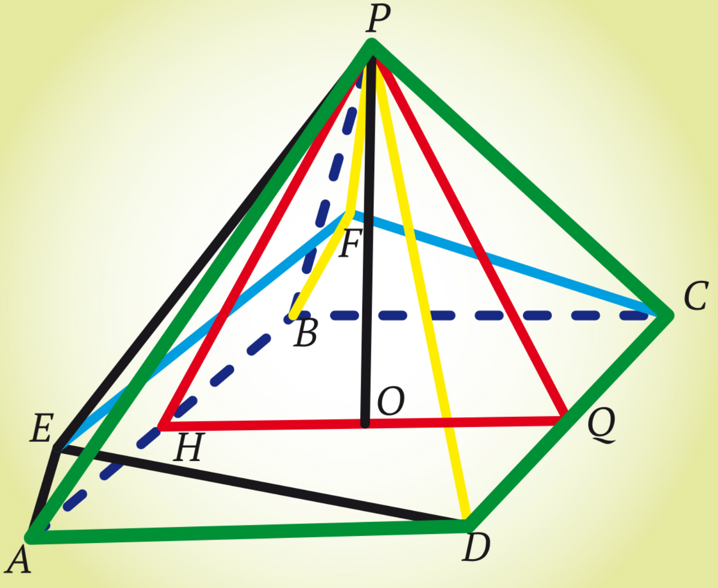
УЧИМ МАТЕМАТИКЕ 14



Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Учим математике - 14

Материалы открытой школы-семинара
учителей математики

Под редакции А.Д. Блинкова и П.В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2026

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

Учим математике-14. Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2026. — 104 с.

У92

ISBN 978-5-4439-1933-1

В сборнике представлены избранные материалы тринадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики. Семинар прошел в Новосибирске со 2 по 7 мая 2025 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-14
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Оригинал-макет: *А. Обрубов*, *А. Ширяева*, *А. Чехович*, *П. Чулков*

Подписано в печать 23.03.2026 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 6,5 печ. л. Тираж 250 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии «Белый ветер».

6+

ISBN 978-5-4439-1933-1

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы четырнадцатой открытой школы-семинара для преподавателей математики, а также некоторые другие. Этот семинар прошел в Академгородке г. Новосибирска со 2 по 7 мая 2025 года. Организаторами семинара являлись Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, СУНЦ НГУ, МАОУ ОЦ гимназия №6 «Горностай», МАОУ лицей №13, ГАОУ ДПО «Центр педагогического мастерства» г. Москвы (ЦПМ), Московский Центр Непрерывного Математического Образования (МЦНМО), Всероссийская ассоциация учителей математики.

Материалы предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018, 2019, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025 гг. Кроме того, эти материалы можно найти в интернете по адресу https://mccme.ru/nir/seminar/conf.htm. Там же размещены видеозаписи некоторых лекций и докладов.

В семинаре могли принять участие все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие около 150 человек, представлявших разные уголки России. Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение школы-семинара дало прекрасную возможность его участникам познакомиться с работой ведущих школ Новосибирска.

В них проходили мастер - классы со школьниками. Эти мастер-классы проводили как ведущие учителя этих школ, так и специально приглашённые преподаватели. Проведенные занятия «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия также проводили приглашенные опытные преподаватели. Кроме того, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, некоторые участники семинара имели возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением.

По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от МЦНМО. Успешное проведение школы-семинара обеспечили представительные программный и организационный комитеты.

Программный комитет семинара

- Ященко И.В. — научный руководитель ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики ЦО «Пятьдесят седьмая школа» г. Москвы, кандидат физико-математических наук, лауреат премии правительства РФ в сфере образования – председатель;
- Блинков А.Д. — методист ЦПМ, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования — заместитель председателя;
- Андреев Н.Н. — заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых учёных, создатель проекта «Математические этюды», член Координационного Совета Кавказской математической олимпиады, лауреат Золотой медали РАН за пропаганду научных знаний, лауреат премии Лило-

вати международного математического конгресса 2022 г., кандидат физико-математических наук;

- Кожевников П.А. — председатель Задачного комитета Кавказской математической олимпиады, кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, старший научный сотрудник лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, член тренерского совета национальной команды России на международной математической олимпиаде, заместитель главного редактора по математике журнала «Квант», член Центральной предметной методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике, золотой медалист международной математической олимпиады 1992 года;
- Пратусевич М.Я. — директор и учитель математики Президентского ФМЛ №239, кандидат физико-математических наук, Заслуженный учитель РФ, член Совета при Президенте РФ по образованию и науке;
- Столбов К.М. — заместитель директора и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» им. Ж.И. Алфёрова, почетный работник сферы образования РФ;
- Сухов К.А. — учитель математики Президентского ФМЛ №239, руководитель национальной команды России на международной
- математической олимпиаде, член Центральной предметной методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике;
- Чулков П.В. — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора и учитель ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ;
- Некрасова Л.А. — директор СУНЦ НГУ, кандидат биологических наук, почетный работник сферы образования РФ, победитель конкурса управленцев «Лидеры России»;

- Путинцева И.Г. — директор ОЦ «Горностай», кандидат педагогических наук, почетный работник общего образования РФ;
- Зиновьева Н.В. — директор МАОУ лицей №13 п. Краснообск, почетный работник воспитания и просвещения РФ.

Организационный комитет семинара

- Блинков А.Д. — методист ЦПМ, Заслуженный учитель РФ, лауреат премии правительства РФ в сфере образования — председатель;
- Наконечный Н.А. — учитель математики, руководитель проекта Управления развития талантов и обучения Московского кредитного банка – координатор и секретарь семинара;
- Зубарева С.И. — учитель математики школы №218 г. Москвы — координатор и секретарь семинара;
- Эдлин Ю.М — учитель математики Академического лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга — координатор и секретарь семинара;
- Чуваков В.П. — заместитель директора и преподаватель математики СУНЦ НГУ, кандидат физико-математических наук, почетный работник сферы образования РФ — координатор семинара;
- Абрамян О.И. — заместитель директора и заведующая кафедрой математики и информатики МАОУ лицей №13, почетный работник сферы образования РФ — координатор семинара;
- Мазур М.И. — заместитель директора ОЦ «Горностай», кандидат педагогических наук, почетный работник сферы образования РФ — координатор семинара.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершать прогулки и экскурсии по Академгородку, посетить музеи. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом. Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям, докладчикам и участникас семинара, но особенно тем, кто нашел силы и время подготовить статьи для этого сборника. Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда отличаются от названий докладов и выступлений.

Программа XIV открытого семинара учителей математики

2 мая 2025, пятница		**СУНЦ НГУ,** ***Досуговый центр***
11.30 - 13.30		*Регистрация участников*
12.00 - 13.00		*Экскурсия по СУНЦ НГУ*
13.30 - 14.00	Ященко И.В., Блинков А.Д.	*Открытие семинара и оргвопросы*
14.00 - 14.30	Некрасова Л.А.	Приветственное слово директора СУНЦ НГУ
14.30 - 15.30	Тайманов И.А.	От геометрии к физике
15.30 - 15.45		*Кофе-брейк*
15.45 - 16.45	Столбов К.М.	О понятии функции и её свойствах в школьном курсе математики
16.45 - 17.30	Ященко И.В.	Научные сюжеты в олимпиадных задачах
17.30 - 17.45		*Перерыв*
17.45 - 18.30	Ященко И.В.	*Круглый стол:* Вопросы обновления ФГОС и содержания школьного математического образования
3 мая 2025, суббота		**СУНЦ НГУ**
10.00 - 13.40	*Мастер-классы по индивидуальному маршруту (Учебный корпус СУНЦ)*	
13.40 - 14.40		*Обед*
Досуговый центр СУНЦ		
14.40 - 15.55	Панкратьев А.Е.	Об отборе посторонних решений
15.55 - 16.10		*Перерыв*
16.10 - 16.55	Сухов К.А.	Цели и программа математического кружка (от IMO до массового и обратно)
16.55 - 17.40	Горбачев А.Н.	Как сделать хороший кружок у себя в школе

4 мая 2025, воскресенье		**СУНЦ НГУ,** ***Досуговый центр***
10.00 - 11.30	Щетников А.И.	Тайны исламских геометрических орнаментов
11.30 - 12.15	Прокопенко Е.И.	Теория вероятностей: сложная математика или особый способ мышления?
12.15 - 12.30		*Кофе-брейк*
12.30 - 13.30	Андреев Н.Н., Мерзон Г.А.	Три геометрии: сходства и различия
13.30 - 14.15	Евдокимов М.А.	Интерактивные задачи и Квантландия
14.15 - 15.00	Вольфсон Г.И.	Математика на шахматной доске
15.00 - 16.00		*Обед*
16.00 - 16.45	Мухин Д.Г.	Контринтуитивные стереометрические задачи
16.45 - 17.30	Шноль Д.Э.	Введение в тему «Логарифмы»
5 мая 2025, понедельник		**Гимназия №6 «Горностай»**
9.45 - 10.00	Путинцева И.Г.	Приветственное слово директора гимназии «Горностай»
10.00 - 13.40	*Мастер-классы по индивидуальному маршруту*	
13.40 - 14.40		*Обед*
14.40 - 15.40	Барышев И.Н.	Трудности методического сопровождения учителей
15.40 - 16.20	Эдлин Ю.М.	Как учиться на ошибках?
16.20 - 16.35		*Перерыв*
16.35 - 17.15	Шеметова А.А., Иванова Е.Н., Фирюлина А.В.	Игротехники на уроке и во внеурочной деятельности
6 мая 2025, вторник		**Лицей №13**
9.45 - 10.00	Зиновьева Н.В.	Приветственное слово директора лицея 13
10.00 - 13.40	*Мастер-классы по индивидуальному маршруту*	

13.40 - 14.40		*Обед*
14.40 - 15.40	Чулков П.В.	Метод «от противного» в алгебре
15.40 - 16.25	Ширяев Е.А.	Математические понятия при работе с реальным предметом
7 мая 2025, среда		**СУНЦ НГУ, *Досуговый центр***
10.00 - 11.30	Дубровский В.Н.	Интерактивная математика на уроках и после
11.30 - 12.15	Мерзон Г.А.	Компьютерные эксперименты (не в геометрии)
12.15 - 12.30		*Кофе-брейк*
12.30 - 13.30		*Закрытие семинара*

Расписание мастер-классов

3 мая 2025, суббота	**СУНЦ НГУ, *Учебный корпус***

10:00-10:45, 10:55-11:40

Попова Н.А.	**Журавлева Е.Н.**	**Чуваков В.П.**
9-1 400 гр.	*10-9 418 гр.*	*10-9 417 гр.*
Невидимая окружность	Тригонометрия с отбором корней	Задачи с параметром, сводящиеся к квадратным уравнениям

Быковских А.М.	**Стукачева М.В.**	**Булгакова Т.Е.**
9-3 406 гр.	*11-3 307 гр.*	*10-1 и 10-2 302 и 303 гр.*
Вписанные четырёхугольники	Логарифмы. Итоговое повторение	Геометрические решения негеометрических задач

Чунихина Е.В.	**Квон Е.В.**	**Галактионова А.А.**
10-4 407 гр.	*10-7 414 гр.*	*10-8 416 гр.*
Тригонометрические задачи с параметром	Использование свойств функции для задач с параметром	Медианы, биссектрисы, высоты в задачах

12:00-12:45, 12:55-13:40

Андреев Н.Н.	**Панкратьев А.Е.**
9-1, 9-2, 10-9, 10-4 408 гр.	*11-1 и 11-10*
Картографические развертки	Метод рационализации (метод замены множителя), его применение и оформление в задачах ЕГЭ и ДВИ

Столбов К.М.	**Сухов К.А.**
10-7 413 гр.	*10-2*
Суммирование последовательностей	Разностный многочлен

Вольфсон Г.И.	**Евдокимов М.А.**
10-8 415 гр.	*11-3 308 гр.*
Уравнения: стандартные и не очень	Стереометрия. Избранные задачи и методы

5 мая 2025, понедельник	**Гимназия №6 «Горностай»**

10:00-10:45, 10:55-11:40

Ляпунов И.Б.	**Горбачев А.Н.**	**Редько Н.П.**
11Е, каб. 401	*7 МИФ -1, каб. 303*	*6Д, каб. 301*
Экономические задачи на ЕГЭ	Игра «Математический дебют»	Двудольные графы

Трепакова С.Б.	**Ботова Е.А., Греблюк М.А.**	**Аксенова Н.В.**
11 МИФ, каб. 310	*7 МИФ-2 и 9 МИФ, каб. 305*	*7 БХ, каб. 302*
Задача с параметром. Итоговое повторение	Вертикальная математика. Математическое казино	Математические инструменты при решении задач естественно-научного цикла

Ендальцева Ю.В.	**Болотина Т.А.**	**Цыплакова М.А.**
8 МИФ-1, каб. 304	*8 МИФ- 2, каб. 321*	*10Е, каб. 200*
Решение текстовых задач	Создание консольной игры на C++	Параллельное проектирование

12:00-12:45, 12:55-13:40

Дубровский В.Н.	**Юрченко Е.М.**
11 МИФ, 11 БХ, 11 С/Э, 11 Е, акт зал	*5 Д, каб. 310*
Задачи на объемы многогранников	Работа над смысловым чтением на примере одной задачи

Наконечный Н.А.	**Мухин Д.Г.**	**Шноль Д.Э.**
9 МИФ, каб. 302	*10 МИФ, каб. 305*	*8 МИФ-1, каб. 301*
Задачи комбинаторной оптимизации	Красивая планиметрия на ЕГЭ	Новые признаки параллелограмма

Петрова О.П.	**Мерзон Г.А.**	**Эдлин Ю.М.**
7 МИФ, каб. 303	*8 МИФ-2, каб. 304*	*10 Е, каб. 200*
Функции и графики	Площади и объемы	В поисках ошибок

6 мая 2025, вторник	**Лицей №13**

10:00-10:45, 10:55-11:40

Андреев Н.Н.
7-9 классы (лекция)
Геометрическая астрономия

Германова Н.С.	**Чуваков В.П.**	**Фефелова Л.В.**
10Б, каб. 411	*9Б, каб. 410*	*9Б, каб. 409*
Вероятность и статистика: по страницам изученного	Теорема Фалеса	Мастерская проектной деятельности

Абакумова Н.В., Камайланова О.А.	**Ситникова О.В., Бабкина Е.В.**
7М, каб. 315	*8М, каб. 408*
Урок – квест: «Дорогами математики и информатики»	Своя игра «Мир математики»

Воронкова О.В.	**Ефременко Ю.Д.**	**Барышев И.Н.**
11Б, каб. 407	*11Б, каб. 317*	*9В, каб. 316*
Применение элементов аналитической геометрии к решению стереометрических задач	Нахождение угла между прямыми с использованием непрямоугольной системы координат	Геометрические приёмы при решении текстовых задач

12:00-12:45, 12:55-13:40

Андреев Николай Николаевич
9-11 (лекция)
Конические сечения: эллипс, парабола, гипербола

Наконечный Н.А.	**Чулков П.В.**	**Ширяев Е.А.**
7М, каб. 315	*10Б, каб. 411*	*8М, каб. 408*
Шары и перегородки	Тригонометрические подстановки	Математические задачи о велосипеде

Барышев И.Н.	**Евдокимов М.А.**	**Блинков А.Д.**
7М, каб. 317	*6Б, каб. 410*	*9М, каб. 409*
Логика в курсе вероятности и статистики	Задачи для развития пространственного воображения	Урок повторения курса геометрии на примере одной конструкции

Плавающая парабола

А.В. Иванищук, С.В. Червяков
г. Москва, Университетский лицей 1511
предуниверситария НИЯУ МИФИ
av_ivanishuk@1511.ru, sv_chervyakov@1511.ru

Этим термином учителя математики нашего лицея называют метод исследования расположения корней квадратного трехчлена с параметром $A(a)x^2 + B(a) + C(a)$, необходимость в котором возникает при широком круге задач с различными ограничениями. Конечно, если дискриминант этого трехчлена является полным квадратом, то проще явно найти корни и решить соответствующие рациональные неравенства, но при «плохом» дискриминанте приходится решать иррациональные неравенства, что, как показывает практика, учащиеся делают плохо. К ошибкам может привести и неаккуратное использование теоремы Виета для таких задач, что полезно обсудить с учащимися. Например, в задаче «Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ больше 1», вычислив $x_1 + x_2 = 2a$ и $x_1 \cdot x_2 = a^2 - 1$, учащиеся могут сделать вывод, что $2a > 2$ и $a^2 - 1 > 1$. Из этих условий получаем, что $a > \sqrt{2}$. И это неверный ответ. Конечно, нет гарантии, что действительные корни будут. Но дискриминант этого уравнения всегда положителен, что снимает этот вопрос. Можно найти корни непосредственно: $x_1 = a + 1$ и $x_2 = a - 1$. Решая для них неравенства, получим $a > 2$. И это верный ответ, поскольку получен непосредственно из условия для корней уравнения, а не из дополнительных соображений. Конечно, записанные в теореме Виета условия являются необходимыми, но не достаточными. Можно для верификации взять $a = 2{,}5$ и получить корни $x_1 = 2$ и $x_2 = 0{,}5$, из которых только один больше 1.

Метод плавающей параболы состоит в рассмотрении на координатной плоскости графика функции $f(x)=A(a)x^2+B(a)x+C(a)$, корни которой расположены в соответствии с нужными условиями. В условии задач редко упоминается, что рассматривается именно квадратное уравнение или неравенство, поэтому необходимо начать решение задачи со случая $A(a)=0$. Обычное обещание учащихся: «Я обязательно рассмотрю это потом» дальше обещания не идет. Далее, при $A(a)\neq 0$ графиком $f(x)$ является парабола, и мы используем знания, присутствующие у большинства учащихся. Условия, определяющие нужную параболу, состоят в рассмотрении: 1) знака старшего коэффициента; 2) знака дискриминанта; 3) условий на абсциссу вершины параболы; 4) знака функции в точках, с которыми сравниваются корни. Не все эти условия бывают необходимы. В конкретных задачах можно увидеть, что либо мы ничего не можем сказать, например, об абсциссе вершины, либо некоторые условия, например, знак дискриминанта, являются излишними. Единственное всегда нужное условие — на знак функции в точках, с которыми сравниваются корни. Заметим ещё раз, что при «хорошем» дискриминанте можно непосредственно найти корни и никуда не «плавать» на параболе.

Целью нашей статьи не является составление условий для различных задач расположения корней относительно точки или промежутка. Мы хотим показать применение этого метода для задач, предлагаемых в нашем лицее на поточных контрольных работах в 10 и 11 классах.

(10 класс) *При каких значениях* m *многочлен* $T(x)=(2m-7)x^2+(2m-4)x-1$ *имеет два различных действительных корня, ни один из которых не удовлетворяет неравенству* $|4x+1|>3x+6$*?*

Ответ: при $m\in(-\infty;-1)\cup\left(3;\dfrac{49}{15}\right]$.

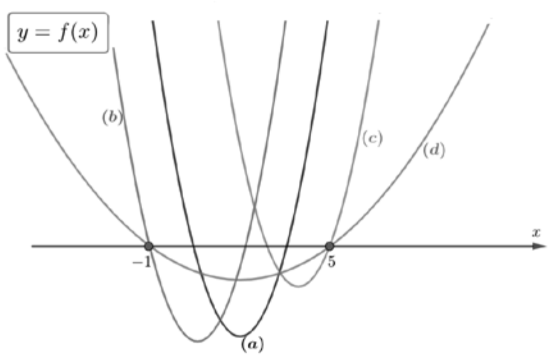
Решение. По условию все корни $T(x)$ удовлетворяют противоположному неравенству:

$$|4x+1|\le 3x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1\le 3x+6 \\ 4x+1\ge -3x-6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;5].$$

A) При $m=\frac{7}{2}$ многочлен становится линейным $T(x)=3x-1$ и имеет только один корень $x=\frac{1}{3}$. Таким образом, значение $m=\frac{7}{2}$ не удовлетворяет условию задачи.

B) При $m\ne\frac{7}{2}$ многочлен является квадратным, и уравнение $T(x)=0$ равносильно приведённому квадратному $x^2+\frac{2m-4}{2m-7}x-\frac{1}{2m-7}=0$. (Мы поделили на старший коэффициент, чтобы определиться с направлением ветвей. Правда, при этом усложняются другие коэффициенты.)

Воспользуемся методом «плавающей» параболы. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+\frac{2m-4}{2m-7}x-\frac{1}{2m-7}$. Его график — парабола с ветвями, направленными вверх.



Возможны несколько случаев расположения параболы, удовлетворяющей условию задачи, относительно точек -1 и 5. Все эти случаи можно описать условиями:

$$(a)-(d):\begin{cases}-1\le x_E\le 5\\ D>0\\ f(-1)\ge 0\\ f(5)\ge 0\end{cases}$$

Для упрощения дальнейших преобразований проведём дополнительные вычисления.

Абсцисса вершины $x_E=-\dfrac{m-2}{2m-7}$; упрощённый дискриминант $D_1=\dfrac{(m+1)(m-3)}{(2m-7)^2}$, $f(-1)=\dfrac{-4}{2m-7}$; $f(5)=\dfrac{4(15m-49)}{2m-7}$.

Таким образом,

$$\begin{cases}-1\le x_E\le 5\\ D>0\\ f(-1)\ge 0\\ f(5)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{m-2}{2m-7}\ge -1\\ -\dfrac{m-2}{2m-7}\le 5\\ \dfrac{(m+1)(m-3)}{(2m-7)^2}>0\\ -\dfrac{4}{2m-7}\ge 0\\ \dfrac{4(15m-49)}{2m-7}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-5}{2m-7}\ge 0\\ \dfrac{11m-37}{2m-7}\ge 0\\ m\in(-\infty;-1)\cup\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)\\ 2m-7<0\\ \dfrac{15m-49}{2m-7}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;\dfrac{7}{2}\right)\cup[5;+\infty)\\ m\in\left(-\infty;\dfrac{37}{11}\right]\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)\\ m\in(-\infty;-1)\cup\left(3;\dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)\\ m\in\left(-\infty;\dfrac{7}{2}\right)\\ m\in\left(-\infty;\dfrac{49}{15}\right]\cup\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1)\cup\left(3;\dfrac{49}{15}\right]$$

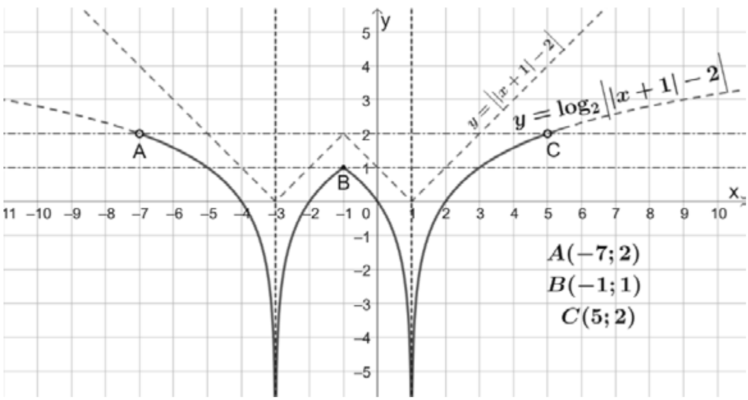
Объединяя случаи А) (в этой задаче не дающий решений задачи) и В), запишем ответ: $m \in (-\infty; -1) \cup \left(3; \dfrac{49}{15}\right]$.

(11 класс) *При каких значениях параметра a уравнение*

$$(a-2)\log_2^2\left||x+1|-2\right| - (2a+3)\log_2\left||x+1|-2\right| + a + 3 = 0$$

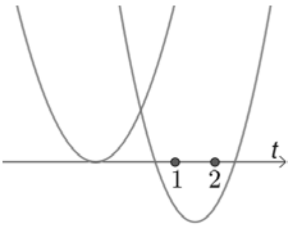
имеет 4 различных решения на интервале $(-7; 5)$ *?*

Ответ: при $a \in [2; 11] \cup \left\{-\dfrac{33}{8}\right\}$.



Решение. Сделав замену $t = \log_2\left||x+1|-2\right|$, получим уравнение $(a-2)t^2 - (2a+3)t + a + 3 = 0$. Необходимо переформулировать задачу для переменной t. Для этого мы рекомендуем нарисовать график $t(x)$. Сначала изобразим график внутренней функции, а затем применим логарифм. Область значений переменной t на множестве $x \in (-7; 5)$ есть открытый луч $(-\infty; 2)$. Каждое значение t из открытого луча $(-\infty; 1)$ даёт 4 решения по переменной x, при $t = 1$ уравнение будет иметь 3 корня, каждое значение t из интервала $(1; 2)$ даёт 2 решения. Поэтому наша задача будет состоять в нахождении всех значений параметра a, при которых уравнение относительно t имеет А) одно решение на промежутке $(-\infty; 1)$ и не имеет решений на полуинтервале $[1; 2)$ или В) имеет два различных решения на интервале $(1; 2)$.

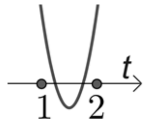
А) При $a=2$ линейное уравнение будет иметь решение $t=\frac{5}{7}$, входящее в нужный интервал. Следовательно, $a=2$ войдёт в ответ.



При $a\neq 2$ рассмотрим квадратичную функцию $f(t)=t^2-\frac{2a+3}{a-2}t+\frac{a+3}{a-2}$, график которой — парабола ветвями вверх. Дискриминант $D=\frac{8a+33}{(a-2)^2}$, абсцисса вершины $t_0=\frac{2a+3}{2(a-2)}$. В случае кратного корня $D=0$, $t_0<1$. Это верно при $a=-\frac{33}{8}$, которое также войдёт в ответ.

Для реализации случая различных корней требуется выполнение условий $\begin{cases} f(1)<0 \\ f(2)\le 0 \end{cases}$. Расположение вершины не определено, условие на дискриминант излишне. Решение системы дает полуинтервал $(2;11]$. Таким образом, в случае А) получаем $(2;11]\cup\left\{-\frac{33}{8}\right\}$.

Случай В) определяется системой неравенств $\begin{cases} D>0 \\ 0<t_0<2 \\ f(1)>0 \\ f(2)>0 \end{cases}$.



Тут все четыре условия обязательны, ничего нельзя убрать. Решений эта система не имеет.

Теперь хотелось бы разобрать задачи, в которых, нам кажется, уместно применение метода «плавающей» параболы.

1. *Решите при всех* a *уравнение* $a(x^2-2)=\sqrt{\dfrac{2a+x}{a}}$.

Ответ: 1) при $a=0$ уравнение не имеет смысла; 2) при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\left\{\dfrac{1-\sqrt{8a^2+1}}{2a};\dfrac{-1+\sqrt{8a^2-3}}{2a}\right\}$; 3) при $a\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$: $\left\{\dfrac{1-\sqrt{8a^2+1}}{2a};\dfrac{-1\pm\sqrt{8a^2-3}}{2a}\right\}$; 4) при $a\in\left[-\dfrac{\sqrt{6}}{4};0\right)$: $\left\{\dfrac{1-\sqrt{8a^2+1}}{2a}\right\}$; 5) при $a\in\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\left\{\dfrac{1+\sqrt{8a^2+1}}{2a}\right\}$; 6) при $a\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$: $\left\{\dfrac{1+\sqrt{8a^2+1}}{2a};\dfrac{-1-\sqrt{8a^2-3}}{2a}\right\}$.

Решение. Уравнение не имеет смысла при $a=0$, поэтому решать будем при $a\neq 0$.

Сделаем замену $t=\sqrt{\dfrac{2a+x}{a}}$ $(t\geq 0)$, отсюда $x=a(t^2-2)$. После подстановки в исходное уравнение получаем

$$a((a(t^2-2))^2-2)=t \Leftrightarrow a^3(t^2-2)^2-t-2a=0 \quad (1)$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых:

$$a^3t^4-4a^3t^2-t+4a^3-2a=0 \quad (2)$$

Разложим левую часть уравнения (2) на множители методом неопределённых коэффициентов:

$$a^3t^4+0t^3-4a^3t^2-t+4a^3-2a=(At^2+Bt+C)(Dt^2+Et+F) \quad (3)$$

откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем систему

$$\begin{cases} AD=a^3 \\ AE+BD=0 \\ AF+BE+CD=-4a^3 \\ BF+CE=-1 \\ CF=4a^3-2a=-2a(1-2a^2) \end{cases} \quad (4)$$

Решать систему (4), т. е. находить все её решения, нет необходимости; достаточно подобрать частное решение. Попробуем

$$\begin{cases} A=a^2 \\ D=a \\ C=1-2a^2 \\ F=-2a \end{cases} \quad (5)$$

Тогда первое и последнее уравнения системы (4) выполнены, а для нахождения коэффициентов B и E получим условия

$$\begin{cases} a^2E+aB=0 \,|:a \\ -2a^3+BE+a-2a^3=-4a^3 \\ -2aB+(1-2a^2)E=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-aE \\ BE=-a \\ E=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=a \\ E=-1 \end{cases}$$

или окончательно $$\begin{cases} A=a^2 \\ B=a \\ C=1-2a^2 \\ D=a \\ E=-1 \\ F=-2a \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, уравнение (2) принимает вид

$$(a^2t^2+at+1-2a^2)(at^2-t-2a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a^2t^2+at+1-2a^2=0 & (7) \\ at^2-t-2a=0 & (8) \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнения (7) и (8). Напомним, что $a\neq 0$, поэтому оба уравнения являются квадратными. Решим (7):

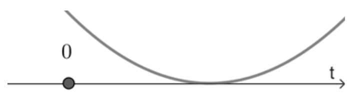
$$D=a^2-4a^2(1-2a^2)=a^2(8a^2-3),$$

$$t=\frac{-a\pm a\sqrt{8a^2-3}}{2a^2}=\frac{-1\pm\sqrt{8a^2-3}}{2a}.$$

Нас интересуют значения $t\geq 0$, исследуем возможные ситуации методом «плавающей» параболы. Для этого введём функцию $f(t)=a^2t^2+at+1-2a^2$ — квадратичная функция, график — парабола, ветви вверх. Заметим, что

$$f(t)=0 \Leftrightarrow a^2(t-2)=-at-1 \Rightarrow x=a(t^2-2)=-\frac{at+1}{a}=-t-\frac{1}{a}$$

а) $t_1\geq 0$, $t_2>0$ (корни различны и неотрицательны).



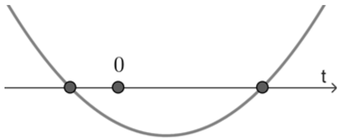
Условия:

$$\begin{cases} D\geq 0 \\ t_E\geq 0 \\ f(0)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(8a^2-3)\geq 0 \\ -\dfrac{1}{2a}\geq 0 \\ 1-2a^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ a^2\geq \dfrac{3}{8} \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq -\dfrac{\sqrt{6}}{4}. \\ a^2\leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

В случае $a=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ корни совпадают и равны $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, тогда $x=a(t^2-2)=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\cdot\left(\dfrac{2}{3}-2\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, а при остальных a оба корня

$$x=-t-\frac{1}{a}=\frac{-1\mp\sqrt{8a^2-3}}{2a}.$$

б) $t_1<0<t_2$ (корни разных знаков)



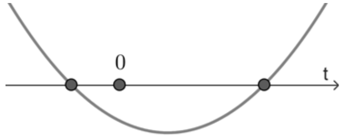
$\Leftrightarrow f(0)<0\Leftrightarrow 1-2a^2<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ a>\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$. Нам нужен больший корень $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1-\sqrt{8a^2-3}}{2a}, \text{ если } a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ t=\dfrac{-1+\sqrt{8a^2-3}}{2a}, \text{ если } a>\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

Отсюда $x=-\dfrac{at+1}{a}=-t-\dfrac{1}{a}=\left[\begin{array}{l} \dfrac{-1+\sqrt{8a^2-3}}{2a}, \text{ если } a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-1-\sqrt{8a^2-3}}{2a}, \text{ если } a>\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.

в) $t_1<0=t_2\Leftrightarrow \begin{cases} t_E<0 \\ f(0)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2a}<0 \\ 1-2a^2=0 \end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $t=0\Rightarrow x=-t-\dfrac{1}{a}=-\sqrt{2}$.

Решим (8): $at^2-t-2a=0\Leftrightarrow t^2-\dfrac{1}{a}t-2=0$ Введём функцию $g(t)=t^2-\dfrac{1}{a}t-2$ — квадратичная функция, график — парабола, ветви вверх.



В данном случае $g(0) = -2 < 0$, поэтому уравнение всегда имеет два различных корня, один из которых положителен, а второй отрицателен. Выбираем большее значение корня $t = \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 2}$.

$$g(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2 = \frac{1}{a}t \Rightarrow x = a(t^2 - 2) = t = \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 2}.$$

Замечание. *Тот факт, что уравнение (8) всегда имеет два корня разных знаков, можно установить и на основании теоремы Виета. Дискриминант уравнения* $D = 1 + 8a^2 > 0$, *поэтому уравнение имеет два корня. Их произведение* $t_1 t_2 = -2 < 0 \Rightarrow$ *корни разных знаков.*

Объединяя решения уравнений (7) и (8), запишем ответ:

1) при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\left\{\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 2} = \frac{1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a}; \frac{-1 + \sqrt{8a^2 - 3}}{2a}\right\};$$

2) при $a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$:

$$\left\{\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 2} = \frac{1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a}; \frac{-1 \pm \sqrt{8a^2 - 3}}{2a}\right\};$$

3) при $a = -\frac{\sqrt{6}}{4}$: $\left\{\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ (все три корня $\frac{1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{8a^2 - 3}}{2a}$ совпадают);

4) при $a \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{4}; 0\right)$: $\left\{\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 2} = \frac{1-\sqrt{8a^2+1}}{2a}\right\}$;

5) при $a \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: $\left\{\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 2} = \frac{1+\sqrt{8a^2+1}}{2a}\right\}$;

6) при $a \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$: $\left\{\frac{1+\sqrt{8a^2+1}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{8a^2-3}}{2a}\right\}$.

Заметим, что пункты 3 и 4 можно объединить, т. к. при $a = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ формула п. 4 принимает вид

$$\frac{1-\sqrt{8\cdot\frac{3}{8}+1}}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)} = (-1):\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

2. «Задача о путнике». *На прямолинейном шоссе, окружённом со всех сторон вспаханным полем, стоит путник. По шоссе он может двигаться со скоростью 5 км/ч, по полю — 3 км/ч. Найдите все точки, в которые может попасть путник за 1 час движения.*

Введём декартову систему координат, где шоссе совпадает с осью O_y и путник находится в начале координат, x и y измеряются в км. Ввиду очевидной симметричности искомой области будем рассматривать движение в верхнюю полуплоскость.

Пройдя за t часов по шоссе $5t$ км, путник может оказаться в любой точке круга, задаваемого неравенством $x^2 + (y-5t)^2 \le 9(1-t)^2$. Объединение всех таких кругов и будет ответом на вопрос задачи. Перепишем это неравенство в виде квадратного относительно t: $16t^2 - 2(5y-9)t + x^2 + y^2 - 9 \le 0$. Будем искать все пары $(x; y)$, для которых это неравенство имеет решения хотя бы для одного $t \in [0;1]$. А это уже задача, связанная с расположением корней квадратного трёхчлена с двумя параметрами.

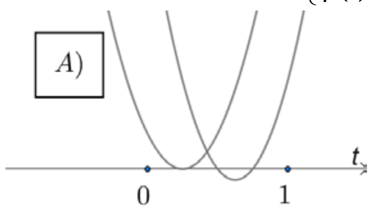
Введём квадратичную функцию

$$f(t) = 16t^2 - 2(5y-9)t + x^2 + y^2 - 9\,,$$

графиком которой является парабола ветвями вверх. Её график должен быть не выше оси t хотя бы в одной точке отрезка $[0;1]$.

Подходят три варианта расположения параболы: А) оба корня, возможно, совпадающие, находятся на этом промежутке; В) только один корень трёхчлена лежит на отрезке $[0;1]$; и случай С) корни находятся по разные стороны от отрезка $[0;1]$.

Случай А) задаётся системой неравенств $\begin{cases} D \ge 0 \\ 0 \le t_0 \le 1 \\ f(0) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$.

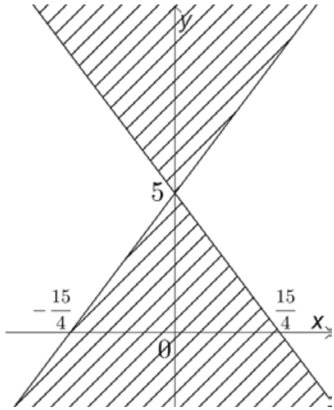


Все эти условия необходимы и достаточны для описания этого вида расположения параболы.

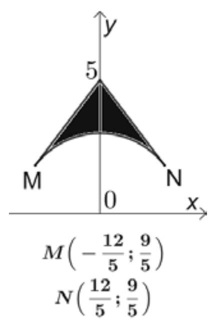
Рассмотрим каждое из неравенств.

$$D^1 = (5y-9)^2 - 16(x^2+y^2-9) = 9y^2 - 90y + 225 - 16x^2 =$$
$$= (3y-15)^2 - (4x)^2 = (3y-15+4x)(3y-15-4x)\,.$$

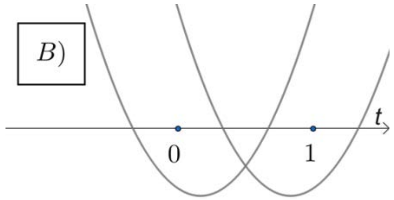
Условие $D \ge 0$ задаёт на плоскости два вертикальных угла со сторонами, лежащими на прямых $y = \frac{4}{3}x + 5$ и $y = -\frac{4}{3}x + 5$ (см. рис.).



Абсцисса вершины параболы $t_0 = \dfrac{5y-9}{16} \in [0; 1]$ при $y \in \left[\dfrac{9}{5}; 5\right]$, что задаёт на координатной плоскости полосу между горизонтальными прямыми $y = \dfrac{9}{5}$ и $y = 5$. $f(0) = x^2 + y^2 - 9$, и условие $f(0) \geq 0$ задаёт на плоскости точки вне окружности $x^2 + y^2 = 9$ с центром $(0; 0)$ и радиусом 3. $f(1) = x^2 + (y-5)^2$, и условие $f(1) \geq 0$ выполняется при всех x и y. Пересечение всех этих областей задаёт криволинейный треугольник с вершинами в точках $(0; 5)$, $\left(-\dfrac{12}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$ и $\left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$, см. рис.справа

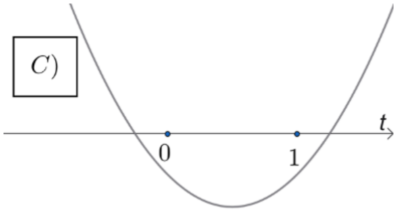


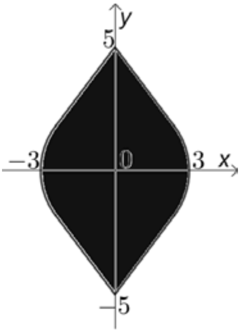
Случай В) задается одним неравенством $f(0) \cdot f(1) \leq 0$. Условий на вершину параболы нет, существование корней у трёхчлена с положительным старшим коэффициентом при наличии хотя бы одного отрицательного значения очевидно. Это неравенство записывается как $(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + (y-5)^2) \leq 0$ и задаёт на плоскости круг с центром $(0; 0)$ и радиусом 3 и точку $(0; 5)$



.

Случай С) определяется системой неравенств $\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$ и не имеет решений, так как $f(1) = x^2 + (y-5)^2$ неотрицательно.





Объединяя все три случая, получаем ответ — см. рисунок справа.

Замечание 1. *Прямые* $y = \frac{4}{3}x + 5$ *и* $y = -\frac{4}{3}x + 5$ *касаются окружности* $x^2 + y^2 = 9$ *в точках* $\left(-\frac{12}{5}; \frac{9}{5}\right)$ *и* $\left(\frac{12}{5}; \frac{9}{5}\right)$ *соответственно. Это означает «плавный» переход прямолинейного участка границы фигуры в дугу окружности. Проверить это можно, находя общие точки окружности и прямой.*

Замечание 2. *Вообще говоря, случаи A) и B) могут пересекаться, если найдётся квадратичная функция с корнями 0 и 1. Но в этом нет никакого криминала, и в данной задаче это не реализуется.*

3. *Решите уравнение*

$$x(\{x\}^2 + 3\{x\} + 1) = \{x\}^3 + 4\{x\}^2 + \{x\} - 6,$$

где $\{x\}$ *— дробная часть числа* x.

Ответ: $\left\{-6; \dfrac{-75+\sqrt{249}}{12}; \dfrac{-26+\sqrt{46}}{5}; \dfrac{-33+\sqrt{129}}{8}; \dfrac{-9+\sqrt{21}}{3}\right\}$.

Решение. Заметим, что $\{x\}$ лежит в полуинтервале $[0;1)$, а на переменную x никаких ограничений нет. Поэтому, подставив $x=[x]+\{x\}$, где $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x, перейдём к уравнению $([x]-1)\{x\}^2+3[x]\{x\}+[x]+6=0$. Переход к целой части позволяет получить какие-нибудь ограничения на переменную. Вводя замены $\{x\}=t$, $[x]=a$, получим уравнение $(a-1)t^2+3at+a+6=0$.

Переформулируем **задачу**: *найдите все* ***целые*** *значения параметра* a*, при которых уравнение* $(a-1)t^2+3at+a+6=0$ *имеет хотя бы одно решение на промежутке* $[0;1)$. А это уже знакомая постановка задачи, решаемая методом плавающей параболы.

Будем искать все возможные значения a, после чего выберем из них целые.

Поскольку коэффициент при t^2 зависит от параметра, начнем со случая равенства его нулю. Подставляя $a=1$, в уравнение, получим $t=-\dfrac{7}{3}$, что не входит в $[0;1)$. Таким образом, $a=1$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a\neq 1$ найдём дискриминант (Вдруг он окажется квадратом?):

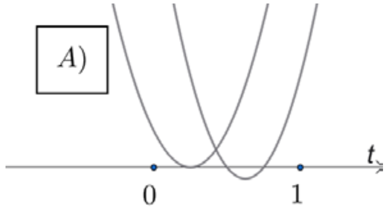
$$D=(3a)^2-4(a-1)(a+6)=5a^2-20a+24=5(a-2)^2+4.$$

Квадратом он не является, но принимает только положительные значения; таким образом, уравнение всегда имеет два различных действительных корня. Для того чтобы плавающая парабола имела ветви вверх, поделим уравнение на $(a-1)$ и введём функцию $f(t)=t^2+\dfrac{3a}{a-1}t+\dfrac{a+6}{a-1}$.

Подходят два варианта расположения параболы:

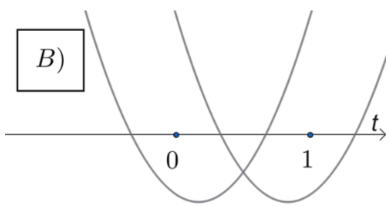
А) оба корня (возможно, совпадающие) находятся на этом промежутке;

В) только один корень трёхчлена лежит на полуинтервале.



Случай А) определяется системой $\begin{cases} D \ge 0 \\ 0 \le t_0 < 1 \\ f(0) \ge 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$.

Неравенство для вершины параболы $t_0 = \dfrac{-3a}{2(a-1)}$ выполняется только при одном целом значении $a = 0$. Но при этом значении $f(0) = \dfrac{a+6}{a-1}$ будет отрицательным, то есть этот случай невозможен.



Случай В) возможен при условии

$$\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a+6}{a-1} = 0 \\ \dfrac{(a+6)(a+1)}{(a-1)^2} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -6 \le a < -1.$$

Эти условия определяют промежуток $[-6;-1)$, в котором целые значения $a:-6,-5,-4,-3,-2$.

При $a=-6$ получим уравнение $-7t^2-18t=0$, в котором один подходящий корень $t=0$. Тогда $x_1=a+t=-6$.

При $a=-5$ имеем уравнение

$$-6t^2-15t+1=0 \Leftrightarrow 6t^2+15t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{-15\pm\sqrt{249}}{12};$$

условию $0\le t<1$ удовлетворяет

$$t=\frac{-15\pm\sqrt{249}}{12} \Rightarrow x_2=a+t=\frac{-75\pm\sqrt{249}}{12}.$$ И т.д.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях t многочлен $P(x)=(2t-1)x^2-(t+3)x+3t+1$ имеет действительные корни (не менее одного), каждый из которых удовлетворяет условию $|5x+2|\le 3x+6$?

Ответ: при $t\in\left[-\frac{13}{23};-\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

2. Найдите все значения параметра a, при которых точки пересечения прямой $2y-x=a+1$ с окружностью $(x-2)^2+(y+2a)^2=9$ лежат по разные стороны от прямой $y=1$.

Ответ: $\left(\frac{-3-2\sqrt{11}}{5};\frac{-3+2\sqrt{11}}{5}\right)$.

3. При каких значениях параметра b уравнение

$$\sqrt{(b-2)x^2-(4b-2)x+3b+16+(x^2-5x+4)^2}=-x^2+5x-4$$

имеет единственное решение?

Ответ: при $b\in\left(-\infty;\frac{8}{3}\right]\cup\{11\}$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых функция $F(y)=\sqrt{(a+2)y-(2a^2+1)y^2-2a+3}$ определена на всём множестве значений функции $y=\sqrt{9-4x^2}$.

Ответ: $\left[0;\dfrac{1}{18}\right]$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|ax^2+5x+2ax+a+6|=x+3$ имеет четыре различных корня.

Ответ: $(-4;0)\cup\left(\dfrac{9}{4};3\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(x^2-4|x|+3)^2-2(a+4)(x^2-4|x|+3)-a^2+16=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $(-\infty;-3-\sqrt{10})\cup(1+\sqrt{26};+\infty)\cup\{0\}$.

7. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2\log_{0,5}^2\big||x|-2\big|+(a^2-6a)\log_4(|x|-2)^2+5-a=0$$

имеет восемь различных решений?

Ответ: при $a\in(-\infty;0)\cup(2{,}5;4)\cup(4;+\infty)$.

Авторы благодарят Рассадкину Марию, ученицу 11И класса лицея №1511, за внимательное прочтение и ряд ценных замечаний.

Методы решения уравнений с суммами цифр

В.В. Травин
Гимназия г. Калинковичи, Республика Беларусь
Vadim013by@yandex.ru

Самой ранней известной системой счисления, которая использовала неопределённый счёт с помощью введения символов известна в Египте и датируется около 3100 г. до н.э. С этого момента времени понятие числа неоднократно видоизменялось: вводились новые аксиомы и определения, операции и команды над ними. Одной из известных ныне всем учащимся характеристик для любого целого неотрицательного числа является его сумма цифр (обозначим $S(n)$ — сумма цифр целого неотрицательного числа n).

Каковы основные методы решений задач, связанных с решениями уравнений с суммами цифр? В данной статье рассмотрим основные идеи и приёмы для учащихся 7−11 классов общеобразовательных учреждений, лицеев и гимназий, студентов педагогических и математических университетов, преподавателей и учителей дисциплин математического профиля.

Основные определения

Определение. *Уравнением с суммой цифр назовём уравнение, в котором неизвестная переменная величина связана с суммой цифр от величины, в которую входит эта переменная.*

Определение. *Решением (корнем) уравнения с суммой цифр называется число, которое при подстановке в это уравнение вместо неизвестной переменной обращает его в верное равенство.*

Пример. *Число* $n = 5$ *— корень уравнения* $n \cdot S(2n) = 5$*, так как при подстановке числа в уравнение получается верное числовое равенство* $5 \cdot S(2 \cdot 5) = 5$.

Пример. *Число* $n=0$ *не является решением уравнения* $S(1+n)=n$*, так как при подстановке нуля в уравнение получается неверное числовое равенство* $S(1+0)=0$.

В решении данных уравнений будем понимать, что сумма цифр определена для целого неотрицательного числа. Тем не менее, это не означает, что данные уравнения относятся к уравнениям в целых числах, хотя некоторые методы решения диофантовых уравнений могут использоваться при нахождении решений. Также мы понимаем, что решение уравнений может зависеть от множества чисел, поиск которых осуществляется.

Пример. *Уравнение* $S(n)=1$ *имеет решение* $n=10^k$*, где* k *— натуральное число или нуль. При любых значениях* k *данные решения являются натуральными числами.*

Определение. *Решить уравнение с суммой цифр означает найти все его решения (корни) или доказать, что их нет.*

Пример. *Уравнение* $S(4+n)=-1$ *не имеет решений, так как сумма цифр не может быть отрицательным числом.*

Определение. *Равносильными уравнениями с суммой цифр называются такие уравнения с суммами цифр, у которых полностью совпадают решения.*

В уравнениях с суммами цифр используются следующие виды преобразований уравнений: равносильные преобразования и следствия.

Равносильные преобразования переводят данное уравнение в такое, у которого все решения полностью совпадают с решениями первоначального уравнения. Проверка решений в таком случае не нужна. Такие преобразования используются в уравнениях чаще всего. К таким преобразованиям относят перенос слагаемых в иные части равенств, умножение на постоянное ненулевое число, возведение в нечётную степень, использование тождественных преобразований выражений и т.д.

Следствие из данного уравнения приводит к уравнению, в котором содержатся корни данного уравнения, но могут быть утеряны или могут присутствовать посторонние корни, например умножение и деление на выражение с переменной. Проверка решений в данном случае является обязательной частью решения. При этом полученное новое уравнение является следствием по отношению к первоначальному уравнению.

Уравнение $S(n)=a$

Рассмотрим основные методы решений простейшего уравнения с суммой цифр, которое имеет вид $S(n)=a$, где a — некоторое число.

В случае, когда число a не является целым положительным решений нет, так как сумма цифр определяется только для числа 0 и натуральных чисел.

Пример. *Найти все двузначные натуральные числа* n*, удовлетворяющие условию* $S(n)=7$.

Решение. Данную задачу можно решить непосредственным перебором всевозможных вариантов. Так как данное число имеет ровно две цифры, и их сумма равна 7, то представим число 7 в виде суммы двух цифр всевозможными способами и получим $7+0=6+1=2+5=4+3$. Это позволяет нам записать всевозможные двузначные числа: 70, 61, 52, 43, 34, 25 и 16.

Ответ: 16, 25, 34, 43, 52, 61 и 70.

В случае ограничения разрядов такой перебор нам даёт ограниченное количество чисел. А как определить всевозможные числа, которые подходят?

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа* n*, удовлетворяющие условию* $S(n)=0$.

Решение. Число 0 подходит по условию задачи. Любое натуральное число n содержит хотя бы одну ненулевую цифру, что говорит о справедливости неравенства $S(n)\geq 1$. Поэтому 0 — единственное число, удовлетворяющее условию задачи.

Ответ: 0.

Из данного примера мы также получили, что для любого натурального числа n неравенство $S(n) \geq 1$ справедливо для любого числа n ≥ 1. Равенство $S(n) = 0$ привело нас к однозначному ответу, но так бывает далеко не всегда.

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа* n*, удовлетворяющие условию* $S(n) = 1$.

Решение. Число 0 не подходит по условию задачи. Число 1 подходит по условию задачи. Остальные однозначные числа не подходят, так как $S(n) \geq 2$. Число 10 подходит, так как $S(10) = 1 + 0 = 1$. Остальные двузначные числа не подходят, так как при любом из них $S(n) \geq 2$. Число 100 подходит, так как $S(100) = 1 + 0 + 0 = 1$. Остальные трёхзначные числа не подходят, так как при любом из них $S(n) \geq 2$. Продолжая далее данный процесс замечаем, что в каждом случае подходят числа вида 10^k, где k — целое неотрицательное число. Все остальные числа не подходят, так как они содержат хотя бы две ненулевые цифры, а значит $S(n) \geq 2$.

Ответ: числа вида 10^k, где k — целое неотрицательное число.

Для конкретного данного числа a остальные уравнения могут быть решены аналогичным образом.

Пример. *Найти все целые положительные числа* n*, удовлетворяющие условию* $S(n) = 2$.

Решение. Число 0 нам не подходит. Все числа, содержащие хотя бы три ненулевые цифры не подходят, так как $S(n) \geq 3$. Это означает, что числа, которые удовлетворяют данному равенству могут содержать только одну или две ненулевые цифры.

Число 2 можно представить в виде $2 + 0 = 1 + 1 + 0$, откуда можно выявить основные виды чисел, которые нам подходят. В первом случае, это числа вида $2\underbrace{000\ldots0}_{k\text{ цифр}} = 2 \cdot 10^k$, где k — натуральное число или 0. Во втором случае, это числа вида $1\underbrace{000\ldots0}_{k_1\text{ цифр}}1\underbrace{000\ldots0}_{k_2\text{ цифр}}$, где k_1 и k_2 — натуральные числа или 0.

Ответ: числа вида $2\underbrace{000\ldots0}_{k\text{ цифр}} = 2\cdot 10^k$, где k — натуральное число или 0; числа вида $1\underbrace{000\ldots0}_{k_1\text{ цифр}}1\underbrace{000\ldots0}_{k_2\text{ цифр}}$, где k_1 и k_2 — натуральные числа или 0.

Исходя из рассмотренных выше примеров можно выделить алгоритм решения уравнения вида $S(n) = a$:

1. Если $a \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, то решений нет.

2. Если $a = 0$, то $n = 0$.

3. Если a — натуральное число, то убедиться, что при количестве ненулевых цифр $a+1$ решений нет, так как $S(n) \geq a+1$. В остальных случаях расписать всевозможные варианты представления числа a в виде сумм цифр, включая число ноль.

Так,

$$a = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{a\text{ единиц}}+0 = 2+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{a-2\text{ единиц}}+0 = \underbrace{1+2+1+1+\ldots+1}_{a-2\text{ единиц}} =$$

$$= 3+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{a-3\text{ единиц}}+0 = \ldots = 2+2+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{a-4\text{ единиц}}+0 = \ldots$$

и так далее.

Так, например, для числа 4 всевозможные представления в виде сумм следующие:

$$1+1+1+1+0 = 2+1+1+0 = 3+1+0 = 2+2+0 = 4+0\,.$$

Непосредственный перебор всевозможных вариантов в общем виде представляет собой громоздкий вариант поиска и записи ответа при достаточно больших значениях числа a.

Поразрядный поиск чисел

В решении уравнений для нахождения целых неотрицательных чисел имеет смысл рассматривать числа по разрядам. Число обозначается в виде $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_m}$, где a_i обозначает цифру соответствующего разряда слева направо. Для ограничения перебора вариантов уравнение может быть сведено к конечному количеству условий для поиска разрядов, каждый из которых может содержать цифры с 0 по 9 (только число не может начинаться с цифры 0).

Пример. *Найти все двузначные натуральные числа, удовлетворяющие уравнению* $S(n) = n - 9$.

Решение. Обозначим число $n = \overline{ab}$, где a обозначает цифру десятков, а b — цифру единиц. Тогда по условию $a + b = \overline{ab} - 9$, причём и $a; b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Так как справедливо $\overline{ab} = 10a + b$, то далее получим $a + b = 10a + b - 9$, откуда $a = 1$. Так как ограничения на число b нет, то $b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Таким образом, нам подходят все двузначные числа с 10 по 19.

Ответ: все двузначные числа с 10 по 19.

Пример. *Найти все двузначные натуральные числа, удовлетворяющие уравнению* $S(n+1) = S(n) + 1$.

Решение. Обозначим число $n = \overline{ab}$, где a обозначает цифру десятков, а b — цифру единиц. Правая часть равенства будет равна $S(n) + 1 = a + b + 1$. Какие возможны варианты нахождения $S(n+1)$?

Первый случай: $b \neq 9$. В этом случае добавление единицы в выражении $S(n+1)$ меняет цифру единиц в числе с b на $b + 1$. Перехода через десяток нет. Значит полученное число состоит из цифр a и $b + 1$. Сумма цифр равна $S(n+1) = a + b + 1$. Таким образом, все двузначные числа, которые не оканчиваются на цифру 9, нам подходят.

Второй случай: $b = 9$. В этом случае рассмотрим два варианта: $a \neq 9$ и $a = 9$.

В первом из них в выражении $S(n+1)$ новое число будет состоять из цифр $a + 1$ и 0, так как осуществился переход через десяток. Тогда имеем $S(n+1) = a + 1 + 0 = a + 1$ и $S(n) + 1 = a + b + 1 = a + 9 + 1 = a + 10$. Полученное противоречие $a + 1 = a + 10$ означает, что числа такого вида не подходят.

Наконец, если $a = 9$, то образуется число 99, которое не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: все двузначные числа, которые не оканчиваются на цифру 9.

В данной задаче непосредственный перебор всех чисел приведёт к достаточно громоздкому решению.

Некоторые уравнения могут быть сведены к системе условий для разрядов.

Пример. *Найти все двузначные натуральные числа, удовлетворяющие уравнению* $n\cdot S(n)=52$.

Решение. Обозначим число $n=\overline{ab}$, где a обозначает цифру десятков, а b — цифру единиц. Тогда по условию $\overline{ab}\cdot(a+b)=52$, причём и $a;b\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Так как справедливо $\overline{ab}=10a+b$, то далее получим $(10a+b)\cdot(a+b)=52$. Заметим, что для двух цифр верно $a+b\le 18$, причём $a+b$ — делитель числа 52. Возможны следующие случаи.

Первый случай: $a+b=1$. Тогда $10a+b=9a+a+b=9a+1$ и равенство приобретает вид $9a+1=52$ или $9a=51$. Так как 51 не делится на 9, то таких цифр a и b не существует.

Второй случай: $a+b=2$. Тогда $10a+b=9a+a+b=9a+2$ и равенство приобретает вид $(9a+2)\cdot 2=52$ или $9a=24$. Так как 24 не делится на 9, то таких цифр a и b не существует.

Третий случай: $a+b=4$. Тогда $10a+b=9a+a+b=9a+4$ и равенство приобретает вид $(9a+4)\cdot 4=52$ или $a=1$. Тогда $b=4-a=3$. Число 13 удовлетворяет условию задачи.

И, наконец, последний случай, $a+b=13$. Тогда $10a+b=9a+a+b=9a+13$ и равенство приобретает вид $(9a+13)\cdot 13=52$ или $9a=-9$. Такого быть не может, значит цифр a и b не существует.

Ответ: 13.

Для поиска чисел в общем виде сначала необходимо или ограничить количество разрядов, или искать ответ независимо от их количества.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым является равенство* $n+8S(n)=45$.

Решение. Так как $n = 45 - 8S(n)$, то $n \leq 45$. Данная оценка приводит к перебору большого количества вариантов чисел. Тем не менее, данное число согласно данному неравенству имеет не более двух разрядов. Обозначим число $n = \overline{ab}$, где a обозначает цифру десятков, b — цифру единиц. Тогда по условию получим равенство $\overline{ab} + a + b = 45$, причём и $a; b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Так как справедливо $\overline{ab} = 10a + b$, то получим соотношение $10a + b + 8a + 8b = 45$ или $18a + 9b = 45$, откуда $2a + b = 5$, где $a; b \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Далее заметим, что если $a \geq 3$, то левая часть равенства будет больше или равна 6. Такого быть не может. Значит $a = 0$, $a = 1$ или $a = 2$.

В первом случае, когда $a = 0$, получим $b = 5 - 2a = 5$. Искомое число — 5. Заметим, что оно удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае, когда $a = 1$, получим $b = 5 - 2a = 3$. Искомое число — 13. Заметим, что оно удовлетворяет условию задачи.

Наконец, *в третьем случае*, когда $a = 2$, получим $b = 5 - 2a = 1$. Искомое число — 21. Заметим, что оно удовлетворяет условию задачи.

Окончательно получим три числа: 5, 13 и 21.

Ответ: 5, 13 и 21.

Оценку разрядов можно выполнять различными способами.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым является равенство* $n + 2S(n) = 2025$.

Решение. Так как $n = 2025 - 2S(n)$, то $n \leq 2025$. С другой стороны, данное число является не более, чем четырёхзначным и значение суммы цифр числа не превосходит 36. Значит $n = 2025 - 2S(n) \geq 1953$. Обозначим число $n = \overline{abcd}$, где a обозначает цифру тысяч, b — цифру сотен, c — цифру десятков, а d — цифру единиц и $a, b, c, d \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Тогда для цифр a и b возможны два случая.

Первый случай: $a = 1$ и $b = 9$. Тогда равенство примет вид $\overline{19cd} + 2 \cdot (1 + 9 + c + d) = 2025$ или $1900 + 10c + d + 20 + 2c + 2d = 2025$, откуда $12c + 3d = 105$. Разделим полученное равенство на 3 и имеем $4c+d=35$, причём $c,\ d\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Заметим, что $c\neq 9$, так как в противном случае левая часть равенства будет больше, чем 35. Так как d — цифра, то оценим её: $d=35-4c\leq 9$, откуда $c\geq 7$. Если $c=7$, то $d=35-4\cdot 7=7$. Если $c=8$, то $d=35-4\cdot 8=3$. Окончательно получим два числа 1977 и 1983.

Во втором случае справедливы равенства $a=2$ и $b=0$. Тогда уравнение примет вид $\overline{20cd}+2\cdot(2+0+c+d)=2025$ или $2000+10c+d+4+2c+2d=2025$, откуда $12c+3d=21$. Разделим полученное равенство на 3 и имеем $4c+d=7$, причём $c,\ d\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Заметим, что $c<2$, так как в противном случае левая часть равенства будет больше, чем 8. Тогда $d=7-4c$. Если $c=0$, то $d=7-4\cdot 0=7$. Если $c=1$, то $d=7-4\cdot 1=3$. Окончательно получим два числа 2007 и 2013.

Ответ: 1977, 1983, 2007 и 2013.

Уравнения, содержащие выражения $\boldsymbol{n-k\cdot S(n)}$ и $\boldsymbol{n\cdot S(n)}$

Рассмотрим уравнения с суммами цифр, которые содержат выражения $n-k\cdot S(n)$ и $n\cdot S(n)$. Некоторые из них можно решать перебором и показывать отсутствие иных решений с помощью метода математической индукции.

Пример. *Найти все натуральные числа* n*, при которых будет справедливо равенство* $n=2S(n)-9$.

Решение. Однозначные числа, кроме числа 9, нам не подходят, в чём можно убедиться непосредственной подстановкой в условие. Какие могут быть двузначные числа? Так как наибольшее значение суммы цифр для двузначного числа равно 18, то тогда $n\leq 2\cdot 18-9=27$. Так как $n+9=2S(n)$, то число n будет нечётным. Непосредственная проверка всех нечётных натуральных чисел с 11 по 27 показывает, что таких чисел не существует.

Далее рассмотрим числа, у которых три или более разрядов. Обозначим m — количество разрядов числа. Его сумма цифр принимает наибольшее значение $9m$. Само число при этом имеет m разрядов, что можно записать в виде неравенства $10^{m-1} \le n < 10^m$. Сравним 10^{m-1} и $18m-9$. Ранее нами было доказано, что неравенство $10^{m-1} > 18m$ справедливо при любом натуральном $m \ge 3$, а значит и справедливо неравенство $10^{m-1} > 18m-9$. Это означает, что для чисел с тремя или более разрядами верно неравенство $n > 2S(n)-9$. А значит, нам подходит только число 9.

Ответ: 9.

В решении уравнений с данными выражениями удобно пользоваться признаками делимости для ограничения перебора вариантов или доказательства того, что данное уравнение не имеет решений.

Пример. *Найти все натуральные двузначные числа* n*, удовлетворяющие условию* $n-S(n)=1$.

Решение. Можно решить данную задачу подстановкой всех двузначных чисел в условие, но мы используем признак делимости на 9. Дело в том, что справедливо сравнение $n = S(n)\,(\mathrm{mod}9)$. Это значит, что $n-S(n) = 0\,(\mathrm{mod}9)$. Но так как $n-S(n)=1$, а сравнение $1=0\,(\mathrm{mod}9)$ не является верным, то таких чисел не существует.

Ответ: таких чисел не существует.

Причём не только среди двузначных, а среди всех натуральных чисел и нуля.

Можно показать с помощью метода математической индукции, что для натуральных чисел, у которых три и более разрядов верно неравенство $n-S(n)>9$. Выполнение данного неравенства будет означать, что среди всех целых неотрицательных чисел только числа с 10 по 19 будут решениями уравнения.

Некоторые уравнения можно свести к уравнению с выражением $n-k\cdot S(n)$ и также воспользоваться признаками делимости.

Пример. *Найти все натуральные числа* n*, при которых выполняется равенство* $899n+S(n)=10000$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $n-S(n)=900n-10000$. Оценка $n \ge S(n)$ приводит нас к большому перебору среди натуральных чисел. Но $n - S(n) = 0\ (\text{mod}9)$, что означает $900n - 10000 = 0\ (\text{mod}9)$. Данное сравнение не выполняется ни при каких натуральных числах n. Это означает, что таких чисел не существует.

Ответ: таких чисел не существует.

Если не сводить данную задачу к такому выражению, то также можно заметить, что $S(n) = 10000 - 899n$. Так как $S(n) \geq 0$, то и $10000 - 899n \geq 0$, что говорит о возможности ограничить количество чисел, которые нам подходят. Использовать признаки делимости можно и в решении уравнений, содержащие произведения $n \cdot S(n)$.

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа* n, *удовлетворяющие условию* $n \cdot S(n) = 51$.

Решение. Число $n = 0$ нам не подходит, так как равенство $0 \cdot 0 = 51$ не является верным. Для натуральных чисел ограничить перебор вариантов в данной задаче можно несколькими способами.

Во-первых, $n \leq 51$, так как в противном случае левая часть равенства будет больше, чем 51. Данный способ приводит нас к непосредственному и громоздкому перебору вариантов.

Во-вторых, n и $S(n)$ — целые числа, а значит число n будет делителем числа 51. Это возможно, когда оно равно 1, 3, 17 и 51. Непосредственной проверкой этих чисел убеждаемся, что ни одно из них не подходит, так как $1 \cdot 1 \neq 51$, $3 \cdot 3 \neq 51$, $17 \cdot 8 \neq 51$ и $51 \cdot 6 \neq 51$.

В-третьих, можно было бы заметить, что так как 51 делится на 3, то n или $S(n)$ делится на 3. Но так как $n = S(n)\ (\text{mod}3)$, что говорит о том, что левая часть равенства делится на 9. Но 51 на 9 не делится. Поэтому таких чисел не существует.

Ответ: таких чисел не существует.

Могут ли быть числа, которые подходят под такие равенства? Да, и осуществить перебор возможно также с использованием разложения на множители.

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа* n, *удовлетворяющие условию* $n \cdot S(n) = 36$.

Решение. Так как 36 делится на 3, то n или $S(n)$ делится на 3. Но по признаку делимости $n = S(n)\ (\mathrm{mod}\,3)$, что говорит о том, что левая часть равенства делится на 9. Разложение на множители числа $36 = 2^2 \cdot 3^2 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$. Так как одна из троек должна входить в множитель n, а вторая — в $S(n)$, то возможны следующие варианты. Первый случай: $36 = 3 \cdot 12$. Если $n = 3$, то $S(n) \neq 12$. Если $n = 12$, то $S(n) = 3$ S. Число 12 нам подходит. Второй случай: $36 = 6 \cdot 6$. Тогда $n = S(n) = 6$. Число 6 нам подходит. В остальных вариантах разложения один из множителей не делится на 3. Таким образом, нам подходят числа 6 и 12.

Ответ: 6 и 12.

Задачи, сводящиеся к алгебраическим

Рассмотрим ряд задач, в которых решение уравнений основано на основных алгебраических приёмах и методах. Например, если оценить значение переменной или выражений в условии задачи, то можно ограничить перебор вариантов или показать, что решений нет.

Для упрощения вычислений можно использовать и основные равносильные преобразования выражений: это основные действия с одночленами и многочленами, формулы сокращённого умножения и разложения на множители, формулы для упрощения квадратного трёхчлена, и др.

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа* n*, удовлетворяющие условию* $n^2 + nS(3n) = 28$.

Решение. Из равенства в условии выразим $n^2 = 28 - nS(3n) \leq 28$. Данная оценка возможна для чисел с 0 по 5. Начиная с $n = 6$ выражение $n^2 \geq 36 > 28$. Непосредственная проверка значений показывает, что: при $n = 0$ равенство $0^2 + 0 \cdot S(3 \cdot 0) = 28$ неверно, при $n = 1$ равенство $1^2 + 1 \cdot S(3 \cdot 1) = 28$ неверно, при $n = 2$ равенство $2^2 + 2 \cdot S(3 \cdot 2) = 28$ неверно, при $n = 3$ равенство $3^2 + 3 \cdot S(3 \cdot 3) = 28$ неверно, при $n = 4$ данное в условии равенство $4^2 + 4 \cdot S(3 \cdot 4) = 28$

является верным, значит $n=4$ подходит и при $n=5$ равенство $5^2+5\cdot S(3\cdot 5)=28$ неверно.

Ответ: 4.

Пример. *Найти все действительные числа* n*, при которых будет выполняться равенство* $\sin(n+0{,}5\pi)=S(3n)+1$.

Решение. Так как верны неравенства $|\sin(n+0{,}5\pi)|\le 1$ и $S(3n)+1\ge 1$, то равенство будет выполнено при $\sin(n+0{,}5\pi)=S(3n)+1=1$. Тогда $S(3n)=0$, что выполнено при $3n=0$ или $n=0$. Проверка показывает, что $n=0$ является решением уравнения.

Ответ: 0.

Уравнения вида $S(f(n))=g(n)$

Решение уравнений вида $S(f(n))=g(n)$ основано на рассмотрении двух вариантов развития событий. Если выражения $f(n)$ и $g(n)$ устроены простым образом, то такое уравнение можно попробовать свести к уравнению $S(n)=a$.

Пример. *Найти все натуральные числа* n*, при которых верно* $S(2n-7)=1$.

Решение. Так как сумма цифр определена для целого неотрицательного числа, то $2n-7$ — целое неотрицательное число. Это возможно, когда справедливо следующее равенство $2n-7=10^k$, где k — целое неотрицательное число. Из данного равенства выразим переменную n через k и получим $n=\frac{1}{2}\cdot(10^k+7)$, где k — целое неотрицательное число. Если k — натуральное число, то 10^k+7 является нечётным числом и число $n=\frac{1}{2}\cdot(10^k+7)$ не будет целым. Данное число n является натуральным только при $k=0$, тогда $n=\frac{1}{2}\cdot(10^0+7)=4$.

Ответ: 4.

В уравнениях с более сложным устройством выражений $f(n)$ и $g(n)$ необходимо искать ограничения на поиск целочисленных значений $f(n)$ и $g(n)$, чтобы найти ответ.

Пример. *Найти все натуральные числа* $\mathbf{n}$, *при которых справедливым будет равенство* $S\left(\frac{n^2+3n+2}{n}\right)=5+n$.

Решение. В данном примере преобразуем дробь $\frac{n^2+3n+2}{n}=\frac{n^2}{n}+\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}=n+3+\frac{2}{n}$. Число $n+3$ является натуральным. Для того, чтобы $S\left(\frac{n^2+3n+2}{n}\right)$ имело смысл, необходимо, чтобы дробь $\frac{2}{n}$ была целым числом. Это возможно лишь при $n=1$ и $n=2$. При $n=1$ получим $S\left(\frac{1^2+3\cdot 1+2}{1}\right)=S(6)=6=5+1$ — верно. Значит $n=1$ — подходит. Аналогично при $n=2$ получим $S\left(\frac{2^2+3\cdot 2+2}{2}\right)=S(6)=6=5+2=7$ — неверно. Значит, число $n=2$ не подходит.

Ответ: 1.

Аналогичные рассуждения остаются справедливыми в поиске целых чисел для равенства $S\left(\frac{n^2+3|n|+2}{|n|}\right)=5+|n|$, только добавляются числа $n=-1$ и $n=-2$ для проверки. При этом число $n=-1$ подходит, а число $n=-2$ не подходит. Однако в равенстве $S\left(\frac{n^2+3|n|+2}{|n|}\right)=|5+n|$ значение $n=-1$ уже не подходит.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым будет равенство* $S(n)=\lg n$.

Решение. Число $n=1$ не подходит по условию задачи. Для того, чтобы $S(n)$ имело смысл, необходимо, чтобы выражение $\lg n$ было натуральным числом. Это возможно при $n=10^k$, $k\in \mathrm{N}$. Подставим данные значения и получим $S(10^k)=\lg 10^k$ или $1=k$. Таким образом, единственным числом, удовлетворяющим условию задачи, будет $n=10^1=10$.

Ответ: 10.

Пример. *Найти все натуральные числа* n*, при которых справедливым будет равенство* $S(n)=\text{НОК}(19-n;\, n-9)$.

Решение. Заметим, что выражение $\text{НОК}(19-n;\, n-9)$ имеет смысл при $19-n>0$ и $n-9<0$. Это означает, что $9<n<19$.

Проверим натуральные числа из этого ограничения.

При $n=10$ получим $1=S(10)=\text{НОК}(19-10;10-9)=9$ неверное равенство.

При $n=11$ получим $2=S(11)=\text{НОК}(19-11;11-9)=8$ неверное равенство.

При $n=12$ получим $3=S(12)=\text{НОК}(19-12;12-9)=21$ неверное равенство.

При $n=13$ получим $4=S(13)=\text{НОК}(19-13;13-9)=12$ неверное равенство.

При $n=14$ получим $5=S(14)=\text{НОК}(19-14;14-9)=5$ верное равенство.

При $n=15$ получим $6=S(15)=\text{НОК}(19-15;15-9)=12$ неверное равенство.

При $n=16$ получим $7=S(16)=\text{НОК}(19-16;16-9)=21$ неверное равенство.

При $n=17$ получим $8=S(17)=\text{НОК}(19-17;17-9)=8$ верное равенство.

При $n=18$ получим $9=S(18)=\text{НОК}(19-18;18-9)=9$ верное равенство.

Непосредственная подстановка натуральных чисел из полученного неравенства в уравнение показывает нам, что только числа 14, 17 и 18 нам подходят.

Ответ: 14; 17 и 18.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым будет равенство* $S(n) = \text{НОД}(n;\, 2)$.

Решение. Заметим, что для любого натурального числа n справедлива оценка для правой части: $1 \le \text{НОД}(n;\, 2) \le 2$. Исходя из этого, рассмотрим два случая.

Первый случай: $S(n) = \text{НОД}(n;\, 2) = 1$. В этом случае, исходя из равенства $S(n) = 1$ нам подходят числа вида 10^{k_1}, где k_1 — целое неотрицательное число. При этом равенство $\text{НОД}(10^{k_1};\, 2) = 1$ справедливо только при $k_1 = 0$, что означает $n = 1$.

Второй случай: $S(n) = \text{НОД}(n;\, 2) = 2$. В этом случае, исходя из равенства $S(n) = 2$ нам подходят числа вида $2\underbrace{000\ldots0}_{k_2 \text{ цифр}} = 2 \cdot 10^{k_2}$, где k_2 — натуральное число или 0. Во втором случае, это числа вида $1\underbrace{000\ldots0}_{k_3 \text{ цифр}}1\underbrace{000\ldots0}_{k_4 \text{ цифр}}$, где k_3 и k_4 — натуральные числа или 0. При этих числах равенство $\text{НОД}(n;\, 2) = 2$ выполняется тогда, когда $k_4 \ne 0$. Окончательно получим числа вида $2\underbrace{000\ldots0}_{k_2 \text{ цифр}} = 2 \cdot 10^{k_2}$, где k_2 — натуральное число или 0, а также числа вида $1\underbrace{000\ldots0}_{k_3 \text{ цифр}}1\underbrace{000\ldots0}_{k_4 \text{ цифр}}$, где k_3 — натуральное число или 0 и k_4 — натуральное число.

Ответ: 1; числа вида $2\underbrace{000\ldots0}_{k_2 \text{ цифр}} = 2 \cdot 10^{k_2}$, где k_2 — натуральное число или 0; числа вида $1\underbrace{000\ldots0}_{k_3 \text{ цифр}}1\underbrace{000\ldots0}_{k_4 \text{ цифр}}$, где k_3 — натуральное число или 0 и k_4 — натуральное число.

В случае, когда выражения не могут быть ограничены, рассматривают некоторые значения, которые подходят и с помощью различных методов (в т. ч. математической индукции) доказывают, что других решений нет.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым будет равенство* $S(n)=\sqrt{n}+2$.

Решение. Для того, чтобы $S(n)$ имело смысл, необходимо, чтобы число n было точным квадратом натурального числа. Пусть $n=l^2$, где $l\in \mathrm{N}$. Тогда уравнение примет вид $S(l^2)=l+2$. Ограничим перебор вариантов первых подходящих чисел. Заметим, что для остатка от деления l на 3 возможны три случая.

Первый случай $l=0\,(\mathrm{mod}3)$. Тогда $l^2=0=S(l^2)\ (\mathrm{mod}3)$ и $l+2=2\,(\mathrm{mod}3)$. Равенство выполняться не может, так как левая часть равенства делится на 3, а правая даёт остаток 2 при делении на 3.

Второй случай $l=1\,(\mathrm{mod}3)$. Тогда $l^2=1=S(l^2)\ (\mathrm{mod}3)$ и $l+2=3=0\,(\mathrm{mod}3)$. Равенство выполняться не может, так как правая часть равенства делится на 3, а левая даёт остаток 1 при делении на 3.

Третий случай $l=2\,(\mathrm{mod}3)$. Тогда $l^2=4=1=S(l^2)\ (\mathrm{mod}3)$ и $l+2=4=1\,(\mathrm{mod}3)$.

Из подходящих чисел нам следует искать те, которые дают остаток 2 при делении на 3.

Среди однозначных чисел непосредственным перебором таковых видно, что только $l=2$, $l=5$ и $l=8$ подходят, так как $S(2^2)=2+2$, $S(5^2)=5+2$ и $S(8^2)=8+2$. Среди двузначных чисел подходят только числа $l=14$ и $l=17$. Далее рассмотрим числа, у которых три или более разрядов. Обозначим m — количество разрядов числа l, что можно записать в виде неравенства $10^{m-1}\le l<10^m$. Тогда $10^{2m-2}\le l^2<10^{2m}$. Из оценки получим, что наибольшее количество разрядов у квадрата числа может быть $2m$ и сумма цифр его квадрата может принимать наибольшее значение $18m$. Сравним 10^m+2 и $18m$.

Неравенство $10^m+2>18m$ при $m>3$ докажем с помощью метода математической индукции. При $m=3$ неравенство $10^3+2>18\cdot 3$ является верным. Пусть при $m\le k$ неравенство $10^m+2>18m$ выполняется. Рассмотрим неравенство при $m=k+1$. Тогда необходимо доказать, что $10^{k+1}+2>18(k+1)$. Рассмотрим неравенство $10^k+2>18k$. Умножим его на 10 и получим $10^{k+1}+20>180k$ или $10^{k+1}+2>180k-18$. Далее заметим, что неравенство $180k-18>18k+18$ выполняется при любом натуральном k, так как оно равносильно $162k>36$ или $9k>2$. Таким образом $10^{k+1}+2>18(k+1)$. Так как неравенство верно при $m=k+1$, то оно верно при любом натуральном $m\ge 3$.

Окончательно (так как $n=l^2$) получим ответ 4, 25, 64, 196 и 289.

Ответ: 4, 25, 64, 196 и 289.

Уравнения, где $S(f(n))$ вычисляется в явном виде

В некоторых уравнениях выражение $S(f(n))$ может быть высчитано в явном виде. Обычно, неизвестная переменная входит в количество разрядов определённых чисел.

Пример. *Найти все натуральные числа n, при которых справедливым будет равенство* $n^2=S\left(\sqrt{1\underbrace{00\ldots0}_{2n\text{ цифр}}}\right)$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения. Получим $S\left(\sqrt{1\underbrace{00\ldots0}_{2n\text{ цифр}}}\right)=S\left(\sqrt{10^{2n}}\right)=S(10^n)=1$S. Таким образом, уравнение имеет вид $n^2=1$ или $n=1$.

Ответ: 1.

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа n, при которых справедливым будет равенство* $S\left(\dfrac{n\cdot 10^n-n}{9}\right)=32-n^2$.

Решение. Число $n=0$ нам не подходит, так как $S\left(\dfrac{0\cdot 10^0-0}{9}\right)\neq 32-0^2$. Далее рассматриваем натуральные числа. Распишем левую часть уравнения. Получим следующее: $S\left(\dfrac{n\cdot 10^n-n}{9}\right)=S\left(n\cdot\dfrac{10^n-1}{9}\right)=S\left(n\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}\right)$. Так как сумма цифр числа неотрицательна, то $32-n^2\geq 0$ или $n\leq 5$. Тогда $S\left(n\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}\right)=n\cdot\left(\underbrace{1+1+\ldots1}_{n\text{ цифр}}\right)=n^2$ и получим $n^2=32-n^2$, откуда $n=4$.

Ответ: 4.

Так как $n\leq 5$, то можно было осуществить непосредственный перебор чисел.

Пример. *Найти все целые неотрицательные числа* n, *при которых справедливым будет равенство* $S\left(\left[\dfrac{10^n}{3}\right]\right)=72$.

Решение. Число $n=0$ нам не подходит, так как $S\left(\left[\dfrac{10^n}{3}\right]\right)\neq 72$. Далее рассматриваем натуральные числа. Распишем левую часть уравнения. Получим следующее: $S\left(\left[\dfrac{10^n}{3}\right]\right)=S\left(\left[\dfrac{10^n-1+1}{3}\right]\right)=$

$$=S\left(\left[3\cdot\frac{10^n-1}{9}+\frac{1}{3}\right]\right)=S\left(\left[3\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}+\frac{1}{3}\right]\right)=S\left(\left[\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ цифр}}+\frac{1}{3}\right]\right)=$$

$=S\left(\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ цифр}}\right)=\underbrace{3+3+\ldots+3}_{n\text{ цифр}}=3n$. Тогда получим $3n=72$, откуда $n=24$.

Ответ: 24.

Рассмотренные выше примеры имеют конечное число решений.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым будет равенство* $S\left(8\cdot 10^{n^4+2}\right)=8$.

Решение. Распишем левую часть уравнения. Получим следующее:

$$S\left(8\cdot 10^{n^4+2}\right)=S\left(8\cdot 1\underbrace{00\ldots 0}_{n^4+2\text{ цифр}}\right)=S\left(8\underbrace{00\ldots 0}_{n^4+2\text{ цифр}}\right)=8+\underbrace{0+0+\ldots+0}_{n^4+2\text{ цифр}}=8.$$

Тогда получим равенство $8=8$, которое выполняется для любого натурального числа n.

Ответ: все натуральные числа.

Пример. *Найти все натуральные числа* n, *при которых справедливым будет равенство* $S\left(10^{n^3}-2\right)=n^2-9n$.

Решение. Так как сумма цифр является неотрицательным числом, то $n^2-9n\geq 0$. Это означает, что нам подходят натуральные числа, удовлетворяющие условию $n\geq 9$.

Распишем левую часть уравнения. Получим следующее:

$$S\left(10^{n^3}-2\right)=S\left(\underbrace{99\ldots 9}_{n^3-1\text{ цифр}}8\right)=\underbrace{9+9+\ldots+9}_{n^3-1\text{ цифр}}+8=9\cdot(n^3-1)+8=9n^3-1.$$

Уравнение перепишется в следующем виде: $9n^3-1=n^2-9n$. Преобразуем его с помощью группировки и вынесения общего множителя:

$$9n^3-n^2+9n-1=0\Leftrightarrow n^2(9n-1)+1(9n-1)=0\Leftrightarrow (9n-1)(n^2+1)=0.$$

Равенство $(9n-1)(n^2+1)=0$ не выполняется ни при каком натуральном числе n. Это означает, что данное уравнение не имеет решений.

Ответ: таких чисел не существует.

Системы и совокупности уравнений

Под системой из нескольких условий обычно подразумевают набор, в котором каждое условие является истинным. Решением системы из нескольких условий для некоторого числа n — это нахождение таких значений n, при которых каждое условие будет верно.

Пример. *Определить все натуральные числа* n*, которые удовлетворяют двум условиям:* $S(n)=1$ *и* $S(2n)=2$.

Решение. Рассмотрим первое условие системы. Его решение имеет вид $n=10^k$, где k — натуральное число или ноль. При этом второе условие $S(2n)=S(2\cdot10^k)=2$ — выполняется при любом значении k. Это означает, что все числа вида $n=10^k$, где k — натуральное число или ноль, являются решениями системы уравнений

Ответ: $n=10^k$, где k — натуральное число или ноль.

Задачу с помощью символа системы можно записать и так:
$$\begin{cases} S(n)=1; \\ S(2n)=2. \end{cases}$$

В данном случае система имеет бесконечно много натуральных решений, но так бывает не всегда.

Пример. *Определить все натуральные числа* n*, которые удовлетворяют двум условиям:* $S(n)=1$ *и* $S(3n+1)=5$.

Решение. Рассмотрим первое условие системы. Его решение имеет вид $n=10^k$, где k — натуральное число или ноль. При этом второе условие $S(3n)=S(3\cdot10^k+1)=3+1\neq5$ — не выполняется ни при каком значении k. Это означает, система уравнений не имеет решений.

Ответ: таких чисел не существует.

Если в решении системы используется несколько переменных, то необходимо искать наборы чисел, которые удовлетворяют условиям.

Пример. *Определить все действительные числа* n *и* m*, которые удовлетворяют двум условиям:* $S(n+m)=1$ *и* $S(n-m)=1$.

Решение. Из первого и второго условий системы получим следующие равенства: $n+m=10^k$ и $n-m=10^l$, где k, l — натуральные числа или ноль. Выразим переменную n из первого условия:

$n = 10^k - m$. Подставим её во второе условие и получим следующее: $10^k - m - m = 10^l$, откуда $2m = 10^k - 10^l$ или $m = 0{,}5 \cdot (10^k - 10^l)$. Тогда окончательно выразим $n = 0{,}5 \cdot (10^l + 10^k)$.

Ответ: $n = 0{,}5 \cdot (10^l + 10^k)$ и $m = 0{,}5 \cdot (10^k - 10^l)$, где k, l — натуральные числа или ноль.

Возникает вопрос, а при любых ли значениях k и l получатся целые значения n и m? На самом деле, если $k = 1$ и $l = 0$, получаются рациональные значения искомых переменных $n = 5{,}5$ и $m = 4{,}5$, причём данные значения k и l не являются единственными.

Пример. *Определить все целые числа* n *и* m*, которые удовлетворяют двум условиям:* $S(n+m) = 1$ *и* $S(n-m) = 0$.

Решение. Из первого и второго условий системы получим следующие равенства: $n + m = 10^k$ и $n - m = 0$, где k — натуральное число или ноль. Выразим переменную n из второго условия: $n = m$. Подставим данное выражение в первое условие и получим следующее: $m + m = 10^k$, откуда $2m = 2n = 10^k$ или $m = n = 0{,}5 \cdot 10^k$. Обращаем внимание, что $m = n = 5 \cdot 10^{k-1}$. Это означает, что целые значения переменных получаются при условии $k - 1 \ge 0$ или $k \ge 1$, что равносильно $k \ne 0$.

Ответ: $n = m = 5 \cdot 10^{k-1}$, где k — натуральное число.

Пример. *Определить все действительные числа* n *и* m*, которые удовлетворяют двум условиям:* $n + 8S(n+m) = 45 - m$ *и* $(n^2 + m) = 36 : S(m + n^2)$.

Решение. Обратим внимание на то, что числа $n + m$ и $m + n^2$ должны быть целыми. Перепишем первое условие системы в виде $n + m + 8S(n+m) = 45$. Выполним замену переменных $n + m = t_1$ и имеем: $t_1 + 8S(t_1) = 45$. Ранее нами было показано, что данное уравнение имеет решения 5, 13 и 21.

Рассмотрим второе условие системы $(n^2+m)=36:S(m+n^2)$. Исходя из него получим, что $S(m+n^2)\neq 0$ и перепишем его в виде $(n^2+m)\cdot S(m+n^2)=36$. Выполним замену переменной $m+n^2=t^2$ и имеем равенство $t_2+S(t_2)=36$. Ранее нами было показано, что данное уравнение имеет решение при числах 6 и 12. При этом условие $S(m+n^2)\neq 0$ выполнено.

Значения t_1 может принимать 5, 13 и 21, а значения t_2 может принимать 6 и 12. Для нахождения решений данной системы рассмотрим шесть случаев:

Первый случай: $n+m=5$ и $n^2+m=6$. Из первого условия получим $m=5-n$. Подставим во второе условие и получим $n^2+5-n=6$ или $n^2-n-1=0$. Данное уравнение относительно n имеет два решения, в каждом из которых однозначно определяется переменная m. Так, при $n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ получим $m=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$ и при $n=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ получим $m=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$.

Второй случай: $n+m=5$ и $n^2+m=12$. Из первого условия получим $m=5-n$. Подставим во второе условие и получим $n^2+5-n=12$ или $n^2-n-7=0$. Данное уравнение относительно n имеет два решения, в каждом из которых однозначно определяется переменная m. Так, при $n=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ получим $m=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$ и при $n=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$ получим $m=\dfrac{9+\sqrt{29}}{2}$.

Третий случай: $n+m=13$ и $n^2+m=6$. Из первого условия получим $m=13-n$. Подставим во второе условие и получим $n^2+13-n=6$ или $n^2-n+7=0$. Данное уравнение относительно n не имеет решений.

Четвёртый случай: $n+m=13$ и $n^2+m=12$. Из первого условия $m=13-n$. Подставим во второе условие и получим

$n^2+13-n=12$ или $n^2-n+1=0$. Данное уравнение относительно n не имеет решений.

Пятый случай: $n+m=21$ и $n^2+m=6$. Из первого условия получим $m=21-n$. Подставим во второе условие и получим $n^2+21-n=6$ или $n^2-n+15=0$. Данное уравнение относительно n не имеет решений.

Шестой случай: $n+m=21$ и $n^2+m=12$. Из первого условия получим $m=21-n$. Подставим во второе условие и получим $n^2+21-n=12$ или $n^2-n+9=0$. Данное уравнение относительно n не имеет решений.

Ответ: $n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $m=\dfrac{9-\sqrt{5}}{2}$; $n=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $m=\dfrac{9+\sqrt{5}}{2}$; $n=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$, $m=\dfrac{9-\sqrt{29}}{2}$ и $n=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$, $m=\dfrac{9+\sqrt{29}}{2}$.

Под совокупностью из нескольких условий обычно подразумевают набор, в котором хотя бы одно из предложенных условий является истинным. Решением совокупности из нескольких условий для некоторого числа n — это нахождение таких значений n, при которых хотя бы одно условие из указанных будет верно.

Пример. *Определить все натуральные числа* n*, которые удовлетворяют хотя бы одному из двух условий:* $S(n)=1$ *и* $S(2n)=2$.

Решение. Рассмотрим первое условие системы. Его решение имеет вид $n=10^k$, где k — натуральное число или ноль. Рассмотрим второе условие системы: $S(2n)=2$. Для нахождения его решений нужно рассмотреть два случая.

Первый случай: $2n=2\cdot 10^l$, или $n=10^l$, где l — натуральное число или 0. Данные решения уже найдены в рассмотрении первого условия совокупности.

Второй случай: $2n=1\underbrace{000\ldots0}_{k_1\ \text{цифр}}1\underbrace{000\ldots0}_{k_2\ \text{цифр}}$, где k_1 и k_2 — натуральные числа или 0. Тогда, когда $k_2=0$ натуральных решений нет, поскольку в левой части равенства стоит чётное число, а в правой

— нечётное. Если $k_2 \neq 0$, то $n = 5\underbrace{000\ldots0}_{k_1\text{ цифр}}5\underbrace{000\ldots0}_{k_2-1\text{ цифр}}$, где k_1 — натуральное число или 0, k_2 — натуральное число.

Ответ: $n = 10^k$, где k — натуральное число или ноль; $5\underbrace{000\ldots0}_{k_1\text{ цифр}}5\underbrace{000\ldots0}_{k_2-1\text{ цифр}}$, где k_1 — натуральное число или 0, k_2 — натуральное число.

Задачу с помощью символа совокупности можно записать так:
$$\left[\begin{array}{l} S(n) = 1; \\ S(2n) = 2. \end{array}\right.$$

Пример. *Определить все натуральные числа* n *и* m*, которые удовлетворяют хотя бы одному из двух условий:* $S(n+m) = 0$ *и* $S(mn) = 1$.

Решение. Рассмотрим первое условие совокупности. Оно равносильно следующему условию $n + m = 0$. Таких натуральных чисел не существует.

Рассмотрим второе условие совокупности. Оно равносильно следующему условию $mn = 10^k$, где k — натуральное число или ноль. Таким образом, два натуральных числа n и m таковы, что равенство $mn = 10^k$ верно.

Ответ: наборы натуральных чисел n и m такие, что $mn = 10^k$, где k — натуральное число или ноль.

Также ответ можно записать с использованием двух параметров: $n = l$, $m = l^{-1} \cdot 10^k$, где k — натуральное число или ноль.

Пример. *Определить все целые неотрицательные числа* n *и* m*, которые удовлетворяют хотя бы одному из условий:* $2S(n+m) + m = 15 - n$ *и* $S(m^2 + n^2) + m^2 = 1$.

Решение. Рассмотрим первое условие совокупности. Перепишем его в таком виде $2S(n+m) + m + n = 15$. Обозначим $m + n = t$ — целое неотрицательное число, и имеем равенство $2S(t) + t = 15$. Из соотношения $t = 15 - 2S(t) \leq 15$ получим, что непосредственным перебором из чисел с 0 по 15 в данное условие для t подходят только числа 5 и 11. Это означает, что выполнено одно из условий: $m+n=5$ или $m+n=11$. Если $m+n=5$, то подходят наборы чисел $n=5$ и $m=0$, $n=4$ и $m=1$, $n=3$ и $m=2$, $n=2$ и $m=3$, $n=1$ и $m=4$, $n=0$ и $m=5$. Если $m+n=11$, то подходят наборы чисел $n=11$ и $m=0$, $n=10$ и $m=1$, $n=9$ и $m=2$, $n=8$ и $m=3$, $n=7$ и $m=4$, $n=6$ и $m=5$, $n=5$ и $m=6$, $n=4$ и $m=7$, $n=3$ и $m=8$, $n=2$ и $m=9$, $n=1$ и $m=10$, $n=0$ и $m=11$.

Рассмотрим второе условие совокупности. Так как $S(m^2+n^2)=1-m^2\le 1$, то возможны два случая.

Первый случай: $m^2=0$ или $m=0$. Тогда $S(n^2)=1$ или $n^2=10^k$, где k — натуральное число или ноль. Так, как n — целое неотрицательное число, то n^2 — квадрат целого неотрицательного числа. Равенство возможно, если k — чётное натуральное число или ноль. Значит $k=2p$, p — натуральное число или ноль, и $n^2=10^{2p}$, откуда $n=10^p$. Значит, наборы чисел $n=10^p$, где p — натуральное число или ноль, и $m=0$ нам подходят.

Второй случай: $m^2=1$ или $m=1$. Тогда $S(1+n^2)=0$ или $1+n^2=0$. Таких натуральных чисел n не существует.

Ответ: $n=5$ и $m=0$; $n=4$ и $m=1$; $n=3$ и $m=2$; $n=2$ и $m=3$; $n=1$ и $m=4$; $n=0$ и $m=5$; $n=11$ и $m=0$; $n=10$ и $m=1$; $n=9$ и $m=2$; $n=8$ и $m=3$; $n=7$ и $m=4$; $n=6$ и $m=5$; $n=5$ и $m=6$; $n=4$ и $m=7$; $n=3$ и $m=8$; $n=2$ и $m=9$; $n=1$ и $m=10$; $n=0$ и $m=11$; $n=10^p$, где p — натуральное число или ноль, и $m=0$.

Список литературы

1. Барабанов Е.А. [и др.]: Задачи белорусских математических олимпиад: 2016−2017 учебный год, 2017−2018 учебный год / Е. А. Барабанов [и др.]. — Минск: Белорус. Ассоц. «Конкурс», 2018. − 352 с.: ил. − (Белорусские математические олимпиады).

Урок повторения: одна конструкция

А.Д. Блинков,
г. Москва
ablinkov2021@gmail.com

Впервые опубликовано в журнале «Матемака», №5/2025.

Основа этой статьи — сценарий урока повторения ряда фактов курса планиметрии. Идея такого урока возникла из размышлений о тех трудностях, которые возникают у школьников при решении геометрических задач на различных экзаменах и олимпиадах. Одна из причин — изучение планиметрии происходит, чаще всего, так: теорема и затем упражнения и задачи на применение этой теоремы. И в этом случае школьники с этими задачами справляются. Но оказавшись в ситуации, когда непонятно какие именно факты помогут в решении, многие из них теряются.

В какой-то степени можно решить эту проблему, если по ходу прохождения программы успевать рассматривать типовые геометрические конструкции и их свойства, но на это у учителя времени обычно не хватает, особенно при изучении базового курса. На помощь могут прийти уроки повторения в конце учебного года.

Сдвоенный урок, сценарий которого представлен ниже, проведён автором с учащимися 9 класса лицея №13 г. Новосибирска в рамках XIV выездного семинара учителей математики. Он построен в виде фронтальной работы со школьниками. Для удобства восприятия материал разбит на разделы. Желаемые ответы учеников приведены в квадратных скобках.

Сценарий урока

На этом уроке мы повторим многие факты курса планиметрии, установим связи между утверждениями, которые встречались в разное время, что-то обобщим. В этом нам поможет постепенное рассмотрение одной важной конструкции.

I. *Пусть дан остроугольный треугольник* ABC*, в котором проведены высоты* BB_1 *и* CC_1 *(см. рис. 1).*

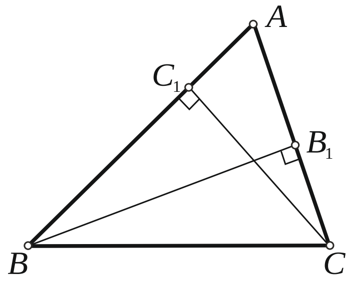


Рис. 1.

1) Найдите на чертеже подобные треугольники, запишите и обоснуйте.

ΔABB_1 подобен ΔACC_1, так как они прямоугольные и имеют общий угол A.

2) Запишите пропорциональность сторон этих треугольников.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB_1}{AC_1}.$$

3) Сформулируйте факт, который отражает равенство $\frac{AB}{AC} = \frac{BB_1}{CC_1}$.

Высоты треугольника обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

4) Откуда, помимо подобия, это известно?

$$S_{ABC} = 0{,}5AB \cdot CC_1 = 0{,}5AC \cdot BB_1.$$

5) Пусть известны только углы треугольника ABC*. Можно ли найти коэффициент подобия треугольников* ABB_1 *и* ACC_1*?*

Можно. $k = \dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle B}$ по теореме синусов.

II. *Проведём отрезок* B_1C_1 *(см. рис. 2).*

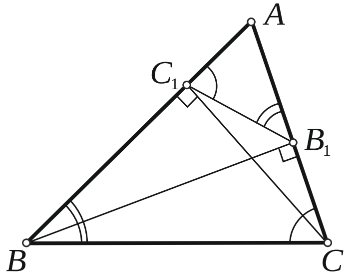


Рис. 2.

1) Докажите подобие треугольников AB_1C_1 *и* ABC *и найдите коэффициент этого подобия.*

Общий угол A и $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ (следует из пропорции, записанной ранее), $k = \cos\angle A$.

2) Назовите равные углы, которые следуют из этого подобия и отметьте их на чертеже.

$\angle AC_1B_1 = \angle ACB$ и $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$.

3) Откуда, помимо подобия, можно было вывести равенства этих углов?

Точки B, C, B_1 и C_1 лежат на одной окружности с диаметром BC, так как $\angle BC_1C = \angle CB_1B = 90°$.

III. *Проведём высоту* AA_1, *а также и отрезки* A_1B_1 *и* A_1C_1 *(см. рис. 3).*

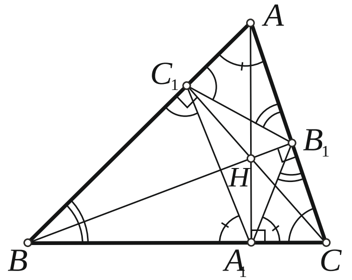


Рис. 3.

1) Отметьте на чертеже углы, равные отмеченным ранее, и обоснуйте эти равенства.

Два способа: два аналогичных подобия треугольников или две аналогичные четвёрки точек на одной окружности.

2) Из аналогичных соображений найдите на чертеже углы, равные углу BAC *, и отметьте их.*

$\angle BA_1C_1 = \angle BAC = \angle CA_1B_1$.

3) Вершины треугольника $A_1B_1C_1$ *являются основаниями высот треугольника* ABC *. Как называется такой треугольник?*

Ортотреугольник треугольника ABC .

4) Пусть H *— точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника* ABC*. Какую роль точка* H *играет в треугольнике* $A_1B_1C_1$ *? Докажите.*

H — центр вписанной окружности (инцентр) треугольника $A_1B_1C_1$, так как из равенств отмеченных углов при его вершинах следует, что A_1A , B_1B и C_1C — биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$.

5) Найдите на рис. 3 другие четвёрки точек, лежащие на одной окружности, обоснуйте и укажите диаметры этих окружностей.

(AB_1HC_1) , (BA_1HC_1) , (CB_1HA_1) лежат на окружностях с диаметрами AH , BH и CH соответственно, так как на эти отрезки опираются прямые углы, вершинами которых являются две другие точки каждой четвёрки.

IV. *Продлим две стороны треугольника* $A_1B_1C_1$*, например,* A_1B_1 *и* A_1C_1 *(см. рис. 4).*

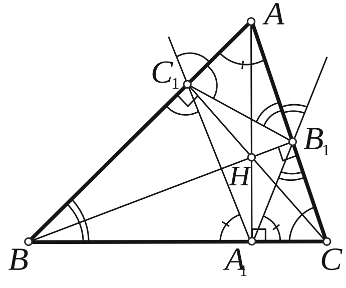


Рис. 4.

1) Какую роль играют лучи C_1A и B_1A в треугольнике $A_1B_1C_1$? Обоснуйте.

Это биссектрисы внешних углов при вершинах C_1 и B_1. Достаточно отметить равные вертикальные углы.

2) Какую роль играет точка A в треугольнике $A_1B_1C_1$?

Центр вневписанной окружности, касающейся стороны B_1C_1 и продолжений двух других сторон.

3) Можно ли было сделать этот вывод, рассматривая только одну внешнюю биссектрису?

Да, так как A_1A — биссектриса внутреннего угла треугольника $A_1B_1C_1$.

4) Сделайте аналогичный вывод про точки B и C.

Они также являются центрами вневписанных окружностей треугольника $A_1B_1C_1$.

5) Как можно коротко сформулировать доказанный факт?

Вершины треугольника являются центрами вневписанных окружностей его ортотреугольника.

6*) На плоскости даны три точки, которые являются центрами вневписанных окружностей некоторого треугольника. Как восстановить этот треугольник с помощью циркуля и линейки?*

Пусть даны точки A, B и C, которые являются центрами вневписанных окружностей треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда достаточно построить треугольник ABC и построить его высоты.

V. *Оставим теперь на чертеже только сам треугольник, его высоты и ортоцентр, но проведём окружность, описанную около треугольника ABC (см. рис. 5).*

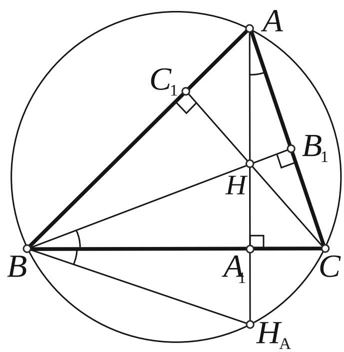


Рис. 5.

1) Продлим высоту AA_1 до пересечения с описанной окружностью в точке H_A. Докажите, что $A_1H = H_AH$.

Так как $\angle CBH_A = \angle CAH_A = \angle CBH$, то BA_1 — высота и биссектриса треугольника HBH_A, значит, BA_1 — медиана.

2) Сформулируйте доказанное утверждение.

Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно его стороны, лежит на описанной окружности.

3) Найдите другой способ доказательства этого факта, если вместо пересечения AA_1 с окружностью сразу рассмотреть точку H_A, симметричную H, и доказывать, что она лежит на окружности.

Пусть H_A симметрична H относительно прямой BC. Тогда $\angle BH_AC = \angle BHC = \angle B_1HC_1 = 180° - \angle BAC$ (отметить на чертеже).

4) Каково взаимное расположение двух окружностей, описанных около треугольников BHC и ABC? Почему?

Эти окружности симметричны относительно прямой BC, так как точки B и C лежат на прямой BC, а точки H и H_A симметричны относительно неё.

VI. *Отметим точки H_B и H_C, аналогичные точке H_A, соединим эти три точки отрезками, и вернём на чертёж ортотреугольник (см. рис. 6).*

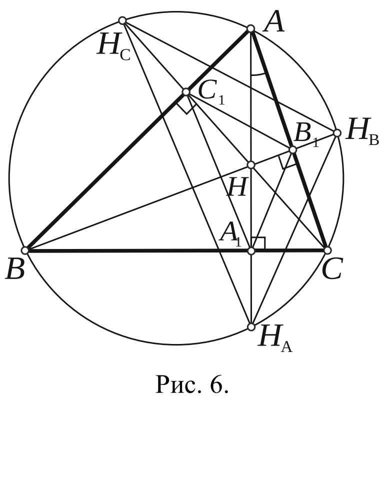


Рис. 6.

1) Обоснуйте подобие треугольников $H_AH_BH_C$ и $A_1B_1C_1$.

Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ являются средними линиями треугольника $H_AH_BH_C$.

2) Какую роль играет точка H в треугольнике $H_AH_BH_C$? Почему?

Центр вписанной окружности, что следует из доказанного подобия.

3) Объясните, как восстановить треугольник с помощью циркуля и линейки, если даны только три точки пересечения продолжений его высот с описанной окружностью.

Если даны точки H_A, H_B и H_C, то достаточно построить окружность, описанную около треугольника $H_AH_BH_C$, и пересечь с ней биссектрисы этого треугольника.

4) Объясните, как решить аналогичную задачу, если даны три точки пересечения биссектрис углов треугольника с его описанной окружностью.

Если даны точки A, B и C, то достаточно построить окружность, описанную около треугольника ABC, и пересечь с ней высоты этого треугольника.

VII. *Вернёмся к рис. 5, на котором отметим середину M стороны BC и точку N, симметричную H относительно M (см. рис. 7).*

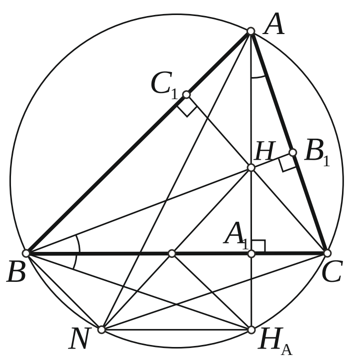


Рис. 7.

1) Докажите, что N лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

$BHCN$ — параллелограмм, поэтому $\angle BNC = \angle BHC = 180° - \angle BAC$.

2) Докажите, что AN — диаметр описанной окружности.

Из симметрии H и H_A следует, что $MH_A = MH = MN$, поэтому $\angle HH_AN = \angle AH_AN = 90°$.

3) Рассмотрим гомотетию с центром H и коэффициентом 0,5. Найдите образы точек N и H_A, а также образы вершин треугольника ABC.

Образами N и H_A являются точки M и A_1, а образами вершин — середины HA, HB и HC.

4) Что является образом описанной окружности при этой гомотетии?

Окружность, проходящая через образы точек, указанных в пункте 3) и точек, им аналогичных.

5) Как называется эта окружность, которая проходит через середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром (см. рис. 8)?

Окружность девяти точек или окружность Эйлера.

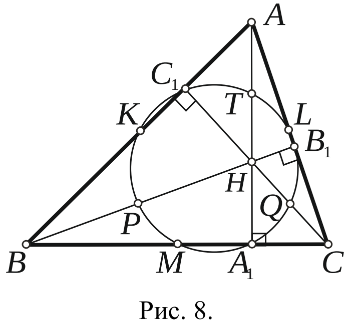


Рис. 8.

Таким образом, в процессе рассмотрения одной и той же конструкции мы повторили: свойства и признаки подобия треугольников; формулу площади треугольника; теорему синусов; свойство углов, вписанных в окружность; свойства и признаки вписанных четырёхугольников; вписанную в треугольник окружность и его вневписанные окружности; свойства ортотреугольника и ортоцентра треугольника; осевую и центральную симметрии; гомотетию; окружность девяти точек.

В качестве домашнего задания можно предложить школьникам рассмотреть аналогичные вопросы для случая, когда треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом A.

Как повторить «всю» геометрию на одном уроке

Д.В.Прокопенко
г. Москва, Школа 2007 ФМШ
prokop.dm@mail.ru

Перед каждым учителем старших классов встает вопрос, как повторять планиметрию? Поскольку у автора статьи кроме 8 класса есть еще и 10–11 классы, то я для них дублирую домашнее задание 8 класса как дополнительное. Однажды я добавил в домашнее задание 8 класса в раздел «Необязательное задание» одну задачу В.В. Произволова как нестандартную задачу повышенной сложности (см. рис. 1).

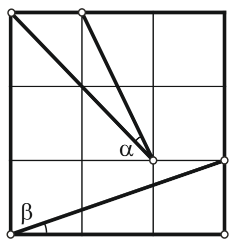


Рис. 1

Задача 1. *Докажите, что два угла, нарисованные на клетчатой бумаге, равны* ($\alpha = \beta$).

Конечно, задача – непростая. Особенно с точки зрения 8 класса. Как сравнить углы? Нужно найти дополнительное построение, а это всегда непросто.

Итак, мы предлагаем заинтересованному читателю решить самостоятельно эту задачу. Уточним задание: 1) Можно ли решить задачу методами седьмого класса? К удивлению автора, эта задача обнаружилась в учебнике М. Волчкевича за седьмой класс. 2) Как бы решал задачу ученик 8, 9 и 10–11 классов? Сложное задание: Проведите в качестве дополнительного построения всего один отрезок, после этого задача решается в стиле древнегреческих комментариев «Смотри!». Это и будет авторское решение от В.В. Произволова из книги [1].

Начнем с того, как решали старшеклассники, а потом вернемся к решению 8 класса. В самом конце статьи приведем «профессиональные» решения, доступные хорошо подготовленному школьнику. Некоторые решения будет сопровождать фраза «неожиданный ход!». В первую очередь автор имеет ввиду себя.

Часть 1. Вычислительные методы.

Все эти способы удобны тем, что не требуют дополнительных построений, нужно знать некоторый набор полезных теорем и не ошибиться в вычислениях. Идея понятная, мы хотим сравнить синусы или косинусы (или даже тангенсы) нужных углов.

В 11 классе к середине года некоторые ученики наконец-то понимают всю мощь векторного способа решения.

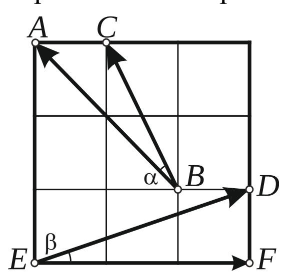


Рис. 2

Векторы

Все-таки клеточки напоминают систему координат, поэтому выберем векторы *BA* и *BC* (см. рис. 2) и посчитаем скалярное произведение двумя способами. После чего найдем косинус угла между ними.

Теорема косинусов

В треугольнике *ABC* известны три стороны. Найдем косинус угла *B*. Тут меня ждал сюрприз, «Считать, так считать», видимо подумал один мой ученик, и успешно применил теорему косинусов к прямоугольному треугольнику *DEF*. Осталось найти, что $\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Конечно, мы понимаем, что способы 1 и 2 почти одно и тоже. Но, лучше повторить. Итак, на самом деле, первое, что я услышал, была теорема синусов. Не ожидал.

Теорема синусов

Действительно, в треугольнике ABC $\angle A = 45°$. Далее Читатель легко проделает небольшие выкладки, а из треугольника DEF мы уже нашли, что $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Полезно обратить внимание, что из того, что синусы равны еще не следует, что и углы равны. Тогда почему именно в этой задаче это верно?

Тригонометрия (10–11 классы)

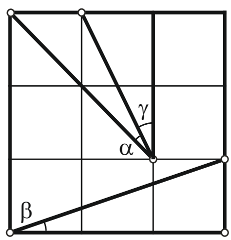


Рис. 3

Заметим, что (см. рис. 3). $\alpha + \gamma = 45°$. Поэтому будем доказывать, что $\beta + \gamma = 45°$. Из этого следует утверждение задачи.

Тогда задачу для 10 класса можно сформулировать в терминах тригонометрии. Итак,

Задача 2. $\alpha = arctg\frac{1}{3}$, $\gamma = arctg\frac{1}{2}$. *Докажите, что* $\alpha + \gamma = 45°$.

Проще всего, наверное, применить формулу тангенса суммы. Конечно, не все ее помнят, вот и повод повторить. Интересно, что знание этой формулы может пригодиться и в олимпиадной задаче (см. задачу №11).

Часть 2. Признаки вписанного четырехугольника.

В 8 классе я предполагал такое решение: замечаем в двух треугольниках равные стороны (длиной 1) и совмещаем их (см. рис. 4). Теперь второй важный для обучения момент. Мы можем переформулировать задачу и решать равносильную.

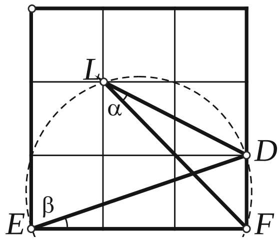


Рис. 4

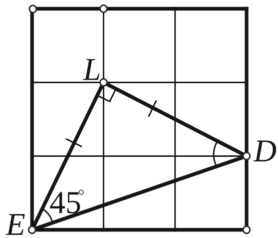


Рис. 5

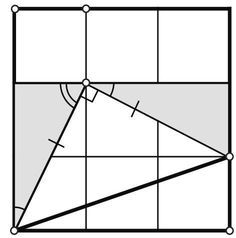


Рис. 6

Задача 3. *Докажите, четырехугольник DLEF – вписанный.*

Из этого следует утверждение задачи. Действительно, нужные нам углы равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Повторять мы это больше не будем. Далее мы будем решать именно **Задачу 3**.

Ключевую роль в следующих решениях играет треугольник *DEL*. Хорошая, простая задача для седьмого (и даже 8) класса.

Задача 4 (см. рис. 5)**.** *Докажите, что треугольник DEL – прямоугольный равнобедренный.*

Как может решить семиклассник? Например, так: заметим на рис. 6 равные треугольники. Сумма острых углов в одном из них равна 90°. Следовательно, на рис. 5 угол *DLE* равен 90°, и с учетом равенства треугольников *LD* = *LE*.

Возможный ответ восьмиклассника: равнобедренный треугольник *DEL* – прямоугольный по обратной теореме Пифагора.

Замечательное свойство окружности

Треугольник *DEL* – прямоугольный (см. рис. 5). Заметим, что и угол *ADC* равен 90°. Следовательно, по замечательному свойству окружности (по признаку) четырехугольник *DELF* – вписанный.

Еще раз воспользуемся равнобедренным прямоугольным треугольником *DEL*.

ГМТ «Уши Чебурашки»

На рис. 7 изображен еще один хорошо известный признак вписанного четырехугольника.

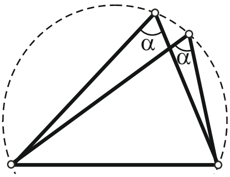


Рис. 7

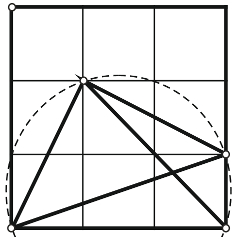


Рис. 8

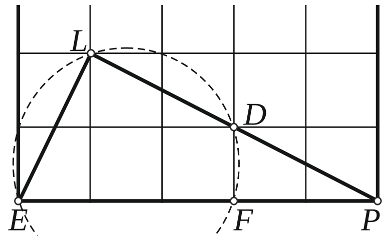


Рис. 9

Задача 5. *Попробуйте найти этот признак на* рис. 8.

Указание: найдите две точки, из которых сторона четырехугольника видно под углом $45°$.

Теперь в ход пойдут довольно мощные методы.

Теорема о произведении секущих к окружности (признак)

Неожиданный ход! Сделаем дополнительное построение *(*см. рис. 9*)*. Многие школьник хорошо знают теорему о произведении секущих к окружности. Но на олимпиадах часто бывает полезна обратная теорема. Сформулируем ее в обозначениях рис. 9.

Признак вписанного четырёхугольника.

Если $PD \cdot PL = PF \cdot PE$, *то четырёхугольник* $DLEF$ *– вписанный.*

Осталось по рис. 9 проверить это равенство. Оно верно.

Теперь еще один неожиданный ход (для автора статьи, который совсем не предполагал, что кто-то догадается из пушек по воробьям стрелять.). Один ученик вспомнил теорему, которую мало кто из школьников знает. Но иногда она оказывается полезной. Итак,

Теорема Птолемея

Если четырёхугольник $ABCD$ *вписанный, то верно равенство* $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Признак вписанного четырёхугольника

Если для четырёхугольника $ABCD$ *верно равенство* $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, *то четырёхугольник* $ABCD$ *– вписанный.*

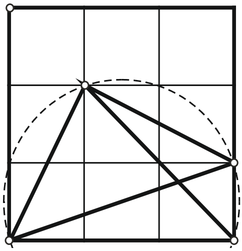


Рис. 10

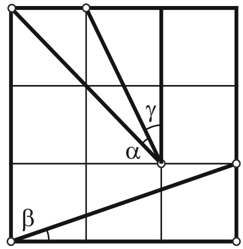


Рис. 11

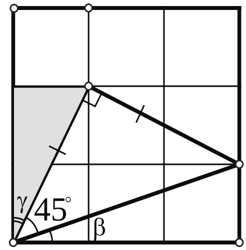


Рис. 12

Осталось проверить числовое равенство (см. рис. 10) $\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{5}\cdot 1+\sqrt{5}\cdot 3$. Оно верное. Следовательно, по обратной теореме Птолемея четырёхугольник *ABCD* – вписанный.

7 класс. Смотри!

Докажем, что $\beta+\gamma=45°$ (см. рис. 11 и 12). Осталось повторить за древними «Смотри!». Наконец-то автор статьи решил, правда не сразу, задачку из учебника М. Волчкевича по геометрии 7 класса [6].

Авторское решение (см. рис. 13)

Опять неожиданный ход! Процитируем по книге В.В. Произволова [1]: «Равенство углов следует из подобия двух прямоугольных треугольников». Изящное решение!

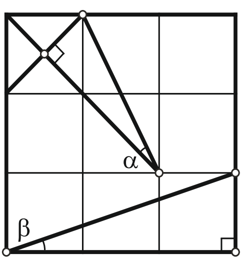


Рис. 13

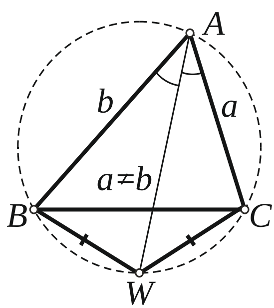


Рис. 14

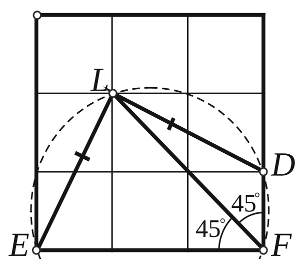


Рис. 15

Часть 3. Как решают задачу «олимпиадники»

Даже в этих непростых решениях можно обнаружить задачи, доступные 7-8 классам.

Обратная теорема о биссектрисе в окружности как признак вписанного четырехугольника

Хорошо известен факт, что биссектриса вписанного угла проходит через середину дуги, на равные дуги опираются равные хорды. Интересно, что верно и обратное (см. рис. 14).

Если в четырехугольнике ABWC диагональ AW является биссектрисой, стороны WB и WC равны, а стороны AB и AC не равны, то четырехугольник ABWC – вписанный.

Задача 6. *Попробуйте найти этот признак на* рис. 15.

Угол между радиусом и стороной треугольника

Воспользуемся теоремой:

Пусть в остроугольном треугольнике ABC провели высоту AA` и радиус AO описанной окружности* (см. рис. 16). *Тогда прямые AA` и AO симметричны относительно биссектрисы угла A треугольника ABC.

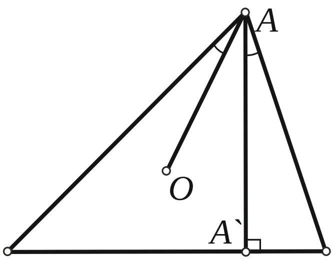


Рис. 16

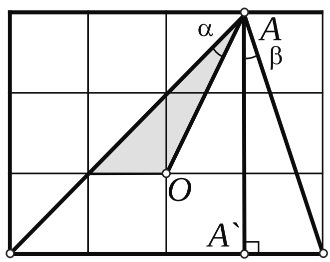


Рис. 17

Если читатель хочет узнать, как этот факт поможет решить непростые олимпиадные задачи, то рекомендуем обратиться к статье [3] журнала Квант. А мы вернемся к основной задаче про равные углы α и β .

Сделаем дополнительное построение как на рис. 17. Интересно, как это школьникам в голову приходит? Узнаёте рис. 16?

Задача 7. *Докажите по* рис. 17*, что точка O – центр описанной окружности.*

Задача 7 вполне доступна 7 классу. Теперь применим теорему об угле между радиусом и стороной к треугольнику на рис. 17 (*AO* – радиус, *AA`* – высота) и получим равенство углов $\alpha = \beta$ ч.т.д.

Симедиана треугольника

Рассмотрим треугольник ABC, его медиану AM и его биссектрису AL (см. рис. 18). Пусть луч AS симметричен лучу AM относительно прямой AL, где S – точка пересечения этого луча с BC. Тогда отрезок AS называется симедианой треугольника ABC.

Основное свойство симедианы (см. рис. 19).

Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C, пересекаются в точке P. Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC.

Более подробно со свойствами симедианы и примерами задач можно познакомиться в статье [4] журнала Квант.

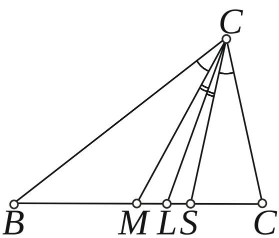


Рис. 18

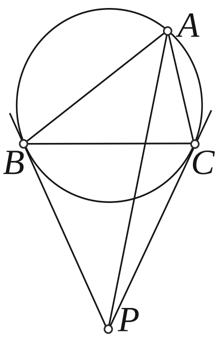


Рис. 19

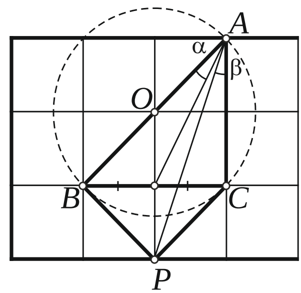


Рис. 20

Снова совместим углы α и β в общей вершине как на рис. 20. Заметим, что треугольник ABC – прямоугольный. Точка O, середина AB, является центром описанной окружности ω треугольника ABC. Теперь можно задать вопрос 8 или даже 7 классу.

Задача 8. Докажите, что P – точка пересечения касательных к ω.

Возможное решение от семиклассника: поскольку $OBPC$ – квадрат, то прямая BP перпендикулярна радиусу OB. Следовательно, BP – касательная к ω.

Ученик 8 класса уже может использовать теорему об угле между касательной и хордой как признак касательной. Действительно, заметим, что $\angle CBP = \angle BAC = 45°$. Тогда PB и, аналогично, PC – касательные к описанной окружности ω треугольника ABC.

Луч *AP* проходит через точку пересечения касательных в точках *B* и *C*. Тогда по основному свойству симедианы *AP* является симедианой в треугольнике *ABC*. Следовательно, равны углы $\alpha = \beta$.

Решение ниже никто из школьников не придумал, но познакомиться с ним полезно. Признаться, сам автор статьи узнал об этом методе из статьи в журнале Квант [5]. Квант полезно читать не только школьникам!

Комплексные числа

Вернемся к задаче 2.

Задача 2. $\alpha = arctg\,\dfrac{1}{3}$, $\gamma = arctg\,\dfrac{1}{2}$. *Докажите, что* $\alpha + \gamma = 45°$.

Мы уже решали эту задачу с помощью формулы тангенса суммы. Теперь переформулируем ее в других терминах. Те, кто изучает комплексные числа знают, что при умножении их аргументы складываются. Итак, подберем комплексные числа z_1 и z_2, так что углы α и γ – их аргументы. Пусть $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 2 + i$. Найдем их произведение.

$$\omega = z_1 \cdot z_2 = (3 + i)(2 + i) = 6 + 3i + 2i + i^2 = 5 + 5i .$$

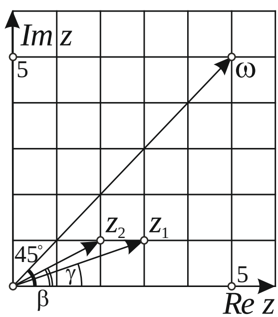


Рис. 21

Из геометрических соображений (см. рис. 21) легко найти, что аргумент ω равен 45°. Следовательно, $\alpha + \gamma = 45°$.

Автор будет считать, считать свою задачу выполненной, если уважаемый читатель попробует решить приведенные ниже задачи одним из упомянутых выше методов, но еще лучше, если окажется, что задачи имеют другое, более интересное решение, неизвестное автору статьи.

Задачи для самостоятельного решения

Попробуем применить все, что мы повторили, к решению задач.

Задача 9. *Докажите, что два угла, нарисованные на клетчатой бумаге* (см. рис. 22)*, равны* ($\alpha = \beta$). Более сложное задание: решите задачу, проведя ровно одну линию.

Задача 10. Найдите сумму трех углов, обозначенных на рис. 23.

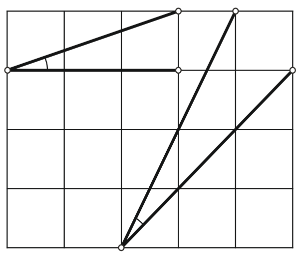


Рис. 22

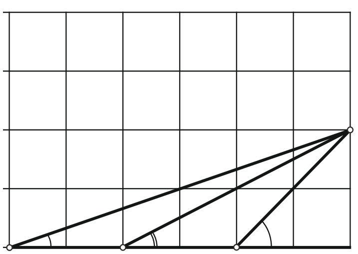


Рис. 23

Знание формул тригонометрии бывают полезны и на олимпиадах. Следующая задача была в 1993 году на Московской олимпиаде в 11 классе в качестве самой простой под номером 1.

Задача 11. *Известно, что* $tg\alpha + tg\beta = p$, $ctg\alpha + ctg\beta = q$. *Найдите* $tg(\alpha + \beta)$.

Задача 12. *Найдите* $arctg1 + arctg\dfrac{1}{2} + arctg\dfrac{1}{3}$.

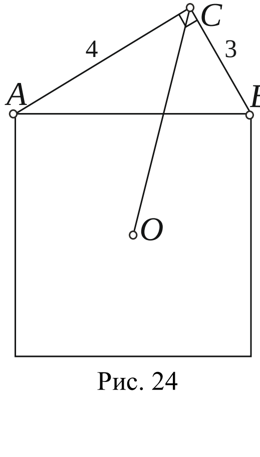


Рис. 24

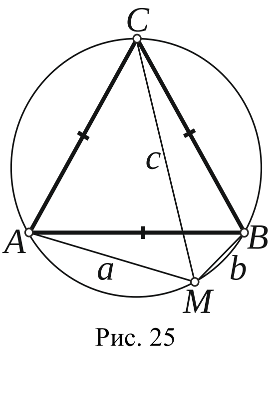


Рис. 25

Задача 13. *На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с катетами* $BC = 3$ *и* $AC = 4$ *во внешнюю сторону построен квадрат* (см. рис. 24). *Найдите расстояние от точки C до центра квадрата O*.

Задача 14. Теорема Помпею. *Правильный треугольник ABC вписан в окружность. Тогда для любой точки M описанной окружности расстояние от нее до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний до двух других вершин* ($c = a + b$, см. рис. 25).

Задача 15. Признак вписанного четырехугольника

Докажите, что углы *ACB* и *ADB* на рис. 26 и 27 равны [7].

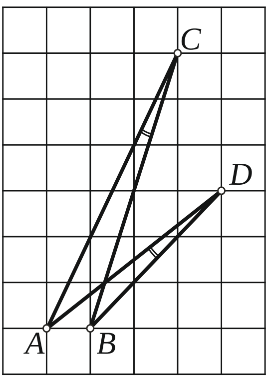


Рис. 26

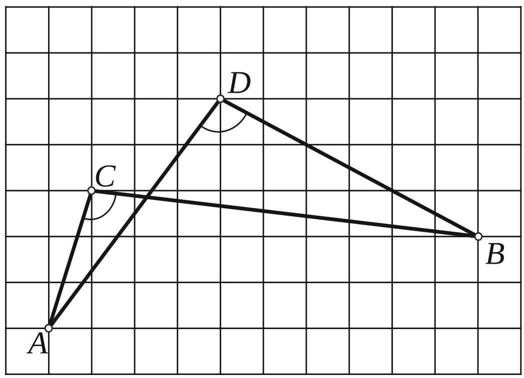


Рис. 27

Указания:

№9 и 10 Сравните с Задачей №1.

№12: 1) искомая сумма – это аргумент произведения $\omega = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (1+i)(2+i)(3+i) = 10i$. Аргумент числа 10i равен $\frac{\pi}{2}$. 2) Сравните с задачами 10 и 2.

№13 Найдите окружность и примените теорему Птолемея.

№14. Примените теорему Птолемея.

№15. Обратная теорема о произведении секущих к окружности (признак вписанного четырехугольника).

Список литературы

[1] Произволов В.В. Задачи на вырост. – М.: МЦНМО, 2022.

[2] Блинков А.Д. Геометрия на клетчатой бумаге // Квантик. – 2015. – №9, 10.

[3] Блинков Ю., Швецов Д. Угол между радиусом и стороной // Квант. – 2025. – №3. – С. 28-31, 34-36.

[4] Блинков Ю. Симедиана // Квант. – 2015. – №4. – С. 35–39.

[5] Канунников А. Магия комплексных чисел // Квант. – 2017. – №5. – С. 5-11.

[6] Волчкевич М. Геометрия. 7 класс: учебное пособие. — М.: Просвещение, 2021.

[7] Волчкевич М. Геометрия. 9 класс: учебное пособие. — М.: Просвещение, 2021.

Абсолютная величина числа.
(олимпиадные задачи для семиклассников)

П.В. Чулков
г. Москва, Школа 2007 ФМШ
chulkov2007@yandex.ru

Вашему вниманию предлагается подборка олимпиадных задач для учащихся 7-8 классов по теме «задачи с модулем».

В предлагаемой подборке представлены задачи олимпиад и вступительных экзаменов, изначально предлагавшиеся для учащихся старших классов, но для решения которых достаточно знаний 7-ого класса.

Замечено, что наличие у задачи «биографии» придает им дополнительный интерес у школьников.

Другая особенность задач подборки — их нестандартность, которая может выражаться в формулировке условия, неожиданности (непривычности) метода решения.

Некоторые задачи из подборки можно решить стандартным методом, но кроме него, как правило, существует и нестандартный, более короткий (изящный) метод решения.

Такие решения надолго запоминаются.

Использование на уроках олимпиадных задач дает устойчивый позитивный эффект, особенно когда простота используемой теории сочетается с эффектом неожиданности.

Задачи

1. Решите уравнение $|x-2|+|x-3|=|x-1|$;

2. Постройте график уравнения $|x-y|+|1-x|+|y|=1$;

3. Докажите неравенство
$$|a|+|b|+|c|\le|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c|;$$

4. Докажите неравенство
$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\ge|a+b|+|b+c|+|c+a|;$$

5. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения
$$\frac{|a+b-2c|+|b+c-2a|+|c+a-2b|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|};$$

6. Решите уравнение
$$|x-1|+|x+1|+\ldots+|x-100|+|x+100|=200x.$$

7. Пусть числа a,b,c,d,e,f таковы, что равенство $|ax+b|+|cx+d|=|ex+f|$ верно при всех действительных x. Докажите, что $ad=bc$.

8. Существуют ли такие числа a,b,c, что равенство $|x+a|+|x+y+b|+|y+c|>|x|+|x+y|+|y|$ верно при всех действительных значениях переменных x,y?

9. При каких значениях a уравнение $\big||x-a|+2x\big|-4x=8|x+1|$ не имеет ни одного корня?

10 Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение $|a-1|+|b-2|+|c-3|+|3a+2b+c|$

11. Докажите, что система неравенств: $|x|<|y-z|$, $|y|<|z-x|$, $|z|<|x-y|$ не имеет решений.

12. Докажите, что $a+b+c+d=0$, $a>c$, $b>d$, то $|a+b|>|c+d|$

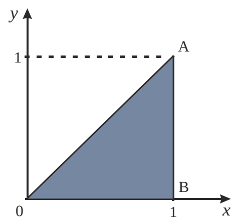
Ответы, решения, указания, комментарии

1. (ЮМТ, 9-11, 2019-20) Ответ: 2; 4.

Совсем простая задача. Указание. Ответ можно «увидеть», если обратить внимание, что выражение слева — сумма расстояний от числа x до 2 и 3, а справа — расстояние от x до 1.

2. (Вторая Соросовская олимпиада, 1995-96).

Равенство $|x-y|+|1-x|+|y|=1$ равносильно системе неравенств $x-y\geq 0$, $y\geq 0$, $1-x\geq 0$. Следовательно, искомое множество составляют точки $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам. Эти неравенства определяют треугольник OAB, показанный на рисунке.



3. (Московская математическая олимпиада, 1995).

Выполним замену: $x=a+b-c$, $y=a-b+c$, $z=-a+b+c$.

Получим: $2|x|+2|y|+2|z|\geq|x+y|+|y+z|+|z+x|$.

Осталось сложить известные (аналогичные) неравенства:

$$|x|+|y|\geq|x+y|,\ |y|+|z|\geq|y+z|,\ |z|+|x|\geq|z+x|$$

4. Воспользуемся однородностью.

Если $c=0$ неравенство обращается в равенство.

Если $c\neq 0$, то можно разделить обе части неравенства на $|c|$ и выполнить замену $x=a/c$, $y=b/c$.

Получим кусочно-линейную функцию:

$$f(x)=|x|+|y|+1+|x+y+1|-|x+y|-|y+1|-|x+1|.$$

Докажем, что $f(x)\geq 0$.

Для этого достаточно доказать, что $f(x)\geq 0$ во всех точках, в которых какой-нибудь модуль обращается в 0 (в вершинах ломаной), а также при достаточно больших положительных и при достаточно больших отрицательных (по модулю) значениях x.

Действительно. В вершинах ломаной:

$$f(0)=|y|+1+|y+1|-|y|-|y+1|-1=0$$

$$f(-y)=2|y|+2-|y+1|-|y-1|\geq 0,$$

поскольку $|y|+1\geq|y+1|$, $|y|+1\geq|y-1|$,

$$f(-y-1)=|y+1|+|y|+1-1-|y+1|-|y|=0$$

Если x — достаточно большое положительное число при котором все модули откроются со знаком «плюс», то

$$f(x)=x+|y|+1+x+y+1-x-y-|y+1|-x-1=|y|-|y+1|+1\geq 0$$

Если x очень большое (по модулю) отрицательное число (все модули откроются со знаком «минус»), то

$$f(x)=-x+|y|+1-x-1+x-|y+1|+x+1=1+|y|-|y+1|\geq 0,$$

то есть $f(x)\geq 0$.

5. Ответ: 1,5 и 2

Заметим, что $|a+b-2c|\leq|a-c|+|b-c|$.

То есть:

$$\frac{|a+b-2c|+|b+c-2a|+|c+a-2b|}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}\leq\frac{2(|a-b|+|b-c|+|c-a|)}{|a-b|+|b-c|+|c-a|}=2$$

Равенство достигается, например, при $b=c$, но $b\neq a$.

2) Воспользуемся симметрией. Без потери общности: $a\geq b\geq c$

Тогда раскроем модуль. Получим:

$$\frac{3a-3c+|c+a-2b|}{2(a-c)}\geq\frac{3(a-c)}{2(a-c)}=\frac{3}{2}.$$

Равенство достигается, например, при $c+a=2b$

6. Ответ: $x\geq 1$.

Указание. Докажите, что значения всех подмодульных выражений неотрицательны.

7. (ВсОШ, 2001, 4 этап, 9 кл). Указание. Построим «мысленно» графики левой и правой части. График правой части «галочка», график левой — сумма двух «галочек». Если «галочки» в левой части имеют различные вершины, то сумма не будет «галочкой».

Следовательно, вершины «галочек» должны совпадать. Откуда и получим требуемое.

8. (ВсОШ,, 1999, 4 этап, 11 кл). Ответ: нет.

Предположим противное: a,b,c — искомые числа.

Тогда при достаточно больших x,y все модули в неравенстве раскроются со знаком «плюс» и после преобразований получим: $a+b+c>0$. При достаточно больших отрицательных (по модулю) x,y все модули раскроются со знаком «минус»: $a+b+c<0$.

Противоречие.

9. (Ломоносов-2006). Ответ: $-7<a<5$.

Рассмотрим функцию $f(x)=8|x+1|-\big||x-a|+2x\big|+4x$

При любом варианте раскрытия модуля получается линейная функция $y=kx+t$, где $k=\pm 8\pm 1\pm 2-4$ при некотором сочетании знаков.

Если $x\ge -1$, то $k>0$ и функция возрастает, при $x\le -1$, $k<0$ — функция убывает.

Следовательно, $f(-1)$ — наименьшее значение функции.

Уравнение не имеет корней, если $f(-1)>0$, то есть

$$\big||a+1|-2\big|-4<0,\ \big||a+1|-2\big|<4,\ -4<|a+1|-2<4$$

$$-2<|a+1|<6,\ -6<a+1<6,\ -7<a<5.$$

10. (Седьмая Соросовская олимпиада, 1999-2000).

Рассмотрим выражение как функцию от c:

$$f(c)=|a-1|+|b-2|+|c-3|+|3a+2b+c|.$$

При больших значениях c функция $f(c)$ возрастает, а при достаточно малых убывает.

В остальных случаях функция $f(c)$ линейная, а график представляет собой объединение отрезка и двух лучей. Следовательно, наименьшее значение может быть равно $f(3)$ или $f(-3a-2b)$.

Получим: $f(3)=f(-3a-2b)=|a-1|+|b-2|+|3a+2b+3|$.

Рассмотрим полученное выражение как функцию от b:

$$g(b)=|a-1|+|b-2|+|3a+2b+3|.$$

Наименьшее значение может быть равно $g(2)$ и $g\left(\dfrac{-3a-3}{2}\right)$.

Далее, рассмотрим выражения как функции от a:

1) $p(a)=|a-1|+|3a+7|$.

Наименьшее значение: $p(1)=10$ или $p(-7/3)=|-10/3|=10/3$;

2) $p_1(a)=|a-1|+\left|\frac{3a+7}{2}\right|$ или $p(-7/3)=|-10/3|=10/3$.

Таким образом, наименьшее значение выражения: $10/3$.

Ответ: $10/3$.

11. (ММО, 1986, 8 кл). Указание. Исходная система равносильна $x^2<(y-z)^2$, $y^2<(z-x)^2$, $z^2<(x-y)^2$. Переносим все ненулевые слагаемые в левую часть, представим в виде произведения и перемножим. Получим противоречие.

12. Пусть $a+b=x$, $c+d=y$, $x+y>0$, $x>y$ и $|x|>|y|$, что и требовалось доказать.

Литература.

1. Московские математические олимпиады. 1993-2005 / Р.М. Федоров и др. Под. Ред. В.М.Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006.

2. Московские математические олимпиады. 1981-1992 / А.В. Бегунц и др. – М.: МЦНМО, 2017.

2. Седьмая Соросовская олимпиада школьников 2000-2001. Заочный тур. – М.: МЦНМО, 2001.

3. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г. Кириллов А.А. Метод координат. – М.: МЦНМО, 2009.

4. Восемь шагов. Олимпиада Юношеской математической школы. / А.А. Солынин, М.А. Антипов, К.А.Кноп, Струков Г.А., Черкашин Д.Д. – М.: МЦНМО, 2026.

5. Егоров А. Модуль суммы и сумма модулей // Квант. – 2009. – №4.

Квадратные уравнения (задачи для повторения)

Э.Т. Федянина
г. Москва, Школа 2007 ФМШ
ellegood@mail.ru

Тема квадратных уравнений занимает важное место в курсе алгебры 8 класс и имеет большую дидактическую ценность, так как связана с другими разделами школьного курса.

Использованию олимпиадных задач для повторения материала не только закрепляет знания, но и мотивирует учащихся к участию в олимпиадах, демонстрируя доступность и увлекательность решения нестандартных задач.

Вашему вниманию предлагается подборка олимпиадных задач, которые можно использовать для итогового повторения в 8 классе.

Задача 1. Может ли квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами иметь дискриминант, равный 23?

Задача 2. Корни уравнения $x^2+ax+b+1=0$ — натуральные числа. Докажите, что a^2+b^2 – составное число.

Задача 3. Решите уравнение

$$2x^2+5y^2-4xy-2y-4x+5=0.$$

Задача 4. Решите уравнение

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{50}{x-49}+\frac{49}{x-50}$$

Задача 5. При каких значения параметра a разность корней квадратного уравнения $x^2-6x+12+a^2-4a=0$ принимает наибольшее значение?

Задача 6. Докажите тождество

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1.$$

Задача 7. (Регата 9, 2014/2015) Решите уравнение

$$x^2+x=2014\cdot 2015$$

Задача 8. (Регата 10, 2004/2005). Известно, что число p является одним из корней квадратного уравнения $5x^2+bx+10=0$. Выразите через p корни уравнения $10x^2+bx+5=0$

Задача 9. Докажите, что при любых ненулевых числах a,b,c, хотя бы одно из квадратных уравнений $ax^2+2bx+c=0$, $cx^2+2ax+b=0$, $bx^2+2cx+a=0$ имеет корень.

Задача 10. Докажите, что для корней x_1, x_2 квадратного уравнения

$$x^2+2px+\frac{1}{p^2}=0,$$

выполнено неравенство $x_1^4+x_2^4\ge 2+\sqrt{2}$

Ответы, решения, указания, комментарии.

1. Ответ: нет, не может.

Предположим противное, тогда:

$$b^2-4ac=23,\ b^2=23+4ac$$

Правая часть равенства – нечетное число, тогда и левая часть — нечетное число, следовательно, b — нечетно. Тогда: $b=2t+1$, $(2t+1)^2=4ac+23$, $4t(t+1)=4ac+22$. В итоге: левая часть равенства кратна 4, правая – нет. Противоречие.

2. Из теоремы Виета следует: $x_1+x_2=-a$, $x_1\cdot x_2=b+1$.

Далее: $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1$.

Следовательно, $a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$ - число составное, что и требовалось доказать.

3. (регата 8, 2003/2004). Ответ: $(2;1)$.

Решение 1. Перепишем уравнение как квадратное от x:

$$2x^2-4x(y+1)+5y^2-2y+5=0.$$

Уравнение имеет корни, если:

$$4(y+1)^2-10y^2+4y-10=-6(y-1)^2\ge 0.$$

То есть, $y=1$, откуда $x=2$.

Решение 2. Можно и иначе. Представим левую часть как сумму квадратов:

$$x^2-4xy+4y^2+y^2-2y+1+x^2-4x+4=0,$$

$$(x-2y)^2+(y-1)^2+(x-2)^2=0 \text{ и так далее.}$$

4. (ММО 10, 1985). Ответ: $0;99;\dfrac{4901}{99}$.

Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{x-49}{50}-\frac{50}{x-49}+\frac{x-50}{49}-\frac{49}{x-50}=0,$$

$$\frac{(x-49)^2-50^2}{50(x-49)}+\frac{(x-50)^2-49^2}{49(x-50)^2}=0,$$

$$\frac{(x-99)(x+1)}{50(x-49)}+\frac{(x-99)(x-1)}{49\cdot(x-50)}=0$$

$x=99$ — корень. Осталось решить уравнение

$$\frac{x+1}{50(x-49)}+\frac{x-1}{49\cdot(x-50)}=0$$

После преобразований:

$$49(x+1)(x-50)+50(x-1)(x-49)=0,$$

$$99x^2-\left(49^2+50^2\right)x=0 \text{ и так далее.}$$

5. Ответ: 2

Задачу можно, используя свойства квадратных уравнений, но можно и иначе. Заметим, что $(x-3)^2+(a-2)^2=1$. На рисунке видно, что наибольшая возможная разность между корнями достигается при $a=2$.

6. После преобразований получим уравнение вида

$Ax^2+Bx+C=0$, имеющее три корня $x=a$, $x=b$, $x=c$. Можно доказать, что в этом случае $A=B=C=0$ и исходное равенство является тождеством.

7. Ответ: 2014; -2015.

Уравнение квадратное, один из корней очевиден $x_1=2014$,

Второй корень найдем по теореме Виета $x_2=-2015$.

8. Ответ: $1/p$, $p/2$.

p — корень исходного уравнения. Имеем: $5p^2+bp+10=0$ и $p\neq 0$. Разделим на p^2 тогда $5+\frac{b}{p}+\frac{10}{p^2}=0$, то есть $x_1=\frac{1}{p}$ корень уравнения $10x^2+bx+5=0$.

По теореме Виета: $x_2=\frac{p}{2}$.

9. Решение: допустим, что ни одно из уравнений корней не имеет тогда $b^2<ac$, $c^2<ba$, $a^2<bc$ Сложив неравенства получим противоречие .

10. Преобразуем: $x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2$,

$$x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=p^2-\frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4+x_2^4=\left(x_1^2+x_2^2\right)^2-2x_1^2x_2^2=4\left(p^2-\frac{2}{p^2}\right)^2-\frac{2}{p^4}=p^4+2+\frac{1}{2p^4}$$

$p^4+2+\frac{1}{2p^4}\geq 2+\sqrt{2}$ (Неравенство Коши)

Литература.

1. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике – 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2010.

2.Рукшин С.Е. Математические соревнования в Ленинграде - Санкт-Петербурге / С.Е. Рукшин. — Ростов-на-Дону: МарТ, 2000.

3. Московские математические регаты: в 2 ч. Ч.1: 1998–2006 / Центр педагогического мастерства; сост. А.Д. Блинков. — М.: Издательство МЦНМО, 2014.

Вписанная окружность прямоугольного треугольника

Швецов Д.В., Мухин Д.Г.
г. Москва
shvetsovdim@gmail.com

В успешном решении геометрических задач важную роль играет знание ключевых конструкций, которые регулярно появляются и в простых, и в более сложных ситуациях. Способность увидеть такую конструкцию в задаче — не только удача, но и развиваемый навык. Один из таких важнейших сюжетов разобран в нашей заметке. В его основе лежит следующее нехитрое, но вместе с тем элегантное наблюдение: вершина прямого угла, точки касания вписанной окружности с катетами и центр вписанной окружности являются вершинами квадрата (рис. 1).

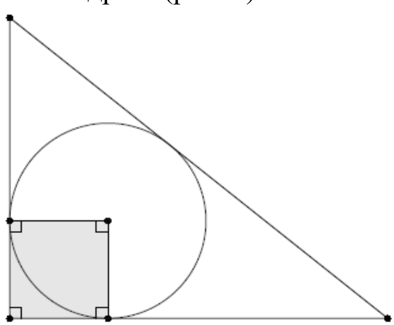


Рис. 1.

Доказать это не очень сложно. Давайте сначала заметим, что в исследуемом четырёхугольнике три прямых угла, а значит и четвертый тоже прямой. Затем воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведённых из одной точки равны. Получается прямоугольник с равными соседними сторонами, то есть, действительно, квадрат. Особо отметим, что сторона квадрата равна радиусу вписанной окружности.

Все задачи этого занятия, так или иначе, вращаются вокруг «замечательного квадрата» прямоугольного треугольника.

Основная идея. *В задачах, связанных со вписанной окружностью и точками касания, часто полезно отметить центр самой окружности и точки касания: сразу возникают прямые углы, равные отрезки, и т.д.*

Перейдём теперь к примерам.

1. *В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 5, катеты BC и AC равны 3 и 4 соответственно (рис. 2). Найдите радиус вписанной окружности.*

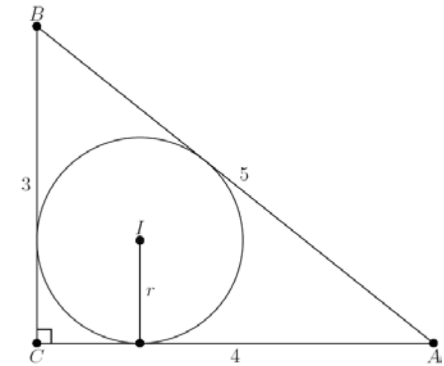


Рис. 2.

Комментарий. Раз от нас просят радиус вписанной окружности, то хорошо бы этот радиус провести, а можно сразу несколько.

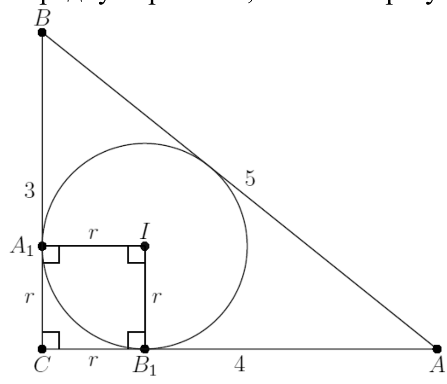


Рис. 3.

А вот уже и знакомый нам основной квадрат A_1IB_1C (рис. 3). Получается, что достаточно найти сторону этого квадрата. Но, зная все три стороны треугольника (необязательно прямоугольного!), можно найти отрезки, на которая вписанная окружность разбивает стороны (рис. 4). Для их длины есть специальная формула, но если вдруг она подзабылась, то можно закончить решение по следующему чертежу, получив из него уравнение $(3-r)+(4-r)=5$.

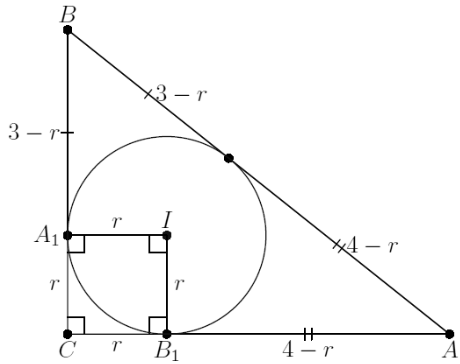


Рис. 4.

После обсуждения задачи 1 стоит ещё раз решить задачу в общем случае, то есть разобрать с учениками такой факт:

2. *В прямоугольном треугольнике* ABC *гипотенуза* AB *равна* c*, катеты* BC *и* AC *равны* a *и* b *соответственно. Докажите, что радиус вписанной окружности* r *выражается следующей формулой:*

$$r = p - c \quad (1)$$

где $p = \dfrac{a+b-c}{2}$ *— полупериметр треугольника* ABC.

Комментарий. Рассуждение совпадает с решением задачи 1, но провести его самостоятельно всё же полезно.

3. *Известно, что в треугольнике* $r = p - c$. *Докажите, что треугольник является прямоугольным.*

Комментарий. В этой задаче мы просто используем другой признак квадрата (какой?), а заодно снова считаем отрезки касательных. Кроме того, задача является хорошим поводом обсудить обратные утверждения, работа с которыми порой непроста для начинающих геометров.

4. *Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.*

Комментарий. Данная задача является элегантной переформулировкой соотношения 1. В самом деле, мы знаем, что $r = p - c = \dfrac{a+b-c}{2}$. Откуда заключаем, что $2r + c = a + b$. Но мы имеем дело с прямоугольным треугольником, а в нём гипотенуза является диаметром описанной окружности. На этом решение и заканчивается.

5. *Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC, равна CH.*

Комментарий. Если воспринимать условие буквально, то оно может напугать — целых три вписанных окружности, перебор для простой школьной задачи. Благо, как это иногда бывает, сами окружности тут даже можно и не рисовать. Пусть r, r_1, r_2 радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCH, ACH соответственно. Тогда по соотношению 1 имеем:

$$r + r_1 + r_2 = \frac{AC + CB - AB}{2} + \frac{CH + HB - BC}{2} + \frac{CH + HA - AC}{2} = \frac{2CH}{2} = CH$$

Получается, что решение задачи свелась к сложению трёх дробей, что вполне посильно.

6 (из материалов ЕГЭ). *В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. Вписанная окружность касается катета BC в точке A_1. Докажите, что $AA_1 < 3r$, где r — радиус вписанной окружности.*

Комментарий. Дополним рисунок такими точками: центром вписанной окружностью — точка I, точкой касания вписанной окружность с гипотенузой AC — точка C_1 (рис. 6.).

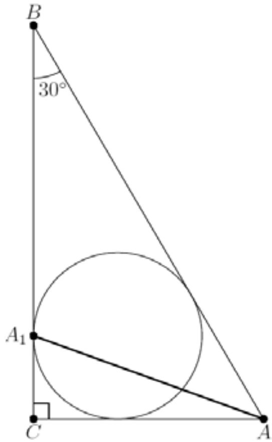


Рис. 5.

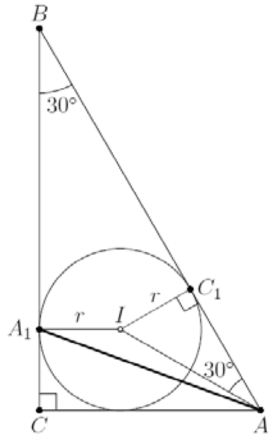


Рис. 6.

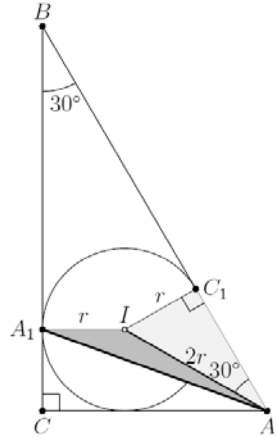


Рис. 7.

Теперь заметим, что в треугольнике C_1AI $\angle C_1AI = 30°$, поэтому $IA = 2IC_1 = 2r$ (рис. 7). Остаётся воспользоваться неравенством треугольника для треугольника A_1IA.

Замечание: Внимательный читатель может заметить, что мы никак не использовали тот факт, что треугольник ABC прямоугольный. Действительно, утверждение задачи верно для любого треугольника с углом A, равным 60°.

7. *Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом (рис. 8). Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.*

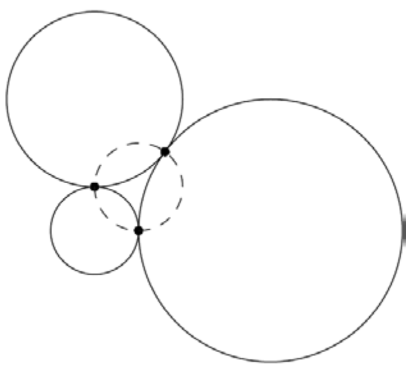


Рис. 8.

Комментарий. Задача непростая, на первый взгляд, тут вообще нет никакого прямоугольного треугольника, одни лишь окружности, к которым не очень ясно как подступиться. В общем случае это и правда сложная конструкция, но тут нас сильно выручают специально подобранные значения радиусов. В задачах с касающимися окружностями бывает полезно отметить центры окружностей и точки касания. Давайте проделаем это и в этой задаче. Соединив центры всех трех окружностей, получим следующий рисунок (рис. 9):

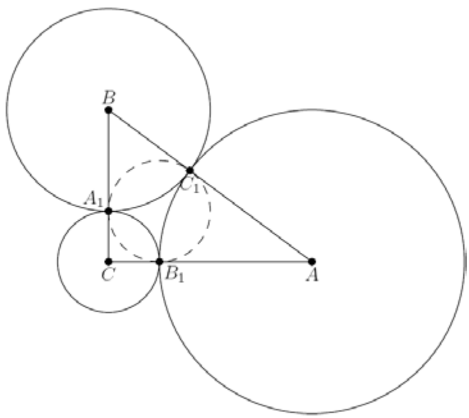


Рис. 9.

Отметим, что мы использовали следующий простой, но важный факт: линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания окружностей (кажется, что имеет смысл повторить с учениками доказательство этого факта). Теперь перед нами треугольник ABC со сторонами 3, 4, 5 (египетский треугольник). Возникает вопрос: будет ли окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1 вписанной окружностью треугольника ABC? Да. Потому что как мы выяснили в задаче 1 вписанная окружность египетского треугольника разбивает стороны треугольника ровно таким же образом! Но через три точки можно провести единственную окружность, поэтому окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, является вписанной треугольника ABC. Радиус такой окружности мы искать умеем, ведь правда?

Следующая красивая задача предлагалась восьмиклассникам на Московской математической олимпиаде.

8 (ММО). *В прямоугольный треугольник вписана окружность. Через точку ее касания с катетом проведена прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки касания. Эта прямая разбивает второй катет на два отрезка (рис. 10). Докажите, что меньший из них равен радиусу данной окружности.*

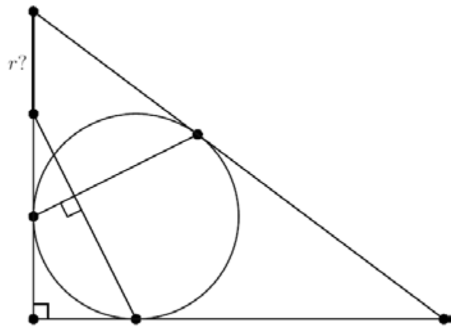


Рис. 10.

Комментарий. Предоставим читателю удовольствие восстановить детали решения по следующему рисунку (рис. 11):

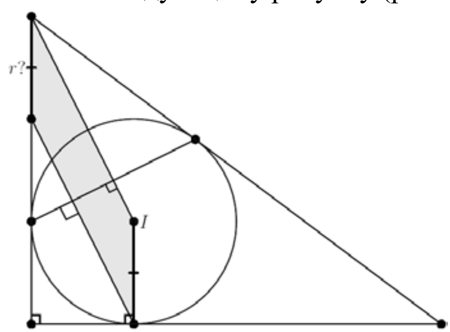


Рис. 11.

Эту задачу придумал известный московский учитель Максим Анатольевич Волчкевич. Максим Анатольевич не только придумывает яркие геометрические задачи, но также является автором оригинального учебника геометрии. Больше о творчестве М.А. можно найти в его telegram-канале: https://t.me/volk_geometry

Задачи В.В. Произволова

В этой части нашего повествования мы хотели бы поделиться с нашими читателями (решателями?) шедеврами уникального задачного композитора Вячеслава Викторовича Произволова (1939-2019). Задачи Вячеслава Викторовича необычны, элегантны, остроумны, в них всегда угадывается самобытный авторский стиль. Многие задачи В.В. можно найти в его книге «Задачи на вырост», которую мы горячо рекомендуем. Ниже мы же ограничимся тремя задачами В.В. связанными с нашей темой.

9. *Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами, а также из неё опущены перпендикуляры на его стороны. Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников — белые и серые через один (рис. 12). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в белые треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в серые треугольники.*

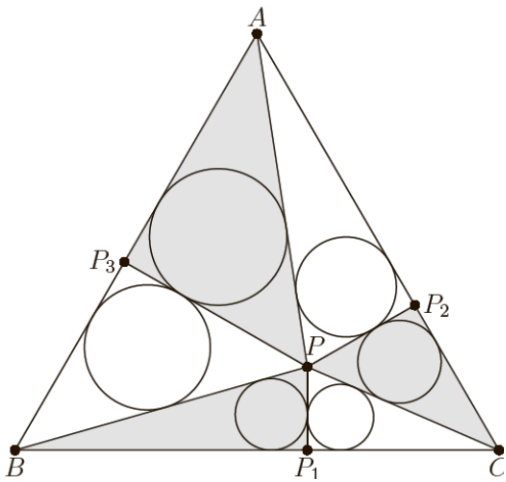


Рис. 12.

Комментарий. Основная идея тут использовалась нами уже многократно: запишем нашу основную формулу радиуса вписанной окружности для каждого из шести маленьких треугольников. Тогда каждый из отрезков $\boldsymbol{AP}$, $\boldsymbol{BP}$, $\boldsymbol{CP}$, $\boldsymbol{PP_1}$, $\boldsymbol{PP_2}$, $\boldsymbol{PP_3}$ войдёт в каждую из сумм. Но задача довольно сложная, поэтому это еще не конец. Нам остаётся проверить, что имеет место равенство (рис. 13):

$$AP_2 + BP_3 + CP_1 = AP_3 + BP_1 + CP_2 .$$

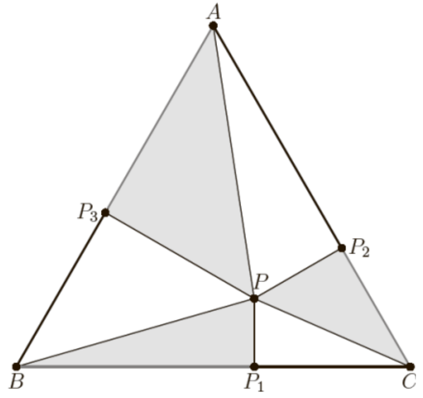


Рис. 13.

А это, в свою очередь, можно сделать следующим дополнительным построением (оно оказывается полезным далеко не только в этой задаче): проведём через точку P прямые, параллельные сторонам треугольника (рис. 14).

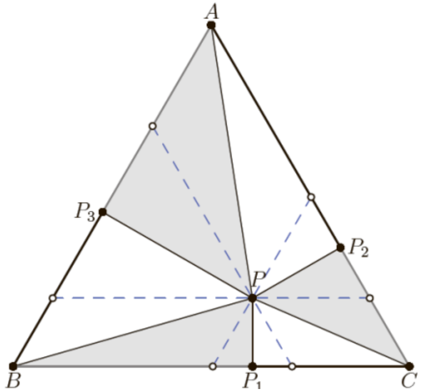


Рис. 14.

Тогда исходный треугольник разбивается на три параллелограмма и три правильных треугольника. Теперь справедливость проверяемого равенства несложно увидеть прямо из рисунка.

10. *Четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в квадрат. Диагонали и стороны четырёхугольника разделили квадрат на 8 треугольников, попеременно окрашенных в серый и белый цвет (рис. 15). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в серые треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в белые треугольники.*

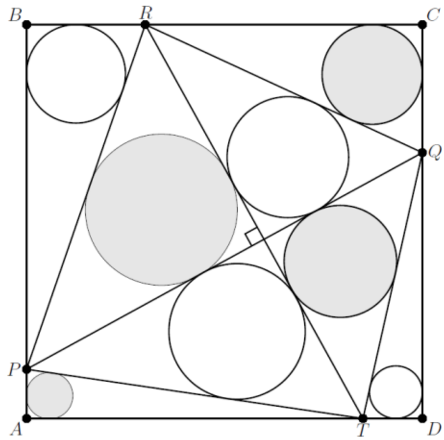


Рис. 15.

Комментарий. Идея решения тут очень схожа с только что разобранной задачей, поэтому мы решение не приводим.

11. *В квадрат со стороной 1 вписан четырёхугольник. Его стороны являются гипотенузами четырёх прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей не превосходит* $2-\sqrt{2}$ *и достигает этого числа лишь тогда, когда стороны вписанного четырёхугольника параллельны диагоналям квадрата.*

Комментарий. Решение этой задачи можно найти в журнале "Квант": https://kvant.mccme.ru/pdf/2001/06/22.pdf

Дополнительные задачи

12. *В прямоугольном треугольнике* ABC $(\angle C = 90^\circ)$ *вписанная окружность касается катета* BC *в точке* K. *Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой* AK *в два раза больше, чем расстояние от вершины* C *до этой прямой.*

13. *В прямоугольном треугольнике на гипотенузе* AB *от вершины* A *отложен отрезок* AD*, равный катету* AC*, а от вершины* B *— отрезок* BE*, равный катету* BC*. Докажите, что длина отрезка* DE *равна диаметру окружности, вписанной в треугольник* ABC*.*

На самом деле, это две одинаковые задачи. Обе давали на математических соревнованиях с интервалом в несколько десятилетий.

14. *В прямоугольном треугольнике* ABC *с прямым углом* C *провели биссектрисы* AK *и* BN*, на которые опустили перпендикуляры* CD *и* CE *из вершины прямого угла. Докажите, что длина отрезка* DE *равна радиусу вписанной окружности.*

15. (ММО). *В треугольнике* ABC *угол* C *— прямой,* $\angle A = 30^\circ$*. Окружность с центром* I*, вписанная в треугольник, касается катета* AC *в точке* P *и пересекает отрезок* BI *в точке* M*. Точка* K *— середина отрезка* AI*. Докажите, что* $CM = PK$*.*

16. (ММО). *В прямоугольном треугольнике* ABC *с прямым углом* C *угол* A *равен* 30°*. Точка* I *— центр вписанной окружности треугольника* ABC*,* D *— точка пересечения отрезка* BI *с этой окружностью. Докажите, что отрезки* AI *и* CD *перпендикулярны.*

17. *Отрезок* AB *делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны* r_1 *и* r_2*, причём* $r_1 > r_2$*. Найдите* AB*.*

Заключение

Мы старались так подбирать задачи из основной части этой заметки, чтобы они были доступны практически любым интересующимся геометрией школьникам 8-9 классов. Их можно использовать на уроке, кружке, факультативе. Конструкция, которая обсуждалась выше, хороша тем, что в нее можно углубляться и углубляться, замечать связи с другими геометрическими сюжетами, решать более трудные задачи и так далее. Более опытным решателям, любителям олимпиадной геометрии можно посоветовать очень обстоятельную статью Юрия Александровича Блинкова «Прямоугольный треугольник. Точки касания».

Авторы многие годы преподают геометрию в школах с углубленным изучением математики. Отдельные фрагменты их опыта собраны на страничке: https://geometry.ru/incircle_book.html.

Содержание