное решение. Тогда строки матрица Сильвестра этой системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

линейно зависимы. Это означает, что найдётся набор чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, в котором не все числа равны нулю и такой, что выполнены равенства $c_0 + c_1 a_i + c_2 a_i^2 + \dots + c_{n-1} a_i^{n-1} = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Но это означает, что многочлен $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ степени не более $n-1$ имеет n различных корней.

9. Задача Л. Фибоначчи о купцах за столом. *За круглым столом сидит несколько (больше двух) купцов. Каждый хочет купить одну и ту же вещь (экземпляров вещей много), но за свои деньги покупать не хочет, а только сложив фиксированную сумму своих сбережений (у каждого свою) с фиксированной долей сбережений (одной для всех — например, третью часть), которые вкладывает сосед справа. Как им узнать необходимый размер своего взноса?*

Решение. Введём естественным образом неизвестные и запишем систему:

$$x_1 + \alpha x_2 = a,\ x_2 + \alpha x_3 = a, \dots,\ x_{n-1} + \alpha x_n = a,\ x_n + \alpha x_1 = a\,.$$

Если все неизвестные равны, то получаем $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \dfrac{a}{1+\alpha}$. Может ли быть по-другому? Рассмотрим следующую ситуацию. За столом сидит чётное число купцов, и каждый передаёт соседу справа точно такую же сумму, какую он вложил в покупку. При этом, все купцы, сидящие на чётных местах, вкладывают одну и ту же сумму, а все, сидящие на нечётных другую, но тоже одинаковую. Естественно, это возможно только при чётном числе купцов. Математически эта модель выглядит так: $a, b, \dots, a, b$; $\alpha = 1$, $a + b$ — стоимость вещи. Возможны ли другие варианты? Вычтем из каждого уравнение следующее (а из последнего первое) и положим

$$y_1 = x_1 - x_2,\ y_2 = x_2 - x_3, \ldots,\ y_{n-1} = x_{n-1} - x_n,\ y_n = x_n - x_1 .$$

Тогда получаем

$$y_1 + \alpha y_2 = 0,\ y_2 + \alpha y_3 = 0, \ldots,\ y_{n-1} + \alpha y_n = 0,\ y_n + \alpha y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = -\alpha y_2 = \alpha^2 y_3 = -\alpha^3 y_4 = \ldots = (-\alpha)^{n-1} y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n + \alpha(-\alpha)^{n-1} y_n = 0 \Rightarrow \text{ при } y_n \neq 0\ (-\alpha)^n = 1$$

При нечётных n это означает, что $\alpha = -1$, то есть все разности y_i одинаковы и поскольку их сумма равна нулю, то все они равны нулю. Значит, все взносы x_i одинаковы и равны $\frac{a}{1+\alpha}$. Этот случай мы уже отмечали. При чётных n возможен ещё случай $\alpha = 1$, что приводит к ситуации

$$y_2 = -y_1,\ y_3 = -y_2 = y_1,\ y_4 = -y_3 = y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 - x_3 = x_2 - x_1,\ x_3 - x_4 = x_3 - x_2 \ldots \Rightarrow x_1 = x_3 = \ldots,\ x_2 = x_4 = \ldots$$

Это вторая ситуация, возможная только при чётном числе купцов.

Ответ. При любом числе купцов возможна следующая ситуация. Каждый купец вкладывает в покупку одну и ту же величину, равную $\frac{a}{1+\alpha}$ и, соответственно, передаёт соседу справа $\frac{\alpha a}{1+\alpha}$, где a — стоимость вещи, а α — оговоренный коэффициент. При чётном числе купцов и $\alpha = 1$ (купцы договорились, что каждый отдаёт соседу столько же, сколько вкладывает сам) возможен ещё один вариант: все сидящие на чётных местах вкладывают одну сумму, а все сидящие на нечётных — другую. Причем вместе эти две суммы составляют стоимость вещи.

Алгоритм Гаусса

На рисунке экспонат музея Геттингенского университета — небольшой телескоп, с помощью которого Гаусс вёл астрономические наблюдения. Необходимость проделать большой объём вычислений в ходе обработки наблюдений и привела Гаусса к необходимости усовершенствования процедуры решения линейных систем.

Вернёмся к **задаче** из предыдущего занятия.

Найдите общее решение системы $\begin{cases} x-3y+2z-t=3 \\ 2x+4y-3z-t=5 \\ 4x-2y+z+t=3 \\ 3x+y+x-2t=10 \end{cases}$.

Решение.

Идея 1 (известная с древности — Древний Китай). Будем делать так, чтобы уравнения 2-4 не содержали первой неизвестной. Для этого отнимем от каждого уравнения первое с соответствующим коэффициентом. После этого пока забудем про первое уравнение и будем работать с остальными.

Идея 2 (видимо, Карл Фридрих Гаусс — великий немецкий математик, физик и астроном конца 18го-первой половины 19го века). Не будем таскать за собой неизвестные, а вместо этого выпишем расширенную матрицу системы (отличается от матрицы Сильвестра наличием столбца правых частей) и будем делать все указанные действия с ней.

Комбинация этих двух идей приводит к следующей последовательности действий.

Работаем с расширенной матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -7 & 5 & -9 \\ 0 & 10 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 10 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Теперь выпишем систему, соответствующую полученной матрице.

$$\begin{cases} x-3y+2z-t=3 \\ \qquad 10y-7z+t=-1 \\ \qquad\qquad z=1 \\ \qquad\qquad t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ z=1 \\ y=\dfrac{4}{5} \\ x=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$. Система решена.

Что получилось и что могло получиться?

А) $$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\alpha_{13}x_3+\alpha_{14}x_4=\beta_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2+\alpha_{23}x_3+\alpha_{24}x_4=\beta_2 \\ \qquad\qquad \alpha_{33}x_3+\alpha_{34}x_4=\beta_3 \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{44}x_4=\beta_4 \end{cases}$$ — треугольная система;

$\alpha_{ii}\neq 0$ — значение каждого неизвестного определяется однозначно, и система имеет единственное решение.

Б) $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = \beta_2 \end{cases}$ — трапециевидная система; $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \beta_1 - \alpha_{13}x_3 - \alpha_{14}x_4 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 = \beta_2 - \alpha_{23}x_3 - \alpha_{24}x_4 \\ x_3, x_4 - \textit{любые} \end{cases}$.

В) $\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = \beta_2 \\ \qquad \alpha_{34}x_4 = \beta_4 \end{cases}$ — общая ступенчатая система; $\begin{cases} a_{11}x_1 = \beta_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 \\ \qquad a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = \beta_2 \\ \qquad a_{34}x_4 = \beta_4 \\ x_2 - \textit{любое} \end{cases}$.

В двух последних случаях некоторые неизвестные принимают произвольные значения, а остальные через них выражаются. Первые из них называются **свободными**. Система, таким образом, имеет бесконечно много решений.

Что мы делали или что же такое алгоритм Гаусса?

Очень простой и естественный алгоритм решения систем линейных уравнений. Именно в силу простоты его довольно тяжело описать в общем виде — простое тяжело описывать. Но попробуем. Алгоритм Гаусса включает всего три процедуры: а) перестановка строк системы; б) вычитание из строки одной из предыдущих строк, умноженных на некоторый коэффициент; в) вычёркивание нулевой строки.

Общий шаг алгоритма Гаусса $\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ A_{k+1} - \alpha_{k+1}A_k \\ \vdots \\ A_n - \alpha_n A_k \end{pmatrix}$. Если после выполнения этого шага некоторая строка является линейной комбинацией предыдущих, то и до выполнения этого шага эта же строка была линейной комбинацией предыдущих с тем же номером.

Определение. *Коэффициент линейной системы называется ведущим коэффициентом своей строки, если он отличен от нуля, а все коэффициенты этой строки с меньшим номером (т.е., стоящие левее) — нулевые.*

Цель алгоритма Гаусса: получить систему линейных уравнений, в которой ведущий коэффициент каждой строки (кроме первой) имеет номер, больший, чем ведущий элемент предыдущей строки. Такие системы называют **ступенчатыми** (треугольные и трапециевидными — их частный вид).

Замечание. Действительно ли полученная система эквивалентна исходной? Иными словами, не надо ли нам делать проверку для полученных решений? Нет не надо. Потому что все это действия обратимы: всегда можно вернуться назад, заменив совершённое действие на противоположное.

Доказательство теорем 1-2

Теорема 1. *Если **в однородной** системе число уравнений меньше числа неизвестных, то эта система имеет нетривиальное решение.*

Доказательство. Приведение системы к ступенчатому виду может только уменьшить число уравнений (или не изменить их). Это означает, что мы не можем получить в конце треугольную систему, а во всех остальных случаях система будет содержать свободные переменные. Придавая хотя бы одной из них ненулевое значение, получаем нетривиальное решение системы.

Теорема 2. *Квадратная **однородная** система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда одна из строк коэффициентов является линейной комбинацией предыдущих.*

Доказательство. Если одна из строк есть линейная комбинация предыдущих, то её можно вычеркнуть с самого начала и получить прямоугольную систему, которая имеет нетривиальное решение по теореме 1. Пусть, наоборот, система имеет нетривиальное решение. Тогда в конце мы не получили треугольную систему. А, так как исходная система была квадратной, хотя бы одну строку мы вычеркнули. Значит, она стала нулевой после того, как мы отняли он неё предыдущую, умноженную на некоторое число. Но это и означает, что эта строка есть линейная комбинация предыдущих. А значит, была такой изначально.

Задачи для самостоятельного решения

10. *Найдите общее решение следующих систем:*

А) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$;

Б) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=1 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$.

Проверьте, что одна из строк матрицы Сильвестра есть линейная комбинация предыдущих.

Решение.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -8 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 5x_2-5x_3+x_4=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1+3x_3-2x_2 \\ -5x_2+5x_3+1=x_4 \end{cases}; \quad x_2,\ x_3 \text{ — любые.}$$

$\vec{a} = (1, 2, -3, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, -1, -1)$, $\vec{c} = (1, 7, -8, 1)$, $\vec{d} = (1, -3, 2, -1) \Rightarrow \vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$.

Те же вычисления показывают, что система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$ не имеет решений.

Альтернатива Фредгольма и определители

Это занятие посвящено изучение неоднородных систем. Основным методом их изучения остаётся алгоритм Гаусса. Центральным фактом является следующая теорема.

Альтернатива Фредгольма. *Пусть фиксированы левые части системы из n линейных уравнений с n неизвестными (квадратной). Докажите, что либо: А) при любых правых частях система имеет единственное решение; Б) можно подобрать правые части и так, чтобы система не имела решений, и так, чтобы она имела бесконечно много решений.*

Замечание. Нужно понимать, что это утверждение действительно альтернатива в том смысле, что исключает многие возможности. Например, почему при изменении только столбца правых частей система с единственным решением не может превратиться в систему с бесконечным числом решений? Или: почему система, имеющая бесконечно много решений, не может оставаться такой при изменении правых частей. Именно альтернатива Фредгольма даёт ответ на эти вопросы.

Доказательство. Работаем с квадратной системой

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}.$$

Матрицу Сильвестра $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$ будем приводить к ступенчатому виду с помощью алгоритма Гаусса. Если получится треугольная матрица, то понятно, что при любом подборе правых частей все неизвестные будут определены однозначно, т.е. мы оказываемся в ситуации п. А.

Если же матрица стала ступенчатой, это означает, что одна из строк исчезла. Как мы знаем, это возможно, если она была линейной комбинацией предыдущих. Тогда можно так подогнать правые части, что соответствующая строка расширенной матрицы (полученной добавлением столбца правых частей к матрице Сильвестра) тоже будет линейной комбинацией предыдущих строк. В этом случае её можно вычеркнуть с самого начала, поскольку никакой информация она не несёт. Это означает, что матрица Сильвестра станет прямоугольной и, приводя её к ступенчатому виду, мы обнаружим наличие свободных переменных. Но можно подобрать правые части и так, что при переходе к расширенной системе зависимость между строками нарушится. Это означает, что система противоречива. Теорема доказана.

Итоговое наблюдение. Если ни одна из строк матрицы не является линейной комбинацией предыдущих, то выполняется п. А. В противоположном случае — п. В. Никакого третьего варианта, естественно, не существует.

Пример (задача 1). *Вернёмся к системам:*

$$\text{А)}\ \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1\\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1\\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2\\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0\end{cases};\ \text{Б)}\ \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1\\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1\\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=1\\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0\end{cases}.$$

Выпишем строки матрицы Сильвестра:

$$\vec{a}=(1,\,2,\,-3,\,0)\ \ \vec{b}=(2,\,-1,\,-1,\,-1)\ \ \vec{c}=(1,\,7,\,-8,\,1)\ \ \vec{d}=(1,\,-3,\,2,\,-1)$$

Как мы видели, $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$. Это означает, что мы находимся в условиях п. Б теоремы. В самом деле, $(1,\,7,\,-8,\,1,\,1)\neq 3(1,\,2,\,-3,\,0,\,1)-\vec{b}(2,\,-1,\,-1,\,-1,\,1)$. Это означает, что система пункта Б противоречива и решений не имеет. А вот условие $(1,\,7,\,-8,\,1,\,2)=3(1,\,2,\,-3,\,0,\,1)-\vec{b}(2,\,-1,\,-1,\,-1,\,1)$ выполнено. Это означает, что мы находимся в условиях п. А и система $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$ должна иметь бесконечно много решений.

Мы уже проверили это с помощью алгоритма Гаусса.

Определители третьего порядка

Мы знаем необходимое и достаточное условие на коэффициенты, которое гарантирует, что система $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=* \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=* \end{cases}$ при любых правых частях имеет единственное решение (т.е. выполнен п. А альтернативы Фредгольма). Это условие выглядит так $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$. Величину, стоящую в правой части, называют **определителем** данной системы или, точнее, определителем её матрицы Сильвестра. Обозначается определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Определитель системы (лат. — детерминант) определяет является ли правая часть системы (или её матрица) невырожденной, т.е. подходит ли она под п. А альтернативы Фредгольма.

Теперь попробуем найти аналогичную величину для системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными (определитель

3-го порядка). Рассмотрим систему $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = * \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = * \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = * \end{cases}$. Будем приводить её к ступенчатому виду с помощью алгоритма Гаусса. При этом, поменяв, если надо строки местами, будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (если весь первый столбец состоит из нулей, то система очевидно подпадает под пункт В теоремы). Чуть откорректируем алгоритм Гаусса. Чтобы не делить, умножим вторую строку на a_{11} и отнимем от неё первую, умноженную на a_{21}. У нас получится: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \end{pmatrix}$. Аналогично, работая с двумя последними строчками, и не затрагивая первую, делаем последний шаг. В результате в левом нижнем углу появляется выражение

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - (a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}).$$

Понятно, что, раскрывая скобки без приведения подобных, мы получаем 8 слагаемых. Но можно взаимно уничтожить пару слагаемых $a_{21}a_{12}a_{31}a_{13}$. После этого останется шесть слагаемых, каждое из которых содержит сомножитель $a_{11} \neq 0$. Короче говоря, в левом нижнем углу останется выражение

$$a_{11}(a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Поскольку $a_{11} \neq 0$, за возможность однозначного выражения третьего неизвестного, отвечает величина

$$\Delta = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

На первый взгляд, она выглядит довольно хаотично, но посмотрев более внимательно, мы сможем увидеть её ясную и глубокую структуру.

а) Каждое слагаемое есть произведение трёх сомножителей, стоящих в трёх различных столбцах и строчках матрицы, т.е. имеет вид $\pm a_{1x}a_{2y}a_{3z}$, где $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. Иными словами, вторые индексы в каждом слагаемом образуют некоторую перестановку на трёхэлементном множестве. Раз таких перестановок всего шесть, то и слагаемых в этой сумме шесть.

b) Теперь проанализируем закономерности, с которыми появляются знаки перед слагаемыми. Выпишем перестановки, которые соответствуют слагаемым с плюсом $+: \langle 1, 2, 3\rangle, \langle 2, 3, 1\rangle, \langle 3, 1, 2\rangle$. Их объединяет следующее свойство. В каждой из них числа можно расставить по порядку, переставляя местами пары элементов (такие перестановки называются транспозициями). При этом минимальное число необходимых транспозиций чётно. Такие перестановки называются **чётными**. Для остальных перестановок $-: \langle 3, 2, 1\rangle, \langle 1, 3, 2\rangle, \langle 2, 1, 3\rangle$ число необходимых транспозиций будет нечётным. Соответственно, и сами такие перестановки называются **нечётными**.

c) Итак, если выписанное выражение отлично от нуля, третья переменная определяется единственным образом. А две другие? И они тоже. Ведь для аналогичного нахождения второй переменной мы могли просто поменять местами второй и третий столбики. При этом изменится только одно: вторые индексы 2 и 3 поменяются местами. Легко видеть, что наша сумма умножится на -1. А поскольку нас интересует только вопрос равенства этого выражения нулю, можно считать, что при переходе к второй (как и к первой) переменной, это условие не меняется. Найденное нами выражении по праву может называться определителем квадратной системы (или соответствующей матрицы Сильвестра), поскольку оно определяет невырожденность системы.

Определение. *Определителем квадратной матрицы третьего порядка* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *называется сумма шести слагаемых* $\sum(\pm a_{1x}a_{2y}a_{3z})$, *где* $\langle x, y, z\rangle$ *— произвольная перестановка чисел 1,* *2, 3, а знак перед слагаемым определяется чётностью этой перестановки.*

Формула:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Примеры: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$; $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$.

Основное утверждение. Система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными имеет единственное решение при любом изменении её правых частей тогда и только тогда, когда определитель её матрицы Сильвестра отличен от нуля. В этом случае матрица называется невырожденной.

Обобщение. Определителем **квадратной** матрицы произвольного порядка $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ называется следующая сумма $n!$ слагаемых: $|A| = \sum(\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n})$, где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, а знак перед слагаемым определяется чётностью этой перестановки.

Разумеется, аналог основного утверждения верен и для квадратных систем произвольных размеров. Но это — предмет отдельного (и довольно длинного) разговора.

Вопрос. Что произойдёт с определителем третьего порядка, если поменять в нём местами две строки?

Ответ. Он умножится на -1. Если мы меняем местами, например, 1-ю и 2-ю строки, в формуле для определителя меняются местами первый и второй индексы. Легко видеть, что при этом каждое слагаемое меняет знак. То же самое происходит, когда мы меняем местами две другие строки.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \to$$

$$\to a_{22}a_{13}a_{31} + a_{23}a_{11}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{21}a_{13}a_{32} - a_{22}a_{11}a_{33}$$

Замечание. Это довольно естественный вывод. Дело в том, что определитель определяет невырожденность системы. Но понятно, что при перестановке двух уравнений существенные свойства системы не меняются.

Задачи для самостоятельного решения

11. *Докажите, что система вида* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = * \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = * \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = * \end{cases}$ *имеет единственное решение при любом подборе правых частей тогда и тогда, когда этим свойством обладает система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = * \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = * . \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = * \end{cases}$$

Доказательство. Мы видим, что матрица новой системы получается из матрицы исходной симметрией относительно главной диагонали. Это означает, что строки и столбцы меняются местами. При этом в каждом сомножителе любого слагаемого меняются местами первый и второй индексы. Легко видеть, что в результате определитель не меняется.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \to$$

$$\to a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Такое преобразование матрицы называется транспонированием: матрица симметрично отражается относительно главной диагонали (другими словами, строки меняются местами со столбцами).

При транспонировании матрицы определитель не меняется.

12. *Что произойдёт с определителем третьего порядка, если его повернуть его на 90 градусов против часовой стрелки?*

Решение. Эта процедура выглядит так: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}$. Значит, её можно представить в виде последовательного выполнения следующих процедур: транспонирование и троекратная перестановка строк (первая со второй, вторая с третьей и третья с первой). При транспонировании определитель не меняется, а при каждой перестановке умножается на -1. Значит, и в результате поворота он умножится на -1.

Структура решений однородной линейной системы

Теоремы 1-2 объясняют, при каких условиях существует решение линейной системы. Но, конечно, важно не только выяснить, имеет ли система решение, но и понять, какой общей формулой можно задать это решение. Об этом (в случае однородной системы) следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение. Тогда существует набор из одного или нескольких решений этой системы, обладающий следующими свойствами. 1) Любое решение линейной системы является их линейной комбинацией. 2) Ни одно из них не является линейной комбинацией остальных.*

Пример. *Найдите общее решение системы*

$$x_1 - x_3 + x_5 = x_2 - x_4 + x_6 = x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = x_2 - x_3 + x_6 = x_1 - x_4 + x_5 = 0$$

Для решения этой системы даже не нужен алгоритм Гаусса. Можно делать так

$$x_3 - x_1 = x_5,\ x_4 - x_2 = x_6,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_1 - x_4 + x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_3 = x_4,\ x_3 - x_1 = x_5,\ x_3 - x_2 = x_6.$$

Тогда общее решение можно переписать в виде следующего вектора

$$(x_1, x_2, x_3, x_3, x_3 - x_1, x_3 - x_2) = (x_1, 0,0,0, -x_1, 0) + (0, x_2, 0,0,0, -x_2) +$$

$$+ (0,0, x_3, x_3, x_3, x_3) = x_1(1,00,0,0,-1,0) + x_2(0,1,0,0,0,-1) + x_3(0,0,1,1,1,1),$$

что и даёт иллюстрацию теоремы 3.

Примерно так же доказывается теорема в общем случае. Представим это доказательство в виде схемы.

А) Выписываем общее решение системы.

Б) Разбиваем вектор общего решения в сумму слагаемых, каждое из которых содержит ровно одно свободное неизвестное, и выносим это неизвестное. После этого виден набор векторов, удовлетворяющий условию 1.

В) Осталось понять, будет ли для этого набора выполнено и условие 2. Но, если это не так, мы просто выкинем лишний вектор из данного набора. Понятно, что при этом не нарушится и свойство 1. Делая так нужное число раз, получаем набор, для которого выполнены оба свойства.

Такой набор мы будем называть **базисом пространства решений**. Термин «пространство» здесь не случаен, поскольку указывает на понятие **линейного пространства**, основное понятие линейной алгебры и многомерной геометрии.

Базис линейной системы определяется неоднозначно.

$$(a, b, c, c, c - a, c - b) = a(1,0,0,0,-1,0) + b(0,1,0,0,0,-1) + c(0,0,1,1,1,1).$$

Полагая $m = c - a$, $n = c - b$, получаем новый базис

$$(c - m, c - n, c, c, m, n) = c(1,1,1,1,0,0) + m(-1,0,0,0,1,0) + n(0,-1,0,0,0,1).$$

Ясно, что ни один из трёх этих векторов также не выражается через предыдущие.

Получили два разных базиса. Но оказывается, что верно следующее.

Теорема 4. *Любые два базиса однородной линейной системы содержат одно и то же число векторов (это число называется рангом системы).*

Основной инструмент доказательства этих теорем — также алгоритм Гаусса.

Лемма к теореме 4. *Пусть некоторая система линейных уравнений от* n *неизвестных имеет базис* $\overline{a_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n})$, $\overline{a_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \overline{a_2} = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots, a_{kn})$.

Докажите, что для любого набора векторов $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \ldots, \overline{b_m}$, *содержащий* $m > k$ *векторов, являющихся решениями этой системы, можно подобрать числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, *не все из которых равны нулю, так, что вектор* $\alpha_1\overline{b_1} + \alpha_2\overline{b_2} + \ldots + \alpha_m\overline{b_m}$ *будет нулевым.*

Доказательство леммы. Нам нужно подобрать набор чисел $x_1\overline{b_1} + x_2\overline{b_2} + \ldots + x_m\overline{b_m} = \overline{0}$, не все из которых равны нулю так, чтобы выполнялось равенство $x_1\overline{b_1} + x_2\overline{b_2} + \ldots + x_m\overline{b_m} = \overline{0}$. Но по условию

$$\overline{b_1} = \gamma_{11}\overline{a_1} + \gamma_{12}\overline{a_2} + \ldots + \gamma_{1k}\overline{a_k}, \overline{b_2} = \gamma_{21}\overline{a_1} + \gamma_{22}\overline{a_2} + \ldots + \gamma_{2k}\overline{a_k},$$
$$\overline{b_m} = \gamma_{m1}\overline{a_1} + \gamma_{m2}\overline{a} + \ldots + \gamma_{mk}\overline{a_k}\ .$$

Подставляя все эти выражения в сумму $x_1\overline{b_1} + x_2\overline{b_2} + \ldots + x_m\overline{b}$, видим, что достаточно найти нетривиальное решение системы

$$\begin{cases} x_1\gamma_{11} + x_2\gamma_{21} + \ldots + x_m\gamma_{m1} = 0 \\ x_1\gamma_{12} + x_2\gamma_{22} + \ldots + x_m\gamma_{m2} = 0 \\ \ldots \\ x_1\gamma_{1k} + x_2\gamma_{2k} + \ldots + x_m\gamma_{mk} = 0 \end{cases}$$

. Но оно существует, поскольку $m > k$.

Из этой леммы сразу вытекает теорема 4.

Задачи для самостоятельного решения

13. *Постройте какой-нибудь базис системы*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Достаточно сделать один шаг в алгоритме Гаусса. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -8 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Получили систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_3 \\ x_4 = -5x_2 + 5x_3 \end{cases}$ с общим решением $(-2x_2 + 3x_3, x_2, x_3, -5x_2 + 5x_3) = x_2(-2,1,0,-5) + x_3(3,0,1,5)$ и базисом $\langle (-2,1,0,-5), (3,0,1,5) \rangle$.

14. *Имеется* $m+2$ *многочлена степени не выше* m. *Докажите, что один из этих многочленов есть линейная комбинация остальных.*

Доказательство. Запишем эти многочлены в общем виде

$$f_1(x) = a_{1m}x^m + a_{1m-1}x^{m-1} + \ldots + a_{11}x + a_{10},$$

$$f_2(x) = a_{2m}x^m + a_{2m-1}x^{m-1} + \ldots + a_{21}x + a_{20}, \ldots,$$

$$f_{m+2}(x) = a_{m+2m}x^m + am +_{2m-1} x^{m-1} + \ldots + a_{m+21}x + a_{m+20}$$

Нам достаточно подобрать коэффициенты β_i так, чтобы выполнялись условия $\beta_{m+2} f_{m+2}(x) + \ldots + \beta_1 f_1(x) = 0, \exists i\, \beta_i \neq 0$. Для этого достаточно, чтобы имела нетривиальные решения система $\begin{cases} \beta_1 a_{1m} + \beta_1 a_{2m} + \ldots + \beta_{m+2} a_{m+2m} = 0 \\ \beta_1 a_{1m-1} + \beta_1 a_{2m-1} + \ldots + \beta_{m+2} a_{m+2m-1} = 0 \\ \ldots \\ \beta_1 a_{10} + \beta_1 a_{20} + \ldots + \beta_{m+2} a_{m+20} = 0 \end{cases}$. Но у неё $m+2$ неизвестных и $m+1$ строка.

Структура решений общей линейной системы

У общей системы линейных уравнений правые части, вообще говоря, отличны от нуля. Здесь всё обстоит сложнее. Например, даже система из двух уравнений с очень большим число неизвестных может не иметь решений (такие системы называются несовместными). Чтобы это понять, достаточно взять систему из двух уравнений с одинаковыми левыми частями и различными правыми. Это показывает, что неверны аналоги всех четырёх теорем. Но научиться решать общую систему и понимать, как устроено её решение, всё-таки надо. И нам удастся это сделать, поскольку пользоваться алгоритмом Гаусса мы по-прежнему можем! При этом нам часто будет полезно переходить от общей линейной системы к однородной, заменяя все правые части нулями.

Пример. *Найдите общее решение системы* $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$ *и сравните её с общим решением системы из задачи 13.*

Решение.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+7x_2-8x_3+x_4=2 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -8 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ -5x_2+5x_3-x_4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2-3x_3+1 \\ x_4=-5x_2+5x_3+1 \end{cases},$$

$$(-2x_2+3x_3+1, x_2, x_3, -5x_2+5x_3+1) = x_2(-2,1,0,-5)+x_3(3,0,1,5)+(1,0,0,1)$$

Получилось сумма общего решения однородного уравнения и ещё одного фиксированного вектора. Который, конечно, тоже является решением системы, соответствующей случаю равенства нулю всех свободных переменных. Так же обстоит дело и в общем случае.

Теорема 5. *А) Разность двух векторов, являющихся решениями неоднородной линейной системы, является решением однородной системы, в которой все правые части заменены нулями. Б) Сумма произвольного вектора-решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы есть общее решение неоднородной системы.*

Доказательство.

Пусть имеется неоднородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{m}x_n = \beta_n \end{cases}$$

и два её решения $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Тогда выполнены следующие равенства

$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n = \beta_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n = \beta_m \end{cases}, \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = \beta_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = \beta_m \end{cases}.$$

Вычитая из каждого уравнения второй системы соответствующее уравнение первой системы, получаем утверждение А. Утверждение В доказывается весьма похожими рассуждениями, которые предлагается провести самостоятельно.

Эта теорема полностью объясняет, как устроено общее решение неоднородной системы. Теперь можно считать, что мы освоили основные факты теории линейных систем. И увидели, что, по существу, её содержательная часть сводится к алгоритму Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

15. *На отрезке* $[0;1]$ *отмечено несколько точек, включая его концы, причём каждая отмеченная точка кроме концов отрезка находится ровно посередине между двумя отмеченными точками. Докажите, что координаты всех отмеченных точек рациональны.*

Решение. Легко понять, что условия задачи записываются в виде системы линейных уравнений. Рассмотрим пример: на отрезке пять точек $0, x_1, x_2, x_3, 1$, включая концы (их не нумеруем). Три отмеченные точки распределяются так, что выполнены равенства $x_1 = \frac{x_2}{2}$, $x_2 = \frac{x_3 + x_1}{2}$, $x_3 = \frac{1 + x_2}{2}$.

В каноническом виде эта система записывается так:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Она имеет единственное (конечно, рациональное решение):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Аналогичная система получится и в общем случае. Она будет неоднородной, и в правых частях некоторых уравнений будет присутствовать 1. Причём отмеченные числа будет решениями этой системы. Если система невырождена, то, решая её алгоритмом Гаусса, мы увидим, что все её значения рациональны. Это можно гарантировать, поскольку все коэффициенты системы — целые числа, а в алгоритме Гаусса мы нигде не выходим за рамки четырёх стандартных действий (сложение, вычитание, умножение и деление). Но, если в общее решение системы входят свободные переменные, то они могут принимать любые, в том числе, числе иррациональные, значения. Тогда рациональность отмеченных точек утверждать нельзя. Может ли так быть? Если в общем решении есть свободные переменные, то система имеет бесконечно много различных решений. Возьмём два решения $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Как мы знаем, их разность есть решение соответствующей однородной системы. Это означает, что мы отметили на полуинтервале $[0;1)$ несколько точек, включая 0, так, что каждая отмеченная точка кроме 0 находится ровно посередине между двумя отмеченными точками. Но достаточно посмотреть на самую правую точку, чтобы понять, что это невозможно.

В заключение приведём несколько нестандартных задач, связанных с линейными системами и предлагавшимися на разных олимпиадах.

16. *В квадратной таблице $n\times n$ расставлены числа, причём каждое число, стоящее внутри таблицы равно среднему арифметическому четырёх своих соседей по сторонам. А) Докажите, что если все числа на границе равны нулю, то и все числа в таблице равны нулю. Б) На границе таблицы числа расставлены произвольным образом. Докажите, что существует единственное заполнение внутренней части таблицы, при котором каждое внутреннее число равно среднему арифметическому четырёх своих соседей.*

Решение. Пункт А хорошо известен, не имеет никакого отношения к линейным системам, и легко делается с помощью метода крайнего. Поэтом начнём сразу с пункта В. Записывая условия задачи, получаем линейную систему, в которой число уравнений и число неизвестных равно числу всех клеток доски кроме граничных. Если такая система приводится алгоритмом Гаусса к треугольной, то утверждение доказано. Если же этого не произошло, то, поскольку исходная система является квадратной, она имеет бесконечно много различных решений. Но тогда достаточно взять разность двух различных решений. Полученный вектор является решением соответствующей однородной системы, то есть даёт распределение чисел, не все из которых равны нулю, по клеткам таблицы, когда все граничные клетки нулевые. Но это противоречит п. А.

17. *Найдите решение бесконечной системы линейных уравнений*

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right),\ n=1,2,3\ldots$$

Решение. Бесконечность этой системы — мнимая. Дело в том, что каждое уравнение, начиная с третьего, является следствием двух предыдущих. В самом деле:

$$\begin{cases} x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)=0 \\ x\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+3}}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{n+2}(x+y+z)=4x+2y+z \\ 2^{n+3}(x+y+z)=4x+2y+z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Но тогда, конечно, верно и равенство $2^{n+4}(x+y+z)=4x+2y+z$, эквивалентное следующему уравнению системы. Мы доказали, что вся эта «бесконечная система» эквивалентна системе из двух уравнений $\begin{cases} 4x+2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ с общим решением $(x; -3x; 2x)$.

18. (Турнир городов) *В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.*

Решение. Обозначим через x_i вес в килограммах слона с номером i, считая справа. Тогда условие задачи запишется системой $x_1+2x_2=x_2+2x_3=\ldots=x_{14}+2x_{15}=15000$. Мы не будем решать систему в общем виде, а постараемся упростить вычисления. Для этого заметим, что при условии равенства веса всех слонов вес каждого будет составлять 5 тонн. Судя по постановке задачи, других целых решений быть не должно. Попробуем это доказать. Для это введём в качестве новых неизвестных отклонения весов от 5 тонн $y_i = x_i - 5000$. Тогда получаем равенства:

$$y_1 + 2y_2 = y_2 + 2y_3 = \ldots = y_{14} + 2y_{15} = 0 \Rightarrow y_1 = -2y_2 = 2y^2 y_3 = -2^3 y_4 = \ldots = 2^{14} y_{15}.$$

Если эти отклонения отличны от нуля, то в силу целочисленности весов отклонение веса первого слона от 5 тонн составляет более 16 тонн, а по условию он должен быть менее 15 тонн. Значит, все отклонения равны нулю, то есть каждый слон весит 5 тонн.

19. *А) Имеется набор из* $2n+1$ *гирь с натуральными весами. Известно, что если выбросить любую гирю, то оставшиеся гири можно разделить на 2 кучи равного веса по* n *гирь. Докажите, что все гири имеют равный вес. Б) Тот же вопрос, если веса всех гирь рациональны. В) Тот же вопрос, если веса всех гирь произвольны.*

Решение. А) Заметим, что набор весов гирь удовлетворяет следующим условиям.

1) Все числа набора — одной чётности. Действительно, вычитая из суммы всех весов каждое из них, мы всегда получаем чётное число.

2) Если все веса чётные, то поделив все на 2, мы снова получим набор весов с тем же свойством.

3) Если из всех весов вычесть одно и то же целое число, мы снова получим набор весов с тем же свойством.

Пусть у нас имеется некоторое решение системы в натуральных числах. Вычтем из всех чисел набора наименьшее из них. Получим решение, где одно из чисел набора равно нулю.

Согласно свойству 1) — остальные числа — чётные. Предположим, что среди них есть ненулевое число. Тогда разделив несколько раз все числа на 2, мы в конце концов получим набор, в котором есть как нечётное число, так и чётное (0). Противоречие со свойством 1.

Значит, все числа набора равны нулю, а, следовательно, в исходном решении все числа были равны.

Б) Пусть не все веса различны. Зададим каждый вес дробью и умножим его на общий знаменатель всех весов. Тогда получим набор гирь с натуральными весами, обладающий тем же свойством. Все веса в нём должны быть одинаковы в силу пункта А. Значит, одинаковы они и в исходном наборе гирь с рациональными весами.

Снова отнимаем ото всех весов минимальный — противоречие. Все одного веса.

В) Условие задачи можно задать квадратной однородной системой линейных уравнений с $2n+1$ неизвестными. При этом все уравнения устроены одинаково: в левой части каждого уравнения одно из неизвестных отсутствует, половина оставшихся входит с коэффициентом 1, а вторая половина с коэффициентом -1. Ясно, что такая система имеет нетривиальное решение вида $(a, a, \ldots, a)$ и, если свободная переменная единственна, то других решений нет, и задача решена. В противном случае, придавая всем свободным переменным различные рациональные значения, мы получаем набор гирь, в котором все веса рациональны, и не все одинаковы. Это противоречит предыдущему пункту.

Литература

1. Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н. Алгебра и начала математического анализа 11 класс. — М.: Просвещение, 2010.

2. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. — М.: МЦНМО, 2022.

Использование программы «Эксель» для деятельностного освоения углубленной школьной программы по математике

А.С. Рыкалин,
Первый Лобачевского - филиал МГУ в г. Усть-Лабинске
artrykalin@yandex.ru

Школьную программу, в том числе по математике, критикуют за низкие практичность и эффективность. Математике в школе уделяется много лет, а вот потом во взрослой жизни этот материал в ежедневном труде почти не применяется. Более того, незнание или забывание школьного курса математики не мешает карьерному и личностному росту во многих профессиях. Оппоненты этой позиции, «защитники» математики, могут привести много аргументов, почему все равно необходимо столько лет посвящать изучению математики в школе: логическое мышление, аналитический ум, системность, нейронные связи, структурированность и т. д. Мы не будем отстаивать позицию ни той, ни другой стороны, а обратим внимание на то, как можно даже абстрактную теоретическую математику в школе изучать, осваивая практические навыки, например «Экселя».

Ключевые слова: активные формы обучения, проектная деятельность, математическое мышление, информатика, цифровые профессии, деятельностное обучение, преподавание математики.

Может ли школьная программа по математике давать не только знания, но и практические навыки?! В повседневной жизни мы мало используем логарифмы, редко находим коэффициент наклона прямой, не высчитываем координаты вершины параболы, не применяем формулу синуса суммы, не находим разложение по векторам. У среднестатистического гражданина даже не возникает соответствующих насущных задач, где бы это можно было применить. К тому же есть вычислительные приборы и программы, которые многое могут выполнить за нас. Зато в стране наблюдается сильный дефицит различных специалистов, а начинающих работников приходится учить заново на рабочем месте, так как школа и ВУЗ редко дают желаемую базу для современных компаний.

Проанализируем, какие результаты может давать использование программы «Эксель» в преподавании учебного предмета «Математика» углубленного уровня основного общего образования. Почему именно «Эксель»?! Во-первых, это востребованная программа, которую используют не только в рамках школы (на уроках информатики, вероятности и статистики, например), но и во многих профессиях. Некоторые специалисты начинающего уровня могут работать только в этой программе и получать заработную плату в столице более чем в два раза больше, чем среднюю по стране. Во-вторых, «Эксель» является хорошим началом для основ программирования, построения алгоритмов и автоматизации, что может напрямую пригодится в новых, высокооплачиваемых, цифровых профессиях. В-третьих, эта офисная программа широко используется в России уже более трёх десятилетий, что делает её массовой, стандартной и универсальной с точки зрения применения в коллективном труде и обучении. Овладение «Экселем» школьником сможет ему помочь и при получении высшего образования, и далее на рабочем месте.

Рассмотрим возможности использования «Экселя» в процессе освоения рабочей программы[1] по математике «Первого Лобачевского» — филиала МГУ в г. Усть-Лабинске Краснодарского края (далее Лицей). У школьников могут появиться дополнительные личностные результаты в части трудового воспитания, ценностей научного познания, адаптации к изменяющимся условиям общественной и природной среды (см. Таблицу 1).

[1] Рабочие программы представлены на сайте Лицея https://ul-lyceum.ru/org-info/education/.

Таблица 1. Возможности использования «Эксель» для освоения рабочей программы по математике углубленного уровня

Личностные результаты	«Эксель» в математике
Трудовое воспитание	Востребованная программа; основа для цифровых профессий; деятельное образование как жизненный навык.
Ценности научного познания	Численные методы; сценарный подход; имитационное моделирование; установление взаимосвязей; визуализация данных.
Адаптация к изменяющимся условиям	Повышение компетентности; умение учиться и меняться; командная работа; планирование своего развития

Источник: составлено автором.

Трудовое воспитание в школе можно начать организовывать и вне уроков труда. «Эксель» — востребованная программа на многих предприятиях, она же закладывает основы для освоения различных цифровых профессий. Изучая математику с использованием компьютерных программ, ученик приобретает навык деятельностного обучения и самообразования на протяжении всей жизни (life-long learning).

Автоматизация математических задач может приобщать учеников и к ценности научного познания. Количественные методы анализа данных, сценарный подход, имитационное моделирование, установление статистических взаимосвязей, визуализация данных – эти и другие инструменты ученик может начать осваивать уже в рамках школьных задач по алгебре, геометрии, вероятности и статистике.

В современном меняющемся мире навыки учиться и переучиваться, адаптироваться, тестировать гипотезы становятся одними из ключевых в профессиональном развитии. Освоение широко используемых компьютерных программ закладывает привычки повышения своих компетенций, командной работы, планирования своих образовательной и карьерной траекторий.

Использование «Экселя» в математике может открыть новые возможности и для получения учениками метапредметных результатов в части овладения универсальными учебными познавательными, коммуникативными и регулятивными действиями (см. Таблицу 2).

Таблица 2. Овладение универсальными учебными действиями при использовании «Экселя» в преподавании математики

Действия	«Эксель» в математике
1. Познавательные 1.1. Логические. Выявлять существенные признаки математических объектов и математические закономерности, выбирать способ решения учебной задачи.	1.1. Устанавливаются взаимосвязи между экзогенными и эндогенными переменными; подбираются формулы и последовательность вычисления.
1.2. Исследовательские. Проводить исследование математического объекта и зависимостей между объектами, формулировать вывод по результатам наблюдения, прогнозировать возможное развитие процесса.	1.2. Изменение экзогенных переменных позволяет отслеживать реакцию эндогенных параметров.
1.3. По работе с информацией. Выявлять достаточность информации для решения задачи; выбирать форму представления информации и иллюстрировать задания схемами и иной графикой.	1.3. Ученик выявляет, какие экзогенные параметры необходимы, и определяет, как представлять результат в расчётном файле и на защите проекта.
2. Коммуникативные 2.1. Общение. Давать пояснения по ходу решения задачи и полученным результатам; в ходе обсуждения задавать вопросы; высказывать идеи, нацеленные	2.1. В процессе выполнения заданий ученик проходит несколько раз «защиту» как по самому расчётному файлу, так и по интерпретации результатов.

на поиск решения; представлять результаты решения, выбирать формат выступления с учётом задач презентации. 2.2. Сотрудничество. Использовать преимущество командной работы, распределять виды работ, оценивать свой вклад в общий результат.	Общаться приходится и в команде проекта, и с преподавателем, и с жюри на защите проектов. 2.2. Целесообразно дополнять индивидуальные домашние задания групповыми проектами. В течение года группы можно менять, чтобы ученики получили опыт сотрудничества с разными учениками, в том числе из других классов.
3. Регулятивные 3.1. Самоорганизация. Составлять алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом собственных возможностей.	3.1. Алгоритм решения математической задачи в «Эксель» можно реализовать несколькими способами. На первых этапах рекомендуется делать несколькими, чтобы расширять кругозор. В случае трудностей ученик обращается за советом к педагогу или другим ученикам.
3.2. Самоконтроль. Владеть способами самопроверки и самоконтроля решения задачи; вносить коррективы на основе выявленных ошибок и дополнительной вводной информации; оценивать соответствие результата поставленной цели; давать оценку приобретённому опыту. 3.3. Эмоциональный интеллект. Давать эмоциональную оценку решения задачи и полученного результата.	3.2. Ученик может решать задачу аналитически в тетради и разными способами в программе, сопоставляя идентичность ответов. По итогам выполнения задания важно собирать обратную связь от ученика о его впечатлениях в процессе и конце выполнения задания. 3.3. В подобных творческих заданиях ученики более мотивированы, увлечены, вовлечены в процесс.

Источник: составлено автором.

Использование «Экселя» для решения математических задач позволяет развивать разнообразные познавательные навыки у ученика.

Ему необходимо установить связи между переменными, выбрать экзогенные и эндогенные параметры, подобрать соответствующие формулы для автоматизации, определить последовательность вычисления. Автоматизация процесса позволяет быстро наблюдать, как меняются выходные параметры модели (эндогенные) в зависимости от изменения входных (экзогенных). На обычных уроках у доски такое реализовать быстро не получится, так как пересчёт займёт много времени.

Выбор программы, оформления, цветового выделения, текстовых подсказок, интерпретации результатов остаются за учеником, то есть у него появляется множество вариантов, как организовать работу. Почти у каждого ученика файл был со своей «изюминкой», что делало выполнение таких небольших проектов творческим.

Школьная программа состоит в основном из индивидуальных заданий, что закрепляет навык индивидуальной, а не коллективной работы. Хотя во взрослой реальной жизни почти всё, чем мы пользуемся каждый день сегодня, является результатом хозяйственной кооперации большого количества людей. Индивидуальные домашние задания, работа на уроке и экзамены приучают работать только самому. Групповые проекты или задания — большая редкость в рамках школьной программы. В этой связи большая ценность — это составление групповых заданий по математике, где ученики приобретают также и коммуникативные навыки. Им нужно общаться между собой в процессе выполнения, общаться несколько раз с педагогом, защищая свою работа, общаться с комиссией на защитах проектов в разных конкурсах.

Творческие задания в «Эксель» могут помогать получать и «личностные» результаты. Их выполнение требует определённых самоконтроля и самоорганизации. Творческие задания по математике требуют больше времени, внимания, усидчивости, терпения — в этом плане они больше близки к «университетским», чем «школьным». Такая «перестройка» требует от ученика другой собранности, мотивации, работы с расписанием. Творческий поиск и совершенствование результата за несколько итераций и доработок помогают формировать и эмоциональный интеллект. В таких заданиях ученики более мотивированы, увлечены, а итоговая защита приносит положительные эмоции от полученного результата.

Более подробный список возможных результатов можно изучить в рабочей программе Лицея и других образовательных организаций. Продолжать можно долго — задача показать базу и основу, а далее уже творческий учитель сам сможет наполнять деятельностный процесс интересующими результатами. В классах автора статьи, например, ученики приносят макулатуру на сдачу, а пригодные листы и тетради используются для черновиков. Математика может воспитывать и экологическое мышление.

Идея о более широком применении «Экселя» в преподавании математики закрепилась после семинара для учителей в «Сириусе», где была озвучена гипотеза, что массовая школьная математика — это гуманитарная дисциплина, схожая с русским языком. В ней есть свои правила и алгоритмы, освоив которые ученик может успешно завершить базовую программу. Обилие типовых алгоритмов, формул и задач позволяет их автоматизировать. Так теперь почти по каждой теме алгебры, вероятности и статистики, геометрии автором составляются задачи в «Экселе».

Какие математические задания уже реализовывались автором в процессе преподавания углубленного курса математики в школе?! Приведём несколько примеров[2]: по одному из геометрии, теории чисел, алгебры, вероятности и статистики.

1. *«По трём сторонам треугольника восстановить все его основные параметры». Ученики понимают, что по трём сторонам можно восстановить не только площадь треугольника по формуле Герона, но и все остальные параметры: углы, синусы и косинусы углов, радиусы вписанной, описанной и вневписанных окружностей; медианы, биссектрисы, высоты. Также важно вспомнить*

[2] Базовый сборник заданий можно скачать по ссылке https://disk.yandex.ru/i/RX7MGXUGvae4Ig.

ограничения на стороны треугольника (неравенство треугольника) и уметь понимать отличия тупоугольных, остроугольных и прямоугольных треугольников.

2. *«Найдите все трёхзначные числа, которые без остатка делятся на 11 и сумма цифр которых делится на 11». Эту задачу нужно было решить аналитически, а потом автоматизировать решение в «Эксель» или «Пайтоне». В процессе защиты задания ученикам предлагалось доказать признак делимости на 11 для трёхзначного числа.*

3. *«По 4 параметрам дробно-линейной функции определите центр симметрии, нули функции, участки возрастания и убывания». В этой задачи, как и во многих с параметром, важно учесть «краевые» случаи, когда функция превращается в константу, линейную или типовую гиперболу.*

4. *«Создать таблицу сочетаний, где параметры* k *и* n *меняются от 0 до 10. Проверить три соотношения с сочетаниями». В этой и других заданиях предлагается как составить расчёт сочетаний самостоятельно, так и с использованием встроенных функций «Экселя».*

Кто будет реализовывать образовательный процесс подобных творческих задач в «Эксель»?! В России сохраняется дефицит школьных учителей, в том числе математики. Если множество учителей математики ограничить теми, кто владеет «Экселем», кто самостоятельно составляет задачи, кто готов вести адресную проектную работу, то список будет не таким большим, как хотелось бы. Тем не менее, «опорных» учителей достаточно, чтобы начать работу в направлении деятельностного обучения математике.

Что может способствовать тому, чтобы конкретный учитель начал реализовывать в своей образовательной деятельности такие творческие и практические инструменты?!

Во-первых, необходимо обеспечить достойную оплату труда. Сюда могут входить и заработная плата, и премии, и участие в грантах[3], и поощрение из фондов целевого капитала школ[4].

Во-вторых, для творческой работы у учителя должно быть достаточно времени. Если он перегружен 2-3 ставками в дополнение с классным руководством и общешкольными вопросами, то у него просто не будет физически времени, внимания и энтузиазма что-то подобное реализовывать.

В-третьих, к учителю должно быть уважительное отношение администрации школы и родителей. В атмосфере благодарности, уважения, почёта, эмпатии, взаимоподдержки, признания вероятность творческого раскрытия сотрудника выше.

В-четвёртых, необходимо создать все условия, чтобы учитель мог постоянно учиться. «Только тот учитель, кто ученик» — эта цитата отражает важность постоянного обучения самим учителем. Повышение квалификации[5], стажировки, участие в конференциях, обмен опытом — новые места, люди, идеи, коллеги, вызовы, примеры создают новые идеи для собственного образовательного процесса. Важно предоставлять учителю время и ресурсы для таких «выходов» из ежедневного образовательного контекста.

Программа «Эксель» может использоваться для более глубокого изучения курса школьной математики и для формирования востребованных навыков для современных цифровых профессий. Дея-

---

[3] Например, по программе «Вклад в поколение» от Т-банка учителя математики, информатики и физики могут получить 150 тыс. руб., https://fintech.tinkoff.ru/activities/grant/.

[4] В России создано более 40 фондов целевого капитала (endowment) школ, большая их часть инициирована «Рыбаков Фонд». Например, целевой капитал СОШ №16 г. Томска состоит уже из 12,5 млн. руб. и расходуется в том числе на повышение квалификации учителей через путешествия и поощрение лучших педагогов.

[5] Например, ежегодные открытые семинары учителей математики, куда съезжаются эксперты и учителя почти со всей страны. Подобные площадки обеспечивают обучение, обмен опытом, установления деловых и творческих связей, полезный отдых. Материал о 13-м семинаре в Казани, который прошёл в 2024 г. https://www.youtube.com/watch?v=8hkFOb8sKd8.

тельностное обучение может повысить интерес к учёбе и расширить формирование широкого перечня навыков и умений.

Список литературы

1. Бегунц А. В., Сергеев И. Н. О спиральном подходе при организации систематического повторения и углубления школьного курса математики // Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. – 2023. – Т. 21. – №. 1. – С. 40-51.

2. Нелюбина А. Е. Развитие познавательной активности школьников через творческие домашние задания по математике //Актуальные проблемы современного образования: опыт и инновации. – 2021. – С. 264-267.

3. Рабочая программа учебного предмета «Математика» углубленного уровня основного общего образования. Первый Лобачевского – филиал МГУ в г. Усть-Лабинске.

4. Семенов А. Л. О продолжении российского математического образования в XXI веке //Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. – 2023. – №. 2. – С. 7-45.

5. Ghaye T. Teaching and learning through reflective practice: A practical guide for positive action. – Routledge, 2010.

6. Kazmagambet B., Ibraimova Z., Kaymak S. The effect of active learning method on students' attitude towards mathematics // Proceedings of International Young Scholars Workshop. – 2020. – Т. 9.

7. Kolb D. A. Experiential learning: Experience as the source of learning and development. – FT press, 2014.

8. Paul R. The school revolution: A new answer for our broken education system. – Hachette UK, 2013.

9. Schlechty P. C. Engaging students: The next level of working on the work. – John Wiley & Sons, 2011.

Содержание