Учим математике-2

(материалы второй открытой *школы-семинара* учителей математики)

Издательство МЦНМО
Москва, 2009

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-2** (материалы второй открытой школы-семинара учителей математики). — М.: МЦНМО, 2009. — 176 с.

ISBN 978-5-94057-576-4

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы второй открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики г. Москвы, проходившей с 1 по 9 мая 2008 г. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, учебно-исследовательской и проектной деятельности школьников. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-2
(материалы второй открытой школы-семинара учителей математики)

Технический редактор *Е. С. Горская*

Подписано в печать 18.06.2009 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 11 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ № 188.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
Москва, 2-й Лихачевский пер., д. 7.

ISBN 978-5-94057-576-4

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы **второй открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики г. Москвы**, проходившей с 1 по 9 мая на базе отдыха «Флуераш» на берегу Черного моря (с. Коблево, Николаевская область, Украина). Семинар был организован Московским Институтом Открытого Образования и Московским Центром Непрерывного Математического Образования. Материалы первой школы-семинара — см. сборник «*Учим математике*», МЦНМО, 2007. Все материалы представлены в авторских редакциях.

Основная тема прошедшего семинара — *учебно-исследовательская и проектная деятельность школьников*, но обсуждалось также и много других вопросов, связанных с обучением детей. Кроме того, несколько докладов были «чисто математическими» и были посвящены различным разделам геометрии.

Участниками семинара были: А.Н. Андреева (школа №91 РАО, МЦНМО), Н.Н. Андреев (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН), А.Д. Блинков (ЦО №218, МИОО), Е.С. Горская (мехмат МГУ, ЦО №218), В.М. Гуровиц (ЦО №218, ФМШ №2007), А.В. Иванищук (лицей №1511 МИФИ), К.В. Козеренко (лицей «Вторая школа»), О.А. Князева (школа №1353), Е.Д. Куланин (МГППУ), А.А. Марачев (школа №179 МИОО), А.Г. Мякишев (химический лицей №1303), Н.М. Нетрусова (школа-интернат «Интеллектуал»), И.Б. Писаренко (лицей №1557 МИЭТ), Е.А. Потапова (ФМШ №2007), А.И. Сгибнев (школа-интернат «Интеллектуал»), М.В. Харина (школа №853), А.В. Хачатурян (гимназия №1543), П.В. Чулков, Е.Ф. Шершнев (оба — ФМШ №2007, МПГУ). Отметим, что на семинар приглашались прежде всего учителя, активно ведущие проектную и исследовательскую деятельность и участвующие в проведении математических олимпиад. Некоторые из них являлись также победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики.

Отличительная особенность семинара — каждый его участник обязательно выступал с лекцией или докладом, а многие — и не один раз!

Организатором и руководителем обоих прошедших семинаров являлся преподаватель лицея №1557 Игорь Борисович Писаренко, научным руководителем — заведующий кафедрой математики МИОО, исполнительный директор МЦНМО, учитель школы №57 Иван Валерьевич Ященко, его заместителем — научный сотрудник МИОО, начальник отдела МЦНМО, заместитель директора Центра образования №218 Александр Давидович Блинков. Техническую поддержку осуществляли учителя информатики школ №218 и №2007 В.М. Гуровиц и Е.Ф. Шершнев.

В официальную программу семинара, помимо учебных занятий, вошли экскурсии в Николаев и Одессу. За рамками этой программы остались многие часы неформального общения учителей, которые также были посвящены обмену педагогическим опытом и по мнению всех участников школы-семинара в значительной степени способствовали профессиональному росту участников.

Программа открытой школы-семинара

Дата	**Пара**	**Форма**	**Тема**	**Докладчик (координатор)**
2 мая	1	доклад	Точки разрыва в математическом образовании	К.В. Козеренко
	2	круглый стол	Цели обучения математике школьников	А.Д. Блинков
	3,4	лекция	Управление интуицией школьника	И.Б. Писаренко
3 мая	1	лекция	Точки Тебо и Фейербаха	Е.Д. Куланин
	2	доклад	О взаимосвязи задач	П.В. Чулков
	3	доклад	Новое — хорошо забытое старое («из бабушкиного сундука»)	А.Н. Андреева
	4	доклады	Из опыта работы с мотивированными детьми	М.В. Харина, О.А. Князева
	5	семинар	Управление интуицией школьника	И.Б. Писаренко
4 мая	1	лекция	Коники, связанные с треугольником	А.Г. Мякишев, Е.Д. Куланин

	2	доклад	Преподавание программирования как раздела математики	В.М. Гуровиц
	3	доклад	Приближенные вычисления в школьном курсе	А.И. Сгибнев
	4	доклад	Введение уравнений и систем уравнений в курсе 7 класса	А.А. Марачев
	5	семинар	Управление интуицией школьника	И.Б. Писаренко
5 мая	1	доклад	Ничья земля и исследовательские работы школьников	К.В. Козеренко
	2	доклад	Исследовательская деятельность школьников в лицее №1511	А.В. Иванищук
	3	доклад	Теория и практика организации исследовательской деятельности в школе «Интеллектуал»	Н.М. Нетрусова
	4	доклад	Об исследовательской деятельности	А.Н. Андреева
	5	доклад	Использование экзамена по геометрии в исследовательской деятельности	А.Д, Блинков, Е.С. Горская
	6	семинар	Управление интуицией школьника	И.Б. Писаренко
6 мая	1	лекция	Конфигурации равенства	А.Г. Мякишев
	2	лекция	Шарнирные механизмы	Н.Н. Андреев
	3	доклад	Неудачный опыт исследовательской деятельности гимназии №1543	А.В. Хачатурян
	4	круглый стол	О научной, проектной и учебно-исследовательской деятельности школьников	А.Д. Блинков
7 мая	1	лекция	Разные доказательства теоремы о бабочке	Е.С. Горская

	2	лекция	Новое на сайте «Математические этюды»	Н.Н. Андреев
	3	доклад	Система «листочков» при обучении математике (достоинства и недостатки)	А.А. Марачев
	4	круглый стол	О различных технологиях работы со школьниками, изучающими математику на повышенном уровне	А.Д. Блинков
	5	семинар	Управление интуицией школьника	И.Б. Писаренко
	6	доклад	О системе работы ВЗМШ	А.А. Марачев
	7	круглый стол	Об обучении математике «нематематиков»	А.В. Хачатурян
	8	доклад	Использование планшетного ноутбука в школе	Н.М. Нетрусова
8 мая	1	доклад	Магические квадраты	Е.А. Потапова
	2	доклад	Использование программы «Живая геометрия» в школьном курсе	А.И. Сгибнев
	3	доклад	Возможности программы «CABRI»	А.Г. Мякишев
	4	доклад	Спецкурс Flash для школьников	Е.С. Горская
	5	семинар	Управление интуицией школьника	И.Б. Писаренко

Исследовательская работа на уроках математики и факультативах

А.Н. Андреева

учитель математики школы №91

Научить думать — вот основная цель, которую я ставлю перед собой на уроках математики. Нельзя все помнить, поэтому обязательно надо научиться думать. Невозможно перерешать все задачи, и тем более рассказать все идеи, так как появляются новые задачи и новые идеи. Если встречается новая постановка задачи, то надо уметь преобразовать свои знания под новый вопрос, понять из каких старых задач она состоит.

Если вы решаете задачу на олимпиаде или экзамене, то надо четко ответить на конкретный вопрос задания. Если же мы решаем задачи на уроке, то учитель задает много вопросов типа «а почему?», а «что будет, если» и так далее, то есть стараемся из задачи взять как можно больше информации. Следовательно, на обычном уроке в думающем классе мы постоянно занимаемся исследовательской работой и только в этом случае можно мечтать о хорошем усвоении учебного материала. Даже после решения задачи надо задуматься над многими вопросами:

1) как можно обобщить задачу;
2) где можно использовать решение данной задачи;
3) что интересного из нее следует;
4) что следует изучить, чтобы решить эту и похожие задачи;
5) а что произойдет, если изменить условия задачи, даже если капельку «пошевелить» условия.

Необходимо научить читать и перечитывать условия задач. Вот очень простой пример, приведенный в [2]:

Гипотенуза прямоугольного треугольника 10 *дюймов, а опущенная на нее высота* 6 *дюймов. Найти площадь треугольника.*

Ответ, который дают многие сразу, не задумываясь, $30 = 10 \cdot 6 : 2$. Но ответ неверный, так как такого треугольника не существует. Любой прямоугольный треугольник вписан в окружность, диаметром которой является гипотенуза, следовательно, высота не может больше половины гипотенузы, в нашем случае не больше 5.

Необходимо научить оценивать ответ задачи: реальный ли он; правильная ли размерность получена. Так, например, на «пробном» ЕГЭ была задача:

Брюки дороже рубашки на 30% *и дешевле пиджака на* 61%. *На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?*

Некоторые учащиеся дали ответ на 108%. Если бы они заранее подумали над вопросом, какой может быть ответ, то нетрудно было бы сообразить, что ответ строго меньше 100%.

Если у учащегося не получается решение, то можно дать совет перечитать условие, подумать какое условие не использовано, из какого условия что еще можно «выжать», какое условие можно использовать как-то по-другому, какое условие вы неверно поняли (бывает и такое).

Если задача решена, то можно подумать над вопросом: нет ли других решений (более интересных, более простых, с использованием разных идей, более рациональных). Показывая ребенку, решение задач несколькими способами, мы тем самым показываем большие возможности математического аппарата, возможности человека творить и выдумывать; и практическую возможность: задачу можно решить! Так, например, в книге [1] приведено десять решений задачи о биссектрисах двух смежных углов; восемь (!) способов доказательства равенства вертикальных углов; семь способов доказательства теоремы о средней линии треугольника. Итак «многоспособьем» решено и доказано 96 задач и теорем. Это ли не исследовательская работа, которую можно поставить перед учеником: «Найти другие способы решения известной задачи или теоремы».

Даже такие задачи, как задачи на проценты, могут быть интересными, и их понимание поможет дальнейшему пониманию и математики, и может быть даже изменить жизненную позицию.

Задача. *Цена одного процента.* Леспромхоз собрался вырубить часть сосен в лесу, но это решение наткнулось на яростное сопротивление организации зеленых. Директор леспромхоза заявил, что вырубка не нанесет ущерба лесу, так как до вырубки сосны составляют 99% всех деревьев в лесу, а после вырубки будут составлять 98%. Какую часть леса собирается вырубить леспромхоз?

Замечание. После формулировки можно задать вопрос на отрабатывания интуиции: «Как вы думаете, какую часть вырубят?» Никто еще, не решая, не угадал ответа.

Первое решение. Пусть a — количество деревьев в лесу, тогда сосны составляют в нем $0,99a$ деревьев. Пусть x сосен в лесу вырублено, тогда деревьев в лесу стало $a - x$, а так как сосен стало $0,98\%$, то после вырубки число сосен стало $0,98(a - x)$, а с другой стороны их стало $0,99a - x$, то есть можно составить уравнение $0,98(a - x) = 0,99a - x$, то есть $0,02x = 0,01a$ или $a = 2x$.

Второе решение. Пусть количество всех деревьев до вырубки a, а после вырубки b. Заметим, что вырубали только сосны, следовательно, остальные деревья не трогали. До вырубки «не сосны» составляли один процент, то есть $0,01a$, а после вырубки «не сосны» составляют 2%, то есть $0,02b$. Составляем уравнение $0,01a = 0,02b$ или $a = 2b$, откуда следует, что вырубили половину леса.

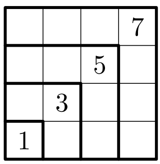
Ответ: леспромхоз собирается вырубить половину леса.

Можно на уроках поговорить о межпредметных связях. Есть много геометрических задач, которые решаются вычислительно — алгебраически. И наоборот, используя геометрические идеи или тригонометрию можно решить алгебраические задачи.

Задача. Придумать геометрическую интерпретацию равенства

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Решение. См. рисунок.



На рисунке 16 клеток, что соответствует $n = 4$.

Задача (*вступит. МГУ*, 2003 *г.*, *химфак*). Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} (x + \sqrt{2}z)^2 + (y + \sqrt{2}t)^2 = 25 + 2a\sqrt{25 - a^2}, \\ x^2 + y^2 = a^2, \\ z^2 + t^2 = \dfrac{25 - a^2}{2} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Используя второе и третье уравнения, сделаем замены $x = |a|\cos\alpha$, $y = |a|\cos\alpha$, $z = \sqrt{\dfrac{25-a^2}{2}}\cos\beta$, $z = \sqrt{\dfrac{25-a^2}{2}}\sin\beta$. Преобразовывая первое уравнение, получим

$$2\sqrt{2}|a|\sqrt{\frac{25-a^2}{2}}\cos(\alpha-\beta) = 2a\sqrt{25-a^2}$$

или $|a|\cos(\alpha-\beta) = a\sqrt{25-a^2}$. Последнее выражение имеет смысл при всех $|a| \le 5$, и, следовательно, для любого a из этого промежутка можно найти углы, а затем переменные, удовлетворяющие системе.

Ответ: $|a| \le 5$.

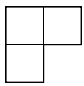
Задача. Решить уравнение $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

Решение. Введем вектора $\overrightarrow{a}(2, x)$ и $\overrightarrow{b}(\sqrt{x-1}, 5)$. Тогда слева записано скалярное произведение векторов, а справа произведение их длин. Отсюда следует, что угол между векторами равен нулю, т. е. они одинаково направлены, следовательно, коллинеарны и их координаты пропорциональны. Имеем уравнение для нахождения x: $\dfrac{2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{x}{5}$, которое равносильно уравнению $x^3 - x^2 - 100 = 0$ или $(x-5)(x^2+4x+ 20) = 0$.

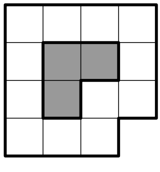
Ответ: $x = 5$.

Бывают случаи, когда перед решением задачи (для ее понимания и решения) надо рассмотреть более простые случаи, а затем, используя рассмотренные идеи, решить данную задачу.

Задача. Можно ли уголками из трех клеток (см. рис. справа) замостить доску 128×128 клеток без одной угловой клетки (клетка доски равна клетке уголка) без наложения и пропусков.



Решение. Во-первых, число клеток делится на 3. Заметим, что 128=2^7. Будем пробовать для более простого случая. Случай поля 2×2 без угловой клетки — задача очень простая. Рассмотрим поле 4×4 без угловой клетки.



Первый уголок кладем в центре на закрашенные клетки. Как положить остальные уголки понятно.

Дальше рассмотрим поле 8×8. Заложив три центральных клетки уголком, мы получим четыре фигуры предыдущего размера 4×4 без угловой клетки. На самом деле, используя метод математической индукции, получаем, что утверждение верно для поля $2^n \times 2^n$ для любого натурального n.

Другой очень важный пример: одно из доказательств неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Вначале неравенство доказывается для $n = 2^k$, а затем заполняются промежутки [4].

Бывают случаи, когда, наоборот, задачу надо обобщить, и она становится легче, а потом делаете вывод для своей задачи. Таких примеров много, например, в первой и второй главах ([3], номера задач 1.046–1.049: 2.089 и т. д.), где иногда можно числа заменить буквами и воспользоваться формулами сокращенного умножения.

Несколько слов об исследовательской работе на факультативах. Мне кажется, что в основном это реферативные работы, но это не умаляет их достоинства. Если школьник может изучить какую-то проблему, описать ее и выступить с этой темой перед своими товарищами, то это не пройдет без пользы для всех присутствующих.

Тем для реферативных докладов можно предложить очень много, вот некоторые их них:

1) разные способы введения вещественного числа;
2) оценка точности при приближенных вычислениях;
3) появление математической символики;
4) вычисление площади круга как общий предел вписанных и описанных многоугольников;
5) решение уравнений третьей и четвертой степени;
6) квадратура круга;
7) трисекция угла;
8) применение производных при решении задач.

Приведу несколько задач на использование производной.

Задача. Доказать, что функция $y = \cos x^2$ непериодическая.

Первое решение. Если функция периодическая, то ее производная имеет тот же период, если она существует. В нашем случае производная существует и равна $y' = -2x\sin x^2$. Производная является неограниченной непрерывной функцией и, следовательно, не является периодической.

Для сравнения можно привести другие решения.

Второе решение. Можно найти корни уравнения $\cos x^2 = 1$ и доказать, что они расположены непериодически.

Третье решение. Используя определение, можно найти наименьшее положительное T, удовлетворяющее равенству $\cos x^2 = \cos^2(x+T)$ при любом x. Получим, что $T = 0$.

Задача. Решить уравнение $x + \sin x = \pi$.

Решение. Угадаем ответ x=π и, находя производную $y' = (x + \sin x)' = 1 + \cos x \geq 0$, делаем вывод, что возрастающая функция каждое свое значение принимает только один раз.

Задача. Доказать тождества (а можно задать вопрос: построить график функции $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, найти сумму)

а) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$, если $x > -1$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$, если $x < -1$

Решение. $y' = 0$ и производная, как и сама функция существуют при $x \neq -1$, следовательно функция постоянна на каждом из кусков области определения и остается найти эти значения, подставляя по одной точке из каждого интервала.

Задача. Доказать тождество

$$\cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}.$$

(другая постановка вопроса: построить функцию $y = \cos^4 x - \dfrac{1}{8}\cos 4x - 2\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ или доказать, что функция постоянна).

Решение. Рассмотреть функцию $y = \cos^4 x - \dfrac{1}{8}\cos 4x - 2\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$ и найти ее производную: $y' = 0$. Так как функция непрерывная, то она постоянна и для нахождения этой константы достаточно подставить $x = 0$ и получить $y = 0$.

Задача. Докажите равенство: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^x-4x+4}{x-2}=\ln 16$.

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^x-4x+4}{x-2}=-4+\lim_{x\to 2}\frac{x^x-2^2}{x-2}$$

и получаем, что второе слагаемое — это по определению значение производной функции x^x при $x=2$. Найдем эту производную:

$$\begin{aligned}(x^x)'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)|_{x=2}=e^{2\ln 2}(\ln 2+1)=\\ =2^2(\ln 2+1)=4(\ln 2+1)=\ln 16+4.\end{aligned}$$

Тем самым равенство доказано.

Использованная литература

[1] Кушнир И. «*Альтернативные способы решения задач* (*Геометрия*)» изд-во «Факт» Киев , 2006. — 368 с.

[2] Арнольд В. И. «*Задачи для детей от* 5 *до* 15 *лет*», М.: МЦНМО, 2004. — 16 с.

[3] «*Сборник задач для поступающих во втузы*» под редакцией Сканави М. И. (любое издание, начиная с пятого).

[4] Соминский И. С. «*Метод математической индукции*», 1965 г., серия «Популярные лекции по математике», вып. 3.

О проведении школьных выпускных экзаменов по геометрии в форме защиты рефератов (из опыта работы)

А.Д. Блинков, Д.В. Прокопенко

Центр образования №218, г. Москва

В любых классах, а особенно в классах углубленного изучения математики, постепенно выделяются учащиеся, более «продвинутые» по сравнению со своими одноклассниками и уже накопившие к старшим классам достаточный опыт сдачи экзаменов. Для этой категории учащихся традиционная форма сдачи устных экзаменов (по билетам) не представляет каких-либо трудностей, следовательно, подготовка к ним не дает возможностей для дальнейшего развития таких учеников. Сама же традиционная форма экзамена оставляет им мало возможностей продемонстрировать глубину своих знаний по предмету. Поэтому, для этих учащихся широко используется проведение экзаменов в форме защиты рефератов по различным предметам. Для предметов гуманитарного цикла такой вид работы является более привычным, в то время как для предметов естественного цикла и особенно математики, он менее распространен.

Технология проведения подобных экзаменов по геометрии и анализ накопленного опыта уже описывались авторами (см. приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №4/95, №16/98 и научно-методический журнал «Завуч», №5/98).

В предложенный материал внесены некоторые коррективы, исходя из опыта работы последних лет.

1. Основные этапы совместной деятельности преподавателей и учащихся.

В 9 и 11 классах экзамен по геометрии является, как правило, обязательным для всех учащихся математических классов, и большинство их сдает в традиционной форме.

На наш взгляд, *критериями отбора* учащихся, которым может быть предложена нетрадиционная форма сдачи экзамена, являются:

• хорошие и отличные оценки за все устные зачеты по геометрии в течение двух лет (в 10 и 11 классах — полугодовые зачеты, в 8 и 9 классах — тематические);
• хорошие и отличные оценки за все контрольные работы по геометрии в течение года;
• стремление и умение учащегося решать необязательные задачи и изучать материал, выходящий за пределы программы.

Кроме этого, естественно, должно быть желание ученика сдавать экзамен в форме защиты реферата.

Практика показывает, что в 11-х классах учащихся, выбравших данную форму, оказывается больше, чем в 9-х, так как подобная форма работы требует еще и достаточно высокой гуманитарной культуры.

После того, как круг желающих определен, следующим важнейшим и ответственным этапом работы является *выбор темы* реферата каждым из учащихся. Найти тему довольно сложно: приходится перерыть массу литературы, просмотреть различные источники в Интернете, использовать помощь коллег и прочее. Среди источников, которые использовались чаще всего, имеет смысл упомянуть задачники В.В. Прасолова и И.Ф. Шарыгина, статьи по геометрии в журнале «Квант», материалы летних конференций Международного турнира городов.

Приведем конкретные примеры уже использованных тем:

9 класс.

«Три загадочные точки в треугольнике», «Композиции геометрических преобразований на плоскости», «Инверсия на плоскости и её приложения», «Биссектрисы и трисектрисы», «Окружности, вписанные в сегменты», «Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями», «Вписанные шестиугольники», «Полуправильные многоугольники», «Аксиоматика и ее модели», «Средние величины в планиметрии».

11 класс.

1) «Описанные шары», «Вписанные шары», «Сечения в пространственных фигурах», «ГМТ в пространстве и их уравнения», «Экстремальные задачи в стереометрии».

2) «Геометрия на сфере», «Равновеликость и равносоставленность», «Группы симметрий», «Инверсия и стереографическая проекция».

3) «Ортоцентрический тетраэдр, его свойства и признаки», «Равногранный тетраэдр, его свойства и признаки», «Каркасный тетраэдр, его свойства и признаки», «Правильная пирамида с совпадающими центрами вписанных и описанных шаров».

Темы для рефератов в 11 классе даны в соответствии с классификацией, которая будет подробно описана в **разделе 2**).

Независимо от темы, каждая работа должна включать в себя:

1) *Введение*, где показана значимость выбранной темы для ученика. Возможно описание предыстории некоторых классических задач и методов, которые встретятся в работе.

2) *Основную часть*, где даются все используемые в дальнейшем определения, рассматриваются доказательства теорем, приводятся примеры и т. п.

3) *Практическую часть*, где показываются разнообразные применения теории и приводятся решенные задачи.

4) *Заключение*, где указывается место данной темы в курсе геометрии и возможные межпредметные связи.

5) *Оглавление* и список использованной *литературы*.

Необходимо подчеркнуть, что любой реферат должен обязательно содержать задачи, решенные его автором *самостоятельно*.

После того, как учащиеся определяются с темой реферата, им назначаются *консультанты*. Их задачей является составление списка литературы, которую учащиеся должны проработать и использовать при написании реферата. В процессе знакомства учащихся с литературой, консультанты помогают им составить план будущей работы, уточнить список включаемых в реферат задач и т. д.

К консультациям, помимо основного преподавателя математики, привлекаются также другие учителя математики, преподаватели ВУЗов и студенты-математики МГУ, МФТИ, МПГУ и других учебных и научных учреждений, в основном, из числа бывших выпускников школы.

Следующим основным этапом работы является написание реферата под руководством консультанта. После того, как эта работа в целом закончена, учащимся даются рекомендации по ее оформлению и логической последовательности изложения рассматриваемых вопросов.

Готовый вариант реферата отдается на *рецензирование*. В роли рецензентов, помимо консультантов, могут выступать также учителя других школ, специалисты-математики из числа родителей учащихся и т. д. С рефератом и рецензией на него заранее знакомятся все члены экзаменационной комиссии. Черновые варианты рефератов остаются у учащихся и по ним они готовятся к защите. За несколько дней до экзамена ученики знакомятся с рецензией на свою работу с тем, чтобы в процессе защиты учесть мнение рецензента.

Если количество сдающих экзамен в форме защиты реферата превышает пять человек, то для проведения этого экзамена целесообразно предусмотреть отдельный день в общем экзаменационном расписании.

(Как правило, это бывает накануне дня сдачи экзамена остальной частью класса.) Экзаменационная комиссия расширяется за счет приглашаемых специалистов и методистов. Экзамен является «открытым», на нем присутствуют желающие одноклассники, учителя школы, представители ВУЗов и т. д.

В процессе *защиты* ученик не воспроизводит полностью свою работу, а кратко излагает содержание реферата, подробно останавливаясь на наиболее существенных моментах, акцентируя при этом внимание на какой-либо проблеме, которую ему пришлось решать самостоятельно. По окончании сообщения автора зачитывается рецензия, после чего члены комиссии задают вопросы. Их цель — выяснить глубину освоения учеником материала и насколько свободно он в нем ориентируется. Защита реферата одним учеником занимает, как правило, от 30 до 45 минут.

В последние годы при защите реферата большинство школьников использует компьютерные технологии, что существенно облегчает как изложение сути работы, так и ее восприятие присутствующими на экзамене.

Экзаменационная комиссия не ограничивается цифровой оценкой учащегося, а подробно характеризует достоинства и недостатки как самого реферата, так и процесса его защиты.

В дальнейшем, итоги защиты рефератов становятся предметом обсуждения учителей лаборатории математики и школьного экспертно-методического совета.

Совместную работу учеников, учителей и других участников процесса написания и защиты реферата, можно рассматривать как модель исследовательской деятельности в рамках общеобразовательной школы. При удачном осуществлении всех этапов этой работы, учащийся «поднимется» на качественно иной математический уровень, чего не происходит в случае традиционной формы подготовки и сдачи устного экзамена.

Так, один из авторов данной статьи в школьные годы являлся автором реферата (см. Приложение 2), затем, будучи студентом мехмата МГУ, — консультантом и рецензентом, а сейчас руководит этой работой в ФМШ №2007.

2. Проблемы, возникающие на различных этапах работы и их анализ.

Успешность проведения экзамена в форме защиты реферата во многом зависит от грамотного выбора темы и ее соответствия уровню математического развития школьника и его индивидуально-психологическим особенностям. Исходя из нашего опыта, темы для рефератов можно условно разделить на *три типа*:

1) «классификационный», позволяющий его автору обобщить материал, изучаемый в различных разделах геометрии и в различное время;

2) «познавательный», позволяющий его автору изучить внепрограммный теоретический материал и показать его применение к решению задач основного курса;

3) «исследовательский», где основным содержанием реферата является цепочка задач, решаемых автором самостоятельно.

Не останавливаясь на общих требованиях, предъявляемых к любому реферату, которые были сформулированы в первом разделе, отметим особенности каждого из перечисленных типов.

Реферат «*классификационного*» типа предполагает обоснование принципа выбора классификации, ее полноту и достаточно высокий уровень обобщения программного материала (желательно изложение и сравнение различных классификаций). В лучших рефератах этого типа прослеживается наличие внутренней связи между внешне далекими понятиями и хорошо видно место, которое в школьном курсе геометрии занимают основные объекты классификации.

Например, в работе В. Вакулюка (11 класс, 1990 г.) «Геометрические места точек в пространстве» было рассмотрено два подхода к классификации ГМТ (аналитический и геометрический). Показана ограниченность применения чисто геометрического метода и универсальность координатного. При этом выделен класс пространственных фигур, которые удобнее задавать, как ГМТ с заданными свойствами, что позволяет рационально решить ряд сложных задач школьного курса.

Реферат «*познавательного*» типа подразумевает изучение его автором достаточно сложного теоретического материала, далеко выходящего за рамки программы. В итоге должны быть собраны воедино и доступно изложены основные положения изученного, приведены яркие и «выпуклые» примеры, иллюстрирующие характерные идеи и методы. Желательно, чтобы автор отметил возможность практического применения изложенных идей в областях, казалось бы, далеких от математики.

Например, реферат М. Мартьяновой (9 класс, 1995 г.) «Инверсия на плоскости и ее приложения» содержит методически грамотное и фундаментальное изложение теории данного нелинейного преобразования. Значительная часть работы посвящена рассмотрению шарнирных механизмов, устройство которых основано на свойствах этого преобразования (см. Приложение 2).

Другой пример: в работе С. Калинниковой (11 класс, 1994 г.) «Группы симметрии» изложен аксиоматический подход к понятию группы, описаны группы симметрий различных фигур и показано, что, чем «богаче» группы самосовмещений, тем симметричнее фигура (даже в обыденном смысле). Многочисленные примеры иллюстрируют проявление симметрии в природе и искусстве.

Практика показала, что малоинтересными являются рефераты, написанные по учебникам для ВУЗов. Например, вывод основных формул аналитической геометрии сравнительно несложен и мало что дает для развития ученика. Существует ряд книг, написанных корифеями математики (Гильберт, Клейн, Вейль, Курант и др.), где в увлекательной и доступной форме изложены яркие идеи различных областей математики. Изучение хотя бы небольшой части одной такой книги, как правило, дает школьнику мощный импульс в его математическом развитии.

Реферат «*исследовательского*» типа требует от автора гораздо большего объема самостоятельной работы. Его основой является исследование свойств и признаков выделенного класса фигур. Материал излагается в виде логически связной цепочки задач, что и определяет глубину исследования. Заключительная часть работы должна содержать обоснование перспективы развития темы. Например, реферат Ф. Езеева (11 класс, 1994 г.) «Равногранный тетраэдр, его свойства и признаки» включает в себя формулировки и доказательства утверждений, необходимых и (или) достаточных для принадлежности тетраэдра к данному классу, значительная часть которых найдена автором. Показана эффективность применения разнообразных методов и понятий (описанный параллелепипед и его симметрия, векторы, проекции) для рациональных доказательств этих утверждений. В заключение автором выдвинута гипотеза о равногранности любого тетраэдра, «двойственного» равногранному (построенного на соответствующих точках граней, совмещаемых движением), доказанная для тетраэдра с вершинами в основаниях высот тетраэдра (см. Приложение 3).

Отметим, что использование термина «реферат» в данном контексте является не совсем корректным. Работы данного типа существенно расширяют смысл этого понятия, заложенный в экзаменационной инструкции.

Отдельный интерес (независимо от типа) представляют рефераты, иллюстрирующие различные межпредметные связи. Например, в работе Р. Шаповалова (11 класс, 1990 г.) «Вписанные многогранники» была решена оригинальная химическая задача с использованием свойств этих многогранников и понятия «упаковки шаров в пространстве». Имеется также единичный опыт написания и защиты экзаменационного реферата сразу по двум предметам: биологии и геометрии (М. Мартьянова, 11 класс, 1997 г.) «Математический анализ генетической структуры популяции»).

В первом разделе были описаны *критерии отбора* учащихся, которым может быть предложена данная форма сдачи экзаменов. Успех дальнейшей работы существенно зависит от знания учителем индивидуально-психологических особенностей его учеников: тип реферата, предложенного конкретному ученику, должен максимально соответствовать его уровню как математического, так и общего развития, учитывать тип мышления и креативность. Это, в значительной степени, определяет возможность учащегося выполнить требования, предъявляемые к каждому типу реферата.

Не менее важным является и правильный подбор *консультантов*. Если речь идет о теме «познавательного» типа , то консультант должен быть специалистом по данному вопросу. Работу «классификационного» типа обычно курирует основной преподаватель математики, поскольку основные трудности авторов связаны, как правило, с грамотным отбором задач школьного курса и логичным построением структуры реферата. Консультант «исследовательского» реферата практически выполняет роль научного руководителя, то есть ставит промежуточные задачи и задает направление дальнейших исследований, поэтому для такой работы необходим человек с широким математическим кругозором.

Напомним, что готовая работа отдается на *рецензирование* и возвращается автору с конкретными замечаниями, часть из которых должна быть устранена до защиты. Рецензия также содержит *предварительную оценку* работы. Это особенно важно для рефератов «познавательного» типа, поскольку не все члены экзаменационной комиссии могут свободно ориентироваться в теме реферата.

Остановимся теперь на проблеме *оценки* реферата. Ошибочным является мнение, что сам факт выбора учащимся этой формы сдачи экзамена заведомо предполагает отличную оценку. Оценка должна быть основана на соответствии требованиям, предъявленным к конкретному типу реферата, учитывает четкость и аккуратность изложения материала и корректируется удачной или неудачной защитой (как по сути, так и по форме). Наибольшее влияние на оценку оказывает заключительная часть защиты, а именно, ответы ученика на вопросы экзаменационной комиссии. Естественно, что характер вопросов напрямую связан с типом реферата. Например, если в реферате «познавательного» типа приведен ряд теорем, то имеет смысл попросить учащегося решить несложную задачу на их применение, выделив ему 10 — 15 минут. Если же идет обсуждение реферата «исследовательского» типа, то наиболее уместными являются вопросы о необходимости и достаточности доказанных утверждений (см. Приложение 2).

Далее, в Приложении 3 на конкретном примере показаны достоинства и проанализированы недостатки работы ученика и рецензента. Сформулированы вопросы, заданные экзаменационной комиссией, направленные на устранение недочетов.

Практика показывает, что если все этапы совместной работы над рефератом осуществлены грамотно и качественно, то творчество ученика, как правило, оценивается отличной оценкой.

Мы надеемся, что описанная система работы окажется полезной, позволит получить удовлетворение всем участникам процесса и повысить их математический уровень. Сами же рефераты станут в этом случае ценными методическими пособиями, которые учитель математики сможет использовать в дальнейшем, как на уроках, так и во внеурочной деятельности.

Проведение экзамена по геометрии в форме защиты реферата, наверное, возможно не только в классах углубленного изучения математики, но и в общеобразовательных и профильных классах. Естественно, что в этих случаях требуется несколько иной подход к подбору тем и уровню требований, предъявляемых для защиты рефератов.

Приложение 1.

Календарное планирование работы с учащимися

Примерные сроки	Этапы работы
до 20 января	Составление списка учащихся, выбравших экзамен в форме защиты реферата.
до 1 февраля	Примерное распределение тем
до 10 февраля	Выбор консультантов. Определение первичного списка изучаемой литературы.
до 1 марта	Первое обсуждение прочитанного и уточнение темы реферата.
до 1 мая	Подбор и решение задач. Обсуждение прикладной части реферата.
до 20 мая	Написание реферата в черновом виде.
до 5 июня	Рецензирование. Окончательное написание реферата.
до 12 июня	Консультации по защите реферата.
13 — 20 июня	Проведение экзамена.

Приложение 2.

Оглавления некоторых рефератов и вопросы, которые задавались при защите.

1. Е. Бабенчиков, 11 класс, 1994 г.
Название: «*Сечения многогранников и тел вращения*».
Тип реферата: «классификационный» (17 стр.)

1. Введение.

2. Сечения многогранников:
различные классификации сечений;
способы построения сечений.

3. Сечения прямого кругового цилиндра:
сечения цилиндра плоскостью, параллельной его основанию;
осевое сечение цилиндра и сечение, параллельное оси;
эллипс.

4. Сечения конуса вращения:
сечения конуса плоскостью, параллельной его основанию ;
осевое сечение конуса и сечение, параллельное оси;
эллипс;
парабола;
гипербола.

5. Задачи.

6. Заключение.

Вопросы:

1) Объяснить построение сечения правильной шестиугольной пирамиды, проходящего через ребро основания и середину высоты.

2) Верно ли, что для любой наклонной призмы можно построить сечение, пересекающее все ее боковые ребра под прямым углом?

3) Можно ли разместить в пространстве правильный треугольник с целочисленными координатами вершин? [*Сечение куба*!]

2. М. Мартьянова, 9 класс, 1995 г.
Название: «*Инверсия на плоскости и ее приложения*».
Тип реферата: «познавательный» (52 стр.)

1. Введение.

2. Основные понятия.

3. Образы прямых и окружностей при инверсии. Обобщенные окружности.

4. Аналитическое задание инверсии.

5. Сохранение углов при инверсии.

6. Теорема о композиции инверсий.

7. Применение преобразования инверсии к решению классических задач.

8. Применение преобразования инверсии для решения задач на построение.

9. Приложение инверсии к теории шарнирных механизмов.

10. Заключение.

Вопросы:

1) Доказать, что любая окружность, проходящая через некоторую точку и ее образ при инверсии, ортогональна окружности инверсии.

2) Показать, что осевая симметрия есть предельный случай инверсии (рассмотреть инверсию относительно окружности бесконечно большого радиуса).

3) Какие прямые и окружности являются неподвижными при инверсии? Могут ли при инверсии несколько окружностей быть неподвижными? (Сравнить с неподвижными прямыми при осевой симметрии.)

3. Ф. Балабанова, 11 класс, 1997 г.
Название: «*Центр масс и объемы тел вращения*».
Тип реферата: «познавательный» (41 стр.)

I. Центр масс системы материальных точек.

1. Векторные определения центра масс и центра тяжести.
2. Теорема о радиус-векторе центра масс. Следствие: единственность центра масс.
3. Доказательство архимедова правила рычага.
4. Теорема о группировке центра масс.
5. Задачи на применение введенных понятий и теорем.
6. Координаты центра масс в пространстве.

II. Центр тяжести. Центр масс линии и плоской фигуры.

7. Определение центра тяжести.
8. Центр тяжести многоугольника.
9. Первая теорема Гюльдена (о площади фигуры, образованной вращением плоской линии вокруг прямой).
10. Вторая теорема Гюльдена (формула объема тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси).
11. Теорема об объеме тела, полученного при вращении проекции фигуры на некоторую плоскость.

III. Решение задач на вычисление площадей поверхностей и объемов тел вращения.

IV. Заключение.

Вопросы:

1) Объяснить метод вычисления объемов тел вращения, имеющих вырезы (с «дырками!»).

2) Доказать равенство объемов тел, образованных вращением оснований прямого цилиндра вокруг оси, не пересекающей этот цилиндр, и параллельной плоскости его основания.

4. Д. Прокопенко, 11 класс, 1990 г.

Название: «*Ортоцентрический тетраэдр, его свойства и признаки*».

Тип реферата: «исследовательский» (21 стр.)

А.

1. Введение

2. Лемма о пересечении прямых. Определение ортоцентрического тетраэдра.

Б. Основные свойства.

3. Пересечение высот тетраэдра.

4. Пересечение общих перпендикуляров к ребрам.

5. Произведение косинусов двугранных углов при противолежащих ребрах.

6. Бимедианы.

7. Суммы квадратов противолежащих ребер.

8. Плоские углы при одной вершине.

В. Признаки.

9. Перпендикулярность противолежащих ребер.

10. Одна из вершин проектируется в ортоцентр грани.

Г. Частные случаи и применения.

11. Прямоугольный тетраэдр.

12. Описанный параллелепипед. Ромбоид.

13. Связь бимедиан ортоцентрического тетраэдра с ребрами описанного параллелепипеда.

14. Связь описанных сферы и параллелепипеда.

15. Лемма о медианах тетраэдра.

16. Прямая Эйлера, как следствие свойств ортоцентрического тетраэдра.

17. Формула для вычисления объема ортоцентрического тетраэдра.

18. Сфера, содержащая середины ребер и основания общих перпендикуляров к противолежащим ребрам.

19. Связь между длинами некоторых отрезков в ортоцентрическом тетраэдре.

Д. Заключение.

5. О. Ибраев, 11 класс, 1997 г.

Название: «*Каркасный тетраэдр, его свойства и признаки*».

Тип реферата: «исследовательский» (26 стр.)

Часть 1. Произвольные каркасные тетраэдры.

А. Доказательство признаков и свойств.

Тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда:
1) суммы длин скрещивающихся ребер равны;
2) окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются;
3) все четырехугольники, получающиеся на развертке тетраэдра, являются описанными;
4) перпендикуляры, восстановленные к граням из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Б. Некоторые метрические соотношения.

Часть 2. Частные случаи каркасных тетраэдров.

А. Тетраэдр, в котором равны три ребра, не лежащие в одной грани.

Доказательство признака и свойств данного вида тетраэдров.
1) В каркасном тетраэдре две пары скрещивающихся ребер равны тогда и только тогда, когда полувписанная сфера касается двух скрещивающихся ребер в их серединах.
2) В рассматриваемом тетраэдре:
а) центр полувписанной сферы является центром тяжести тетраэдра;
б) бимедиана, соединяющая середины неравных ребер, перпендикулярна им;
в) неравные ребра взаимно перпендикулярны;
г) описанный параллелепипед — прямой с ромбом в основании;
д) центр полувписанной сферы является центром симметрии описанного параллелепипеда;
е) радиус полувписанной сферы пропорционален среднему геометрическому длин неравных ребер;
ж) объем тетраэдра пропорционален радиусу полувписанной сферы и в $\pi/2$ раз меньше ее объема.

Б. Правильная треугольная пирамида.

Каркасный тетраэдр является правильной треугольной пирамидой тогда и только тогда, когда:
1) равны три ребра, лежащие в одной грани;
2) равны три ребра с общей вершиной;
3) полувписанная сфера касается двух пересекающихся ребер в их серединах;
4) центр полувписанной сферы лежит на высоте или ее продолжении;

5) сечение, проходящее через точки касания сферы и трех ребер с общей вершиной, параллельно основанию пирамиды.

В. Правильный тетраэдр.

Каркасный тетраэдр является правильным тогда и только тогда, когда:
1) он является полуправильным (равногранным);
2) полувписанная сфера касается ребер в их серединах (достаточно трех ребер, не лежащих в одной плоскости);
3) совпадают центры полувписанной и вписанной сфер;
4) совпадают центры полувписанной и описанной сфер;
5) центр полувписанной сферы является ортоцентром тетраэдра.

Вопросы :

1) Доказать, что центр полувписанной сферы в каркасном тетраэдре, у которого все двугранные углы при некоторой вершине тупые, лежит вне тетраэдра.

2) Является ли свойство, сформулированное в Части 2: А2б) одновременно и признаком данного вида каркасных тетраэдров? Почему?

Приложение 3.

Фрагмент одного из рефератов с последующим кратким комментарием

Ф. Езеев, 11 класс, 1994 г.

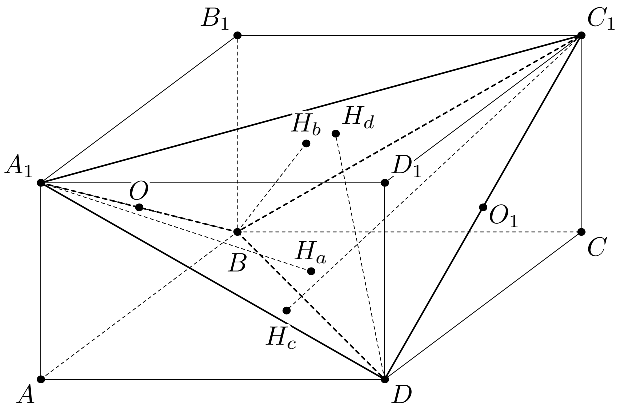
Название: «*Равногранный тетраэдр, его свойства и признаки*».

Тип: «исследовательский».

Теорема. *Тетраэдр, вершины которого лежат в основаниях высот равногранного тетраэдра, является равногранным.*

Доказательство. Рассмотрим описанный около тетраэдра A_1BC_1D параллелепипед $A\dots D_1$. По свойству равногранного тетраэдра, этот параллелепипед — прямоугольный. O — середина A_1B, O_1 — середина C_1D, DH_d – высота тетраэдра A_1BC_1D, опущенная из точки D ($H_d \in$ $\in (A_1BC_1)$); C_1H_c — высота тетраэдра A_1BC_1D, опущенная из точки C_1 ($H_c \in (A_1BD)$).

Рассмотрим поворот на 180° вокруг прямой OO_1. Данный тетраэдр и построенный параллелепипед перейдут при этом повороте в себя. Образами точек D и C_1 являются соответственно точки C_1 и D, а образами граней A_1BC_1 и BA_1D — соответственно грани BA_1D и A_1BC_1. Так как движение сохраняет все виды углов, то высота DH_d перейдет в высоту C_1H_c. Следовательно, $H_d \to H_C$. Аналогично, для двух других оснований высот: $H_a \to H_b$, а, значит, отрезок $H_aH_d \to H_bH_c$.



Следовательно, мы доказали равенство двух скрещивающихся ребер тетраэдра $H_aH_bH_cH_d$. Аналогично доказывается попарное равенство остальных противолежащих ребер этого тетраэдра. Следовательно, по ранее доказанному признаку, он — равногранный.

Далее, автор работы утверждает, что аналогичные теоремы верны и для других «замечательных» точек граней, и их доказательство будет основано на том же приеме. Он пишет о том, что «...На этих примерах становится понятным истинность теоремы о равногранности любого тетраэдра, двойственного равногранному, с вершинами в любых точках граней, совпадающих при совмещении граней движением». На этом работа заканчивается.

Комментарий.

Из приведенных выше фрагментов реферата видно, что ученик настолько глубоко разобрался в свойствах равногранного тетраэдра, что способен сам формулировать и доказывать неочевидные утверждения, что и является одной из целей написания рефератов «исследовательского типа».

На этом примере хорошо видны недочеты в работе ученика, показавшего при этом высокую способность к самостоятельному творчеству, и недоработки рецензента, а именно:

1. «Теорема двойственности» доказана для частного случая.

2. Без доказательств сформулированы аналогичные свойства для некоторых других замечательных точек граней.

3. Автор «доказывает» общую теорему, ссылаясь на доказательство частных случаев и на очевидность.

Логические пробелы подобного «доказательства» лежат на поверхности. Поэтому, при внимательном прочтении реферата, рецензент обязан был это заметить и рекомендовать провести полное доказательство. Это не было сделано, и устранять эти недостатки автору пришлось прямо на защите, ответив на следующие вопросы, заданные экзаменационной комиссией:

1) Сравнить самосовмещения описанных параллелепипедов для произвольного и равногранного тетраэдров. Какое из них дает преимущество для исследования в нашем случае?

2) Используя п. 1), доказать теорему в общем случае.

Приведенный пример наглядно иллюстрирует те требования, которые предъявляются в процессе описанной деятельности, к различным его участникам.

Теория и практика организации исследовательской деятельности школьников в школе «Интеллектуал»

Н.М. Нетрусова

учитель математики школы «Интеллектуал»

Для начала пара слов о том, о чем собственно пойдет речь. В докладе речь пойдет именно об организации. То есть останется в стороне ряд вопросов, таких как «Какие задачи предлагаются школьникам для исследования?» или «Откуда брать предлагаемые задачи?» Эти вопросы разбирались в статьях [1, 2]. Основным вопросом работы будет «Что надо делать, чтобы процесс исследовательской деятельности шел и не останавливался?»

Я изложу опыт школы «Интеллектуал» в данном вопросе. При этом под словами «теория и практика» я понимаю то, что изначально планировалось, и то, что на самом деле из этого получилось.

Тут мы подходим к основному понятию «исследовательская деятельность». Его я не буду определять отдельно. Интуитивного понимания каждого вполне достаточно. Скажу лишь только, что речь будет идти об исследовательской деятельности не только в математике, однако, большая часть опыта берется из опыта работы кафедры математики нашей школы.

Я буду часто употреблять слово «проект» — так в нашей школе называется исследовательская деятельность школьника.

Скажу немного о целях, с которыми ведется исследовательская деятельность. В мою задачу не входит перечисление всех таких целей. Думаю, каждый сходу может назвать несколько возможных целей. Я назову несколько, чтобы отложить до поры вопросы о том, зачем нужна исследовательская деятельность.

Итак, с помощью исследовательской деятельности можно:

1) Учиться. Ребенок, в процессе работы над проектом, безусловно, многому учится, осваивает новый материал или новые методы.

2) Действовать самостоятельно.

3) Играть в серьезные исследования.

4) Взаимодействовать ребенку и взрослому.

5) Учиться говорить, а также вести ту или иную работу с текстом

Школе «Интеллектуал» всего пять лет, поэтому опыт сравнительно небольшой. Итак, что же планировалось в начале работы школы.

В начале учебного года каждая кафедра вывешивает список возможных тем проектов. В течение года в любой момент школьник может подойти к любому учителю и сказать, что хочет делать проект, тем самым выбрать руководителя и вместе с ним тему. В течение какого-то времени школьник вместе с руководителем работают над темой. То есть работает, в основном, школьник, регулярно рассказывает руководителю о результатах, руководитель предлагает идеи, помогает разбить задачу на более простые, рассказывает о каких-то методах, не известных школьнику, но применимых в данной работе. Проекты выполняются индивидуально или маленькими группами по 2–3 человека. Каждый школьник должен за год сделать хотя бы один проект, на это отводится полгода. В конце декабря и в конце мая происходят конференции, на которых докладываются готовые проекты. То есть в идеальной ситуации ребенок в сентябре выбирает тему, к декабрю доделывает проект и, доложив его на декабрьской конференции, продолжает работать над ним же или берет новую тему.

Конференция состоит из слушаний двадцатиминутных докладов по секциям и пленарного заседания в итоге, на котором еще раз слушаются лучшие доклады.

В первый год работы школы проекты вызвали большой ажиотаж. Успели сделать проекты более 90% школьников. Также первый год показал, что работы сильно разнятся по качеству и глубине исследования от рефератов до серьезных самостоятельных работ.

На второй-третий год школьники брали много проектов, как следствие, возросла нагрузка на учителей, которые ими руководили. В результате за год успели сделать проект не все: либо замахнулись на слишком большую тему, либо не хватило сил руководителя, либо еще по каким-то причинам. Здесь сама собой отпала идея, что каждый обязан сделать проект. Однако делать проект по-прежнему считалось и считается модным.

На следующий год школьники выбрали темы проектов значительно позже. В целом, наблюдалась активность школьников при публикации тем, далее спад активности в течение полугодия и новый резкий скачок активности за две недели до конференции. Поскольку делать проект считается престижным, осознав, что конференция скоро, многие школьники активизировались и решили быстренько за две недели сделать проектик. Это привело к тому, что к моменту декабрьской конференции многие проекты были еще совсем не готовы. В связи с этим была предложена классификация работ по жанрам.

Предлагались следующие жанры:

по уровню выполнения работы:

1) Реферат.
2) Исследовательская работа начального уровня, в том числе практическая.
3) Научно исследовательский проект.

по степени готовности работы:

1) Декларация о намерениях — школьник докладывает постановку задачи, план собственных действий, какие-то уже возникшие гипотезы.
2) Доклад о текущих результатах.
3) Итоговый отчет.

После введения жанров школьники осознали, что реферативная работа ценится меньше самостоятельного исследования, поэтому реферативные работы по математике, биологии, физике и истории практически исчезли.

После того, как почти все работы перестали быть реферативными, основная забота преподавателей направилась на следующие вещи: 1) чтобы дети пораньше выбирали темы, 2) чтобы работа над темой была регулярной и не прекращалась в течение полугодия, 3) чтобы дети уделяли внимание качеству текста работы и качеству доклада на конференции.

О тексте и докладе стоит сказать отдельно. Когда школьник работает над проектом, ему очень интересно, это его захватывает. Но когда речь заходит о написании текста, интерес резко падает. Работать с текстом тяжело, что именно требуется, плохо понятно. Руководитель объясняет, как должен быть устроен текст, что для этого надо сделать, но текст, как результат, не столь интересен, сколь результат самой работы. На этом этапе активность школьника снижается (вплоть до готовности оставить эту работу, взяться за другую задачу).

Что касается доклада, то здесь у школьников мало положительных примеров перед глазами. Обычно школьник умело подготавливает презентацию, и учится быстро рассказывать (или, хуже того, зачитывать) свой текст. При этом он редко смотрит на свой доклад с позиции слушателя. Возникает ощущение, что цель школьника — доложить, отчитаться, успеть рассказать всё, а всё остальное не важно. О понятности доклада слушателями речи вообще не идет. Вдобавок, школьнику хочется рассказать всю свою работу, включая мелкие подробности доказательств. Это и понятно, школьнику важна каждая мелочь его собственного открытия. Любое доказательство доставило ему радость и этой радостью он хочет поделиться со слушателями. Однако слушатели теряют нить рассказа: часть определений не сказаны (для докладчика они естественны), часть определений и утверждений мелькнули на слайдах презентации и исчезли до того, как их кто-нибудь прочел, остальное докладчик быстро произнес и пошел дальше до того, как кто-либо это понял. Поэтому, когда дело доходит до подробного доказательства, слушателям уже ничего не понятно. Впрочем, даже если понятно, вникнуть в тонкости доказательства во время двадцатиминутного доклада на конференции невозможно. Слушателей в основном интересуют красивые идеи, на которых основано доказательство и примеры, из которых понятно, что же на самом деле происходит. Но донести до школьника-докладчика, что же от него ждет слушатель, очень сложно.

Для повышения качества докладов был предложен механизм рецензирования работ. За неделю до конференции школьник докладывает свою работу рецензенту — другому учителю с той же кафедры. Рецензент говорит свои замечания. И все трое: школьник, руководитель и рецензент работают над качеством доклада.

Помимо сказанного, практика показала, что конференция по отдельным секциям — неправильный жанр представления работ. Слушатели секции практически не могут перейти с одной секции на другую, вынуждены слушать все доклады секции, некоторые из которых могут быть непонятны в силу возраста. В результате, слушатели вникают не во всё, что слушают. Доклады других секций послушать не получается. На Летней школе интенсивного обучения «Интеллектуал» мы опробовали жанр стендовой конференции, давно отработанный в Зимней Пущинской Школе. Стендовая конференция состоит из нескольких серий. В каждой серии часть школьников на отведенных им стендах презентуют свою работу тем, кто подошел послушать. Остальные являются слушателями. В следующей серии часть слушателей становятся докладчиками, а докладчики слушателями. При этом каждый школьник несколько раз повторяет свой доклад маленькой группе слушателей, подошедших к его стенду. А каждый слушатель слушает то, что ему интересно и сразу спрашивает, если не понятно.

Хочется еще сказать о планах на будущее в отношении проектных работ в школе «Интеллектуал. С учетом имеющегося опыта, работу над проектами по математике мы планируем организовать так:

1) В сентябре школьники выбирают темы работ.
2) Далее начинает работать еженедельный семинар, на котором будут докладываться работы. Для начала будут обсуждаться хорошие работы предыдущего года. Так у тех, кто еще только начал делать работу, будет перед глазами пример хорошей сделанной работы. На доклад на семинаре отводится 45 минут, в качестве слушателей приходят те, кто заинтересовался темой, поэтому докладчик может уделить внимание подробным доказательствам, если это необходимо, рассказать какие-то более тонкие детали своей работы.
3) За месяц до конференции будет производиться рецензирование текстов работ. Каждая работа, прежде чем быть представленной на конференции, будет прослушана на кафедре математики.
4) Далее состоится конференция, возможно, в стендовом формате.

Может возникнуть вопрос, как поддерживается престижность исследовательской деятельности. Здесь немаловажным фактором является наличие проектной работы как этапа вступительного экзамена. Ребенок, поступивший в школу, имеет свежий опыт успешной, по его мнению, работы (раз смог поступить, значит работа хорошая). В связи с этим, в начале учебного года у него есть большое желание делать проект. Школьники, сделавшие хороший проект в прошлом году, тоже заинтересованы в новом проекте или в продолжении прежнего. Остальные школьники поддаются общему настрою. Кроме того, хороший проект засчитывается за переводной экзамен по предмету.

Посмотрим, что делается для того, чтобы в течение учебного года поддерживать регулярность работы над проектами. В 2007/08 году в шестом классе было опробовано выделение под проекты учебных часов. В углубленной группе шестого класса, при пяти часах в неделю, час выделялся на работу над проектом. Лучшая часть углубленной группы (восемь школьников) на этот час работала отдельно с отдельным преподавателем. Выбрав в январе темы и работая каждую неделю, консультируясь с учителем, к апрелю все дети, работавшие по этой схеме, сделали проекты. В начале апреля, когда пора было работать над текстом и докладом, заинтересованность детей резко снизилась. Тогда каждому ребенку был назначен консультант, в задачи которого входило работать с детьми над текстом и докладом. Надо сказать, что недели на подготовку качественного доклада не хватило. Однако, наличие в течение полугода фиксированного времени, выделенного под проекты, дало заметный результат. Все работы были завершены.

В качестве приложения, хочется добавить памятку тем, кто докладывает проект по математике, которая содержит полезные советы по подготовке текста, доклада и презентации.

Литература

[1] Сгибнев А. И. *Исследуем на уроке и на проекте.* / Сборник «Учим математике» (материалы первой открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2006. С. 59–71.

[2] Сгибнев А. И., Шноль Д. Э. *Исследовательские задачи при обучении математике в школе «Интеллектуал».* / «Математика». Изд. дом «1 сентября»: 2007. №12. С. 17–22.

[3] Положение об исследовательской работе учеников школы-интерната «Интеллектуал» `http://int-sch.ru/docs/projects/poloz.pdf`.

Приложение

Памятка для докладчиков математических проектов

Хорошо изложить свою работу — это отдельная большая задача. Мы собрали несколько советов о том, как избежать типичных ошибок.

Как готовить доклад

1. Старайтесь донести до слушателей идеи, а не подробности доказательств. Подробности обычно интересны и доступны лишь специалистам. Не пожалейте 3–5 минут на подробное изложение простого примера, а затем кратко скажите, как его удалось обобщить («я доказал, что то же будет и для всех простых n»).

2. Компьютер позволяет легко вывести на экран таблицу с экспериментальными данными в *Excel*, чертёж в *Живой геометрии* и т. д., которые сделают ваш пример наглядным. Но часто хватит и доски! Уберите из примера всё лишнее и случайное, сосредоточьтесь на глав-

ном. Чертежи делайте с минимумом отвлекающих деталей, таблицу — только с необходимыми данными.

3. Собравшись доказать какое-то идейное утверждение, потрудитесь сначала ясно и корректно его сформулировать («Если 1. можно построить правильный n-угольник и правильный k-угольник, 2. n и k взаимно просты, то можно построить и правильный nk-угольник»). Следите за обозначениями! Если n у вас вначале обозначало число сторон, то к концу оно не должно превратиться в длину отрезка!

4. Программой *Power Point* надо пользоваться очень осторожно. Она позволяет напихать в доклад много текста и картинок, которые не нужны. Она перелистывает слайд за слайдом, не оставляя ничего перед глазами у зрителей (в отличие от доски). Подбирайте читаемую комбинацию цветов. Из мелочей: не делайте фон совершенно белым и не пишите в конце «Спасибо» оранжевыми буквами поперёк экрана!

Как делать доклад

1. Вы рассказываете свою работу людям, поэтому обращаться надо к ним, а не к стене или экрану. Желательно следить за их реакцией, и в случае непонимания остановиться и повторить подробнее. Стоять надо так, чтобы не загораживать от слушателей доску и экран. Помните, что кроме голоса, у вас есть ещё много средств общения с аудиторией. Например, стоит показывать указкой на ту формулу, деталь чертежа или строчку таблицы, о которой вы сейчас говорите.

2. В начале доклада надо написать на доске свою фамилию, имя и тему доклада. Затем по ходу выступления там же должны появляться основные утверждения и результаты. (Выделите для этих целей часть доски, скажем, правую, с которой не будете ничего стирать.) Таким образом, к концу доклада вся его структура будет перед глазами слушателей, и они смогут задать вам компетентные вопросы.

3. Не читайте вслух формулы — пишите их! Не пишите длинные фразы — произносите их!

4. Слушателям будет интересно, если интересно докладчику.

Подготовка учащихся к решению исследовательских задач,
или
Как на уроке математики развивать исследовательские умения

А.И. Сгибнев

учитель математики школы «Интеллектуал»

Сейчас много говорят о проектах, об исследовательских задачах для школьников. Своё понимание этих слов я сформулировал в статье [1]. Здесь я пишу о том, как подготовить учеников к решению исследовательских задач в моём понимании, т. е. какие формы работы и элементы урока помогают развить исследовательские навыки. На мой взгляд, эти вещи могут быть полезны и тем учителям, которые не собираются вести никаких проектов.

Хороший образ: математика — это лес. Учитель прокладывает в нём просеки. Слабым ученикам хорошо бы научиться ходить по просекам. Обычных детей можно научить не бояться заходить в лес, видеть простые ориентиры, не теряться (хотя бы недалеко от дороги). Для сильных детей возможен поход по бездорожью, т. е. самостоятельное решение исследовательской задачи. Умение не заблудиться в лесу и есть то, чему мы здесь хотим научить.

Подчеркну основную психологическую трудность для учителя: работая над исследовательской задачей, надо разговаривать с учеником как с младшим коллегой. Это совсем другая психологическая позиция, чем обычно на уроке. Нужно уметь чётко разделять эти две ситуации.

Какие умения хотим развить

Приведём конкретные примеры исследовательских умений.

Не боимся нестандартных задач.

Я знал школьницу, которая умела решать квадратные уравнения в стандартном виде и умела переносить слагаемые из одной части в другую. Но уравнение $2x^2 + 11x = -5$ она решать не умела. То есть скомбинировать две простые идеи ребёнок не был научен. Другой пример — уравнение $x^6 + 100x^4 + x^2 + 1 = 0$. У него нет корней, так как левая часть обязательно положительна. Чтобы понять это, не надо знать ничего вне школьной программы, надо только понимать, что значит «решить уравнение» и не испугаться его вида — «мы такого не проходили». Установка должна быть такая: не знаем алгоритма — не беда, подумаем.

Конструируем.

Школьников постоянно просят решать примеры и очень редко — придумать свой пример. Между тем такие задания полезны и в чисто учебном отношении: они проверяют понимание, тренируют «конструкторские» способности.

Пример. Придумайте уравнение с целыми коэффициентами, имеющее корень а) 1, б) $\sqrt{2}$, в) $1 + \sqrt{2}$, г) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Пример. Придумайте неравенство второй степени, решением которого является одно число; неравенство четвёртой степени, решением которого являются два числа.

Каждую вновь появляющуюся конструкцию через некоторое время тренируемся возводить сами. См. дальнейшие примеры в работе Шноля Д.Э. «Задачи с параметром» [5].

Задаём вопросы.

Школа этому не учит. Вопросы обычно задаёт учитель, причём не потому что не знает ответ, а потому что хочет выяснить, знает ли его ученик. Между тем умение задавать вопрос «по делу» пригодится в жизни всем.

Пример. Пройдена тема «квадратные уравнения». Учитель пишет на доске уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$ и говорит: «Придумайте вопрос к этому уравнению». Ученики начинают спрашивать: «При каких b уравнение имеет два корня? При каких b корни целые? При каких b есть корень $x = -1$?» И т. д. Отвечать на вопросы могут другие ученики или учитель.

Обычно задача жёстко задана: составитель разложил конфигурацию бильярдных шаров и ученику надо только грамотно ударить. А здесь ученик начинает сам видеть конфигурации: нет ли лишних данных, что ещё можно найти, и т. д.

Экспериментируем.

Математика — наука не только теоретическая, но и экспериментальная [2]. Но из обычного школьного курса этого не видно.

Хочется, чтобы ученик, встречая сложную задачу, к которой непонятно как подступиться, не пасовал, а начинал изучать частные случаи, пока за ними не выстроится закономерность.

Я убеждён, что правильный путь найти формулы для сумм типа $1+3+5+\ldots+(2n-1)$, $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3$ — это посчитать первые несколько сумм (для маленьких n), найти закономерность и доказать её.

В сложных задачах часто дано большое значение параметра, а надо решить сначала для маленького и угадать закономерность. Например, так легче всего найти сумму $-(-1-(-1-(-1-(-1-\ldots))))$, где 2007 или 2008 пар скобок.

В геометрии большой простор для экспериментирования даёт программа «Живая геометрия» [2]. С её помощью можно строить довольно сложные геометрические конструкции, изменять их и наблюдать различные свойства.

Угадать и доказать — в этом нет ничего зазорного. Настоящие математики так и работают [3].

Выдвигаем гипотезы.

Пример. Когда пройдена тема «Четырёхугольники», можно дать новую фигуру — дельтоид, т. е. четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB=BC$, $CD=DA$, и попросить детей найти его свойства и признаки по аналогии с параллелограммом и другими изученными фигурами. Затем можно исследовать равноугольные шестиугольники и равносторонние шестиугольники (тут здорово пригодится «Живая геометрия»). У равносторонних шестиугольников никаких интересных свойств нет! Детям трудно с этим смириться, но это тоже результат — и это важно понимать.

Правильные утверждения надо заслужить!

Задачи

Какие этапы нужно постепенно пройти на уроке от школьной задачи, в которой есть определенные данные и конкретный вопрос, к *исследовательской* задаче?

1 этап. Задача с определенными данными и несколькими вопросами по модели «найти» или «доказать».

Пример. Саша купил два карандаша, четыре тетради и четыре ручки и заплатил 32 рубля, а Дима купил четыре карандаша, две тетради и две ручки и заплатил 22 рубля.

а) Сколько заплатила Маша, если она купила карандаш, тетрадь и ручку?

б) Сколько стоит карандаш?

в) Сколько заплатил Витя, если он купил три тетради и три ручки?

2 этап. «Заготовка задачи».

Данные есть, и нужно поставить разумный вопрос, чтобы на него можно было найти ответ.

Пример. В 12.00 из деревни Шахматово вышел шахматист со скоростью 4 км/ч. В тот же момент по той же дороге навстречу ему из деревни Шашкино вышел шашист со скоростью 6 км/ч. Они встретились, поговорили 5 минут и пошли дальше. Каждый дошёл до другой деревни, пробыл там 15 минут и пошёл обратно. На обратном пути они снова встретились, но, не останавливаясь, пошли дальше каждый в свою деревню. Расстояние между деревнями 12 км. Задайте к этой задаче все вопросы, какие сможете, и найдите на них ответы.

Пример. В ромбе сторона равна a и одна из диагоналей тоже равна a. Задайте вопрос и решите задачу. (Найдите углы ромба, другую диагональ, высоту, площадь, радиус вписанной окружности и т. д.)

3 этап. Анализ данных.

Что можно найти, исходя из данных, а что нельзя?

Пример. В трапеции $ABCD$ известны основания $BC = a$, $AD = b$ и высота $BH = h$. Диагонали пересекаются в точке K. Какие из следующих величин можно найти, исходя из этих данных?

1) Сторону AB.
2) Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.
3) Диагональ AC.
4) Площадь треугольника AKD.

Ответ обязательно поясните: если величину можно найти, то найдите ее, если данных недостаточно, то приведите пример двух трапеций с данными основаниями и высотой, но имеющих разные другие величины.

4 этап. Работа с данными.

Что нужно задать, чтобы найти некоторую величину?

Пример. Задайте минимальное количество точек координатной плоскости, лежащих на параболе, чтобы можно было найти квадратичную функцию, графиком которой эта парабола является.

Пример. Дано кубическое уравнение: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Какие коэффициенты нужно знать, чтобы найти сумму квадратов корней уравнения?

5 этап. Создание учеником задачи с использованием уже разобранной задачи

(задача на ту же идею, обобщение задачи, усиление условия и т. д.).

Пример. Коля доказал, что в прямоугольнике биссектрисы противоположных углов параллельны друг другу; значит, четыре биссектрисы образуют параллелограмм. Верно ли его утверждение? Насколько оно интересно? Можете ли Вы его дополнить? Усилить?

Формы работы

1. На школьном материале

Вводим новый материал — Диалоги.

При введении нового материала полезно не давать всё готовым «под запись», а обсуждать какие-то кусочки материала с детьми, вместе нащупывая истину.

Пример. На уроке в 5 классе мы выяснили, что чтобы найти число, большее единицы, которое при делении на 2, на 3 и на 5 даёт в остатке 1, можно взять $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$. Олег спрашивает: «А если вместо 2, 3 и 5 взять другие числа?» Разбираемся, что такой способ всегда даёт остаток 1. Илья спрашивает: «А будет ли это самое маленькое число?» Находим пример с 2, 4, 6, когда способ даёт не самое маленькое. Дети задумываются: а когда же он даёт самое маленькое число? Произошёл серьёзный исследовательский диалог!

По мере того как дети овладевают типичными исследовательскими вопросами, учитель из транслятора готовых знаний превращается в руководителя семинара.

Пример. Научились решать квадратные уравнения и сводить к ним биквадратные. Какие ещё уравнения можно решить с помощью этой идеи?

Пример. При изучении арифметической прогрессии детям указали на свойство $a_{i+1} = \dfrac{a_i + a_{i+2}}{2}$. Они сами доказали его, сами нашли и доказали признак. Теперь при изучении геометрической прогрессии учителю достаточно дать определение — свойство и признак дети самостоятельно открыли и доказали по аналогии с арифметической.

Решаем — Открытые задачи

Почти во всех задачах просят «найди» (реши) или «докажи». А мы будем решать открытые задачи, в которых спрашивают: верно ли, что; существует ли; когда существует; уточните условие; обобщите; проверьте обратное утверждение [1, 4]. Открывается простор для методического творчества на том же самом учебном материале!

Примерный план «открытия» школьных задач приведён в предыдущем разделе.

При открытой постановке школьники учатся задавать правильные вопросы, уточнять задачу, выделять ведущий параметр (раньше это была наша прерогатива!).

По некоторым темам удаётся вообще все задачи «открыть». Так, в школе «Интеллектуал» используют подборки открытых задач на геометрию 7–8 классов, на делимость чисел и простые числа, на метод математической индукции [5].

2. На дополнительном материале

5–7 класс. Домашняя олимпиада.

Для учеников 5-7 класса можно проводить домашнюю олимпиаду [6, 7]. На неделю выдаётся 5 нестандартных задач, затем проверка, разбор и новые задачи (за год до 30 циклов). В известном смысле это олимпиада наоборот: можно думать долго, можно советоваться с кем хочешь, награждаются все. Последний пункт не входит в классическую схему П.В. Чулкова, а предложен автору М.А. Ройтбергом: назначается несколько планок (4–5), и ученик, добравшийся до очередной планки (неважно когда!) получает приз. Таким образом, даже слабые дети, работая в течение года, получают 1–2 приза. Очень важно, что дети учатся записывать нестандартные решения. Поскольку задачи разнообразны, имеют привлекательную формулировку, дети их очень любят.

Фронтальное обсуждение «минипроекта»

В 5–6 классе исследовательскую работу можно вести с сильными детьми прямо на уроке. Этим облегчается переход к индивидуальной работе, которая требует значительной самоорганизации. Мы выделяем для этого один урок в неделю. В статье [8] подробно описана технология решения исследовательских задач в группах в аудиторное время. Начинать стоит с «переходных» случаев между длинной задачей и маленьким проектом.

Пример. Решили на уроке задачу: на сколько частей можно разрезать блин тремя разрезами? Далее задаётся вопрос: а если разрезов четыре, пять, n? Про наименьшее количество частей дети догадываются довольно быстро, с наибольшим кто-то догадывается, кто-то нет. (Стоит упомянуть, что о промежуточных случаях современная наука знает не всё: например, могут ли 8 прямых делить плоскость на 23 части? [9])

Другие примеры фронтальных проектов для 5–7 классов:

1. **Полоска.** Двое играют на полоске из $n \times 1$ клеток бумаги. Каждый закрашивает одну или две идущие подряд клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Найти выигрышную стратегию. Обобщить для полосок $n \times m$, для кубиков в пространстве.

2. **Полезные числа.** Петя хочет узнать, простое число 2503 или составное. Для этого он делит его последовательно на натуральные числа 2, 3, 4, 5 и т. д. Если на какое-то число оно разделится нацело, значит, оно составное. а) Согласны ли вы, что необходимо делить *на все подряд* натуральные числа? б) На каком числе можно остановиться и признать 2503 простым? Обобщите для числа N.

3. **Нелегальный доход.** Можно ли выписать n чисел, чтобы сумма любых двух соседних была отрицательно, а сумма всех — положительна? Тот же вопрос для любых трёх соседних; любых k соседних чисел.

4. **Прямоугольники и диагонали.** На листе бумаги в клеточку обведите прямоугольник размером 3 на 5 клеток. Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Через сколько узлов (то есть вершин клеточек) проходит диагональ? Проделайте то же с прямоугольниками 3 на 6 клеток, 6 на 8 клеток. Какие закономерности видны? Как вы думаете, какой ответ будет для прямоугольника 199 на 991 клетку? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника — размером m на n клеток. Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

(См. комментарии к проектам 1, 4 в статье [8].)

Имеет смысл формулировать обобщение подходящей решённой задачи просто «в воздух». Во-первых, может быть, она кого-то зацепит. Во-вторых, дети на примерах учатся видеть продолжение по параметру, выстраивать цепочки задач.

Задачи попроще делаются на одном уроке и тут же (или дома) записываются. Задачи посложнее обсуждаются в классе один раз в неделю, а через 2–4 недели подытоживаются. Дети, которые думают медленно и от этого на уроках обычно страдают, тут оказываются в выигрышной ситуации. Важно требовать запись решения: ребёнок ещё раз всё продумывает, выстраивает логически, обосновывает. Обычно мы не получаем полного решения от всех, каждый обобщает до своего уровня. Но здесь это не страшно, в отличие от работы с программным материалом.

После того как несколько циклов пройдено, можно дать ученикам несколько задач на выбор и пусть каждый решает свою. По нашему опыту, одному учителю удаётся работать с 6–8 заинтересованными школьниками разом на этапе *решения* задачи. Когда же дело доходит до оформления результатов и подготовки доклада [8], стоит каждому ребёнку или группе назначить своего консультанта, который посмотрит свежим взглядом на его решение, выловит ошибки, «дожмёт» с подготовкой доклада к нужному сроку. Тут ресурса одного человека на всех не хватает, тем более что обычно дети больше любят решать, чем оформлять.

Важно, чтобы обстановка на конференции была праздничной и делать доклад было престижно. Дети, успешно прошедшие такие мероприятия в 5–7 классе, затем при желании легко включатся в решение более сложных исследовательских задач — уже в индивидуальном порядке, размышляя дома и консультируясь у учителя [10].

Многочисленные примеры задач и подробности можно найти в статьях [1, 8, 10].

В Московском центре непрерывного математического образования начал работать семинар, посвящённый исследовательским задачам по математике для школьников. См. подробности на сайте www.mccme.ru/problems/uir0.htm.

Вопросы можно задать по адресу sgibnev@mccme.ru.

Благодарю Д.Э. Шноля за идеи и помощь в подготовке статьи.

Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант 06-06-00427а).

Литература

[1] Сгибнев А.И. *Исследуем на уроке и на проекте.* / Сборник «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2006. С. 59-71.

[2] Сгибнев А.И. *Экспериментальная математика.* / «Математика». Изд. дом «1 сентября»: 2007. №3. С. 2–8.

[3] Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* — М.: Изд-во Иностр. Лит. — 1957. (G. Polya. *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton, New Jersey, 1954.)

[4] Сгибнев А.И. *Как задавать вопросы*? / «Математика». Изд. дом «1 сентября»: 2007. №12. С. 30–41.

[5] http://int-sch.ru/cgi-bin/zs.cgi?p=content/math

[6] Чулков П.В. *Школьные олимпиады. 5–6 класс.* НЦ ЭНАС, 2004.

[7] Чулков П.В. *Нестандартные задачи и обучение математике.* / Сборник «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2006. С. 11–14.

[8] Ройтберг М.А. *О математических проектах в Красноярской Летней Школе.* / «Математика». Изд. дом «1 сентября»: 2008. №13. С. 25–38.

[9] Арнольд В.И. *На сколько частей делят плоскость n прямых*? / Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 12. М., МЦНМО. 2008. С. 95–104.

[10] Сгибнев А.И., Шноль Д.Э. *Исследовательские задачи при обучении математике в школе « Интеллектуал».* / «Математика». Изд. дом «1 сентября»: 2007. №12. С. 17–22.

Точки разрыва в математическом образовании

К.В. Козеренко

учитель математики лицея «Вторая школа»

Точки разрыва в математическом образовании сильно снижают его уровень и качество. Математическое образование должно быть непрерывным.

С некоторыми разрывами справиться легко, например, просто указав на них. Есть разрывы более серьезные. Известно, какое огромное влияние на развитие математики оказало открытие геометрии Лобачевского. Такую же роль эта геометрия играет, по-моему, и в образовании. Но, конечно, трудно предположить, что даже представление о том, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной, стало бы общедоступным.

Наконец, имеются и неустранимые разрывы. Школьная математика в старших классах уже давно стала, в основном, конкурсной математикой. Мы учим детей решать вычурные, никому не нужные и при этом очень сложные задачи. И с этой ситуацией, пожалуй, ничего не поделаешь.

Перейдем теперь к конкретным примерам.

1. Самой серьезной, на мой взгляд, точкой разрыва в нашем математическом образовании является убеждение в том, что нельзя, и поэтому не надо, строить строгий логический курс геометрии в школе. Обосновывается такой подход следующими доводами. Во-первых, начинать с аксиом и теорем вроде того, что две медианы в треугольнике пересекаются, трудно и семиклассникам не под силу. Во-вторых, все равно без логических пробелов не обойдется. Так зачем же зря стараться? В-третьих, «завязнув» на доказательстве очевидных фактов можно отбить всякую охоту у детей изучать геометрию.

Когда я всё это слышу, невольно возникает вопрос: «А зачем тогда геометрия включена в школьную программу?» Казалось бы, ясно. Геометрия, прежде всего, воспитывает уважение к доказательству, ибо доказательство есть единственный способ установления истины. Геометрия доставляет пример научной теории. В геометрии также вводятся и фундаментальные понятия (прямая, плоскость, треугольник, движение, подобие, вектор и т. д.). Ну, и, наконец, геометрия, безусловно, является неиссякаемым источником интересных задач.

По всей видимости, именно последнее соображение является для многих смыслом и целью изучения геометрии. Научить решать задачи! И всё! Причем задача считается решенной, если так считает учитель, жюри олимпиады или конкурсная комиссия, которые договорились соответствующие рассуждения считать решением. А раз так, то не нужны аксиомы, вместо доказательств теорем подойдут описания экспериментов (наложим один треугольник на другой, перегнем лист (!) бумаги, повернем фигуру и т. д.), вместо определений сгодятся наглядные образы (хотя определения без наглядных образов — это другая крайность), вместо логических цепочек... Они вообще не нужны. Конечно, если есть доказательство, то его, разумеется, очень важно сопроводить экспериментом. Геометрия, как и физика, наука экспериментальная. Но нельзя путать эксперимент и доказательство.

Вообще, при таком подходе подспудно прививается одна страшная, на мой взгляд, вещь: то, что видно очами, не нуждается в доказательстве. Кстати, именно поэтому, наверное, даже крупнейшие математики XIX века не признавали геометрию Лобачевского, и сейчас мы не можем объяснить, почему через точку, не лежащую на прямой, может проходить более одной прямой, параллельной данной.

Теперь я должен ответить на возражения, с которых я начал. Можно ли построить строгий курс геометрии? Имея в своем распоряжении учебник А.В. Погорелова, можно!

Трудно ли это? Не так трудно, как кажется. Ну, и, наконец, что касается логических пробелов, то просто надо стремиться к тому, чтобы их было поменьше. Сама по себе эта деятельность мне кажется очень полезной. Впрочем, как и во всем, и здесь уместно «чувство меры и сообразности».

2. *Эквивалентность геометрического и векторного языков.*

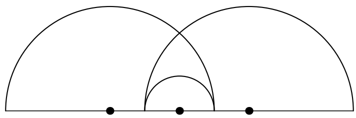
Это означает, что теория двумерного векторного пространства со скалярным произведением и школьный курс планиметрии говорят об одном и том же, только на разных языках. Для установления этой эквивалентности нужно, исходя из аксиом планиметрии, проверить выполнение аксиом векторного пространства, и наоборот, исходя из аксиом векторного пространства, доказать теоремы, которые в планиметрии играют роль аксиом.

3. *Ортогональные преобразования являются движениями.*

В некоторых курсах алгебры об этом сказано. В школе часто забывают объяснить, что движение (и, кстати, подобие тоже) являются преобразованиями плоскости, и тогда, естественно, в ортогональном преобразовании невозможно узнать старого доброго знакомого, которого только переименовали и ввели по-другому.

4. Школьники не знают, что они не знают, что такое 0, -1, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$. Может быть, строгих определений здесь давать и не надо, но отметить их отсутствие необходимо.

5. *Аксиомы играют роль определений.* Еще в 1882 году А. Пуанкаре нарисовал такую картинку, где в верхней полуплоскости изображены полуокружности, центры которых лежат на одной прямой. Если бы эти полуокружности можно было бы считать прямыми, то эта картинка иллюстрировала бы отрицание постулата о параллельных.



Так можно ли считать полуокружности прямыми? Это вопрос, боюсь, поставит в тупик не только школьника, но и ... (не буду гадать, кого еще). Мы учим так, что, сталкиваясь с подобными вопросами, наши ученики испытывают те же психологические трудности, что и современники этих открытий.

6. *Мотивировки.* Математическое образование должно строго придерживаться принципа «снежного кома». Перед тем как вводить новое понятие или начинать новый курс, нужно обязательно объяснять (хотя бы «на пальцах»), ради чего это делается. Спросите любого школьника, зачем нужны логарифмы или тригонометрические уравнения, и вы поймете, что я имею в виду. И, конечно, объяснения должны соответствовать уровню математической культуры слушателя. Это и есть принцип «снежного кома».

7. *Идиотизм формулировок большинства задач.* Здесь я не буду даже приводить примеры, их полно в большинстве задачников. Значительно труднее привести пример осмысленной задачи. Именно из-за этого, наверное, некоторые считают, что математика это игра вроде шахмат. А то, что математика это прожектор, который высвечивает значительную часть картины мира, многие даже не подозревают.

8. *Неявные блокировки.* Самой яркой блокировкой является «убеждение» об абсолютности прямого угла. Никто этого явно не утверждает,

но почти все считают это само собой разумеющимся. Однако, скалярных произведений много, и, следовательно, прямой угол относителен. Если для одного скалярного произведения некоторый угол имеет градусную меру 1°, то для другого скалярного произведения этот же угол может быть равен 90°.

Точно так же, с точки зрения одного скалярного произведения, фигура может являться окружностью, а для другого скалярного произведения это эллипс.

Близко к только что сказанному стоит такой вопрос. Нарисуем на резиновом листочке какой-нибудь чертеж, скажем, треугольник и вписанную в него окружность. А потом растянем листочек. Так вот то, что получилось в результате растяжения, является треугольником и окружностью? Таким способом фиксируется очень важный момент: картинки могут быть различными.

9. *Ничья земля.* Откуда берутся задачи? Сколько и каких надо решить задач, чтобы считать, что курс освоен? Боюсь, наши ученики даже не думают об этом, хотя, казалось бы, здесь, как в походе, они должны постоянно спрашивать, а долго ли осталось идти.

Образование похоже на освоение земель. Каждый чертит свою карту новой для него земли. И, когда основные реки, горы и равнины нанесены на карту (то есть, когда не осталось проблем), то можно начинать осваивать другую территорию.

Ничья земля — это разделы математики вроде проективной геометрии, геометрии Лобачевского, теории нефакториальных колец и т. д., на изучение которых не хватает времени, ни в школе, ни в вузе, но без освоения которых нельзя представить себе полноценного математического образования.

Возможно, единственный способ устранения этой точки разрыва — это исследовательские работы школьников и студентов. В результате будут ликвидированы не только «белые пятна» в образовании, но и, может быть, самое главное, будет выработан навык освоения новой земли, то есть искусство задавать вопросы.

Из опыта учебно-исследовательской деятельности учащихся в лицее 1511 при МИФИ

А.В. Иванищук

учитель математики лицея №1511

Исследовательской деятельностью в нашем лицее занимаются уже давно. Толчком к ней послужила проходящая на базе МИФИ конференция школьников «Юниор-Интел», которая проходит в январе-феврале, и на которой представлены кроме математики и другие естественно-научные секции. В сентябре школьникам предлагается к исследованию некоторый набор тем. Деятельность не носит обязательного массового характера. Некоторые исследования не доходят до конца, некоторые не выходят на уровень городских и Российских конференций и остаются для лицейской конференции, которая проходит в апреле, иногда исследования продолжаются и на следующий год.

У каждой темы есть свой руководитель из числа учителей лицея, преподавателей МИФИ и других ВУЗов, выпускников-студентов и аспирантов. Задачи, в основном, ставят руководители, так как школьники еще не обладают достаточными знаниями. Это наиболее трудная часть — выбрать тему не только достаточно интересную, но и доступную для продвижения школьников. Сами задачи могут быть не новыми, но и не самыми известными.

Одна из задач пришла мне в голову, когда мы изучали композицию функций. А не может ли «вырождаться» в тождественный ноль (или другую константу) композиции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ не тождественно нулевых функций, заданных на R? Вопрос был задан на уроке для домашнего обдумывания и принес некоторые плоды в виде примеров. Например, $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$ (целая и дробная части). Или $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 1], \\ 4\pi, & x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{cases}$ Стало понятно, что образовалась неплохая задача для исследования. Не для каждой функции $f(x)$ можно подобрать функцию $g(x)$ с требуемым условием (например, для $f(x) = x^2$). Возникает вопрос об условиях для $f(x)$. Были получены необходимые и достаточные условия. Они такие: 1) $f(0) = 0$; 2) $E_f \neq R$; 3) $\exists x_0 \neq 0\colon f(x_0) = 0$. Дальнейшие вопросы поставили сами школьники: существуют ли функции $f(x)$, для которых «вырождается» в тождественный ноль n-кратная композиция этой функции с собой, в то время как $(n-1)$-кратная композиция не тождественно нулевая; существуют ли функции, для которых предельная композиция с собой дает тождественный ноль.

Задача для другого исследования пришла совершенно неожиданно. В то время моя дочь Галина изучала в школе отрицательные числа. Я решил для проверки ее знаний дать простую (как мне тогда казалось) задачу.

«Представь число 1 в виде произведения нескольких множителей, сумма которых была бы равна нулю». Дочь быстро назвала мне множители: 1, 1, −1, −1. «Хорошо! — похвалил я. — А число 2?» Ответ последовал быстро: «2, −1, −1». «А число 3?» Дочь задумалась надолго. Потом сказала: «Я знаю ответ для числа 4 — это 2, −2, 1, −1 и для числа 6 — это 3, −2 и −1. И вообще, мне пора делать уроки!»

Тут уже надолго задумался я сам. Разложение числа 3 пришло через часок и содержало 8 множителей! Я понимал, что это уж слишком много, и, действительно, более короткое представление содержало 5 множителей: $3 = (-0,5) \cdot (-1,5) \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$. Меньше множителей получить не удавалось. Конечно, речь идет о рациональных множителях. Если не требовать рациональности, то для любого натурального числа n существуют три числа, произведение которых равно n, а сумма равна нулю. Итак, задача была окончательно сформулирована: «Представить натуральное число n в виде произведения наименьшего количества рациональных множителей, сумма которых равна нулю».

Некоторое время эта задача не давала мне покоя. Я находил разложения для отдельных натуральных чисел, но никакой общей закономерности не проступало. Другие дела постепенно оттеснили задачу. Но однажды я рассказал об этой задаче на кружке и один из учеников — Неваленный Александр (ныне студент МИФИ) загорелся ею. Мы вместе продолжили исследование. Прежде всего хотелось бы выяснить какие числа представимы в виде произведения трех множителей и если есть одно представление, то сколько существует еще. Число 1 представимо в виде четырех множителей, но нет ли представления в виде трех? Доказательство непредставимости в виде трех множителей было получено и оно опиралось на большую теорему Ферма для третьей степени! Это означало и непредставимость всех кубов натуральных чисел в виде трех множителей. Большую помощь нам оказала популярная книга

"Острик В., Цфасман М. «Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые». Москва, МЦНМО, 2001." Для случая трех множителей получалась кривая третьего порядка на плоскости — неособая кубика, про которые было много известно. Мы доказали, что разложение для числа $2 = 1 \cdot (-2) \cdot 1$ единственно, а для всех других чисел, допускающих разложение на три множителя, существует бесконечное количество разложений (помогла теорема Морделла). Нами был получено условие на вид чисел, допускающих разложение на три множителя.

И все-таки вопрос о минимальном количестве множителей, достаточном для разложения произвольного натурального числа, оставался открытым. Мы написали письмо одному из авторов упомянутой книги, — Михаилу Анатольевичу Цфасману о задаче и наших результатах. Задача ему показалась интересной, ранее о ней он не слышал. Завязалась оживленная переписка. Для всех чисел первой сотни была сделана классификация: либо было дано представление в виде трех множителей, либо была доказана невозможность такого представления. Александру Неваленному удалось найти «каноническое» представление любого натурального числа n в виде произведения пяти множителей $n = (-n) \cdot \left(\frac{2}{n}\right) \cdot \left(-\frac{2}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)$. Оставался вопрос: а существуют ли числа, для которых четырех множителей недостаточно? Долгое время мы пытались доказать это для числа 3, пока Михаил Анатольевич не нашел разложения. Привожу его электронное послание полностью:

«$3 = \left(\frac{363}{70}\right) \cdot \left(\frac{20}{77}\right) \cdot \left(-\frac{49}{110}\right) \cdot (-5)$. Уф... Ваш М.А.»

Разложение действительно потрясает! Родилась гипотеза, что для любого натурального числа n достаточно четырех множителей. К данному моменту эта гипотеза не доказана и не опровергнута и ждет своих исследователей. На семинаре учителей математики в Коблево в 2008 году, услышав это сообщение, В.М. Гуровиц применил возможности «железного друга» и получил разложение в виде четырех множителей для чисел первой сотни. Привожу их для первых 50 в надежде, что это может натолкнуть на какое-либо доказательство.

$1 = \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right)$; $2 = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{-4}{1}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right)$;
$3 = \left(\frac{13}{45}\right) + \left(\frac{45}{11}\right) + \left(\frac{-11}{16}\right) + \left(\frac{-48}{13}\right)$; $4 = \left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-2}{1}\right)$;
$5 = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{-4}{1}\right) + \left(\frac{-5}{6}\right)$; $6 = \left(\frac{8}{1}\right) + \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{-4}{3}\right) + \left(\frac{-27}{4}\right)$;
$7 = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-7}{2}\right)$; $8 = \left(\frac{2}{15}\right) + \left(\frac{20}{3}\right) + \left(\frac{-9}{5}\right) + \left(\frac{-5}{1}\right)$;

$9 = \left(\frac{3}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-3}{1}\right)$; $10 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-2}{1}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right)$;
$11 = \left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-4}{3}\right) + \left(\frac{-11}{3}\right)$; $12 = \left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-3}{1}\right)$;
$13 = \left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{25}{4}\right) + \left(\frac{-16}{5}\right) + \left(\frac{-13}{4}\right)$; $14 = \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{32}{3}\right) + \left(\frac{-9}{1}\right) + \left(\frac{-7}{4}\right)$;
$15 = \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-5}{1}\right)$; $16 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-4}{1}\right)$;
$17 = \left(\frac{1}{12}\right) + \left(\frac{32}{3}\right) + \left(\frac{-9}{4}\right) + \left(\frac{-17}{2}\right)$; $18 = \left(\frac{46}{55}\right) + \left(\frac{55}{4}\right) + \left(\frac{-4}{37}\right) + \left(\frac{-333}{23}\right)$;
$19 = \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{10}{1}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right) + \left(\frac{-38}{5}\right)$; $20 = \left(\frac{6}{1}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{-3}{1}\right) + \left(\frac{-10}{3}\right)$;
$21 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-7}{2}\right)$; $22 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-11}{2}\right)$;
$23 = \left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{-5}{3}\right) + \left(\frac{-92}{15}\right)$; $24 = \left(\frac{3}{1}\right) + \left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-4}{1}\right)$;
$25 = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{9}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-25}{3}\right)$; $26 = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{9}{1}\right) + \left(\frac{-8}{3}\right) + \left(\frac{-13}{2}\right)$;
$27 = \left(\frac{6}{1}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-2}{1}\right) + \left(\frac{-9}{2}\right)$; $28 = \left(\frac{5}{1}\right) + \left(\frac{7}{10}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right) + \left(\frac{-16}{5}\right)$;
$29 = \left(\frac{9}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-29}{3}\right)$; $30 = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{8}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-15}{2}\right)$;
$31 = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{9}{1}\right) + \left(\frac{-4}{1}\right) + \left(\frac{-31}{6}\right)$; $32 = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{12}{1}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-32}{3}\right)$;
$33 = \left(\frac{5}{1}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{-5}{2}\right) + \left(\frac{-33}{10}\right)$; $34 = \left(\frac{8}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-17}{2}\right)$;
$35 = \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{18}{1}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right) + \left(\frac{-35}{2}\right)$; $36 = \left(\frac{6}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-6}{1}\right)$;
$37 = \left(\frac{1}{14}\right) + \left(\frac{14}{1}\right) + \left(\frac{-7}{2}\right) + \left(\frac{-74}{7}\right)$; $38 = \left(\frac{45}{2}\right) + \left(\frac{1}{30}\right) + \left(\frac{-20}{1}\right) + \left(\frac{-38}{15}\right)$;
$39 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{3}{1}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-13}{2}\right)$; $40 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-5}{1}\right)$;
$41 = \left(\frac{6}{1}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right) + \left(\frac{-41}{6}\right)$; $42 = \left(\frac{4}{1}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{-2}{1}\right) + \left(\frac{-7}{2}\right)$;
$43 = \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{25}{2}\right) + \left(\frac{-4}{1}\right) + \left(\frac{-43}{5}\right)$; $44 = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{9}{1}\right) + \left(\frac{-2}{1}\right) + \left(\frac{-22}{3}\right)$;
$45 = \left(\frac{3}{1}\right) + \left(\frac{3}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-5}{1}\right)$; $46 = \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{25}{2}\right) + \left(\frac{-8}{1}\right) + \left(\frac{-23}{5}\right)$;
$47 = \left(\frac{9}{1}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{-16}{3}\right) + \left(\frac{-47}{12}\right)$; $48 = \left(\frac{45}{2}\right) + \left(\frac{1}{30}\right) + \left(\frac{-10}{3}\right) + \left(\frac{-96}{5}\right)$;
$49 = \left(\frac{7}{1}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{-7}{1}\right)$; $50 = \left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-20}{3}\right)$.

Мне кажется, что учебно-исследовательская деятельность должна быть продолжением учебной работы, не выходящей далеко за рамки школьной программы. Элементарная геометрия, несложная теория чисел дают возможность это сделать. Заинтересовать школьника можно только передав ему часть своей заинтересованности. В какой-то степени я являюсь «любителем», а не «профессионалом» в этом деле.

Научно-исследовательская (учебно-исследовательская) работа школьников по математике — попытка обзора

А.В. Хачатурян

учитель математики гимназии №1543

Учебно-исследовательская работа школьников в области математики (иногда в отношении неё употребляют более внушительное словосочетание "научно-исследовательская работа") последнее время становится довольно распространённой формой внеклассной работы с одарёнными учащимися. Ею занимаются во многих школах, лицеях, гимназиях. Для её поддержки проводятся многочисленные конференции учащихся, от внутришкольных до международных. Я попытаюсь изложить свой взгляд на это явление, отталкиваясь, в основном, от (в значительной мере негативного) опыта такой работы в московской гимназии №1543, где преподаю более 15-ти лет.

Нужно для начала заметить, что подобная работа со школьниками ведётся далеко не только и не столько по математике. Лидерство тут держат экология, биология, социология и другие дисциплины, в которых большую роль играет накопление фактов и их научная обработка, полевая работа, которую с интересом и пользой для дела проводят заинтересованные школьники. Так, в нашей гимназии №1543, в которой есть несколько профильных классов разного направления, наиболее интересные и содержательные работы делают именно биологи. Работы по физике, как правило, состоят в экспериментальном наблюдении какого-либо явления ("хорошо известного в узких кругах") и теоретическом его описании. Работы по литературе так или иначе сводятся к анализу текста или сравнению текстов и представляют собой по сути сильные и глубокие школьные сочинения. Работы по математике также не претендуют на научную новизну и значительность. Об исследовательских работах школьников по математике скажем несколько подробнее.

Готовясь к этому выступлению, я попытался найти материалы об исследовательской работе школьников по математике на просторах Интернета и был поражён их скудностью. По запросу "Исследовательская работа школьников по математике" Яндекс выдал более ста осмысленных ссылок, но почти все они были ссылками на методические статьи о том, как вести эту работу, материалы педконференций на ту же тему, курсовые désinститутов и прочее. Собственно, сообщений о самих работах, примеров работ было совсем немного, единицы. Обнаружился материал М.А. Ройтберга (Пущино, Московская обл.) о математических проектах в Красноярской летней школе, материал В. А. Морозова (Полысаево, Кемеровская обл.) об опыте организации исследовательской деятельности учащихся по математике и информатике, статьи А.В. Хуторского (Москва) и А.Б. Скопенкова (Москва)и ... пожалуй, всё. Складывается странная ситуация: методисты повсеместно учат вести исследовательскую работу со школьниками, а работа по сути нигде не ведётся.

Поразмышляв об этом, я попытался представить себе возможные типы исследовательских заданий по математике для школьников и формы работ над ними. Получилась такая классификация.

Тип №1 — Эврика.

Реальное достижение школьника в проблеме, поставленной не им и не для него, в важной (хотя бы в узком смысле) задаче, до того не поддававшейся математикам.

Встречается чрезвычайно редко, является результатом исключительного стечения обстоятельств. Такие работы, как правило, — построение изысканного контрпримера или работы в стиле "New simple proof". Работы такого типа могут выполнять только чрезвычайно одарённые и образованные школьники под руководством квалифицированного математика. Нечто подобное иногда удаётся участникам летней конференции Турнира городов. В любом случае, ни о каком массовом участии школьников в такой работе не может быть и речи.

Тип №2 — Уши научрука.

Школьник получает разумную проблему, поставленную его научным руководителем или кругом его научных интересов и решённую им (или во всяком случае такую, для которой известно (понятно), что таким-то методом она решается).

Научный руководитель строит для школьника "лесенку" задач, школьник более или менее успешно по ней движется, а научрук при необходимости ему помогает, создавая у ученика иллюзию, что он сам всё доказал. Это под силам хорошему математику в школе с сильными учениками, как например у нас в гимназии вёл такую работу

А.А. Заславский с М. Музафаровым, Д. Косовым, Ф. Ивлевым. Таковы многие работы в рамках конференции Турнира городов и других проектах такого уровня. Опять же, определённая элитарность налицо.

Тип №3 — Безнадёга.

Школьник и научный руководитель берутся за задачу, про которую (обоим) известно, что она трудна, не поддалась другим. Или же у руководителя есть обоснованное подозрение в бесперспективности проблемы в общем случае.

Они рассчитывают получить какое-то продвижение, разобрать частные случаи, написать программу, которая что-то считает и пр. Такая работа негативна духом обречённости, висящим над ней. Полученная работа будет носить характер незаконченности. Иногда в такую работу превращается работа над задачей, поначалу казавшейся руководителю нетрудной (переход второго типа в третий).

Тип №4 — Ничья земля.

(*Удачное название заимствовано у К.Е. Козеренко.*) *Школьник под руководством учителя "распахивает" область, не относящуюся к программе, даже спецкурса.*

Большая часть работы связана с освоением темы. Далее внутри темы решаются простые задачи или в неё переносятся известные понятия, ищутся их "зазеркальные" аналоги. Это могут быть неевклидовы геометрии, какие-либо оригинальные числовые множества и пр. Весьма полезная и серьёзная работа, редко при этом претендующая на научность.

Тип №5 — Велосипед.

Школьник получает интересную, но хорошо известную в узких кругах задачу, его научный руководитель знает её решение, оно доступно в источниках, но он пользуется неосведомлённостью школьника и создаёт у него иллюзию, что он открывает что-то новое в математике.

Очень распространённый тип, особенно в работе с младшеклассниками. Если школьник в ходе работы выясняет, что изобретает велосипед, его утешают учебным характером работы.

Тип №6 — Откровенный велосипед.

Отличается от предыдущего тем, что школьник изначально знает, что его задача известна, но его просят работать самостоятельно, "не подглядывая в ответ".

Тоже распространённый тип, чем-то даже лучше предыдущего, потому что честнее по отношению к школьнику. Но, естественно, вызывает меньше энтузиазма.

Тип №7 — Неуловимый Джо.

Школьник получает задачу, которая является новой, но, подобно неуловимому Джо из известного анекдота, которого не поймали, потому что "да кому он нужен?" не решена в силу неестественности постановки, высосанности вопроса из пальца.

С такими работами приходилось сталкиваться. Они близки к решениям олимпиадных задач, иногда служат их развитием. Часто сторонники таких задач готовы с пеной у рта доказывать важность той или иной задачи. Заниматься такими задачами бывает интересно, но после докладывания решения такой головоломки на конференции непременно кто-то из зала интересуется, где применяется прозвучавший выдающийся результат. Докладчику приходится пожимать плечами и говорить о значении чистого искусства.

Тип №8 — Реферат.

Школьник изучает математический текст или несколько текстов на общую тему, написанный не им, понимает, сравнивает, классифицирует, излагает содержание.

Очень распространённая форма работы, удобная тем, что гарантированно "диссертабельна", доводится до хорошего доклада, качество которого прямо пропорционально вложенным усилиям как ученика, так и учителя. В кабинете математики иной школы как правило стоит за стеклом книжного шкафа подобная работа на тему типа "Десять доказательств теоремы Пифагора". Такие работы — от очень неплохих до совершенно убогих по содержанию — можно слышать на конференциях учащихся. Они полезны, развивают многие учебные умения. Но основной недостаток ясен — это что угодно, только не научная работа по математике.

Тип №9 — Работа не по математике.

Это работы по программированию на математические темы, изготовление каких-то иллюстраций, моделей и пр.

Комментарии вряд ли нужны. Тип этот я указываю только потому, что подобные работы часто звучат именно на математических секциях, то есть позиционируются именно как работы по математике, хотя таковыми не являются.

О типе 1 в связи с организацией исследовательской работы со школьниками говорить бесмысленно. Тип 2 интересен в первую очередь руководителю и важен как площадка его общения с детьми. Несколько отталкивает определённая нечестность (руководитель не работает вместе, а знает и подсказывает). Реально работающий математик-руководитель, да ещё и обладающий педагогическим даром, может многих погрузить в такие темы. Не могу сформулировать своего отношения к такой работе. Поскольку для меня не важно, сам ли научрук поставил и решил задачу или просто разобрался в ней, это становится близко к типу 5. Просто 2 обычно касается задач, относительная новизна которых гарантируется авторитетом руководителя. Моя коллега, Е. А. Чернышева в связи с работами типа 2, остроумно заметила, что, похоже, некоторые посильные для школьников задачи уже много лет им предлагают, а полученные школьниками продвижения нигде не публикуют, чтобы новые и новые поколения школьников получали "ещё никем не решённую задачу"! Тип №3 привлекает как отважный поступок. Хочется браться за то, что не смогли предшественники. Если не бояться частичных результатов и потратить много труда, работа может принести удовлетворение и радость. Тип №4, как и 2, скорее форма работы на кружке. Эта работа может продолжаться долго и в единичных случаях приносить серьёзные результаты. Лучше её вести в группе, чтобы докладчика хоть кто-то понимал. 5 и 6 мало отличаются просто от решения задач и приемлемы для начинающих. Можно, конечно, решить сложную задачу из олимпиадного сборника и выдать за научную работу (аналог — хорошее сочинение на секции литературы). Тип №7, если уговорить себя, что все задачи хороши, вполне вариант. Можно ставить разные вопросы, менять параметры, обобщать задание. Тип №8 может быть элементом работы кружка (семинара) (хотя с тех пор как Шклярский эту систему заменил листочками, считается, что она неэффективна), но это в любом случае не исследовательская работа. Работы типа 9 могут быть достойными, серьёзными и важными, но это тоже не исследования по математике.

Об организации ведения такой работы мне трудно говорить — опыта явно недостаточно. То, как это организовано у нас, пожалуй, образцом для подражания служить не может. Остерегу лишь на нашем опыте от некоторых ошибок. Работа начинается с началом учебного года, в апреле происходит гимназическая конференция. Это не лучший вариант — между началом и концом работы большой промежуток, трудно работать планомерно, сиюминутные дела отнимают время. В результате получается, что работа начинается осенью, а потом почти прекращается и спешно доделывается непосредственно перед конференцией. Представляется разумным (так делают, например в московской школе "Интеллектуал") проводить ещё и предварительную конференцию зимой, на которой отбирать доклады, смотреть, что вышло, а что нет, и пр. У нас есть возможность оплачивать работу научных руководителей, под это выделены часы. Это, конечно, прекрасно, но есть и минусы: этот подход оставляет лазейку для учителя, которого интересует такая работа как приработок, может повести его по пути наименьшего сопротивления (например, по пути создания реферативных работ). Кроме того, схема финансирования неизбежно приводит к необходимости планирования работы и результатов заранее, а это тоже толкает к работам типа №№5 – 6 или 8 – 9. По всей видимости, всё же исследовательская работа должна приносить всем участникам удовлетворение и почёт, но не более. Организация должна быть такой, что от работы, которая "не пошла", можно было бы отказаться (например, по результатам предварительной конференции).

Важным представляется и вопрос подачи результата. Хорошая работа по математике — цепочка формулировок теорем и их доказательств. Но работа и доклад — вещи разные. Неоднократно приходилось видеть докладчика, который просто писал на доске все доказательства, не обращая внимание на то, что слушатели уже давно ничего не понимают. Если же школьника попросить доказательства не рассказывать, то зачастую ему и сказать-то нечего. Считаю, что совершенно необходимо готовить презентацию работы, возможно создавать картинки, чертежи, анимацию. Внимательно продумать, как дать идею доказательства, опустив технические детали. Допустим, вместо общего рассуждения разобрать пример, и т. д. Думается, что иногда на создание такой презентации может уйти не меньше времени, чем на само получение результата.

В заключение хотел бы повторить, что ведение исследовательской работы со школьниками по математике — дело очень сложное, поскольку то, что делает современная математика, очень удалено и от школы, и от школьного учителя. Математики-энтузиасты могут заниматься с выдающимися школьниками (таковых в каждой параллели примерно один на миллионный город) серьёзными задачами, и это прекрасно. А что же остаётся учителю-энтузиасту и его ученикам в массовой математической школе? Хоть это и трудно, но подбирать интересные задачи, не так уж сильно заботясь об их новизне и научной ценности. С малышами и новичками "изобретать велосипед", понимая, что на этой форме они учатся исследовательской деятельности, с ребятами постарше пахать "ничью землю" (и лучше пусть пашет колхоз, чем фермер-одиночка), бесстрашно браться за "безнадёгу" или же, не боясь насмешек, ловить "неуловимого Джо".

Из опыта работы с мотивированными детьми в 5–6 классах

М.В. Харина

учитель математики школы №853

Школа №853 — общеобразовательная, но вот уже в течение ряда лет из детей, проявляющих повышенный интерес к математике, в ней формируются математические классы. Перед учителем, работающим в таких классах, стоит задача — постоянно поддерживать и развивать интерес детей к своему предмету. В учащихся необходимо пробуждать их творческую активность, удивлять и заинтересовывать своим предметом. Решение таких задач нужно искать в разных плоскостях.

1. Работа на уроке.

Важную роль в работе на уроке играет подбор учебников. В 5–6 классах я отдаю предпочтение учебникам математики Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон. В этих учебниках привлекает большой объем материала, интересные тексты заданий (задачи о старухе Шапокляк, о коте Матроскине и др.), большое количество разнообразных задач на смекалку. Кроме того, считаю полезным в таких классах знакомство с понятием множеств и операциями с ними. Дети с большим интересом знакомятся с темой «Логика» (высказывания, отрицание высказываний, кванторы). Конечно, эффективная работа по этим учебникам возможна только при наличии достаточного (не меньше 6) количества часов по математике в неделю.

Обучение веду в быстром темпе, учу приемам быстрого счета. Включаю элементы игры на уроке. Стараюсь так строить уроки, чтобы новый материал являлся собственным открытием для учащихся. Постоянно подталкиваю к творческой деятельности на уроке (составить текст задачи, решить задачу несколькими способами и т. д.) и дома (задаче на разрезание, рисование паркетов). Дети готовят доклады по темам «Старинные меры веса, длины, площади», «Число π», «Золотое сечение». Один урок в неделю — это урок творческой математики «Смекалочка». Для этого урока используются отдельные тетради, в которых решаются задачи на смекалку. Тексты заданий к каждому уроку раздаются заранее на листочках, и дети сначала пытаются решить их дома.

2. Факультативы.

В рамках факультативного курса (1 час в неделю) с учащимися решаем олимпиадные задачи и разбираем дополнительные главы математики, такие как четность, делимость, принцип Дирихле, графы, комбинаторика.

3. Школьные мероприятия.

Ученики принимают активное участие в школьных турах олимпиады по математике, интеллектуального марафона, в неделе математики, в различных викторинах и конкурсах.

Провели несколько «Брейн-рингов», конкурс «Собери кубик Рубика».

4. Окружные мероприятия.

Ежегодно учащиеся нашей школы участвуют и занимают призовые места в окружных турах олимпиады по математике и в интеллектуальном марафоне.

5. Городские мероприятия.

Большую активность проявляют учащиеся 5–6 классов, участвуя в Ломоносовском турнире (проводится ежегодно в школе №853), устной олимпиаде по математике, заочной математической олимпиаде, Математическом празднике в МГУ, Весеннем турнире Архимеда, в международном математическом конкурсе «Кенгуру».

6. Летний математический лагерь.

Хорошо отдохнули и позанимались математикой в летнем математическом лагере на Черном море наши ученики в прошлом году. Возможно, это станет еще одной хорошей традицией и стимулом к изучению этого предмета.

Считаю, что успехи, которых достигают наши ученики на различных олимпиадах и конкурсах — это показатель их увлеченности и заинтересованности предметом и результат комплексного и разностороннего подхода к их обучению.

Приближённые измерения и вычисления. 5 – 7 класс

А.И. Сгибнев

учитель математики школы «Интеллектуал»

Вычисление должно производиться с той степенью точности,
которая необходима для практики,
причём всякая неверная цифра составляет ошибку,
а всякая лишняя цифра — половину ошибки.

А.Н. Крылов

Курс приближений и округлённых вычислений в школьной математике находится в положении Золушки. Дети его не понимают, учителя сокращают до 2–3 уроков. Причины этого понятны. Во-первых, почти вся школьная математика использует *точные* значения и школьникам трудно привыкнуть к мысли, что в математике бывает что-то кроме них, и тем более различать, где надо считать точно, а где приближённо. Во-вторых, к этому курсу почти нет содержательных задач, а есть только формальные упражнения на применение правил, мало проясняющие суть дела. В-третьих, имея калькулятор, школьникам проще сделать вычисления с восемью знаками, чем подумать о точности.

Настоящая статья содержит подборку задач по приближённым вычислениям на материале 5–7 класса. Задачи описывают наглядные жизненные ситуации, в которых формальные правила из учебника становятся более понятны (теория приближённых вычислений вырастала из практики и лучше всего может быть понята через практику).

1. У вас есть электронные весы, которые показывают массу с точностью 1 г, и одинаковые монетки. Одну монетку весы «не чувствуют» (т. е. она легче 1 г). Как возможно более точно определить массу монетки?

2. Игорь делит $257\frac{1}{2}$ на $18\frac{3}{5}$. Как можно быстро проверить его ответ?

Числитель примерно равен 260, *а знаменатель* 20. *Значит, ответ должен быть около* 13.

3. В паспорте квадратного земельного участка написано, что его площадь равна 520 кв. м. Чему равна сторона участка (в метрах): а) с избытком, б) с недостатком, в) с округлением?

4. Объём кубического бака равен 800 куб. м. Найдите ребро бака (в метрах): а) с избытком, б) с недостатком, в) с округлением.

(Если длина измеряемого объекта заключена между a м и $(a+1)$ м, то говорят, что длина равна a м с недостатком и $a+1$ м с избытком. Ту из этих двух величин, которая ближе к истинному значению, называют ещё «приближение с округлением». См. [2, п. 2.2].) Задачи 3 и 4 доступны и тем ученикам, которые ещё не знают, что такое квадратный и кубический корень — они могут использовать таблицы квадратов и кубов.

5. На карте Российских Железных Дорог написано, что от Москвы до станции Тюкан Амурской области 8004 км, а до станции Дежневка — 8485 км. Ясно, что это приближенные расстояния. Как ты думаешь — каким на самом деле может быть расстояние до Тюкана? На сколько расстояние до Дежневки может быть больше, чем расстояние до Тюкана (считаем, что карта составлена без ошибок)?

Для того, чтобы можно было бы из самой записи приближённого числа судить о степени его точности, академик А.Н. Крылов предложил следующее правило: «**Писать число так, чтобы в нём все значащие цифры, кроме последней, были верны и лишь последняя цифра была бы сомнительна и притом не более как на одну единицу**» [1]. *Таким образом, расстояния до Тюкана и Дежневки указаны на карте с точностью* 1 *км. Т. е. по этим данным мы можем утверждать, что расстояние до Тюкана лежит в пределах от* $8003,5$ *до* $8004,5$ *км, а расстояние до Дежневки — от* $8484,5$ *до* $8485,5$ *км. Тем самым разница расстояний может быть от* 480 *до* 482 *км.*

6. Округлите величины из предыдущей задачи с точностью до 1000 км.

При округлении до 1000 *км мы получим одно и то же значение* 8000 *км. По этой записи не видно, за какие цифры в числе мы ручаемся, т. е. округлили мы до десятков или до тысяч. Если важно различать*: 8000 — *это* 8000 ± 5 *или* 8000 ± 500, *то можно явно указать интервал, как мы сейчас это сделали. Чтобы различать эти случаи, не указывая интервалов, подчёркивают первую сомнительную цифру*: $80\underline{0}0$ *и* $\underline{8}000$ — *первое число знаем с точностью до десятков километров, а второе — с точностью до тысяч. В случае записи числа в стандартном виде поступают ещё проще*: *пишут* $8,00\cdot10^3$ *и* $8\cdot10^3$. *В первой* *записи указаны три значащие цифры, во второй — одна. Подробнее см.* [4, *п.* 8.3].

7. Запишите величины из задачи 5 с точностью до 100 км, до 10 км.

8. «Да ты вымахал сантиметров на 5!» — воскликнула бабушка, увидев Мишу после годовой разлуки. — «Дай-ка я померяю тебя на ростомере» (она медсестра). Получилось 163 см 7 мм. «Значит, год назад во мне было 158 см 7 мм», — подумал Миша. Прав ли он?

9. Серёжа взвесился на японских электронных весах, забыв снять рюкзак. Весы показали 42 кг 312 г. Серёжа считает, что его рюкзак весит килограмм пять. Что можно сказать о весе Серёжи без рюкзака?

Обратите внимание на формулировку: не «найдите», а «что можно сказать»! Этот вопрос рассчитан на устное обсуждение в классе, когда учитель приучает детей к разумным уточнениям вопроса. Подразумевается, что мы хотим извлечь из даных наибольшую доступную точность.

10. Вася едет на велосипеде со спидометром, который показывает $4,21$ м/с. Данила идёт навстречу со скоростью примерно 2 м/с. Какова скорость их сближения?

Примеры 8–10 поясняют следующее правило: **чтобы найти приближённо сумму или разность двух чисел, известных с *разной* точностью, нужно предварительно округлить их с *одинаковой* точностью (до одного и того же разряда)**. Чтобы получить наибольшую доступную точность результата, просто округляют число, в котором известно больше разрядов, с точностью до последнего разряда другого числа (а другое не трогают). См. [3, п. 4.11; 4, п. 3.5].

11. Маша собирается поехать летом в Глазов по железной дороге через Нижний Новгород. Она узнала по атласу расстояние от Москвы до Глазова по железной дороге — $1163,1$ км. Дедушка сказал ей, что от Москвы до Нижнего Новгорода примерно 400 км. Каково расстояние от Нижнего Новгорода до Глазова?

12. Даша узнала по справочнику массу Земли — $5,9725 \times 10^{24}$ кг. Из статьи она узнала, что за год на Землю падают метеориты общей массой в среднем 20 т. Она округлила и сложила эти величины по правилу из учебника, и обнаружила, что масса Земли за год не меняется. Что это значит?

13. Сторона квадратного участка примерно равна $3\underline{5}$ м. Что можно сказать о его площади?

Казалось бы, надо просто посчитать $35^2 = 1225$, *но за все ли четыре цифры мы можем ручаться? Ведь сторона может быть и* $34,5$ *м и* $35,5$ *м (последняя цифра сомнительна!).* $34,5^2 = 1190,25$; $35,5^2 = 1260,25$. *Поэтому только первая цифра площади определена достоверно; площадь приближенно равна* $1\underline{2}00$ *— кв. м или* $1,2 \cdot 10^3$ *кв. м.*

14. Андрей помнит, что свет доходит от Солнца до Земли примерно за 8 минут. Он посмотрел в справочнике скорость света в вакууме: известное на сегодня значение равно $299\,792,458$ км/с. С какой точностью он может узнать расстояние от Солнца до Земли? Какое значение скорости света нужно взять для расчётов?

Если на самом деле свет идёт от Солнца до Земли $7,5$ *минут, то расстояние получится* $134906606,10$ *км, а если* $8,5$ *мин — то* $152894153,58$ *км. Совпадает в этих ответах только первая цифра, значит, мы можем ручаться лишь за неё. Про вторую цифру можно утверждать, что она равна* 3, 4 *или* 5. *Остальные девять цифр никакой информации не несут! Писать их — значит вводить читателя в заблуждение (не говоря уже о том, что это лишняя работа). Итак, можно утверждать лишь, что расстояние от Солнца до Земли порядка* $1\underline{4}0\,000\,000 = 1,4 \cdot 10^8$ *км. Заметим, что для получения этого ответа вовсе не надо знать скорость света с девятью значащими цифрами! Достаточно помнить, что она примерно равна* 300000 *км/с — хватит одной значащей цифры.*

Примеры 13 и 14 поясняют следующее правило: **чтобы найти приближённо произведение (или частное) двух чисел, нужно предварительно округлить их до одной и той же значащей цифры, перемножить (или разделить) и результат округлить до той же значащей цифры**. Чтобы получить наибольшую доступную точность результата, округляют число, известное с большим количеством значащих цифр, с точностью до последней значащей цифры другого числа (а другое не трогают). См. [3, п. 4.11; 4, п. 3.5].

15. Программисту Денису в конце месяца заплатят 1321 доллар. Курс доллара порядка 24 руб. На какую сумму в рублях может рассчитывать Денис?

16. В течение зимней спячки медведь теряет около 30% веса. Осенью Ярослав ходил в зоопарк и прочитал на клетке медведя Потапыча, что он весит 231 кг. Сколько будет весить Потапыч весной?

17. Весной Ярослав снова сходил в зоопарк и узнал, что медведица Маша после спячки весит 156 кг. Сколько она весила осенью?

18. Данила на глазок прикинул, что длина прямоугольника — порядка 1 м. Саша с помощью линейки измерила ширину прямоугольника и получила величину 33 см 5 мм. Что по этим данным можно сказать о периметре прямоугольника? О его площади? Нужно ли было Саше измерять длину линейкой или достаточно было тоже прикинуть?

*Этот пример показывает, что если часть измерений выполнена грубо, то слишком точно выполнять остальные уже нет смысла — только лишние хлопоты, а итоговую точность всё равно не повысишь. Если же б**о**льшая точность всё-таки требуется (например, учителю), то придётся выполнять с нею все измерения (то есть Даниле тоже придётся поработать линейкой).*

19. Велика или мала погрешность в 1 см?

Данных недостаточно. Если вы измеряете длину спичечного коробка, то велика. А если расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны, то очень мала. Ясно, что надо (абсолютную) погрешность соотносить с измеряемой величиной. Частное этих величин называется относительной погрешностью. См. [5, *п.* 9.3].

20. Даша знает, что её масса 40 кг ± 1 кг. Она считает, что знает свою массу с большей точностью, чем массу Земли (см. задачу 12). Права ли Даша?

К нашей теме естественным образом примыкают задачи на прикидки. Для грубой прикидки (оценить эффект) обычно хватает одной-двух значащих цифр.

21. Какова ширина часового пояса?

На границах часового пояса разница времени составляет 1 *час. Строго говоря, вопрос некорректен: ширина зависит от широты — у экватора самая большая, у полюса обращается в* 0. *Длина экватора Земли* 40 000 *км, часов в сутках* 24, *то есть примерно* 20. *Получаем величину порядка* 2 *тысяч километров на* 1 *час — на экваторе. А на широте Москвы... ну, раза в* 2 *меньше — тысячу километров.* (*И действительно, в Глазове, куда собирается ехать Маша из задачи* 11, *время на час опережает московское.*)

22. Сколько весят все жители Земли?

23. Вспомните легенду об изобретателе шахмат, который попросил за своё открытие положить на первую клетку шахматной доски одно зёрнышко, на вторую два, на третью четыре, на четвёртую восемь, и так далее. Сколько вагонов понадобилось бы, чтобы перевезти всё зерно?

$1+2+4+\ldots+2^{63} \approx 2^{64}$ *зёрнышек. Одно зёрнышко весит, допустим,* $0,1$ *г.*

Объём вагона примерно $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2}0 = \underline{1}00$ *куб. м. Считая плотность зерна равной плотности воды, получим, что в вагон помещается порядка* 100 *т* $= 10^8$ *г зерна.* $2^{64} = 1024^6 \cdot 2^4 \approx 1000^6 \cdot 10 = 10^{19}$ *зёрен, т. е.* 10^{18} *г. Значит, понадобится примерно* 10^{10} *вагонов.*

Для подобных прикидок не нужны ни справочник, ни калькулятор — их можно делать в уме, когда вы гуляете в лесу или едете в электричке. Вообще, такие величины, как количество жителей Земли, длина экватора, скорость света стоит помнить (хотя бы по порядку величины). Если же под рукой есть хороший справочник, то круг легко оцениваемых величин ещё сильно расширяется.

До 7 класса (когда появляется физика) математика — единственный в школе предмет, оперирующий количественными характеристиками. Важно в этом возрасте дать понимание о том, что все величины, кроме количества предметов, известны приближённо и проводить вычисления с ними надо по особым правилам. Мотивировать эти правила лучше всего примерами из практики.

В 8–11 классах открывается простор для *вычислительного практикума*: приближённые формулы, нахождение квадратных корней методом Герона, линеаризация, решения кубических уравнений методом Ньютона, разные способы интерполяции, задачи с неустойчивостью, в которых малые возмущения приводят к большим изменениям ответа (например, вырожденная система линейных уравнений или квадратное уравнение с одним корнем), разговоры о том, как вычисляет компьютер и т. д. О таком практикуме мы постараемся рассказать в следующий раз.

Благодарю за полезные обсуждения темы Э.Э. Шноля, Д.Э. Шноля, М.А. Ройтберга и А.В. Шевкина.

Литература

[1] А. Н. Крылов. *Лекции о приближённых вычислениях.* М.-Л. 1950.

[2] С. М. Никольский и др. *Арифметика*-5. М., 2005.

[3] С. М. Никольский и др. *Арифметика*-6. М., 2006.

[4] С. М. Никольский и др. *Алгебра*-7. М., 2003.

[5] С. М. Никольский и др. *Алгебра*-9. М., 2006.

Магические квадраты

Е.А. Потапова

учитель математики ФМШ №2007

Учебный план ГОУ СОШ №2007 предусматривает предмет «Практикум по решению математических задач», цель введение которого — целенаправленное обучение учащихся решению нестандартных задач и олимпиадных задач (традиционные арифметические задачи, задачи на делимость, математические игры, принцип Дирихле и т. д.)

На некоторых занятиях формируются также важные общеучебные умения и навыки. Так цель занятия по теме «Магические квадраты» — обучение работе по заданному (достаточно сложному) алгоритму.

Рассмотрим основные факты:

Магический квадрат — это квадратная таблица $n \times n$, где n — порядок квадрата, заполненная n^2 числами, так что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на главных диагоналях одинаковая.

Магический квадрат называется *нормальным*, если он заполнен целыми числами от 1 до n^2. Сумма чисел в каждой строке, столбце и на диагоналях, называется *магической константой* (M).

Магическая константа нормального магического квадрата зависит только от n и определяется формулой $M(n) = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Нормальные магические квадраты можно разделить на три категории в зависимости от того, какой порядок квадрата: нечетный, равный удвоенному нечетному числу или равный учетверенному нечетному числу. При этом для каждой категории магических квадратов существует определенный алгоритм их заполнения. Рассмотрим эти алгоритмы.

Правило *де Лялубера* используется для построения нормальных магических квадратов нечетного $(n = 2m+1)$ порядка. Суть его заключается в следующем:

• число 1 помещается в среднюю клетку верхней строки;

• последующие числа размешаются в их обычном порядке по направлению диагонали, идущей направо и вверх от данной клетки. При этом учитывается:

— во-первых, когда достигнута верхняя строка, следующее число следует записать в нижнюю строчку так, как если бы она была помещена над верхней строкой;

— во-вторых, при достижении крайнего правого столбца следующее число записывается в крайний левый столбец так, как если бы он был помещен непосредственно рядом с крайним правым столбцом;

— в-третьих, когда требуемая для заполнения клетка уже занята, или достигнута верхняя клетка правого столбца, необходимо спуститься по вертикали на строку вниз и затем продолжать заполнение по основному правилу.

Покажем пример заполненного нормального магического квадрата 3-го порядка с магической константой $M(3) = 15$ (см. рис. 1).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 1

Для магических квадратов порядка простой четности ($n = 2(2m + 1)$) работает следующий алгоритм:

• сначала необходимо разделить квадрат на четыре равных квадрата (см. рис. 2), порядок каждого из которых равен $2m + 1$;

A	C
D	B

Рис. 2

• затем нужно построить по правилу де Лялубера в квадрате A магический квадрат из чисел от 1 до u^2, где $u = \dfrac{n}{2}$, а в квадратах B, C, D соответственно из чисел: от $u^2 + 1$ до $2u^2$, от $2u^2 + 1$ до $3u^2$ от $3u^2 + 1$ до $4u^2$, где $u = \dfrac{n}{2}$. После этих действий получается квадрат, магический только по столбцам.

• далее необходимо сделать следующие перестановки: в средней строке квадрата A взять центральную клетку и m столбцов без центральных клеток к левому краю квадрата A; числа в этих клетках поменять местами с числами в соответствующих клетках квадрата D. Взять числа в клетках $m - 1$ правых крайних столбцах квадрата C и поменять их местами с соответствующими им числами квадрата B.

Приведем пример заполненного нормального магического квадрата 10-го порядка с магической константой $M(10) = 505$ (см. рис. 3а,б).

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

Рис. 3а

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	6	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	81	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

Рис. 3б

И, наконец, алгоритм для нормальных магических квадратов порядка двойной четности ($n = 4(2m+1)$). В этом случае, магические квадраты строятся по следующему правилу:

• сначала следует выписать в клетки числа от 1 до n^2 по порядку слева направо;

• затем разбить квадрат на квадраты 4×4 и в них «вычеркнуть» диагональные клетки;

• после этого нужно поменять числа, стоящие в диаметрально противоположных «вычеркнутых» клетках, местами.

Приведем пример заполненного нормального магического квадрата 8-го порядка с магической константой $M(8) = 260$ (см. рис. 4).

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 4

Среди нормальных магических квадратов встречаются так называемые дьявольские магические квадраты, в которых также с магической константой совпадают суммы чисел по ломаным диагоналям в обоих направлениях.

Например, существует 48 дьявольских магических квадратов 4-го порядка, которые получаются из трех основных квадратов. Но и это не все. Первые два данных квадрата получаются из последнего всего лишь после 4 перестановок, для этого нужно поменять местами числа в соответствующих клетках (см. рис. 5а-в).

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Рис. 5а

1	12	7	4
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

Рис. 5б

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

Рис. 5в

Дьявольские магические квадраты 4-го порядка также обладают рядом интересных свойств:

• в любом квадрате размером 2×2, находящемся в этом квадрате, сумма чисел равна константе магического квадрата;

• сумма чисел, расположенных по углам магического квадрата, равна его магической константе;

• суммы квадратов чисел в первой и третьей (а также во второй и четвёртой) строках равны. Аналогичным свойством обладают и столбцы чисел.

Также существует ряд олимпиадных задач, решение которых упрощается при построении магического квадрата:

Задача №1. У отца было 49 коров, которые давали соответственно по $1, 2, 3, \ldots, 49$ литров молока в день. Перед смертью он завещал своим 7 сыновьям коров, причем наказал им разделить коров поровну между собой так, чтоб все сыновья получали одинаковое количество литров в день. Помогите сыновьям.

Задача №2. Артемий и Марк играют в такую игру: на столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Мальчики по очереди берут по одной карточке. Тот, у кого первым на руках окажется три карточки с суммой чисел равной 15 — тот выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Не умея строить магические квадраты, учащиеся решают подобные задачи подбором. В задаче №1 долго пытаются посчитать, сколько же литров молока должен получать каждый сын, а потом стараются распределить коров. В задаче №2 рассматривают все возможные наборы карточек и пытаются придумать стратегию. В то время как дети, которые уже знакомы с методами построения магических квадратов, быстро понимают, что в первой задаче нужно построить магический квадрат 7-го порядка, а дальше взять числа или из строчек, или из столбцов. Во второй задаче ученики строят магический квадрат 3-го порядка и сразу получаются все возможные наборы карточек, зачем находят сходство с игрой в «крестики-нолики».

В заключение хочется отметить, что подобные занятия вызывают большой интерес учащихся 5-го класса.

Системы линейных уравнений и ввод буквенных обозначений в 7 классе

А.А. Марачев

учитель математики школы №179,

преподаватель ОЛ ВЗМШ

Тема «Системы линейных уравнений» обычно изучается в 7 классе в 4 четверти. К этому моменту уже подробно изучен способ решения линейных уравнений с одним неизвестным, преобразование буквенных выражений, раскрытие скобок. Однако случилось так, что несколько раз подряд в седьмом классе именно этой темой я начинал курс алгебры. Причем данная тема предшествовала теме «Линейные уравнения», начиная с некоторого момента изучение этих тем шло параллельно. Поводом для этого послужило сразу несколько причин.

Отличительной особенностью этих седьмых классов было то, что все они были вновь набранными. Причем набирались они из школьников других школ, никакой «вступительной» работы по математике не писали, а зачислялись по результатам устного собеседования. В итоге классы получались очень разнородные по своим способностям и интересу к предмету. Были как школьники легко решавшие линейные уравнения, в которых требовалось предварительно раскрывать скобки, так и те, которые на предложение решить уравнение $2x = 3$ отвечали примерно следующее: «Я помню, что здесь нужно разделить, только не помню что. То ли 2 на 3, то ли 3 на 2». После такого высказывания можно было сделать вывод, что школьник, скорее всего, не понимает самого смысла решения уравнения, для него существует лишь алгоритм вроде «перенесите неизвестные в одну часть, известные в другую, далее разделите...» Но за самим алгоритмом ничего не стоит, нет понимания того, откуда он возникает, он просто заучивается. И даже если напомнить этот алгоритм и решить некоторое количество задач, то нет никакой уверенности, что через неделю, или после изучения очередной темы, школьник сможет решить те же самые задачи снова. В итоге был выбор заниматься повторением решения уравнений или изучать эту тему с нуля, полагая, что в 6 классе не все ее проходили или освоили очень поверхностно. Второй путь означал, что нужно подробно рассказывать, что такое уравнение, что значит решить уравнение, почему при переносе из одной части уравнения в другую меняется знак и т. п. В первом случае слабые школьники так до конца и не освоят данную тему, во втором — сильные будут скучать, слушая все то, что уже известно. Ни один вариант хорошим назвать было нельзя.

Следующей сложностью, с которой я столкнулся, была содержательная часть самой темы «Системы линейных уравнений». Согласно учебнику решение систем линейных уравнений необходимо в первую очередь для решения текстовых задач. Однако почти все задачи, которые предлагаются в учебнике, можно сделать либо устно, либо составив уравнение с одним неизвестным. Трудно объяснить, зачем составлять систему уравнений, если все можно сделать с помощью одного уравнения или по действиям. (Кстати, интересно отметить, что до революции в гимназиях подобные задачи и решались по действиям. В рассказе А.П. Чехова «Репетитор» приводится текст такой арифметической задачи: «Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?» Полезно предложить школьникам прочитать этот короткий рассказ и самостоятельно найти решение задачи без использования уравнений.)

Есть еще и ряд психологических проблем, которые возникают при переходе в 7 класс. До 6 класса включительно учащиеся изучают числа и учатся работать с ними. Все, что в этот период времени проходится в школе, имеет прямое жизненное применение. В 6 классе довольно серьезно изучаются дроби и проценты, с которыми дети сталкиваются в реальной жизни, видят их вокруг себя и поэтому понимают их необходимость. В 7 классе вместо арифметики начинается изучение алгебры и геометрии, потребности в которых у учащихся не возникает. В повседневной жизни человек не сталкивается с многочленами, формулами сокращенного умножения, уравнениями и системами уравнений. Однако именно эти темы являются основными темами курса алгебры 7 класса, на их изучение отводится почти все время курса.

Также в 7 классе практически исчезают конкретные числа и дроби, вместо них появляются буквы и буквенные выражения. И если раньше основным типом задания было решить текстовую задачу, то самые распространенные задания 7 класса — это «разложите на множители» и «упростите выражение». Такой резкий переход от задач, в которых требуется образное мышление, к абстрактным понятиям и задачам не всегда и не всем дается легко. Очень хотелось бы смягчить этот переход, сделать его как можно более простым. Именно поэтому возникает желание отодвинуть изучение одночленов, многочленов и формул сокращенного умножения, начать пользоваться буквами в тех местах, где их можно связать с реальным образом, а любые производимые операции над буквенными выражениями дублировать действиями над реальными объектами.

Руководствуясь всеми изложенными выше соображениями была составлена серия задач, с которой и начинались уроки алгебры в седьмых классах. Еще раз подчеркну, что ориентирована она в первую очередь на тех учащихся, для которых решение линейных уравнений или текстовых задач на составление уравнений представляет определенные трудности. Вполне возможно, что данные задачи или связанные с ними идеи можно с таким же успехом использовать и на уроках в 6 классе при изучении уравнений.

Задача 1. Петя купил в магазине три одинаковых ручки и четыре карандаша, заплатив за покупку 27 рублей, а Вася за три таких же ручки и шесть карандашей заплатил 33 рубля. Определите, сколько стоит ручка и сколько карандаш.

С решением этой задачи справляется практически любой школьник. Рассуждения здесь приводятся примерно следующие: «Вася купил на два карандаша больше, а потратил на 6 рублей больше. Значит два карандаша стоят 6 рублей, карандаш стоит 3 рубля. Тогда три ручки стоят 15 рублей, а одна ручка стоит 5 рублей». Действительно, задача простая и может быть решена по действиям. Однако учащимся предлагается научиться записывать решение таких задач несколько иным образом, так, чтобы по этой записи можно было воспроизвести устно рассуждения:

«Запишем кратко условие задачи:

$$\begin{cases} 3 \text{ ручки} + 4 \text{ карандаша} = 27 \text{ руб.}, \\ 3 \text{ ручки} + 6 \text{ карандашей} = 33 \text{ руб.}. \end{cases}$$

Условие задачи принято выделять фигурной скобкой. Теперь выясним, на сколько второй мальчик купил больше первого и на сколько больше заплатил. Чтобы узнать, на сколько одно больше другого, нужно из первого вычесть второе:

$$(3 \text{ ручки} + 6 \text{ карандашей}) - (3 \text{ ручки} + 4 \text{ карандаша}) = \\ = 33 \text{ руб.} - 27 \text{ руб.}, \quad (1)$$

$$2\text{ карандаша} = 6\text{ руб.},$$
$$1\text{ карандаш} = 3\text{ руб.}$$

Теперь нам известно, что карандаш стоит 3 рубля, а поскольку 3 ручки и 4 карандаша стоят 27 рублей, то

$$3\text{ ручки} + 12\text{ руб.} = 27\text{ руб.},$$
$$3\text{ ручки} = 27\text{ руб.} - 12\text{ руб.},$$
$$3\text{ ручки} = 15\text{ руб.},$$
$$1\text{ ручка} = 5\text{ руб.}$$

Итак, получаем

Ответ: ручка стоит 5 руб., карандаш стоит 3 руб».

Теперь можно предложить решить и записать подобным образом решение 1–2 аналогичных задач, например:

Задача 2. На зиму трем коровам и десяти овцам требуется заготовить 8 стогов сена, а двенадцати коровам и десяти овцам 17 стогов сена. Сколько сена съедает за зиму корова, а сколько коза?

Данная задача интересна тем, что в результате решения получается дробное число, овца съедает половину стога.

Замечания. 1. Конечно же складываются не ручки с карандашами и не коровы с овцами, а стоимости ручек и карандашей, количества съедаемого коровами и овцами сена. Начиная с некоторого момента стоит напоминать об этом учащимся. Ведь далее за x будет обозначаться стоимость ручки, а не сама ручка. В данном случае сложение ручек с карандашами является условным, использование такой записи позволяет достаточно кратко изложить проводимые мысленно рассуждения на бумаге.

2. Попытки более сильных учащихся ввести буквенные обозначения, а также сокращение слов в решении (кар. вместо карандаш) стоит пресекать (например под предлогом того, что они становятся непонятными постороннему человеку). Запись в каждой строчке решения задачи одних и тех же слов должна настолько надоесть школьникам, чтобы у них действительно появилось желание сделать их как можно короче. Такой опыт убеждает их в том, что введение буквенных обозначений полезно и сильно укорачивает текст решения задачи.

3. Возможно, что строка (1) сложна для восприятия и в решении ее стоит пропускать. Главное, чтобы учащиеся понимали, откуда берется следующая за ней строка решения.

Теперь можно переходить к более сложным задачам.

Задача 3. Магазин получает сахар в мешках и коробках. Известно, что 3 мешка и 7 коробок весят 260 кг, а 9 мешков и 4 коробки весят 440 кг. Сколько весит мешок сахара?

Задача уже не решается сразу по предыдущему алгоритму. Для начала предложим записать условие:

$$\begin{cases} 3\text{ мешка} + 7\text{ коробок} = 260\text{ кг}, \\ 9\text{ мешков} + 4\text{ коробки} = 440\text{ кг}. \end{cases}$$

Теперь попробуем задаться вопросом, а что еще можно узнать из условия. Можно ли сразу найти, сколько весят 18 мешков и 8 коробок? 6 мешков и 14 коробок? А что еще? В это момент появляется догадка, что можно найти массу 9 мешков и 21 коробки, они весят в три раза больше 3 мешков и 7 коробок. Но тогда можно записать

$$\begin{cases} 9\text{ мешков} + 21\text{ коробка} = 780\text{ кг}, \\ 9\text{ мешков} + \;\;4\text{ коробки} = 440\text{ кг}, \end{cases}$$

после чего задача решается уже также, как и первые две. Разобрав еще одну задачу на закрепление идеи увеличение обеих частей равенства в одинаковое число раз, можно предложить следующую задачу, которая в полной мере демонстрировала бы идею решения системы уравнений способом уравнивания коэффициентов.

Задача 4. На изготовление 3 свитеров и 5 шарфов мастерской требуется 1600 г шерсти, а на 5 свитеров и 8 шарфов уходит 2640 г шерсти. Сколько шерсти необходимо для изготовления каждого из этих изделий?

После записи условия в виде системы предлагаем школьникам сделать задачу аналогично предыдущей. Возможно придется подсказать, что стоит увеличивать не одно равенство в несколько раз как раньше, а сразу оба, пытаясь уравнять количества каких-либо предметов в обоих равенствах, например количество свитеров:

$$\begin{cases} 3\text{ свитера} + 5\text{ шарфов} = 1600\text{ г}, \\ 5\text{ свитеров} + 8\text{ шарфов} = 2640\text{ г}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15\text{ свитеров} + 25\text{ шарфов} = 8000\text{ г}, \\ 15\text{ свитеров} + 24\text{ шарфа} = 7920\text{ г}. \end{cases}$$

Далее решение данной задачи уже не должно представлять особого труда. Можно решать и задачи, в которых встречается разность.

Задача 5. В пакете на 0,5 л больше сока, чем в бутылке, а в 2 пакетах и 7 бутылках вместе 10 л сока. Сколько литров сока в бутылке?

Можно данную задачу решать по изученному ранее алгоритму. Записываем условие

$$\begin{cases} 1\ \text{пакет}\ -1\ \text{бутылка} = 0{,}5\ \text{л},\\ 2\ \text{пакета} + 7\ \text{бутылок} = 10\ \text{л}, \end{cases}$$

уравниваем количество пакетов:

$$\begin{cases} 2\ \text{пакета} - 2\ \text{бутылки} = 1\ \text{л},\\ 2\ \text{пакета} + 7\ \text{бутылок} = 10\ \text{л}. \end{cases}$$

Теперь можно заметить, что вторая строка отличается от первой на 9 бутылок, в одном случае от 2 пакетов убирается 2 бутылки, в другом добавляется еще 7 бутылок. С другой стороны различие составляет 9 литров. Значит 9 бутылок = 9 л, в одной бутылке литр сока.

На примере данной задачи можно показать и решение системы уравнений способом подстановки. Так, равенство 1 пакет − 1 бутылка = = 0,5 л можно записать в виде 1 пакет = 1 бутылка + 0,5 л, т. е. в любом месте далее 1 пакет можно заменять на одну бутылку и еще 0,5 л. Значит 2 пакета = 2 бутылки + 1 л, можно записать 2 бутылки + 1 л + + 7 бутылок = 10 л, откуда находится объем бутылки.

После разбора этого задания можно закрепить идею решения системы уравнений способом подстановки и на других задачах. По ходу решения будут появляться выражения, на примере которых можно объяснять способ раскрытия скобок.

Предположим, что результате решения появилась такая запись: 10 карандашей − 3(2 карандаша − 5 руб). Нужно как-то упростить данное выражение. Будем рассуждать так: «Нам нужно выяснить, на сколько 10 карандашей дороже, чем трижды по 2 карандаша без 5 рублей, т. е. дороже, чем 6 карандашей без 15 рублей: 10 карандашей −(6 карандашей − 15 руб). Теперь рассмотрим выражение 10 карандашей − 6 карандашей. Больше оно или меньше того, которое нам было дано? В исходном выражении требовалось уменьшить на 6 карандашей без 15 рублей, а здесь уменьшается просто на 6 карандашей, т. е. уменьшили больше, чем требовалось на лишние 15 рублей. Значит нужно к полученному выражению добавить 15 рублей, чтоб результат не изменился: 10 карандашей − 6 карандашей + 15 руб.» Тем самым скобки раскрыты.

Дальнейшая деятельность зависит от уровня класса и степени понимания всего пройденного. В некоторый момент полезно ввести буквенные обозначения, обосновывая это облегчением и укорачиванием способа записи решения (школьники уже будут с нетерпением ждать, когда же это произойдет). Первое время после введения букв полезно при решении систем уравнений, а также несложных линейных уравнений, предлагать предварительно придумать задачу, для решения которой можно было бы использовать данную систему или уравнение. Таким образом запоминание алгоритмов решения уравнений и систем, раскрытия скобок и возможных действий с буквенными выражениями учащимися происходит вместе с их осознанием, пониманием того, почему они именно такие. Если в какой-то момент оказывается забыт тот или иной шаг в последовательности решения, то ребенок имеет возможность самостоятельно его вспомнить, вывести заново перейдя от буквенной записи к образу, реальным объектам, а потом обратно.

Использование интуиции при обучении математике

И.Б. Писаренко

учитель математики лицея №1557

Любое знание само по себе бессмысленно. Знание продуцировалось, чтобы реализовалось какое-либо умение. Например, строить самолеты, плавать и так далее, в общем, решать конкретные задачи. И вот вопрос, как передаются умения? Как передаются знания известно — через книги. Средневековые университеты начинались с библиотек, то есть происходила концентрация знаний. А вот с умениями все намного сложнее, потому что умения через книги не передаются. Точнее скажу, у нас книги пишутся так, что умения через них не передаются. Это проблема, что у нас нет языков, с помощью которых можно было бы описывать и транслировать умения. Умения передаются от человека к человеку и этот процесс идет от учителя к ученику. Интересно, как это происходит, каким образом можно транслировать умение от одного человека к другому?

На самом деле, умение каждый вырабатывает в себе. Научиться плавать или водить машину по книгам или слушая теорию, то есть, получая только знания, невозможно. Нужно взаимодействие учитель–ученик. Ученик вырабатывает свое умение сам, но у него должен быть образец — преподаватель. Когда мы работаем на умения, многие вопросы отпадают. Например, вопрос об истинности или ложности становится неуместным. Если есть три техники, каждая из которых позволяет научиться решать задачи, то какая из них истинная, а какая ложная? Алгоритм не может быть ни истинным, ни ложным, а он либо решает поставленную задачу, либо не решает. Таким образом, приходится отказываться от концепции истинности–лжи. Начинает работать принцип полезности. И логика тоже иногда не работает. Допустимо все, что полезно, что помогает формировать умение, а все что мешает — недопустимо. При работе с умениями надо быть осторожным. Дело в том, что для умений не бывает общих вещей. Для каждой конкретной ситуации надо разрабатывать конкретный подход. Тем не менее, от одного умения к другому умению мы можем переходить по аналогии.

Если мы выучили английский язык, то французский нам будет проще выучить. Если к двум языкам добавить третий, нам будет еще проще.

Хочу отметить, что умение — целостно, либо ты умеешь плавать, либо не умеешь, нельзя уметь плавать наполовину. Умения обладают таким неприятным свойством, что они не укладываются в последовательную логическую цепочку, хотя умениями и интуитивными навыками вполне можно управлять. Для этого существует определенный набор инструментов, хотя он кажется парадоксальным. Для интуиции характерна такая неприятная особенность, что можно прекрасно и понятно провести почти весь урок, но если в одном месте будет маленькое непонимание, то вся система рушится. Понимание либо есть, либо его нет. Интуиция потому и не описывается логикой, что она неустойчива.

Наши занятия я хотел бы посвятить передаче умений через теорию. На этих занятиях я буду рассматривать математику и логику с точки зрения интуиции учащегося. Дело в том, что интуитивный рельеф любой теории довольно извилист и для того, чтобы провести через него ученика, дать ему понимание, необходимое для формирования умения, иногда надо делать очень неожиданные шаги. Наш ассортимент не исчерпывается законами логики и мы можем использовать переходы по аналогии и интуитивные переходы. Но я хочу обосновать такую вещь, что если придерживаться определенных ограничений, то аналогия может быть не менее строгой, чем логика. Мы с вами обсудим такой предмет как интуитивно убедительное рассуждение. И качество таких рассуждений, если они правильно приготовлены, то в ограниченной сфере применения они ничем не хуже, чем логические доказательства. Также обсудим способы введения понятий. Еще один важный момент, что лишняя информация скорее мешает формированию навыка, чем помогает. Гораздо проще научить ребенка, не сообщая ему информацию явно и не перегружая его каналы, а затем перевести навык из неявной формы в явную. Обсудим подходы к получению доказательств и формулировке теорем.

Еще раз хочу обратить ваше внимание, что интуиция — это система, причем чувствительная к малейшим изменениям. Представим, что есть 50 шагов и если 49 сделали правильно, а последний не сделали, то техника обрушивается. Преподаватель, опирающийся на интуицию, ходит по острию ножа. Ну, а теперь, давайте перейдем к разбору конкретных примеров и приемов, облегчающих интуитивное понимание и формирование навыков.

Волшебные истории

Формулировка утверждения в образной и занимательной форме существенно облегчает его понимание и доказательство.

Принцип математической индукции на доминошках.

Пусть у нас есть бесконечный ряд стоящих домино. Мы хотим их уронить. Для этого достаточно:

1. Уронить первую доминошку.

2. Убедиться, что всегда, когда падает предыдущая, падает и следующая.

Обоснование: пусть какая-то доминошка устояла, тогда устояла и предыдущая. Предпредыдущая тоже устояла. Так рано или поздно мы дойдем до первой доминошки, она должна устоять, но ведь мы ее уронили. Противоречие.

Упражнение 1. Поменяем правила игры.

1. Мы роняем две первых доминошки

2. Если падают две предыдущих, падает и следующая.

Упадут ли все доминошки? Ответ обоснуйте.

Упражнение 2. Еще раз изменим правила.

1. Упала первая доминошка.

2. Если падают все предыдущие, падает и следующая.

Упадут ли все доминошки? Ответ обоснуйте.

Теперь для использования этого метода для решения задач надо пояснить, что бесконечный ряд стоящих доминошек — это бесконечный ряд утверждений, которые нужно доказать. Упавшая доминошка — доказанное утверждение.

Отношение эквивалентности на примере дружбы.

В городе математиков дружба обладает следующими удивительными свойствами.

1. Каждый друг саму себе (Вася **друг** Васи).

2. Дружба взаимна (если Вася **друг** Пети, то Петя **друг** Васи).

3. Друг моего друга мой друг (если Вася **друг** Пети и Петя **друг** Коли, то Вася **друг** Коли).

Докажите, что город математиков разбит на банды друзей. Внутри одной банды все дружат друг с другом, а два любых человека из разных банд — недруги.

Теорема Кантора в истории с глупым королем.

Задача. Король считает, что любое подмножество его подданных является тайным обществом. Каждому гражданину должно доносить ровно на одно тайное общество. Докажите, что есть тайное общество, на которое никто не доносит.

Утверждение. (Кантор): $P(M) \not\leftrightarrow M$.

Доказательство: предположим, что напротив $P(M) \leftrightarrow M$, $a \leftrightarrow A$, $b \leftrightarrow B$, $c \leftrightarrow C$, ...

Будем считать, что a доносит на A. Тогда указ глупого короля можно выполнить. А мы знаем, что это не так. Противоречие. Ч. т. д.

Стрелки и комплексные числа.

Определение. Комплексное число — это стрелка на плоскости. Стрелки считают равными если у них одинаковые углы и длины. Складываются они по правилу параллелограмма. При умножении стрелок углы складываются, а длины перемножаются.

Силу страшных слов нельзя недооценивать. Так из-за страшного слова *конгруэнтность* провалилась реформа в геометрии. И то, что просто и очевидно в несерьезных словах, в страшных словах непонятно и сложно, мозг зависает и отключается. Е.Г. Козлова на своих кружках проводила специальные эксперименты и выяснила что один и тот же ребенок достаточно легко решает задачу сформулированную в виде волшебной истории и не решает (либо решает с огромным трудом) ту же задачу, изложенную строгим математическим языком. Оба варианта задачи предлагались с интервалом в 3-4 занятия, причем результат не зависел от того, какая задача давалась первой — волшебная или математическая. Это хорошо понимают организаторы олимпиад, которые пытаются формулировать свои задачи в занимательной форме.

Доказательства на примерах

Для учащегося есть большая разница между задачей в числах и задачей в буквах. Последняя для него намного сложнее. Для облегчения понимания доказательства я предлагаю проводить его на типичном примере, или на нескольких примерах.

Утверждение. Любую обыкновенную дробь можно перевести в десятичную периодическую дробь.

Доказательство: (на примере дроби $\frac{31}{11}$).

Выполним деление уголком.

$$\begin{array}{r|l} 31 & 11 \\ \underline{22} & 2{,}818\ldots \\ 90 & \\ \underline{88} & \\ 20 & \\ \underline{11} & \\ 90 & \\ 88\ldots & \end{array}$$

Несложно заметить, что деление уголком устроено так, что все дальнейшее определяется последним остатком. Все, что было раньше, не влияет на результат деления. А разных остатков при делении на 11 конечное число. Поэтому рано или поздно остатки повторятся и дробь выйдет на период.

Контрольный вопрос: сколько всего разных остатков при делении на 11?

Упражнение. Какой может быть максимальная длина периода у дроби $\frac{317}{811}$?

Упражнение. Любую десятичную периодическую дробь можно перевести в обыкновенную.

Доказательство проведем на конкретном примере: $x = 4{,}123(71)$.

Сначала передвинем запятую до периода, для этого в нашем случае дробь надо умножить на 1000. $y = 1000x = 4123,(71)$. Потом передвинем запятую на период, в нашем случае он равен двум (равенство с y надо умножить на 100). $100y = 412371,(71)$. И, наконец, вычтем из третьего равенство второе, обрубив бесконечный хвост. Получим $100y - y = 412371 - 4123, 99y = 408248, y = \frac{408248}{99}$, а $x = \frac{y}{1000} = \frac{408248}{99000}$.

Утверждение. (Свойства логарифмов) $\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$. Доказательство проведем на примере двоичных логарифмов.

Доказательства на примерах использовали греческие математики:

(*Евклид*) Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел.

Доказательство: пусть предложенные первые числа будут A, B, C, я утверждаю, что первых чисел существует больше чем A, B, C, ...

(*Диофант*) **Задача**: Произвольный квадрат разложить на два квадрата.

Решение: пусть надо разложить 16 на два квадрата ...

Доказательства на примерах вполне допустимы и безопасны, если по данному примеру большинство учащихся может выполнить необходимое обобщение или перенос по аналогии. Тем же, кто это сделать не в состоянии, скорее всего не поможет и общее доказательство.

Борьба с чрезмерной общностью в определениях и формулировках.

Так как общность сильно затрудняет понимание, мы должны давать максимально конкретные определения и формулировки. С этой точки зрения

Хорошо: последовательность возрастает, если каждый следующий ее элемент больше предыдущего.

Плохо: последовательность возрастает, если любой ее элемент с большим номером больше элемента с меньшим номером.

Плохо: если $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $[a; b]$ то обратная функция $\varphi(y)$ непрерывна на $[f(a); f(b)]$.

Хорошо: если $f(x)$ непрерывно возрастает на $[a;b]$ то обратная функция $\varphi(y)$ непрерывно возрастает на $[f(a);f(b)]$.

Плохо: функция дифференцируема на множестве M, если она дифференцируема в любой его точке.

Хорошо: функция дифференцируема на интервале, если она дифференцируема в любой его точке.

Все определения и формулировки типа:

Определение 1. $f(x)$ — возрастает (не убывает) в точке x_0, если $\exists U(x_0)\colon \forall \delta x\colon x_0+\delta x \in U(x_0) \quad \dfrac{\delta f}{\delta x} > 0 \left(\dfrac{\delta f}{\delta x} \geqslant 0\right)$.

Теорема 1. (*Необходимое условие возрастания (неубывания) функции в точке x_0.*)

Если f возрастает (не убывает) в точке x_0 и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) \geqslant 0$.

Я считаю плохими. И упростил бы их так:

Определение 1. $f(x)$ — возрастает в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$.

Теорема 1. (*Условие возрастания функции в точке x_0*).

Если $f(x)$ возрастает и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) \geqslant 0$.

Упражнение 1. Определите, что значит функция $f(x)$ не убывает в точке x_0.

Упражнение 2. Сформулируйте и докажите условие неубывания функции в точке.

Если же нам все же необходимо дать общую формулировку, мы должны постепенно наращивать ее сложность.

Определение предела последовательности:

Определение 1. Последовательность сходится, если ее график прижимается к горизонтальной прямой.

Определение 2. Последовательность x_n имеет предел равный a, если в произвольной окрестности точки a лежат почти все элементы последовательности (почти все — это все, начиная с некоторого номера).

Определение 3. Последовательность x_n имеет предел равный a, если $\forall U_a \exists N\colon \forall n > N \Rightarrow x_n \in U_a$.

Определение 4. Последовательность x_n имеет предел равный a, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N\colon \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение логарифма:

Определение 1. $\log_2 4$ — это степень, в которую нужно возвести 2 , чтобы получить 4.

Определение 2. $\log_2 \pi$ – это степень, в которую нужно возвести 2, чтобы получить π.

Определение 3. $\log_2 x$ – это степень, в которую нужно возвести 2, чтобы получить x.

Определение 4. $\log_e x$ – это степень, в которую нужно возвести e, чтобы получить x.

Определение 5. $\log_a x$ – это степень, в которую нужно возвести a, чтобы получить x.

Замечание: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Утверждение. (Тейлор) Если f, $f' \in D(a;b) \cap C[a;b]$ то $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)(b-a)^2}{2!}$, $c \in (a;b)$.

Упражнение 1. Написать и доказать формулу Тейлора для трех слагаемых.

Упражнение 2. Написать формулу Тейлора для n слагаемых.

Утверждение. Если $g \in D_a$ и $g(a) \neq 0$ то $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.

Упражнение. Вычислить $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$.

Использование неполных доказательств.

Условно неполные доказательства можно разбить на три группы: на доказательства, которые легко пополнить, нелегко пополнить и невозможно пополнить.

Для определений и теорем, формулировки и доказательства которых легко пополнить, пополнения выношу в контрольные вопросы и упражнения. Например:

Определение. a — точка минимума $f(x)$, если в некоторой окрестности точки a $f(x) \geq f(a)$ $(\exists U_a \forall x \in U_a f(x) \geq f(a))$.

Утверждение. (Ферма) Если a — точка минимума $f(x)$, то $f'(a) = 0$ или не существует.

Доказательство: Пусть производная $f(x)$ в точке a определена и не равно нулю, например $f'(a) > 0 \ldots$ Противоречие. Ч. т. д.

Контрольный вопрос: а что будет, если $f'(a) < 0$?

Упражнение 1. Дать определение точки максимума.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать теорему о максимуме.

В доказательствах, которые нелегко пополнить, вообще молчу о проблемах. Например:

Утверждение. Между точками единичного отрезка и единичного квадрата можно установить 1–1 соответствие.

Доказательство: (на примере)

Пусть точка A единичного квадрата имеет координаты $x_A = 0,1357973\ldots$ и $y_A = 0,2468866\ldots$ Сопоставим ей точку a на отрезке с координатой $x_a = 0,12345678987636\ldots$ (Мы просто перепутали координаты точки A квадрата).

В обратную сторону, пусть точка b отрезка имеет координату $x_b = 0,b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots$. Сопоставим ей точку точку B квадрата с координатами $x_B = 0,b_1b_3b_5\ldots$ и $y_B = 0,b_2b_4b_6\ldots$

Нетрудно понять, что такое сопоставление является 1-1 соответствием. Ч. т. д.

Комментарий: не слова не говорю здесь о проблеме с девятками, потому — что это отвлекает от основной идеи доказательства. И если Кантор, который придумал это доказательство, сам не заметил дырки, и ему на нее указали другие математики, зачем я буду морочить голову детям при первом знакомстве с теоремой. Если же кто-то все же заметит пробел (бывает и такое), я закрою ему рот, чтобы он не сбивал понимание класса, а в личном порядке скажу ему, что он молодец, поставлю пятерку, и мы вместе за шоколадку и большой плюсик подумаем, как эту дыру в доказательстве заделать.

Использование доказательств, которые невозможно пополнить. (Или про которые пока не известно, как их пополнить).

Утверждение. (Эйлер) $e^{ix} = \cos x + \sin x$.

Доказательство: $\cos x + i\sin x = \left(\cos\dfrac{x}{n} + i\sin\dfrac{x}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}(\cos x + i\sin x) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n.$$

При больших n $cos\dfrac{x}{n}$ примерно равен 1, а $\sin\dfrac{x}{n}$ примерно равен $\dfrac{x}{n}$ поэтому

$$\cos x + i\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = e^{ix}.$$

Говорю детям, что это доказательство абсолютно нестрогое. И мы обсуждаем его пробелы, это должны сделать дети, если у них не получается, делаем вместе.

Неверные доказательства служат хорошим мнемоническим приемом для запоминания формул и теорем. На таких доказательствах мы учимся отличать доказательство от догадки. И они учат нас догадываться. Мы учимся догадываться, наблюдая, как догадывались другие. Математик Безикович по этому поводу сказал: «Величие математика определяется числом неуклюжих доказательств, которые он привел».(Доказательства первооткрывателей всегда неуклюжи.)

Утверждение. Если $f(x)$ непрерывно возрастает на $[a;b]$, а $f'(x) \neq 0$ на $(a;b)$ то производная обратной функции $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ на $(f(a);f(b))$.

Доказательство (с ошибкой): по основному определению обратной функции $\varphi(f(x)) = x$. Продифференцируем обе части этого равенства, получим $\varphi'(f(x)) \cdot f'(x) = x'$. Итак, $\varphi'(y) \cdot f'(x) = 1$, откуда получаем $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, ч. т. д.

Упражнение. Найдите ошибку в доказательстве.

Комментарий: данное доказательство служит великолепным мнемоническим приемом при применении формулы производной обратной функции, которая традиционно вызывает у детей затруднения. Я только требую, чтобы мы брали обратную функцию от x.

Задача. Найти $\left(\sqrt[3]{x}\right)'$.

Решение: $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$, $\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right)' = x'$, $3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\left(\sqrt[3]{x}\right)' = 1$, $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Кроме того, мы можем выстраивать доказательство в серию, постепенно наращивая их строгость и сложность. Тогда первое доказательство серии служит идеей строгого доказательства, второе — планом и так далее. Например:

Утверждение. Если определены $f'(x_0)$ и $g'(y_0)$, то определена и

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Доказательство 1: $z = g(y)$, $y = f(x)$.

$$z'_x = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot y'_x \quad \text{ч. т. д.}$$

Понятно, что это доказательство неверно, потому что с точки зрения классической математики бессмысленно. Попытаемся придать ему смысл, перейдя к пределам. Получим

Доказательство 2:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = z'_y \cdot y'_x \quad \text{ч. т. д.}$$

По ходу доказательства мы воспользовались теоремой о пределе произведения, и о замене переменной в пределе для непрерывной функции ($y = f(x)$ функция непрерывная в точке x_0, так как она дифференцируема в этой точке). Но тем не менее, наше доказательство содержит один пробел: Δy может быть равным нулю, а на ноль делить нельзя. Чтобы исправить этот пробел, и избежать деления на ноль, вспомним второе определение дифференцируемой функции.

Определение. Функция $g(y)$ дифференцируема в точке y_0, если в окрестности этой точки $g(y) - g(y_0) = l(y)(y - y_0)$, где $l(y)$ непрерывна в точке y_0 и $l(y_0) = g'(y_0)$.

Теперь все готово, чтобы привести Доказательство 3:

$$g \circ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{z - z_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{l(y)(y - y_0)}{x - x_0} =$$
$$= \lim_{y \to y_0} l(y) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = l(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

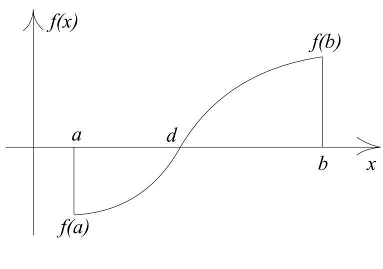
Чем более формально доказательство, тем меньше в нем смысла. А чем более оно содержательно, тем меньше в нем строгости. Эйнштейн говорил, что всякое точное знание бесполезно, а все полезное — неточно. Мы должны для себя границу строгости, чем более строгие доказательства мы даем, чем они формальнее, тем меньше в них смысла и пользы. А чем содержательнее и полезнее наши рассуждения, тем меньше в них строгости. Одно из возможных решений этого противоречия, давать не одно доказательство, а несколько. С различным содержанием строгости и смысла.

Мотивация интуиции учащихся.

Для того, чтобы ученики лучше понимали и воспринимали, материал обязательно нужно объяснять, как догадались до этого утверждения, зачем оно нужно, как его использовать, как оно связано с другими утверждениями и т. п. Это позволяет учащимся увидеть теорию с высоты птичьего полета, осознать ее как единое целое. И снимает тормоза интуиции, когда учащийся не воспринимает доказательство теоремы, потому что не понимает зачем это нужно.

Утверждение. (Теорема о нуле)

Если непрерывная функция на концах отрезка имеет разные знаки, то где-то внутри отрезка она обращается в ноль.



После того, как я рисую картинку, у детей возникает вопрос: а зачем тут что-то доказывать, и так все ясно.

На что я им возражаю, ясно что:

1. Если слева от точки функция возрастает, а справа убывает, то это максимум.

2. У трех областей плоскости не может быть одной общей границы.

3. К непрерывной кривой почти везде можно прикоснуться.

4. В квадрате точек больше чем в отрезке.

Однако все эти утверждения неверны. Некоторые из них мы разбираем.

Вспоминаем еще ситуации, когда интуиция нас обманывала: задачу про грибы, у которых после сушки влажность уменьшилась с 99 до 98 процентов, про газету, которую сложили 50 раз, про лестницу из кирпичей, положенных друг на друга. Я делаю вывод, что интуиция срабатывает правильно в 99 случаях из 100, в типичных случаях. Но именно этот 1 из 100 бывает очень интересным, или самым плохим или самым хорошим, для того, чтобы отлавливать такие случаи, мы включаем логику.

И вообще, высший пилотаж — это умение интуитивно понять формальное рассуждение, обосновать его в одну строчку. И формально доказать интуитивно очевидный факт. Уметь от догадки переходить к доказательству и наоборот. И если им все очевидно, пусть аккуратно докажут такой факт:

Утверждение. (Принцип дискретной непрерывности)

Если некоторая величина может увеличиваться и уменьшаться на 1, и в начальный момент времени она была отрицательной, а в конечный момент времени положительный, то в какой-то момент времени она обратилась в ноль.

Некоторые учащиеся справляются с этим заданием, а далее мы переходим к доказательству теоремы о нуле.

Иногда выхожу на это доказательство с помощью уточнения интуитивных представлений.

Теорема о нуле очевидна, потому что очевидно, если есть ломаная, с конечным числом звеньев, и ее концы лежат по разные стороны от прямой, то какое-то звено нашей ломаной пересекает прямую. Непрерывную прямую наша интуиция понимает как ломаную с бесконечным числом звеньев очень малой длины, и не делает особых различий в этом случае между конечным и бесконечным. Но как формально доказать интуитивно очевидный факт о ломаной (мы ведь потом хотим найти формальное доказательство для непрерывной кривой). Надо рассмотреть звено ломаной, концы которого лежат по разные стороны от нашей прямой. Найти такое звено мы можем по очереди просматривая звенья ломаной. У кривой бесконечно много звеньев, и такой способ доказательства не пройдет, но мы можем делить отрезок пополам, каждый раз уменьшая кривую, пока не дойдем до очень маленького кусочка. Далее по описанному плану проводится формальное доказательство.

Обязательно привожу два доказательства существования в теореме

$$\forall a, b \in N \exists! u, r \in N_0 : \quad b = a \cdot u + r, \quad \text{где} \quad 0 \leq r < a.$$

Одно методом деления уголком, а другое методом сетки размера a, для того, чтобы мотивировать необходимость доказательства единственности. А вдруг один способ даст одну пару чисел, а другой — другую.

Зачем нужны теоремы об арифметических свойствах.

Арифметические свойства предела последовательности нужны для того, чтобы сводить сложные пределы, где ответ не очевиден, к простым, где ответ очевиден или был посчитан ранее.

Зачем нужны комплексные числа.

Для того, чтобы объяснить детям, зачем нужны были комплексные числа я рассказываю детям о греческой математике. О европейских математиках, которые тысячу лет не могли превзойти греков.

О драматической истории вывода формулы для корней кубического уравнения. Потом мы выводим формулу Кардано, и убеждаемся, что иногда для того, чтобы найти правильный корень, приходится работать с квадратными корнями из отрицательных чисел. Говорю о том, что у европейцев был выбор, отказаться от комплексных чисел и от своей первой победы над греками или нет.

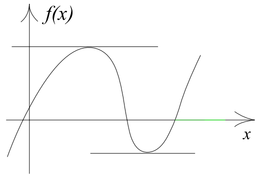
Далее говорю, что позже удивительным образом оказалось, что все очень маленькие объекты описываются с помощью комплексных чисел. И мы начинаем строить теорию комплексных чисел, опираясь на наглядный образ — стрелку на плоскости.

Почему так важны многочлены.

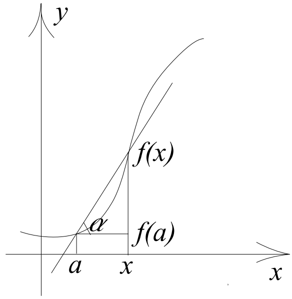
Потому что с их помощью можно представить известную функцию (формула Тейлора), неизвестную функцию (интерполяция многочленами). Кроме того, это единственные функции, которые абсолютно точно моделируются на классическом компьютере (многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ мы понимаем как набор его коэффициентов, записанных в разрядную сетку компьютера).

Зачем нужна и как догадались до производной.

Гуго Штейнгауз сказал: «Математик это сделает лучше». Математика – это не просто поиск решений, а поиск оптимальных решений. Мы должны добиться результата с наибольшей эффективностью и наименьшими затратами. А как по графику функции геометрически определить точки минимума или максимума?



Нетрудно заметить, что в этих точках (и только в них) касательная к графику функции параллельна оси иксов, а тангенс наклона касательной равен нулю. Но чтобы задать прямую, нам надо две точки. А у нас есть только одна — точка касания. Как быть?



Возьмем вторую точку недалеко от первой, тогда мы получим секущую, для нее $tg\alpha_{сек} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Если же мы будем приближать x к a, то получим касательную и $tg\alpha_{кас} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Зачем нужны действительные числа. Аксиомы Архимеда и полноты.

Я рассказываю детям историю о Декарте, который сидел в своей келье и, наблюдая сквозь решетку за деревом, догадался, что любой листочек на дереве может быть описан с помощью числа.

Однако тут есть небольшая проблемка. Еще Пифагорейцы доказали, что длины не всех отрезков задаются обыкновенными дробями. Значит, надо перейти к десятичным. Ставлю перед детьми задачу: закодировать все точки отрезка $[0; 1]$ с помощью десятичных дробей. В процессе кодирования и декодирования мы понимаем, что для этого нам нужно такое утверждение:

Система вложенных стягивающихся отрезков на прямой имеет общую точку и только одну.

Это аксиома, она нам нужна для того, чтобы мир мог быть описан с помощью чисел, чтобы математика пришла в физику. Но для математиков это очень сложная аксиома и они разбивают ее на две части. На часть отвечающую за существование (аксиома полноты) и часть, отвечающую за единственность (аксиома Архимеда).

Зачем нужны векторы.

Математики придумали, как с помощью чисел описывать мир, но физикам этого показалось мало. Потому что некоторые физические величины (сила, скорость, перемещение, ускорение и т. д.) имеют не только величину, но и направление. Математикам пришлось вводить понятие векторов и строить их теорию максимально аналогично теории чисел (это удобно). Далее мотивирую правила сложения векторов (перемещение), правило умножения вектора на число (сумма нескольких одинаковых векторов), представления в базисе (сведение операций с векторами к операциям с парами, тройками и т. д. чисел).

Явная информация.

Мы должны стараться минимизировать количество передаваемой явно информации. Выбрасывая те условия теоремы, до которых дети могут догадаться сами (давайте не будем считать их дураками), и перенося в замечания и контрольные вопросы некоторые детали. Мы также должны минимизировать число кванторов, потому что они сильно затрудняют понимание.

Утверждение. Если $f(x)$ непрерывно возрастает на $[a;b]$, а $f'(x) \neq 0$ на $(a;b)$, то производная обратной функции $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ на $(f(a);f(b))$.

Утверждение. Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку a, то a — точка перегиба.

Замечание: $f'(x)$ определена в точке a.

(Аксиома полноты) Если множество A на прямой лежит левее множеств B, то найдется разделяющий их элемент. (Если $A \leq B$ то $\exists c \in R\colon A \leq c \leq B$).

Замечание: Множества A и B должны быть непусты.

Упражнение. Напишите формально, что значит $A \leq B$.

Определение. d — верхняя граница $f(x)$ на $[a;b]$, если на этом отрезке $f(x) \leq d$ ($\forall x \in [a;b] \quad f(x) \leq d$).

Определение. Функция $f(x)$ ограничена сверху на $[a;b]$, если у нее есть верхняя граница на этом отрезке.

Порядок наших действий важен.

Правильная последовательность знакомства с формулировкой теоремы:

Интуитивная формулировка — (Формальная формулировка) — Примеры.

Аналогично мы поступаем и с определениями понятий:

Интуитивное определение — (формальное определение) — Примеры (Да-примеры, Нет-примеры).

Интуитивные формулировки даются на русском языке, а формальные на языке математической логики и теории множеств.

Порядок очень важен, понять частный случай, а потом обобщить намного проще, чем сначала понять общий случай, а потом его специализировать.

Пример. (Принцип Дирихле).

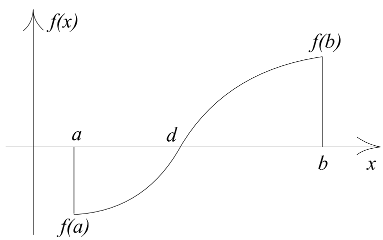
Если $n+1$ зайцев рассадить в n клеток, то хотя бы в одной клетке окажется не менее двух зайцев. (Если множество A содержит $n+1$ элемент, а множество B содержит n элементов, то вложить A в B нельзя.)

В качестве примера можно привести рисунок кроликов в клетках (в одной два кролика).

Заметим кстати, что чем больше в тексте переменных, тем менее он понятен, поэтому на кружках историю про зайцев рассказывают примерно так: Нельзя 11 зайцев рассадить в 10 клеток так, чтобы в каждой клетке было не более одного зайца.

Если непрерывная функция на концах отрезка имеет разные знаки, то где-то внутри отрезка она обращается в ноль. (Если $f(x) \in C[a;b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$ то $\exists d \in (a;b) : f(d) = 0$).

В качестве примера приводим рисунок какой-нибудь непрерывной функции.



Давать надо именно интуитивную формулировку, хотя формальная кажется короче и намного точнее.

Дело в том, что для того, чтобы понять, что здесь нужно применить теорему о нуле нам необходимо ее интуитивное понимание. А если дать сначала формальную формулировку, то хороший ученик поймет ее примерно так: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то где-то внутри отрезка она обращается в ноль.

Плохой ученик поймет (и будет учить к экзамену) формулировку примерно так:

Если эф от икс принадлежит це на абэ и эф от а умножить на эф от бэ меньше нуля, то существует дэ принадлежащая интервалу абэ такая что эф от дэ равно нулю.

Не допускать слипания понятий и теорем.

Очень любят у нас вводить большое число похожих понятий. Эскимосы тоже могут различать пятнадцать видов снега, но для начинающего это очень сложная задача. Мы должны обойтись минимальным числом базовых понятий и определения давать настолько грубыми, чтобы они позволяли безошибочно решить тот круг задач, который мы наметили для класса. Тот же принцип приложим и к теоремам.

Приведем примеры очень близких понятий, про которые можно сформулировать очень сходные теоремы: возрастает — строго возрастает — не возрастает, возрастает —- убывает — монотонна, локальный максимум —- максимум — строгий локальный максимум, максимум — минимум — экстремум, ограничена сверху — ограничена снизу — ограничена, выпукла — вогнута, предел — предельная точка, предел функции — предел последовательности, выпуклость в точке — выпуклость на интервале, возрастает в точке — возрастает на множестве, монотонна — строго монотонна, прямая — обратная теоремы, свойства — признаки.

Разберем серию *возрастает — монотонна — убывает.*

Про монотонность не говорю не слова.

Определение. Функция возрастает на интервале $(a; b)$ если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. $(\forall x_1, x_2 \in (a; b) x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1))$.

Утверждение. Если $f(x)$ непрерывно возрастает на $[a; b]$, то обратная функция $\varphi(y)$ непрерывно возрастает на $[f(a); f(b)]$.

Упражнение 1. Дать определение убывающей на отрезке функции.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать теорему об непрерывно убывающей функции.

Комментарий: таким образом как минимум в два раза сокращаю число необходимых понятий, и доказываемых теорем. А дети дома не зубрят старые теоремы, а доказывают по аналогии новые.

Я против доказывания теоремы с монотонностью. Она путает мозги, и лишает меня прекрасных контрольных вопросов и упражнений. Не ввожу понятия невозрастающей функции, но если буду это делать, то буду опираться на определение возрастающей, они запоминают одно базовое определение, а дальше на основании его генерируют производные определения. Кстати, отсутствие понятия и его определения не мешает мне задавать контрольные вопросы про невозрастающую функцию. А будет ли верна эта теорема, если неравенство станет нестрогим? Понятие возрастания, убывания в точке не ввожу, хотя дети легко сами могут это сделать. (Функция возрастает в точке, если она возрастает в некоторой окрестности этой точки).

Выпуклость — вогнутость.

Понятие вогнутости не использую, а говорю *выпукла вниз*, *выпукла вверх* на интервале. Выпуклость вниз — вверх в точке не определяется.

Предел — предельная точка.

Понятие предельной точки или не использую, или называю ее особой точкой.

Максимум — минимум — экстремум.

Понятие экстремума не используется.

Определение. a — точка минимума $f(x)$, если в некоторой окрестности точки a $f(x) \geq f(a)$ $(\exists U_a \forall x \in U_a f(x) \geq f(a))$.

Утверждение. (Ферма) Если a — точка минимума $f(x)$, то $f'(a) = 0$ или не существует.

Упражнение 1. Дать определение точки максимума.

Упражнение 2. Сформулировать и доказать теорему о максимуме.

Никаких других понятий не вводится. Когда переходим к исследованию функций, говорим о наибольшем и наименьшем значении функции. Первую и вторую теоремы Вейерштрасса формулируем так:

Утверждение. (Об ограниченности) Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Утверждение. (Вейерштрасс) Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своей точной верхней границы.

Контрольный вопрос: а будет ли $f(x)$ достигать своей точной нижней границы?

Все детали с оттенками понятия максимума — минимума могут быть обсуждены как контрольные вопросы к базовым теоремам.

Ограничено сверху — ограничено снизу — ограничено.

Определение 1. Множество M ограничено сверху, если лежит на прямой левее числа b ($M \leq b$), b называют верхней границей M.

Упражнение 1. Запишите с помощью кванторов, что значит $M \leq b$.

Упражнение 2. Пусть b — верхняя граница M, укажите еще несколько верхних границ.

Определение 2. Самая маленькая верхняя граница M называется точной верхней границей.

Контрольный вопрос: есть ли у ограниченного сверху множества самая большая верхняя граница?

Утверждение. (Лемма о точной верхней границе) Непустое, ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу.

Упражнение 3. Дайте определение ограниченного снизу множества, нижней границы, точной нижней границы.

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите лемму о точной нижней границе.

Замечание. Будем называть множество M ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.

Предел последовательности — предел функции.

Предел последовательности обозначаю $\lim x_n = a$ или $x_n \to a$.

Предел функции обозначаю $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Прямая — обратная теоремы.

Обсуждаю с детьми понятие прямой и обратной теоремы. По данной теореме мы учимся формулировать обратную. Но все утверждения формулирую, если это возможно, в виде равносильности, и у детей отпадает необходимость в ссылке на прямую или обратную теорему.

Утверждение. (Пифагор) В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Обратное тоже верно.

Утверждение. (Виет) Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$ то $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Обратное тоже верно.

Не говорю про признаки, давая несколько эквивалентных определений объекта.

Определение 1. Ромб — это параллелограмм, в котором все стороны равны.

Определение 2. Ромб — это параллелограмм, в котором диагонали взаимно перпендикулярны.

Определение 3. Ромб — это параллелограмм, в котором диагонали являются биссектрисами его углов.

Такой подход позволяет мне не только минимизировать количество материала, необходимого для заучивания, и дает богатый материал для контрольных вопросов и упражнений. Не только максимально облегчает работу учащимся. Но и позволяет эффективно бороться с явлением, которое психологи называют интерференцией памяти: близкие понятия вытесняют друг друга и перепутываются в памяти.

Классический пример интерференции памяти — решение квадратных уравнений через D или через $\frac{D}{4}$, что приводит к большому числу ошибок у учащихся, длительному и мучительному процессу запоминания обеих формул. Классическое оправдание формулы с $\frac{D}{4}$ то, что она сильно упрощает вычисления, замечу, что это не совсем так:

$$D = b^2 - 4ac = 4\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac\right).$$

Поэтому и в случае четного b, пользуясь стандартной формулой можно легко проводить вычисления.

Связи между теоремами и понятиями.

Продумывать структуру курса, максимально заводя индуктивные связи между понятиями и теоремами: везде подчеркивать аналогию, обобщение, индукцию, явно и неявно. Давать минимально необходимое число базовых понятий и теорем.

Аналогичные теоремы по возможности формулировать и доказывать аналогично, или сведением к аналогичной. Допустимы ссылки на аналогичную теорему без ее формальной формулировки и доказательства. Так, например, мы доказываем лемму о возрастающей, ограниченной сверху последовательности. А применяем об убывающей, ограниченной снизу. Доказываем лемму о знаке для непрерывных функций, а применяем лемму о знаке для предела функции.

Предел последовательности	Предел и непрерывность функций	Производная
Определение предела последовательности (определение бесконечно малой)	Определение предела функции (определение непрерывности функции)	Определение производной (определение дифференцируемости функции)
Ограниченность сходящейся последовательности	Ограниченность непрерывной функции в окрестности точки	
Единственность предела для последовательности	Единственность предела для функции	

Последовательность с положительным пределом	Сохранение знака для непрерывной функции	
Лемма о двух милиционерах для последовательностей	Лемма о двух милиционерах для функций	
Арифметические свойства предела последовательности (арифметические свойства бесконечно малых)	Арифметические свойства предела функции (арифметические свойства непрерывных функций)	Арифметические свойства дифференцируемых функций
	Непрерывность элементарных функций	Дифференцируемость элементарных функций
	Композиция непрерывных функций	Композиция дифференцируемых функций
	Непрерывность обратной функции	Дифференцируемость обратной функции
	Глобальные свойства непрерывных функций	Глобальные свойства дифференцируемых функций

Примеры: (Аналогия)

Если $f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то $f(x)$ возрастает на этом интервале. Пример: $y = x$.

Если$f''(x) > 0$ на $(a;b)$, то $f(x)$ выпукла вниз на этом интервале. Пример: $y = x^2$.

(Аналогия)

Сумма бесконечно малых бесконечно малая.

Предел суммы последовательностей равен сумме пределов последовательностей.

Предел суммы функций равен сумме пределов функций.

Сумма непрерывных функций функция непрерывная.

(Связи)

Утверждение 1. (Ролль) Если $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$ и $f(a) = f(b) = 0$, то $\exists c \in (a,b)\colon\ f'(c) = 0$.

Замечание. Теорема Ролля = Теорема Вейерштрасса + Теорема Ферма.

Утверждение 2. (Лагранж) Если $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$, то $\exists c \in (a,b)\colon\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Замечание: Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Мнемонические приемы, объяснения на пальцах и на картинках.

Для лучшего запоминания и понимания смысла понятий и утверждений, идей доказательств обязательно нужно давать объяснения с одного взгляда, доказательства в одну строчку и на пальцах, теоремы на картинках и т. п.

(Закон Архимеда) Тело, впертое и у воду выпирает на свободу с силой выпертой воды, тела впертого туды.

Биссектриса — это такая крыса, которая бегает по углам и делит угол пополам.

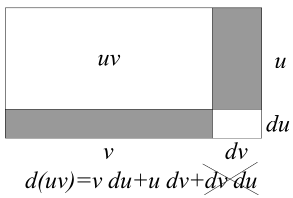
(Площадь круга)
— Интересно, а почему стучат колеса у поезда, они же круглые.
— А ты формулу площади круга помнишь?
— Да, пи эр квадрат.
— Вот квадраты и стучат.

(π) Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать число ужъ знаетъ.

(e) 2,7 год рождения Толстого год рождения Толстого $(2,718281828\ldots)$

($d(u \cdot v) = udv + vdu$) УДиВительно, Весьма Даже Удивительно.

Картинка:

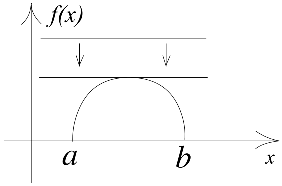


(Производная композиции, доказательство в одну строчку) $z'_x = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot y'_x$.

Объяснение на пальцах: производная — это коэффициент растяжения функцией маленьких отрезков ($dy = f'(x_0)dx$). Поэтому, если функция $f(x)$ увеличивает очень маленькие отрезки в 5 раз, а функция $g(y)$ в 3 раза, то их композиция $g(f(x))$ растягивает маленькие отрезки в $5 \cdot 3 = 15$ раз.

Упражнение. Дайте доказательство в одну строчку и объяснение на пальцах для теоремы о производной обратной функции.

(Теорема Ролля). Доказательство на картинке:



(Теорема Лагранжа)

Доказательство на пальцах: Будем понимать x — как время, а $f(x)$ как перемещение. Тогда теорема Лагранжа утверждает, что средняя скорость тела на некотором промежутке времени, равна его мгновенной скорости, в некоторый момент. Действительно, если бы мгновенная скорость тела была бы выше средней, мы бы такую среднюю скорость на участке не получили бы. Значит, был момент времени, когда мгновенная скорость была выше средней, и был момент времени, когда мгновенная скорость была ниже средней. А так как скорость тела не может изменяться скачком, был момент времени, когда мгновенная скорость равнялась средней.

Упражнение 1. Дайте доказательство на картинке теоремы Лагранжа и на пальцах для теоремы Ролля.

Упражнение 2. Обобщите теорему Лагранжа до двух функций, и приведите доказательство новой теоремы на пальцах.

(Условие минимума) Я показываю рукой, если самолет сначала пикирует вниз, а потом вверх, то это у нас минимум.

(Условие возрастания) $y = x$ (явно возрастает, а производная у нее 1, больше нуля).

(Условие выпуклости вниз) $y = x^2$ (явно выпукла вниз, а производная у нее 2, больше нуля).

(Вложенные стягивающиеся отрезки). Ключевым моментом в доказательстве ряда теорем является тот факт, что если окрестность с центром в точке а фиксирована, а отрезки стягиваются к точке а, о рано или поздно некоторый отрезок системы окажется внутри окрестности. Этот факт я иллюстрирую перед классом следующим образом: Ставлю на стол стакан с водой — точку a. Один ученик своими руками моделирует границы окрестности точки a, а я своими руками моделирую концы стягивающихся отрезков, рано или поздно мои руки, постепенно приближаясь к стакану, оказываются внутри рук ученика.

(Предел последовательности) Для лучшего запоминания понятия предела последовательности, я рассказываю историю про ослика Иа (интервал с центром в точке a, окрестность точки a) на котором сидят почти все блохи — члены последовательности. Этот ослик имеет хвостик длиной $\varepsilon > 0$. Мы должны это запомнить. Потому что если мы возьмем $\varepsilon = 0$, то ослик Иа потеряет свой хвостик и очень огорчится. И математики не любят кванторов по осликам, а предпочитают кванторы по хвостикам осликов.

(Лемма о двух милиционерах для последовательностей) Если два милиционера идут в отделение милиции, а пьяница с бутылкой водки к ним пристегнут наручниками, то он тоже окажется в отделении милиции.

(Лемма о двух милиционерах для функций) Если два милиционера ползут в отделение милиции, а пьяница (уже без бутылки водки) к ним пристегнут наручниками, то он тоже окажется в отделении милиции.

О взаимосвязях задач

П.В. Чулков

учитель математики ФМШ №2007

То, что взаимосвязано, легче
изучается и легче удерживается

Г. Фрейденталь

Как известно, решение задач — основной (возможно — единственный) способ активного усвоения математических знаний. Правильно организованная система задач может помочь школьнику, проявляющему интерес к математике, научиться видеть взаимосвязи между задачами, а выявление взаимосвязей позволяет лучше усваивать материал (неявное повторение). Такие взаимосвязи можно строить вокруг какой-нибудь одной задачи, имеющей многочисленные продолжения в других задачах. Такие продолжения Д. Пойа называл «окрестностями» задачи.

Наличие у той или иной задачи многочисленных продолжений (окрестностей) служит показателем дидактической ценности задачи. Другой показатель дидактической ценности — наличие нескольких решений, использующих различные математические идеи, посредством которых можно также устанавливать связи между задачами.

Задачу, на основе которой сформирована окрестность, принято называть базисной задачей. Вашему вниманию предлагаются материалы, представляющие собой окрестность задачи: «Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$».

Помимо базисной задачи представлены взаимосвязанные с ней задачи из различных разделов школьного курса (алгебраические выражения и вычисления, рациональные уравнения и их системы, иррациональные уравнения, алгебраические неравенства). Желательно, чтобы материал использовался в течение длительного промежутка времени.

Материал может быть использован для работы с математическими и профильными классами, а также во внеклассной работе, при этом предложенная система задач можно быть расширена.

Базисная задача

Задача 1. Разложите на множители выражение:

$$f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

Решение. *Первый способ.* Предположим, что один из множителей равен $a+b+c$.

$$(a^3+a^2b+ab^2)-a^2b-ab^2+(b^3+b^2c+ca^2)-\\ -b^2c-ca^2+(c^3+c^2a+ac^2)-c^2a-ac^2-3abc=\\ =(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)-(ab+bc+ca)(a+b+c).$$

Второй способ.

$$a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3abc-3ab(a+b)=\\ =a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3ab(a+b+c)=\\ =(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=\\ =(a+b+c)\big((a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\big)=\\ =(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Третий способ. Рассмотрим уравнение: $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+$ $+ca)x-abc=0$, корни которого числа a, b и c.

Получим:

$$f(a)=0,\quad a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0.$$
$$f(b)=0,\quad b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0.$$
$$f(c)=0,\quad c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0.$$

Сложим полученные равенства и т. д.

Получен **Результат 1*a*:**

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Следствие. Можно обобщить (Р1a), решив квадратное уравнение относительно a и тем самым разложить $f(a,b,c)$ на линейные множители (*первый способ*):

Перепишем уравнение в виде: $a^2-a(b+c)+b^2+c^2-bc=0$. Найдем дискриминант $D=-3(b-c)^2$, откуда $a_{1,2}=\dfrac{1}{2}(b+c)\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big(b-c\Big)$

и $a_1 = \Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)b + \Big(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)c$, $a_2 = \Big(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)b + \Big(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)c$. Обозначим $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega$, тогда $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\omega^2$ и $\omega^2+\omega+1=0$.

Получен **Результат 1*б*:**

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c), \text{ где } \quad \omega^2+\omega+1=0.$$

Второй способ. Можно раскрыть скобки, учитывая, что из равенства $\omega^2+\omega+1=0$ следует равенство $\omega^3=1$.

Доказательство неравенств

Полученная формула может быть использована для доказательства неравенства Коши (для трех переменных).

Задача 2*a*. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$, причем равенство достигается, если $a=b=c$.

Решение. *Первый способ.* $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+ + b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqslant 0$, что следует из неравенств $a+b+c \geqslant 0$ и $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ (упражнение 14).

Второй способ. Следует из результата **2*б*** при $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$.

Третий способ. Следует из результата упражнения 35: если $xyz=1$, то $x+y+z \geqslant 3$. Выполним подстановку: $x=\frac{a^2}{bc}$, $y=\frac{b^2}{ca}$, $z=\frac{c^2}{ab}$.

Результат 2*a*: $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$, причем равенство достигается, если $a=b=c$.

Задача 2*б*. Докажите неравенство: $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

Решение. *Первый способ.* Следует из результата задачи 2a при $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$.

Второй способ. Воспользуемся результатом упражнения 39.

В неравенстве $\frac{x+y+z+p}{4} \geqslant \sqrt[4]{xyzp}$, определим p из соотношения

$$\frac{x+y+z+p}{4}=\frac{x+y+z}{3}, \text{откуда} \quad p=\frac{x+y+z}{3}.$$

Получим: $\frac{x+y+z+p}{4}=\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[4]{xyzp}=\sqrt[4]{xyz\frac{x+y+z}{3}}$, откуда $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^4 \geqslant xyz\frac{x+y+z}{3}$, $(n\frac{x+y+z}{3})^3 \geqslant xyz$, $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

Третий способ. Следует из результата упражнения 35: если $xyz = 1$, то $x+y+z \geqslant 3$. Выполним подстановку: $x = \sqrt[3]{\dfrac{a^2}{bc}}$, $y = \sqrt[3]{\dfrac{b^2}{ca}}$, $z = \sqrt[3]{\dfrac{c^2}{ab}}$.

Результат 2*б*: $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$, равенство достигается при $x = y = z$.

Кубическое уравнение

Задача 3*a*. Найдите один из корней кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Решение. Представим выражение $x^3 + px + q$ в виде произведения. Для этого воспользуемся результатом 1*a*. Пусть $p = -3ab$, $q = a^3 + b^3$.

Получим: $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$, $(x+b+c)(x^2+b^2+c^2-xb-bc-cx) = 0$. Осталось решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q, \\ a^3b^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Числа a^3, b^3 — корни квадратного уравнения $z^3 - qz - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Один из корней кубического уравнения может быть записан в виде: $x_1 = -a - b$, что после преобразований дает формулу Кардано (результат 3*a*):

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Задача 3*б*. Найдите три корня кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Решение. Начнем решение так же, как в задаче 3*a*. Воспользуемся результатом 1*б*, получим уравнение: $(x+b+c)(x+\omega b+\omega^2 c)(x+\omega^b+\omega c) = 0$, откуда следует, что

$$x_1 = -b - c, \qquad x_2 = -\omega b - \omega^2 c, \qquad x_3 = -\omega^2 b - \omega c.$$

После преобразований получим:

$$x_2 = \omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$
$$x_3 = \omega^2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Подробно методы решения кубического уравнения рассмотрены в книге С.Б. Гашкова.

Результат 3*в*. Корни x_1, x_2, x_3 и коэффициенты p, q и t кубического уравнения $x^3+px^2+qx+t=0$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q, \\ x_1x_2x_3=t. \end{cases}$$

Следует из решения упражнений 42, 43.

Можно решить (относительно p, q и t) систему линейных уравнений, полученных подстановкой корней x_1, x_2, x_3 в кубическое уравнение x^3+ $+px^2+qx+t=0$.

Упражнения

1. Докажите, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2. Докажите, что если $a^3+b^3+c^3=3abc$, то либо $a+b+c=0$, либо $a=b=c$.

Разложите на линейные множители:

3. $(a+b)^3-a^3-b^3$.

4. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

5. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

6. $(a+b+c)^3+(-a-b+c)^3+(a-b-c)^3+(-a-b+c)^3$.

7. $a^3\pm b^3$.

8. При каких значениях k многочлен $x^3+y^3+z^3+axyz$ делится на $x+y+z$?

Сократите дроби:

9. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$.

10. $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$.

Уничтожьте иррациональность в знаменателе:

11. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

12. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

13. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

14. Найдите xyz, если $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^3+y^3+z^3=c^3$.

15. Если

$$x+y+z=a+b+c,$$
$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$$
$$x^3+y^3+z^3=a^3+b^3+c^3,$$

то при любом натуральном n выполнено равенство:

$$x^n+y^n+z^n=a^n+b^n+c^n.$$

Решите системы уравнений:

16. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+zx=a^2, \\ xyz=a^3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$

Решите уравнение:

19. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}=1$.

20. $\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{2-6x}{x}}=1$.

21. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

22. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$.

23. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

24. Сколько действительных корней имеет уравнение:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0,$$

если числа a, b и c различны?

Докажите неравенства для неотрицательных значений a, b и c:

25*. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

26*. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant abc(a+b+c)$.

27*. $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b} \geqslant a+b+c$.

28. $a^4+b^4+c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

29. $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$.

30*. $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$.

31. $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$.

32. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}$.

33. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

34. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 9abc$.

35. Если $abc=1$, то $a+b+c \geqslant 3$.

36. Если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$.

37. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 3$.

38. $a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4abcd$.

39. $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

40. Докажите, что среди всех параллелепипедов, сумма трёх измерений (длины, ширины и высоты) которых постоянна, наибольший объём имеет куб.

41. Представьте в виде многочлена стандартного вида: $(x-a)(x-b)(x-c)$.

42. Решите уравнение $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc=0$.

43. Известно, что $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$. Докажите, что $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Ответы, решения, комментарии

1. *Первый способ.* Следует из результата 1a.

Второй способ. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=0$, откуда $a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)=0$, но $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ и т. д.

Третий способ. Возведем в куб равенство $a+b=-c$. Получим: $(a+b)^3=-c^3$, откуда следует: $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc$.

2. Следует из результата 1a.

3. *Ответ*: $3ab(a+b)$.

Первый способ. Можно раскрыть скобки...

Второй способ. Воспользуемся результатом упражнения 1. Получим: $(a+b)^3-a^3-b^3=(a+b)^3+(-a)^3+(-b)^3=3ab(a+b)$.

4. *Ответ*: $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

Первый способ. Имеем: $(x+y+z)^3-x^3-(y^3+z^3)=(y+z)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)$ и. т. д.

Второй способ. Пусть $f(x)=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$. В квадратном уравнении $f(x)=0$ число $-y$ является корнем. Следовательно, $f(x)$ делится на $x+y$. Аналогично, $f(x)$ кратно $y+z$ и $z+x$. Получим: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=k(x+y)(y+z)(z+x)$. Осталось методом неопределенных коэффициентов найти k и сделать проверку.

5. *Ответ*: $3(x-y)(y-z)(z-x)$.

Следствие результата упражнения 1, при подстановке $a=x-y$, $b=y-z$, $c=z-x$.

6. *Ответ*: $24abc$.

Первый способ. Следствие результата упражнения 3, $x=a+b-c$, $y=b+c-a$, $z=c+a-b$.

Второй способ. Раскроем скобки...

7. *Ответ*: $(a\pm b)(a\pm\omega b)(a\pm\omega^2 b)$.

Первый способ. Воспользуемся известной формулой $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$. Далее найдем корни квадратного трехчлена $f(a)=a^2\mp ab+b^2$ и т. д.

Второй способ. Воспользуемся результатом 1*б* при $c=0$.

8. *Ответ*: $a=3$.

Первый способ. Из результата 1 следует, что: $x^3+y^3+z^3-axyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+(3-a)xyz$. Следовательно, $a=3$.

Второй способ. Многочлен $f(x) = x^3 + y^3 + z^3 - axyz$ кратен $x + y + z$ тогда и только тогда, когда $f(-y-z) = -(y+z)^3 + y^3 + z^3 + a(y+z)yz = 0$, откуда $a = 3$.

9. *Ответ*: $\dfrac{a+b+c}{2}$.

Воспользуемся результатом 1.

10. *Ответ*: $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Воспользуемся результатом упражнения 5:

$$\frac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3} = \frac{3(a^2-b^2)\cdot(b^2-c^2)\cdot(c^2-a^2)}{3(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)},$$

и т. д.

11. *Ответ*: $\dfrac{7\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}-3}{15}$.

Указание. Воспользуйтесь результатом 1.

12. *Ответ*: $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$.

13. *Указание.* Воспользуйтесь результатом 1 и умножьте на неполный квадрат суммы.

14. *Ответ*: $\dfrac{1}{6}(c^3+3b^2-a^2)$.

Воспользуемся результатом 1a и тождеством: $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$. Получим: $a^2 = b^2 + 2xy + 2yz + 2zx$, $xy + yz + zx = \dfrac{a^2-b^2}{2}$, откуда следует: $c^3 - 3xyz = a(b^2 - \dfrac{a^2-b^2}{2})$ и т. д.

15. *Указание.* Докажите, что тройки чисел x, y, z и a, b, c корни одного и того же кубического уравнения.

16. *Ответ*: 6 перестановок, которые можно получить из тройки $(a; ai; -ai)$.

Первый способ. Воспользуемся теоремой Виета и решим уравнение $t^3 - at^2 + a^2t - a^3 = 0$. Получим: $t^2(t-a) + a^2(t-a) = 0$, $(t-a)(t^2+a^2) = 0$ и т. д.

Второй способ. Уравнение $z^3 - az^2 + a^2z - z^3 = 0$ можно получить, подставив $x + y$ из первого уравнения во второе, затем выразив xy из полученного уравнения в третье.

17. *Ответ*: $(2;-2;1)$, $(-2;2;1)$, $(2;1;-2)$, $(-2;1;1)$, $(1;-2;2)$, $(1;2;-2)$.

Воспользовавшись равенствами: $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+$ $+2yz+2zx$ и результатом $1a$, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ xyz=-4. \end{cases}$$

Числа x, y и z — корни кубического уравнения $t^3-t^2-4t+4=0$, откуда $t_1=1$ и $t^2-4=0$.

18. *Ответ*: $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$.
Указание. Поступим аналогично задаче 17.

19. *Ответ*: 1.

20. *Ответ*: -1; $\dfrac{2}{7}$.

21. *Ответ*: -3; 4.

22. *Ответ*: 0; ± 1, $\pm\sqrt{\dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}}$.

23. *Ответ*: -1.
Из уравнения $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{1-x}=0$ следует уравнение $x+1=\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{1-x}$ (упражнения 1 и 2), откуда находим корень $x=-1$. Осталось решить уравнение $(x+1)^2=(3x+1)(1-x)$ корни которого посторонние (проверка).

24. *Ответ*: 2 корня.
Пусть для определенности $a>b>c$. Пусть $f(x)=(x-a)(x-b)+$ $+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$. Тогда: $f(a)=(a-b)(a-c)>0$, $f(a)=$ $=(b-a)(b-c)<0$. Из свойств параболы следует, что график $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух точках.

25. *Первый способ.* Достаточно раскрыть скобки в неравенстве: $(a-$ $-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$.
Второй способ. Квадратный трехчлен $f(a)=a^2-a(b+c)+b^2+c^2-bc$ неотрицателен при всех a, так как $D=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)=$ $=-3(b-c)^2\leq 0$.
Третий способ. Следует из векторной записи неравенства Коши-Буняковского $\overline{m}\cdot\overline{n}\leq|\overline{m}|\cdot|\overline{n}|$ для векторов $\overline{m}=(a,b,c)$ и $\overline{n}=(b,c,a)$.

26. Следует из результата неравенства 25 после подстановки ab, bc и ca.

27. *Первый способ.* Следует из результата неравенства 26 (домножение на abc).

Второй способ. Следует из результата неравенства 25 (подстановка $\sqrt{\dfrac{ab}{c}}$, $\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$ и $\sqrt{\dfrac{ca}{b}}$.

28. Применим результат неравенства 25, а затем результат неравенства 26.

29. Раскроем скобки и применим результат неравенства 25.

30. *Первый способ.* Следует из неравенства упражнения 25.

Второй способ. Следует из результата упражнения 24, поскольку дискриминант уравнения неотрицателен.

31. Воспользуемся результатом 2*б*.

32. Воспользуемся результатом неравенства 25.

33. Перемножим неравенства $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ и $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}}$.

34. Аналогично доказательству неравенства упражнения 33.

35. *Первый способ.* Следует из результата 2*б*.

Второй способ. Докажем методом «от противного». Именно, пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $abc=1$, но $a+b+c<3$. Получим: $a^2b+ab^2+abc<3ab$, $ab^2+(a^2-3a)b+1<0$.

Следовательно, дискриминант $f(b)=ab^2+(a^2-3a)b+1$ положителен, то есть $(a^2-3a)^2-4a=a^3-6a^2+9a-4=(a-1)^2(a-4)>0$, то есть $a>4$. Противоречие.

Третий способ. Если $a=b=c=1$, то $a+b+c=3$. Иначе: пусть $a>1$, $b<1$. Тогда $(a-1)(b-1)<0$, откуда $a+b>1+ab$, $a+b+c>$ $>1+ab+c$. Если $ab=c=1$, то $a+b+c>3$.

Иначе: пусть, например, $ab>1$, $c<1$. Тогда $ab+c>1+abc=2$ и $a+b+c>3$. Случай $ab<1$, $c>1$ доказывается аналогично.

Четвертый способ. Воспользуемся результатом упражнения 37. Именно: пусть $x=\dfrac{a}{b}$, $y=\dfrac{b}{c}$, где a, b и c — некоторые положительные числа. Тогда из условия $xyz=1$ следует, что $z=\dfrac{c}{a}$, откуда следует требуемое неравенство.

36. Если $a=b=c=\dfrac{1}{3}$, то $a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{3}$. Иначе: пусть $a>\dfrac{1}{3}$, $b<\dfrac{1}{3}$ и $a^2+b^2>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(a+b-\dfrac{1}{3}\right)^2$, $a^2+b^2+c^2>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(a+b-\dfrac{1}{3}\right)^2+c^2$.

Если теперь $a+b-\dfrac{1}{3}=c=\dfrac{1}{3}$, то $a^2+b^2+c^2>\dfrac{1}{3}$.

Иначе: пусть $a+b-\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{3}$, $c<\dfrac{1}{3}$ (случай $a+b-\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3}$, $c>\dfrac{1}{3}$ доказывается аналогично).

Тогда: $\left(a+b-\dfrac{1}{3}\right)^2+c^2>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(a+b+c-\dfrac{1}{3}\right)^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$, $a^2+b^2+c^2>\dfrac{1}{3}$.

37. Пусть для определенности $a\le b\le c$.

Первый способ. Следует из неравенства упражнения 35.

Второй способ. Поскольку $a\le b\le c$, то:

$$\frac{b}{a}\geqslant 1,\qquad \frac{c}{b}\geqslant 1\qquad \text{и}\qquad \left(\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}-1\right)\geqslant 0.$$

Раскроем скобки и, после преобразований получим: $\dfrac{c}{a}\geqslant\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}-1$, откуда

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}-1=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)-1\geqslant 3.$$

38. Следует из неравенства упражнения 25 и неравенства $a^2+b^2\geqslant 2ab$: $x^4+y^4+z^4+p^4\geqslant 2x^2y^2+2z^2p^2=2(x^2y^2+z^2p^2)\geqslant 4xyzp$.

39. Следует из неравенства упражнения 38 при подстановке $a=x^4$, $b=y^4$, $c=z^4$, $d=p^4$.

40. Пусть x, y и z — длина, ширина и высота параллелепипеда и $x+y+z=p$, тогда $\dfrac{p}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}=\sqrt[3]{V}$ и $x=y=z$, что следует из результата 2*б*.

41. *Ответ*: $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc=0$.

42. *Ответ*: a, b, c.

43. Заметим, что a, b, c корни уравнения $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc=0$. Если $x<0$, то левая часть уравнения отрицательна.

Задачи для самостоятельного исследования

1. Рассмотрим определители вида, строки которых получены циклической перестановкой первой строки. Определитель такого вида принято называть циркулянтом. Например:

$$C_2(x,a)=\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix},\ C_3(x,a,b)=\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ a & b & x \end{vmatrix},\ C_4(x,a,b,c)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix}.$$

1) Запишите формулы для вычисления указанных определителей.

2) Убедитесь, что из полученных выражений можно получить формулы корней уравнений 2-ой, 3-ей и 4-ой степени. Докажите, что:

а) всякое уравнение соответствующей степени можно привести к виду $C_2(x,a)=0$, $C_3(x,a,b)=0$, $C_4(x,a,b,c)=0$, где a, b и c некоторые числа.

б) для случая уравнения 2-й, 3-й и 4-й степени преобразования можно провести путем решения уравнений степеней более низких, чем исходное уравнение или двучленных уравнений;

в) исследуйте возможность решения указанным методом уравнений 5-ой степени.

2. Исследуйте вопрос о решении уравнения 4-ой степени, посредством определителя:

$$E_4(x,a,b,c)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

Именно:

а) представьте $E_4(x,a,b,c)$ в виде произведения линейных множителей;

б) докажите, из полученного выражения можно получить формулу корней уравнения 4-й степени, решив уравнение 3-й степени (способ Эйлера).

Литература

[1] Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. *Задачи по элементарной математике.* — М.: Наука, 1971.

[2] Гашков С.Б. *Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях.* — М.: МЦНМО, 2006.

[3] Дорофеев Г.В. *О составлении циклов взаимосвязанных задач.* // Математика в школе, №6, 1983.

[4] Кречмар В.А. *Задачник по алгебре.* Изд. 5-е. М.: Наука, 1964.

[5] Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И. *Задачи по элементарной математике.* 2-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1962.

[6] Моденов П.С. *Специальный курс элементарной математики.* — М.: Высшая школа, 1960.

[7] Пойа Д. *Математическое открытие.* М.: Наука, 1976.

[8] Прасолов В.В. *Задачи по алгебре, арифметике и анализу.* — М.: МЦНМО, 2007.

[9] Седракян Н.М., Авоян А.М. *Неравенства. Методы доказательства.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[10] Сивашинский И.Х. *Неравенства в задачах.* М.: Наука, 1967.

[11] Страшевич Е., Бровкин Е. *Польские математические олимпиады.* — М.: Мир, 1978.

[12] Харадзе А.К. *Определитель-циркулянт как единый алгебраический аппарат для решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степеней.* // Математическое просвещение, №5, 1960.

[13] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.* — 6-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Из опыта работы

О.А. Князева

учитель математики школы №1353

В нашей школе для учащихся 10 класса был разработан курс: «Практикум по решению задач по геометрии» и работа по нему проходила на занятиях математического кружка. Мне хотелось представить одну из работ ребят, проделанную в рамках подготовки к математической неделе, которая традиционно проходит в нашей школе в конце первого полугодия. Мы разработали интегрированное, обобщающее занятие — турнир для десятиклассников, по итоговому повторению тригонометрии. Тема: использование тригонометрии в других прикладных науках и отраслях производства.

В курсе 8–9 классов тригонометрический материал разбросан по планиметрии и часто не пользуется особой любовью школьников, считающих его не совсем геометрическим. К середине 10 класса, когда курс тригонометрии в школе заканчивается, а на уроках стереометрии мы все чаще в задачах возвращаемся на плоскость (рассматриваем сечения различных пространственных фигур), я считаю ребятам необходимо тщательно повторить ряд вопросов из планиметрии и сделать так, чтобы максимально заинтересовать учащихся.

Мы можем немного «поиграть» тригонометрическими фактами: предложить непривычные вопросы, продемонстрировать ранее ускользавшие от ребят связи тригонометрии с геометрией, алгеброй, физикой, астрономией и даже историей.

Итак, перед ребятами были поставлены цели:

Общеобразовательные:

1. Обобщить знания, умения и навыки, полученные на уроках тригонометрии и планиметрии.

2. Применить полученные знания при решении прикладных задач.

Развивающие:

1. Формировать умения находить взаимосвязи между различными науками и реальными жизненными ситуациями.

2. Формирование у учащихся понятий о научной организации труда.

3. Формирование умения моделировать процессы современного производства и строительства.

Воспитательные:

Проверить сформированность качеств знаний: прочность, глубину, оперативность мышления.

Ребята работали по трем направлениям:

— поиск задач по тригонометрии, которые вызывают неподдельный интерес у учащихся;

— поиск задач по планиметрии на повторение, которые можно решить, используя тригонометрические формулы;

— разработка текстов прикладных задач с использованием геометрии и тригонометрии. На занятии будет предложена задача о лазерном шоу, сам текст которой должен привлечь ребят к реальной проблеме, справиться с которой им помогут знания тригонометрии. И задача о строительстве оросительного канала, в которой ребята попробуют смоделировать процесс современного строительства, но при этом столкнутся с проблемой, справиться с которой им предстоит, лишь изучив следующий материал 10-го класса, а именно понятие производной. Учителю хотелось подвести учеников к новому разделу математики, заранее сообщив им, что:

«Производная — это фундаментальное понятие в математике».

«Производная — средство для исследования процессов действительности и современного производства».

Для придания повторению большей динамичности и азарта классы были представлены командами игроков и болельщиков. Занятие проходило в большой аудитории, снабженной досками, проектором, можно использовать интерактивную доску. Были использованы следующие формы работы:

Эстафета.

Эту форму работы можно эффективно использовать в начале любого урока, когда надо или быстро перестроить мысли учащихся на рабочий лад, или повторить определенную тему, или оценить степень усвоения того или иного материала, или с пользой «скоротать» время, пока кто-нибудь из учеников выносит на доску важный момент домашней работы.

Блиц-опрос.

Командное соревнование, время обдумывания ограничено. Эта форма используется для придания динамичности и азарта повторению.

Имея цель вовлечь в решение всю команду, я предлагаю отвечать на вопросы разным учащимся, а обсуждать вместе.

Метод совместного обсуждения.

Есть ученики, которые испытывают вообще страх перед задачей, особенно перед геометрической, тогда их можно вызывать вместе с одноклассником, равным по силе, но более уверенным в себе. В этом случае решение рождается в результате совместного обсуждения. Когда решение найдено, его представляет кто-нибудь один из авторов. Ситуация складывается еще любопытнее, если одну задачу решают сразу две пары учеников, и каждая пара состоит из мальчика и девочки. Девочка выбирается сильная по знаниям, но излишне застенчивая, мальчик — думающий, но ленивый. Именно подбор такой группы заставляет каждого из них работать активно, концентрировать свое внимание, использовать все свои силы, способности для достижения цели. Класс же получает наслаждение от разных способов решения задачи и от оценки работы каждой группы у доски.

Творческое домашнее задание.

Ход занятия

Ведущий. Вначале мы расскажем вам притчу о Шартрском соборе.

«Путник спросил трех его строителей, кативших по дороге тачки с камнями: «Что вы делаете?»

Один сказал: «Везу тачку, пропади она пропадом!»

Второй сказал: «Зарабатываю на хлеб. Семья».

Третий сказал: «Я строю Шартрский собор!»

Вы должны знать и понимать, что «математика» — это орудие, с помощью которого человек познает и покоряет окружающий его мир.

Сегодня мы попробуем соединить между собой два слова.

Отгадайте их.

Перед вами математическая шарада:

Из чисел вы мой первый слог возьмите,
Второй из слова «гордецы».
А третьим лошадей вы погоните,
Четвертым будет блеянье овцы.
Мой пятый слог такой же, как и первый,
Последней буквой в алфавите является шестой,
А если отгадаешь ты все верно,
То в математике раздел получишь ты такой.

(*Три-го-но-ме-три-я*)

Продолжи мысль А.С. Пушкина:
«*Вдохновение нужно в поэзии, как в ………*»

(*геометрии*)

Обобщим сегодня наши знания по этим двум предметам.

Разминка

«Книга книгой, а мозгами двигай».
В.В. Маяковский

Отвечаем, кто быстрее, подняв руку:

1) Пропорциональны ли стороны треугольника его углам? (*Нет, стороны пропорциональны синусам противолежащих углов.*)
2) Можно ли использовать теорему синусов для определения вида треугольника по его углам? (*Нет, поскольку синус угла от* 0° *до* 180° *принимает только положительные значения.*)
3) Почему в прямоугольном треугольнике косинус острого угла всегда меньше единицы? (*Катет всегда меньше гипотенузы, отношение любого катета к гипотенузе всегда меньше* 1.)
4) Зависит ли косинус острого угла прямоугольного треугольника от размеров и расположения треугольника? (*Нет.*)
5) Как построить угол, если тангенс этого угла равен 2?(*Построить прямоугольный треугольник, у которого противолежащий катет в два раза больше прилежащего.*)
6) Почему на инженерном микрокалькуляторе, имеющем клавиши для вычисления синуса, косинуса и тангенса угла, нет клавиши для вычисления котангенса? (*Такой калькулятор оснащен клавишей для вычисления числа, обратного данному, а котангенс и тангенс являются взаимообратными числами.*)

Гейм 1.

Индивидуальная эстафета

«Торопись не спеша …»
«Числа правят миром».
Пифагор

Выполни задания не по порядку, а следующим образом: сначала всегда выполняется первое задание; число, полученное в результате его выполнения, есть номер задания, которое надо выполнить следом; выполнив его, получаем номер следующего задания и т. д. Окончательный ответ, записанный на листочке или в тетради, ученик показывает учителю (молча).

1) Сколько корней имеет уравнение $\sin^2 x = 0,5$ на $[0; 2\pi]$?

Ответ: 4.

2) Вычислите $\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|} - 2008^{\sin 2008\pi}$.

Ответ: 0.

3) Сколько решений имеет неравенство $\cos^2(x) \geq \sin\dfrac{\pi}{2}$ на $[-2\pi; 2\pi]$?

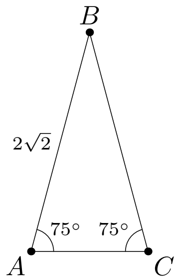
Ответ: 5.

4) Сколько гласных букв в имени автора теоремы, которую можно рассматривать как частный случай теоремы косинусов?

Ответ: 3.

Теорема косинусов впервые была доказана в геометрической форме во второй книге «Начал» Евклида. В современной тригонометрической форме она впервые была сформулирована в XVI веке французским ученым Франсуа Виетом.

5) Вычислите площадь треугольника, используя данные чертежа:



Ответ: 2.

Гейм 2.

Решение прикладной задачи

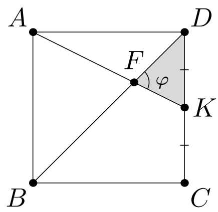
«В геометрии нет царской дороги».
Евклид «Начала».

К доске вызываются два ученика для совместного обсуждения. Когда решение найдено, его представляет кто-то один из авторов. Другой поправляет ход решения. На месте решают все, ученики могут показать свое решение жюри.

Задача о лазерном шоу.

При постановке лазерного шоу была задумана следующая схема:

Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Источник света помещен в точку F — точку пересечения диагонали BD и отрезка AK. Необходимо задать значение угла поворота источника света, такое, что световой поток охватывал бы площадь треугольника DFK, т. е. значение $\angle\varphi$.



Ответ: $\operatorname{arctg} 3$.

Гейм 3.

Гонка за лидером

(*время гейма задает учитель*)

Девиз: «*Мало иметь хороший ум, главное — хорошо его применять*».
Рене Декарт.

Я предлагаю вам ответить на мои вопросы. Ответ команды — 2 балла, ответ команды соперников — 1 балл. Время на размышление не более 1 мин. *Ответив, команда выбирает номер вопроса для команды соперника. Выходить к доске должны разные участники, а обсуждать вместе.* Начинает гейм команда, первая ответившая на вопрос:

Сколько решений имеет неравенство $\sin\frac{x}{2} \geq 2^{\sin\frac{\pi}{2}}$?

Ответ: решений нет.

1) В какой четверти находится угол α, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

Ответ: такого угла не существует.

2) Найдите произведение тангенсов острых углов прямоугольного треугольника.

Ответ: 1.

3) Синус острого угла параллелограмма равен $\frac{3}{5}$. Найдите косинус тупого угла этого параллелограмма.

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

4) Определите знак произведения $\operatorname{tg} 2 \cdot \operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 5 \cdot \cos 1$.

Ответ: отрицательный.

5) Косинус суммы двух углов треугольника равен $0,3$. Имеется ли среди углов треугольника тупой угол?

Ответ: да.

6) α, β, γ — углы треугольника. Какой знак имеет сумма $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$?

Ответ: положительный.

7) Может ли существовать такой треугольник, у которого углы 30°, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$?

Ответ: нет.

8) Могут ли два угла параллелограмма быть равными $\frac{\pi}{19}$ и $\frac{17\pi}{38}$?

Ответ: нет.

9) Хорда AB образует с диаметром AC окружности угол α. Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R.

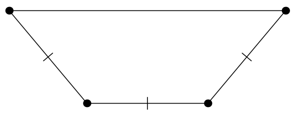
Ответ: $2Rcos\alpha$.

10) (дополнительный) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Гейм 4.

Используем метод совместного обсуждения, можно вызвать две пары учеников по одной от каждой команды.

Задача 1. Оросительный канал имеет форму равнобокой трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию (см. рисунок). При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь максимальную площадь?



Вспомогательные вопросы:

1. *От чего будет зависеть величина площади трапеции?*
2. *Найдем площадь данной трапеции в общем виде.*

3. *Вспомним слова венгерского математика Д. Пойя:* *«Мы будем доказывать, но и догадываться будем».*

Какие варианты для величины угла наклона вы бы предложили? *Подставим в условие угол в* 45° *и* 60°. *Сравним значения площадей.*

Вопрос о наибольшей площади остается для нас пока открытым, только к концу десятого класса вы получите аппарат для решения данной практической задачи, когда познакомитесь с одним из фундаментальных понятий математики, понятием производной. Понятие производной возникло в XVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики, астрономии и математики.

Задача 2 (архитектурная).

В одном из парков было решено поставить памятники известным теоремам математики.

Какой постамент *цилиндрической формы* можно предложить для установки памятника теореме синусов, если архитектор предложил его в виде *прямой треугольной призмы, в основании которой лежит треугольник с углами* 70° *и* 80° *и наименьшей стороной равной* 1 *м.*

Единственное условие: все памятники выполнены в стиле минимализма, то есть площадь опоры должна быть минимальной.

Творческое домашнее задание:

1. Найти историческую справку о любой из известных теорем математики и придумать для этой теоремы памятник. Задайте команде противника вопросы об этом памятнике. (*Для участников математического КВН*).

2. Придумать реальную ситуацию, при которой нужно доказать, что прямые $y = 3x + 1$ и $y = 6 - 2x$ пересекаются под углом 45°. Решить эту задачу.

Итог:

Сегодня мы лишь затронули связи между различными разделами математики, но изучая дальше эту науку, вы познакомитесь и с другими областями науки и техники, где с успехом сможете применить ваши математические способности.

Друг мой! Знаешь ты уже
Вычитанье и сложенье,
Умноженье и деленье.
Просто всем на удивленье.
Так дерзай! Пусть славы эхо
О твоих гремит успехах.

Станешь ты, хоть скромен вид,
Знаменитей, чем Евклид!

Спасибо за работу.

И для релаксации несколько легеньких вопросов:

1. Какая теорема в старину называлась теоремой «невесты»?
A) Теорема Фалеса;
B) Теорема Виета;
C) теорема Пифагора.
Ответ: C. Чертеж напоминал пчелу, что на греческом языке означало так же невесту, нимфу.

2. Что означает с древнеарабского слово «алгебраист»?
A) ученый-математик;
B) чертежник;
C) костоправ.
Ответ: C.

3. Квадрант — это
A) координатная четверть;
B) геометрическая фигура;
C) степень числа.

4. Угол в два градуса рассматривают в лупу, увеличивающую в 4 раза. Какой величины покажется угол?
A) 8°;
B) 16°;
C) 2°?

5. Сторону квадрата увеличили на 10%. На сколько процентов увеличится площадь квадрата?
A) на 20%;
B) на 10%;
C) на 21%.
Ответ: C.

Всероссийская заочная многопредметная школа и заочное обучение школьников сегодня

А.А. Марачев

учитель математики школы №179,

преподаватель ОЛ ВЗМШ

Различных заочных школ и курсов для школьников сегодня довольно много, они существуют при различных ВУЗах, таких как МГУ, МФТИ, МИФИ, иногда при отдельных факультетах, а иногда и сами по себе. С распространением Интернет появляется все больше программ заочного обучения школьников с помощью компьютера. Но хочется поговорить скорее о «классических» заочных школах, в которых преподавание ведется по старинке, без использования каких-либо компьютерных технологий. Охватить их все довольно сложно, поэтому речь пойдет здесь скорее только про одну из таких школ — открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» при МГУ или попросту ОЛ ВЗМШ. Однако многое в работе ВЗМШ свойственно и другим заочным школам, и на ее примере можно понять, что такое заочная школа сегодня.

Возникла ВЗМШ более сорока лет назад, в 1964 году, и называлась она тогда заочной математической школой. В то время, в середине 60-х годов, в стране появились и продолжали возникать первые математические кружки, специализированные школы и классы. Однако все это происходило в крупных городах, а потому оставалось доступным только школьникам этих городов. И даже те немногие появившиеся школы-интернаты могли удовлетворить потребности только малой части одаренных школьников. По замыслу создателей заочная школа была призвана помочь в занятиях математикой школьникам в любом месте нашей страны, там, где может быть нет не то чтоб спецшкол, а иногда даже квалифицированных учителей, способных ответить на все возникающие у школьника вопросы.

Специально для учащихся заочной школы были написаны книги, которые посылались им вместе с заданиями и указаниями по их выполнению. Многие из них не предполагали знаний той темы, которой они были посвящены, поскольку не известно заранее, изучена ли уже данная тема в основной школе или нет, насколько подробно и глубоко она изучена и освоена учащимся. Но это не означало, что книги были не интересны сильным учащимся из хороших школ. Во-первых, материал не всегда преподносился в той же форме, как и в школьном учебнике, что давало возможность взглянуть с другой стороны на уже известные вещи. Во-вторых, даже в хорошо известной теме всегда находится много своих тонкостей и хитростей, на которые полезно обратить внимание, задуматься. Ну а заключительная часть такой книги зачастую далеко выходила за рамки школьной программы.

По полученным книгам и пособиям учащиеся должны были регулярно, примерно раз в месяц, выполнять задания и присылать свои решения. Далее эти решения проверялись, ошибки или недочеты комментировались преподавателем. Если же задачу не получалось решить, то преподаватель обычно не писал решения, а давал такие указания и подсказки, которые помогли бы школьнику самостоятельно найти решение. В результате появлялась возможность переделать работу, исправить свои ошибки и повысить оценку.

С тех пор прошло много лет, школа превратилась из математической в многопредметную — появились биологическое, химическое, филологическое и другие отделения. Сейчас этих отделений порядка десяти и охватывают они практически все предметы школьной программы. Есть и какие-то пока еще специфические для стандартной школы отделения, такие как отделения экономики и права.

Помимо индивидуального обучения появилась и другая форма — «коллективный ученик». В этом случае на обучение группы школьников заявка присылается от школы или учителя. Каждому из учеников группы, а также учителю, посылается комплект книг и пособий. Далее учитель по своему усмотрению организует изучение каждой темы и выполнение заданий, иногда выполняя задания вместе с учащимися, иногда оставляя это им на самостоятельную работу. В результате от такой группы должна появиться одна общая работа, которая уже далее проверяется и рецензируется преподавателем заочной школы.

Казалось бы, что прошло столько лет, в стране повсюду, за исключением что может деревни, появились различные специализированные школы, гимназии и лицеи, старшие классы давно уже в большинстве своем являются профильными. А заочная школа не только не потеряла своей актуальности, а скорее наоборот, интерес к ней остается неизменным и по сей день. В нее поступают младшие братья и сестры прежних выпускников, дети, чьи родители сами в 80-х годах закончили эту школу. Есть и еще одна интересная особенность. Изначально школа создавалась для учащихся из глубинки, а сегодня в ней обучается довольно много школьников из крупных городов, в том числе и из Москвы.

Но оказывается, что ничего странного в этом нет. Заочная школа сегодня может дать то, что довольно сложно получить каким-то другим путем. И именно за этим сюда поступают дети из года в год. Причем оказывается, что это что-то для каждого свое, поскольку особенностей и плюсов такого обучения довольно много. Попробуем отметить некоторые из них.

В случае отсутствия поблизости сильной школы или класса нужного профиля все понятно. Но зачастую профильные школы и классы бывают не в состоянии удовлетворить потребности школьника, особенно если они разнородны. Ведь нередко круг интересов составляют сильно разные по школьным меркам предметы, например математика и биология или история и химия. И вплоть до конца обучения в школе ребенок так и не может сделать выбор между ними, выбор может произойти только при выборе ВУЗа. Понятно, что в такой ситуации остановиться на каком-то профиле — задача довольно трудная, выбирая что-то одно жалко потерять другое, возможно не менее важное. И в этом случае заочная школа может избавить от такого досрочного решения. Занимаясь углубленно одним из предметов в своей школе, второй можно изучать не менее углубленно заочно. А окончательный выбор специальности отложить на момент окончания школы.

Бывает, что какой-то предмет начинает казаться школьнику интересным, но не ясно, действительно ли это так, не остынет ли интерес при более глубоких занятиях. И кажется рискованным переходить в профильный класс, предварительно стоит проверить, действительно ли это увлечение серьезно. Либо родная школа и класс, учителя настолько нравятся, что расставаться с ними, терять те отношения, тот уровень обучения большинству предметов ради углубленного изучения какого-то одного, очень не хочется. В этом случае выбор также падает на заочную школу.

Заочная школа дает не только хорошие знания по выбранному предмету (сегодня большая часть выпускников школы поступает в университет и другие ведущие ВУЗы). Появляется возможность пообщаться, пусть и письменно, с другим преподавателем предмета, который проверяет и комментирует работу, увидеть его взгляд на выполняемые задания, несколько иные требования к их выполнению, сравнить их с теми, которые предъявляются в школе. Это и внешняя оценка своих знаний, возможность сравнить оценки в своей школе и в заочной, что зачастую тоже немаловажно. Если ученик самый сильный по предмету в классе, то скорее всего оценка по этому предмету у него «5». И эта «5» может создавать впечатление, что усвоено все, что можно, стремиться дальше некуда, напрягаться не нужно. Но оценка в заочной школе — это возможность сравнить свои знания со знаниями учащихся из других мест России, оказаться как будто в другом классе, среди совершенно других школьников, не менее способных и мотивированных. И здесь нередки случаи, когда школьная «5» превращается в «3». Если же оценки за заочные задания как и в родной школе не являются отличными, то это лишнее подтверждение того, что не стоит пенять на необъективные или завышенные требования школьного учителя, а скорее стоит искать проблему в себе, более глубоко разбирать изучаемый материал. А создающееся у многих школьников впечатление, что твою работу читают и оценивают «далеко в Москве» какие-то «серьезные и важные люди из самого университета», только придает еще большую значимость такой оценке, заставляет прикладывать к ее выполнению намного больше усилий, чем к выполнению обычного домашнего задания. При этом «важности» проверяющему добавляет скорее тот факт, что школьник его никогда не видел.

Заочное обучение воспитывает и некоторые умения, привить которые в обычной системе обучения бывает намного сложнее. Во-первых это привычка к планированию собственного времени и регулярной работе. Это не совсем то ежедневное выполнение домашних заданий к следующему дню, которым обычно заняты школьники. Имеется некоторое большое задание, рассчитанное на месяц, которое нельзя сделать как обычное домашнее задание за час или за вечер. Для этого сначала необходимо разобрать материал полученной книжки или учебного пособия, которое иногда может потребоваться прочитать насколько раз. Далее выполнить 15-25 задач или подробно ответить на большое количество вопросов (если речь идет не о математике или физике). И это тоже не делается сразу, поиски ответа или решения одной задачи иногда занимают несколько вечеров. Ну и наконец все это записать в одну-две тетради и отправить на проверку. Для этого необходимо спланировать свои занятия, регулярно выполнять что-то, что приближает к заключительному шагу — отправке работы на проверку.

Вообще, требование к письменному оформлению работы учит формулировать свои мысли на листе бумаги. И если с задачами по физике или математике ситуация проще, их решение и запись — две неразрывные составляющие процесса обучения в школе, то вряд ли написанию связных текстов и письменным ответам на вопрос уделяют много времени на уроках биологии или истории. И наряду с умением излагать свои мысли на бумаге возникает еще и ряд сопутствующих: нахождение баланса между подробностью и краткостью изложения, аккуратность оформления.

Еще одно полезное умение — это умение самостоятельной работы с книгой. Это умение отлично от требуемого в школе запоминания и пересказа параграфа. Для выполнения задания необходимо внимательно прочитать текст книги, разобрать приведенные в тексте примеры и задачи. При чтении регулярно возникает необходимость обратиться к уже прочитанному материалу, разобрать его вновь, после чего двигаться дальше. Данный вид деятельности сравним с той, с которой сталкиваются студенты в ВУЗе при изучении отдельного предмета или в научной работе. И школьник знакомится с этим непростым поначалу видом деятельности. На этом этапе важно дать ему действительно хорошие книги, соответствующие его уровню и возрасту. Найти же сейчас, а особенно не в крупном городе, научно-популярную литературу — большая проблема, решить которую не всегда оказывается возможным. И в этом отношении книги и пособия заочной школы пытаются восполнить этот пробел.

Книги по математике стоят отдельного упоминания. Некоторые из них, написанные более сорока лет назад, неоднократно переиздавались, причем не только для учащихся заочной школы. Они пользуются популярностью и по сей день. Стоит отметить, что в последние несколько лет издательство МЦНМО переиздало такие из них, как Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. «Функции и графики (основные приемы)», Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. «Метод координат», Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. «Прямые и кривые», и теперь они вновь стали доступны не только ученикам заочной школы. А книга И.М. Гельфанда, С.М. Львовского, А.Л. Тоома «Тригонометрия» была допущена Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для учащихся 10 классов и теперь может быть найдена в школьной библиотеке почти любой московской школы. Возможно, что причиной такого успеха являются их ясность изложения, доступность для школьников, а также интересные и красивые задачи, с которыми сталкивается читатель.

Все это дает возможность говорить о заочной школе как об организации, предоставляющей уникальные возможности для обучения и развития школьников, способствующей формированию у них ряда таких качеств, сформировать которые обычная школа оказывается зачастую не в состоянии. Возможно, что именно этим можно объяснить рост интереса к ней со стороны учащихся города Москвы, города, обладающего по истине уникальными возможностями для обучения школьников, огромным количеством различных специализированных школ и подготовительных курсов. Поступить в заочную школу сегодня совсем просто. Достаточно выполнить и прислать вступительное задание, которое можно найти в последнем номере журнала «Квант» за каждый год.

Шесть доказательств теоремы о бабочке

Е.С. Горская

учитель информатики ЦО №218

Доклад опирается на статью «*The Metamorphosis of the Butterfly Problem*», *Leon Bankoff* (1987 г., *Math. Mag*). Статья была мной прочитана незадолго до отъезда на семинар и привела в величайшее восхищение, что и предопределило выбор темы доклада. Теорема о бабочке обладает для математиков удивительной притягивающей силой: впервые она появилась на страницах журнала *Gentleman's Diary* в 1815 году, вызвав массу эмоций и доказательств. С этих пор было опубликовано очень много работ, посвященной теореме о бабочке, и удивительно, что их количество велико до сих пор. Теорема о бабочке имеет массу доказательств, допускает ряд обобщений (о них можно прочитать в той же статье) и любопытных применений. Очень интересна статья В.Ю. Протасова в журнале «Квант», «Точка двух велосипедистов и теорема о бабочке», №4, 2008 год.

Свое красивое название теорема получила после публикации 1944 года в журнале *American Monthly* (*Joseph Rosenbaum*, *W.E. Buker* и др.). Название оказалось таким удачным, что с этих пор теорему только так и называли.

В статье *Leon'a Bankoff'a* помимо представленных ниже шести приводятся еще несколько счетных доказательств (с использованием теоремы Дезарга, тригонометрии, фактов аналитической геометрии и т. д.) Но здесь я их приводить не буду, поскольку целью доклада был не полный перевод статьи, а знакомство коллег с, возможно, неизвестными им красивыми идеями. Также, *Leon Bankoff* упоминает о том, кто и когда (согласно его историческим изысканиям) первым опубликовал то или иное доказательство. С удовольствием приведу фамилии этих математиков и соответствующие даты, поскольку в современных математических журналах порой встречаются эти старые доказательства, приводимые как новые, принадлежащие тому или иному ныне живущему автору. Приведу не для того, чтобы современному автору стало неловко (ни в коем случае!), а для того, чтобы проиллюстрировать мысль о том, что понятие «новая задача», или «новое доказательство» в классической геометрии — очень непонятная штука (см. также И.А Кушнир, «*Возвращение утраченной геометрии*», Киев, Факт, 2004).

Теорема о бабочке.

Пусть P *— середина хорды* AB *некоторой окружности.* CD *и* FE *— хорды этой окружности, проходящие через точку* P. *Отрезки* CF *и* ED *пересекают* AB *в точках* M *и* N *соответственно. Тогда* $MP = NP$.

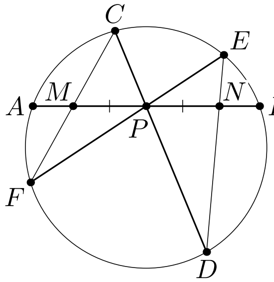


Рис. 1а

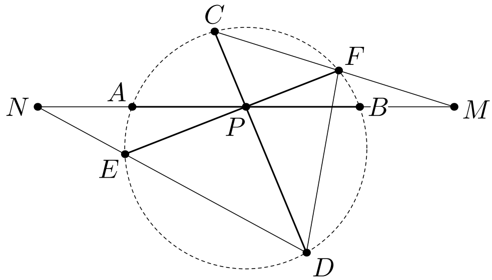


Рис. 1б

Возможны два случая расположения точек M и N (см. рис. 1а,б). В приводимых доказательствах мы ограничимся случаем, когда обе точки находятся внутри окружности (рис. 1а).

Доказательство.

Первый способ. Отдавая должное автору статьи (*Leon Bankoff*), начнем со способа, предложенного им в 1955 году в журнале *SSM* (*School Science and Mathematics*).

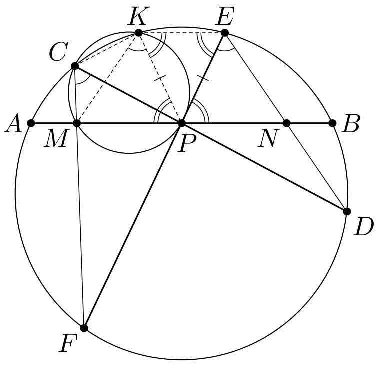


Рис. 2

Проведем через точку E прямую EK, параллельную AB (см. рис. 2). Докажем, что треугольники PEN и PKM равны. Действительно, $EP = KP$ и $\angle MPK = \angle PKE = \angle PEK = \angle NPE$. Кроме того, поскольку четырехугольник $CKEF$ — вписанный, то $\angle FEK + \angle FCK = 180^\circ$, то есть, $\angle MPK + \angle MCK = 180^\circ$, откуда следует, что четырехугольник $PKCM$ также вписан в окружность. Следовательно, $\angle PKM = \angle PCM$. Но $\angle PCM = \angle DCF = \angle DEF = \angle NEP$, то есть, $\angle PKM = \angle PEN$ и треугольники PKM и PEN равны (по стороне и двум прилежащим углам). Из равенства треугольников получаем равенство отрезков MP и NP.

Обратимся теперь к доказательствам, опубликованным в 1815 году в журнале *Gentleman's Diary*. Автор второго — *W.G. Horner* (нам он знаком со школы как автор схемы *Горнера*), автор третьего — *Richard Taylor*.

Второй способ. Пусть O — центр окружности, OP, OK и OL — серединные перпендикуляры к хордам AB, CF и ED (см. рис. 3). Из подобия треугольников CPF и EPD можно вывести, что $\angle PKC = \angle PLE$. Заметим, что четырехугольники $OPNL$ и $OPMK$ — вписанные (сумма противоположных углов равна 180°), следовательно, $\angle PKM = \angle POM$ и $\angle PLN = \angle PON$, откуда $\angle POM = \angle PON$. Поскольку OP — высота и биссектриса треугольника MON, то этот треугольник — равнобедренный и $MP = NP$.

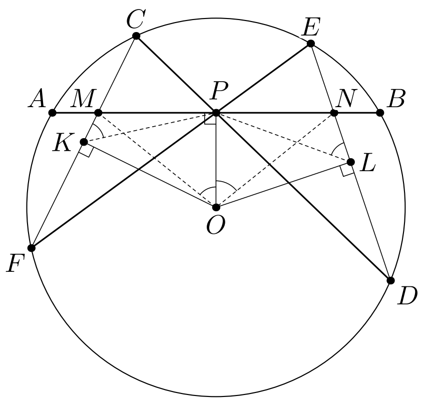


Рис. 3

Третий способ. Проведем описанную окружность треугольника CMP. K — точка ее пересечения с исходной окружностью (см. рис. 4). Тогда $\angle CPM = \angle CKM$. Пусть R и L — вторые точки пересечения прямых KM и KP с исходной окружностью. Поскольку $\angle CKR = \angle CDR$, то $\angle CPM = \angle CDR$, то есть прямые AB и RD параллельны. Кроме того, $\angle FCD = \angle MCP = \angle MKP = \angle RKL$, следовательно, дуги FD и RL равны, то есть, равны дуги LD и RF, откуда следует, что прямые RD и FL параллельны. Поскольку P — середина AB, то $PF = PL$. Кроме того, $\angle KFE = \angle KLE$ и $\angle KPF = \angle EPL$, поэтому треугольники KPF и EPL равны (по стороне и двум углам). Следовательно, $KP = EP$. Из параллельности AB, FL и RD получим, что $\angle KPM = \angle KLF = \angle EFL = \angle EPN$ и $\angle FED = \angle RKL$. Тогда треугольники KPM и EPN равны (по стороне и двум углам). Тогда $MP = NP$.

Отметим, что точка K совпадает с точкой K из первого способа доказательства.

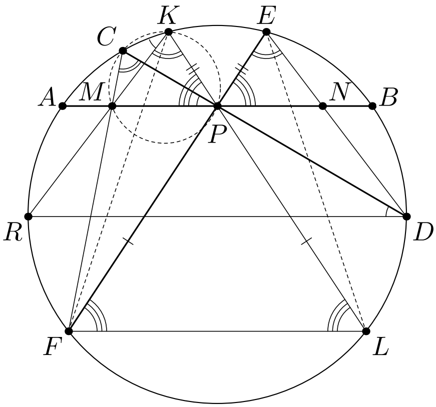


Рис. 4

Еще один «старый» способ доказательства был опубликован в 1819 году в книге *Geometrical Problems*, автор *Miles Bland*. Он же (с точностью до обозначений) был напечатан в 1944 году в *American Mathematical Monthly W.E. Buker*'ом, он же предлагается в книге *Г. Коксетера*, *С. Грейтцера* «*Новые встречи с геометрией*».

Четвертый способ. Проведем через точку N прямую KL параллельно CF (см. рис. 5). Тогда $\angle LKF = \angle CFE = \angle CDE$. Из подобия треугольников KNE и DNL получим, что $\dfrac{KN}{DN} = \dfrac{EN}{LN}$, то есть, $KN \cdot LN = EN \cdot DN$. Поскольку $EN \cdot DN = AN \cdot BN = (AP+NP)(BP-NP)$, то $KN \cdot LN = AP^2 - NP^2$. Из подобия треугольников PMF и PNK и подобия треугольников PCM и PLN получим: $\dfrac{KN}{NP} = \dfrac{FM}{MP}$ и $\dfrac{LN}{NP} = \dfrac{CM}{MP}$. Перемножим левые и правые части полученных равенств: $\dfrac{KN \cdot LN}{NP^2} = \dfrac{FM \cdot CM}{MP^2}$. Поскольку $FM \cdot CM = AM \cdot BM = (AP - MP)(BP + MP) = AP^2 - MP^2$, то $\dfrac{AP^2 - PN^2}{NP^2} = \dfrac{AP^2 - MP^2}{MP^2}$, откуда $MP = NP$.

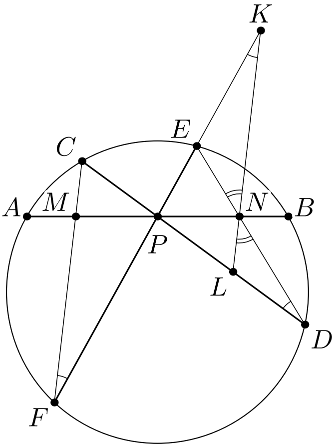


Рис. 5

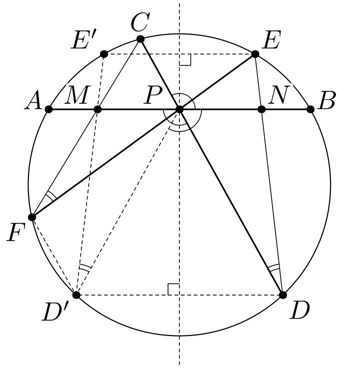


Рис. 6

В 1944 году в журнале *American Mathematical Monthly* был опубликован еще один способ доказательства (автор — *Joseph Rosenbaum*).

Пятый способ. Отразим точки E и D относительно диаметра, проходящего через точку P (см. рис. 6). Пусть при этом отражении они перейдут в точки E' и D'. Докажем, что образ точки N при рассматриваемом отражении совпадет с точкой M.

Заметим, что $\angle CPB = \angle APD$, как вертикальные. Кроме того, в силу симметрии $\angle APD = \angle BPD'$ и $\smile BD' = \smile AD$. Поскольку $\angle CFD' = \frac{1}{2}\left(\smile CB + \smile BD'\right)$ и $\angle CPB = \frac{1}{2}\left(\smile CB + \smile AD\right)$, то $\angle CFD' = \angle CPB = \angle BPD'$. Таким образом, четырехугольник $FMPD'$ — вписанный. Следовательно, $\angle CFE = \angle MFP = \angle MD'P$, кроме того $\angle CFE = \angle CDE$. Таким образом, $\angle MD'P = \angle CDE$, следовательно, при рассматриваемой симметрии точка N переходит в точку M, то есть, $MP = NP$.

В заключение приведем изящный способ доказательства, использующий радикальные оси. Его предложил *Mannis Charosh* в 1941 году в журнале *SSM*.

Шестой способ. Пусть M' — точка, симметричная N относительно P, то есть, $M'P = NP$. Докажем, что M' совпадает с M. Для этого отметим точки K и L так, что $KP = DP$ и $EP = LP$ (см. рис. 7). Тогда $\triangle KPL = \triangle DPE$, следовательно, KL пересекает AB в точке M'. Кроме того, $\angle PKL = \angle PDE = \angle PFC$, поэтому четырехугольник $KCLF$ вписан в окружность. Точки A, D, B и E принадлежат исходной окружности, следовательно, их образы B, K, A и L при симметрии относительно точки P также принадлежат некоторой окружности. Радикальные оси CF, AB и KL этих окружностей пересекаются в одной точке. Вспомнив, что M' — точка пересечения KL и AB, а M — точка пересечения CF и AB, получим, что M и M' совпадают, то есть, $MP = NP$.

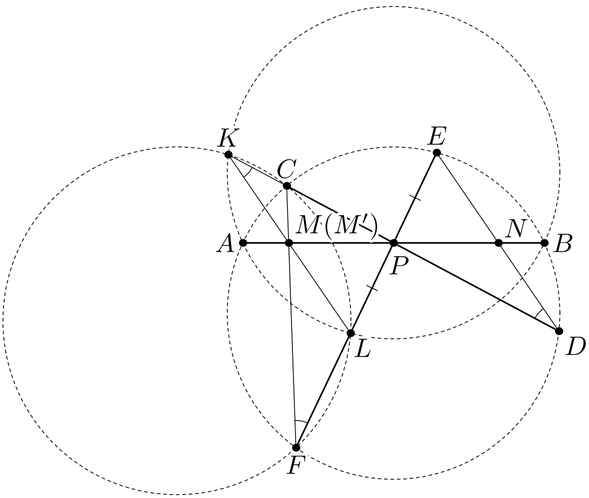


Рис. 7

Я полагаю, что изучение нескольких способов доказательства одного геометрического факта позволяет детям (да и учителям) глубже понять предлагаемую конструкцию. А это, в свою очередь, дает возможность «открывать» какие-то задачи, связанные с этой, возможно, придумывать еще способы доказательства.

О некоторых кониках, связанных с треугольником

Е.Д. Куланин, А.Г. Мякишев

Коники + треугольник: *Terra incognita*[1]?

Три задачи.

Конические сечения (в просторечии – *коники*) были открыты, насколько это известно, еще в IV веке до н.э. древнегреческим математиком Менехмом (учеником самого Платона). Решая задачу об удвоении куба, Менехм рассматривал сечения конуса плоскостью, перпендикулярной его образующей. Затем весьма детальное (а в сущности, даже и полное) описание разнообразных свойств коник[2] дал знаменитый геометр Аполлоний Пергский (трактат из восьми книг «Конические сечения» был создан в конце III века до н.э.).

Без сомнения, в настоящее время каждый образованный человек, окончивший ВУЗ естественно-научного направления, хоть что-нибудь, хоть краем уха, а слышал о кониках.

Кому-то повезло (впрочем, кому-то, может, и «повезло») повстречаться с ними еще в школе. Во всяком случае, в любом техническом ВУЗе свойства конических сечений обязательным порядком входят в стандартный курс аналитической геометрии.

Но вот что можно заметить: в институте ли, в школе — эти свойства изучаются обыкновенно в замкнутом, самодостаточном виде, как «вещь в себе» — рассказывается, разве что, о некоторых приложениях к задачам механики.

---

[1]Имеется ввиду — условной планеты **Геометрия**.

[2]Легко представить себе тогдашнего школяра, изнемогшего в мучительных усилиях постичь эти самые свойства и в сердцах восклицающего: «Да кому это все нужно! Ведь никакой абсолютно связи с реальным миром!» Эта связь обнаружилась-таки без малого 20 столетий спустя, когда в начале XVII века Иоганн Кеплер открыл свои Законы. В частности, как выяснилось, все планеты при движении вокруг Солнца описывают эллипсы (Солнце располагается в одном из фокусов). Математический аппарат, описывающий эти явления, возник задолго до их открытия! (Разумеется, если придерживаться традиционного летоисчисления. Остроумные, но слегка болезненные фантазии, вроде того, что Аполлоний и Кеплер — одно и то же лицо, оставим Новым Хронологам и их адептам).

А между тем, многие сложные и содержательные утверждения *Геометрии Треугольника* тесно связаны с теми или иными кониками[3]. Зачастую, обозревая ландшафт треугольника с высоты соответствующего конического сечения, удается вскрыть самую *суть* проблемы, добраться, по словам поэта, «до оснований, до корней, до сердцевины»[4].

Отметим также, что возникающие здесь коники продолжают и развивают всевозможные *классические направления* в планиметрии, нередко взаимодействуя с такими, например, объектами, как *окружность Эйлера*, *прямая Валлиса–Симсона* и т. д. и т. п.

Конечно, эксперты[5] в области *Элементарной Геометрии* прекрасно осведомлены о всяческих замечательных свойствах этих коник — чего, увы, не скажешь об основной массе любителей[6].

В настоящей статье мы попытаемся ознакомить читателя с некоторыми кониками, связанными с треугольником и показать, как применяются они к решению задач. И с этой целью рассмотрим три утверждения (автором которых является Евгений Куланин):

1. Дан разносторонний треугольник. Докажите, что прямая, проходящая через точки Жергонна и Нагеля, параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда точка Фейербаха[7] лежит на медиане, проходящей через вершину, противоположную этой стороне.

2. Дан разносторонний треугольник. Докажите, что прямая, проходящая через его центроид и точку Лемуана, параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда точка Штейнера лежит на медиане, проходящей через вершину, противоположную этой стороне.

3. Докажите, что гипербола Киперта касается описанного эллипса Штейнера тогда и только тогда, когда парабола Киперта касается вписанного эллипса Штейнера.

Прежде чем переходить к доказательствам, предлагаем совершить небольшое путешествие в *страну «треугольных» коник.*

Доказательство изложенных ниже фактов можно найти в [1], [2], [3], [5], [6], [8].

---

[3]Как правило, никак не фигурирующими в изначальной постановке задачи.

[4]Т. е. найти то самое доказательство из Книги, о которой любил говорить Пауль Эрдёш.

[5]А это сравнительно небольшой круг лиц.

[6]Наверное, почти каждый хороший школьный учитель принадлежит множеству любителей Элементарной Геометрии, хотя бы «по долгу службы».

[7]Если смысл какого-либо термина в условии этой и следующих задач непонятен — пугаться не следует! В следующем разделе будут даны соответствующие пояснения.

В первых трех работах упор делается именно на выявлении геометрического смысла происходящего, в то время как авторы трех остальных трудов (чрезвычайно богатых фактическим материалом) пользуются исключительно вычислениями. (*Барицентрические координаты* — о которых см. также [4] — могучий метод, посредством которого может быть доказана практически любая теорема геометрии треугольника. Жаль только — без малейшей геометрии, а чисто формальными выкладками). Мы особенно рекомендуем книжку [1], где геометрия коник предстает во всей своей красе.

2. Некоторые сведения из геометрии треугольника. Основные свойства «треугольных» коник.

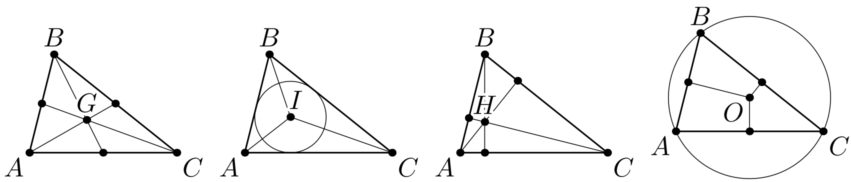
2.1. Замечательные точки треугольника.

Строгого математического определения замечательной точки треугольника не существует. С интуитивной точки зрения, «степень замечательности» той или другой точки можно оценить дробью, в числителе которой — количество нетривиальных свойств, связанных с этой точкой, а в знаменателе — «сложность» ее построения[8].

Приведем некоторые примеры.

Первая четверка известна с незапамятных времен.

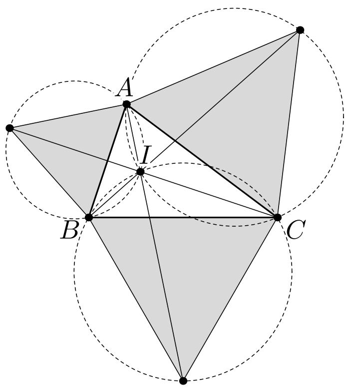
Точка пересечения медиан (*центроид*) G, точка пересечения биссектрис (центр *вписанной* окружности или *инцентр*) I, точка пересечения высот (*ортоцентр*) H, центр *описанной* окружности (точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника) O.

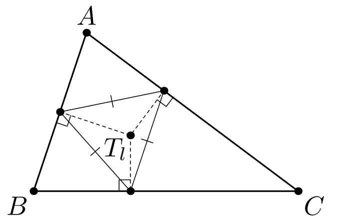


Пятой (согласно [5], [6]) была обнаружена т. н. *точка Ферма–Торричелли.*

Если построить на сторонах треугольника правильные треугольники *вовне*, то вершины этих треугольников образуют треугольник, *перспективный* исходному с перспектором T. В этой же точке пересекаются все три окружности, описанные около правильных треугольников. Если T расположена внутри треугольника ABC (т. е. его углы не превосходят $\frac{2\pi}{3}$), то она минимизирует сумму расстояний до вершин.

[8]Наподобие восточной мудрости «$Happiness = \frac{Production}{Desire}$» (Jin Akiyama).



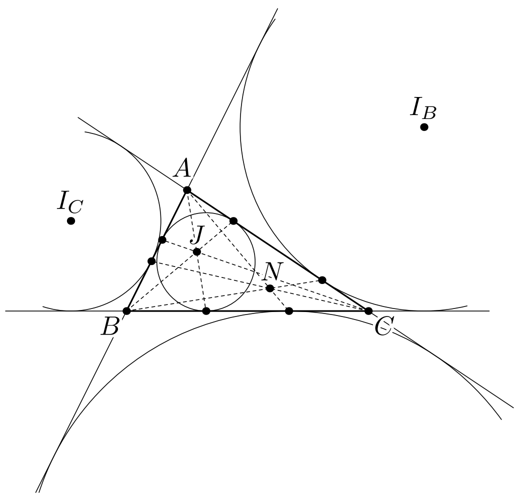


Дадим описание еще нескольких замечательных точек.

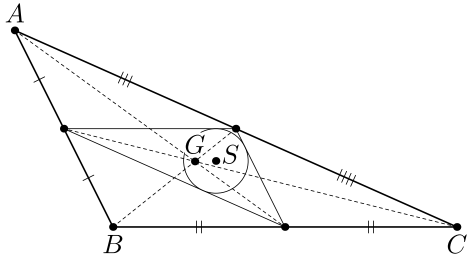
Точка Аполлония T_l — точка, *педальный* треугольник (образованный основаниями перпендикуляров, опущенной из данной точки на стороны треугольника или их продолжения) которой является правильным.

Точки Жергонна J *и Нагеля* N.

Треугольник, образованный точками касания вписанной (соответственно *вневписанных*) окружности перспективен исходному с перспектором в точке J (соответственно N).



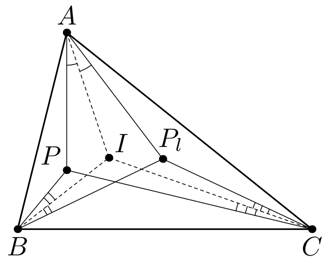
Точка Шпикера S — центр окружности, вписанной в *серединный* треугольник (образованный серединами сторон).



Является центром тяжести периметра треугольника (составленного из однородных стержней).

2.2. Изогональное и изотомическое сопряжения. Неподвижные точки.

Изогональное сопряжение.



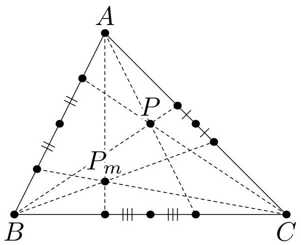
Рассмотрим произвольную точку P в плоскости треугольника ABC и её *чевианы* (т. е. тройку прямых, соединяющие вершины треугольника с этой точкой). Сделаем затем симметрию чевиан относительно соответствующих биссектрис. Тогда новая тройка прямых пересечется в точке P_l, называемой точкой, изогонально сопряженной точке P.

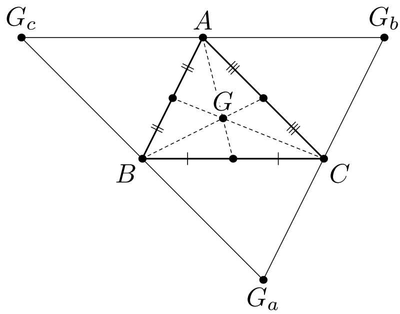
(Если точка P расположена на прямой, содержащей сторону треугольника, и отлична от вершины треугольника, то, руководствуясь соображениями непрерывности, следует считать, что она переходит в противолежащую вершину треугольника).

Таким образом, имеем отображение F_l плоскости на себя (однозначность нарушается для точек, расположенных на продолжении сторон исходного треугольника), такое что $F_l \circ F_l = E$ (тождественное преобразование). Очевидно, неподвижными точками этого отображения являются центр вписанной и центры трех вневписанных окружностей (I, I_a, I_b, I_c).

Изотомическое сопряжение.

Рассмотрим произвольную точку P в плоскости треугольника ABC и ее чевианы. Сделаем затем симметрию оснований чевиан относительно середин соответствующих сторон. Тогда новая тройка прямых пересечется в точке P_m, называемой точкой, изотомически сопряженной точке P.



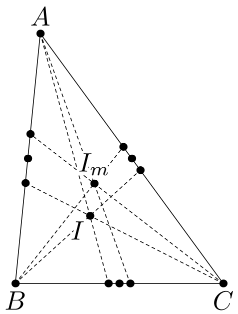


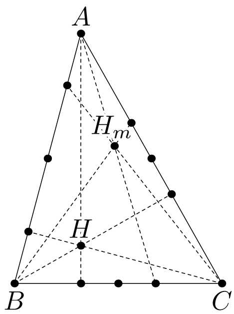
И здесь возникает отображение F_m плоскости на себя (однозначность также нарушается для точек, расположенных на продолжении сторон исходного треугольника), такое что $F_m \circ F_m = E$. Неподвижными точками являются центроид и вершины *антидополнительного* треугольника (образованного прямыми, проходящими через вершины исходного треугольника параллельно соответствующим сторонам) G, G_a, G_b, G_c.

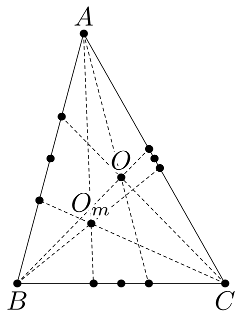
2.3. Еще несколько замечательных точек.

Можно заметить, что многие замечательные точки «ходят парами». Так, например, изогонально сопряженными являются пары H и O (ортоцентр и центр описанной окружности), T и A (точка Ферма-Торричелли и точка Аполлония). Точки J и N (Жергонна и Нагеля) сопряжены изотомически.

Рассматривая изогональные или изотомические сопряжения некоторых других точек, получим новые замечательные точки. Так появляются I_m (*антиинцентр* — точка, изотомически сопряженная к инцентру), H_m(*антиортоцентр* — изотомически сопряженная ортоцентру) и O_m (*антицентр описанной окружности* — изотомически сопряженная к O).

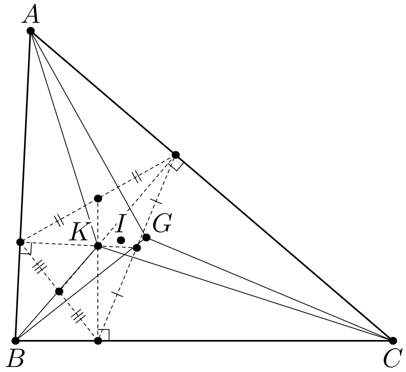






Точки G_l и N_l, изогонально сопряженные точкам Жергонна и Нагеля, совпадают с центрами гомотетий, переводящих описанную и вписанную окружности друг в друга.

Точка K, изогонально сопряженная центроиду G, называется *точкой Лемуана.*

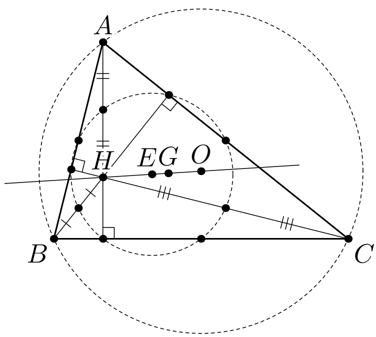


Это единственная точка, являющаяся центроидом своего педального треугольника. Можно показать, что она минимизирует сумму квадратов расстояний до сторон треугольника.

2.4. Прямая и окружность Эйлера. Теорема Фейербаха. Точки Фейербаха.

Справедлива следующая теорема:

Точки H, G и O расположены на одной прямой — т. н. *прямой Эйлера* (считаем треугольник неравносторонним — иначе все три точки совпадают), причем $\dfrac{HG}{GO} = \dfrac{2}{1}$.

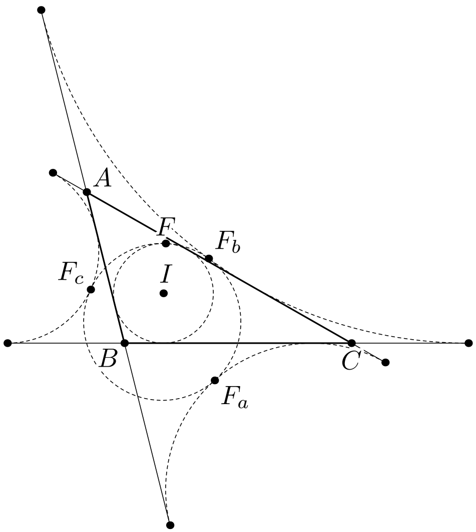


На этой же прямой расположен *центр окружности Эйлера* E (или *окружности девяти точек*), причем точка E делит отрезок OH пополам. Окружность Эйлера содержит середины сторон треугольника, основания высот, а также середины отрезков, *соединяющие ортоцентр с вершинами.*

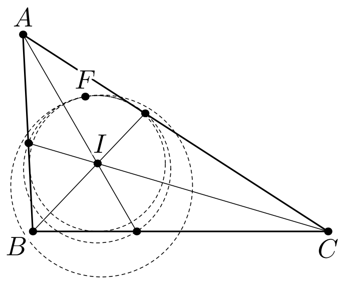
В 1822 году немецкий математик Карл Фейербах опубликовал одну из самых поразительных теорем геометрии треугольника:

Окружность Эйлера касается вписанной и трех вневписанных окружностей (точки касания обозначают F, F_a, F_b, F_c соответственно, первую из них называют *точкой Фейербаха*, а остальные три — *добавочными точками Фейербаха*).

Исключительно геометрическое доказательство этой теоремы можно найти в статье Владимира Протасова «Вокруг теоремы Фейербаха» (в приложении к журналу «Квант» №1/98 — «Математический кружок. Геометрия»).



А в 2002 году в журнале «Математическое просвещение» (выпуск 6) была опубликована статья Льва и Татьяны Емельяновых «*Семейство Фейербаха*»[9]. Авторам удалось выявить некий набор *чевианных треугольников*, *описанные окружности которых проходят через точку Фейербаха.* (Глубокая геометрия, стоящая за этим открытием, описана в [1] и [2]).



В частности, через точку Фейербаха проходит окружность, описанная около оснований биссектрис.

[9]Еще в 1952 году вышла книга, название которой отчасти перекликается с названием статьи Емельяновых, (но книга совсем о другом): Theodor Spoerri, *Genie und Krankheit*: *Eine psychopathologische Untersuchung der Familie Feuerbach*, S. Karger, Basel, 1952. Несложно сообразить, что речь тут идет о вещах весьма печальных.

2.5. Еще несколько замечательных прямых.

Помимо прямой Эйлера существуют и многие другие, содержащие различные замечательные точки. Вот некоторые примеры:

Прямая Нагеля.

Точки N, G и I расположены на одной прямой (если исходный треугольник не является равносторонним — иначе все три точки совпадают), причем $\dfrac{NG}{GI} = \dfrac{2}{1}$.

На этой же прямой расположена точка Шпикера S, которая делит отрезок NI пополам.

Ось Брокара.

Прямая, которая содержит точки O, K и A.

Линия центров описанной и вписанной окружностей.

Прямая, проходящая через центры гомотетий G_l и N_l, переводящих описанную и вписанную окружности друг в друга. Естественно, содержит также точки O и I.

Прямая Жергонна.

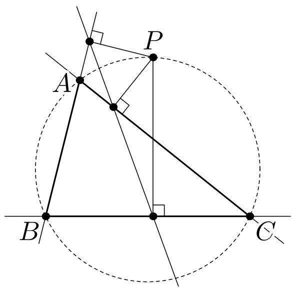
На этой прямой расположены точки G, N, H_m, I_m.

Прямая Лемуана.

Прямая, содержащая точки K, G, H_m , причем $\dfrac{H_mG}{GK} = \dfrac{2}{1}$.

2.6. Прямая Валлиса — Симсона.

Педальный треугольник точки P вырождается в отрезок тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной около исходного треугольника окружности. Прямая, проходящая через основания перпендикуляров, называется прямой *Валлиса-Симсона.*

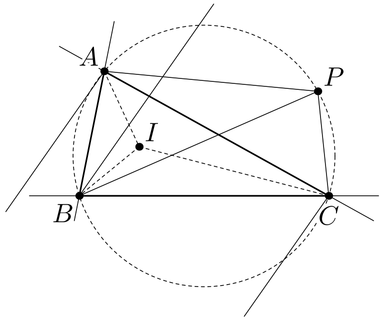


2.7. Бесконечно удаленные точки. Бесконечно удаленная прямая и сопряжения.

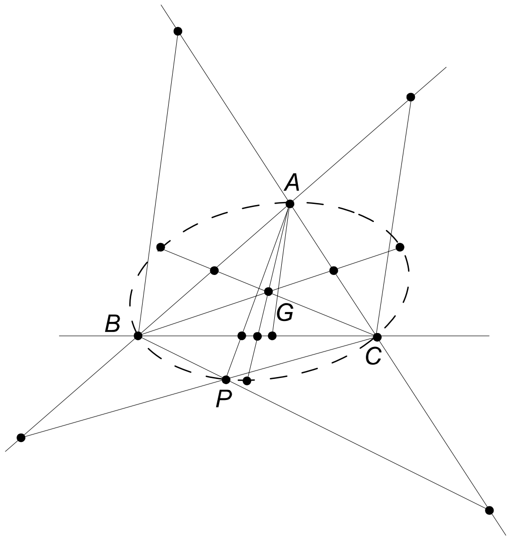
С точки зрения *проективной геометрии*, пучок параллельных прямых на обычной евклидовой плоскости пересекается в *бесконечно уда-*

ленной точке. Все бесконечно удаленные точки образуют на проективной плоскости *бесконечно удаленную прямую.*

Оказывается, изогональное сопряжение переводит в бесконечно удаленную прямую описанную окружность (и наоборот).



Изотомическое сопряжение переводит в бесконечно удаленную прямую *описанный эллипс Штейнера*[10]. Это — эллипс, описанный около исходного треугольника, с центром в точке пересечения медиан G и содержащий также точки, симметричные центроиду относительно середин соответствующих сторон.



[10]Подробнее о его свойствах — в пункте **2.10**

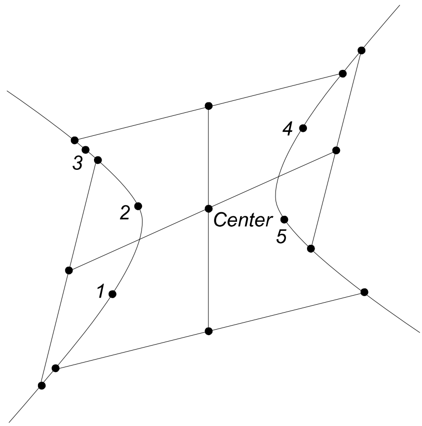
2.8. Некоторые общие свойства конических сечений.

Все коники *проективно эквивалентны*, т. е. переводятся друг в друга подходящим проективным *преобразованием*.[11] При этом *гипербола* пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках, *парабола* ее касается, а *эллипс* не имеет с ней общих точек.

Любые *пять точек общего положения* (т. е. среди которых отсутствуют тройки *коллинеарных* точек) лежат на некоторой конике, однозначно определенной этими точками.

Двойственное к этому утверждение состоит в том, что *пять прямых общего положения* (т. е. среди них нет троек *конкурентных* прямых) однозначно задают конику, их касающуюся.

Эллипс и гипербола имеют *центр симметрии* (который в случае параболы удаляется в бесконечность — точку пересечения прямых, параллельных *оси* параболы). Любая прямая, соединяющая середины двух параллельных хорд коники, проходит через ее центр (в случае параболы имеем прямую, параллельную оси параболы), т. е. является *диаметром* коники.



2.9. Коники, описанные около треугольники и вписанные в него.

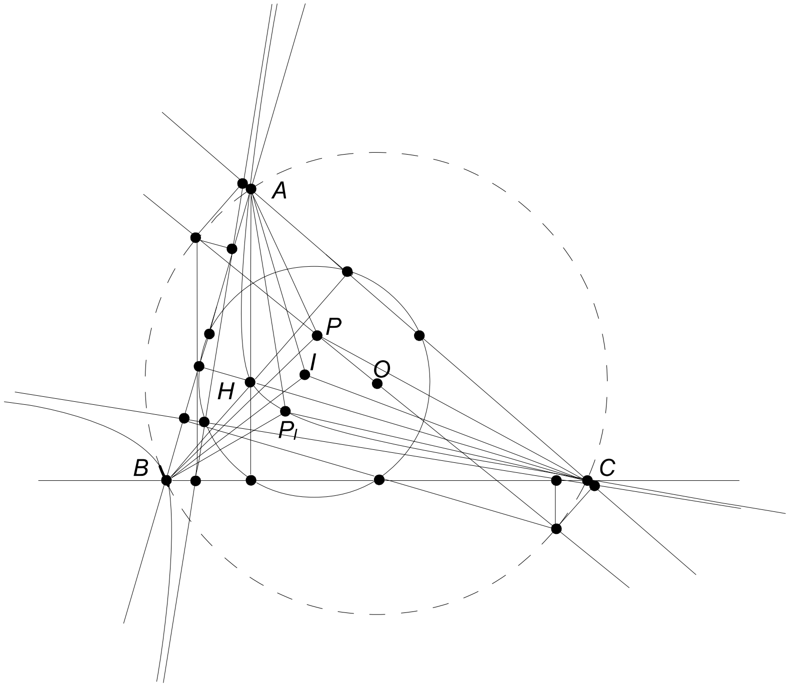
Коника, содержащая вершины треугольника ABC, называется *описанной* около этого треугольника.

Каждая такая коника может быть получена как *изогональный* (или *изотомический*) образ некоторой *прямой*. При этом возникают гипер-

[11] Проективное преобразование — преобразование, переводящее на *проективной плоскости прямые в прямые*.

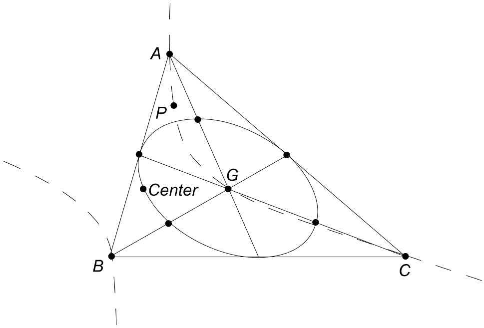
бола, парабола или эллипс в зависимости от количества точек пересечения прямой (соответственно 2, 1 или 0) с *описанной около треугольника окружностью* (а в случае изотомического сопряжения нужно рассмотреть *описанный эллипс Штейнера*).

Гипербола, описанная около треугольника, является *равносторонней* (т. е. имеет *перпендикулярные асимптоты*) тогда и только тогда, когда на гиперболе лежит *ортоцентр* треугольника H. *Центр* такой гиперболы расположен на *окружности Эйлера*, асимптоты же совпадают с *прямыми Валлиса-Симсона* диаметрально противоположных точек, образованных пересечением изогонального образа гиперболы с описанной окружностью.

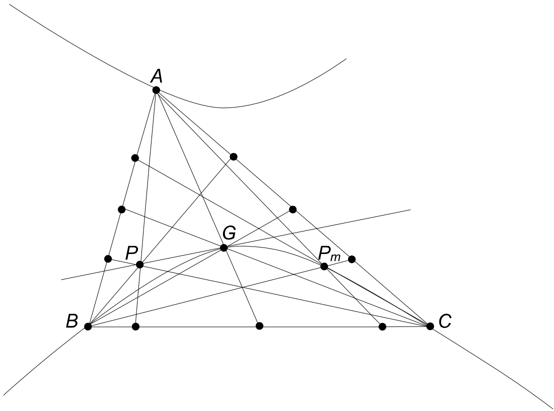


Центр описанной гиперболы, проходящей через *центроид* G, всегда расположен на *вписанном эллипсе Штейнера*[12] (это — *вписанный* в треугольник эллипс, касающийся его сторон в серединах и с центром в G).

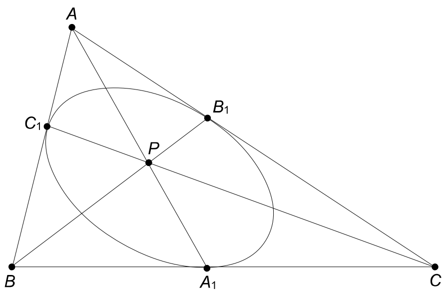
[12] О котором далее — см. пункт **2.10**



Наконец, если описанная коника получена соответствующим сопряжением из некоторой прямой, содержащей его *неподвижную точку*, то эта прямая будет *касаться* коники в неподвижной точке (на рисунке изображена коника, полученная под действием изотомического сопряжения на прямую, проходящую через *центроид* G).

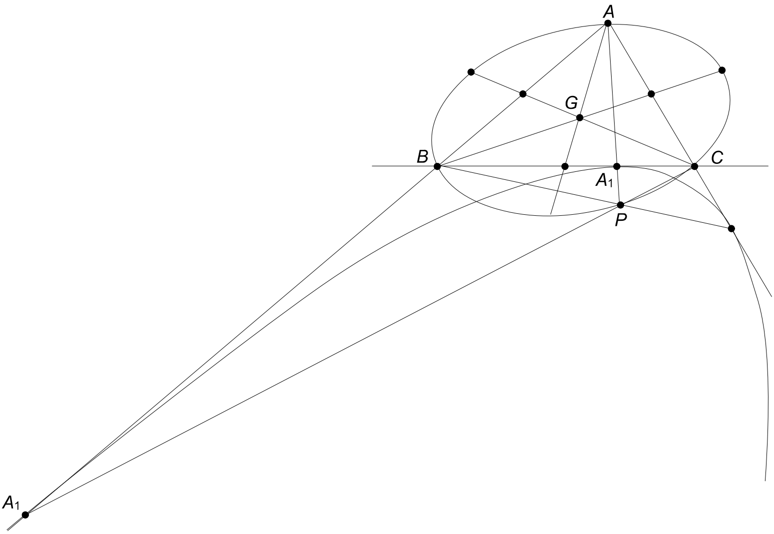


Коника, *касающаяся прямых, содержащих стороны треугольника*, называется *вписанной*.



Треугольник, образованный точками касания, всегда будет *перспективен* исходному. Полученную точку именуют *перспектором вписанной коники.*[13]

Перспектор вписанной параболы расположен на *описанном эллипсе Штейнера.*



Директриса вписанной параболы всегда проходит через *ортоцентр H* треугольника, а ее *фокус* лежит на *описанной* около треугольника *окружности.*

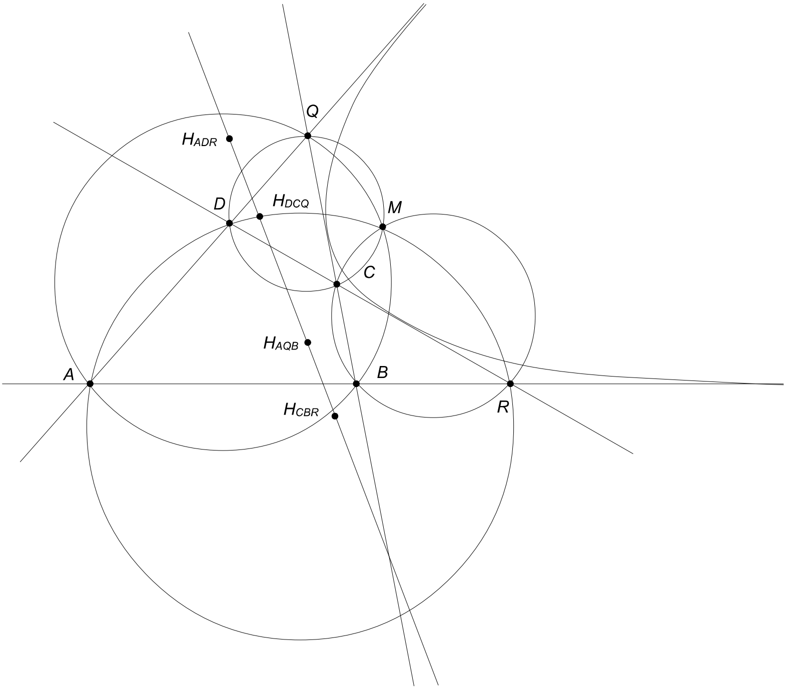
Отсюда вытекает прямо-таки *концептуальное* доказательство двух красивых фактов, связанных с *полным четырехсторонником*:

Пусть имеются четыре прямые общего положения, образующие четыре треугольника.

Оказывается, их *ортоцентры* лежат на одной прямой (т. н. *прямая Штейнера-Обера* полного четырехсторонника), а описанные около этих треугольников окружности пересекаются в одной точке (т. н. *точка Микеля* полного четырехсторонника).

---

[13]Поскольку подходящим проективным преобразованием любую *конику* можно перевести в *окружность*, перспектор действительно существует и является проективным образом *точки Жергонна* некоторого треугольника.



В самом деле, обязательно должна найтись *парабола*[14], касающаяся всех четырех прямых (ибо *пятой* прямой, которой касается парабола, будет *бесконечно удаленная прямая*).

Таким образом, эта парабола будет вписана во все четыре треугольника, а значит, их ортоцентры лежат на директрисе, а описанные окружности проходят через фокус.

2.10. Пять замечательных коник треугольника.

Ниже мы перечислим пять *именных* коник (названных в честь некоторых выдающихся геометров) и перечислим их основные свойства.

Описанный и вписанный эллипсы Штейнера. Точка Штейнера S.

Определения этих коник были уже даны ранее (см. **2.7** и **2.9**). Они эквивалентны тому, что описанный и вписанный эллипсы Штейнера есть *аффинные*[15] образы, соответственно, описанной около некоторого *правильного* треугольника окружности, и вписанной в него.

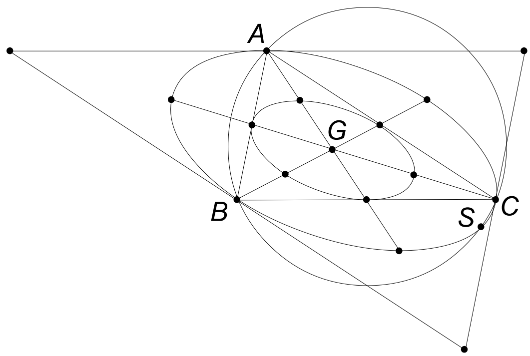
[14] Вот где *коника* зарыта!

[15] Аффинное преобразование можно определить как преобразование обычной плоскости, переводящее прямые в прямые. Будучи расширенным до проективного, оно отображает бесконечно удаленную прямую на себя.

Гомотетия с центром в точке пересечения медиан G и коэффициентом -2 переводит вписанный эллипс Штейнера в описанный (между прочим, та самая гомотетия, которая переводит окружность Эйлера в описанную окружность).

Стороны антидополнительного треугольника касаются описанного эллипса в вершинах исходного треугольника.

Точкой Штейнера S называют *четвертую точку пересечения описанной окружности и описанного эллипса Штейнера.*



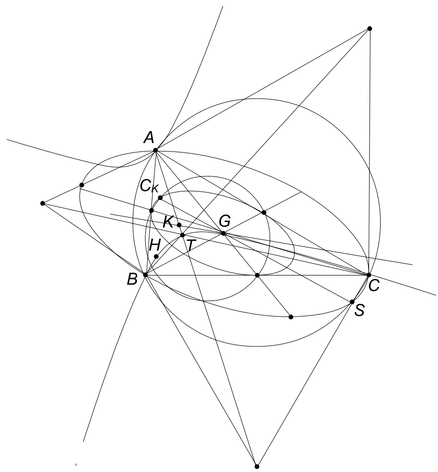
Еще отметим, что среди всех описанных и вписанных эллипсов эллипсы Штейнера имеют, соответственно, *наименьшую* и *наибольшую площади.*

Гипербола Киперта.

Это описанная около треугольника равносторонняя гипербола, проходящая через центроид G и ортоцентр H. Ее можно получить как изогональный образ *оси Брокара* или изотомический образ *прямой Лемуана* (см. **2.5**), причем последняя касается гиперболы в центроиде (см. **2.9**). Гипербола Киперта может также быть получена как множество перспекторов исходного треугольника и треугольников, составленных из вершин *равнобедренных треугольников*, *построенных на сторонах данного*, с одним и тем же углом при основании (причем вершины одновременно откладываются или вовне или вовнутрь). Поэтому на гиперболе Киперта лежит, например, точка Ферма-Торричелли T, а центроид и ортоцентр соответствуют двум предельным случаям — когда углы при основании равны, соответственно, 0 и $\dfrac{\pi}{2}$.

Согласно результатам, изложенным в **2.9**, *центр гиперболы Киперта* C_K лежит на *четвертой точке пересечения окружности Эйлера и вписанного эллипса Штейнера*, а значит, при гомотетии с центром в

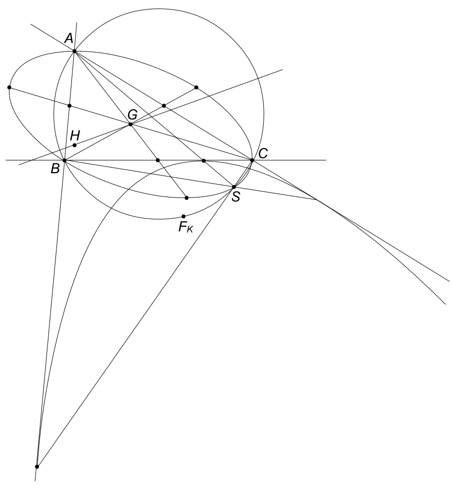
G, и коэффициентом -2 переходит в точку Штейнера S. Т. е., точки S, G, C_K *коллинеарны*, причем $\dfrac{SG}{GC_K} = \dfrac{2}{1}$.



Парабола Киперта.

Это — *вписанная* в треугольник парабола, *директриса* которой совпадает с *прямой Эйлера.*

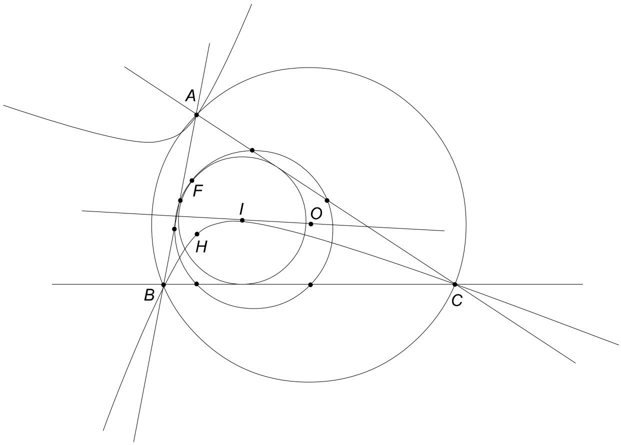
Ее *перспектор* совпадает с точкой Штейнера S. Можно также показать, что фокус параболы Киперта (расположенный на описанной окружности), получается в результате композиции $F_l \circ F_m(S)$.



Гипербола Фейербаха.

Это описанная около треугольника равносторонняя гипербола, проходящая через инцентр I и ортоцентр H. Ее можно получить как изогональный образ *прямой* OI (и эта прямая касается гиперболы в инцентре) или изотомический образ *прямой Жергонна* (см. **2.5**), а потому на ней расположены точки Жергонна J и Нагеля N.

Центром гиперболы Фейербаха является, натурально, самая *точка Фейербаха* F (отсюда и пошло название этой гиперболы).



3. Решение задач

Все теперь готово, чтобы обсудить три задачи, сформулированные в пункте **1**.

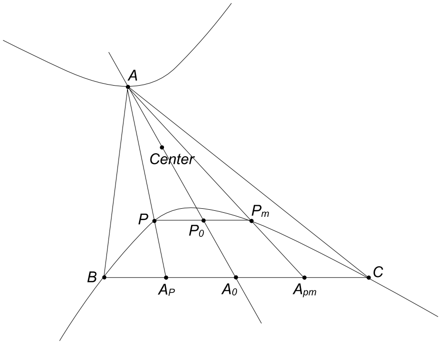
Докажем вначале *лемму*, важную для доказательства первых двух утверждений.

Лемма:

Пусть P и P_m *— изотомически сопряженные точки относительно треугольника* ABC*. Тогда прямая* PP_m *параллельна прямой* BC *если и только если центр коники, описанной около* ABC *и проходящей через* P и P_m *лежит на медиане* AA_0.

Доказательство:

Согласно **2.8**, конику через пять точек провести можно. Предположим, что прямая PP_m параллельна прямой BC. Тогда, поскольку P и P_m — изотомически сопряжены, середина отрезка BC, точка A_0 будет также и серединой отрезка $A_PA_{P_m}$ с концами в основаниях соответствующих чевиан (т. к. основания чевиан симметричны относительно A_0). Поэтому медиана AA_0 будет пересекать отрезок PP_m в его середине P_0. Итак, A_0 и P_0 — середины параллельных хорд коники. Значит (см. **2.8**), медиана AA_0, содержащая точку P_0, также будет проходить и через центр коники (в случае параболы — параллельно ее оси).



В обратную сторону доказательство аналогично.

Вернувшись теперь к первым двум задачам, заметим, что в случае *равнобедренного* треугольника (к примеру, если $AB = AC$) прямые JN и GK совпадут с серединным перпендикуляром к BC, и никакой речи о параллельности идти не может.

Решение первой задачи.

Точки J и N изотомически сопряжены (см.**2.2**, **2.3**). Описанная коника, проходящая через эти точки, является *гиперболой Фейербаха*, центр которой и есть *точка Фейербаха* (согласно **2.10**). Осталось только воспользоваться *леммой.*

Решение второй задачи.

Пусть прямая GK параллельна стороне BC. На сей раз рассмотрим *гиперболу Киперта.* Согласно **2.10**, прямая GK *касается* гиперболы в центроиде G. И снова применим нашу *лемму* (в данном случае P совпадает с P_m и совпадает с G). Тогда получим, что GK параллельна BC, следовательно, центр гиперболы Киперта C_K лежит на медиане AA_0 (конечно, содержащей и точку G). Однако (см. **2.10**) точки S, G, C_K *коллинеарны.* Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

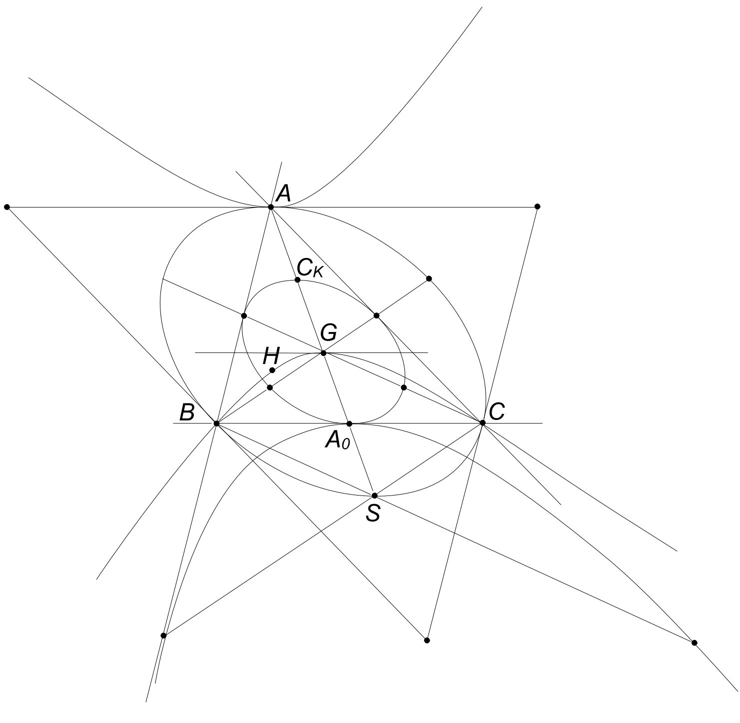
Решение третьей задачи.

Понятно, что две описанные около треугольника коники могут касаться друг друга лишь в одной из его вершин (т. к. пять точек определяют конику однозначно, обе коники проходят через три вершины, а касание означает «двойную» точку, и если бы она — не вершина, коники обязаны были бы совпадать).

Пусть, например, описанный эллипс Штейнера касается гиперболы Киперта в вершине A. Т. к. касательная к описанному эллипсу в точке A — прямая, параллельная BC (соответствующая сторона антидополнительного треугольника), то эта же прямая будет касаться гиперболы Киперта. Поскольку отрезок BC — хорда гиперболы, и A_0 — ее середина, то центр гиперболы C_K должен лежать на медиане AA_0, ведь в случае касательной середина второй параллельной хорды вырождается в точку касания. (Более точно, можно даже подметить, чтоC_K — середина отрезка AG, поскольку при симметрии относительно центра гипербола переходит в себя и центроид лежит на пересечении гиперболы и медианы). В силу того, что точки S, G, C_K *коллинеарны*, получаем, что точка Штейнера S лежит на медиане AA_0.

Вспомним теперь (см. **2.10**), что перспектором параболы Киперта является точка Штейнера S. Это означает, что вписанная парабола касается стороны BC в ее середине A_0. Но там же касается стороны BC и вписанный эллипс Штейнера.

Доказательство обратного утверждения точно такое же.



Замечание по поводу третьей задачи.

На самом деле третье утверждение является следствием более общей теоремы.

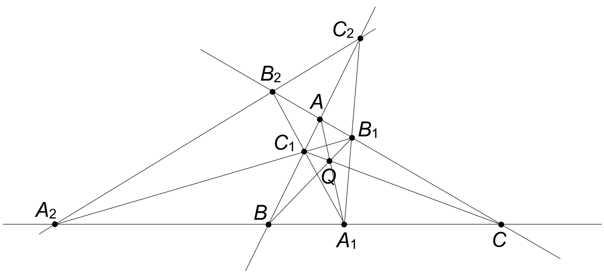
Теорема:

Пусть K_1 и K_2 — пара коник, а $\overline{K_1}$ и $\overline{K_2}$ — коники, им *двойственные* относительно треугольника ABC. Тогда K_1 касается $\text{K}_2 \Leftrightarrow \overline{K_1}$ касается $\overline{K_2}$.

В свою очередь, коники K_1 и $\overline{K_1}$ называют двойственными, если каждой точке на первой конике, имеющей относительно треугольника ABC барицентрические координаты $(p : q : r)$, соответствует прямая с уравнением $px + qy + rz = 0$, являющаяся *касательной* к конике $\overline{K_1}$ (и наоборот). (О барицентрических координатах см. [4], [5], [6], [8]) При этом коника, двойственная описанной, является вписанной (обратное утверждение также справедливо).

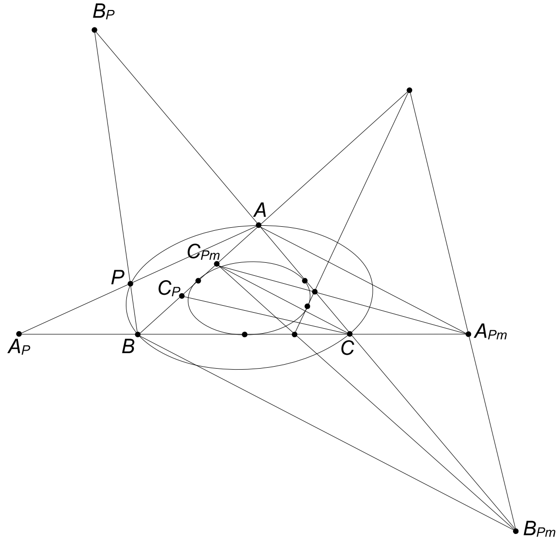
Какой же геометрический смысл прямой, двойственной точке относительно треугольника ABC? Оказывается, чтобы построить прямую p, *двойственную* точке P, надо сначала рассмотреть *изотомически сопряженную* точку P_m, а затем ее *трилинейную поляру.*

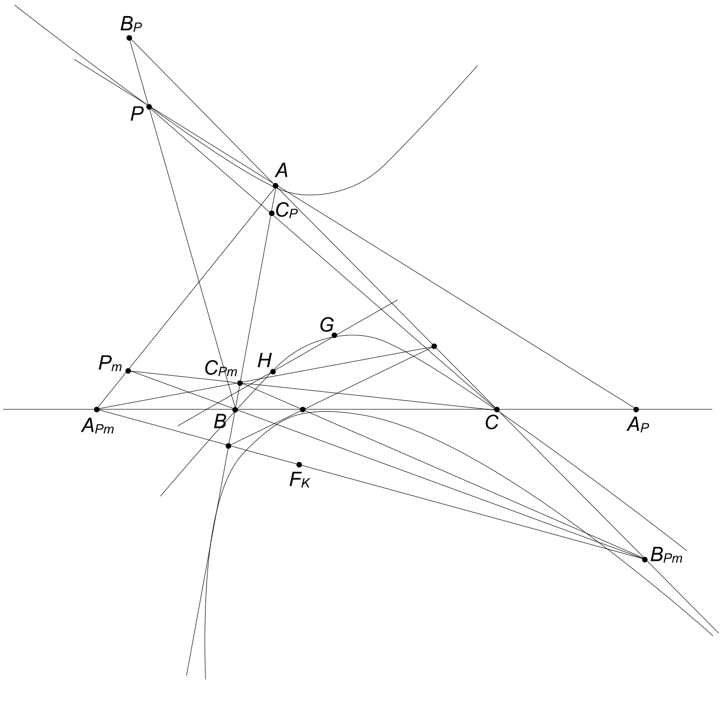
Трилинейная поляра произвольной точки Q относительно треугольника ABC — это прямая, содержащая точки пересечения прямых, проходящих через стороны чевианного треугольника точки Q — с прямыми, проходящими через соответствующие стороны исходного треугольника.



Оказывается, двойственными являются вписанный и описанный эллипс Штейнера, а также вписанная парабола Киперта и описанная гипербола Киперта.

(Произвольная точка P, лежащая на описанном эллипсе Штейнера, при изотомическом сопряжении переходит в бесконечно удаленную, чевианный треугольник которой, с вершинами в точках A_{Pm}, B_{Pm}, C_{Pm}, изображен на рисунке).


B_P
A
C_{Pm}
P
C_P
A_{Pm}
A_P
B
C
B_{Pm}


B_P
P
A
C_P
G
P_m
C_{Pm}
H
A_{Pm}
B
C
A_P
F_K
B_{Pm}

Приложение

Жизнь Замечательных Людей

Использованные при решении наших задач коники названы по фамилиям трех выдающихся геометров. Приведем краткие биографические данные о каждом из них. (Следуя, в основном, сведениям, изложенным в [7]).

Якоб Штейнер
(Jakob Steiner)
1796 — 1863

Один из величайших геометров всех времен. Родился (18 марта 1796 года) в Утцендорфе неподалеку от Золотурна (Швейцария), выходец из крестьянской семьи. Читать и писать научился в возрасте четырнадцати лет. Следующие четыре года занимался самообразованием (в свободное от основных занятий — пасти коров и пахать землю — время). В восемнадцать, вопреки родительской воле, поступает в знаменитую педагогическую школу (Ивердон, Швейцария), основанную Песталоцци и уже в двадцать лет ему доверяют преподавать математику в этой школе. Вскоре заведение (ввиду финансовых затруднений) закрылось и в 1818 году Штейнер перебирается в Гейдельберг, (Германия). Там он изучает труды французских геометров и обучается в тамошнем университете, а скудные средства на жизнь добывает, как раньше говорили, частными уроками (сейчас более распространен термин «*репетиторство*»).

Однако в немецких педагогических кругах интерес к системе Песталоцци не угас, и три года спустя Штейнера приглашают в Берлин, где он и занимает в течение многих лет различные учительские посты. Наконец, в 1834 Штейнер становится *экстраординарным профессором* Берлинского Университета. Эту должность (специально учрежденную именно для него) он занимает до конца жизни. (Исключая последний год, когда Штейнер вернулся в родную Швейцарию, где и скончался 1 апреля 1863 года в Берне).

Его манеры читать лекции вошли в легенду. Штейнер был решительно против применения алгебры и анализа[16]. Вообще на занятиях никогда не пользовался никакими чертежами[17], полагая, что по этой причине воображение учащихся разовьется быстрее всего. Рассказывают также, что обыкновенно он не готовился к лекции заранее — когда же, как следствие, возникали проблемы с доказательствами, бывало, Штейнер позволял себе в сердцах крепкое словцо.

Областью его научных интересов была *проективная геометрия* — и вклад Штейнера в эту область математики весьма значителен.

---

[16]«Вычисление заменяет мышление, тогда как геометрия стимулирует его» (Штейнер).

[17]И потому наша статья едва ли пришлась ему бы по вкусу. А возможно, и не только потому.

Что касается геометрии элементарной — список *всех* задач[18], так или иначе связанных с именем Штейнера, отнял бы немало места. Перечислим лишь некоторые:

Поризм Штейнера, теорема Штейнера-Лемуса, эллипсы и точки Штейнера, прямая Штейнера-Обера, тройки Штейнера, дельтоид Штейнера, сети Штейнера (задача о кратчайшей сети дорог для некоторых многоугольников на плоскости вполне элементарна) и т. д. и т. п.

Карл Вильгельм Фейербах

(Karl Wilhelm Feuerbach)

1800 — 1834

Родился в Иене (Германия) 30 мая 1800 года. Его отец, Пауль Риттер фон Фейербах, доктор юриспруденции, был одним из авторов Баварского Уголовного Кодекса. Дети у Пауля (ни много, ни мало — 8 сыновей) получились *странные*: незаурядно одаренные, но вместе с тем, не совсем психически уравновешенные.[19] И Карл в этом смысле не являлся исключением. В 22 года он с отличием окончил университет во Фрейбурге, а затем получил должность преподавателя математики в Эрлангской. Гимназии. Недолгая (около 6 лет, с перерывами, вызванными приступами заболевания) карьера педагога не сложилась — болезнь препятствовала нормальному и размеренному образу жизни, которым вообще знамениты немцы. Дело кончилось тем, что в 1828 году его уволили — во время одного из занятий Фейербах пригрозил своим подопечным ножиком.[20] Последние шесть лет своей жизни он прожил в Эрлангене затворником.

Свой блестящий результат (см. **2.4**) Карл Фейербах напечатал (1822 год) в небольшой брошюре (но зато с длинным названием) «Свойства некоторых особых точек в плоскости треугольника и некоторых линий и фигур, с ними связанных: аналитическо-тригонометрический подход». Еще одна книга вышла в 1827 году: «Основы аналитической теории тетраэдра». В ней, независимо от Мебиуса, опубликовавшего в том же году, но чуть раньше, свое «Барицентрическое исчисление», вводятся барицентрические координаты.

Умер Фейербах 12 марта 1834 года в Эрлангене.

---

[18] Зачастую Штейнер публиковал лишь их условия, опуская доказательства.

[19] А самым знаменитым представителем семейства Фейербахов считается философ Людвиг (1804 — 1872) — непримиримый противник религии и, в каком-то смысле, предтеча Маркса и марксизма. Поэтому в советские времена, когда марксизм являлся официальной идеологией, а школьное образование было всеобщим и обязательным, детишкам навязывали упрощенные и опосредованные выжимки из сочинений Людвига, как говорится, с молодых ногтей. С произведениями Карла дела, в этом смысле, обстояли много хуже. Ныне, кажется, для большинства школьников фамилия «Фейербах» — пустой звук. Так что, в этой среде, братья сравнялись по «индексу цитирования», близкому к нулю.

[20] Действия, конечно, недопустимые, но в значительной степени, чисто по-человечески, понятные. Думается, многие педагоги согласятся с тем, что понятные.

Фридрих Вильгельм Август Людвиг Киперт
(Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert)
1846 — 1934

О жизни этого математика известно немного.[21]

Фридрих Киперт родился в Бреслау, а окончил свои дни в Ганновере, в весьма преклонном возрасте. С 1879 по 1921 гг. занимал должность профессора математики в Ганноверском Высшем Техническом Училище (а в период с 1901 по 1904 гг. был ректором). Докторскую степень получил в Берлинском Университете (1870) — под научным руководством Карла Вейерштрасса.

Свою гиперболу Киперт открыл в 1869 г., решив задачу еще одного корифея элементарной геометрии *Эмиля Лемуана*: восстановить треугольник по трем вершинам равносторонних треугольников, построенных на его сторонах (см. L. Kiepert, *Solution de question* 864, Nouvelles annals de Mathematiques, 8 (1869), 40-42).

В 1863 выпустил пособие по математическому анализу, с тех пор выдержавшее более четырнадцати изданий.

Список литературы:

[1] Акопян А., Заславский А. *Геометрические свойства кривых второго порядка.* М.: МЦНМО, 2007.

[2] Куланин Е. *Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником.* Математическое просвещение. 2005. №9.

[3] Куланин Е. *О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя.* // Математическое просвещение. 2006. №10.

[4] Мякишев А. *Элементы геометрии треугольника.* М.: МЦНМО, 2002.

[5] Kimberling C. *Encyclopedia of triangle centers* «ETC».
`http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/`

[6] Kimberling C. *Triangle centers and central triangles.* Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ., 1998.

[7] Kimberling C. *Triangle Geometers.*
`http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/tg.html`

[8] Yiu P. *Introduction to the Geometry of the Triangle.*
`http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html`

---

[21] И отсюда можно заключить, что жизнь удалась. Уж наверное Киперт никогда не запугивал студентов холодным оружием и выражался всегда прилично — в противном случае что-нибудь непременно просочилось бы в средства массовой информации. Например, нынче в этих средствах практически не отыщешь никаких новостей о таких странах, как Австралия или Канада. Напрашивается вывод, что с Австралией и Канадой все в порядке.

Об одном свойстве точек Фейербаха и Тебо

Е.Д. Куланин

преподаватель МГППУ

Abstract. На описанной окружности разностороннего треугольника рассматриваются четыре точки такие, что наибольшее расстояние от каждой из этих точек до вершин треугольника равно сумме расстояний от этой точки до двух оставшихся вершин треугольника. Далее показывается, что эти точки совпадают с точками Фейербаха треугольника, середины сторон которого совпадают с вершинами данного треугольника и с точками Тебо треугольника, основания высот которого совпадают с вершинами данного треугольника.

1. О задаче Тебо и точках Тебо.

Рассмотрим сначала одну задачу известного французского геометра В. Тебо (1882–1960), 125-летие со дня рождения которого отмечалось в 2007 году. Это задача 4328, опубликованная в журнале *American Mathematical Monthly* в 1949 г. [1]. В ней речь идет о прямой Эйлера и окружности девяти точек. Окружность девяти точек иногда называют окружностью Эйлера (1707–1783), в честь великого математика, для которого 2007 год также был юбилейным.

4328. Proposed by Victor Thebault, Tennie, Sarthe, France.
Given a triangle ABC whose altitudes are AA', BB', CC'. Prove that the Euler lines of the triangles $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ are concurrent on the nine-point circle at a point P which is such that one of the distances PA', PB', PC' equals the sum of the other two.

Напомним, что прямой Эйлера треугольника называется прямая, проходящая через центр описанной окружности, точку пересечения медиан и точку пересечения высот (ортоцентр) этого треугольника, а окружностью девяти точек — окружность, на которой лежат середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром этого треугольника. Окружность девяти точек называют также окружностью Эйлера или окружностью Фейербаха.

Приведем решение задачи Тебо, а затем исследуем точки, лежащие на описанной окружности треугольника и обладающие тем свойством, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1. *Прямая, пересекающая стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно, проходит через точку G пересечения медиан этого треугольника тогда и только тогда, когда* $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{CN}{NB}=1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть D, E, S, L — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A, K, B, C на прямую MN, где K — середина AC (см. рис. 1).

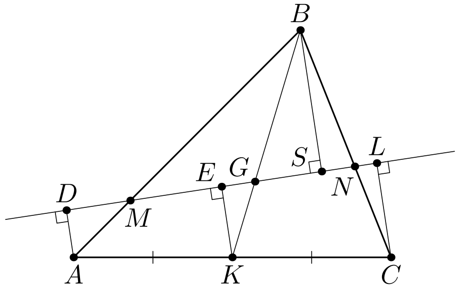


Рис. 1

Тогда $KE=\dfrac{AD+CL}{2}$ как средняя линия прямоугольной трапеции $ACLD$. Из подобия прямоугольных треугольников KEG и BSG следует, что $\dfrac{BS}{KE}=\dfrac{BG}{GK}=2$ (напомним, что G — точка пересечения медиан треугольника ABC). Итак, $BS=2KE=AD+CL$.

Из подобия прямоугольных треугольников ADM и BSM, CLN и BSN выводим, что $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AD}{BS}$, $\dfrac{CN}{NB}=\dfrac{CL}{BS}$. Поэтому $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{CN}{NB}=$ $=\dfrac{AD}{BS}+\dfrac{CL}{BS}=\dfrac{AD+CL}{BS}=\dfrac{BS}{BS}=1$, что и требовалось. Доказательство достаточности аналогично. □

Сформулируем теперь задачу Тебо в наших стандартных обозначениях, исключив вырожденный случай прямоугольного треугольника.

Теорема 1. *Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты непрямоугольного треугольника ABC. Тогда прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 пересекаются в такой точке T окружности Эйлера* *треугольника ABC, для которой один из отрезков TH_1, TH_2, TH_3 равен сумме двух остальных.*

Доказательство. Покажем сначала, что прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 пересекаются в одной точке T, лежащей на окружности Эйлера треугольника ABC (см. рис. 2).

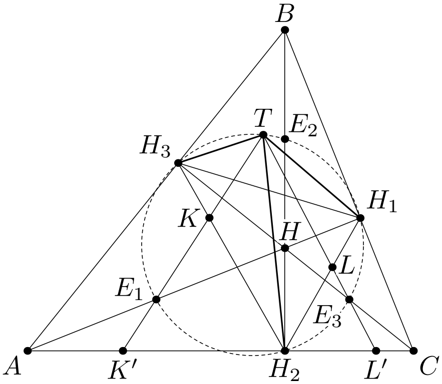


Рис. 2

В самом деле, так как треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 подобны треугольнику ABC и $\angle AH_2H_3 = \angle ABC = \angle CH_2H_1$, то в результате поворота треугольника AH_2H_3 вокруг точки H_2 против часовой стрелки на угол AH_2H_3 этот треугольник перейдет в треугольник, гомотетичный треугольнику CH_1H_2. Из этого следует, что угол между любыми двумя одинаково расположенными прямыми треугольников AH_2H_3 и CH_1H_2 и, в частности, между прямыми Эйлера этих треугольников, равен углу ABC.

Пусть прямая Эйлера треугольника AH_2H_3 вторично пересекает окружность Эйлера в точке T. Поскольку угол между прямыми Эйлера треугольников AH_2H_3 и CH_1H_2 равен углу $E_1E_2E_3$, где E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH (треугольники ABC и $E_1E_2E_3$ гомотетичны с центром в точке H пересечения высот треугольника ABC и коэффициентом $\frac{1}{2}$), то точка пересечения этих прямых лежит на окружности Эйлера треугольника ABC и, следовательно, совпадает с T. Аналогично, прямые Эйлера треугольников AH_2H_3 и BH_3H_1 также проходят через точку T.

Обозначим точки пересечения отрезков TE_1 и H_2H_3, TE_3 и H_1H_2 через K и L. Так как E_1 и E_3 — середины дуг $H_2E_1H_3$ и $H_1E_3H_2$ окружности Эйлера, то TE_1 и TE_3 — биссектрисы углов H_3TH_2 и

H_1TH_2 и из треугольников H_3TH_2 и H_1TH_2 по свойству биссектрисы угла треугольника получим $\dfrac{H_3T}{TH_2} = \dfrac{H_3K}{KH_2}$, $\dfrac{H_1T}{TH_2} = \dfrac{H_1L}{LH_2}$. Сложив полученные равенства, найдем, что

$$\frac{TH_3 + TH_1}{TH_2} = \frac{H_3K}{KH_2} + \frac{H_1L}{LH_2}. \tag{2}$$

Пусть K' и L' — точки пересечения прямых Эйлера TE_1 и TE_3 треугольников AH_2H_3 и CH_1H_2 со сторонами AH_2 и CH_2. Так как прямая Эйлера TE_1 проходит через точку пересечения медиан треугольника AH_2H_3, то согласно лемме 1 $\dfrac{H_3K}{KH_2} + \dfrac{AK'}{K'H_2} = 1$, но $\dfrac{AK'}{K'H_2} = \dfrac{H_1L}{LH_2}$ в силу подобия треугольников AH_2H_3 и CH_1H_2, поэтому $\dfrac{H_3K}{KH_2} + \dfrac{H_1L}{LH_2} =$ $= 1$ и, возвращаясь к равенству (1), получим $\dfrac{TH_3 + TH_1}{TH_2} = 1$, откуда $TH_3 + TH_1 = TH_2$, что и требовалось установить. $\square$

На рис. 2 изображен остроугольный треугольник ABC. Для тупоугольного треугольника доказательство аналогично.

Будем в дальнейшем называть точку пересечения прямых Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 точкой Тебо треугольника ABC.

2. Четыре точки на описанной окружности треугольника.

Далее нам понадобится следующий известный факт: пусть S_a, S_b, S_c — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника ABC (см. рис. 3); P — точка, лежащая на дуге AC, K и L — точки пересечения отрезков PS_c и PS_a со сторонами AB и BC; тогда отрезок KL проходит через центр I вписанной окружности треугольника ABC.

Для доказательства применим теорему Паскаля — точки пересечения трех пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой — к вписанному шестиугольнику BAS_aPS_cC. Тогда K, L, I — точки пересечения его сторон BA и PS_c, S_aP и CB, S_cC и AS_a соответственно.

Справедливо и обратное, т. е. если отрезок KL, где K и L — точки, взятые на сторонах AB и BC треугольника ABC, проходит через центр I вписанной окружности этого треугольника, то прямые S_cK и S_aL пересекаются в точке P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC.

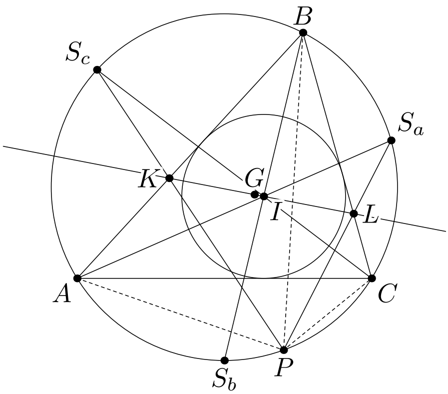


Рис. 3

Итак, пусть отрезок KL проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые S_cK и S_aL пересекутся в точке P описанной окружности этого треугольника. Поскольку S_c и S_a — середины дуг AB и BC описанной окружности, то PK и PL — биссектрисы углов APB и CPB и из треугольников APB и CPB в силу свойства биссектрисы треугольника получаем:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AK}{KB}, \qquad \frac{PC}{PB} = \frac{CL}{LB},$$
$$\frac{PA}{PB} + \frac{PC}{PB} = \frac{PA + PC}{PB} = \frac{AK}{KB} + \frac{CL}{LB}.$$

Поэтому $PA+PC = PB$ тогда и только тогда, когда $\frac{AK}{KB}+\frac{CL}{LB} = 1$. Согласно лемме 1 последнее равенство выполняется в том и только в том случае, когда отрезок KL проходит через центр тяжести G треугольника ABC. Итак, прямая GI однозначно определяет одну из точек описанной окружности треугольника ABC такую, что расстояние от нее до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника. Прямые GI_a, GI_b, GI_c, *где* I_a, I_b, I_c — *центры вневписанных окружностей треугольника* ABC, однозначно определяют еще три точки описанной окружности треугольника, обладающие такими же свойствами. Поэтому справедлива следующая

Теорема 2. *На описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки такие, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника равно сумме* *расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника.*

Для равнобедренного треугольника таких точек три, причем одна из них совпадает с вершиной треугольника, лежащей на его оси симметрии (в этом случае одно из указанных расстояний равно нулю), а для равностороннего треугольника таких точек бесконечно много — указанным свойством обладает согласно известной теореме *Pompeiu* [2] любая точка описанной окружности равностороннего треугольника (интересно отметить, что на эту теорему *Pompeiu* обратил внимание и сам *V. Thebault* [3]).

Это понятно и из общих соображений, поскольку для равнобедренного треугольника прямая GI и одна из прямых GI_a, GI_b, GI_c совпадают, а для равностороннего треугольника прямая GI не определена, т. е. любая прямая, проходящая через центр равностороннего треугольника, проходит через его центр тяжести и центр вписанной окружности, совпадающие с центром самого треугольника.

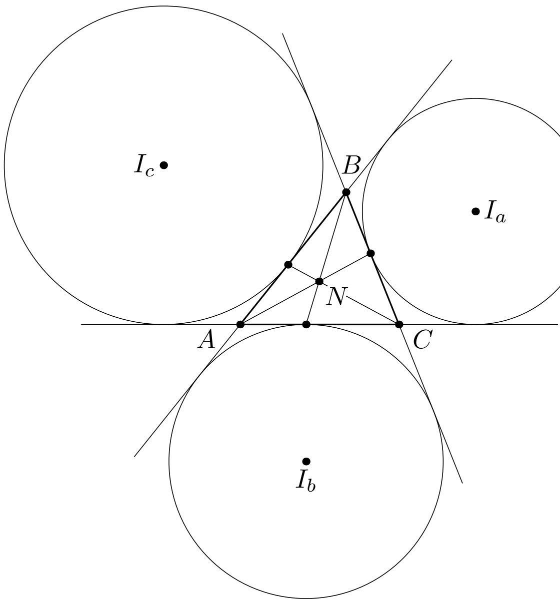


Рис. 4

Отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с его противоположными сторонами, пересекаются в одной точке N, которая называется точкой Нагеля (см. рис. 4). На самом деле существуют еще три точки Нагеля N_a, N_b, N_c. Точка N_b совпадает с точкой пересечения трех прямых, первая из которых проходит через вершину A и точку касания вневписанной окружности I_c со стороной BC, вторая — через вершину B и точку касания вписанной окружности I со стороной AC, третья — через вершину C и точку касания вневписанной окружности I_a с продолжением стороны AB (см. рис. 5). Точки N_a и N_c определяются аналогично. Эти факты легко доказать, используя теорему Чевы. Приведем без доказательства еще одну теорему.

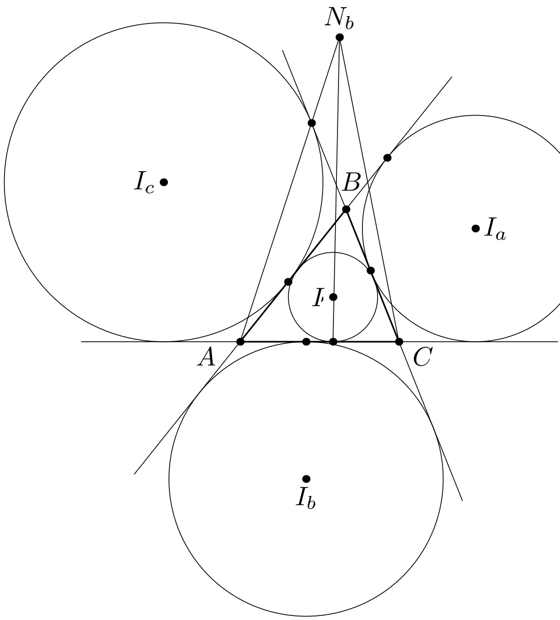


Рис. 5

Теорема 3. *Пусть O — центр описанной окружности разностороннего треугольника; N, N_a, N_b, N_c — его точки Нагеля. Тогда четыре точки описанной окружности этого треугольника такие, что расстояние от любой из них до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника, лежат по одной на прямых ON, ON_a, ON_b, ON_c.*

Задача 1. Высоты AH_1, AH_2, AH_3 непрямоугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, E_1 и E_3 — середины отрезков AH и

CH, T — точка Тебо треугольника ABC, K — точка пересечения прямых TE_1 и H_2H_3, L — точка пересечения прямых TE_3 и H_1H_2. Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр H треугольника ABC и центр тяжести треугольника $H_1H_2H_3$.

Задача 2. Прямая, параллельная одной из прямых OI, OI_a, OI_b, OI_c, где O, I, I_a, I_b, I_c — центры соответственно описанной, вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC, пересекает его стороны (или их продолжения) BC, CA, AB в трех различных точках A_1, B_1, C_1. Тогда прямые, соединяющие точки A, B, C с центрами описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно, пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника ABC и такой, что расстояние от этой точки до одной из вершин треугольника ABC равно сумме расстояний от этой же точки до двух остальных вершин треугольника ABC.

3. О точках Фейербаха.

Напомним, что согласно знаменитой теореме Фейербаха окружность девяти точек данного треугольника касается вписанной и трех вневписанных окружностей этого треугольника, поэтому точку касания с вписанной окружностью называют внутренней точкой Фейербаха, а точки касания с вневписанными окружностями — внешними точками Фейербаха.

Следующий факт впервые установил *Gallatly* (*Mathematical Gazette*, 1908). Мы приведем более простое доказательство, принадлежащее *Tokichi Kodera* [4]. В нем используется

Лемма 2. *Расстояние между серединой средней по величине стороны треугольника и точкой касания с этой стороной вписанной окружности треугольника равно сумме расстояний от середин двух остальных сторон до точек касания с этими сторонами вписанной окружности этого треугольника.*

Доказательство. Покажем сначала, что расстояние между серединой стороны треугольника и точкой касания с этой стороной вписанной окружности треугольника равно полуразности двух остальных сторон этого треугольника.

Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC; P, Q, R — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB; $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, причем $a < b < c$. По свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки, $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$, $CP = CQ = z$.

Тогда $AB+BC+CA = a+b+c = 2x+2y+2c$, откуда $x = \frac{a+b+c}{2} - (y+z) = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$. Аналогично, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$. Тогда $M_2Q = CM_2 - CQ = \frac{b}{2} - z = \frac{b}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-a}{2} = \frac{b-a}{2} + \frac{c-b}{2} = M_3R + M_1P$, что и требовалось. □

Теорема 4. *Пусть M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC; F — внутренняя точка Фейербаха, т. е. точка касания окружности девяти точек с вписанной окружностью треугольника ABC. Тогда наибольшее из расстояний FM_1, FM_2, FM_3 равно сумме двух остальных расстояний.*

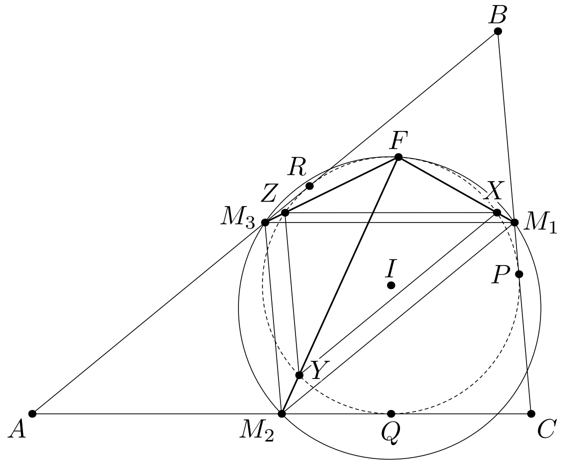


Рис. 6

Доказательство. Обозначим через X, Y, Z вторые точки пересечения прямых FM_1, FM_2, FM_3 с вписанной окружностью треугольника ABC; а через P, Q, R — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB (см. рис. 6). Так как точка F является центром гомотетии вписанной окружности и окружности девяти точек, то прямые YZ, ZX, XY соответственно параллельны прямым M_2M_3, M_1M_3, M_1M_2, и $\frac{FM_2}{FM_3} = \frac{YM_2}{ZM_3} = \frac{\sqrt{FM_2 \cdot YM_2}}{\sqrt{FM_3 \cdot ZM_3}}$.

Но согласно теореме о квадрате касательной $M_2Q^2 = FM_2 \cdot YM_2$ и $M_3R^2 = FM_3 \cdot ZM_3$, поэтому $\frac{\sqrt{FM_2 \cdot YM_2}}{\sqrt{FM_3 \cdot ZM_3}} = \frac{M_2Q}{M_3R}$ и $\frac{FM_2}{FM_3} = \frac{M_2Q}{M_3R}$.

Аналогично получаем $\dfrac{FM_3}{FM_1} = \dfrac{M_3R}{M_1P}$.

Следовательно, $FM_1 : FM_2 : FM_3 = M_1P : M_2Q : M_3R$. Поскольку по лемме 2 $M_2Q = M_1P + M_3R$, то и $FM_2 = FM_1 + FM_3$. $\square$

Утверждения, аналогичные теореме 4, справедливы и для внешних точек Фейербаха F_a, F_b, F_c треугольника ABC.

4. Заключительные замечания.

Пусть ABC — остроугольный разносторонний треугольник, H — его ортоцентр. Обозначим через T, T_a, T_b, T_c — точки Тебо треугольников ABC, BCH, CAH, ABH соответственно. Поскольку треугольники ABC, BCH, CAH, ABH имеют общую окружность Эйлера, то точки T, T_a, T_b, T_c лежат на этой окружности. Если H_1, H_2, H_3 — основания высот треугольника ABC, то согласно теореме 1 расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника $H_1H_2H_3$ равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника $H_1H_2H_3$.

Проведем через вершины треугольника ABC прямые, перпендикулярные его биссектрисам, исходящим из этих же вершин. Эти прямые образуют остроугольный треугольник $I_aI_bI_c$, где I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, причем вершины A, B, C треугольника ABC совпадают с основаниями высот треугольника $I_aI_bI_c$. Таким образом, описанная окружность треугольника ABC является окружностью Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$ и четыре точки Тебо треугольников $I_aI_bI_c$, II_bI_c, I_aII_c, I_aI_bI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC, лежат на описанной окружности треугольника ABC и обладают тем свойством, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника ABC равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника ABC.

Аналогично, если провести через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам, то вершины треугольника ABC совпадут с серединами сторон полученного треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда точки Фейербаха треугольника $A_1B_1C_1$ будут лежать на описанной окружности треугольника ABC и согласно теореме 4 обладать тем свойством, что расстояние от любой из этих точек до одной из вершин треугольника ABC равно сумме расстояний от этой точки до двух других вершин треугольника ABC. Но по теореме 2 на описанной окружности разностороннего треугольника существуют ровно четыре точки, обладающие указанным свойством, поэтому точки

Тебо треугольников $I_aI_bI_c$, II_bI_c, I_aII_c, I_aI_bI совпадают с точками Фейербаха треугольника $A_1B_1C_1$.

В других обозначениях все сказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть H — ортоцентр остроугольного разностороннего треугольника ABC, H_1, H_2, H_3 — основания его высот; $H_1'H_2'H_3'$ — треугольник, серединный треугольник которого совпадает с треугольником $H_1H_2H_3$. Тогда точки Тебо T, T_a, T_b, T_c треугольников ABC, BHC, CHA, AHB соответственно совпадают с точками Фейербаха треугольника $H_1'H_2'H_3'$, причем точка T совпадает с внутренней, а точки T_a, T_b, T_c — с внешними точками Фейербаха треугольника $H_1'H_2'H_3'$.*

В заключение отметим, что справедлив следующий аналог задачи Тебо, также впервые установленный *Gallatly* ([4]):

Теорема 6. *Пусть дан треугольник ABC; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты; M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, CA, AB; точки E_1 и I_1, E_2 и I_2, E_3 и I_3 — центры описанных и вписанных окружностей треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно. Тогда прямые E_1I_1, E_2I_2, E_3I_3 пересекаются в такой точке F окружности девяти точек треугольника ABC для которой один из отрезков FM_1, FM_2, FM_3 равен сумме двух других отрезков, причем F совпадает с внутренней точкой Фейербаха треугольника ABC.*

Утверждения, аналогичные теореме 6, справедливы и для внешних точек Фейербаха F_a, F_b, F_c треугольника ABC. В этом случае прямые, проходящие через точки E_1, E_2, E_3, должны также проходить через центры соответствующих вневписанных окружностей треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2.

Литература

[1] V. Thebault, *Problem* 4328, American Mathematical Monthly, 56(1949), 39.

[2] D. Pompeiu, *Une identite entre nombres complexes et un theoreme de geometrie elementaire*, Bull. Math. Phys. Ecole Polyt., Bucharest, 6(1936) 6–7.

[3] V. Thebault, *Sur un theoreme de M.D. Pompeiu*, Bull. Math. Phys. Ecole Polytechn. Bucarest, 10(193-1939) 38–42.

[4] Kodera, T.: *New proofs of two theorems, concerning the Feuerbach point of the triangle*, «Tohoku Mathematical Journal», Vol.41, 1935/36, 455–457.

Новое — хорошо забытое старое

(«*из бабушкиных сундуков*»)

А.Н. Андреева

учитель математики школы №91

Мне хочется порекомендовать прочесть книги, вышедшие в издании МАТЕЗИС, издававшим книги в Одессе с 1904 по 1925 годы. Часть из этих книг выложена на сайте www.mathesis.ru, остальные книги готовятся к выкладыванию.

I. Софус Тромгольт «Игры со спичками (задачи и развлечения)», перевод с немецкого. 250 рис и черт. 1907 г.

В книге имеется 300 задач. Здесь и задачи на перекладывание спичек; на построение мельниц и церквей из спичек, мостов и подставок; фокусы, игры и шутки со спичками; деление наследства; изготовление живых фигурок людей и животных и многое другое.

II. Г. Шуберт «Математические развлечения и игры», перевод нем. издания, под редакцией с прим. и добавлениями. XIY + 358 стр., со многими таблицами, 1911 г.

Книга впервые появилась в 1898 году. Некоторые задачи, представленные в ней, до сих пор можно увидеть на современных олимпиадах разных уровней. Книга предполагает знания элементарных сведений по математике, поэтому не все имеет законченный вид и «редакция сочла полезным снабдить русский перевод добавлениями...», которые тоже представляют интерес.

В книге 25 параграфов. Назову только часть тем, затронутых в книге. Это: фокусы; отгадывание чисел; задачи на переливание, взвешивание; софизмы; магические квадраты; *совершенные числа*; Пифагоровы и Героновы числа; Эйлеровы странствия и многое другое.

III. С. Роу «Геометрические упражнения с куском бумаги». Пер. с англ. YIII + 167 стр. с 87 рис. и чертежами. 2-е издание. 1923 г.

В предисловии автор пишет «Я старался не только помочь изучению геометрии в школах, но и доставить развлечение старому и малому...» Мадрас, Индия, 1893 г.

Книга содержит 14 глав.

Первые девять глав посвящены правильным многоугольников, рассматриваемых в первых книгах Евклида; теореме Пифагора.

Глава 10 посвящена арифметической, геометрической и гармонических пропорциях; суммируются некоторые арифметические прогрессии. Излагается Делосская задача об удвоении куба и другие вопросы.

Глава 11 трактует об общей теории правильных многоугольников и определении величины π.

Глова 12 касается равенства, подобия, симметрии, подобия фигур и других вопросов.

Главы 12 и 13 посвящены коническим сечениям, интересным кривым, инверсии, истории классических задач.

Все книги предполагают только знакомство с элементарной математикой (арифметикой).

Не привожу конкретных задач, не только потому, что в каждой книге их большое число и они очень интересны и поучительны. Главная причина — такие книги обязательно надо читать от корки до корки.

Оглавление