Учим математике-3

(материалы открытой школы-семинара учителей математики)

под редакцией А. Д. Блинкова и П .В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2013

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-3** (материалы открытой школы-семинара учителей математики) / Под ред. А. Д. Блинкова и П .В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2013. — 168 с.

ISBN 978-5-4439-0091-9

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей г. Зеленограда и г. Москвы, проходившей с 30 апреля по 7 мая 2012 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-3
(материалы открытой школы-семинара учителей математики)

Технический редактор *Т. Струков*
Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 15.02.2013 г. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 10,5 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-4439-0091-9

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***третьей открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики***, проходившей с 30 апреля по 7 мая 2012 года на берегу Черного моря (с. Морское, Николаевская область, Украина). Семинар был организован Московским Институтом Открытого Образования и Московским Центром Непрерывного Математического Образования. Материалы первых двух школ-семинаров — см. сборники «Учим математике» и «Учим математике 2», — М.: МЦНМО, 2007 и 2009 гг.

На семинар приглашались все желающие. На приглашение откликнулось много учителей, в том числе те, которые ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись также победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики.

В работе школы-семинара приняло участие 47 преподавателей, из которых более двадцати человек было из Москвы. Большой делегацией была также представлена республика Саха (Якутия) — 11 человек. На семинар приехали учителя не только из разных регионов России (Кострома, Махачкала, Московская и Ростовская области), но также Украины (Киев, Харьков) и Казахстана.

На прошедшем семинаре обсуждались различные вопросы, связанных с обучением школьников. Кроме того, несколько докладов были «чисто математическими». Использовались различные формы деятельности: лекции, семинары, практические занятия, «круглые столы». Помимо этого, по инициативе ряда участников, некоторые занятия, которые «не поместились» в официальную программу, проводились для желающих во второй половине дня.

Организатором и координатором третьей школы-семинара (как и двух предыдущих) являлся преподаватель лицея №1557 г. Москвы

И. Б. Писаренко, научным руководителем — заведующий кафедрой математики МИОО, исполнительный директор МЦНМО, учитель школы №57 г. Москвы, к. ф-м. н. И. В. Ященко, его заместителем — сотрудник МИОО и МЦНМО, заместитель директора Центра образования №218 г. Москвы заслуженный учитель РФ А. Д. Блинков. Методистами прошедшего семинара были доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ФМШ №2007 г. Москвы, заслуженный учитель РФ П. В. Чулков и зав. кафедрой математики школы-интерната «Интеллектуал» г. Москвы Д. Э. Шноль.

По итогам школы-семинара все участники получили удостоверение о прохождении курсов повышения квалификации МЦНМО.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить экскурсионные поездки в Николаев и Одессу. За рамками учебной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению всех участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

Программа открытой школы-семинара

30 апреля		
Время	Вид работы	Содержание
9.20	Открытие	А. Д. Блинков, И. Б. Писаренко О порядке работы школы-семинара
9.50	Лекция	А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике...
11.20	Семинар	И. Б. Писаренко Эвристика, интуиция, логика
12.00	Семинар	Г. Б. Филипповский Детки решают лучше!
13.00	Круглый стол	Развитие интереса к математике у школьников 5 – 7 классов и младше

1 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	Н. Н. Андреев Математические этюды
11.00	Семинар	А. Н. Андреева Несколько способов решения тригонометрических уравнений
12.00	Семинар	Д. Г. Мухин Избранные задачи геометрии куба
13.00	Круглый стол	Проблемы общего образования. Учебники. Дистанционное обучение
2 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	Д. Э. Шноль Плоскость параметров (k; b) линейной функции $y = kx + b$
11.00	Семинар	С. А. Беляев Сангаку: японская храмовая геометрия
12.00	Семинар	П. В. Чулков Обсуждаем задачу
13.00	Круглый стол	Проблемы профильного и углубленного изучения математики
3 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	А. Г. Мякишев О некоторых окружностях, связанных с треугольником
11.00	Семинар	А. Д. Блинков Непрерывность в геометрии
12.00	Практическое занятие	С. Л. Синякова Непривычный ракурс в задаче без параметров
13.00	Круглый стол	Математические кружки, олимпиады, турниры, ЛМШ

4 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	Д. Э. Шноль История математики на уроках математики
11.00	Семинар	А. А. Марачев Математическая индукция
12.00	Семинар	Д. В. Прокопенко Теорема Фалеса в окружности
13.00	Круглый стол	Проблемы дополнительного образования. Проектно-исследовательская деятельность
5 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	Н. Н. Андреев Математические этюды
11.00	Семинар	Д. В. Швецов Темы для занятий геометрического кружка
12.00	Семинар	И. Ж. Ибатулин Принцип Дирихле: сравнение различных методик изложения
13.00	Практическое занятие	О. М. Кузнецов Метод построения динамических моделей плоских мозаик в программе GeoGebra
6 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	И. Б. Писаренко Полифония доказательств
11.00	Семинар	Е. Ф. Шершнев Алгоритм Евклида на отрезках
12.00	Семинар	С. М. Крачковский Далекое и близкое в математике: мнимое сходство и скрытое единство задач
13.00	Практическое занятие	В. И. Чудаков Решение и составление задач с параметрами

7 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	Я. И. Абрамсон Альтернативное образование
11.00	Семинар	Д. А. Калинин Конечные аффинные плоскости
12.00	Семинар	С. Л. Синякова Практические цепочки тривиальных базовых задачек или картинок, являющихся опорными для развития темы
13.00	Круглый стол	«Открытый микрофон»: проблемы, которые волнуют...
16.00	Закрытие	А. Д. Блинков, И. Б. Писаренко Подведение итогов школы-семинара

Дополнительные семинары и практические занятия

С. А. Беляев «Делаем усеченный икосаэдр»

И. Б. Писаренко «Эвристика, интуиция, логика» (продолжение)

Г. Б. Филипповский «Этюд о теореме Лейбница»

Г. Б. Филипповский «Благословенны препятствия — ими растем!»

П. В. Чулков Нестандартные задачи для учащихся 5—7 классов

Д. Э. Шноль «История математики на уроках математики» (продолжение)

Некоторые из опубликованных материалов являлись сообщениями в рамках «круглых столов». Все материалы сборника представлены в авторских редакциях.

Сангаку:
японская храмовая геометрия

С. А. Беляев,
Школа № 1332 «Искусство», г. Москва

Старый пруд!
Прыгнула лягушка.
Всплеск воды.

Мацуо Басё

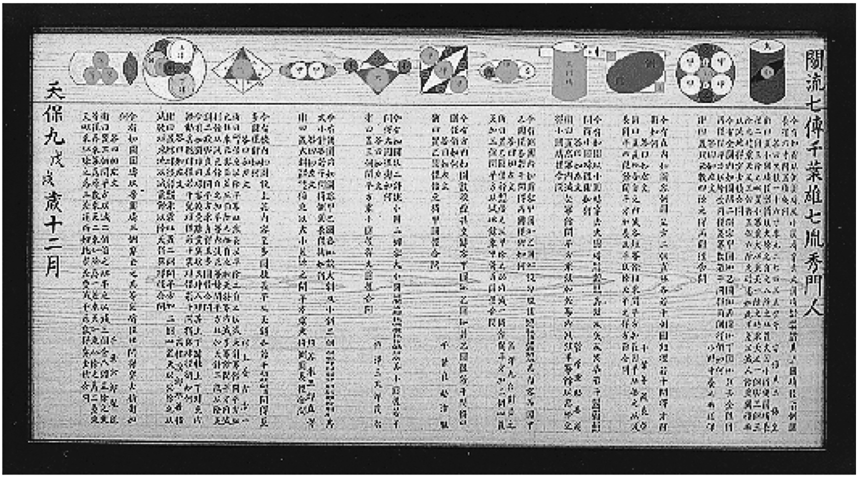
1 Введение

Кацусика Хокусаи
Большая волна
в Канагаве

Период Эдо (1603–1867) (старинное название Токио) — это период истории Японии начавшийся с приходом к власти сёгуната Токугава и проведением им политики *сакóку*: закрытием всех государственных границ, прекращение всех возможных торговых и культурных связей с внешним миром, период полной изоляции Японии. Однако именно эта полная культурная изоляция привела к бурному расцвету во многих областиях культуры японского народа. Именно в этом периоде появляются такие ярчайщие представители японской культуры: в литературе — Мацуо Басё, в живописи — Кацусика Хокусаи, в математике — Секи Кова.

Период изоляции привёл также к созданию уникальной японской математической школы — *васáн* (в отличие от западной — *иосан*). Надо заметить, что математика XVII века и в Японии, и в Европе была весьма своеобразным интеллектуальным занятием, сохранившим в себе нечто от цеховых традиций средневековья. Обычной была ситуация, когда отдельные мастера, придумав какую-нибудь сложную задачу, бросали публичный вызов своим собратьям по цеху, предлагая им найти решение и показать своё мастерство.

Рисунки к этим задачам, а это как правило были геометрические задачи, красиво раскрашивались на деревянных досках и вывешивались в синтоистских храмах как дар богам *ка́ми*. Такие деревянные таблички получили название *сангаку* (буквальный перевод и есть: деревянная табличка).



Структура сангаку почти всегда одинакова. После посвящения, справа налево следуют один за другим раскрашенные чертежи, под каждым из них условие задачи и ответ. Задачи предполагались вызовом: «Попробуй реши» — для своих учеников или коллег. Каждая табличка содержит от одной до 16–18 задач разной степени трудности, как правило, весьма трудных.

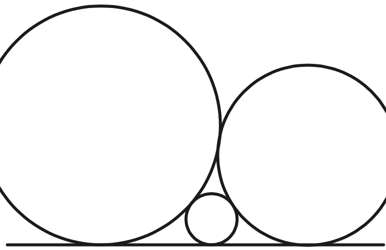
2 Основные идеи васан

Круг основных идей японской храмовой геометрии довольно разнообразен и немного непривычен для геометра, воспитанного на традициях, теоремах и картинках западной геометрической школы, преимущественно унаследованной от древних греков. Первое бросающееся в глаза отличие — это повышенное внимание японских геометров к окружностям и эллипсам: как правило, ни одна табличка сангаку не обходится без задач об окружностях. Более того, количество окружностей в одной задаче может быть довольно велико, а иногда подразумеваться и бесконечным. Хотя техника работы с окружностями не выходит за круг метрических теорем, не устаёшь удивляться наблюдательности и изощрённости создателей сангаку. В отличие от западной математики, в васан нет теорем о пересечении нескольких прямых в одной точке и не фигурируют другие коники, кроме эллипса.

2.1 Метрические теоремы

Как уже было сказано, для сангаку характерны в основном метрические, а не аффинные, задачи. Как правило, решение ограничивается теоремами Пифагора и/или косинусов, однако сложность задач сангаку, решаемых этой техникой, сильно разнится от весьма небольшой до почти невероятной.

Довольно несложная, но значимая в васане задача, встречающаяся в сангаку 1824 г. из префектуры Гунма:

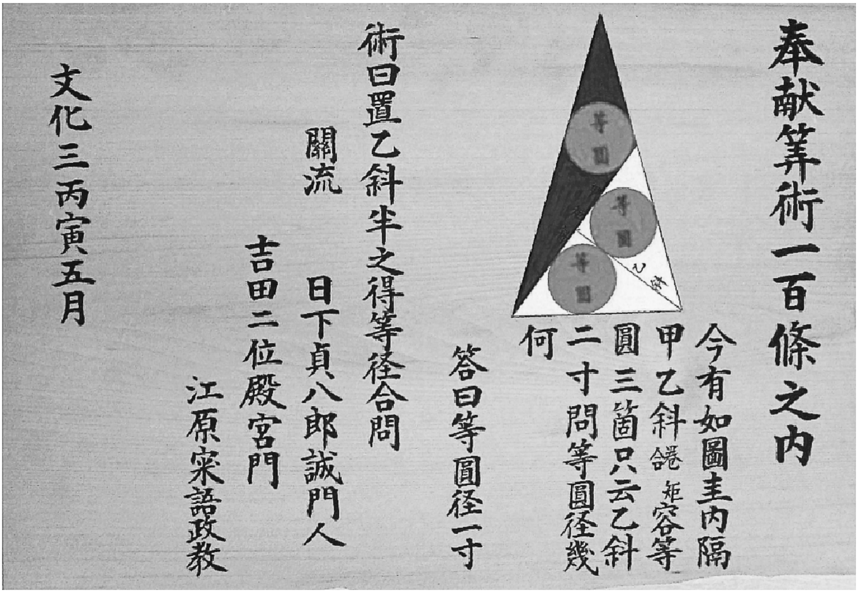


К двум внешне касающимся кругам радиусов r_1 *и* r_2 *проведена внешняя касательная. Круг радиуса* r *касается данных кругов и проведённой касательной. Доказать, что справедливо соотношение:*

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Очень трудная задача, табличка с которой появилась в 1806 году, однако впоследствии была утрачена. Здесь приведена реплика этой таблички, воспроизведённая по манускрипту математика середины XIX века Китагавы Мотто:

В равнобедренный треугольник помещены три равные окружности так, как показано на рисунке. Доказать, что радиусы этих окружностей равны четверти перпендикуляра, которого касаются две из них в одной точке (он проведён из правой вершины основания).



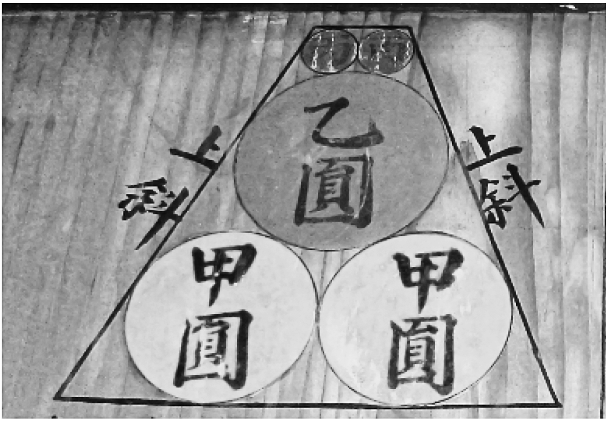
Решение может быть получено двукратным применением теоремы Пифагора, но найти соответствующие два прямоугольных треугольника не так-то просто!

2.2 Касающиеся окружности

Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою.

И. Ф. Шарыгин

Выше отмечалось, что про касающиеся окружности и эллипсы — самые многочисленные из задач сангаку. Не имея возможности в рамках этой статьи сделать сколько–нибудь полный обзор таких задач, замечу лишь, что в этом (2012) году вышла замечательная книга А. Карлюченко «Сангаку. Японская храмовая геометрия»[2], которая, безусловно, является эпохальной среди книг этой тематики и, пожалуй, равной по значимости классической книги Фукагавы и Ротмана[1]. В книге Карлюченко отсутствуют задачи о эллипсах, а задачи об окружностях классифицированы по их количеству в рассматриваемой конструкции. Понимая что сколько-нибудь более подробный анализ задач сангаку далеко выходит за рамки этой статьи, я приведу здесь лишь несколько ярких на мой вкус задач с комментариями, но без подробного анализа:



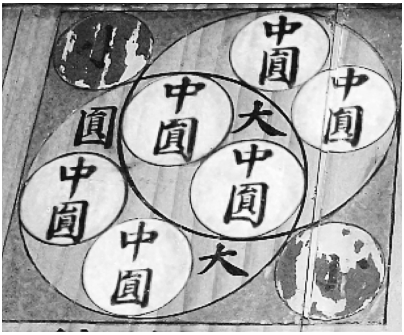
Дана равнобокая трапеция, в которую вписаны круги как показано на рисунке. Радиусы равных окружностей, прилегающих к верхнему и нижнему основанию соответственно равны r и R. Найти радиус ρ окружности, касающейся всех четырёх окружностей и боковых сторон трапеции.

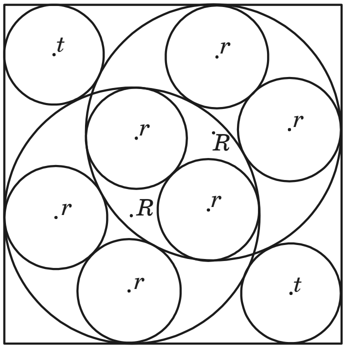
В табличке приведён числовой пример: если $R = 36$, $r = 16$, то $\rho = 49$.

В этой задаче используется лишь равенство внешних касательных к окружностям R и r, но какова эстетика!

*Найти r через t. (*см. рисунок ниже).

Ответ: $r = \dfrac{\frac{2}{5}t}{3 + \sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{4\left(2 + \sqrt{\frac{2}{5}}\right)}}$.

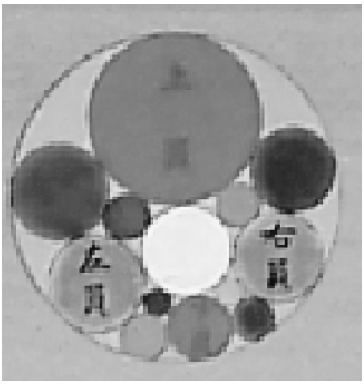


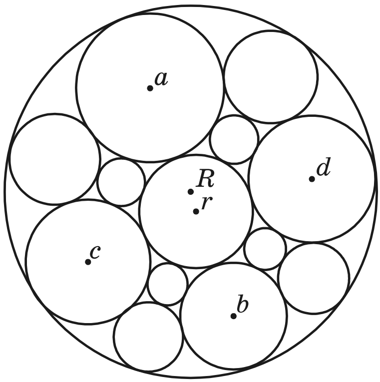


Если $t = 1$, то $r = 1{,}03228896$. Древние японцы явно не боялись трудных вычислений.

2.3 Инверсия

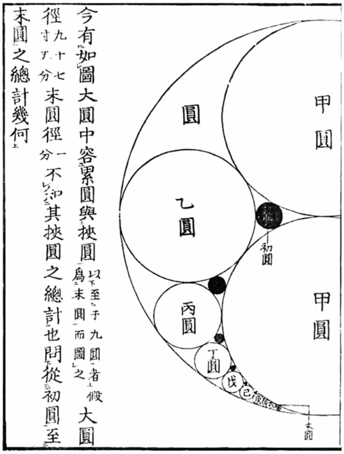
Известно, что древние японцы открыли инверсию в один год с Я. Штейнером и, разумеется, независимо от него. Именно с этого года на табличках сангаку и в математических манускриптах начинают появляться задачи, которые решаются с помощью инверсии, без применения которой решение было бы почти невозможным:

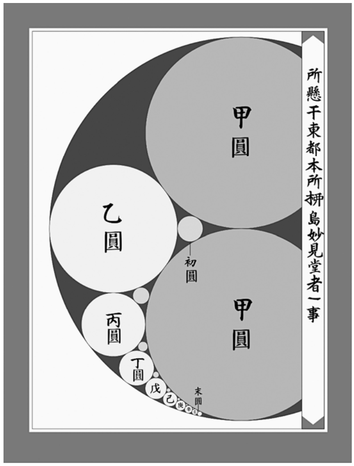


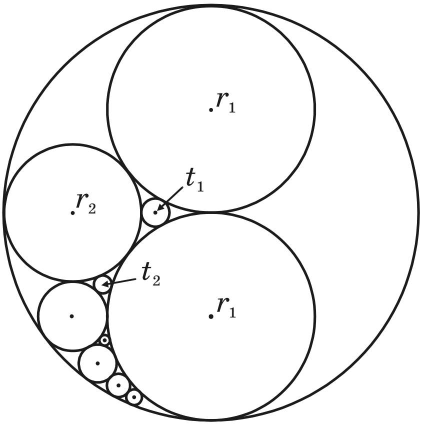


Доказать, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$.

Начинают появляться задачи с бесконечным количеством окружностей. Следующая картинка (справа) — иллюстрация к исторически первой статье Фукагавы и Ротмана о сангаку в Scientific American (vol. 278, p.62, May 1998).







Найти номер n через r и радиус n–ого круга t_n.

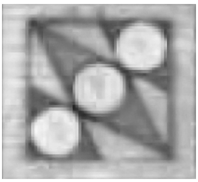
Ответ: $n = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{r}{t_n} - 14} + 1\right].$

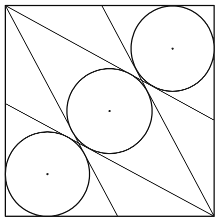
Табличка с этой задачей появилась в 1788 году (автор Хотта Джинсуке). Здесь приведена иллюстрация (вверху слева) из книги Фуджиты Кагена 1789 года Shinpeki Sanpō, где она решается без инверсии с помощью формулы Декарта о кругах. Более поздние решения с помощью инверсии гораздо проще.

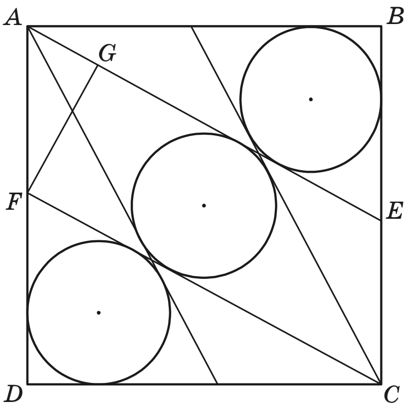
2.4 Уравнения третьей степени

Интересна причина начала периода Эдо. В самом конце XVI века в страну прибыли христианские миссионеры. Для охранения націнальной религии и чистоты нравов населения страны приходящий к власти сёгун Токугава принимает решение изгнать из Японии всех иностранцев и закрыть все границы, уберегая тем самым народ от влияния внешнего мира. Нам будет важно как этот факт отразился на развитии математической мысли в Японии.

Рискну высказать предположение, что христианские миссионеры были из Италии — мирового оплота католицизма, в котором и возникла идея миссионерских путешествий. Кроме того, в средние века именно монастыри были средоточием научной мысли Европы. Не исключено, что именно от католических миссионеров японские математики и узнали формулу для решения кубических уравнений. Однако, следует констатировать, что эта формула не произвела на японцев такого впечатления, как на современников Кардано: задач с её применением крайне мало. Приведу пример одной из них с таблички 1797 года (святыня Хикиума, провинция Аичи).







На сторонах квадрата взяты точки, делящие его стороны в одинаковом отношении как на рисунке. В полученный ромб и четырёхугольники вписаны равные окружности. Найдите их радиус.

Решение этой задачи короткое и, надеюсь, не утомит читателя. Пусть в обозначениях рисунка $BE = DF = x$, $AB = 1$, $AF = 1 - x$. Тогда $AE = \sqrt{1 + x^2}$. Если $FG \perp AE$, то $\Delta AFG : \Delta ABE$, откуда $FG = AB\dfrac{AF}{AE} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$. Однако FG есть диаметр окружности, вписанной в ромб. Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABE равен $AB + BE - AE = 1 + x - \sqrt{1 + x^2}$. Приравнивая полученные выражения для диаметра окружностей, имеем

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + x - \sqrt{1+x^2},$$

$$4x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = 0,$$

$$x = \tfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt[3]{16\sqrt{2} + 13} - \sqrt[3]{16\sqrt{2} - 13}\right).$$

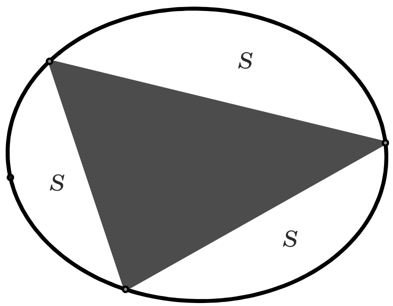
Решение кубического уравнения получено с помощью формулы Кардано. Радиус окружностей ищется по любой из формул $r = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + x - \sqrt{1+x^2}$. Я не знаю решения этой задачи, не использующего формулу Кардано.

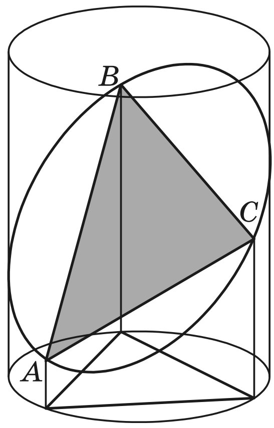
С другой стороны, мне не хотелось бы впадать в досужие спекуляции о способностях древних японцев решать кубические уравнения. В отношении задач, сводящихся к кубическим уравнениям ситуация могла быть и иной. Во-первых, японцы сами могли додуматься до соответствующей формулы, как они додумались до формул и теоремы Виета (задача 103 каталога Ямамото, см. ниже). Во-вторых, некоторые задачи сангаку требуют лишь получения некоторого соотношения между данными задачи. Таким соотношением вполне могло бы быть кубическое уравнение, решение которого не входило в планы японцев или решалось ими при заданных коэффициентах численно. Таким образом, моя расшифровка вышеприведённой задачи может и не быть верной.

2.5 Эллипс — сечение цилиндра

Наиболее разительным отличием васан от иосан является рассмотрение эллипса не как сечения конуса, а как сечения прямого кругового цилиндра. Возможно, именно поэтому в сангаку не встречаются параболы и гиперболы. На мой взгляд, следующая задача наиболее показательна:

Треугольник вписан в эллипс так, что площади элиптических сегментов равны. Найдите площадь треугольника, если большая и малая полуоси эллипса равны a и b соответственно.





Традиционное[1] решение этой не может не вызвать целой гаммы эмоций: от восхищения красотой до удивления лаконичностью и глубиной мысли.

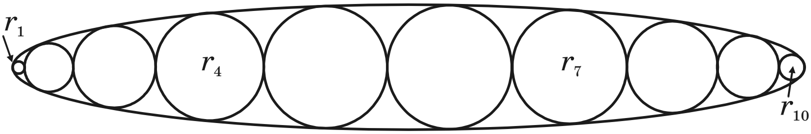
Рассмотрим данный эллипс как сечение прямого кругового цилиндра. Тогда круг можно рассмотреть как проекцию эллипса на плоскость основания цилиндра (см. рис. справа). Такое проектирование эквивалентно сжатию большой оси эллипса с коэффициентом b/a, при неизменной малой оси. Этот коэффициент и есть ко-

[1]Разумеется традиционное для васан. В рамках западной традиции здесь впору писать уравнение эллипса.

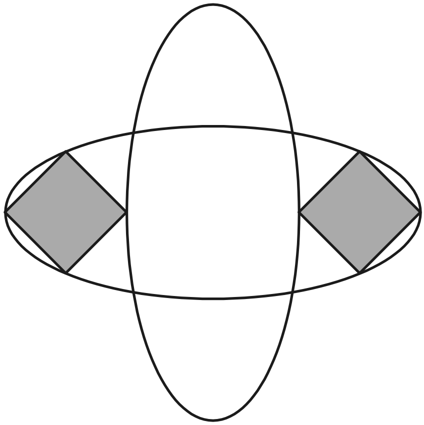
синус угла между плоскостью эллипса и плоскостью основания цилиндра. Треугольник ABC проектируется в треугольник $A'B'C'$. Так как площади эллиптических сегментов равны, то треугольник $A'B'C'$ должен быть правильным. Диаметр описанной около этого правильного треугольника окружности равен малой оси ($2b$) эллипса, а площадь треугольника $A'B'C'$ равна $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2b\sqrt{3}\right)^2$. Площадь треугольника ABC таким образом равна

$$\frac{a}{b}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2b\sqrt{3}\right)^2\right) = 3ab\sqrt{3}.$$

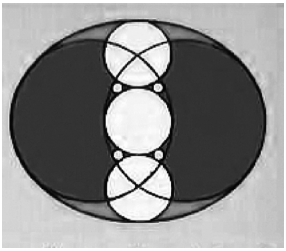
Ввиду того, что эта статья носит обзорный характер, я приведу лишь несколько картинок задач с эллипсами, цель которых не анализ или систематизация, но восхищение эстетикой:

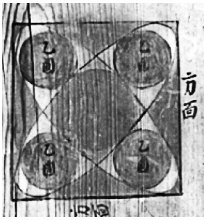


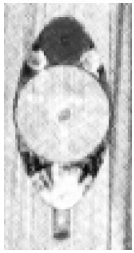
В эллипс вписано 10 попарно касающихся друг друга и изнутри эллипса окружностей с центрами на большой его оси. Доказать, что $r_7(r_7 + r_1) = r_4(r_4 + r_{10})$.

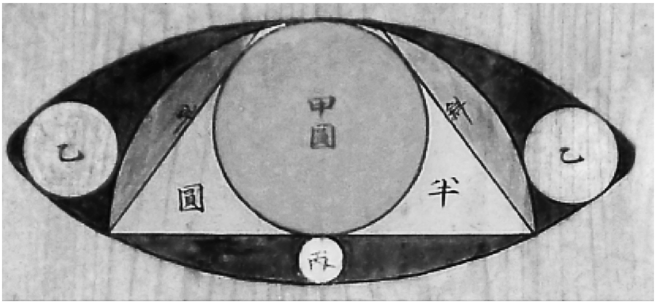


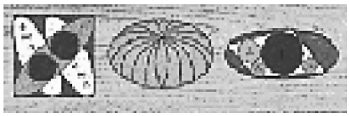
Доказать, что сторона квадрата равна малой оси эллипса.





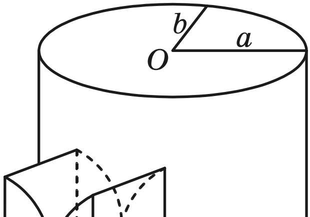






2.6 Площади поверхностей и объёмы

Среди сангаку также встречаются задачи на определение объёмов тел и площадей их поверхностей. Приведу лишь наиболее впечатляющий пример:



Найдите площадь поверхности пересечения эллиптического цилиндра с полуосями a *и* b *и двух сегментов высоты* d *прямого кругового цилиндра диаметра* D. *Сегменты цилиндра касаются по образующей, которая пересекает в точке* T *конец малой полуоси эллиптического сечения эллиптического цилиндра. Оси цилиндров перпендикулярны.*

Решение этой задачи сводится к вычислению интеграла

$$S = 2S_1 = 2a\int_0^d 2\sqrt{Dx - x^2}\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{a^2-b^2}{a^4}x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x,$$

однако этот интеграл не выражается в элементарных функциях. Поэтому предполагалась лишь его численная оценка. Для этого японские математики использовали числовые таблицы, составленные на основе числовых рядов. Такие таблицы назывались «таблицами Энри».

2.7 Арифметика

Среди задач таблички сангаку иногда встречаются 1–2 арифметические задачи. Предполагалось решение этих задач с помощью *соробана* — японских счёт. Интересно, что соробан сегодня переживает настоящее возрождение: не только по всей Японии, но и во всём мире открываются школы по обучению счёта на соробане. Соробан введён как общеобязательный предмет в младших классах японских школ наряду с чтением, письмом и каллиграфией. Соробан является самым быстрым в мире механическим счётным устройством и неотъемлемой частью японской культуры.

Следующая табличка посвящена единственной арифметической задаче:

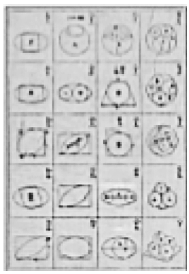
На этой табличке изображён соробан с отложенным на его костяшках 47-значным числом

$$10683649194680552423007274888706529565762430721.$$

Задача состоит в вычислении на соробане корня 16 степени из этого числа. Ответ: 753. Поистине фантастически виртуозная техника вычислений!

3 Каталог Ямамото

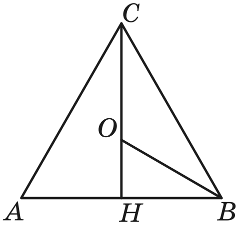
Геометрические задачи можно решать по разному и можно учить решать по разному. Можно давать школьникам задачи про треугольник, про одну, про две окружности, про треугольник и окружность, про трапецию и т. д. Однако такая (пофигурная) классификация представляется хотя и естественной, но плохо применимой на практике. За кадром остаются многие красивые, эффектные методы решения задач такие как, например, удвоение медианы, метод вспомогательной окружности и др. Гораздо более эффективным является выделение некоторого класса опорных задач (подразделяемых на задачи-факты и задачи-методы), которые содержат часто встречающиеся приёмы рассуждений, основные картинки и идеи. Количество опорных задач зависит от опыта решающего. Чем больше задач решатель считает для себя опорными, тем более сложные задачи ему по плечу. И хотя идея выделения таких задач не нова, пожалуй в наиболее четкой форме этот метод встречается у И. Ф. Шарыгина в [3].



Интересно, что каталог опорных задач встречается и в японской храмовой геометрии. В 1842 году японский математик Ямамото публикует книгу Sanpo Jojutsu «Формулы традиционной японской геометрии». Книга представляет собой каталог из 100 задач, которые Ямамото считал важными для японской геометрии, мы бы сегодня назвали их опорными. Сделаем небольшой обзор этой замечательной книги — ценного свидетельства того уровня геометрического развития, которое предполагалось в васане. Для обозначения задачи в этом каталоге будем номер задачи ставить после латинского Y в честь Ямамото (Yamamoto).

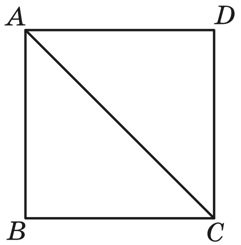
Y1

equilateral triangle



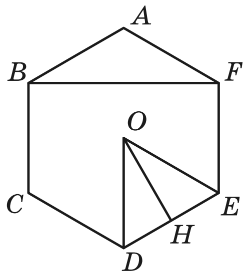
Y2

square



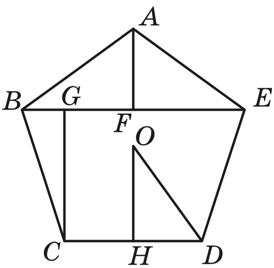
Y3

regular hexagon



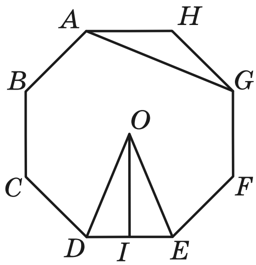
Y4

regular pentagon



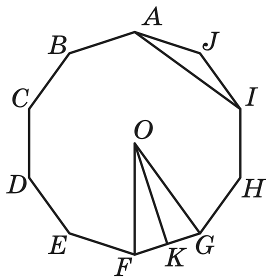
Y5

regular octagon



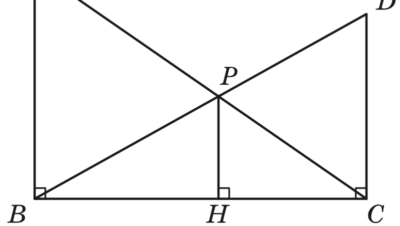
Y6

regular decagon

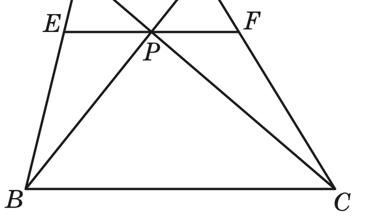


Первые 6 задач посвящены соотношениям между сторонами, диагоналями, радиусами вписанной и описанной окружностей в правильных 3-, 4-, 5-, 6-, 8-, 10-угольниках.

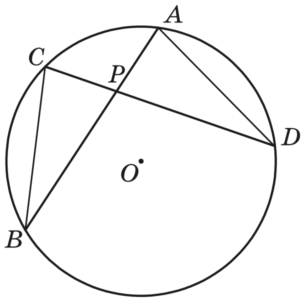
Y12



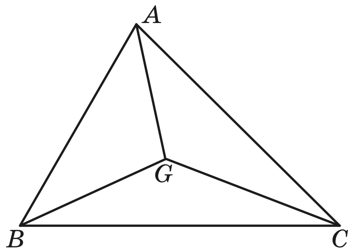
Y13



Y26

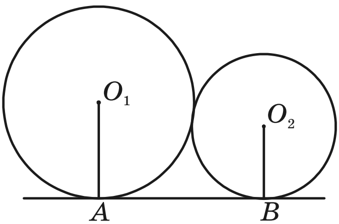


Y46

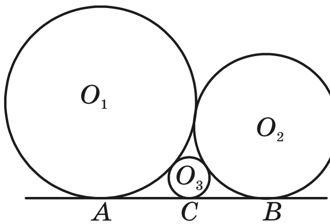


Задача Y12 — известная задача Бхаскары: *найти* PH*, если известны* AB *и* CD. Эта задача непосредственно связана с задачей Y13 определения длины отрезка, параллельного основаниям трапеции и проходящего через точку пересечения её диагоналей. Y26 — не что иное, как теорема о хордах. Y46 — задача поиска $2/3$ длины медианы — расстояния от вершины треугольника до центроида.

Y40



Y41



Задачи Y40 и Y41 — одни из наиболее часто применяемых в японской храмовой геометрии:

Y40: *Длина общей внешней касательной к двум внешне касающимся окружностям есть среднее геометрическое их диаметров.*

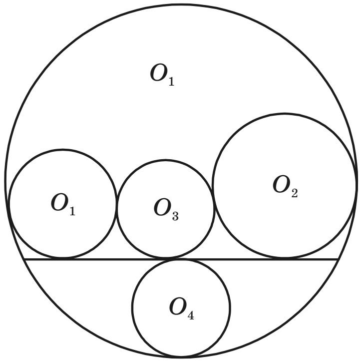
[Интересно, что в Японской математики, в отличие от западной, традиционно использование диаметра круга, а не радиуса.]

Y41: Окружности $O_1(r_1)$ и $O_2(r_2)$ внешне касаются. Окружность $O_3(r_3)$ касается их общей внешней касательной и их внешним образом. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

Задача Y28 — пример тонкого геометрического чутья японских математиков. *В окружности $O(d)$ проведена хорда. В один из сегментов вписаны три окружности: $O_1(d_1)$ (справа), $O_2(d_2)$ (слева) и $O_3(d_3)$ (между ними). В другой сегмент вписана окружность $O_4(d_4)$. Доказать, что если $d_3 = d_4$, то $d = d_1 + d_2 + d_3$.* Тонкость заключается в том, что если $d_3 \neq d_4$, то ответ становится устрашающим:

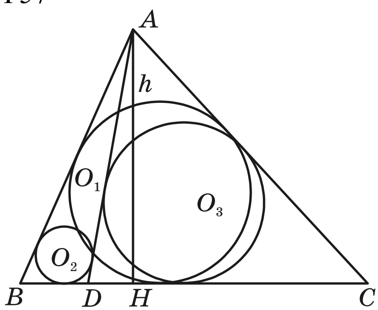
Y28



$$d = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{d_3}{d_4}}\left(\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}\right) + \sqrt{\frac{d_3}{d_4}}\left(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_2}\right)\right]^2 + d_2 + d_4.$$

Задача Y57 тесно связана со статьёй А. Д. Блинкова в этом сборнике о двух окружностях в треугольнике и устанавливает следующее интересное соотношение. *Пусть в треугольнике ABC проведена произвольная чевиана AD и в треугольники ABD и ACD вписаны окружности $O_2(d_2)$ и $O_3(d_3)$; $O_1(d_1)$ — вписанная окружность треугольника ABC, h — его высота. Доказать, что*

Y57



$$h = \frac{d_2 d_3}{d_2 + d_3 - d_1}.$$

Однако не все задачи каталога так красивы и изящны. Так, например, задача Y38 устанавливает связь между сторонами a, b, c, d, e описанного пятиугольника и радиусом x вписанной в него окружности:

$$
\begin{aligned}
-ax^4 \quad & -bx^4-cx^4-dx^4-ex^4+\\
& +4abcx^2+4abdx^2+4abex^2+\\
& +4acex^2+4acex^2+4adex^2+4bcdx^2+\\
& +4bcex^2+4bdex^2+4cdex^2-16abcde=0.
\end{aligned}
$$

В заключение этого весьма небольшого обзора нельзя не упомянуть задачу Y100, последнюю в каталоге. Она приведена без доказательства и даёт формулы для вычисления суммы последовательных степеней натуральных чисел. Формулы суть следующие:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1+2+\ldots+n &&= \tfrac{1}{2!}n(n+1),\\
S_2 &= 1^2+2^2+\ldots+n^2 &&= \tfrac{1}{3!}n(n+1)(n+2),\\
S_3 &= 1^3+2^3+\ldots+n^3 &&= \tfrac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3),\\
S_4 &= 1^4+2^4+\ldots+n^4 &&= \tfrac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4),\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Эстетика победила разум!

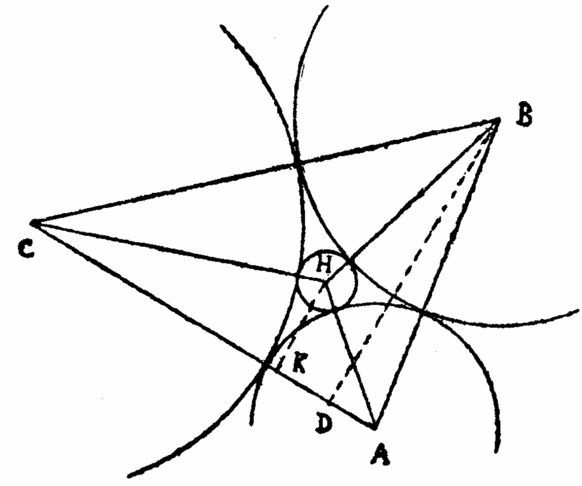
4 Восток и запад. Васан и иосан

Совершенно понятно, что путь развития восточной и западной математики был и различен и независим один от другого. Однако, видимо, какие–то идеи являются общими для всей ноосферы. Возможно поэтому ряд значимых теорем был независимо открыт и в восточной и в западной традиции. В этом разделе я перечислю некоторые известные теоремы с указанием года их открытия на востоке и на западе. Во многих случаях оказывается, что теорема не носит имя своего первооткрывателя.

4.1 Круги Декарта

В 1643 году Рене Декарт в письме к австрийской принцессе Елизавете сообщает формулу связи между радиусами четырёх попарно внешне касающихся окружностей:

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2.$$



Репринт чертежа из письма Декарта.

В 1826 году Я. Штейнер передоказывает эту формулу с помощью только что открытой им техники инверсии и находит новую формулу-обобщение. Если R — радиус круга, касающегося кругов r_1, r_2 и r_3 внутренним образом, то

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{R^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{R}\right)^2.$$

Период Эдо уже начался и закрытые границы не могли дать возможности этим формуле проникнуть на восток. И на 30 лет раньше Штейнера, но, конечно, гораздо позже Декарта и, несомненно, независимо, в 1796 году появляется табличка, в которой приводятся (как обычно, без доказательства) обе эти формулы. Эта табличка была впоследствии утеряна, но её описывает японский математик Никамура Тотакаци в 1830 году.

Однако на этом история этой формулы не заканчивается. В 1842 году её переоткрывает англичанин Филипп Бикрофт (Philipp Beecroft), а в 1930 — Фредерик Содди в связи с вопросами плотной упаковки молекул. С тех пор в западной традиции она называется либо формулой Декарта, либо формулой Содди. Последнее, как видно, не совсем исторически корректно. Тем не менее, следует отдать дань уважения Ф. Содди. В его статье в Nature 137, 1021 (1936) открытая им формула формулируется в стихах.

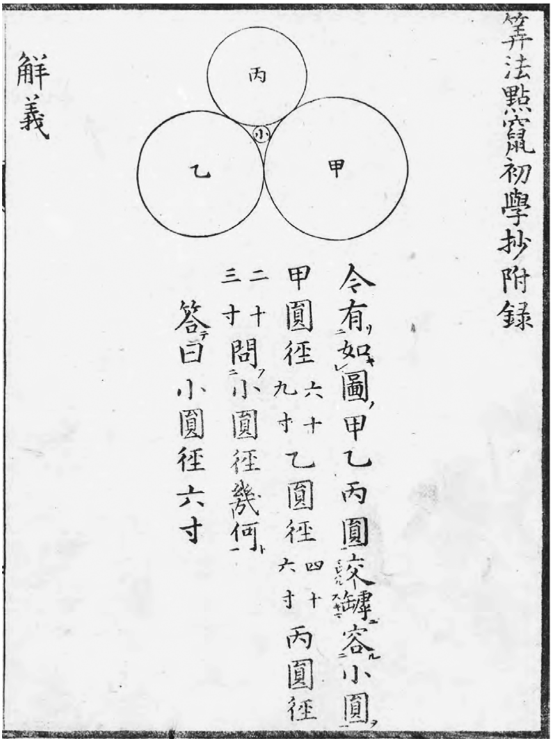


Чертёж из книги Никамура Тотакаци

4.2 Гекслет Содди

Фредерик Содди занимался вопросами молекулярной физики в лаборатории Эрнста Резерфорда. В связи в задачами упаковки молекул, в 1946 году им был открыт следующий факт.

Пусть два шара внутренним образом касаются данной сферы и внешним — друг друга. В пространство внутри сферы можно поместить шесть и только шесть шаров, образующих цепь и внешне касающихся данных.

Эта конструкция получила название гекслета Содди. Интересно, что уже в 1822 году эта теорема встречается в сангаку (автор

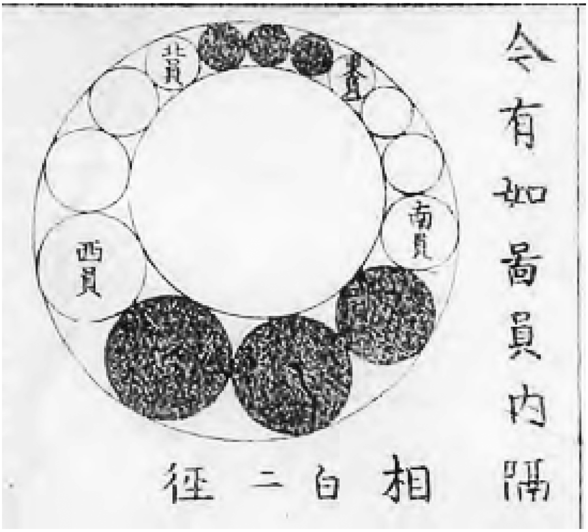
Yazawa Hiroatsu). Более того, в табличке устанавливается связь между радиусами шаров гекслета:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_6}.$$

4.3 Поризм Штейнера

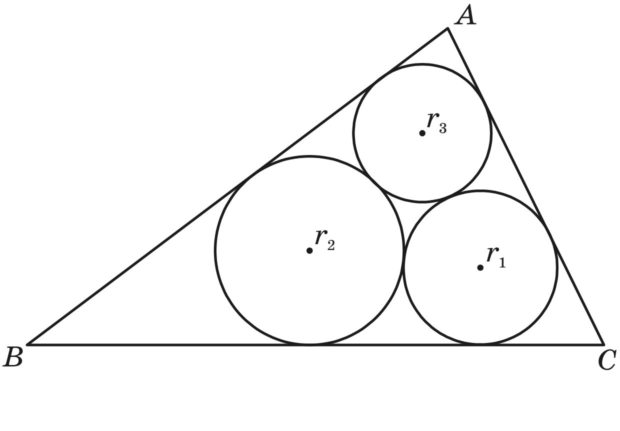
В 1826 году Я. Штейнер и Ikeda Sadakazu независимо открывают инверсию. Интересно, что основной эмблематический факт — поризм Штейнера — одновременно появляется и на востоке и на западе. В сангаку 1826 года рассматривается 14 окружностей ожерелья Штейнера и устанавливается следующее соотношение между их радиусами:

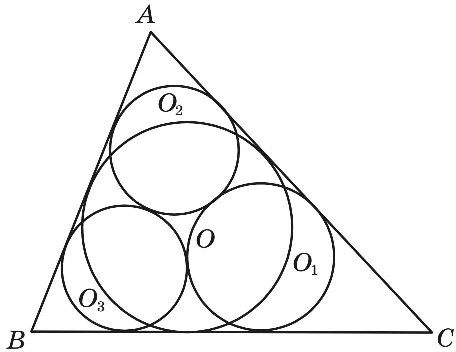
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_8}=\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_{11}}.$$



4.4 Задача Мальфатти

В 1803 году итальянский математик Мальфатти опубликовал [4] задачу помещения в данный треугольник трёх кругов максимальной площади. Сам он считал, что требуемый максимум достигается в конструкции, приведённой на картинке. Несложно убедиться, что решение Мальфатти не оптимально. Более удивительно, что оно никогда не оптимально. Подробное обсуждение этого вопроса читатель может найти в замечательно статье В. З. Беленького и А. А. Заславского [5].



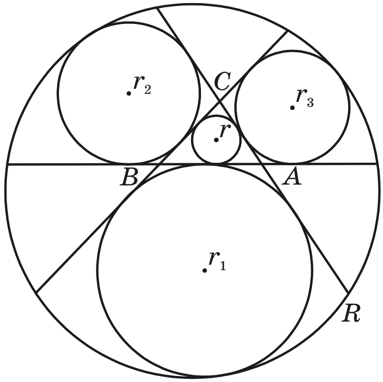


В сангаку не изучалась эта задача именно в такой постановке, но японское математики не могли пройти мимо трёх касающихся окружностей в треугольнике. В 1773 году (за 30 лет до Мальфатти) в сангаку появляется задача поиска радиуса окружности, вписанной в треугольник, в который уже вписаны три окружности по способу Мальфатти (автор Ajima Naonobu). Результат этой задачи Ямамото считал настолько важным, что поместил его среди своих формул — это задача Y64. Результат доставляет эстетическое удовольствие:

$$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}.$$

4.5 Окружность Фейербаха

Поскольку японских геометров больше интересовали метрические соотношения в треугольнике, окружности и эллипсе, то во всей японской храмовой геометрии мы не встретим такого традиционного для западного геометра объекта, как прямая, на которой лежит несколько замечательных точек. Возможно, именно поэтому в васане не возникла прямая Эйлера. Тем более удивительно, что следующий по значимости и красоте факт геометрии треугольника, а именно теорема Фейербаха, также не был независимо открыт на востоке. Однако конструкция с обилием касающихся окружностей, конечно же, не могла быть не замечена японскими геометрами.



Конструкция на картинке впервые встречается на табличке 1801 года неизвестного автора. Позже этот рисунок был описан в уже упомянутой книге Никамуры Тотакаци 1830 года (из которой мы и узнаём об утерянной табличке 1801 года). Ясно, что речь идёт именно об окружности девяти точек и трёх вневписанных окружностях. В табличке приводится формула для вычисления радиуса (в современной терминологии) окружности девяти точек через радиусы вневписанных окружностей:

$$r = \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)}{8(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}.$$

Вопрос для размышления читателя: какова формула для радиуса окружности, объемлющей три вневписанных?

В контексте дат важно напомнить, что теорема Фейербаха была доказана в 1822 году.

4.6 Другие теоремы

Укажем несколько других фактов, установленных в васане независимо и, иногда, раньше, чем на западе.

Формула Эйлера площади криволинейного треугольника на сфере $S = \alpha = \beta = \gamma - \pi$ была открыта Эйлером в 1773 году. В 1804 году она появляется на табличке сангаку.

Теорема Кэзи (обобщённая теорема Птолемея) встречается в сангаку в 1830 году (автор таблички Nagatada) за 27 лет до её переоткрытия самим Кэзи в 1857 году.

Из уже неоднократно встречавшегося в этой статье «правила 30–летнего опережения» есть совершенно потрясающее исключение: терема Нейберга 1896 года — теорема о связи радиусов вписанной, описанной и трёх вневписанных окружностей:

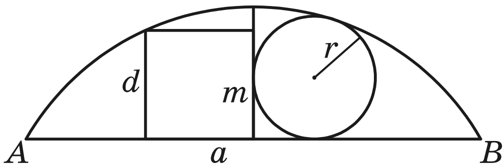
$$2R + r = \frac{r + r_a + r_b + r_c}{2}$$

появляется на табличке 1803 года. На 93 года раньше Нейберга!

5 Нерешённые задачи

Несмотря на доступность задач японской храмовой геометрии современным продвинутым (иногда довольно сильно) методам, в сангаку есть несколько нерешённых на сегодняшний день задач.

Задача храма Гиоу



Задача таблички 1749 года. Автор Tzuda Nobuhisa.

Дан круговой сектор с основанием a *и высотой* m. *В одну его половину вписан квадрат со стороной* d, *а в другую — круг радиуса* r. *Выразить* a, m, d *и* r *через*

$$p = a + m + d + r \quad и \quad q = \frac{m}{a} + \frac{r}{m} + \frac{d}{r}.$$

Задача ждёт своего решения вот уже 263 года!

Задача Момота

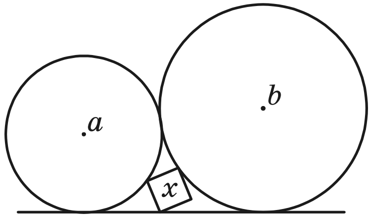
В сангаку 1807 года Momota приводит арифметическую задачу решения системы уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} x - y = 61741, \\ y - z = 14197, \\ \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{y} + \sqrt[7]{z} = 12. \end{cases}$$

В табличке приведено решение $x = 5^7 = 78125$, $y = 4^7 = 16384$, $z = 3^7 = 2187$. Кроме того, поставлена задача найти все решения этой системы при произвольных правых частях уравнений. Система сводится к одному уравнению 49–ой степени, которое приведено в табличке Момота. Непростой задачей является уже получение этого уравнения.

Задача Морикавы

Год появления задачи Morikawa не известен. Рассмотрим две внешне касающиеся окружности и их общую внешнюю касательную. Квадрат расположен так, как на рисунке: одна его вершина расположена на касательной и ещё по одной вершине — на окружностях.



Найти минимальное значение стороны x квадрата через радиусы a и .

6 Заключение

Во многих современных обзорах японской храмовой геометрии, говорится, что сангаку создавали люди совершенно разных возрастов и сословий от крестьян до самураев, и констатируется достаточно большая распространённость геометрии среди разных слоёв населения. Однако попробуем проанализировать этот феномен.

На сегодняшний день сохранилось примерно 860–880 табличек сангаку. Много это или мало? В своей книге [1] Фукагава и Ротман приводят выдержки из дневника Ямагучи Канзана (1781–1850), японского математика совершившего 6 паломничеств по Японии в поисках сангаку. В его дневнике описано 88 табличек. (Вообще говоря, это довольно скромный результат для 11–летних странствий 1817–1828.) Из них на сегодняшний день сохранились только две. Сделаем некоторые оценки. Период Эдо длился примерно 260 лет: 1603–1867. Будем считать, что таблички создавались с одинаковой периодичностью, каждый год, хотя разумеется, это было не так: после открытия инверсии количество табличек явно возросло. Учитывая «коэффициент выживаемости» $2/88$, можно считать, что в год создавалось примерно по $\left(880\cdot\frac{88}{2}\right):260\approx 150$ табличек. Надо отметить, что это мог быть результат работы нескольких групп учеников при синтоистских храмах. Пожалуй о широкой распространённости сангаку среди всех слоёв японского общества можно говорить лишь с некоторой натяжкой.

Кроме того, самих слоёв общества было немного: примерно 5% составляли самураи, 80% — крестьяне. Остальные — ремесленники и торговцы, стоящие ниже на социальной лестнице того времени. Поэтому, возможно, выражение «... люди всех социальных слоёв, от крестьян до самураев, открывали теоремы...» не вполне точно и, вероятно, неправильно выражает намерение автора указать на широкую популярность сангаку. Оно явно накрывает не все слои японского социума того времени. С другой стороны, Фукагава в [1] свидетельствует: «...надписи на дощечках ясно указывают, что все классы студентов, детей, а иногда и женщин занимались сангаку. Поэтому лучшим ответом на вопрос “Кто их создавал?” был бы “все”».

Понятно, что истина, как всегда, где–то посередине, и, разумеется, японская храмовая геометрия имела широкое распространение, однако, пожалуй, не стоит сильно преувеличивать эту распространённость.

Список литературы

[1] Fukagawa H., T. Rothman. Sacred Mathematics. Japanese Temple Geometry, 2008, Prinston University Press.

[2] А. В. Карлюченко О. В. Карлюченко. Сангаку. Японская храмовая геометрия. К. Сталь, 2012.

[3] И. Ф. Шарыгин. Факультативный курс по математике. Решение задач. 10 класс. М. Посвещение, 1989.

[4] Malfatti. Memoirie di Matematica. Tomo X, parte I,1803.

[5] В. З. Беленький, А. А. Заславский. Решение обобщённой задачи Мальфатти с помощью комплексной (гиперболической) тригонометрии. Математическое просвещение, сер. 3, вып. 2, 1998 (141–154).

Непрерывность в геометрии

А. Д. Блинков,
ЦО №218, г. Москва

При доказательствах некоторых утверждений элементарной геометрии встречаются ссылки на непрерывность. Действительно, ряд утверждений, связанных, прежде всего, с существованием каких-либо геометрических объектов, очень удобно доказывать используя понятие непрерывности. Вместе с тем, эти ссылки, как правило, весьма неаккуратны, а иногда и вообще неверны. Чаще всего пишут: «по непрерывности получим...» и тому подобное, не вдаваясь в подробности о том какая функция рассматривается, почему она непрерывна и какое свойство непрерывных функций используется. При этом, если непрерывность используется в алгебраических задачах (решение неравенств методом интервалов, поиск экстремальных значений или множества значений функции, экстремальные задачи различного содержания, и так далее), то четко указывается рассматриваемая функция, обосновывается ее непрерывность и присутствует ссылка на конкретное свойство непрерывных функций.

Попробуем на геометрические рассуждения взглянуть с этих же позиций. Сначала — пример неверной ссылки на непрерывность, который возник недавно при обсуждении одной из задач для математической регаты.

Задача. Докажите, что в любой правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковыми гранями больше, чем 60°.

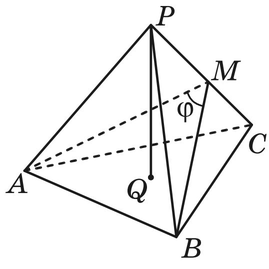


Рис. 1

«Решение». Рассмотрим правильную пирамиду $PABC$. Проведем высоту AM треугольника APC, тогда BM — высота равного ему треугольника BPC, то есть $\angle AMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре PC (см. рис. 1). Используем соображения непрерывности.

Если «до упора сплющивать» пирамиду, то есть устремить вершину P к центру Q основания, то в пределе получим, что $\varphi = 180°$.

Если же, напротив, неограниченно её «растягивать», то есть устремить вершину P к бесконечности в направлении перпендикуляра PQ к плоскости основания ABC, то в пределе получим, что пирамида превратится в прямую призму, а $\varphi = 60°$. Отсюда и делаем вывод, что $\varphi > 60°$.

Разберем допущенные ошибки. Во-первых, не указано, о какой функции идет речь и почему эта функция непрерывна. Но эту неточность устранить несложно. Рассмотрим зависимость величины φ от длины PQ. При малых изменениях длины высоты значение φ также мало изменяется, поэтому эта зависимость является непрерывной функцией.

Это типичный случай обоснования непрерывности в геометрии: используется не определение, а характеристическое свойство непрерывной функции, то есть $f(x)$ *— непрерывна в каждой точке x некоторого множества тогда и только тогда, когда для приращений функции в этих точках выполняется равенство* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = 0$.

Для этой функции и указаны два «предельных» значения. А вот другую ошибку исправить трудно. На основании какого свойства непрерывной функции сделан заключительный вывод? Такого свойства нет! Для вывода о том, что $\varphi > 60°$, необходимо доказать монотонность функции, а она ниоткуда не следует!

Какие же свойства непрерывных функций чаще всего используются в геометрических задачах? Те же, что и в алгебраических, а именно, используются теорема о промежуточном значении непрерывной функции, ее частный случай — теорема об обращении непрерывной функции в ноль, а иногда — обобщение этого частного случая: пусть имеются две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$, для которых существую такие x_1 и x_2, что $f(x_1) > g(x_1)$, а $f(x_2) < g(x_2)$, то существует такое $x_0 \in [x_1; x_2]$, что $f(x_0) = g(x_0)$. Кроме того, иногда используется, что функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем экстремальные значения и все промежуточные значения от наименьшего до наибольшего. В качестве примеров аккуратного применения непрерывности рассмотрим несколько задач из списка, приведенного в конце статьи: сначала сравнительно простые, чтобы была ясна технология, потом — сложнее.

Задача 11. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?

Ответ: да, может.

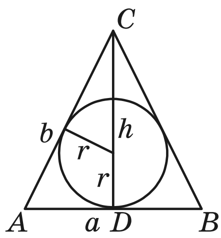


Рис. 2

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AB*, в который вписана окружность радиуса 1 (см. рис. 2). Зафиксируем точку *D* касания прямой *AB* с окружностью и будем «двигать» вершину *C* по высоте *CD*, изменяя ее расстояние *h* от *AB*, так, чтобы данная окружность оставалась вписанной в равнобедренный треугольник *ABC*. Вершины *A* и *B* в этом случае будут смещаться вдоль прямой *AB*. При малых изменениях *h* мало изменяется периметр треугольника, а так как $S_{\Delta ABC} = pr$ (где *p* — полупериметр *ABC*), то мало изменяется и его площадь. Таким образом, зависимость $S(h)$ является непрерывной функцией.

Выберем значение *h* так, чтобы треугольник *ABC* был равносторонним, тогда его сторона $a = 2r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$, а его площадь $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} < 6$. Так как длина отрезка *AB* больше 2, то, выбрав какое-то значение *h*, большее 6, получим треугольник, у которого $S > 6$. По теореме о промежуточном значении непрерывной функции найдется значение *h*, для которого $S = 6$, что и требовалось.

Таким образом, для решения задачи: 1) организован процесс и выбрана независимая переменная h, его характеризующая; 2) показана зависимость $S(h)$ искомой величины от выбранной переменной и объяснено, почему эта зависимость является непрерывной функцией; 3) показано существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого; 4) на основании теоремы о промежуточном значении непрерывной функции сделан вывод.

Отметим, что при ином способе доказательства пришлось бы решать громоздкую систему уравнений, например:

$$\begin{cases} \dfrac{a+2b}{2}\cdot 1 = 6, \\ b^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{4}, \\ (h-1)^2 = \left(b - \dfrac{a}{2}\right)^2 + 1^2, \end{cases}$$

где a и b — стороны искомого треугольника, что сопряжено со значительными техническими трудностями.

Задача 12. Докажите, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.

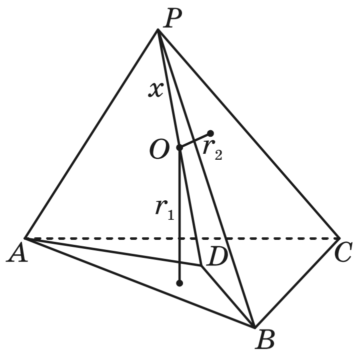


Рис. 3

Решение. В пирамиде $PABC$ проведем биссекторы двугранных углов PA и PB (см. рис. 3). Любая точка O прямой PD их пересечения равноудалена от плоскостей PAB, PAC и PBC. Рассмотрим зависимости расстояний от точки O до плоскости основания ABC и до плоскостей боковых граней от расстояния $PO = x$, обозначив их через $r_1(x)$ и $r_2(x)$ соответственно. При малых изменениях значения x значения $r_1(x)$ и $r_2(x)$ изменяются мало, поэтому обе функции — непрерывные, следовательно непрерывна и функция $f(x)=r_1(x)-r_2(x)$. Если точка O лежит внутри пирамиды близко от вершины P, то $r_1 > r_2$, а если эта точка близка к основанию, то $r_1 < r_2$. Тем самым существует значение x, для которого $f(x)>0$, и значение x, для которого $f(x)<0$. Значит, по теореме об обращении в ноль непрерывной функции, найдется значение x, для которого $f(x)=0$. В этом случае точка O лежит внутри пирамиды и равноудалена от всех ее граней, значит, существует сфера с центром в этой точке, касающаяся каждой грани — сфера, вписанная в треугольную пирамиду.

Отметим, что для этой задачи существуют и другие способы решения, не использующие непрерывность (метод ГМТ или использование гомотетии).

Задача 16. В пространстве дан произвольный угол A. Докажите, что найдется такая плоскость α, что проекцией угла A на α является угол величины φ, где φ принимает любое заранее заданное значение от 0 до 180°.

Решение. Пусть величина данного угла равна γ. Выберем сначала плоскость α таким образом, чтобы она была параллельна плоскости данного угла (см. рис. 4а).

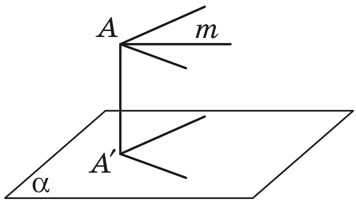


Рис. 4а

Тогда ортогональной проекцией угла A на α является угол A', равный углу A, то есть угол величины γ. Проведем биссектрису угла A и будем поворачивать данный угол вокруг прямой m, содержащей биссектрису. Рассмотрим зависимость величины φ ортогональной проекции от угла поворота. При малых углах поворота величина ортогональной проекции изменяется мало, поэтому эта зависимость является непрерывной функцией.

При повороте на 90° получим угол, плоскость которого перпендикулярна α (см. рис. 4б). Его проекцией на плоскость α является угол A'', величиной 0°. По теореме о множестве значений непрерывной функции φ принимает любое значение от 0 до γ.

Выберем теперь плоскость α таким образом, чтобы биссектриса угла A пересекала α и была ей перпендикулярна (см. рис. 4в). Тогда ортогональной проекцией угла A на α является угол A''', равный 180°. В плоскости данного угла через вершину A проведем прямую n, перпендикулярную биссектрисе, и будем поворачивать данный угол вокруг прямой n. И в этом случае, при малых углах поворота величина φ ортогональной проекции изменяется мало, поэтому зависимость φ от угла поворота является непрерывной функцией.

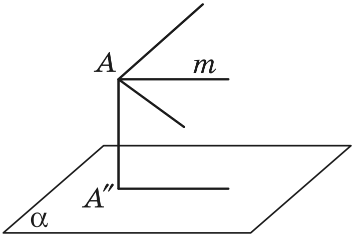


Рис. 4б

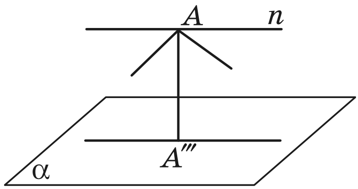


Рис. 4в

При повороте на 90° получим угол A', плоскость которого параллельна α, значит, его проекцией является острый угол, равный данному, то есть угол величины γ (см. рис. 4г). По теореме о множестве значений непрерывной функции φ принимает любое значение от γ до 180°.

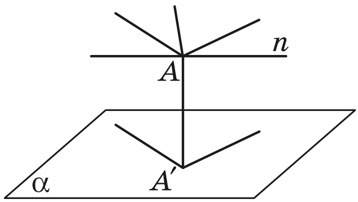


Рис. 4г

Таким образом, φ может принимать любое значение от 0 до 180°.

Задача 20. Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок — зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.

Решение. Сначала покажем применение более стандартного алгоритма, который, в данном случае, реализовать несколько сложнее, а затем обсудим другой подход.

Первый способ. Заметим, что четырехугольник $ABCD$ однозначно определяется длиной любой из его диагоналей. Без ограничения общности, можно считать, что $AB+BC \le CD+DA$. Рассмотрим такое положение четырехугольника, при котором вершина B лежит на диагонали AC (четырехугольник «вырождается» в треугольник ACD, см. рис. 5а). В этом случае $\varphi = \angle ABC + \angle ADC > 180°$, а длина $AC = x$ — наибольшая. Будем постепенно уменьшать длину AC (сохраняя выпуклость четырехугольника) до тех пор, пока не получим другое «вырожденное» положение $ABCD$: вершина A или вершина C окажется на диагонали BD (в зависимости от того, какая из сумм меньше: $AB+AD$ или $CB+CD$). В этом положении $\angle BAD + \angle BCD > 180°$, следовательно, $\varphi = \angle ABC + \angle ADC < 180°$ (см. рис. 5б).

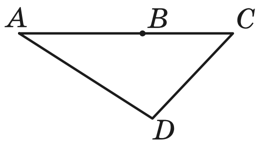


Рис. 5а

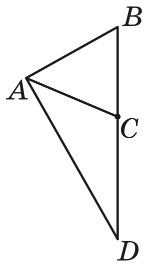


Рис. 5б

При малых изменениях длины AC сумма углов ABC и ADC также мало изменяется, поэтому зависимость $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Значит, существует такое положение данного четырехугольника, при котором $\varphi = 180°$, то есть $ABCD$ — вписанный, что и требовалось.

Отметим, что при рассмотрении шарнирных многоугольников принято рассматривать и многоугольники, ограниченные самопересекающейся замкнутой ломаной, но в данном случае они нас интересовать не могут.

Второй способ. Без ограничения общности, можно считать, что AB — наибольшая сторона данного четырехугольника. Рассмотрим окружность достаточно большого радиуса (точнее, $R > \frac{P_{ABCD}}{4}$), отметим на ней точку A и последовательно отложим стороны четырехугольника в виде вписанной ломаной (см. рис. 5в).

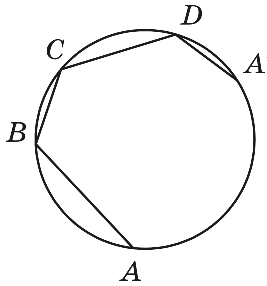


Рис. 5в

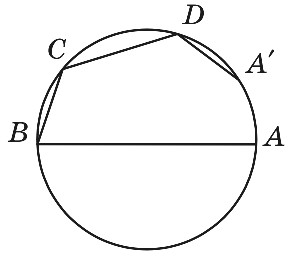


Рис. 5г

Далее, будем постепенно уменьшать радиус окружности, сближая точки A и A'. Возможны два случая: 1) точки A и A' совпадут, то есть ломаная «замкнется», тогда полученный четырехугольник и будет искомым; 2) ломаная займет положение, при котором отрезок AB станет диаметром окружности, но при этом еще не «замкнется» (см. рис. 5г). Тогда начнем постепенно увеличивать радиус окружности, зафиксировав на ней точку B, и опять-таки сближая точки A и A' до тех пор, пока ломаная не «замкнется» (точка A в этом случае «движется» по той же полуокружности, на которой лежат остальные вершины ломаной).

При таком способе решения мы в «неявном» виде рассматриваем зависимость расстояния между точками A и A' по дуге от радиуса окружности и используем тот факт, что при малых изменениях радиуса положение каждой незафиксированной вершины ломаной меняется незначительно.

Второй способ решения позволяет обобщить утверждение задачи на любой шарнирный многоугольник. Можно также доказать, что искомый многоугольник является единственным. Кроме того, среди всех шарнирных многоугольников с фиксированными сторонами (и порядком сторон), вписанный многоугольник имеет наибольшую площадь. Подробнее — см. В.Ю. Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии.

Список задач для решения

1. Докажите, что на высоте AD равностороннего треугольника ABC можно так выбрать точку M, что $\angle BMC = 100°$.

2. Докажите, что на высоте правильного тетраэдра существует точка, из которой каждое ребро основания видно под углом 90°.

3. Докажите, что в круге с центром O можно провести хорду AB так, что площадь треугольника AOB равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.

4. Даны концентрические окружности радиусов R и $2R$. Докажите, что можно провести прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней три равных отрезка.

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ по ребрам $A'A$ и CB из вершин A' и C соответственно одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки X и Y. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние XY, если ребро куба равно 1.

6. Две полуокружности имеют общий диаметр AB длины 2 и лежат в перпендикулярных плоскостях. Из точки A по одной из них, и из точки B по другой, одновременно и с одинаковыми скоростями начинают двигаться точки X и Y. Найдите множество значений, которые может принимать расстояние XY.

7. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Докажите, что у него существует четырехугольное сечение периметра 2,2.

8. Дан куб с ребром 1. Докажите, что у него существует сечения: а) четырехугольное площади 1,4; б) треугольное площади 0,8; в) пятиугольное и шестиугольное площади 1,2.

9. Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны.

10. Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?

11. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?

12. Докажите, что в любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.

13. Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = CD = 8$, $AC = BD = 10$, $BC = 12$, $AD = 13$?

14. Существует ли правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при боковом ребре равен 75°?

15. Докажите, что вектор длины 1 можно разложить на две составляющие, каждая из которых имеет длину 100.

16. В пространстве дан произвольный угол A. Докажите, что найдется такая плоскость α, что проекцией угла A на α является угол величины φ, где φ принимает любое заранее заданное значение от 0 до 180°.

17.* (М. Волчкевич, IV устная олимпиада по геометрии) Основанием пирамиды служит выпуклый четырехугольник. Обязательно ли существует сечение этой пирамиды, не пересекающее основания и являющееся вписанным четырехугольником?

18. (А. Толпыго, XXV турнир городов) Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна: а) 1001; б)* 2?

19.* Докажите, что из трех отрезков, равных попарным произведениям скрещивающихся ребер тетраэдра, можно составить треугольник.

20.* Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок — зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.

21. Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру можно разбить на две равновеликие фигуры: а) прямой, параллельной заданной; б) прямой, проходящей через заданную точку.

22. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре фигуры равной площади.

23.* Верно ли, что: а) любую выпуклую плоскую фигуру можно разбить прямой так, чтобы площади и периметры получившихся фигур были равны; б) любое выпуклое тело можно разбить плоскостью так, чтобы объемы и площади поверхностей получившихся тел были равны?

Список литературы и веб-ресурсов

1. А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. Геометрия для 8 — 9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. — М.: Просвещение, 1991.

2. А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. Геометрия для 10 — 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. — М.: Просвещение, 1992.

3. М.И. Башмаков. Математика в кармане «Кенгуру». Международные олимпиады школьников. — М.: Дрофа, 2010.

4. Л.Э. Медников, А.В. Шаповалов. Турнир городов: математика в задачах. — М.: МЦНМО, 2012.

5. В.В. Прасолов Задачи по стереометрии. Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2010.

6. В.Ю. Протасов. Максимумы и минимумы в геометрии. — М.: МЦНМО, 2005.

7. www.etudes.ru — математические этюды.

8. olympiads.mccme.ru/ustn — устные геометрические олимпиады.

9. www.problems.ru — база задач по математике.

Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике…[1]

А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков
ЦО №218, г. Москва

Рассмотрим любопытную геометрическую конфигурацию, которая возникает во многих задачах, в том числе и ставших «классическими»: отрезок *CD* разбивает треугольник *ABC* на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Точки I_1 и I_2 — центры этих окружностей (см. рис. 1).

Некоторые *свойства этой конфигурации* практически очевидны:

1. А) Треугольник I_1DI_2 — прямоугольный. Действительно, DI_1 и DI_2 — биссектрисы смежных углов, поэтому $\angle I_1DI_2 = 90°$.

Б) $\angle I_1CI_2 = \dfrac{1}{2}\angle ACB$.

Действительно, CI_1 и CI_2 — биссектрисы углов *ACD* и *BCD* соответственно.

2. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ACD* и *BCD*, *r* — радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Тогда $r_1 + r_2 > r$.

Действительно, так как $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то, используя формулу, выражающую площадь треугольника через радиус вписанной окружности, получим: $pr = p_1r_1 + p_2r_2 \Leftrightarrow r = \dfrac{p_1}{p}r_1 + \dfrac{p_2}{p}r_2$. Из неравенства треугольника следует, что $p_1 < p$ и $p_2 < p$ (см. рис. 1), то есть $r < r_1 + r_2$, что и требовалось.

---

[1] *Статья опубликована в научно-популярном физико-математическом журнале КВАНТ*$^+$*, №2/2012.*

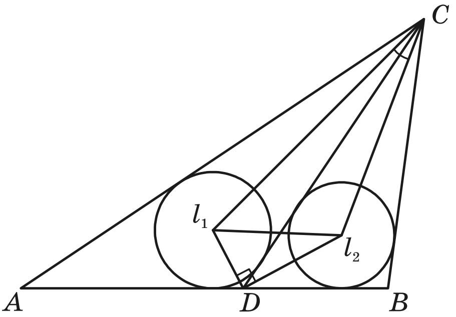


Рис. 1

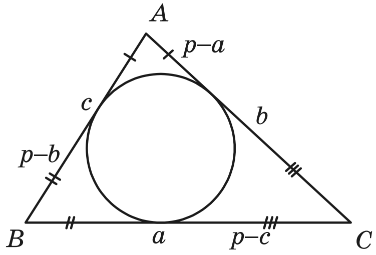


Рис. 2

Отметим, что доказанное утверждение можно обобщить для любого описанного многоугольника (см. задачу №1 для самостоятельного решения).

Для того, чтобы получить *другие свойства рассматриваемой конфигурации*, нам потребуется вспомнить один из фактов школьного курса геометрии.

Пусть окружность вписана в треугольник ABC со сторонами a, b и c. Тогда расстояния от вершин треугольника до точек касания равны $p-a$, $p-b$ и $p-c$, где p — полупериметр треугольника (см. рис. 2).

Доказательство несложно восстановить по этому же рисунку.

3. Пусть окружности касаются прямой CD в точках E и F (см. рис. 3). Выясним, от каких линейных величин зависит длина отрезка EF.

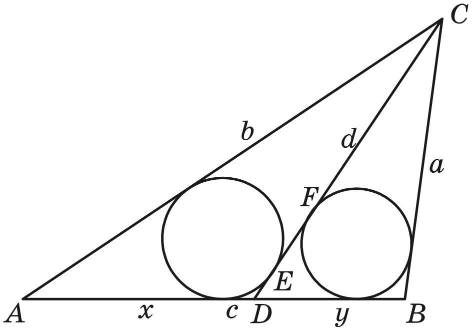


Рис. 3

Введем стандартные обозначения для сторон треугольника ABC, а также: $AD = x$, $BD = y$, $CD = d$. Периметры треугольников ACD и BCD обозначим p_1 и p_2 соответственно.

Тогда:

$$EF = |DF - DE| = |(p_2 - a) - (p_1 - b)| =$$
$$= \left| \frac{d + y - a}{2} - \frac{d + x - b}{2} \right| = \left| \frac{(b + y) - (a + x)}{2} \right| .$$

Таким образом, это расстояние зависит от длин четырех отрезков. Это позволяет рассмотреть *важные частные случаи*, которые фигурируют в качестве отдельных задач во многих источниках, в частности в задачниках Р. Гордина, В. Прасолова и в материалах по подготовке к ЕГЭ.

А) Пусть $a = b$, то есть треугольник *AB*C — равнобедренный с основанием *AB*. Тогда $EF = \frac{|y - x|}{2}$, то есть в этом случае достаточно знать длины отрезков, на которые точка *D* разбивает *AB*.

Б) Пусть точка *D* — середина *AB*, то есть *CD* — медиана треугольника *AB*C. Тогда $x = y$, значит, $EF = \frac{|b - a|}{2}$, то есть в этом случае достаточно знать длины сторон *AC* и *BC*.

В) Пусть *CD* — биссектриса треугольника *AB*C. Тогда $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ и $x + y = c$. Решая эту систему уравнений, получим: $x = \frac{bc}{a + b}$, $y = \frac{ac}{a + b}$. Значит, $EF = \frac{(a + b - c)|b - a|}{2(b + a)}$.

Г) Пусть *D* — точка касания окружности, вписанной в треугольник *ABC*, со стороной *AB*. Тогда $x = p - a$, $y = p - b$, где p — полупериметр треугольника *ABC*. Следовательно, $a + x = b + y$, поэтому $EF = 0$. Геометрически это означает, что обе окружности касаются *CD* в одной и той же точке, то есть эти окружности — касаются друг друга.

Полученный результат не только сам по себе интересен, но допускает и некоторую пространственную аналогию (см. задачу №9 для самостоятельного решения).

Отметим также, что если бы изначально была сформулирована обратная задача: «При каком расположении точки D окружности касаются друг друга?», то догадаться, что D — точка каса-

ния вписанной окружности со стороной, исходя только из полученной нами общей формулы, было бы весьма непросто. Ниже мы покажем, как этот результат можно получить из других соображений.

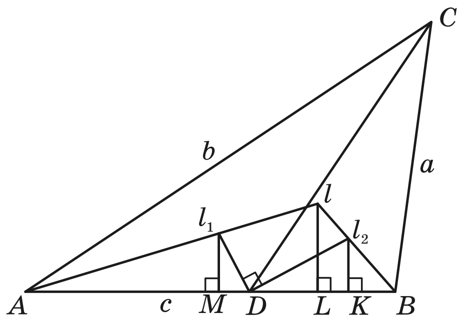


Рис. 4

Наше дальнейшее исследование будет связано с точками, в которых три окружности касаются стороны AB.

Пусть I, I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD соответственно, L, M и K — точки касания этих окружностей со стороной AB (см. рис. 4).

4. Докажем *«ключевой» факт*:

$ML = DK$.

Действительно,

$$DK = p_2 - a = \frac{CD + BD - a}{2};$$

$$ML = AL - AM = (p-a) - (p_1 - CD) = \frac{b+c-a}{2} - \frac{b + AD - CD}{2} =$$

$$= \frac{c - a + CD - AD}{2} = \frac{CD + BD - a}{2},$$

так как $AD + BD = c$.

Следовательно, $ML = DK$, что и требовалось.

Используя это равенство, можно последовательно получить *другие свойства рассматриваемой конфигурации*.

В частности, это дает другой способ доказательства того, что окружности с центрами I_1 и I_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и L совпадают. Действительно, касание окружностей с центрами I_1 и I_2 равносильно тому, что они касаются отрезка CD в одной и той же точке F, что в свою очередь, равносильно равенству отрезков касательных: $DM = DF = DK$ (см. рис. 5). Учитывая, что $ML = DK$, получим, что это равносильно совпадению точек D и L.

Несколько лет назад на олимпиаде по геометрии была предложена следующая задача (*V Московская устная олимпиада по геометрии, автор — П.А. Кожевников*).

Фиксированы две окружности ω_1 и ω_2, одна их внешняя касательная n и одна их внутренняя касательная m. На прямой m выбирается точка X, а на прямой n строятся точки Y и Z так, что XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой (см. рис. 6).

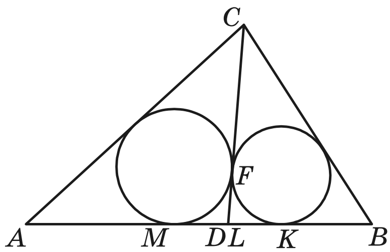


Рис. 5

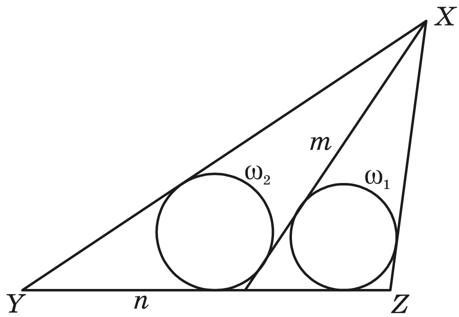


Рис. 6

Если бы мы ранее не рассмотрели свойство точек касания окружностей со стороной AB, то к этой задаче было бы трудно подступиться. Теперь же надо просто вникнуть в условие.

Пусть M и K — точки касания данных окружностей с прямой n, $D = n \cap m$. Рассмотрим рис. 4, в котором $X \equiv C$, $Y \equiv A$, $Z \equiv B$, тогда $CD \equiv m$, $AB \equiv n$. Точки M, K и D — фиксированы (следует из условия). Рассмотрим точку L касания вписанной окружности треугольника XYZ с прямой YZ. Так как $ML = DK$ и L лежит между M и K, значит, точка L — также фиксирована. Центр I окружности, вписанной в треугольник XYZ, лежит на перпендикуляре к YZ, проходящем через точку L. Следовательно, центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой.

5. Еще одно *важное свойство нашей конфигурации* (*V Соросовская олимпиада школьников, автор — И.Ф. Шарыгин*): точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.

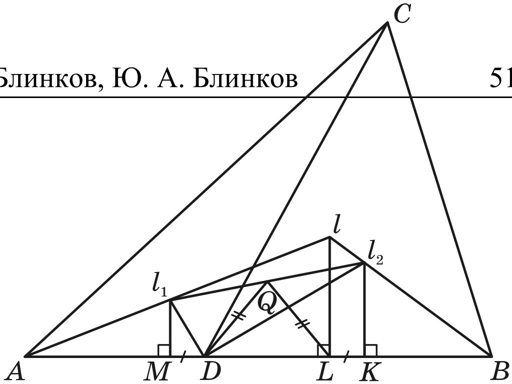


Рис. 7

Рассмотрим точку Q — середину отрезка I_1I_2, который является большей боковой стороной прямоугольной трапеции MI_1I_2K (см. рис. 7). Тогда точка Q равноудалена от точек M и K. Из равенства $ML = DK$ следует, что $MD = LK$, значит, точка Q равноудалена также и от точек D и L. Так как $\angle I_1DI_2 = 90°$, то окружность с диаметром I_1I_2 проходит через точку D, а тогда эта окружность проходит и через точку L, что и требовалось.

Это свойство оказывается очень существенным при рассмотрении частного случая, когда CD — высота треугольника ABC, лежащая внутри треугольника.

6. Докажем, что в этом случае:

а) $I_1L = I_2L$;

б) Вершина P квадрата I_1LI_2P лежит на прямой CD.

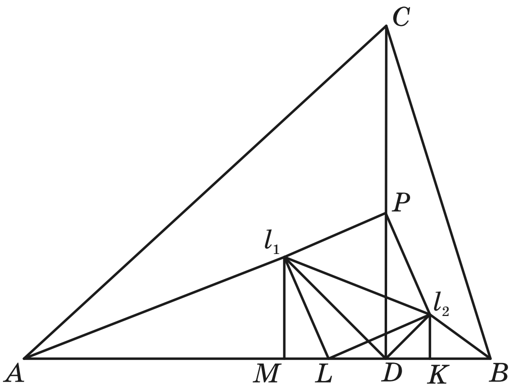


Рис. 8

См. рис. 8. Рассмотрим окружность с диаметром I_1I_2. По доказанному, точки L и D лежат на этой окружности. Тогда: а) $\angle I_1DI_2 = 90°$, поэтому в прямоугольных треугольниках I_1ML и LKI_2 острые углы соответственно равны. Кроме того, так как DI_2 — биссектриса угла BDC, то $\angle I_2DK = 45°$, значит, $I_2K = DK = ML$. Таким образом, $\Delta I_1ML = \Delta LKI_2$, поэтому $I_1L = I_2L$;

б) Если I_1LI_2P — квадрат, то LP — диаметр той же окружности, тогда $\angle LDP = 90°$, значит, точка P лежит на высоте CD.

7. Пусть теперь треугольник ABC — прямоугольный, а CD — его высота, проведенная к гипотенузе. Докажем, что: а) точка P — центр окружности, описанной около треугольника I_1CI_2; б) $I_1L \perp AC$ и $I_2L \perp BC$; в) $I_1L = IL = I_2L$; г) точки A, I_1, I_2 и B лежат на одной окружности.

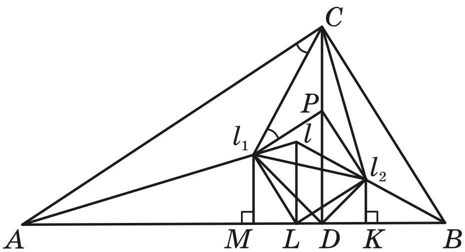


Рис. 9

См. рис. 9. а) Так как $\angle I_1CI_2 = 45°$, $\angle I_1PI_2 = 90°$ и точка P равноудалена от точек I_1 и I_2, то P — центр окружности, описанной около треугольника I_1CI_2;

б) Из доказанного в пункте а) следует, что $\angle PI_1C = \angle PCI_1 = \angle ACI_1$, значит, $PI_1 \parallel AC$, тогда $I_1L \perp AC$. Аналогично, $PI_2 \parallel BC$ и $I_2L \perp BC$;

в) Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle AIL = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, а $\angle I_1LI = \alpha$ (его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла BAC). Значит, $\angle II_1L = 180° - (\angle AIL + \angle I_1LI) = 90° - \frac{1}{2}\alpha = \angle I_1IL$. Следовательно, $I_1L = IL$. Равенство $I_1L = I_2L$ уже доказано в пункте а);

г) Так как

$$\angle II_1I_2 = \angle II_1L - \angle I_2I_1L = 90° - \frac{1}{2}\alpha - 45° = 45° - \frac{1}{2}\alpha = \angle I_2BA,$$

то четырехугольник AI_1I_2B — вписанный, что и требовалось.

Широко известны геометрические утверждения, которые легко доказываются «в одну сторону», а доказательство утверждений, им обратных, сопряжено со значительными трудностями. Свойство нашей конфигурации, рассмотренное в пункте 6, дает возможность в очередной раз продемонстрировать этот «эффект обратной задачи».

8. Напомним одну известную задачу. Пусть CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе, радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ABC*, *ACD* и *BCD* равны r, r_1 и r_2 соответственно. Докажите, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

Для ее решения обычно используется тот факт, что треугольники *ACD* и *CBD* подобны треугольнику *ABC* с коэффициентами $\frac{r_1}{r}$ и $\frac{r_2}{r}$ соответственно. Тогда $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{r_1^2}{r^2}$, $\frac{S_{BCD}}{S_{ABC}} = \frac{r_2^2}{r^2}$. Так как $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$, то, сложив эти равенства почленно, получим требуемое равенство.

Обратное утверждение столь же просто доказать не получится, так как неоткуда взять подобные треугольники! Зато можно продолжить рассуждения пункта 6а. Действительно, так как $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, то $r_1 < r$ и $r_2 < r$, тогда высота *CD* лежит внутри треугольника *ABC*. Так как $\Delta I_1ML = \Delta LKI_2$, то $r_1 = I_1M = LK$ и $r_2 = I_2K = LM$ (см. рис. 8). Значит, $r_1^2 + r_2^2 = I_1L^2 = I_2L^2$, тогда $IL = r = I_1L = I_2L$, то есть треугольники I_1IL и I_2IL — равнобедренные (см. рис. 9). Используем, что сумма углов четырехугольника I_1II_2L равна 360°. Учитывая, что

$$\angle I_1II_2 = 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = \angle II_1L + \angle II_2L, \ \angle I_1LI_2 = 90°,$$

получим, что $\alpha+\beta = 90°$, то есть $\angle ACB = 90°$ (где $\beta = \angle ABC$).

Отметим, что и обратную задачу можно решать аналогично.

9. Теперь уместно рассмотреть такой вопрос: могут ли окружности, вписанные в треугольники *ACD* и *BCD*, иметь равные радиусы? Да, конечно. Это легко понять из соображений непрерывности: меняя положение точки *D* мы можем получить как разбиение, при котором первая окружность больше второй, так и разбиение, при котором первая окружность меньше. Тогда, в силу непрерывности перемещения точки *D* по отрезку *AB*, существует положение точки *D*, при котором окружности равны (*теорема о промежуточном значении непрерывной функции*).

Более того, оказывается, что такую точку D можно построить с помощью циркуля и линейки! Рассмотрим соответствующую задачу (*IV Московская устная олимпиада по геометрии, автор — М.А. Волчкевич*). Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через точку C и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

Проведем анализ. Пусть CD — отрезок искомой прямой (точка D — на стороне AB), I_1, I_2 и I — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно (см. рис. 10). Тогда точки I_1 и I_2 лежат на лучах IA и IB соответственно, причем $I_1I_2 \parallel AB$. Кроме того, $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$.

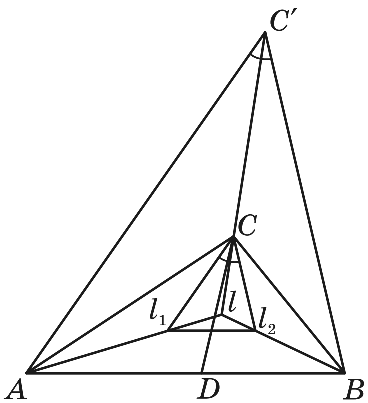


Рис. 10

Рассмотрим такую гомотетию с центром I, что образами точек I_1 и I_2 являются точки A и B соответственно. Тогда, образом точки C является точка C', лежащая на луче IC, из которой сторона AB видна под углом, равным $\frac{1}{2}\angle ACB$.

Таким образом, построив точку C' как пересечение луча IC с указанным ГМТ, и выполнив гомотетию с центром I и коэффициентом $k = \frac{IC}{IC'}$, получим точки I_1 и I_2. Прямая CD — общая касательная двух окружностей с центрами в этих точках и радиусами, равными расстоянию между прямыми I_1I_2 и AB (*достаточно построить касательную к одной из окружностей, проходящую через точку C, тогда она автоматически будет касательной и к другой окружности*).

В заключительной части решения можно также использовать, что отрезок I_1I_2 виден из искомой точки D под углом 90°.

10. Интересен еще один частный случай (*автор — И.А. Кушнир*). Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Тогда $S_{ABC} = CD^2$. Докажем это.

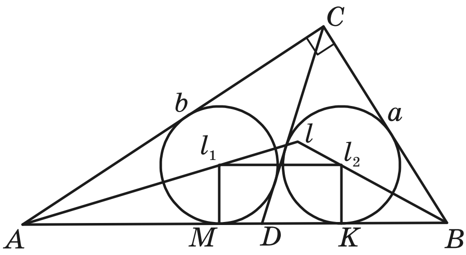


Рис. 11

Пусть I_1, I_2 и I — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC (см. рис. 11). Тогда точки I_1 и I_2 лежат на лучах IA и IB соответственно, причем $I_1I_2 \parallel AB$. Следовательно, треугольники AIB и I_1II_2 подобны, значит, $\dfrac{r}{r-r_1} = \dfrac{c}{I_1I_2}$ (1).

Теперь воспользуемся тем, что $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = (p_1 + p_2)r_1$, где r_1 — радиус равных окружностей. Пусть $CD = d$, тогда $p_1 + p_2 = p + d$, где p — полупериметр треугольника ABC. Таким образом, $r_1 = \dfrac{S_{ABC}}{p+d} = \dfrac{pr}{p+d}$ (2).

Так как расстояние между точками I_1 и I_2 равно расстоянию между точками M и K касания окружностей со стороной AB, то $I_1I_2 = DM + DK = p_1 - b + p_2 - a = p + d - a - b$ (3).

Подставив значения r_1 из (2) и I_1I_2 из (3) в пропорцию (1), получим:

$$c\left(r - \frac{pr}{p+d}\right) = r\left(p + d - a - b\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cd = (p+d)^2 - (p+d)(a+b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cd = p^2 + d^2 + 2pd - pa - pb - ad - bd \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 + d^2 = pa + pb \Leftrightarrow d^2 = p(p-c) = pr = S_{ABC}.$$

Под «занавес» рассмотрим две сложные задачи, связанные с нашей конфигурацией.

11. (*Автор — Л.А. Емельянов*) В треугольнике ABC проведена медиана CD. Точки I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, а точки J_1 и J_2 — центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AC и BC соответственно (см. рис. 12). Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

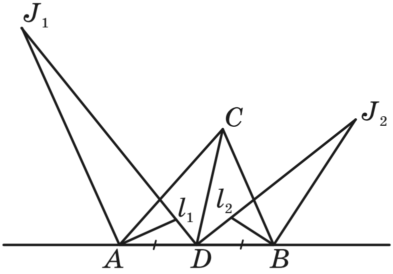


Рис. 12

Доказательство. Нам потребуется следующая лемма: Дан треугольник ABC, I — центр вписанной в него окружности, Q — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Тогда $AI \cdot AQ = AB \cdot AC$.

Доказать это утверждение можно по-разному. Например, рассмотрим треугольники ABQ и AIC (см. рис. 13): $\angle BAQ = \angle IAC$, *кроме того, так как* $\angle IBQ = 90°$, *то*

$$\angle ABQ = 90° + \frac{1}{2}\angle B, \text{ а}$$

$$\angle AIC = 180° - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle B = \angle ABQ.$$

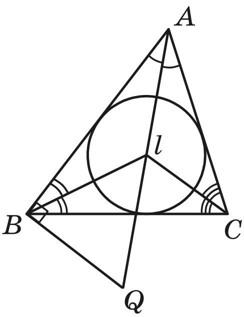


Рис. 13

Таким образом, эти треугольники подобны, значит $\frac{AB}{AI} = \frac{AQ}{AC}$, *откуда и следует доказываемое равенство.*

Другой способ — использовать симметрию относительно биссектрисы AI и свойство секущей.

По доказанной лемме для треугольников ADC и BDC: $DI_1 \cdot DJ_1 = DA \cdot DC = DB \cdot DC = DI_2 \cdot DJ_2$, откуда и следует утверждение задачи.

12. (*Заключительный этап Всероссийской олимпиады 2011 года, задача 11.8, автор — М.А. Кунгожин*) В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точки I_1 и I_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и ACM, N — середина дуги BC (содержащей вершину A). Докажите, что точки A, N, I_1 и I_2 лежат на одной окружности (см. рис. 14).

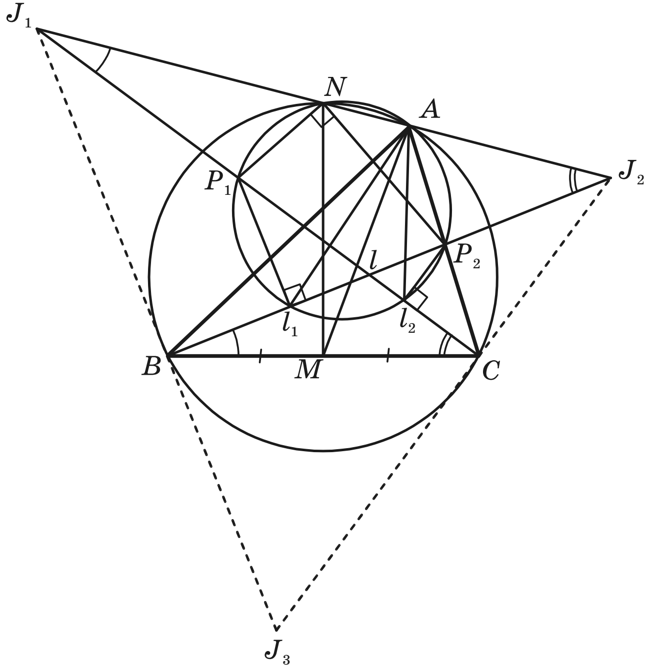


Рис. 14

Доказательство будет состоять из нескольких частей, которые мы будем формулировать и доказывать по отдельности.

1) Пусть J_1 и J_2 — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон AB и AC соответственно. Тогда точка N — середина отрезка J_1J_2.

Действительно, пусть J_3 — центр третьей вневписанной окружности треугольника ABC, тогда точки A, B и C — основания высот треугольника $J_1J_2J_3$, а окружность, описанная около треугольника ABC, является окружностью девяти точек треугольника $J_1J_2J_3$. Следовательно, эта окружность проходит через середины сторон треугольника $J_1J_2J_3$, значит, N — середина J_1J_2.

2) Пусть M — середина отрезка BC, тогда точки M и N соответствуют друг другу в подобных треугольниках IBC и IJ_1J_2.

Действительно, $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90°$ (*углы между внутренними и внешними биссектрисами*). Следовательно, точки B и C лежат на окружности с диаметром J_1J_2, значит, $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$. Тогда указанные треугольники подобны (*по двум углам*), а точки M и N — середины соответствующих сторон этих треугольников.

3) Рассмотрим окружность γ, проходящую через точки A, I_1 и I_2. Пусть γ, вторично пересекает BI и CI в точках P_1 и P_2 соответственно. Докажем, что P_1P_2 — диаметр этой окружности.

Действительно, $\angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 = \angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC$. С другой стороны, $\angle BIP_1 = \angle IBC + \angle ICB = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC = 90° - \angle I_1P_1I_2$. Следовательно, $\angle P_1I_1P_2 = \angle P_1I_2P_2 = 90°$, то есть P_1P_2 — диаметр окружности γ.

4) Так как $P_1I_1 \perp BJ_2$ и $J_1B \perp BJ_2$, то $P_1I_1 \parallel J_1B$, тогда $\frac{II_1}{IP_1} = \frac{IB}{IJ_1}$, то есть точки I_1 и P_1 соответствуют друг другу в подобных треугольниках IBC и IJ_1J_2. Аналогично, точки I_2 и P_2 — также соответствующие. Таким образом, $\angle P_1NP_2 = \angle I_1MI_2 = 90°$, то есть точка N лежит на окружности γ, что и требовалось доказать.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения.

№1. Описанный многоугольник произвольным образом разбит на треугольники. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, больше радиуса окружности, вписанной в многоугольник.

№2. BM — медиана треугольника ABC. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности радиусов r и R ($r < R$). Докажите, что $\frac{R}{r} < 2$.

№3. В прямоугольном треугольнике с катетами 5 и 12 проведена медиана к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с гипотенузой.

№4. В треугольнике со сторонами 3 и 5 и углом 120° между ними проведена биссектриса к третьей стороне и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой.

№5. В прямоугольном треугольнике с катетом 1 и противолежащим углом 30° проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

№6. В прямоугольном треугольнике проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности, расстояние между центрами которых равно d. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

№7. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD к гипотенузе AB. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CD$, где r_1, r_2 и r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно.

№8. В треугольнике ABC проведена высота CD, лежащая внутри треугольника; r_1, r_2 и r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD, BCD и ABC соответственно. Докажите, что $r^2 < r_1^2 + r_2^2$ тогда и только тогда, когда угол ACB — тупой.

№9. Докажите, что суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны тогда и только тогда, когда существует сфера, касающаяся всех его ребер. (*Такой тетраэдр называют каркасным.*)

№10. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D. Для треугольников ADC и BDC рассматриваются вневписанные окружности, касающиеся сторон AC и BC соответственно. Пусть P и Q — точки касания этих окружностей с прямой DC.

А) Найдите PQ, если $BC = a$, $AC = b$, $AD = x$, $BD = y$.

Б) Рассмотрите частные случаи (*аналогичные разобранным в пункте 3 А — Г*).

№11. (*Л.А. Емельянов*) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD. Докажите, что равны радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AD и CD соответственно.

Список литературы и веб-ресурсов

1. Н.Х. Агаханов и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993 — 2009: Заключительные этапы. — М.: МЦНМО, 2010.

2. А.В. Акопян. Геометрия в картинках. — Москва, 2011.

3. Р.К. Гордин. Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7 — 9 классов. — М.: МЦНМО, 2004.

4. И.А. Кушнир. Геометрия на баррикадах 2. — Киев: «Знания Украины», 2011.

5. Материалы для проведения заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников, 2010 — 2011 учебный год. — Москва, 2011.

6. В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии: в 2 ч. — М.: «Наука», 1995.

7. И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. — М.: «Астрель», 2001.

8. olympiads.mccme.ru/ustn — устные геометрические олимпиады.

9. www.problems.ru — база задач по математике.

Игры на уроках математики

А. Г. Королева,
Гимназия №1514, г. Москва

Хорошо известно, что лучше учится то, что интересно, а интересным бывает то, что увлекает, не бывает скучным. Чтобы уроки перестали быть скучными и утомительными, необходимо сделать их увлекательными, чтобы ученики хотели делать задания еще и еще, невзирая на время. Этого помогают достичь задания, построенные в игровой форме. Игра — огромный стимул, чтобы добиться успеха там, где, порой, не помогают многочисленные упражнения.

Игры бывают разные: индивидуальные, командные. Они могут быть посвящены закреплению пройденного материала, проверке математических знаний, выработке навыков и отработке умений быстрого и рационального счета. Одни игры длятся 5–7 минут, для других требуется целый урок.

Ниже рассматриваются примеры математических игр, которые нами успешно применяются на уроках математики

1. Игра «Перфоратор» (игра индивидуальная)

Цель: умение быстро и рационально считать (устный счет)

Материал: карточки с пронумерованными ячейками от 1 до 25.

Ход игры: диктуются примеры (устный счет). Ученик должен зачеркнуть число — ответ.

Время игры: 5 минут, время можно ограничить.

Например: На карточках

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Примеры:

1.

$$\begin{array}{rcr} 100 & - & 70 \\ & \times & 3 \\ & - & 18 \\ & : & 36 \\ \hline & & ? \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcr} 67 & - & 23 \\ & : & 11 \\ & \times & 8 \\ & - & 15 \\ \hline & & ? \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcr} 30 & + & 70 \\ & : & 10 \\ & \times & 15 \\ & - & 125 \\ \hline & & ? \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcr} 100 & - & 80 \\ & : & 4 \\ & \times & 14 \\ & - & 58 \\ \hline & & ? \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{rcr} 20 & + & 70 \\ & : & 30 \\ & \times & 13 \\ & - & 33 \\ \hline & & ? \end{array}$$

Ответ:

2	17	25	12	6

2. Игра «Лото» (игра индивидуальная, может использоваться как устный счет)

Цель: выработать умения быстро, рационально и грамотно выполнять вычислительные действия

Материал: отдельные карточки 2×3 с написанными в произвольном порядке четырьмя числами (ответами) и отдельные карточки с примерами.

Ход игры: учащимся раздаются карточки с числами (ответами) и карточки с примерами. Выигрывает тот, кто первый подберет ко всем своим числам пару (номер примера). Номера примеров вписываются в отведенные квадратики.

Время игры: 5 минут, время можно ограничить.

Например:

1) $\boxed{54} \xrightarrow{:6} \bigcirc \xrightarrow{+12} \bigcirc \xrightarrow{\times 3} \bigcirc \xrightarrow{:7} \boxed{?}$

2) $\boxed{18} \xrightarrow{\times 3} \bigcirc \xrightarrow{:9} \bigcirc \xrightarrow{+38} \bigcirc \xrightarrow{:4} \boxed{?}$

3) $\boxed{35} \xrightarrow{:7} \bigcirc \xrightarrow{\times 12} \bigcirc \xrightarrow{:4} \bigcirc \xrightarrow{-7} \boxed{?}$

4) $\boxed{?} \xrightarrow{-78} \bigcirc \xrightarrow{\times 12} \bigcirc \xrightarrow{:4} \bigcirc \xrightarrow{-5} \boxed{16}$

5) $\boxed{?} \xrightarrow{+18} \bigcirc \xrightarrow{-4} \bigcirc \xrightarrow{:6} \bigcirc \xrightarrow{-16} \boxed{0}$

6) $52:48\cdot 48$

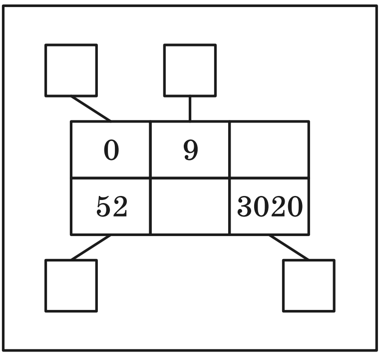
7) $48\cdot(45-3\cdot 15)$

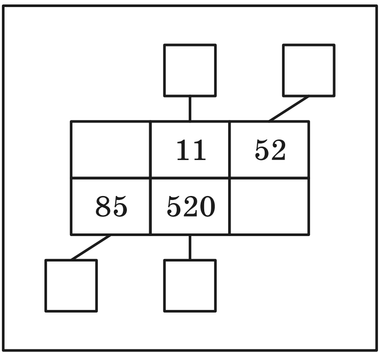
8) 3 см 4 мм = ….. мм

9) 5 м 2 дм = …….см

10) 3 км 20 м = ……м

Примеры карточек:





Ответы:

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	9	11	8	85	72	52	0	34	520	3020

3. **Игра Парашютисты** (индивидуальная)

Цель: выработать умения быстро, рационально и грамотно выполнять вычислительные действия

Материал: отдельные карточки с написанными в произвольном порядке шестью примерами и ответами

Ход игры: учащимся раздаются карточки с числами (ответами) и карточки с примерами. Выигрывает тот, кто первый определит порядок приземления парашютистов. Ответы вписываются в отведенные квадратики.

Время игры: 5 минут, время можно ограничить.

Например:

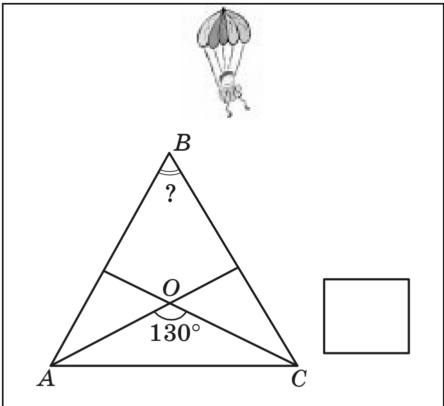
 $\left(2\frac{4}{5}+1\frac{2}{3}\right)\cdot 15 = \square$	 $\left(3\frac{2}{5}+1\frac{1}{2}\right)\cdot 10 = \square$
 $\left(2\frac{3}{4}+3\frac{2}{7}\right)\cdot 1\frac{3}{4} = \square$	 $\left(3\frac{3}{4}+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{5} = \square$
 $\left(3\frac{4}{11}+2\frac{7}{11}\right)\cdot \frac{5}{6} = \square$	 $\frac{2}{3}\cdot\left(3\frac{2}{7}+2\frac{5}{7}\right) = \square$

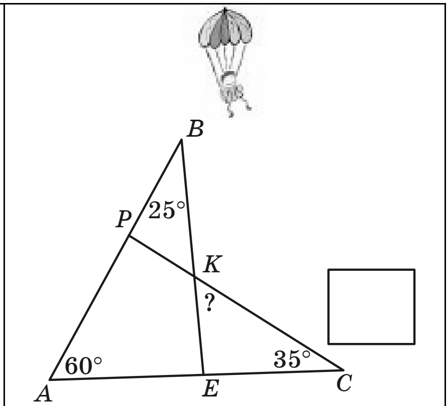
5	$15\frac{1}{2}$	67	$10\frac{9}{16}$	4	49

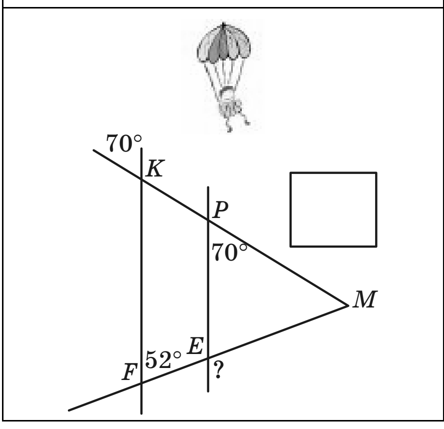
Игра может быть использована на различных этапах урока — она может применяться как для устного счета, также проводиться для проверки знаний каждого учащегося при решении различных задач; для усвоения новых знаний и их закрепления, для обобщения и повторения пройденного материала.

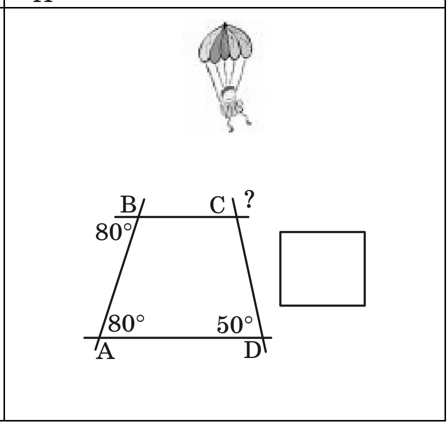
Применение игровых элементов позволяет учитывать индивидуальные способности каждого ученика — более сильным можно дать карточки с более сложными заданиями, более слабым — возможно дать другие, с более легкими заданиями. Но с целью, чтобы все справились с поставленной задачей. Можно применить подобные карточки и в 7-ом классе — например, при изучении параллельности прямых и суммы углов треугольника.

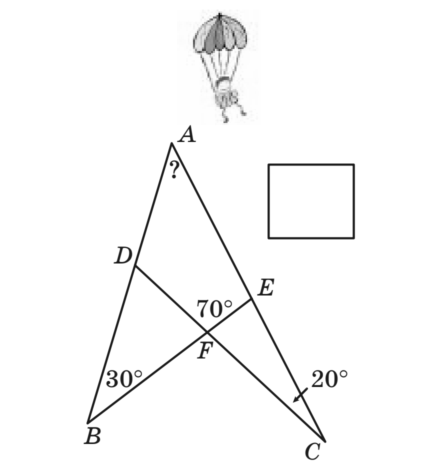
Пример карточек для 7-го класса:

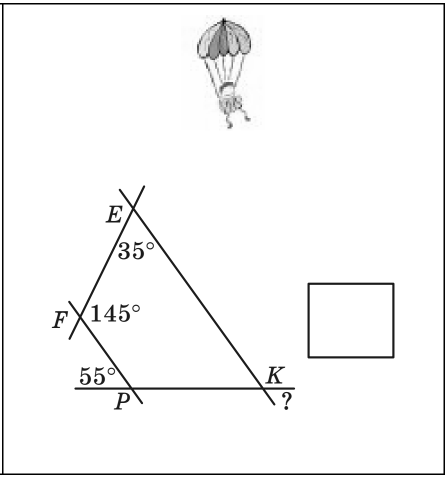












60°	20°	128°	80°	55°	130°

4. Игра «Исправь ошибку» (индивидуальная игра)

Цель: проверка математических знаний; отработка умений быстрого и рационального счета

Материал: не требует подготовки.

Ход игры: учитель пишет на доске несколько примеров, часть из которых вычислена с ошибками. За 5-6 минут ученики должны исправить ошибки. Выигрывает тот, кто найдет больше ошибок.

Например:

1. $7\frac{3}{10} = 7{,}3$
2. $19\frac{13}{1000} = 1{,}9013$ (неверно, так как $19\frac{13}{1000} = 19{,}01$)
3. $3{,}7 + 2{,}251 = 5{,}951$
4. $5{,}8 + 3{,}618 = 8{,}1418$ (неверно, так как $5{,}8 + 3{,}618 = 9{,}418$)
5. $6{,}42 \cdot 10 = 6{,}420$ (неверно, так как $6{,}42 \cdot 10 = 64{,}2$)
6. $0{,}006 \cdot 100 = 0{,}6$
7. $8{,}3 - 4{,}7 = 4{,}4$ (неверно, так как $8{,}3 - 4{,}7 = 3{,}6$)
8. $6{,}8 - 5{,}1 = 1{,}7$
9. $45{,}531 : 10 = 4{,}531$
10. $0{,}046 : 10 = 0{,}46$ (неверно, так как $0{,}046 : 10 = 0{,}0046$)

5. Игра «Горячий Стульчик» (игра групповая)

Цель: проверка знаний математических терминов по определенной теме, формулировок законов, теорем, аксиом и т.д.

Материал: не требует особой подготовки.

Ход игры: водящий садится на «горячий стульчик» у доски лицом к классу. Учащиеся по очереди задают ему вопросы по теме, оговоренной заранее. Водящий должен ответить. Если допущена ошибка, водящий меняется на нового игрока, чей вопрос был последним.

Рассмотрим, например, тему «Умножение и деление натуральных чисел».

Примеры вопросов:

1. Что такое деление?
2. Как называют результат умножения?
3. Существует ли сочетательное свойство умножения? Если да, то сформулируйте его.
4. Существует ли сочетательное свойство деления? Если да, то сформулируйте его.
5. В каких случаях можно опустить знак умножения?

Игру можно усложнить. Учащиеся дают объяснение математического термина, а водящий должен догадаться, что это за слово. Выигрывает тот, кто продержится на «горячем стульчике» дольше. Примеры вопросов:

1. С помощью этого действия находят неизвестный множитель (деление)
2. Иногда деление одного натурального числа на другое нацело не всегда возможно, в этом случае получаем … (деление с остатком)
3. Для того, чтобы умножить сумму на число, можно умножить на это число каждое слагаемое и сложить получившиеся произведения; это правило называется… (распределительное свойство умножения относительно сложения)
4. Произведение, в котором все множители равны, можно записать короче; эта запись называется (степенью числа)
5. Возведение во вторую степень (квадрат числа)

6. Игра «Игра в теннис» (игра командная)

Цель: повторение математических терминов по определенной теме.

Материал: не требует особой подготовки.

Ход игры: Формируются две команды (можно больше). Учитель выбирает тему, по которой команды должны назвать термины (или выражения, теоремы…). Команда А называет первый термин. Команда В за 5–7 секунд должна «отбить удар» и дать определение данного термина, формулировку теоремы; при правильном ответе дает следующее задание по этой теме. Игра продолжается до тех пор, пока одна из команд не сможет вспомнить или расшифровать термин (выражение, теорему).

7. «Кто быстрее» (игра групповая)

Цель: повторить раздел, закрепить навыки в решении примеров

Материал: карточки с вычислительными примерами

Ход игры: Играют двое. Первый игрок последовательно решает примеры, записанные на правой лестнице, второй — примеры, записанные на левой лестнице. Полученное в результате вычислений число в каждом примере должны найти среди ответов, выписанных в отдельной строке, и соединить с ним. Последовательность ответов не совпадает с последовательностью выполнения примеров. Выигрывает тот, кто первым поднимется на верхнюю ступеньку. Возможна ничья.

Например:

$$4\frac{1}{2}-2\frac{2}{5}$$

$6\frac{2}{5}-2\frac{3}{5}$	$3\frac{1}{6}-1\frac{5}{6}$
$5\frac{4}{7}-3\frac{2}{7}$	$7\frac{4}{5}-4\frac{3}{5}$
$8\frac{3}{5}+4\frac{4}{5}$	$3\frac{5}{7}+1\frac{4}{7}$
$6\frac{4}{13}+2\frac{2}{13}$	$4\frac{3}{10}+2\frac{2}{10}$

$$2\frac{1}{10};\ 2\frac{1}{10};\ 8\frac{6}{13};\ 6\frac{1}{2};\ 2\frac{2}{7};\ 3\frac{1}{5};\ 13\frac{2}{5};\ 5\frac{2}{7};\ 3\frac{4}{5};\ 1\frac{1}{3}$$

8. Игра «Путь к вершине» (индивидуальная, командная**)**

Цель игры: повторить раздел, закрепить навыки в решении задач.

Материал: Количество заданий, выполняемых каждым учеником, в каждой игре может быть различным и определяется многими факторами: содержанием раздела, по которому составлена данная игра, наличием времени, степенью трудности заданий, составом играющих (если это групповая игра) и так далее. Как правило, оно колеблется от 3 до 5.

Организация «пути»: Для проведения можно использовать несколько разновидностей игры:

1) «Путь к вершине»: индивидуальная игра. Каждому игроку выдается листок с возможными путями следования к вершине:

	Вершина
IV этап	29 30
III этап	25 26 27 28
II этап	17 18 19 20 21 22 23 24
I этап	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

На вершину ведет множество дорожек, начало которых совпадает с одним из чисел 1 — 16. Дорожки имеют места «отдыха», пронумерованные числами. За каждым числом закреплено свое задание, которое необходимо выполнить. Каждое задание имеет свой вес в зависимости от его сложности. За правильное решение каждого задания начисляются баллы, которые определяются весом задания. За неправильное решение снимаются баллы, которые также заранее определены. Например, за правильное решение задания № 20 будет начислено 10 баллов, за неправильное — снято 5 баллов. На первом этапе все задания носят характер разминки и должны быть выполнимы. Решив это задание, ученик сам выбирает, на какую ступеньку следующего этапа он будет забираться, тем самым прокладывая свой индивидуальный путь к вершине. Ученик заранее не знает какая задача закреплена за каким номером, а также не знает сколько баллов принесет ему выполнение того или иного задания. Баллы, набранные в процессе пути, суммируются. Победитель определяется по наибольшему количеству набранных баллов.

Пример построенной дорожки к вершине по разделу «Сложение и вычитание натуральных чисел» (учебник Н.Я. Виленкин и др. Математика 5 кл):

№ пп.	**Выбранное число**	**Задание**	**Баллы за решение**	
1	5	№186. В одной пачке 23 книги и в ней на 8 книг меньше, чем во второй, а в третьей пачке на 6 книг больше, чем во второй. Сколько всего книг в трех пачках?	+5	
2	20	$78-((59+x)-14)=22$	+15	– 5
3	27	№268 В соревнованиях по плаванию Света, Валя, Настя, Катя и Галя заняли со второго по шестое места. Катя на 3 с отстала от победительницы и на 2 с — от Насти, но обогнала Галю на 2 с. Валя на 3 с отстала от Гали, но обогнала Свету на 1 с. В каком порядке финишировали девочки и с каким отставанием от победительницы?	+25	– 10

4	30	№348. Токарь выполнил заказ на изготовление одинаковых деталей за три дня. В первый день он изготовил 23 детали, во второй день — на b деталей больше, чем в первый день, а в третий день — на четыре детали меньше, чем в первый день. Сколько деталей изготовил токарь за эти три дня? Составьте выражение для решения задачи и найдите его значение при $b = 7$.	+35	– 10

2) «Путь к вершине» — командная игра. Каждому игроку (команде) выдается листок со следующими возможными путями следования к вершине:

На вершину ведут три дорожки, начало которых для любого пути совпадают с цифрой 1. Дорожки имеют места «отдыха», пронумерованные числами. За каждым числом закреплено свое задание, которое необходимо выполнить. Разные пути имеют разное количество задач. Количество задач зависит от их сложности. Первый путь — три сложные задачи; третий путь — семь простых задач. Ученик (команда) сразу определяет по какому пути он (она) будет двигаться к вершине. В зависимости от выбора ученики получают свой набор задач, который они должны решить. Победителем является команда, которая все свои задачи решит и объяснит учителю их решение быстрее всех.

«Путь к вершине» можно использовать как индивидуальную, так командную игру. Эта игра отличается от обычных форм самостоятельной работы: во-первых, тем, что здесь имеется дополнительный игровой мотив, который для некоторых учащихся является ведущим (достичь вершины — их основная цель); во-вторых, он проводится в спокойной форме, так как учащиеся могут в любое время, в случае затруднения, обратиться к товарищам по команде за помощью и советом; в-третьих, в нем можно (незаметно для других) учесть индивидуальные особенности учащихся. Например, для слабых команд можно составить более простые варианты задач с тем, чтобы они могли при достаточных усилиях наравне с другими учащимися взойти на вершину.

И наоборот, одаренные ученики могут рассчитывать при восхождении на вершину на такие «головоломки», которые заставят работать мысль в полную силу.

Далекое и близкое в математике: мнимое сходство и скрытое единство задач

С. М. Крачковский,
СОШ №315, г. Москва

Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.

Анри Пуанкаре

Для того чтобы понимать смысл происходящих в окружающем мире явлений и процессов, каждому человеку важно умение видеть суть вещей, находить общее в, казалось бы, совершенно непохожих ситуациях и, наоборот, понимать, что вовсе не всегда то, что кажется сходным и близким на поверхностный взгляд, является таковым на самом деле. Можно привести много примеров этого в повседневной жизни и в работе специалистов разных профессий. Скажем, врачу для установления диагноза необходимо учитывать то, что одинаковые симптомы нередко могут вызываться самыми различными заболеваниями, в то время как одно и то же заболевание может проявляться весьма по-разному в зависимости от конкретных обстоятельств.

При изучении математики также постоянно возникает необходимость замечать общие черты у разных, подчас мало похожих на первый взгляд задач и понятий, отличать подлинное, существенное родство между ними от мнимого, кажущегося, вызванного только лишь близостью формы, в которой они предложены. Умение «видеть» знакомые ситуации в измененных условиях, находить и выстраивать правильные аналогии между ними крайне важно для успешного решения задач, особенно нестандартных.

К сожалению, в сознании большинства учащихся методы решения задач неразрывно соотнесены с внешним обликом этих задач - их словесной формулировкой, используемыми обозначениями или, например, видом функций, входящих в уравнение.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при которых:

Задача 1. Уравнение $4^x+\left(a^2+5\right)\cdot 2^x+9-a^2=0$ не имеет решений (МГУ, факультет мех-мат, 1993 г).

Задача 2. Для любого положительного x значения функций $f(x)=x^2+5x+9$ и $g(x)=(1-x)a^2$ различны.

Задача 3. График функции $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{a^2+5}{\sqrt{x}}+9-a^2$ не пересекает ось абсцисс.

Задача 4. Наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{a^2+5}{|x|}+11-a^2 \text{ больше } 2.$$

Задача 5. Системы уравнений

$$\begin{cases} x+|y|=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{1}{y}=\sqrt{2x+3} \\ y^2+a^2y+5y+9-a^2=0 \end{cases}$$

равносильны.

Все эти пять задач, имея разные условия и отличаясь по типу задействованных функций, при внимательном рассмотрении и должных переформулировках сводятся к одной и той же задаче. А именно — найти значения a, при которых уравнение

$$t^2+(a^2+5)t+9-a^2=0$$

не имеет положительных корней. Ответом везде служит отрезок $a\in[-3;3]$. Заметим, что форма, в которой предложена задача, может влиять на выбор учащимся способа ее решения. Так, первый и третий варианты скорее подводят к мысли сделать соответствующую замену и использовать теорему Виета или утверждения о расположении корней квадратного трехчлена.

А во втором варианте легче увидеть, что можно построить параболу $f(x)=x^2+5x+9$ и понять, что график функции $g(x)=(1-x)a^2$ представляет собой семейство прямых, проходящих через точку $(1;0)$ с переменным *неположительным* угловым коэффициентом $-a^2 \le 0$, который изменяет угол их наклона. При этом нас интересуют те прямые данного семейства, которые не пересекают параболу в точках с положительной абсциссой. При таком графическом решении ответ можно практически сразу получить из рисунка (см. рис 1).

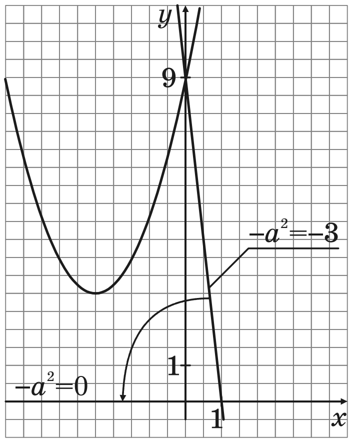


Рис. 1

Нередко встречается и ситуация обратная той, о которой мы говорили до сих пор. Если предлагаемое задание внешне напоминает какое-то другое, особенно такое, которое неоднократно рассматривалось на занятиях, то многие школьники сразу же начинают использовать знакомый им метод, совершенно не задумываясь о допустимости его применения в данном случае и не замечая возникающих нестыковок и несуразностей в своем решении. Вообще, наличие определенного визуального сходства между условиями задач, уравнениями, определениями математических понятий далеко не всегда означает их подлинную общность и возможность рассмотрения единым образом. Зато это легко провоцирует учащихся на неверные решения, недопустимые обобщения того или иного приема на принципиально иную ситуацию и т. д.

Пример 2. Изобразите множества решений неравенств (см. рис. 2–5):

а) $(x^2-5x+6)|x-1| \le 0$;

б) $(y-x^2+5x-6)(1-|x-1|) \ge 0$;

в) $\left(1+\sqrt{x^2-5x+6}\right)\left(y-|x-1|\right)\geq 0$;

г) $\left(y-\sqrt{-x^2+5x-6}\right)\left(1+|x+1|\right)\leq 0$;

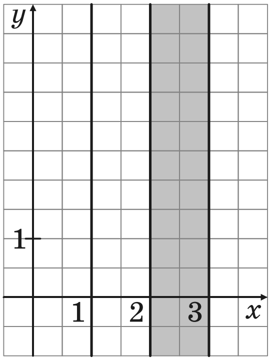


Рис. 2

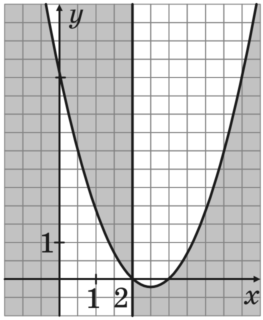


Рис. 3

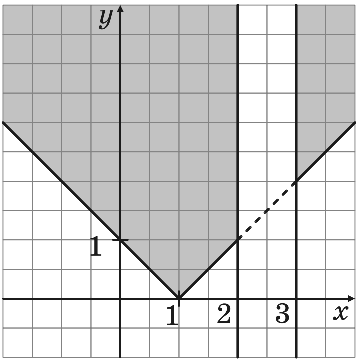


Рис. 4

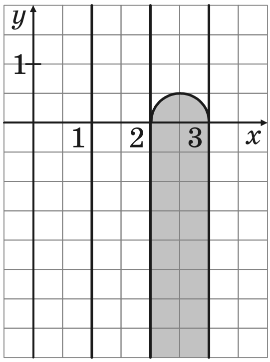


Рис. 5

Изображая границы соответствующих областей, учащиеся часто допускают ошибки. Сказывается сила привычки и не учет существа дела: увидев знакомое по внешнему виду выражение, скажем, квадратный трехчлен в п. а), учащиеся, не задумываясь, сразу же строят параболу. Или изображают во всех случаях график модуля в виде «галочки», хотя она присутствует только в п. в). Предложив на уроке несколько похожих между собой примеров такого типа, обычно можно получить целый букет разнообразных ошибок.

Регулярное использование на уроках пусть даже небольших подборок задач, близких по условию или по запрятанной в них идее, обсуждение их сходств и различий, демонстрация приемов правильной и удобной переформулировки условий, способствует более глубокому и разностороннему пониманию материала, вдумчивому отношению к предмету математики.

Отнесем к нашей теме также вопрос о возможности множественных визуальных интерпретаций различных математических фактов. Многие понятия и задачи в математике допускают целый спектр интересных и эффектных способов своего графического, образного восприятия. Нередко эти способы значительно отличаются друг на друга — как идейно, так и визуально. Знакомясь с ними, учащиеся получают возможность «увидеть» сущность задачи с разных сторон, запечатлеть для себя несколько зрительных образов одной и той же ситуации, провести их сопоставление.

Пример 3. (диагностическая работа МИОО, 2010 г). Найдите все значения параметра a, при которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\le 2$ является отрезок. Ответ: $(-1;1)\cup\left[\frac{5}{4};5\right)$.

Первый способ. Рассматриваем графики функций $y=2-\sqrt{3-x}$ и $y=|x-a|$. Перемещаем галочку вдоль оси абсцисс, находим ее положения, удовлетворяющие условию (рис. 6).

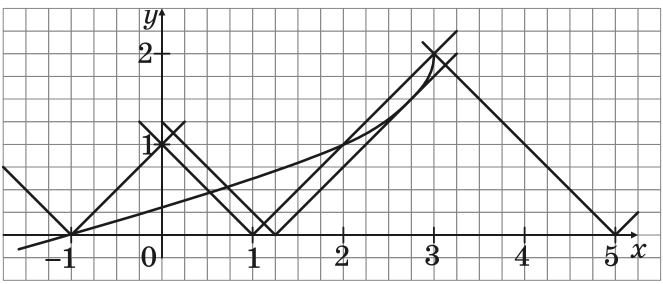


Рис. 6

Второй способ. Делаем замену $a-x=t$, после которой неравенство приобретает вид $\sqrt{t+3-a}+|t|\le 2$, и рассматриваем графики функций $y=\sqrt{t+3-a}$ и $y=2-|t|$. Теперь галочка стала неподвижной, а вдоль оси абсцисс ездит полупарабола (рис. 7).

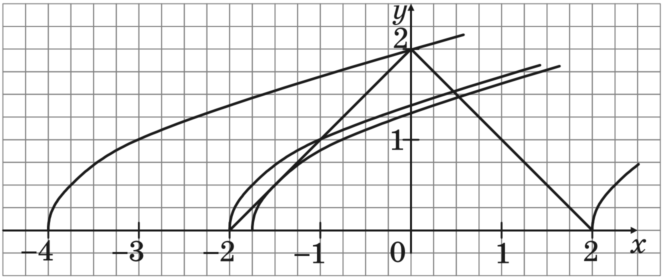


Рис. 7

Каких-либо удобств, по сравнению с предыдущим способом, конкретно в данной задаче это не дает. Интерес представляет, а иной раз дает и ощутимую пользу, сама возможность путем перехода к новой системе координат (преобразование $a-x=t$) изменять вид перемещения, «останавливать» одни фигуры и «запускать» движение других. При этом свежим и неожиданным для учащихся образом демонстрируется проявление физического принципа относительности движения.

Третий способ. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} a \ge x-2+\sqrt{3-x} \\ a \le x+2-\sqrt{3-x} \end{cases}.$$

Строим соответствующие графики в осях $(x;a)$, определяем нужную область и считываем ответ вдоль оси параметра (рис. 8). В данной задаче такой способ определенно труднее остальных. К тому же для аккуратного обоснования свойств полученных графиков он требует аппарата математического анализа.

Четвертый способ. Сделав замену $\sqrt{3-x}=t,\ t\ge 0$, получаем неравенство $t+\left|t^2+a-3\right|\le 2$, равносильное системе

$$\begin{cases} t^2+a-3 \le 2-t \\ t^2+a-3 \ge t-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le 5-t-t^2 \\ a \ge 1+t-t^2 \end{cases}.$$

Строим графики в осях $(t;a)$ с учетом условия $t \geq 0$ (рис. 9).

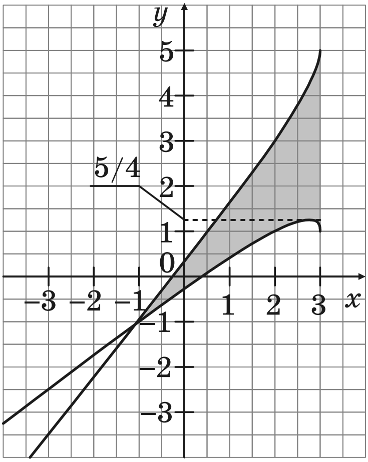


Рис. 8

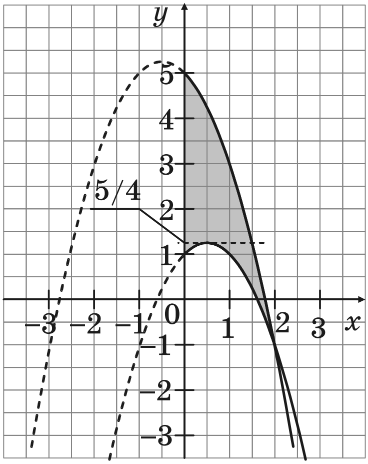


Рис. 9

Рассмотрение с учащимися различных графических способов решения одной задачи, вроде приведенных выше, позволяет разрушить существующий, пусть даже неосознанно, в сознании многих стереотип о наличии как бы взаимно-однозначного соответствия между формулами и графиками. Часто считают, что данное множество точек на плоскости или в пространстве, если и можно задать аналитически, то только одним единственным способом. И, наоборот, всякая функция, уравнение или неравенство имеет свой эксклюзивный строго определенный зрительный образ. Учащимся полезно объяснять, что любая формула есть запись некоторого утверждения на строго определенном языке и в другом контексте может обладать совершенно иной смысловой нагрузкой. Простейший пример — прямая пропорциональность, скажем, линейное уравнение $s = 2t$, в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости задает прямую, в пространстве — уже плоскость, а если под t и s понимать полярные координаты точки на плоскости, то получится уже спираль Архимеда и т.д.

В качестве еще одной иллюстрации возможностей многовариантного геометрического представления математических объектов приведем ряд наглядных интерпретаций неравенств, связывающих средние величины.

Пример 4. Показать, что для любых положительных чисел a и b выполняются неравенства:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

показывающие соотношения между средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим и средним квадратичным двух чисел.

Первая графическая интерпретация. В трапеции с основаниями a и b рассматриваем четыре отрезка, параллельных основаниям с концами на боковых сторонах. Первый, KL — проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, второй, MN — разбивающий трапецию на две подобные трапеции, третий, PQ — проходящий через середины боковых сторон и четвертый, RS — разбивающий трапецию на две равновеликие трапеции. Длины данных отрезков равны соответственно $\frac{2ab}{a+b}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Доказательство этого факта интересно разобрать с учащимися в классе или на факультативе. В результате, мы получаем картинку, представленную на рис 10, наглядно демонстрирующую приведенные выше неравенства, связывающие между собой различные средние величины. Очевидно, эти неравенства становятся равенствами в том случае, когда трапеция $ABCD$ вырождается в прямоугольник (то есть, основания становятся равными: $a = b$).

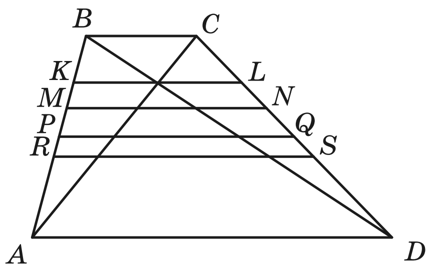


Рис. 10

Вторая графическая интерпретация. На окружности с диаметром AB и центром в точке O возьмем некоторую точку C. Треугольник ABC — прямоугольный. Пусть D — основание его высоты, опущенной из точки C, и $AD = a$, $BD = b$ — проекции катетов на гипотенузу AB. Проведем радиус OE, параллельный CD, а также высоту DH прямоугольного треугольника COD (см. рис.11). Тогда нетрудно доказать, что:

$$CH = \frac{2ab}{a+b}, \; CD = \sqrt{ab}, OE = \frac{a+b}{2}, \; DE = \frac{a^2+b^2}{2},$$

и что $CH \le CD \le OE \le DE$, причем равенства достигаются, когда совпадают точки C и E, то есть при $a = b$. В результате неравенства о средних величинах обретают новую наглядную геометрическую реализацию.

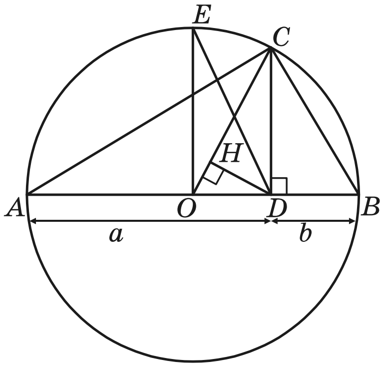


Рис. 11

Третья графическая интерпретация. Разделив неравенства для средних на $b > 0$, получаем равносильную систему неравенств:

$$\frac{2\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} \le \sqrt{\frac{a}{b}} \le \frac{\frac{a}{b}+1}{2} \le \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}{2}}.$$

Обозначив $\frac{a}{b} = t$, рассмотрим графики функций

$$f_1(t) = \frac{2t}{t+1}, \; f_2(t) = \sqrt{t}, \; f_3(t) = \frac{t+1}{2}, \; f_4(t) = \sqrt{\frac{t^2+1}{2}}$$

на промежутке $t > 0$ (рис. 12). Тогда легко можно видеть (и доказать), что для любого $t > 0$ выполняются соотношения $f_1(t) \le f_2(t) \le f_3(t) \le f_4(t)$, причем равенства достигаются только при $t = 1$, то есть при $a = b$.

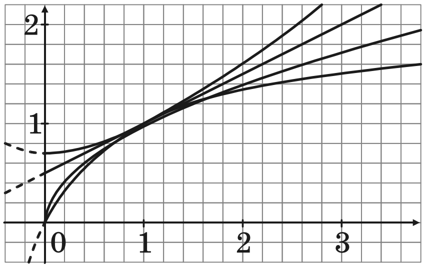


Рис. 12

Отдельные неравенства о средних можно визуально представить еще целым рядом других способов. Приведем, например, три графические интерпретации неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух чисел ($\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$).

Первый способ. Изображаем график функции

$$y = t + \frac{1}{t} \text{ (где } |t| = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{).}$$

Данный способ хорош для наглядного восприятия неравенства о сумме двух взаимно обратных величин: $\left| t + \frac{1}{t} \right| \ge 2$ (на чертеже легко показать сразу и случай отрицательных *t*, в частности наличие ровно двух точек экстремума: $t = -1$ и $t = 1$) (рис. 13).

Второй способ. Возьмем прямоугольник *ABCD* со сторонами $AD = \sqrt{a}$ и $AB = \sqrt{b}$. Пусть для определенности $a \ge b$. Проведем биссектрису угла *A*. Пусть *M* и *N* — точки ее пересечения со стороной *BC* и продолжением стороны *CD* за точку *C* (рис. 14).

Тогда наше неравенство становится просто выражением того очевидного факта, что площадь прямоугольника *ABCD* не превосходит суммы площадей треугольников *AMB* и *AND*, причем равенство имеет место тогда и только когда $ABCD$ — квадрат (точки N и C совпадают).

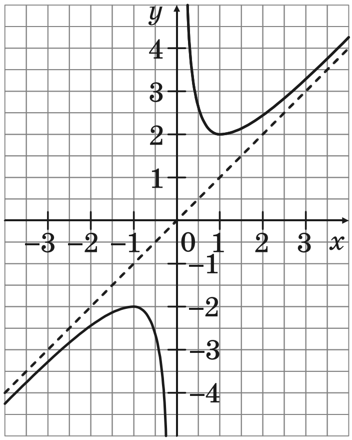


Рис. 13

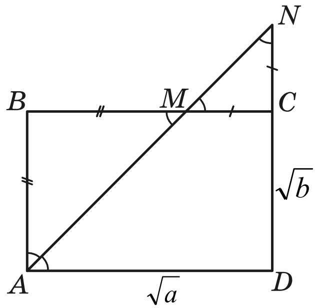


Рис. 14

Третий способ. Рассматриваем квадрат со стороной $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. В этом случае неравенство Коши выражает то, что сумма площадей двух белых прямоугольников не больше суммы площадей двух закрашенных квадратов (см. рис. 15).

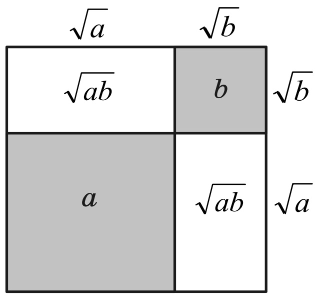


Рис. 15

Мы делаем акцент вовсе не на составлении полного перечня решений (доказательств) той или иной задачи. Главное — продемонстрировать учащимся возможность разных взглядов на одно и то же явление, наличие разветвленной системы взаимосвязей между разными идеями и подходами. Немаловажно здесь и то, что всякий зрительный образ обладает некоторой самостоятельной внутренней ценностью. И потому возможность «добычи» нескольких таких образов из одной и той же задачи кардинальным образом расширяет взгляд на нее, способствует эстетическому восприятию математики и свободе ее понимания. Подобные «решения в образах» и их сопоставления могут стать толчком для развития интереса к математике, как у тех, кто в будущем станет заниматься ею профессионально, так и у ребят с художественными и гуманитарными склонностями.

В заключение отметим, что рассмотрение различных визуальных образов одной и той же задачи всегда вызывает определенное удивление и немалый энтузиазм учащихся, что уже сразу делает задачу запоминающейся. Добавляя сюда эстетическую привлекательность разнообразных графических методов, широту восприятия и многогранность мышления, формируемые при их совместном использовании в одной задаче, получаем на выходе один из весьма важных, интересных и полезных подходов, способный существенно оживлять и обогащать процесс обучения математике на всех уровнях.

Метод построения динамических моделей плоских мозаик в программе GeoGebra

О. М. Кузнецов,
ФМШ 2007, г. Москва

Задача покрытия плоскости одинаковыми фигурами (например, многоугольниками одного или нескольких типов), которые не перекрывают друг друга и не оставляют на плоскости пустого пространства и поныне изобилует большим количеством нерешенных проблем [1].

Такие покрытия обычно называют плоскими мозаиками, замощениями, паркетами, сетчатыми или геометрическими орнаментами. Некоторые из них хорошо известны и изучены. Например, *однородные мозаики Кеплера*, состоящие из определённых комбинаций правильных 3-х, 4-х, 6-ти, 8-ми и 12-ти угольников, имеющих эквивалентные вершины. Такие мозаики были впервые исследованы Иоганном Кеплером в его пятитомном сочинении «Гармония мира» (Harmonice Mundi), 1619 г. [2]. На рисунке приведены фрагменты трёх таких мозаик (рис.1).

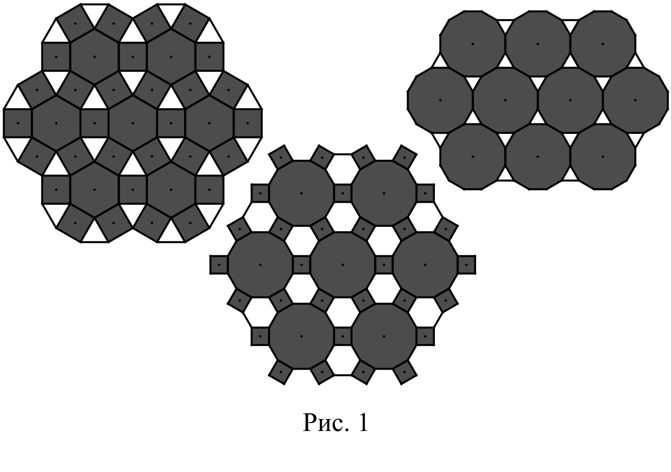


Рис. 1

Также следует отметить ряд статей в журнале «Квант», инициированных А. Н. Колмогоровым и посвященных рассмотрению локального замощения правильными n-угольниками окрестности какой-либо вершины мозаики [3, 4]. Было показано, что существует ровно одиннадцать различных типов локальных замощений без пропусков и перекрытий при соблюдении принципа эквивалентности вершин мозаики. Такие локальные замощения были названы *правильными паркетами*.

Однако, ни у Кеплера, ни в статьях «Кванта» не рассматривались геометрические свойства полученных мозаик (паркетов), неограниченно распространённых на всю плоскость, и не предлагались какие-либо методы построения данных геометрических конструкций. По-видимому, предполагалось очевидным построение той или иной мозаики путём последовательного присоединения каждого нового многоугольника к уже построенной части мозаики с учётом локальных геометрических свойств её вершин. Помимо сомнительной очевидности такого способа замощения *всей* плоскости, применение этого метода вызывает явные практические затруднения.

А нельзя ли построить мозаику сразу всю целиком, также как мы получаем узоры в калейдоскопе?

Оказывается, такой метод построения существует и с успехом применяется в кристаллографии для описания геометрических свойств пространственных кристаллических решеток и их проекций на плоскость. Он основан на генерировании *правильной системы точек* — совокупности точек, полученных размножением исходной точки всеми операциями симметрии какой-либо пространственной кристаллографической группы [5].

Наглядно продемонстрировать содержание данного метода можно на простейшем примере.

Попробуем представить произвольный прямоугольник и описанную около него окружность. Затем нарисуем представленную картинку палочкой на песке. Если под рукой есть палочка и песок, то это совсем не сложно. А теперь заменим произвольный прямоугольник на произвольный квадрат. Нам придётся нарисовать новую картинку – не только на песке, но и в воображении. При этом не совсем ясно, почему полученные картинки изображают именно *произвольные* фигуры. Пока придётся смириться с этой неопределённостью. Добавим к двум картинкам третью — произвольный отрезок и построенная на нём, как на диаметре окружность.

Итак, у нас есть три картинки на песке, изображающие три различные геометрические конструкции, состоящие из определённых фигур — точек, отрезков, окружностей и логических связей между ними. Легко заметить, что все эти конструкции имеют одинаковую точечную группу симметрии: две перпендикулярные оси симметрии и центр симметрии второго порядка. Другими словами, связи между элементами этих конструкций могут быть определены на языке симметрии и заданы единым образом как симметрийные свойства. В связи с этим возникает желание сделать обобщение как на уровне геометрической модели, содержащей в себе все три конструкции, так и на уровне графического представления данной модели в виде динамического чертежа. Для этого заменим песок и палочку на что-то более подходящее для построения динамических чертежей произвольных фигур. Например, нас вполне устроят динамические возможности интерактивной программной среды GeoGebra.

Вначале выделим на плоскости две перпендикулярные прямые в качестве осей симметрии будущего чертежа. Построим произвольную точку, не лежащую на осях симметрии. Будем называть её *свободной* или *независимой* точкой. Далее, построим образы исходной точки, симметричные относительно осей симметрии. В результате получим систему из четырёх точек в эквивалентных позициях — *правильную систему точек*, одну из которых — независимую можно двигать. Соединим ближайшие точки правильной системы отрезками и в завершении построим окружность, проходящую через любые три точки системы. Наш первый динамический чертёж готов (рис. 2). Теперь можно мышкой подвигать независимую вершину прямоугольника и убедиться, что наша динамическая модель описывает все три исходные геометрические конструкции. При этом у нас появляется возможность рассматривать полученные конструкции действительно как произвольные, т.к. каждая конструкция зависит только от одной независимой точки, выбранной произвольно.

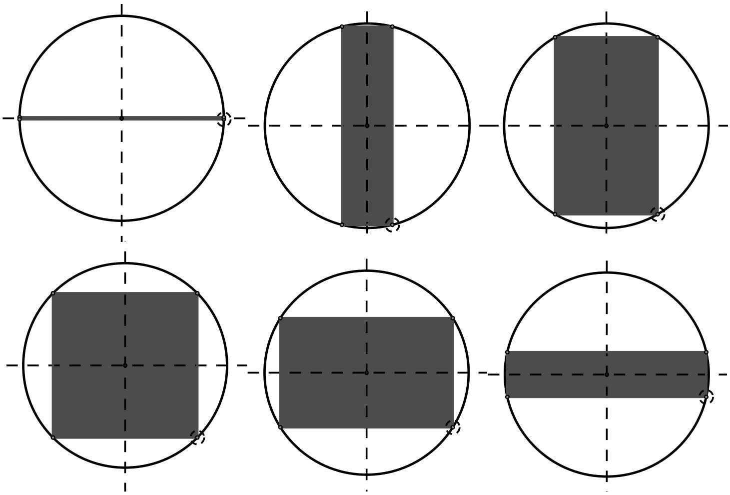


Рис. 2

Метод построения динамических чертежей — моделей конечных симметричных конструкций, основанный на генерировании правильной системы точек, нетрудно перенести и на бесконечные плоские конструкции. В качестве примера построим модель, содержащую три однородные мозаики Кеплера, изображенные на первом рисунке.

На первый взгляд задача может показаться достаточно сложной. Однако заметим, что представленные мозаики имеют один вид симметрии (*p6mm*): центры симметрии 6-го и 2-го порядка, расположенные в центрах квадратов и правильных двенадцатиугольников и образующие бесконечную гексагональную решетку, центры симметрии 3-го порядка, расположенные в центрах правильных треугольников и шестиугольников, а также всевозможные оси симметрии, соединяющие указанные центры. Аналогично первому динамическому чертежу, вначале выделяем на плоскости все элементы симметрии — центры и оси, отвечающие данному виду симметрии. Затем берём произвольную независимую точку и размножаем её симметрическими преобразованиями, соответствующими имеющимся элементам симметрии. Далее, соединяем отрезками каждую точку полученной правильной системы с ближайшей точкой, избегая пересечений. Наш второй динамический чертёж готов (рис. 3). Теперь можно приступить к динамическим экспериментам. При этом можно обнаружить, что построенная модель содержит помимо исходных, ещё три однородных мозаики, итого шесть, а также бесконечное разнообразие неоднородных мозаик. И все это великолепие генерируется одним динамическим чертежом и одной независимой исходной точкой!

В заключении остаётся заметить, что мы построили геометрическую модель неоднородной мозаики всего лишь для одной плоской группы симметрии — *p6mm*. Для других 16-ти видов симметрии построение соответствующих моделей предлагается выполнить самостоятельно. В частности, для группы симметрии *p6* (группа *p6mm* без осей симметрии) может быть получена модель, представленная на обложке этого сборника.

Литература

1. Грюнбаум Б., Шепард Дж. Ч. Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками. Математический цветник. М.: Мир, 1983..
2. The Harmony of the World by Johannes Kepler, American Philosophical Society, 1997.
3. Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников. Квант, 1970. № 3.
4. Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов. Квант, 1979. № 2.
5. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972.

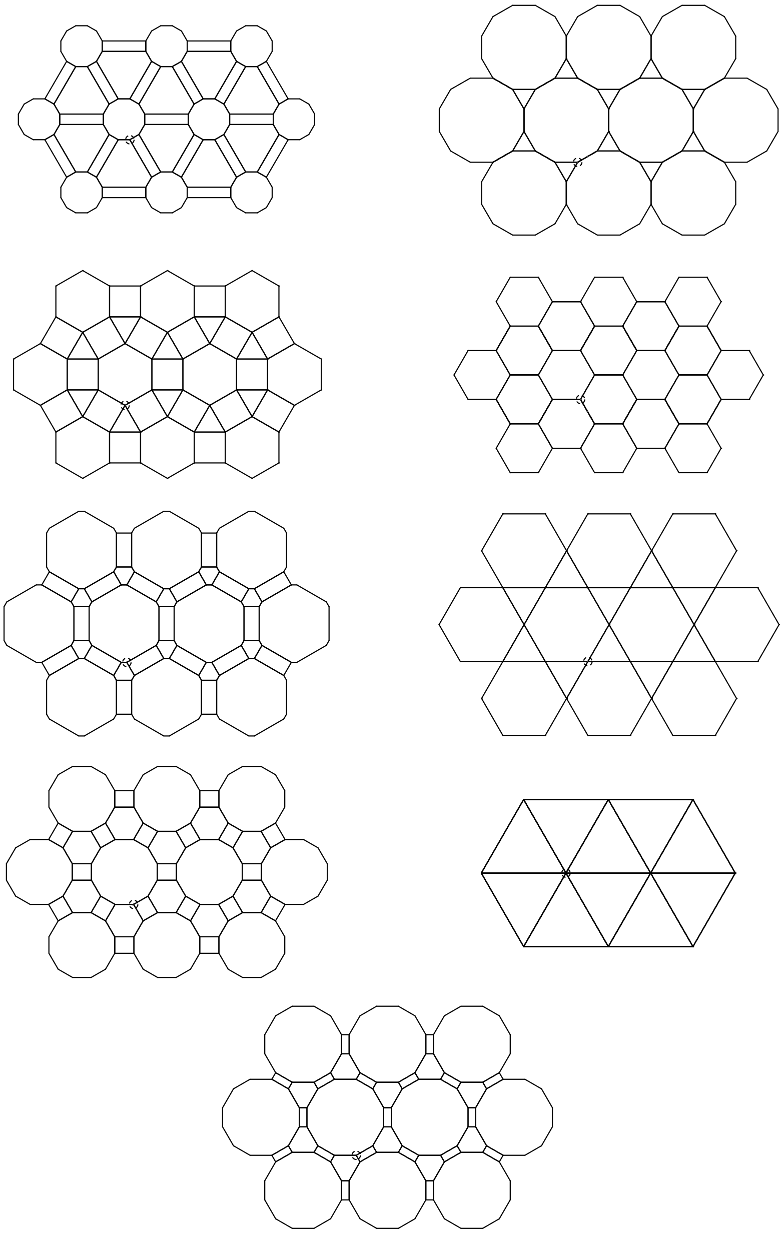


Рис. 3

Избранные задачи геометрии куба

Д. Г. Мухин,
Школа №179, г. Москва

Я преподаю стереометрию в классах самого разного уровня, и, естественно, учебный процесс в них совершенно различен. Однако есть задачи, которые, как мне кажется, подходят и для математического, и для общеобразовательного класса. Главное их достоинство состоит в том, что они одновременно несложны и содержательны. Задачи, представленные в этой заметке, объединяет тематика: все они «про куб». Сразу замечу, что подборка не претендует на новизну — большинство этих задач хорошо известны.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости A_1BD и B_1D_1C перпендикулярны диагонали AC_1 куба и делят ее на три равные части (см. рис. 1).

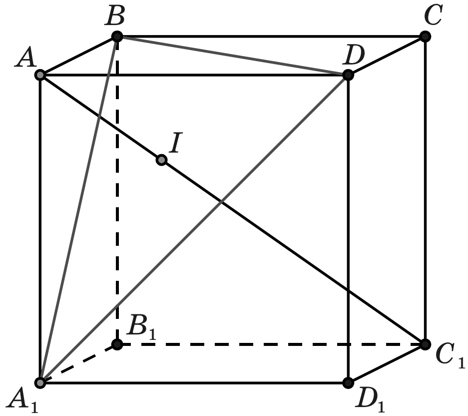


Рис. 1

Решение: Перпендикулярность можно доказывать по-разному. Например, так: по теореме о трех перпендикулярах, $A_1B \perp AC_1$ и

$BD \perp AC_1$. Следовательно, $AC_1 \perp A_1BD$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Аналогично дело обстоит и с плоскостью B_1D_1C. Тот факт, что диагональ делится данными плоскостями на три равные части можно установить прямым вычислением этих отрезков, но мне больше всего нравится такой способ: поставим три одинаковых кубика в ряд, как на рис. 2 и рассмотрим параллельные плоскости, аналогичные тем, о которых идет речь в задаче.

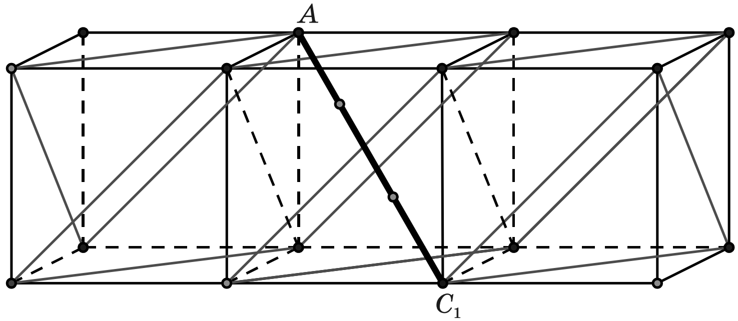


Рис. 2

Ясно, что эти плоскости находятся на равных расстояниях друг от друга (они получаются параллельным переносом на один и тот же вектор). Значит, диагональ AC_1 делится ими на три равные части. □

Примечание: Ясно, что тоже самое доказательство проходит не только для куба, но и для произвольного параллелепипеда. Перпендикулярность, конечно, не сохраняется.

Задача 2. Найти радиус сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. (Такую сферу называют иногда полувписанной).

Решение: Причем здесь куб? Оказывается, он сильно помогает решить задачу. Действительно, рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда ясно, что тетраэдр A_1BC_1D — правильный, с ребром $\sqrt{2}$ (см рис. 3). Понятно, что сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра — это просто сфера, вписанная в куб. Ее радиус равен 0,5. Это и есть ответ. □

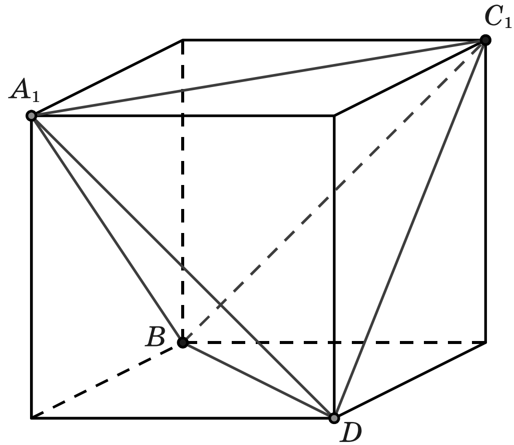


Рис. 3

Еще одна задача про тетраэдр.

Задача 3. Доказать, что отрезки, соединяющие высоту правильного тетраэдра с вершинами основания попарно перпендикулярны.

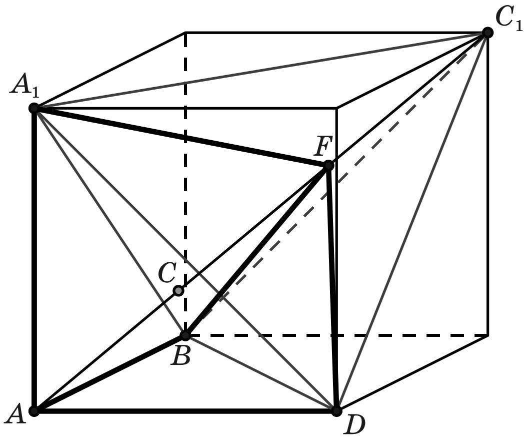


Рис. 4

Решение: Задача, конечно, допускает вычислительное решение: принять ребро тетраэдра за 1, вычислить его высоту, длины искомых отрезков, и применить обратную теорему Пифагора. Но я обязательно показываю школьникам и следующее, чисто иллюстративное решение. Действительно, рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и связанный с ним правильный тетраэдр A_1BC_1D. Пусть точка F — это середина высоты тетраэдра (см. рис. 4). Тогда отрезок AF перпендикулярен плоскости A_1BD и делится ей пополам, а значит пирамиды FA_1BD и AA_1BD равны (это правильные пирамиды с общим основанием и равными высотами). Таким образом, отрезки FA_1, FB и FD попарно перпендикулярны. □

Условие следующей задачи сначала несколько угнетает школьников:

Задача 4. Найти радиус сферы, касающейся всех отрезков, соединяющих середины скрещивающихся ребер единичного куба.

Решение: Если начать рисовать все отрезки, о которых идет речь в задаче, то станет довольно грустно. Однако, если сообразить, что все такие отрезки равноудалены от центра куба, то задача становится несложной, так как достаточно найти расстояние от центра куба до одного такого отрезка. Искомый радиус сферы равен просто радиусу окружности, вписанной в треугольник KLM (см. рис. 5).

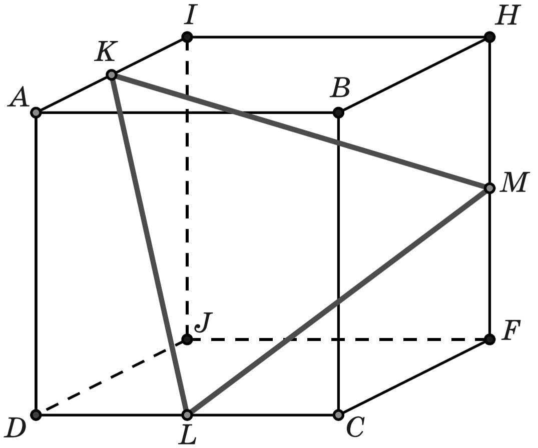


Рис. 5

Сторона такого треугольника легко находится по теореме Пифагора, и равна $\sqrt{3/2}$, значит радиус равен $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. □

Задача 5.

а) Разрезать куб на три равные пирамиды.

б) Разрезать куб на 6 равных тетраэдров.

Решение: а) Ясно, что основаниями пирамид должны быть грани куба. Возьмем три смежные грани и рассмотрим вершину куба, не принадлежащую ни одной из них. Это будет общая вершина трех искомых пирамид, а три смежные грани будут их основаниями.

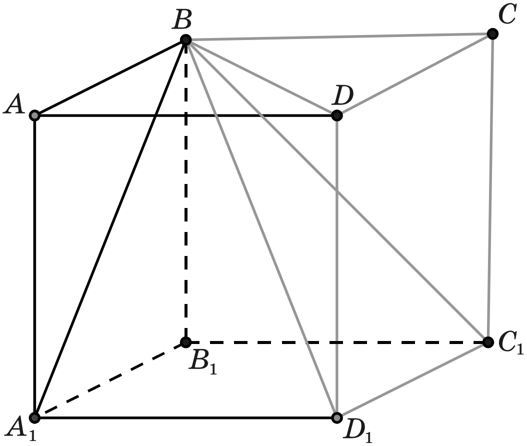


Рис. 6

На рис. 6 одна из искомых пирамид выделена серым цветом.

б) Каждая из полученных четырехугольных пирамид имеет плоскость симметрии. Итак, разрезаем их на две равные треугольные пирамиды (например, пирамиду $BCDC_1D_1$ можно разрезать на тетраэдры $BCDD_1$ и BCC_1D), и задача решена! □

Задача 6. Найти максимальную площадь проекции единичного куба на плоскость.

Решение*:* Для начала, подумаем, какой фигурой может являться проекция куба на плоскость. Если у учеников возникают затруднения, я просто напоминаю, как мы стандартно изображаем куб. Становится ясно, что в общем случае проекцией куба будет шестиугольник (в данном случае $A_1ABCC_1D_1$, см. рис. 7).

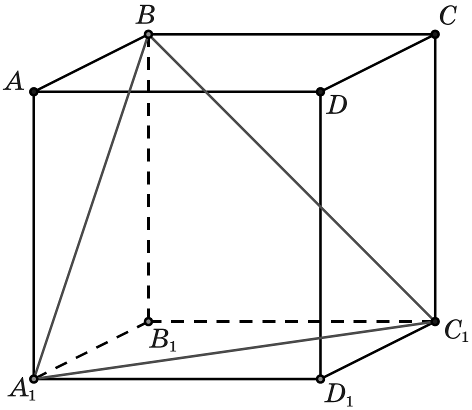


Рис. 7

Когда же его площадь будет максимальной? Заметим, что площадь шестиугольника равна удвоенной площади треугольника A_1BC_1 ($S_{A_1AB} = S_{A_1B_1B}$ и т.д.). Треугольник же A_1BC_1 есть проекция правильного треугольника со стороной $\sqrt{2}$. Ясно, что максимальная площадь этой проекции равна площади такого треугольника, то есть равна $\sqrt{3}/2$. Тогда максимальная площадь проекции куба равна $\sqrt{3}$.

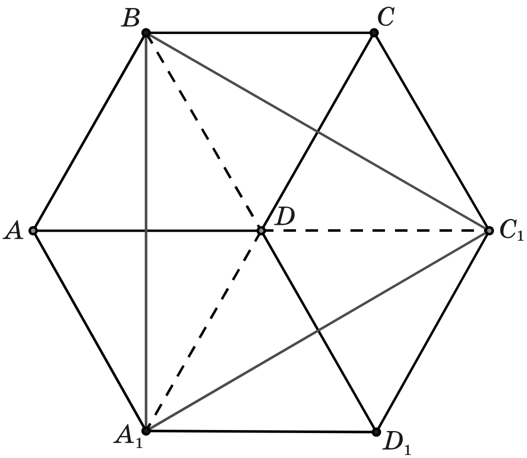


Рис. 8

Заметим, что шестиугольник становится правильным, и плоскость проекции перпендикулярна диагонали куба, см. рис. 8. □

Задача 7. Доказать, что в деревянном кубе с ребром a можно проделать отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.

Решение: Без ограничения общности можно считать, что наш куб единичный. Посмотрим на куб в направлении его диагонали (другими словами, рассмотрим проекцию куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, так, как в предыдущей задаче). Сторона проекции, правильного шестиугольника $A_1ABCC_1D_1$, равна $\sqrt{2/3}$, так как синус угла между диагональю куба и его ребром равен $\sqrt{2/3}$. Радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен половине расстояния между его противоположными сторонами, то есть половине его меньшей диагонали, то есть $r = 0{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2/3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Сторона квадрата, вписанного в такую окружность, равна 1, см. рис. 9.

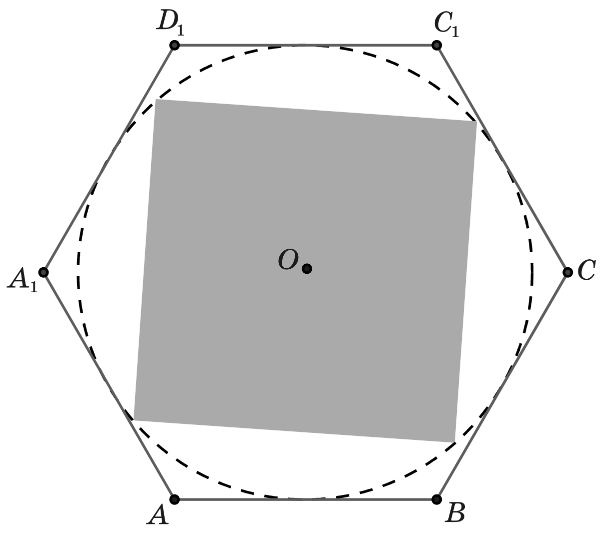


Рис. 9

Таким образом, в данный шестиугольник можно поместить единичный квадрат так, чтобы он не касался сторон шестиугольника. Значит, и в кубе можно сделать отверстие, через которое пролезет еще один куб с ребром 1. □

О некоторых окружностях, связанных с треугольником

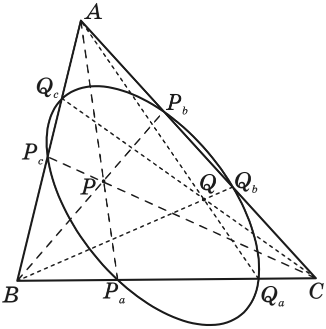
А. Г. Мякишев,
Химический лицей 1303, г. Москва

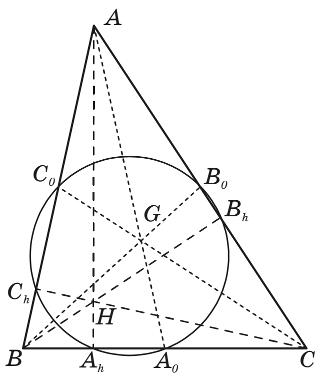
Аннотация доклада, полная версия которого выйдет в журнале «Матобразование» в этом году.

Рассматривая классические окружности, связанные с треугольником, автор обнаружил, что многие из них являются представителями того или иного семейства кривых второго порядка, проходящих через шесть определенных точек, расположенных на прямых, содержащих стороны рассматриваемого треугольника.

Автор систематизировал способы задания этих точек. Каждое семейство коник порождается по определенным правилам произвольной точкой (точками), расположенной в плоскости треугольника. Автор поставил перед собой задачу найти при каких положениях точки (точек) коники вырождаются в окружность.

Рассмотрим классический пример — *окружность Эйлера*. Это окружность, содержащая основания высот и середины сторон треугольника.



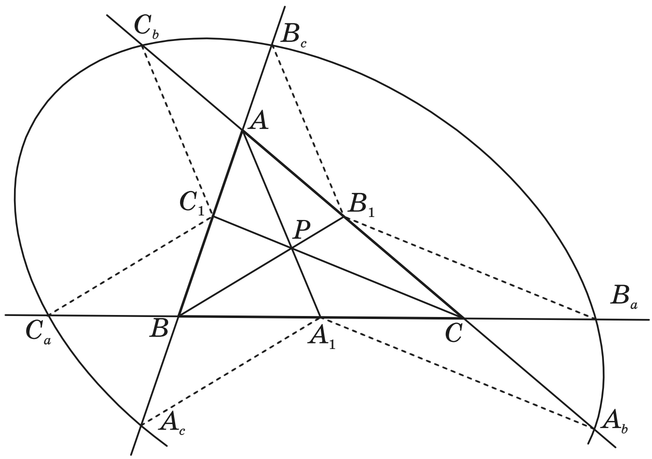


Соответствующее семейство коник образуют коники, содержащие основания чевиан двух произвольных точек. Коника из этого семейства вырождается в окружность Эйлера, если в качестве «стартовых» точек возьмем центроид G и ортоцентр H.

Автор рассматривает и другие способы задания семейства коник. В каждом случае получены системы уравнений в барицентрических координатах для точки, соответствующая коника которой вырождается в окружность. В большинстве случаев аналитически их решить не удалось.

Однако автор придумал конструкцию, аналогичную уже известной, для которой нашел координаты точек, порождающих окружность.

Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, но не лежащая на прямых, содержащих его стороны. Пусть, далее, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$ — основания чевиан этой точки. Через точку A_1 проведем прямые, параллельные чевианам CC_1 и BB_1 — и отметим точки A_b, A_c пересечения этих прямых с прямыми, содержащими стороны AC и AB соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично.



Рассматриваемое семейство коник содержит, если исходный треугольник *ABC* является *неравносторонним*[1], целых *три* различных *окружности* ω_1, ω_2, ω_3, порождаемых (*отсутствующими в ETC* ([1]) точками P_1, P_2, P_3.

Автором указаны некоторые геометрические свойства этих точек.

Литература

1. C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers.
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

[1] Т.е. таким, в котором нет даже пары равных сторон

Теорема Фалеса в окружности

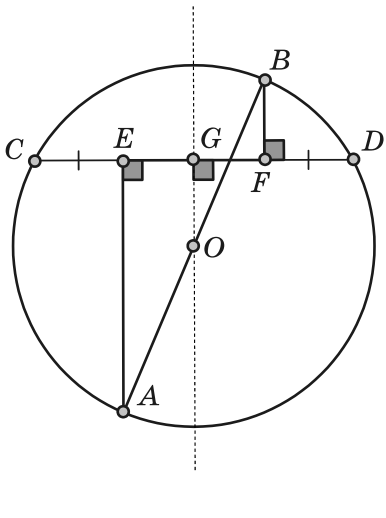
Д. В. Прокопенко,
ФМШ №2007, г. Москва

Однажды, листая книгу по геометрии, я заметил задачу, которая мне понравилась тем, что в один ход сводилась к классической задаче Архимеда о проекции диаметра на хорду. Через некоторое время на региональном этапе 2007–2008 годов дали задачу, которая напомнила классическую конструкцию Архимеда. Вскоре удалось найти еще несколько подобных задач. Оказалось, что все они являются вариациями одной и той же конструкции и решаются одним и тем же приемом. На мой взгляд, это говорит о том, что классические задачи надо знать. Это интересно и полезно!

Перейдем к задачам кружка. В дальнейшем на чертежах для удобства дополнительные построения будут отмечены пунктиром.

Задача 1. В окружности провели диаметр AB. Точки E и F — проекции точек A и B на хорду CD. Доказать, что отрезки CE и DF равны (*Задача Архимеда*).

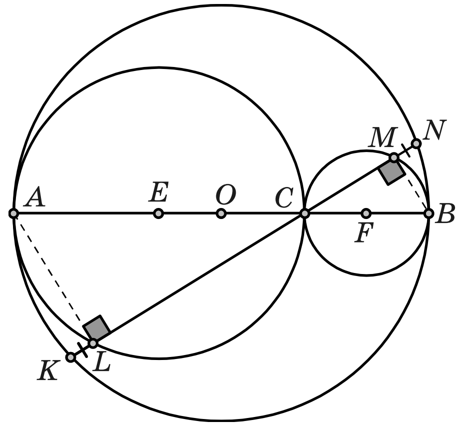
Решение:



Центр окружности точка O — середина диаметра AB. Прямые AE, BF и OG — параллельны. По теореме Фалеса G — середина EF. В равнобедренном треугольнике COD OG — высота и медиана, т.е. G — середина CD. Следовательно, отрезки CE и DF равны. Заметим, что если хорда AB и диаметр CD не пересекаются, то решение все равно останется верным. Этот случай лучше сразу не разбирать, поскольку он ведет к решению задачи 6, а для остальных задач этого вполне достаточно.

Задача 2. Точка C лежит на отрезке AB. На отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, проходящая через точку C, пересекает большую окружность в точках K и N, а меньшие в точках L и M. Докажите, что отрезки KL и MN равны.

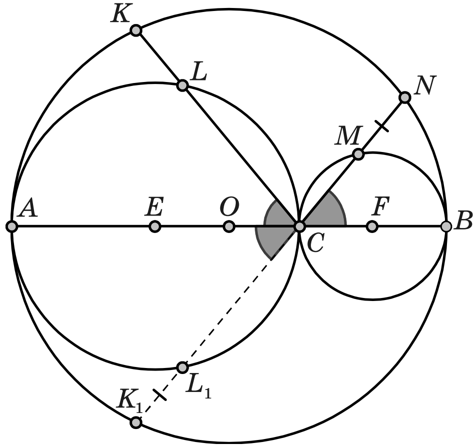
Решение:



Угол, опирающийся на диаметр – прямой, поэтому точки L и M — проекции концов диаметра AB на хорду KN. Тогда по задаче Архимеда отрезки KL и MN равны.

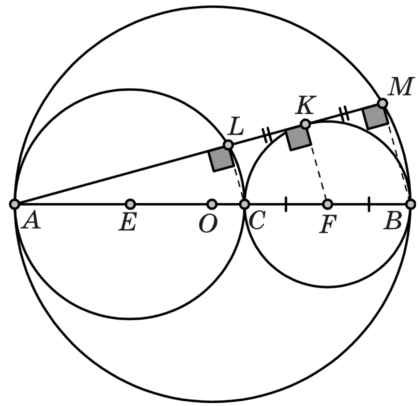
Задача 3. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. На окружности ω выбраны точки K и N, так что они лежат в одной полуплоскости относительно AB, и углы ACK и BCN равны. Отрезки CK и CN пересекают окружности ω_1 и ω_2 в точках L и M соответственно. Докажите, что отрезки KL и MN равны.

Решение:



Отразим отрезок *KC* симметрично относительно прямой *AB*. При этом отрезок *KL* перейдет в K_1L_1, концы которого по-прежнему лежат на окружностях. Заметим, что точки *M*, *N*, K_1 и L_1 лежат на одной прямой. Теперь на чертеже можно узнать задачу 2. Воспользовавшись ее результатом, получим, что $KL = K_1L_1 = MN$, т.е. отрезки *KL* и *MN* равны.

Задача 4. На диаметре *AB* окружности ω выбрана точка *C*. На отрезках *AC* и *BC* как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая *l* пересекает окружность ω в точках *A* и *M*, окружность ω_1 — в точках *A* и *L* и касается окружности ω_2 — в точке *K*. Докажите, что $LK = KM$.



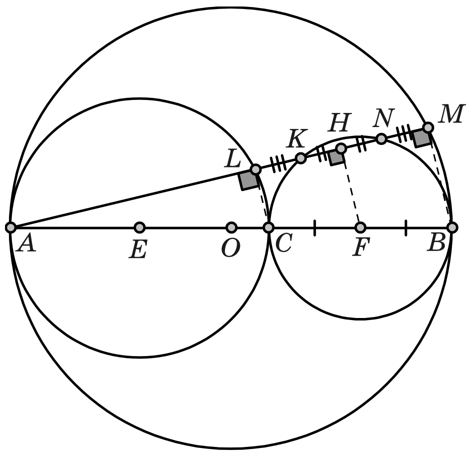
Решение:

Угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому точки *L* и *M* — проекции концов отрезка *BC* на прямую *AM*. Воспользуемся теперь тем, что *AM* — касательная ко второй окружности. Проведем радиус в точку касания. Получим, что прямые *KF* и *AM* перпендикулярны. Тогда по теореме Фалеса отрезки *KL* и *KM* равны.

Следующая задача была предложена участникам регионального тура Всероссийской олимпиады по математике в 10 классе в 2007-2008 годах. Автор задачи — П.Кожевников.

Задача 5. На диаметре *AB* окружности ω выбрана точка *C*. На отрезках *AC* и *BC* как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая *l* пересекает окружность ω в точках *A* и *M*, окружность ω_1 — в точках *A* и *L*, а окружность ω_2 — в точках *K* и *N*. Докажите, что $ME = ND$. ([2], 459)

Решение:



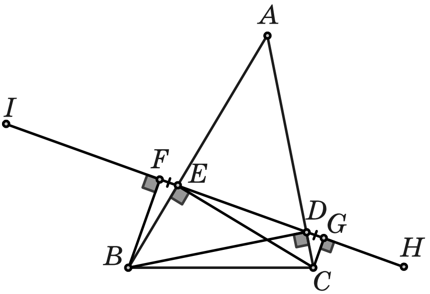
Заметим, что эта задача является обобщением задачи 4, т.к. прямая *AM* была касательной ко второй окружности, а теперь является секущей. Попробуем воспользоваться методом решения вспомогательной задачи и проведем то же дополнительное построение. Пусть точка *H* — проекция центра *F* второй окружности на прямую *AM*. Тогда *H* — середина *KN*.

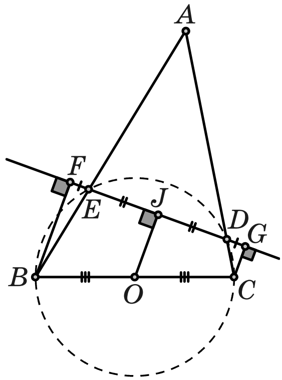
Следующий шаг уже привычный. Угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому точки *L* и *M* — проекции точек *C* и *B* на хорду *AM*. Тогда по теореме Фалеса отрезки *LH* и *HM* равны. Учитывая, что *H* — середина *KN*, получим, что *LK* и *NM* равны.

Задача 6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$ ([3], 2.154).

Решение:

Обычно в 8 классе эту задачу решают не очень хорошо. Но стоит нарисовать окружность, проходящую через точки B, C, D и E и стереть с чертежа высоты, мы получим хорошо знакомую картину: на отрезке BC как на диаметре построена окружность и т.д. (см. рис.) Теперь уже у нас есть необходимый опыт, и решение очевидно. Отрезки EF и DG равны.





В заключение заметим, что с некоторыми школьниками иногда приходится обсуждать уже первую задачу. После обсуждения конструкции остальные задачи даются уже легче. Обычно на решение 4–6 задач уходит около часа, и никто не остается без решенных задач. Школьники уходят в твердой уверенности, что в этот раз они решали очень простые задачи. «Просто тупили немного... « как они говорят, посмеиваясь друг над другом.

Список литературы:

[1] Кушнир И.А. «Триумф школьной геометрии».

[2] Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы, Агаханов Н.Х., и др. М.: Просвещение, 2010.

[3] Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. М.: МЦНМО, 2008.

Непривычный ракурс в задаче без параметров

С. Л. Синякова,
Школа №315, г. Москва

Я сорок раз считал в бреду значенье этой переменной.
Всем благам мира во вселенной я, не смущаясь, предпочту
Решенье маленькой проблемы, что неотступно предо мной…
Я не хочу судьбы иной, другой себе не мыслю темы.
Погибнуть ли во цвете лет, или сулит судьба иначе?
Решу иль нет сию задачу, несчастный вытащив билет?
Сие покрыто мраком ночи. Покуда звезды догорят,
Пишу строку сто раз подряд, в условье опустивши очи…
И вторит мне ночная тишь, и светит лампа, не мигая…
Ответ готов! Но вот другая задача мягко шепчет:
«Спишь?»

Здравствуйте, дорогие читатели!

Как повернуть к себе задачу нужной стороной, увидеть ее с нужной точки зрения, угадать нужную тему и нужный ракурс? Как такое объяснить? Ведь именно этого от нас ждут на уроках…

Думается, что все это — вопросы, на которые можно давать ответы лишь частично, на основании собственного опыта. Конечно, мы с ребятами узнаем на уроках различные способы решения, видим целые методические серии задач, связываем, если повезет, разные разделы курса вместе, смотрим на задачи с разных сторон. Но систематизировать все на свете заведомо не удастся… Алгоритма-панацеи мы никогда не найдем. Одно можно сказать — чем больше разных задач прорешаешь, тем больше и качественней будет багаж и знаний, и методов, и, главное, ассоциаций! Останется лишь творчески подойти со всем накопленным к новой задаче!

В этом тексте мы постараемся привести небольшую серию задач школьного курса алгебры, не самых сложных, а тех, которые подразумевают применение необычных или неочевидных приемов, или же просто требуют умения задать себе вовремя нужный вопрос, что само по себе — довольно сложно и приходит с опытом. Начнем!

Пара симпатичных текстовых задачек, содержащих как неожиданные подводные камни, так и подарки судьбы. Сколько тут переменных?

1. Двое рабочих одного завода получили свои задания на смену. Если бы они поменялись заданиями, то первый выполнил бы задание второго за 9 часов, а второй задание первого — за 4 часа. Какова длительность смены?

Кажется, задача сложная… на самом деле — «суперпростая». Ключевые моменты условия:

1) «Задания на смену» (одну и ту же! И именно ее длительность — вопрос задачи.)

2) «получили *свои* задания» (вероятно, различные).

Если присмотреться, то вводить объемы работ вовсе не обязательно: они прекрасно выражаются через длительность смены (t) и производительности рабочих (v_1 и v_2). Ответ: 6 часов.

2. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 9 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу?

В отличие от предыдущей задачи, здесь константа — не время, а объем работ. Составить систему достаточно просто: пусть производительности рабочих — v_1 и v_2 соответственно, в партии n деталей. Записываем условие в виде уравнений:

$$\frac{n}{2v_1}=\frac{n-24}{v_2},\ \frac{n}{2v_2}=\frac{n-9}{v_1}.$$

Казалось бы, уравнений на одно меньше, чем переменных … Плохо.

Проанализируем ситуацию. На самом деле переменных (настоящих переменных, от которых все зависит) не три, а две! Это объем работ (n) и отношение производительностей $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$. Если перемножить уравнения, останется одно квадратное уравнение относительно переменной n. Из аналогичного равенства находим ответ: 12 деталей.

Ограничения. Что это? Откуда они? Что с этим делать?

Ограничения… Содержатся ли они в условии задачи? Явно (ОДЗ) или как следствие?

А, может быть, мы их обязаны написать как дополнение к следствию исходной задачи, переходя к равносильной системе? Проиллюстрируем вопрос на примере тригонометрии.

Часто в решении задач по тригонометрии мы видим, например, такую запись: $\cos x \neq 0$, или $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. А все ли дети хорошо понимают, что она означает в каждом конкретном случае?

3. Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\cos x} = 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Классический вариант «прямого» ограничения, данного в условии.

Такие ограничения возникают уже при решении дробно-рациональных уравнений.

Фразу «Знаменатель не равен 0» могут воспроизвести даже двоечники (где нужно, и где не нужно — тоже…) Хорошо, если двоечники умеют, например, по кругу, отобрать корни.

4. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$.

Ответ: $\pi(2k+1), k \in Z$.

Почти то же самое, но ограничение скрытое, надо не забыть, что котангенсы должны существовать! Радостно обнаружив, что аргументы обеих частей отличаются только на период, то есть $\frac{3x}{2} = \frac{x}{2} + \pi n, n \in Z$, можно, тем не менее, решить задачу неверно…

Тот же старательный человек, кто запишет и рассмотрит ограничения на оба аргумента, явно переработает: достаточно записать ограничение на один (любой) аргумент, так как второй отличается от него только на период, так что либо оба аргумента одновременно «плохие», либо оба «хорошие».

5. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin 3x}{1-\cos 3x}=-\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Ответ: $\pi+2\pi n, n\in Z$.

Та же ситуация со скрытыми ограничениями.

Радостно успешно применив не самые простые формулы, имеем шанс забыть, что в условии когда-то был еще и тангенс… Да, кстати, к счастью, формулы для левой части ОДЗ не изменяют!

Заметим, что здесь же при решении есть шанс красиво воспользоваться ограниченностью синуса и тем фактом, что синус тройного угла однозначно находится через синус одинарного угла (одно из условий на синусы — либо следствие второго, либо не выполняется).

6. Решите уравнение $\sin^2 x-3\sin x\cos x-4\cos^2 x=0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n; \operatorname{arctg} 4+\pi k, k\in Z, n\in Z$.

Классическое однородное уравнение. Обычно в первой строчке школьного решения написано (хорошо, если написано): $\cos x\neq 0$. Что это? Кто постановил, что косинус — не 0?

Никаких ограничений в условии не стояло…

На самом деле, решающий просто должен был *проверить*, содержит ли уравнение $\cos x=0$ какие-либо решения исходного уравнения. Если содержит, то делить на косинус нельзя, и нужно разбивать задачу на случаи.

Так. Проверили. Не содержит. Теперь, в процессе нахождения остальных x, можно разделить на квадрат косинуса.

7. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{16}$.

Для решения задачи надо преобразовать левую часть уравнения. А для этого придется произвести одно из двух «нехороших» действий (связанных с неравносильными переходами различного характера):

1) Домножить и разделить левую часть уравнения на выражение с переменной $16\sin\frac{x}{2}$ и, возможно, *потерять* корни.

2) Домножить обе части уравнения на выражение с переменной $16\sin\frac{x}{2}$ и, возможно, *приобрести* лишние (посторонние) корни.

Проведем полное решение:

Проверим, получим ли мы уравнение, равносильное исходному, если домножим обе части на $16\sin\frac{x}{2}$. (Домножив левую часть, мы свернем ее «гармошкой» по формуле синуса двойного угла и получим слева $\sin 8x$.)

Надо выяснить, содержит ли уравнение $\sin\frac{x}{2}=0$ корни исходного уравнения.

Пусть x — решение уравнения $\sin\frac{x}{2}=0$.

Тогда $\cos\frac{x}{2}=\pm 1$, $\cos x = 2\cdot 1 - 1 = 1$, $\cos 2x = 1$, $\cos 4x = 1$, и модуль левой части исходного уравнения равен 1, а вовсе не $1/16$. Значит, уравнение $\sin\frac{x}{2}=0$ не дает корней исходного, и, домножив на синус, мы приобретаем лишние (посторонние) корни. Их надо отсечь, записав в равносильную систему ограничение:

$$\begin{cases} \sin 8x = \sin\dfrac{x}{2} \\ \sin\dfrac{x}{2} \neq 0 \end{cases}.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}8x=\dfrac{x}{2}+2\pi n,\ n\in Z\\ 8x=\pi-\dfrac{x}{2}+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.\\ x\neq 2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4\pi n}{15},\ n\in Z\\ x=\dfrac{2\pi}{17}+\dfrac{4\pi k}{17},\ k\in Z\end{array}\right.\\ x\neq 2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$$

Теперь надо провести отбор корней, решив уравнения в целых числах:

1) $x=\dfrac{4\pi n}{15}=2\pi m$; $2n=15m$; $m=2l$, $l\in Z$; $n=15l$ — «запрещенные» значения.

2) $x=\dfrac{2\pi}{17}+\dfrac{4\pi k}{17}=2\pi m$; $1+2k=17m$; $m=2p+1$, $p\in Z$; $k=17m+8$ — «запрещенные» значения.

Ответ: $\dfrac{4\pi n}{15}$, $n\neq 15l$ **;** $\dfrac{2\pi}{17}+\dfrac{4\pi k}{17}$, $k\neq 17m+8$, $k,l,m,n\in Z$.

8. Решите уравнение:

$$\sqrt[315]{\operatorname{tg}^2 3x+10}-\frac{1}{(\operatorname{tg}^2 3x+10)^{2012}}=\sqrt[315]{\operatorname{ctg} 6x+10}-\frac{1}{(\operatorname{ctg}^2 6x+10)^{2012}}.$$

Очевидна двойная замена — подкоренные выражения обозначаем на a и b.

Вводим $f(x)=\sqrt[315]{x}-x^{2012}$. Она возрастает в области $x>0$. (У нас $a,b>0$).

Значит, исходное уравнение $f(a)=f(b)$ равносильно уравнению $a=b$, тогда $\operatorname{tg}^2 3x=\operatorname{ctg}^2 6x$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{9},\ n\neq 3k+1,\ k\in Z,\ n\in Z$.

Кстати, еще немного о функциях. Обратимая возрастающая…

9. Решите уравнение $\sqrt{5+\sqrt{5+x}}=x$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{5+x}$. На множестве $[-5;+\infty)$ функция f возрастает, следовательно, обратима. Тогда уравнения $f\big(f(x)\big)=x$, $f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)=x$ равносильны.

Итак, исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{5+x}=x$, откуда $x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Предоставляем уважаемому читателю самостоятельно довести до ответа $\{\pm\sqrt{3};1;0{,}5(-1+\sqrt{17})\}$ следующий пример:

10. Решите уравнение

$$\sqrt{-x^4+2x^2+3}\cdot(5\cdot\sqrt[3]{5x-4}-x^3-4)=0\,.$$

Немного геометрии в алгебре.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x+2y$**, если** $4x^2+y^2=3$**.**

а) Классический алгебраический способ решения задачи — обозначить интересующую величину $x+2y=t$, ввести ее в данное уравнение вместо одной из переменных , выразив эту переменную, ($x=t-2y$; $4(t-2y)^2+y^2=3$) , затем рассмотреть уравнение относительно оставшейся старой переменной (y) с параметром t и выяснить, когда оно имеет решения:

$$17y^2-16ty+4t^2-3=0$$

$$\frac{D}{4}=64t^2-17(4t^2-3)=-4t^2+51\ge 0$$

$$t=(x+2y)\in\left[-\frac{\sqrt{51}}{2};\frac{\sqrt{51}}{2}\right]$$

Ответ: $\max(x+2y)=\dfrac{\sqrt{51}}{2}$ $\min(x+2y)=-\dfrac{\sqrt{51}}{2}$.

б) Попробуем посмотреть на условие «с другой стороны». Точнее, с другой точки зрения.

Данное уравнение задает эллипс. Ох, просим прощения, школьники могут не знать, что это такое… Тогда сделаем замену: $2x=z$. Теперь у нас не эллипс, а окружность!

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{z}{2}+2y$**, если** $z^2+y^2=3$**.**

Или так: **При каком наибольшем и каком наименьшем значении** b **прямая** $\frac{z}{2}+2y=b$ **имеет хотя бы одну общую точку с окружностью** $z^2+y^2=3$ **?**

Далее любым способом (алгебраически, геометрически или с применением матанализа) «ловим» самую верхнюю и самую нижнюю из прямых семейства $y=-\frac{z}{4}+\frac{b}{2}$, «задевающие» окружность, — две касательные, — и даем ответ.

в) Рассмотрим вектор $\overline{a}(2x;y)$. Тогда по условию его длина равна $\sqrt{3}$. Что же такое $x+2y$? Надо догадаться интерпретировать эту величину как скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}\left(\frac{1}{2};2\right)$. Вспомним формулу $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. Косинус угла между векторами изменяется от –1 до 1, значит, наименьшее значение скалярного произведения противоположно произведению модулей, а наибольшее равно произведению модулей.

$$\min(x+2y)=-|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+4}=-\frac{\sqrt{51}}{2}$$

$$\max(x+2y)=\frac{\sqrt{51}}{2}$$

Ответ тот же.

12. Решите уравнение $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$ **.**

В этой задаче довольно сложно догадаться до геометрической картинки. Во всяком случае, если человек не знает неравенства Коши-Буняковского:

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2),$$

$$\text{или } |a_1b_1+\ldots+a_nb_n|\le\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}\ .$$

Смысл: модуль скалярного произведения двух векторов не превосходит произведения длин этих векторов.

Действительно, $|\overline{a}\cdot\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot|\cos\angle(\overline{a};\overline{b})|\leq|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$, так как $|\cos\angle(\overline{a};\overline{b})|\leq 1$. Заметим, что равенство достигается в случае $|\cos\angle(\overline{a};\overline{b})|=1$, то есть векторы должны быть коллинеарными. Технические подробности оставляем читателю, который, надеемся, и получит ответ $x=5$.

13. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2+4}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(y-3)^2+9}\,.$$

У много прорешавшего ученика наверняка возникают красивые ассоциации с окружностями, тригонометрией, теоремой Пифагора, расстояниями на координатной плоскости. Выберем нужное.

Рассмотрим четыре точки:

$$O(0;0),\ A(x;y),\ B(x+3;3),\ C(12;5);$$

$$OA=\sqrt{x^2+y^2};\ AB=\sqrt{(y-3)^2+9};\ BC=\sqrt{(x-9)^2+4}\,.$$

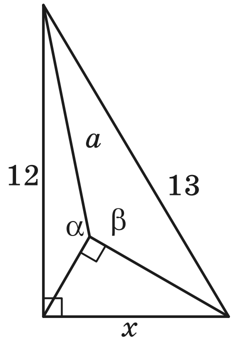
Выражение, которое надо минимизировать, есть длина ломаной *OABC* с фиксированными концами $O(0;0)$ и $C(12;5)$. Если удастся ее выпрямить, то есть поместить точки *A* и *B* на отрезок (не на прямую!) *OC*, то наименьшей длиной станет длина отрезка *OC* $\sqrt{12^2+5^2}=13$. Очевидно, тогда длины любых других ломаных *OABC* будут больше.

Выясним, можно ли найти такие x, y, чтобы точки $A(x;y)$, $B(x+3;3)$ оказались на прямой *OC* с уравнением $y=\dfrac{5}{12}x$, или $12y-5x=0$, причем между *O* и *C*. Дальнейшее несложно.

14. Найдите величину $xy+3yz+2xz$, если x, y, z положительны и для них выполняется система условий

$$\begin{cases} x^2+a^2+\sqrt{3}xa=144 \\ x^2+b^2=25 \\ a^2+b^2+ab=169 \end{cases}$$

Можно долго пытаться выражать, складывать и проделывать алгебраические манипуляции. Однако, здесь *геометрическая* картинки. Вызываем ассоциации.



Что это за уравнения?

Правильно, теорема Пифагора в средней строке (да и в правых частях тоже…) и дважды теорема косинусов!

А что спросили? С точностью до множителя — площадь большого треугольника!

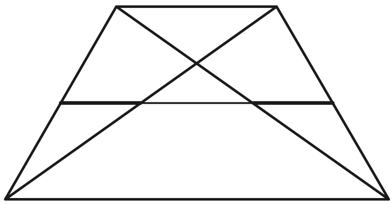
$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha = 150°;\ \cos\beta = -\frac{1}{2},\ \beta = 120°.$$

Ответ: $40\sqrt{3}$.

Несколько задач, которые проще, чем кажутся — задачи «*не про то*».

15. В трапеции средняя линия разбивается диагоналями на отрезки длин 1,2,3. Нет ли ошибки?

Конечно, ошибка есть.

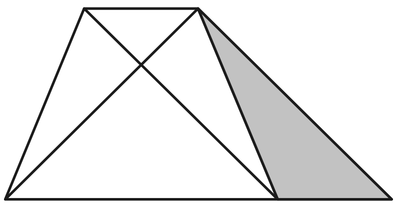


На самом деле два крайних отрезка равны половине меньшего основания, и они не могут иметь различные длины.

Задача на трапецию при ближайшем рассмотрении трансформировалась в задачу о средней линии треугольника.

16. Диагонали трапеции равны 17 и 113, высота трапеции 15. Найдите площадь трапеции.

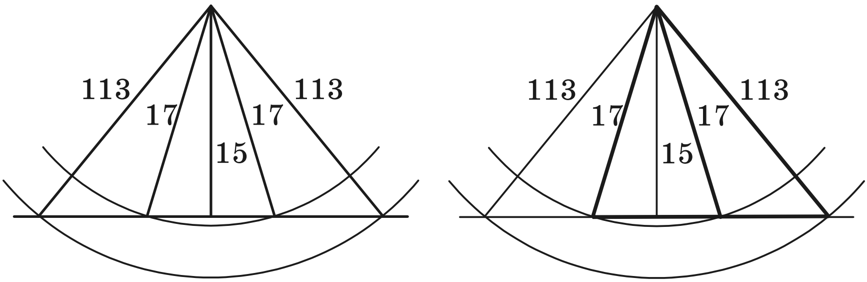
Дело в том, что задача опять не на трапецию, а на треугольник! Для каждой трапеции легко найти такой «волшебный» треугольник, который по площади равен трапеции и связан с ее диагоналями. (В трапеции много хороших дополнительных построений, надо выбрать



нужное: перенести одну из диагоналей параллельно себе в один из концов второй диагонали.)

В «волшебном» треугольнике даны две стороны и высота, проведенная к третьей стороне или ее продолжению. Самое время вспомнить о задачах на построение. Сколько таких треугольников можно построить?

(Конечно, мы учитываем, что 15<17<113.)



Видим, что таких треугольников (существенно различных) два; решить же задачу до ответа поможет теорема Пифагора.

Длины оснований (на рисунке — горизонтальных сторон треугольников):

$$a=\sqrt{113^2-15^2}+\sqrt{17^2-15^2}=112+8=120$$

$$a=\sqrt{113^2-15^2}-\sqrt{17^2-15^2}=112-8=104$$

Тогда площади «волшебных» треугольников (а, значит, и трапеций) 900 и 780 соответственно.

Ответ: 900; 780.

17. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость, равноудаленная ото всех вершин пирамиды. Сечение пирамиды этой плоскостью делит боковую поверхность пирамиды на части, отношение которых равно простому числу. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к основанию.

Для начала выясним, что это загадочная плоскость.

Первое, что приходит на ум, — плоскость, проведенная через середину высоты пирамиды параллельно основанию.

Но, если подумать, то сразу возникает и другой вариант — плоскость, параллельная не основанию, а боковой грани!

Хотя и это еще не все варианты. Вообще, в произвольном тетраэдре плоскостей, равноудаленных ото всех вершин, 7. Откуда же берутся остальные?

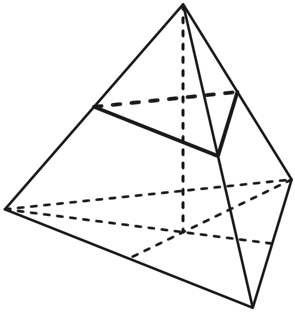


Рис. 1

Попробуем систематизировать поиск.

Конечно, все вершины пирамиды находятся на одинаковом расстоянии от плоскости, но плоскость делит пространство на два полупространства, и вершины могут располагаться как в одном полупространстве, так и в другом. Конечно, не все четыре — в одном….

Тогда возможны варианты: $3+1$ (это мы уже видели) и $2+2$. Эти плоскости и надо реализовать!

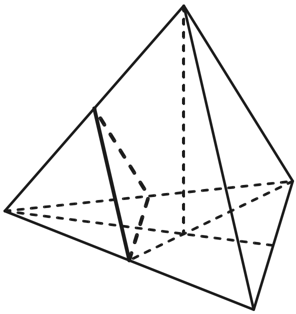


Рис. 2

Да, добавим, что если две вершины равноудалены от плоскости, то плоскость проходит через середину ребра, соединяющего эти вершины.

Теперь понятно, откуда семь: параллельно каждой грани (граней четыре) и параллельно паре скрещивающихся ребер (таких пар три). Оказывается, вопрос был легким….

Теперь — к простым числам. Надо сообразить, как найти это простое число.

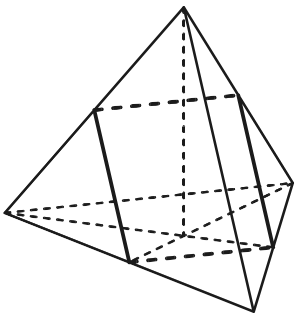


Рис. 3

Связать с углом наклона — проще: проекция каждой боковой грани на основание — треть основания, а ее площадь получается из площади боковой грани умножением на косинус угла при ребре основания.

Обозначим площадь боковой грани S_b, а площадь основания — S_o. Искомый угол — α, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Рис. (1):

$$S_1 = 3 \cdot \frac{1}{4} S_b ; \; S_2 = 3 \cdot \frac{3}{4} S_b + S_o ,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{3 \cdot \frac{3}{4} S_b + S_o}{3 \cdot \frac{1}{4} S_b} = \frac{9 + 4 \frac{S_o}{S_b}}{3} = 3 + 4 \cdot \frac{S_o}{3S_b} = 3 + 4\cos\alpha .$$

$\cos\alpha \in (0;1)$; $\frac{S_2}{S_1} \in (3;7)$. В полученном интервале есть одно простое число — 5. $\frac{S_2}{S_1} = 3 + 4\cos\alpha = 5$; $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Рис. (2):

$$S_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} S_b + \frac{1}{4} S_o ; \; S_2 = 2 \cdot \frac{3}{4} S_b + \frac{3}{4} S_o ,$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} S_b + S_b + S_o}{2 \cdot \frac{1}{4} S_b + \frac{1}{4} S_o} = \frac{10 + 9 \frac{S_o}{3S_b}}{2 + 3 \frac{S_o}{3S_b}} = \frac{10 + 9\cos\alpha}{2 + 3\cos\alpha} = 3 + \frac{4}{2 + 3\cos\alpha} .$$

$\cos\alpha \in (0;1)$; $\frac{S_2}{S_1} \in \left(3\frac{4}{5}; 5\right)$. Здесь простых чисел нет.

Рис. (3):

$$S_1 = 2 \cdot \frac{3}{4} S_b + \frac{1}{4} S_b + \frac{1}{4} S_o = 3S_b + \frac{1}{4} S_o ;$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} S_b + \frac{3}{4} S_o = \frac{5}{4} S_b + \frac{3}{4} S_o .$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3S_b + \frac{1}{4} S_o}{\frac{5}{4} S_b + \frac{3}{4} S_o} = \frac{12 + 3\cos\alpha}{5 + 9\cos\alpha} = \frac{1}{3} + \frac{31}{27\cos\alpha + 15} .$$

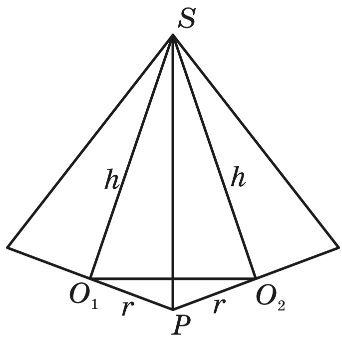
$\cos\alpha \in (0;1)$; $\frac{S_1}{S_2} \in \left(\frac{1}{3} + \frac{31}{42}; \frac{1}{3} + \frac{31}{15}\right) = \left(\frac{15}{14}; \frac{12}{5}\right)$.

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{12+3\cos\alpha}{5+9\cos\alpha}=2\ ;\ \cos\alpha=\frac{2}{15}\ ;\ \alpha=\arccos\frac{2}{15}\,.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $\arccos\frac{2}{15}$.

18. Два равных конуса с общей вершиной (радиус основания *R*, высота *H*) касаются друг друга по образующей и касаются некоторой плоскости, располагаясь с одной стороны от нее. Найдите угол наклона к этой плоскости прямой, по которой пересекаются плоскости оснований конусов.

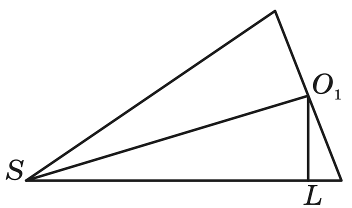
Попытки сделать подробный чертеж и изобразить именно ту прямую, о которой идет речь в задаче, обычно школьникам не удаются. Впрочем, это и не нужно. Достаточно понять, о чем именно спросили в задаче.

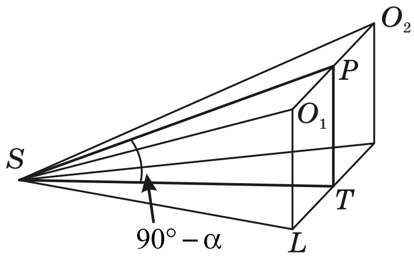


Искомая прямая находится в обеих плоскостях оснований конусов, следовательно, перпендикулярна обеим высотам.

Прямая — нормаль к плоскости осей конусов!

Найдя угол наклона этой «осевой» плоскости к плоскости из условия, мы найдем и искомый угол (это два острых угла прямоугольного треугольника).





$$O_1L=PT=\frac{RH}{\sqrt{R^2+H^2}}\,,\ SP=\frac{SO_1^2}{SR}=\frac{H^2}{\sqrt{H^2+R^2}}\,,$$

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{PT}{SP} = \frac{\dfrac{RH}{\sqrt{R^2 + H^2}}}{\dfrac{H^2}{\sqrt{H^2 + R^2}}} = \frac{R}{H}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{R}{H}$.

Ну, вот и все… Закончилось наше маленькое путешествие. Остается сказать читателю: спасибо за внимание! Надеемся, Вы и дальше будете внимательны, и сумеете разглядеть в задачах много интересного!

Детки решают лучше!

Г. Б. Филипповский,
Русановский лицей, г. Киев

При решении задач нам часто приходится изумляться всевозможным детским находкам и идеям, нетривиальности мышления и оригинальности подхода учащихся! Ещё бы: у них молодые тренированные мозги, не обременённые стереотипами и клише!

Поэтому нередко детские решения переигрывают решения взрослых своей свежестью, оригинальностью, смелостью, математическим озорством, если хотите.

В результате собирания детских находок сложилась любопытная подборка задач, небольшая часть которых выносится на Ваш суд, дорогой читатель!

Задачи в основном известные и не столь трудные, но их решения придуманы детьми и отличаются от общепринятых.

Согласитесь, что это счастливые минуты учительской жизни, когда мы, обучая детей, восхищаемся ими и учимся у них!

Задача 1. Дана прямая l и точка A вне прямой (рис.1). С помощью циркуля и линейки постройте прямую, параллельную l и проходящую через точку A.

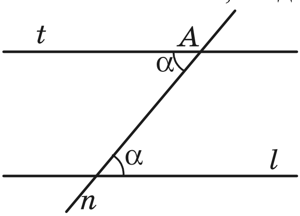


Рис. 1

Решение. Через точку A проведем прямую n под произвольным углом, например, α, к прямой l. От точки A откладываем угол, равный проведенному углу α. Очевидно, что прямая t — искомая.

Задача 2. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке I (рис.2). Докажите, что $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$.

Решение. Проведем через точку I прямые EF и KN, параллельные соответственно AB и AC.

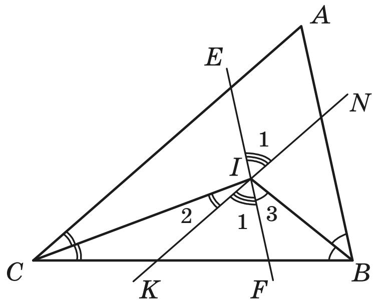


Рис. 2

Очевидно, что $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle ACI = \dfrac{\angle C}{2}$ (внутренние накрест лежащие), $\angle 3 = \angle ABI = \dfrac{\angle B}{2}$ (то же самое). Тогда

$$\angle BIC = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle A + \frac{B+C}{2} =$$
$$= \frac{(A+B+C)+A}{2} = \frac{180^\circ + \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$

Задача 3. Постройте биссектрису угла A, вершина которого недоступна (Евклид).

Решение. Проведем B_1C_1 — произвольно (рис.3). Очевидно, что $\varphi_1 + \varphi_2 = const$ (так как $\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ - \angle A$ в треугольнике AB_1C_1). Отложив от любой точки, например, B_2, угол $\alpha = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, получим воображаемый равнобедренный треугольник AB_2C_2. Тогда серединный перпендикуляр к B_2C_2 совпадет с биссектрисой угла A.

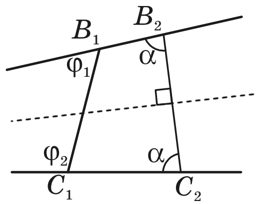


Рис. 3

Задача 4. Дана окружность, центр которой не известен. Построением определите её центр (Евклид).

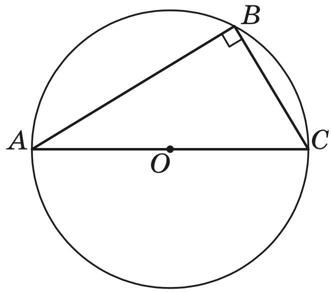


Рис. 4

Решение. Проведём произвольно хорду AB, а затем перпендикулярно к ней — хорду BC (рис.4). Тогда очевидно, что AC — диаметр. Остаётся разделить с помощью циркуля и линейки отрезок AC пополам.

Задача 5. Дан угол *AOB*. Из точки *O* как из центра радиусом $OA = OB = R$ проведена окружность. Прямая *BC* пересекает прямую *AO* в точке *D* так, что $CD = R$ (рис.5). Докажите, что $\angle AOB = 3\angle ADB$ (Архимед).

Решение. Согласно рис.5 необходимо доказать, что $x = 3\alpha$.

Воспользуемся известной задачей об угле с вершиной вне круга (рис.6).

Поскольку (вернёмся к рис.5) $\cup AB = x$ и $\cup CE = \alpha$, то по задаче об угле с вершиной вне круга: $\alpha = \dfrac{x-\alpha}{2}$, откуда $x = 3\alpha$.

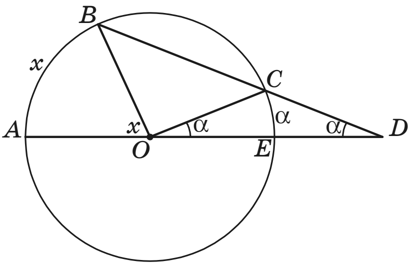


Рис. 5

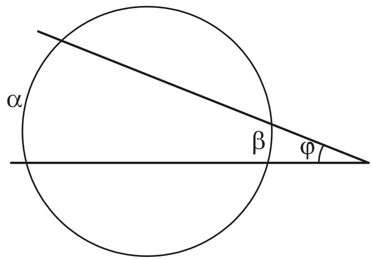


Рис. 6

Задача 6. Хорды *AB* и *CD* окружности, пересекаясь в точке *E*, делятся в ней пополам (рис.7). Докажите, что *E* — центр окружности.

Решение. Поскольку диагонали четырехугольника *ACBD* в точке пересечения делятся пополам, то *ACBD* — параллелограмм. Пусть $AE = BE = a$ и $CE = DE = b$. По формуле произведения отрезков хорд $a \cdot a = b \cdot b$ или $a = b$ и $2a = 2b$, т.е. в параллелограмме *ACBD* диагонали равны, значит, *ACBD* — прямоугольник. А тогда *AB* и *CD* – диаметры и $E \equiv O$, где *O* — центр окружности.

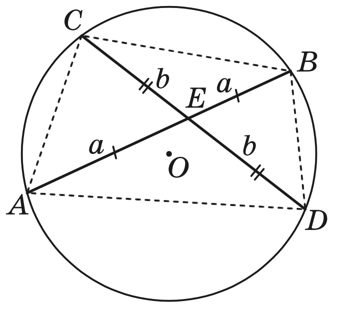


Рис. 7

Задача 7. Докажите, что из двух хорд больше та, которая ближе к центру.

Решение. Пусть хорда $AB = 2a$ удалена от центра на расстояние d_1, а $CD = 2b$ — на d_2 (рис.8). Пусть также $d_1 < d_2$.

Известно, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Пусть $AE = BE = a$ и $CF = DF = b$.

$a^2 = R^2 - d_1^2$ и $b^2 = R^2 - d_2^2$. Тогда $a > b$ (т.к. $d_1 < d_2$) или $2a > 2b$, что и требовалось доказать.

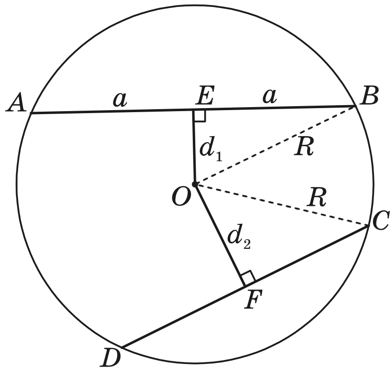


Рис. 8

Задача 8. Постройте равносторонний треугольник с вершинами на трёх данных параллельных прямых.

Решение. Анализ показывает, что если из точки C как из центра описать окружность радиусом, равным стороне треугольника, то она пересечет первую прямую в точках A и D. Пусть одна из точек пересечения окружности с третьей прямой — точка B (рис.9). Причём, $\angle ADB = 30°$ (вписанный равен половине центрального угла ACB).

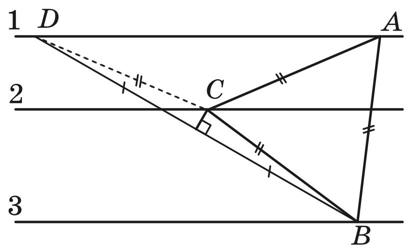


Рис. 9

Отсюда построение: из произвольной точки D на первой прямой под углом 30° к ней проведем прямую, которая пересечёт третью прямую в точке B. Серединный перпендикуляр к BD при пересечении со второй прямой даст точку C.

Дальнейшее очевидно.

Задача 9. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает прямую K_2K_3 в точке T (рис.10). Найдите угол BTC.

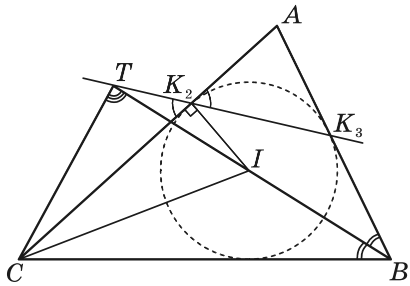


Рис. 10

Решение. Пусть I — инцентр в треугольнике ABC. Тогда $\angle BIC = 90° + \dfrac{\angle A}{2}$ (см. задачу 2), а смежный с ним $\angle CIT = 90° - \dfrac{\angle A}{2}$.

Кроме того,

$$\angle AK_2K_3 = \angle AK_3K_2 = \frac{180° - \angle A}{2} = 90° - \frac{\angle A}{2}.$$

Тогда и $\angle TK_2C = 90° - \dfrac{\angle A}{2}$ (как вертикальный).

Поскольку $\angle TK_2C = \angle CIT$, то точки T; K_2; I; C принадлежат одной окружности. Причём, диаметром этой окружности является отрезок IC (т.к. $\angle IK_2C = 90°$). Но тогда и $\angle ITC = 90°$ (вписанный, опирается на диаметр). Следовательно, угол BTC, совпадающий с углом ITC, равен 90°.

Задача 10. Докажите, что полупериметр ортоцентрического треугольника ($\Delta H_1H_2H_3$) вычисляется по формуле: $p_H = \dfrac{S}{R}$, где S — площадь остроугольного треугольника ABC (рис.11).

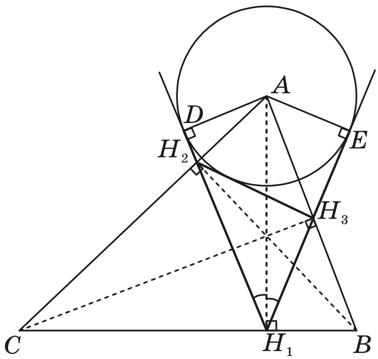


Рис. 11

Решение. Известно, что углы ортоцентрического треугольника равны $180° - 2\angle A$; $180° - 2\angle B$; $180° - 2\angle C$, а высоты в треугольнике ABC являются биссектрисами в треугольнике $H_1H_2H_3$ (Докажите!). Стороны AB и AC являются внешними биссектрисами для треугольника $H_1H_2H_3$, а вершина A — центром вневписанной окружности.

Тогда $H_1D = H_1E = p_H$.

Из треугольника ADH_1:

$$DH_1 = AH_1 \cdot \cos\angle AH_1D \text{ или}$$

$$p_H = h_a \cdot \cos(90° - \angle A) = h_a \cdot \sin\angle A.$$

Но $\sin\angle A = \dfrac{a}{2R}$ (по теореме синусов). Тогда

$$p_H = \frac{ah_a}{2R} = \frac{2S}{2R}, \text{ или } p_H = \frac{S}{R}.$$

Задача 11. Известно, что в треугольнике ABC $a \neq b$ и $a \cdot l_a = b \cdot l_b$. Найдите величину угла C.

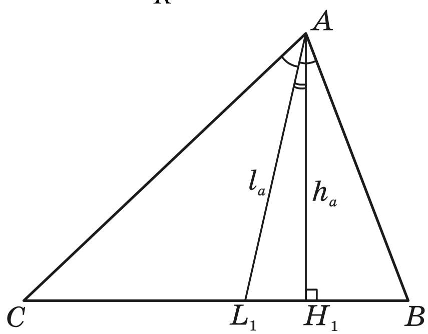


Рис. 12

Решение. Нетрудно показать, что угол между h_a и l_a равен $\dfrac{|\angle B - \angle C|}{2}$ (докажите!). Тогда $h_a = l_a \cdot \cos\dfrac{|\angle B - \angle C|}{2}$. Аналогично, угол между h_b и l_b равен $\dfrac{|\angle A - \angle C|}{2}$ и $h_b = l_b \cdot \cos\dfrac{|\angle A - \angle C|}{2}$.

Однако, $a \cdot h_a = b \cdot h_b = 2S$, или

$$a \cdot l_a \cdot \cos\frac{|\angle B - \angle C|}{2} = b \cdot l_b \cdot \cos\frac{|\angle A - \angle C|}{2}.$$

Согласно условию, $a \cdot l_a = b \cdot l_b$. Тогда

$$\cos\frac{|\angle B - \angle C|}{2} = \cos\frac{|\angle A - \angle C|}{2}$$

и возможны два варианта:

1) $\angle B - \angle C = \angle A - \angle C$, или $\angle A = \angle B$ и $a = b$, что противоречит условию.

2) $\angle B - \angle C = \angle C - \angle A$, или $2\angle C = \angle A + \angle B$, или

$$3\angle C = \angle A + \angle B + \angle C = 180°,$$

откуда $\angle C = 60°$.

Этюд о теореме Лейбница

Г. Б. Филипповский,
Русановский лицей, г. Киев

Настоящая статья преследует главным образом две цели:

1) воздать благодарность великому немецкому ученому *Готфриду Вильгельму Лейбницу* (1646 – 1716) за прекрасную теорему геометрии;

2) продемонстрировать применение теоремы *Лейбница* при решении широкого спектра геометрических задач, включая олимпиадные.

Итак, теорема *Лейбница.* Расстояния от любой точки плоскости X до вершин треугольника ABC и до его центроида M связаны соотношением

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

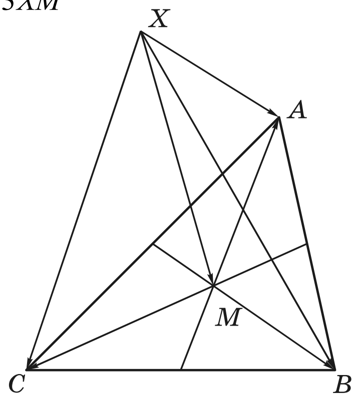


Рис. 1

Существует несколько доказательств теоремы Лейбница, среди которых наиболее простым и изящным представляется векторное. Приведем его.

Доказательство: См. рис 1:

$$\overline{XA} = \overline{XM} + \overline{MA}$$
$$\overline{XB} = \overline{XM} + \overline{MB}$$
$$\overline{XC} = \overline{XM} + \overline{MC}$$

Возведем обе части каждого равенства в квадрат, сложим их и, воспользовавшись известным векторным соотношением $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$, получим:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = 3XM^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 +$$
$$+ 2XM(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

Покажем, как «работает» теорема Лейбница при решении задач.

Задача 1. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$.

Решение. Пусть точка X совпадает с точкой O — центром описанной около треугольника ABC окружности. Тогда по теореме Лейбница:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2 \text{ или}$$

$$3R^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2.$$

Учитывая условие, получим $OM = 0$. А это возможно только в равностороннем треугольнике!

Итак, все углы треугольника равны по 60°.

Задача 2. В плоскости треугольника ABC найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Вычислите это минимальное значение, если стороны треугольника равны a, b, c.

Решение. Воспользуемся теоремой Лейбница:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2.$$

Выражение, стоящее в левой части, будет минимальным, если $XM = 0$, т.е. тогда, когда точки X и M совпадают. Итак, искомая точка — центроид треугольника ABC.

Учитывая тот факт, что MA, MB и MC — это $\frac{2}{3}$ соответствующих медиан треугольника, а также известную задачу о том, что сумма квадратов медиан треугольника составляет $\frac{3}{4}$ суммы квадратов всех его сторон, получим:

$$(XA^2 + XB^2 + XC^2)_{\min} = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Задача 3. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC. Пусть K — произвольная точка окружности. Докажите, что сумма $KA^2 + KB^2 + KC^2$ не зависит от положения точки K на окружности. Вычислите значение этой суммы.

Решение. Поскольку в равностороннем треугольнике точки O и M совпадают (рис. 2), то теорема Лейбница для данного случая запишется так:

$KA^2 + KB^2 + KC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OK^2$.

Или $KA^2 + KB^2 + KC^2 = 6R^2$. Тем самым дан ответ на оба вопроса задачи.

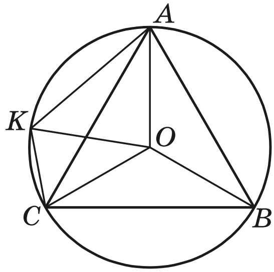


Рис. 2

Задача 4. *(Киевская городская олимпиада*, 1993г.).

Окружность делит каждую сторону равностороннего треугольника на три равные части. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки этой окружности до вершин треугольника есть величина постоянная.

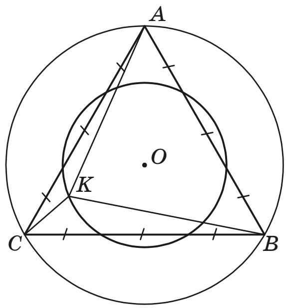


Рис. 3

Решение. Пусть K — произвольная точка данной окружности (рис. 3). Опишем окружность

около треугольника ABC. Пусть радиусы большей и меньшей окружностей соответственно равны R_1 и R_2. Нетрудно показать, что центры окружностей и треугольника совпадают. Кроме того O и M в равностороннем треугольнике ABC — одна точка. Тогда по теореме Лейбница имеем:

$$KA^2 + KB^2 + KC^2 =$$
$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OK^2 = 3R_1^2 + 3R_2^2 = const.$$

Утверждение задачи доказано.

Задача 5. Стороны треугольника ABC равны a, b и c. Найдите расстояние OM между центром описанной около треугольника ABC окружности и его центроидом.

Решение. Пусть точка X совпадает с точкой O. Тогда по теореме Лейбница имеем: $OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$.

Поскольку $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ — см. задачу 2, то $OM^2 = \frac{1}{9}(9R^2 - a^2 - b^2 - c^2)$ и $OM = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$. Значение радиуса R находится по известной формуле $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, а S, например, по формуле Герона. Учитывая, что точки O, M и ортоцентр H лежат на одной прямой (прямой Эйлера), причем $2OM = MH$, несложно найти при необходимости длины отрезков MH и OH.

Теорема Лейбница имеет стереометрический аналог в виде двух следующих задач.

Задача 6. Точка X находится вне пирамиды $DABC$, медианы которой пересекаются в точке M. Докажите, что

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 4XM^2.$$

Задача 7. Найдите точку, сумма квадратов расстояний которой до всех вершин данной треугольной пирамиды минимальна.

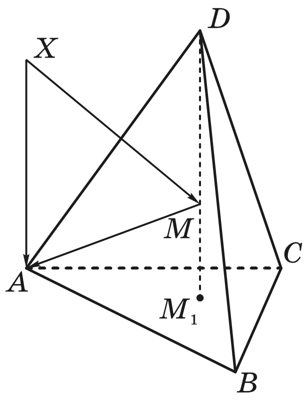


Рис. 4

Задача 6 (рис. 4) доказывается так же, как и теорема Лейбница, с учетом того, что центроид тетраэдра делит каждую медиану в отношении $3:1$, считая от вершины, и вытекающей из этого векторной формулы

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 0.$$

Задача 7 решается точно так же, как и задача 2.

Теорема Лейбница может быть использована и при доказательстве некоторых неравенств в треугольнике.

Задача 8. Докажите неравенство: $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$, где a, b, c – стороны треугольника ABC, R – радиус описанной около него окружности.

Решение. Из задачи 5:

$$OM^2 = \frac{1}{9}(9R^2 - a^2 - b^2 - c^2).$$

Поскольку OM^2 — величина неотрицательная, то $9R^2 - a^2 - b^2 - c^2 \geq 0$, откуда следует доказываемое неравенство.

Задача 9. Докажите, что для углов любого треугольника ABC имеет место неравенство:

$$\sin^2 \angle A + \sin^2 \angle B + \sin^2 \angle C \leq \frac{4}{9}.$$

Решение. Разделим обе части неравенства задачи 8 на $4R^2$. Поскольку по обобщенной теореме синусов

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R,$$

то требуемое неравенство доказано.

Задача 10. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27R^2}{4}$, где m_a, m_b, m_c — соответствующие медианы в треугольнике ABC, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Решение. Если точка X совпадает с точкой O, то по теореме Лейбница имеем: $OA^2 + OB^2 + OC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3OM^2$, или $3R^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3OM^2$.

Поскольку OM^2 — величина неотрицательная, то

$$\frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \leq 3R^2.$$

Умножив обе части неравенства на $\frac{9}{4}$, получим требуемое.

И в заключение предложим оригинальное доказательство теоремы Пифагора с помощью теоремы Лейбница, ранее в литературе не встречавшееся.

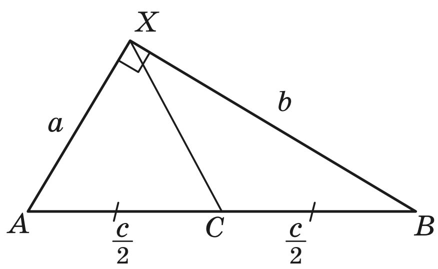


Рис. 5

Пусть точка X совпадает с вершиной прямого угла, а точка C — с серединой отрезка AB. В этом случае треугольник ABC — вырожденный и его центроид M совпадает с точкой C (рис. 5). Пусть также $XA = a$, $XB = b$, $AB = c$. Тогда $XC = \frac{c}{2}$ (медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы). Для данного случая теорема Лейбница запишется следующим образом:

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = CA^2 + CB^2 + CC^2 + 3XC^2 \text{, или}$$

$$a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4} \text{, откуда } a^2 + b^2 = c^2 .$$

«Благословенны препятствия — ими растем!»

Г. Б. Филипповский,
Русановский лицей, г. Киев

Среди задач на построение достойное место занимают так называемые «задачи с ограничениями». Они несут большой эмоциональный заряд, заставляют проявлять изобретательность, дают широкий простор для творчества! И поскольку «каждая трудность есть и возможность», то фраза, которую любил повторять Н. К. Рерих: «Благословенны препятствия — ими растем!» — как нельзя лучше подходит для названия этой статьи.

Препятствие 1: недоступные точки

Задача 1. Дан угол с недоступной вершиной A и точка K внутри угла. Проведите прямую KA (рис. 1).

Решение. Через точку K проведем прямые параллельно сторонам угла. $KEAF$ — параллелограмм; EF — его диагональ. Находим середину EF (точка O). И тогда прямая KO совпадет с искомой прямой KA.

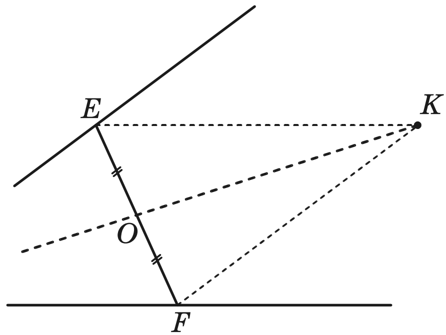


Рис. 1

Задача 2. Вершина A треугольника ABC недоступна. Проведите высоту h_a.

Решение. Проведем высоты $BH_2 = h_b$ и $CH_3 = h_c$. Они пересекутся в точке H (рис. 2). Поскольку в любом треугольнике три высоты пересекаются в ортоцентре H, то, проведя из H перпендикуляр HH_3 на BC, мы зададим направление высоты h_a. Таким образом, прямая HH_1 совпадет с высотой h_a треугольника ABC.

Задача 3. Все вершины ΔABC недоступны. Постройте точку пересечения медиан M (центроид) треугольника ABC.

Решение. Поведем отрезки EF и NK параллельно существующему «огрызочку» стороны BC (рис. 3). Очевидно, что прямая, проведенная через середины EF и NK содержит медиану m_a. Проделав аналогичные операции, построим прямую, содержащую медиану m_b. Точка пересечения построенных прямых и есть центроид M треугольника ABC.

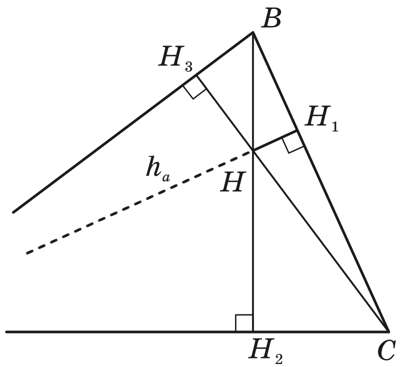


Рис. 2

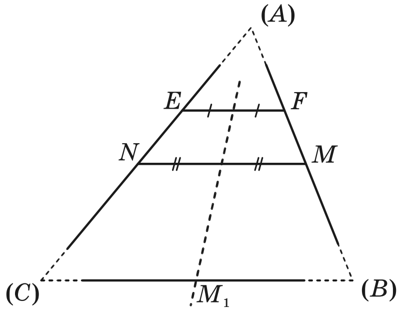


Рис. 3

Задача 4. Вершины треугольника недоступны. Определите построением длины всех сторон треугольника.

Решение. Построив прямые, содержащие медианы m_a, m_b и m_c (задача 3, рис. 3), получим точки M_1; M_2; M_3 — середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC. Зная длины средних линий треугольника, мы, тем самым, знаем и длины его сторон.

Задача 5. Вершины треугольника недоступны. Постройте центр описанной окружности — точку O.

Решение. Найдя середины двух сторон треугольника, как в предыдущей задаче (например M_2 и M_3), восстановим к соответствующим сторонам два перпендикуляра в этих точках. Они пересекутся в искомой точке O.

Препятствие 2: количество линий минимально!

В литературе такие решения называются геометрографическими, то есть самыми простыми, так как их решению соответствует наименьшее количество линий.

Задача 6. Точка K принадлежит данной прямой l (рис. 4). Наименьшим числом линий восстановите из точки K перпендикуляр к прямой.

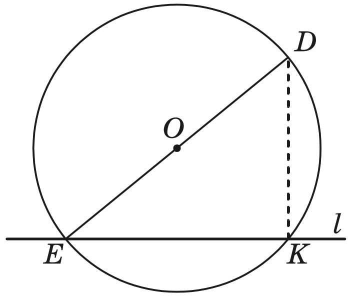


Рис. 4

Решение. Из произвольной точки O радиусом OK проводим окружность — первая линия. Через точку E пересечения прямой l и окружности и центр O проводим EO — вторая линия. Прямая EO вторично пересекает окружность в точке D. Тогда DK — третья линия. Она и является искомым перпендикуляром. Действительно, $\angle DKE = 90°$ (как вписанный, опирающийся на диаметр).

Задача 7. Через точку K вне прямой l наименьшим числом линий проведите прямую параллельно l.

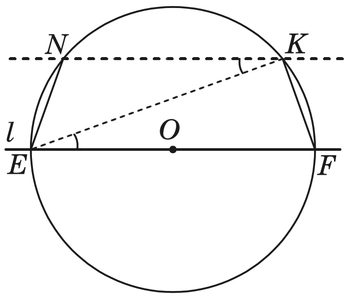


Рис. 5

Решение. Из произвольной точки O прямой l как из центра проводим окружность радиуса OK — первая линия (рис. 5). Из точки E раствором циркуля, равным KF, делаем засечку на окружности — вторая линия. Через полученную точку N и данную K проведем прямую — третья линия. Прямая NK является искомой, поскольку $ENKF$ — равнобокая трапеция ($\angle KEF = \angle EKN$, как вписанные, опирающиеся на равные дуги).

Задача 8. На прямой l наименьшим числом линий отложите угол $30°$.

Решение. Из произвольной точки O прямой l как из центра проведем окружность радиуса $OA = OB = R$ (рис. 6) — первая линия.

Из точки B раствором циркуля, равным R, делаем засечку на окружности — вторая линия (получаем точку K). Третья линия — прямая KA — является искомой, поскольку катет $KB = R$ равен половине гипотенузы $AB = 2R$, т.е. он лежит против угла $30°$.

Задача 7. На данной прямой l наименьшим числом линий отложите угол $15°$.

Решение. Первые две линии совпадают с линиями предыдущей задачи. Третья линия: из точки A как из центра радиусом AK проводим окружность, которая пересечет прямую l в точке T (рис. 7). Четвертая линия – прямая TK — является искомой, т.к. $\angle KAB = 30°$, и он центральный для большой окружности, а $\angle KTB$ — вписанный ($\angle KTB = \dfrac{1}{2}\angle KAB = 15°$).

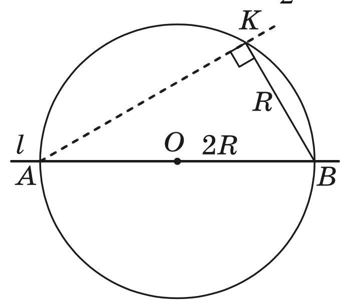


Рис. 6

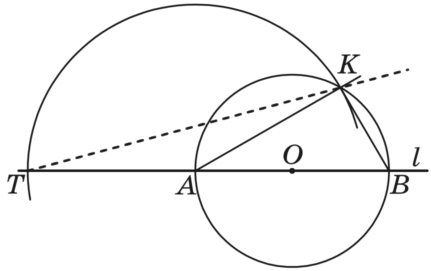


Рис. 7

Задача 8. Дан остроугольный треугольник. Наименьшим числом линий постройте точки H_2 и H_3 — основания высот h_b и h_c треугольника ABC.

Решения. Тремя линиями нетрудно построить точку M_1 — середину BC (рис. 8). Четвертая линия — окружность с центром M_1 радиуса $M_1B = M_1C$. Она пересечет AC и AB в точках H_2 и H_3 соответственно.

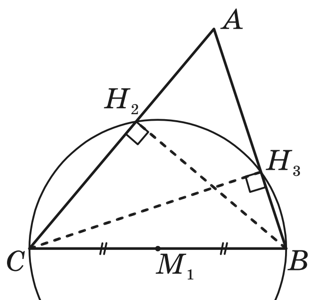


Рис. 8

Задача 9. Дана окружность, центр которой не указан. Наименьшим числом линий найдите ее центр.

Решение. Из произвольной точки A окружности проводим окружность произвольного (небольшого) радиуса — рис. 9. Через получившиеся точки B и C проводим еще две окружности того же радиуса. Через D и E, K и T (точки пересечения окружностей) проводим две прямые, которые пересекутся в центре O (серединные перпендикуляры к хордам AB и AC совпадают с диаметрами). Данное решение состоит в проведении 5 линий и является геометрографическим!

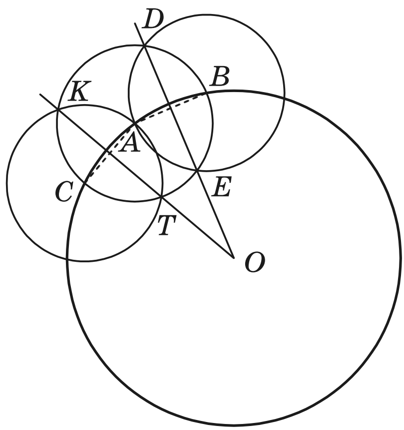


Рис. 9

Препятствие 3: отсутствие циркуля

Задачи, решаемые с помощью одной линейки, рассмотрены книге «Школьная геометрия в миниатюрах», Киев: Грот, 2002. – 240 с., глава 23.

Препятствие 4: отсутствие линейки

Согласно теореме Мора-Маскерони, все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть разрешены и одним циркулем. Несколько изящных, эффектных построений одним циркулем представлены в этой главе.

Задача 10. Одним циркулем найдите диаметр окружности с центром O.

Решение. Отложив от произвольной точки окружности последовательно три дуги радиусом, равным радиусу данной окружности, найдем диаметрально противоположную точку, а значит, и диаметр окружности.

Задача 11. В прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 впишите окружность, пользуясь одним циркулем.

Решение. По формуле радиуса вписанной окружности для прямоугольного треугольника: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ находим: $r = \dfrac{3+4-5}{2} = 1$. Далее раствором циркуля, равным *BC*, из точки *A* делаем засечку на *AC* — получаем точку K_2 (рис. 10). Имеем: $K_2C = 4-3 = 1$. Из точки *C* на катете *BC* делаем засечку раствором $K_2C = 1$ — получаем точку K_1. Находим инцентр *I*, сделав засечки из точек K_1 и K_2 тем же раствором циркуля. И, наконец, из центра *I* проводим окружность радиуса 1. Она является искомой.

Задача 12. Через данную точку *K* внутри круга с центром *O* проведите хорду, делящуюся в точке *K* пополам (рис. 11).

Решение. Итак, необходимо построить циркулем такие точки *A* и *B*, чтобы $AK = KB$. Анализ показывает, что если на продолжении *OK* отложить $KT = OK$, то $ATBO$ — ромб. Отсюда и построение: из точки *K* как из центра проводим окружность радиуса $R_1 = OK$. Строим точку *T* — диаметрально противоположную точке *O* (задача 10). Из точки *T* радиусом, равным радиусу *R* первоначальной окружности, делаем засечки — получаем искомые точки *A* и *B*.

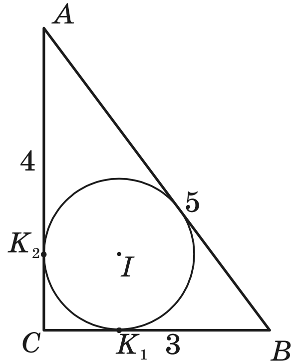


Рис. 10

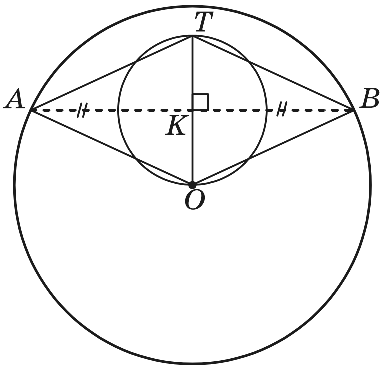


Рис. 11

Задача 13. С помощью одного циркуля постройте точки пересечения окружности с центром *O* с данной прямой *AB* (рис. 12).

Решение. Отразим окружность *O* относительно прямой *AB* — получим окружность O_1 (построить окружность O_1 с помощью одного циркуля нетрудно: $OE = OF = EO_1 = FO_1$). Пусть эти окружности пересекаются в точках K и T. очевидно, что они и являются искомыми!

Задача 14. Осуществите трисекцию угла $AOB = 54°$ с помощью одного циркуля (рис. 13).

Решение. Согласно рисунку нам необходимо найти такие точки C и D, чтобы лучи OC и OD осуществляли трисекцию угла $54°$. Строим произвольную окружность с центром в вершине O угла. Сделав из точки B три засечки радиуса R, находим диаметрально противоположную ей точку N. Раствором циркуля, равным BA, делаем засечки, начиная из точки A — получаем точки E и F. Дугу FN вычисляем: $\cup FN = 180° - 54° \cdot 3 = 18°$. Тогда раствором, равным FN, из точек B и A делаем засечки — получаем искомые точки C и D.

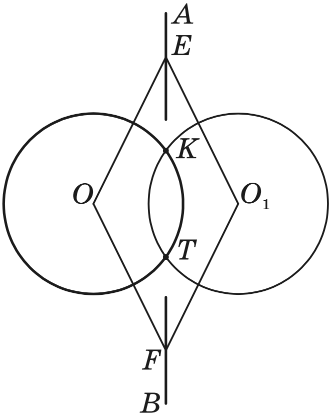


Рис. 12

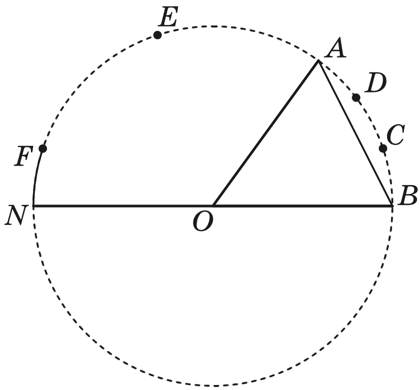


Рис. 13

И напоследок вновь несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 15. Вершина A треугольника ABC расположена вне чертежа. Проведите медиану m_a.

Задача 16. Впишите окружность в треугольник, вершины которого расположены вне чертежа.

Задача 17. Вершины треугольника недоступны. Постройте его ортоцентр.

Задача 18. Вне прямой l дана точка K. Наименьшим числом линий опустите из K перпендикуляр на l.

Задача 19. На данной прямой l наименьшим числом линий постройте угол в 60°.

Задача 20. От треугольника ABC остались: точка I — инцентр, M_1 — середина BC; прямая, содержащая высоту h_a и прямая, содержащая BC. Наименьшим числом линий постройте вершину A.

Задача 21. Данный отрезок AB с помощью 8 линий разделите на 6 равных частей.

Задача 22. Удвойте данный отрезок с помощью одного циркуля.

Задача 23. Из данной точки A вне круга одним циркулем проведите секущую так, чтобы ее внешняя часть была равна внутренней.

Задача 24. Дана окружность и ее центр. С помощью одного циркуля разделите эту окружность на четыре равные части.

Задача 25. Из данной точки A восстановите одним циркулем перпендикуляр к прямой, заданной двумя точками A и B.

Обсуждаем задачу

П. В. Чулков,
ФМШ 2007, г. Москва

«Всегда остаётся что-нибудь над чем можно размышлять: обладая достаточным упорством, мы можем усовершенствовать любое решение...»
Дж. Пойа. Как решать задачу.

Что делать, когда задача уже решена? В каком направлении вести обсуждение уже решенной задачи?

Можно поискать решение, удовлетворяющее каким-нибудь ограничениям. Рассмотрим два примера.

1. Геометрическое доказательство геометрического неравенства.

Десятиклассникам в ходе занятий летней школы было предложено для доказательства следующее известное неравенство: $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}s$, где a, b, c и s — длины сторон и площадь произвольного треугольника, причем равенство достигается лишь в случае равностороннего треугольника. Неравенство имеет некоторую историю. Принято считать, что впервые в таком виде его опубликовал Вейзенбёк (Weizenbock, Weitzenböck) в 1919 году, поэтому его иногда называют неравенством Вейзенбёка [1, 43].

Однако в 1914 году М. Софронов (Уральск) опубликовал в журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики»[1] задачу по ходу решения которой доказал указанное неравенство. Та-

---

[1] Условие: Задача №179 // Вестник опытной физики и элементарной математики. Вторая серия I семестр, №8 (608), 1914. С.239. Решение: // То же. Вторая серия II семестр, № 11-12 (623-624) 1914. С. 286.

ким образом, правильнее называть неравенство *неравенством Софронова – Вейзенбёка*.

В результате было придумано несколько доказательств, как чисто алгебраических, так и с элементами тригонометрии [5, 9-21].

Доказательство 1. Для школьников естественно попытаться применить теорему косинусов. Рассмотрим разность:

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}s=$$
$$=a^2+b^2+\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)-2\sqrt{3}ab\sin C=$$
$$=2a^2+2b^2-4ab\left(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)=$$
$$=2\left(a^2+b^2-2ab\cos(C-60^\circ)\right)\geq 2(a-b)^2\geq 0\,.$$

Неравенство доказано. Равенство достигается, если $C=60^\circ$ и $a=b=c$.

Доказательство 2. Можно обойтись и без тригонометрии. Перепишем формулу Герона в виде:

$$a^4+b^4+c^4+16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\,,$$

Воспользуемся известным неравенством:

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\,.$$

Сначала в левой части тождества заменим выражение

$$a^4+b^4+c^4 \text{ на } a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\,.$$

Получим первое неравенство:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq 16S^2\,.$$

Затем в правой части тождества заменим выражение

$$2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2 \text{ на } 2a^4+2b^4+2c^4\,.$$

Получим второе неравенство:

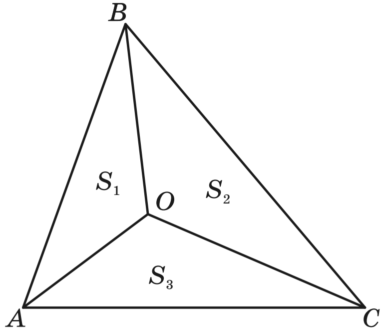
$$a^4+b^4+c^4\geq 16S^2\,.$$

Умножим первое неравенство на 2 и сложим со вторым.
Получим требуемое.

В ходе обсуждения захотелось найти чисто геометрическое доказательство. Вот, что из этого получилось.

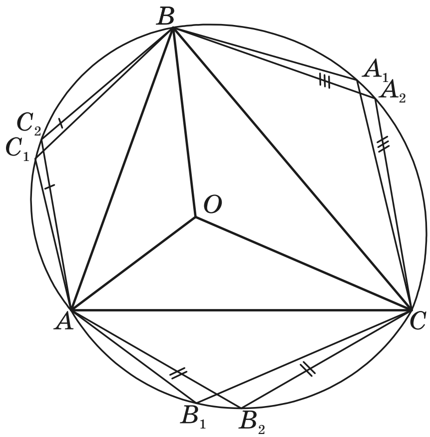
Доказательство 3. Пусть O — точка Торричелли треугольника ABC[2].

Тогда площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC и AOC.



Отразим треугольники AOB, BOC и AOC относительно сторон треугольника AB, BC и AC соответственно.

Получим треугольники AC_1B, BA_1C и AB_1C. Затем передвинем точки C_1, A_1, B_1 в положения C_2, A_2 и B_2 так, чтобы углы AC_2B, BA_2C и AB_2C остались равны 120°, а соответствующие треугольника стали равнобедренными.

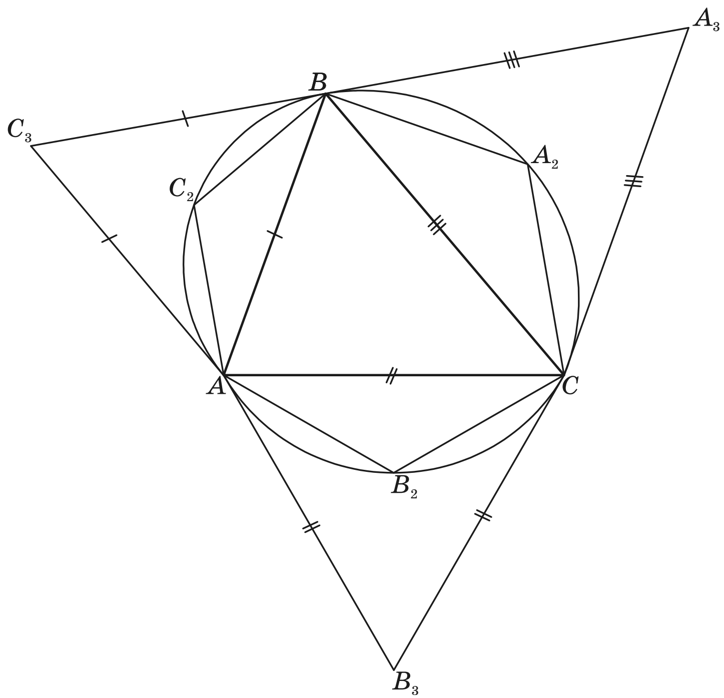


[2] Если точка Торричелли для данного треугольника не существует, то неравенство очевидно.

Теперь площадь треугольника ABC меньше суммы площадей треугольников AC_2B, BA_2C и AB_2C:

$$S_1+S_2+S_3>S.$$

Дополним треугольники AC_2B, BA_2C и AB_2C до правильных треугольников AC_3B, BA_3C и AB_3C: $3S_1+3S_2+3S_3>3S$.



Если теперь заменить треугольники AC_3B, BA_3C и AB_3C на квадраты, построенные на сторонах треугольника ABC, то получим требуемое неравенство: $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}s$.

2. Неравенство Коши как неравенство для многочлена с одной переменной.

Известно больше двадцати доказательств неравенства Коши для среднего арифметического и среднего геометрического, использующих различные идеи (см, например, [1]–[4]). Следующее доказательство показывает, что неравенство с n переменными в некоторых случаях можно заменить на неравенство для многочлена n-ой степени с одной переменной.

а) Докажем сначала неравенство для трёх переменных.

Если $a>0$, $b>0$, $c>0$, *то* $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$.

Пусть $a \ge b \ge c > 0$, тогда:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3+1 \ge 3\cdot\left(\frac{a}{c}\right)\cdot\left(\frac{b}{c}\right).$$

Воспользуемся однородностью исходного неравенства и уменьшим количество переменных.

Обозначим $\frac{a}{c}=x$, $\frac{b}{c}=y$. Переформулируем неравенство.

Если $x \ge 1$, $y \ge 1$, *то* $x^3+y^3+1 \ge 3xy$.

Полученное неравенство, следует из неравенства $a+b \ge 2\sqrt{ab}$. Действительно: $x^3+y^3 \ge 2\sqrt{x^3y^3}$.

Осталось доказать, что $2\sqrt{x^3y^3}+1 \ge 3xy$.

После замены $\sqrt{xy}=t$: $2t^3+1 \ge 3t^2$, где $t \ge 1$.

Последнее неравенство равносильно неравенству $2t^3-3t+1 \ge 0$, что верно так как:

$$2t^3-2t^2+2t^2-2t-t+1=(t-1)(2t^2+2t-1) \ge 0.$$

б) Общий случай. Можно ли аналогично доказать неравенство для n переменных?

Если $a_1>0$, $a_2>0$, …, $a_n>0$, *то*

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n > n\cdot a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n.$$

Пусть $a_1 \ge a_1 \ge \ldots \ge a_n > 0$, перепишем неравенство в виде:

$$\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^n+\left(\frac{a_2}{a_n}\right)^n+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^n+1 > n\cdot\left(\frac{a_1}{a_n}\right)\cdot\left(\frac{a_2}{a_n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)_n.$$

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{n-1}^n+1 > n\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}.$$

Докажем по индукции.

Базис индукции ($n=3$) доказан.

Пусть неравенство верно для $n = k - 1$.

Докажем его для $n = k$.

Получим:

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{k-1}^k \ge (k-1)\sqrt[k-1]{x_1^k \cdot x_2^k \cdot \ldots \cdot x_{k-1}^k}\text{, откуда}$$

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{k-1}^k + 1 \ge (k-1)\sqrt[k-1]{x_1^k \cdot x_2^k \cdot \ldots \cdot x_{k-1}^k}.$$

Осталось доказать:

$$(k-1)\sqrt[k-1]{x_1^k \cdot x_2^k \cdot \ldots \cdot x_{k-1}^k} + 1 \ge kx_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}.$$

После замены $\sqrt[k-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}} = t$:

$$(k-1)t^k + 1 \ge kt^{k-1}\text{, где } t \ge 1.$$

Последнее неравенство равносильно: $(k-1)t^k - kt^{k-1} + 1 \ge 0$, что верно:

$$(k-1)t^k - kt^{k-1} + 1 = (k-1)t^k - (k-1)t^{k-1} - t^{k-1} + 1 =,$$

$$= (k-1)t^{k-1}(t-1) - \left(t^{k-1} - 1\right) = (t-1)\left((k-1)t^{k-1} - t^{k-2} - \ldots - 1\right),$$

$$= (t-1)\left(t^{k-1} - t^{k-2} + t^{k-1} - t^{k-3} - \ldots + t^{k-1} - 1\right) \ge 0.$$

Вторая скобка неотрицательна, так как $t^{k-1} - t^{k-m} \ge 0$ при $k \ge m \ge 1$.

Литература

1. O. Bottema, R.Ž. Djordjević, R.R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić. *Geometric inequalities*, Groningen 1968.

2. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. – М.: Мир, 1965.

3. Пойа Дж. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1959.

4. Соловьев Ю.П. Неравенства. – М.: МЦНМО, 2005.

5. Чулков П.В. Семь доказательств одного геометрического неравенства (материал для внеклассной работы) // Математическое образование, №3-4 (55-56), 2010.

Алгоритм Евклида на отрезках

Е. Ф. Шершнев,
ФМШ 2007, г. Москва

В нашей школе курс информатики в 5–7 классах является пропедевтическим к курсу программирования в старших (8–11) классах.

Целями курса являются:

- выработка умения пошагового выполнения алгоритма;
- пошаговая отладка алгоритма (проверка состояния системы на каждом шаге алгоритма);
- поиск закономерностей и выявления общих свойств наблюдаемого процесса на конкретных примерах (от частного к общему);
- оптимизация процесса решения задачи: поиск наилучшей последовательности действий, приводящей к требуемому результату;
- знакомство со стандартными алгоритмами при решении повседневных задач (например, построение школьников в начале урока в лексикографическом порядке фамилий методом прямого выбора).

Таким образом, одна из задач курса — познакомить учащихся со стандартными алгоритмами, обучение которым будет продолжено в старшей школе, в наглядной, «живой» форме.

Наш опыт обучения программированию показывает, что учащиеся испытывают трудности с пониманием *алгоритма Евклида* и использованием этого алгоритма для нахождения частного решения диофантова уравнения $ax + by = c$. Создается впечатление, что принятая рекуррентная форма изложения алгоритма – нахождения последовательности остатков по формуле

$$r_{n-2} = q \cdot r_{n-1} + r_n, 0 \le r_n < r_{n-1}$$

– трудна для восприятия школьниками даже несмотря на то, что с этой идей они встречаются уже не в первый раз и алгоритм Евклида неоднократно рассказывался на уроках или факультативах по математике. Следовательно, возникает задача: продемонстрировать идею в наглядной форме, доступной учащимся при решении прикладной задачи.

Ниже дается описание нахождения частного решения диофантова уравнения с помощью алгоритма Евклида (с учетом вышесказанного).

Задача. Кузнечик находится в точке с координатой 0. Может ли он переместится в точку с координатой 1, если вправо он прыгает на 101, а влево — на 37 делений?

Примечание. Требуется подобрать частное решение уравнения $101a - 37b = 1$.

Учащимся дается время для самостоятельного обдумывания задачи. В случае успеха делается попытка описать процесс подбора шагов в общем виде. Таким образом, формулируется задача: придумать способ подбора решения при любых длинах прыжков влево или вправо.

Идея решения на самом деле лежит на поверхности. Итак, требуется с помощью двух отрезков длиной 101 и 37 отложить отрезок длины 1. Что можно сделать первым шагом? Поскольку цель – получить отрезок длины 1 (то есть минимально возможной длины), то естественно на первом шаге получить отрезок длины меньшей, чем данные. Для этого сделаем большой прыжок вправо, а затем прыжок влево, но уже поменьше.

Первый шаг. Приложить к отрезку 101 отрезок длины 37 максимально возможное количество раз (в данном случае, два раза):

$$101 - 2 \cdot 37 = 27$$

Второй шаг. Перед этим шагом у нас есть отрезки длиной 101, 37 и 27. Наша цель — получить наиболее короткий отрезок. Для этого к отрезку длины 37 прикладываем отрезок 27, и получаем отрезок длины $37-27=10$.

Третий шаг. У нас уже есть отрезки 101, 37, 27, 10. Из этих отрезков возьмем два самых маленьких отрезка и получим отрезок еще меньшей длины. То есть к отрезку длины 27 приложим два раза отрезок длины 10. Запишем арифметически: $27-2\cdot 10=7$.

Четвертый шаг. Имеем набор отрезков длины 101, 37, 27, 10, 7. Повторяем операцию: используя два самых маленьких отрезка из имеющихся, получаем отрезок еще меньшей длины: $10-7=3$.

Пятый шаг. Набор отрезков, полученных перед этим шагом следующий: 101, 37, 27, 10, 7, 3. Теперь к отрезку длины 7 приложим два раза отрезок длины 3 и получим отрезок длины 1 ($7-2\cdot 3=1$).

Цель достигнута! Мы получили отрезок длины 1, и при этом можем сформулировать правило, по которому действовали: «Из имеющегося набора отрезков выбираем два самых маленьких отрезка для получения отрезка наименьшей длины».

Выпишем все равенства, соответствующие нашим шагам:

$$101-2\cdot 37=27\,,$$
$$37-27=10\,,$$
$$27-10=7\,,$$
$$10-7=3\,,$$
$$7-2\cdot 3=1\,.$$

Эта цепочка равенств означает, что кузнечик сможет попасть в точку с координатой 1.

Теперь нам предстоит ответить на вопрос: “Сколько раз надо приложить отрезок длины 101 и отрезок длины 37, чтобы получить отрезок длины 1?”

Но, фактически, откладывая отрезки длин 3, 7, 10 и 27 мы неявно использовали два исходных отрезка длины 101 и 37. Осталось только посчитать, сколько раз мы ими воспользовались.

Отрезок длины 1 мы получили, приложив к отрезку длины 7 два раза отрезок длины 3. Но при этом отрезок длины 3 мы получаем, прикладывая к отрезку длины 10 отрезок длины 3. То есть, что бы получить отрезок длины 1, надо два раза взять отрезок длины 10 и приложить к нему три раза отрезок длины 7. Проиллюстрируем арифметически:

$$7-2\cdot 3=1,$$
$$7-2\cdot(10-7)=1,$$
$$7-2\cdot 10+2\cdot 7=1,$$
$$3\cdot 7-2\cdot 10=1.$$

Отрезок длины 7 мы получили, приложив к отрезку длины 27 отрезок длины 10. Т. е.

$3\cdot 7-2\cdot 10=1$,

$3\cdot(27-2\cdot 10)-2\cdot 10=1$,

$3\cdot 27-6\cdot 10-2\cdot 10=1$,

$3\cdot 27-8\cdot 10=1$.

Проверим полученный результат: $81-80=1$.

Таким образом, надо взять три раза отрезок длины 27 и приложить к нему восемь раз отрезок длины 10.

Действуем аналогично с отрезком длины 10:

$3\cdot 27-8\cdot 10=1$,

$3\cdot 27-8\cdot(37-27)=1$,

$3\cdot 27-8\cdot 37+8\cdot 27=1$,

$11\cdot 27-8\cdot 37=1$.

При этом, отрезок длины 27 мы отложили, используя один раз отрезок длины 101 и два раза отрезок длины 37, т.е.

$11\cdot 27-8\cdot 37=1$,

$11\cdot(101-2\cdot 37)-8\cdot 37=1$,

$11\cdot 101-22\cdot 37-8\cdot 37=1$,

$11\cdot 101-30\cdot 37=1$.

Подведем итог, записав все шаги алгоритма в таблицу:

Процесс пошагового получения отрезка длины 1	Подсчет используемого количества отрезков 101 и 37 (снизу вверх)
$101-2\cdot37=27$	$7-2\cdot3=1$
$37-27=10$	$3\cdot7-2\cdot10=1$
$27-10=7$	$3\cdot27-8\cdot10=1$
$10-7=3$	$11\cdot27-8\cdot37=1$
$7-2\cdot3=1$	$11\cdot101-30\cdot37=1$

Отметим, что при проведении этого процесса:

— учащийся выполняет алгоритм Евклида;

— отрабатывается навык раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых;

— приобретается навык отладки процесса (так как на каждом шаге требуется проверить правильность раскрытия скобок, т.е производится поиск возможных ошибок).

Вопросы для дальнейшего изучения:

— рассмотреть, что будет, если длины отрезков, не взаимно просты.

— сделать наблюдение, что алгоритм Евклида позволяет находить наибольший общий делитель двух чисел;

— сделать обобщение от решения задачи о Кузнечике к задаче решения уравнения $ax+by=c$.

Типовой вариант практической работы

При проведении практических работ используется среда КуМир, в которой реализован графический исполнитель Кузнечик.

1. Кузнечик находится в точке с координатой 0. Напишите программу на языке КуМир, в результате выполнения которой, он переместится в точку с координатой 1, если вперед он прыгает на 101, а назад на 37 делений.

2. Кузнечик находится в точке с координатой 0. Напишите программу на языке КуМир, в результате выполнения которой, он пе-

реместится в точку с координатой 1, если вперед он прыгает на 55, а назад на 48 делений.

3. Кузнечик находится в точке с координатой 0. Напишите программу на языке КуМир, в результате выполнения которой, он переместится в точку с координатой 1, если вперед он прыгает на 108, а назад на 16 делений.

4. Кузнечик находится в точке с координатой 0. Напишите программу на языке КуМир, в результате выполнения которой, он переместится в точку с координатой 1, если вперед он прыгает на 105, а назад на 329 делений.

Плоскости параметров $(k; b)$ линейной функции $y = kx + b$

Д. Э. Шноль,
Школа «Интеллектуал», г. Москва

В статье будет разобрана серия упражнений и задач, связанных с рассмотрением плоскости двух параметров. По нашему опыту первые, самые легкие упражнения могут быть с большой пользой использованы в среднем по силе классе на уроках повторения и обобщения темы «Линейная функция». Последние из представленных задач являются достаточно сложными и приводят к первому знакомству с понятием двойственности в проективной геометрии.

Вступление к теме.

Рассмотрим координатную плоскость $(k;b)$. Каждая прямая вида $y = kx + b$ изображается на этой плоскости в виде точки.

Например, прямая $y = 2x + 5$ изображается на плоскости $(k;b)$ в виде точки $(2;5)$, а прямая $y = -2$ в виде точки $(0;-2)$.

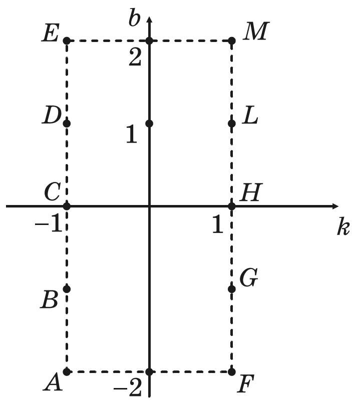


Рис. 1

Упражнения и задачи.

1) Изобразите на координатной плоскости $(k;b)$ точки, которые соответствуют прямым:

$y = x$, $y = -3x + 2$, $y = 2x - 3$.

2) Изобразите на координатной плоскости $(x; y)$ семейство прямых, соответствующих десяти точкам плоскости $(k;b)$, изображенным на рис. 1.

Обозначьте эти прямые соответственными маленькими буквами $(a, b, c\ldots)$

3) Изобразите на координатной плоскости $(k;b)$ множество точек, соответствующее семейству всех прямых вида $y = kx + b$, параллельных прямой $y = 2x$.

4) Изобразите на координатной плоскости $(k;b)$ множество точек, соответствующее семейству всех прямых вида $y = kx + b$, проходящих через точку $(0;3)$.

Раскрашенные области.

5) На координатной плоскости $(k;b)$ (см. рис. 2–7) изображено множество точек, соответствующее некоторому семейству прямых вида $y = kx + b$. На плоскости $(x; y)$ все эти прямые покрашены. Изобразите на плоскости $(x; y)$ получившуюся покрашенную область.

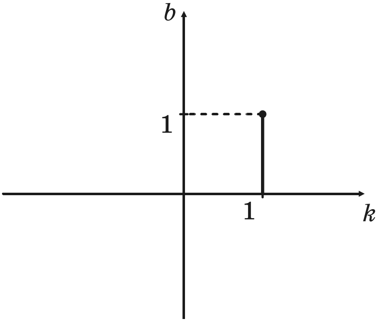


Рис. 2

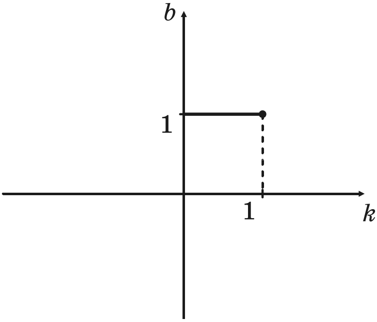


Рис. 3

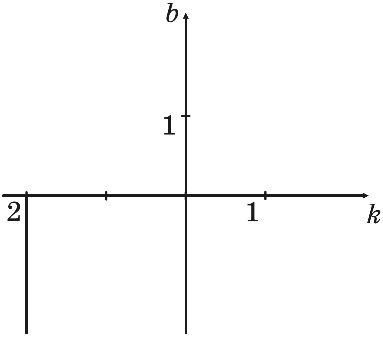


Рис. 4

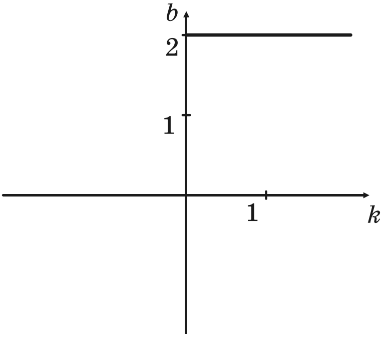


Рис. 5

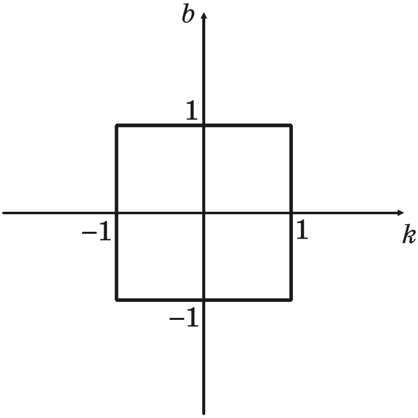


Рис. 6

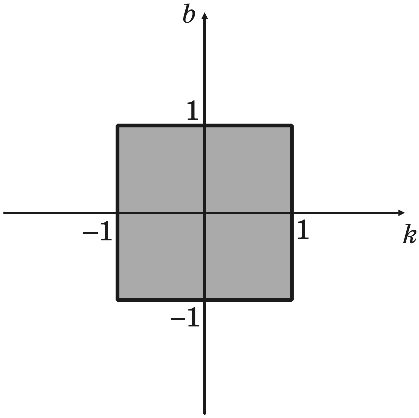


Рис. 7

Сравните результаты двух последних задач. Объясните то, что у вас получилось.

6) На координатной плоскости $(x; y)$ (см. рис. 8–11) покрашено некоторое семейство прямых. В результате на плоскости получилась покрашенная область (смотри рисунки). Изобразите на координатной плоскости $(k; b)$ множество точек, соответствующее этому семейству прямых (в некоторых случаях это можно сделать не единственным образом).

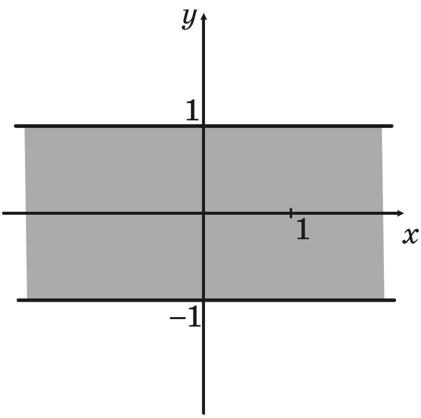


Рис. 8

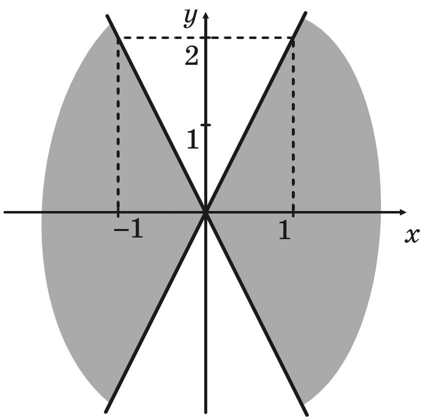


Рис. 9

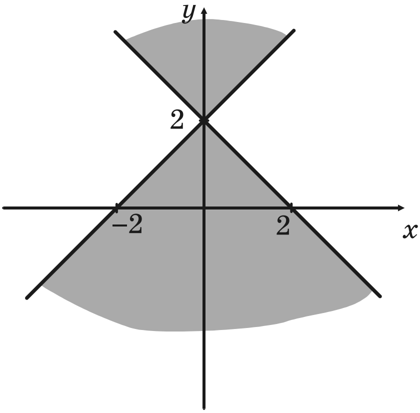


Рис. 10

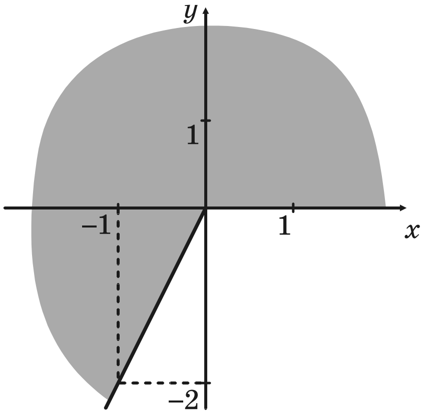


Рис. 11

Прямая на плоскости $(k;b)$.

7) Рассмотрим на плоскости $(k;b)$ прямую $b=k$. Каждая точка этой прямой задает на плоскости $(x;y)$ прямую, а вся прямая $b=k$ задает на плоскости $(x;y)$ семейство прямых. Каким свойством обладает это семейство прямых?

(*Для ответа на этот вопрос можно сначала взять несколько конкретных точек на прямой* $b=k$ *и построить соответствующие им прямые на плоскости* $(x;y)$, *затем выдвинуть гипотезу и попробовать ее доказать).*

8) Какие точки плоскости $(x;y)$ останутся неокрашенными, если покрасить все прямые из задачи 7)?

9) Рассмотрим семейство всех прямых плоскости $(x;y)$, которые проходят через точку $(1;1)$. Как это семейство прямых изображается на плоскости $(k;b)$?

10) Рассмотрим семейство всех прямых плоскости $(x;y)$, которые проходят через точку $(m;n)$. Как это семейство прямых изображается на плоскости $(k;b)$?

11) Рассмотрим на плоскости $(k;b)$ прямую $b=uk+v$. Какое семейство прямых на плоскости $(x;y)$ изображает эта прямая?

12) На координатной плоскости $(k;b)$ изображено множество точек, соответствующее некоторому семейству прямых вида $y = kx + b$ (см. рис. 12). На плоскости $(x;y)$ все эти прямые покрашены. Изобразите на плоскости $(x;y)$ получившуюся покрашенную область.

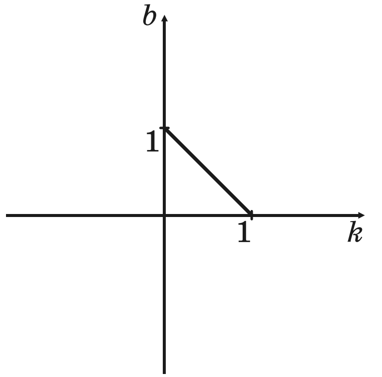


Рис. 12

13) На координатной плоскости $(x;y)$ проведено три прямых, проходящих через одну точку: $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$. Верно ли, что три прямые $y = b_1x + k_1$, $y = b_2x + k_2$, $y = b_3x + k_3$ так же проходят через одну точку?

14) На координатной плоскости $(k;b)$ проведены прямые $b = k$ и $b = -k + 2$. Чему соответствуют эти прямые на плоскости $(x;y)$? Чему соответствует их общая точка?

15) На координатной плоскости $(k;b)$ проведены прямые $b = k + 1$ и $b = k + 2$. Чему соответствуют эти прямые на плоскости $(x;y)$?

Сравните решение задач 14) и 15).

16) На координатной плоскости $(k;b)$ проведены три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x;y)$, как эти семейства прямых связаны между собой?

17) На координатной плоскости $(k;b)$ проведено три параллельные прямые. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x;y)$, как эти семейства прямых связаны между собой?

Ответы и решения.

2) См. рис. 13

3) Прямая $k=2$ с выколотой точкой $(2;0)$.

5) См. рис. 14–18. На рис. 18 дан общий ответ для рисунков 6 и 7. То, что точки внутри квадрата на плоскости $(k;b)$ не дадут нам новых закрашенных областей на плоскости $(x;y)$, можно объяснить так: любая точка внутри квадрата лежит на отрезке, параллельном оси абсцисс плоскости $(k;b)$ с концами на сторонах квадрата. На плоскости $(x;y)$ это будет означать, что соответствующая выбранной точке прямая будет лежать в полосе между прямыми, соответствующими концам отрезка, то есть в покрашенной области.

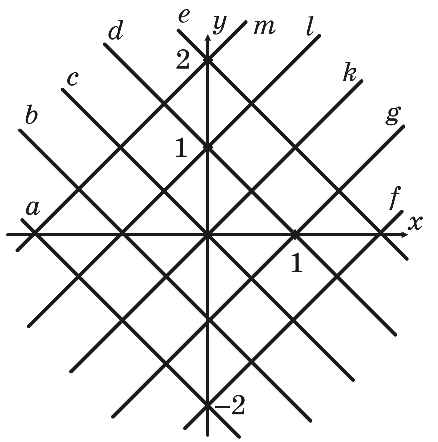


Рис. 13

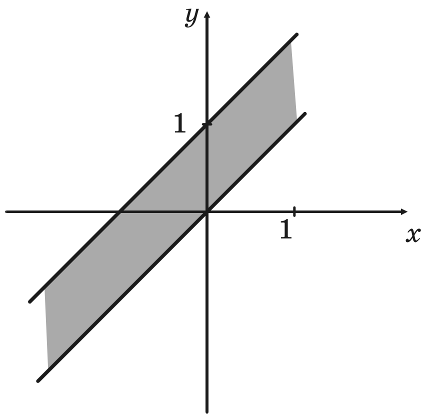


Рис. 14

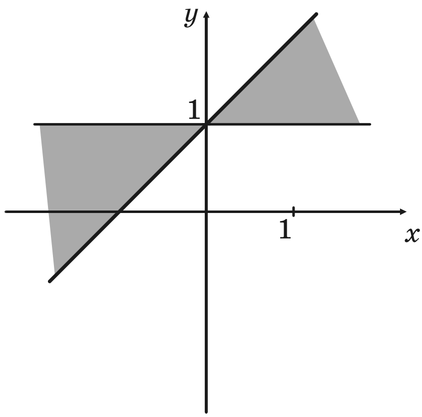


Рис. 15

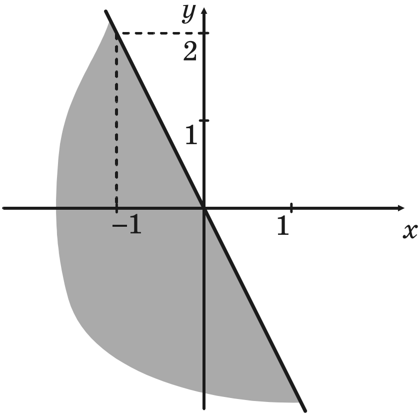


Рис. 16

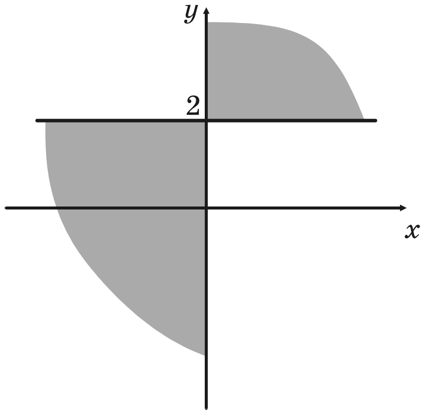


Рис. 17

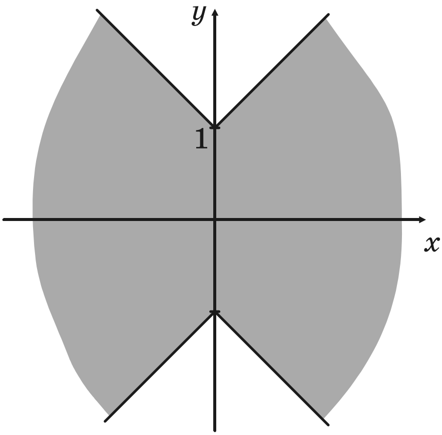


Рис. 18

6) Рис. 8. на плоскости $(k;b)$ — отрезок, соединяющий точки $(0;-1)$ и $(0;1)$.

Рис. 9. на плоскости $(k;b)$ — отрезок, соединяющий точки $(-2;0)$ и $(2;0)$.

Рис. 10. Объединение двух лучей (см. рис. 19).

Рис. 11. Возможно несколько решений. Например, объединение луча (полуоси ординат в положительном направлении) и отрезка $[0;2]$ на оси абсцисс, см. рис. 20. Или объединение двух лучей: полуоси ординат в положительном направлении и параллельного луча с вершиной в точке $(2;0)$, см. рис. 21.

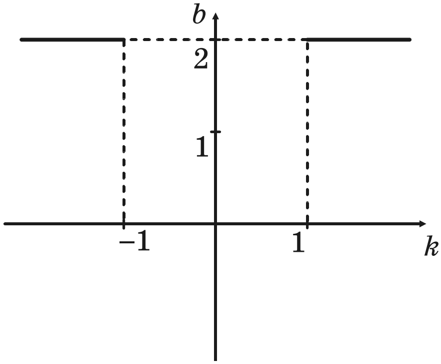


Рис. 19

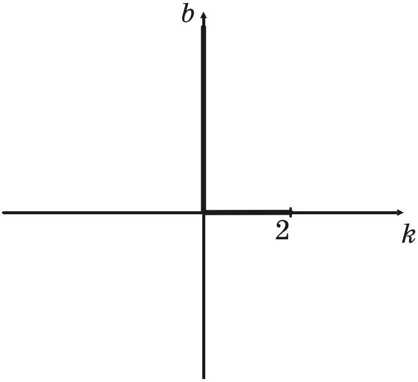


Рис. 20

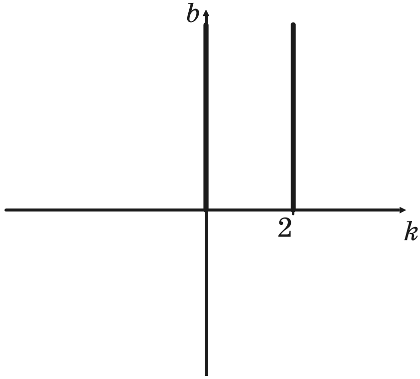


Рис. 21

7) Так как $b = k$, то на плоскости $(x;y)$ мы получаем семейство прямых вида $y = kx + k$. Если записать их в виде $y = k(x+1)$, то легко увидеть, что все эти прямые проходят через точку $(-1;0)$.

8) Останется неокрашенной прямая $x = -1$, за исключением точки $(-1;0)$.

9) Подставим координаты точки $(1;1)$ в уравнение прямой: $k + b = 1$. Следовательно, на плоскости $(k;b)$ этому семейству соответствует прямая $b = 1 - k$.

10) Аналогично задаче 9): прямая $b = -mk + n$.

11) Если $b=uk+v$, то все прямые на плоскости $(x;y)$ имеют вид $y=kx+uk+v$. Запишем в виде $y=k(x+u)+v$. Все прямые такого вида проходят через точку $(-u;v)$.

12) См. рис. 22.

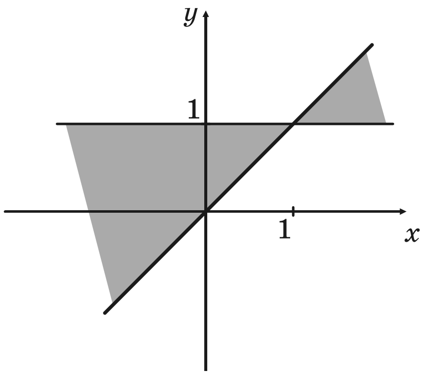


Рис. 22

13) Трем прямым $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, $y=k_3x+b_3$ на плоскости $(k;b)$ соответствуют три точки $(k_1;b_1)$, $(k_2;b_2)$ и $(k_3;b_3)$, лежащие по условию на одной прямой. Очевидно, что точки $(b_1;k_1)$, $(b_2;k_2)$ и $(b_3;k_3)$ также лежат на одной прямой, а, значит, соответственные им прямые пересекаются в одной точке.

14) Прямой $b=k$ на плоскости $(x;y)$ соответствует пучок прямых, проходящих через точку $(-1;0)$, прямой $b=-k+2$ соответствует пучок прямых, проходящих через точку (1;2). Общая точка этих прямых на плоскости $(k;b)$ — точка $(1;1)$, ей соответствует прямая $y=x+1$ — общая прямая описанным пучкам.

15) Прямой $b=k+1$ на плоскости $(x;y)$ соответствует пучок прямых, проходящих через точку $(-1;1)$, прямой $b=k+2$ соответствует пучок прямых, проходящих через точку $(-1;2)$. У этих пучков прямых есть общая вертикальная прямая $x=-1$, ей на плоскости $(k;b)$ соответствует «бесконечно удаленная точка», принадлежащая двум параллельным прямым $b=k+1$ и $b=k+2$.

16) Три точки на плоскости $(x;y)$, через которые проходят соответствующие пучки прямых, сами лежат на одной прямой.

17) Ответ такой же, как в задаче 16): три точки на плоскости $(x;y)$, через которые проходят соответствующие пучки прямых, сами лежат на одной прямой. В задаче 17) эта последняя прямая вертикальна, а в задаче 16) — не вертикальна.

Одна задача на обыкновенные дроби

Д. Э. Шноль,
Школа «Интеллектуал», г. Москва

Цель этой краткой заметки — поделиться одной задачей, которая может использоваться в классе любого уровня, и частично посильна довольно слабым ученикам.

Задача такая: на доске написаны пять дробей $\frac{1}{3}$, расставьте между ними знаки арифметических действий и скобки, чтобы получилось как можно больше различных целых чисел.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}.$$

Обычно ученики получают довольно быстро 0, 1, 3, 27. Немного более сложно получить 2,   4, 9 и 12. Замечательно, что можно получить все числа от 0 до 10 включительно. Число 11 я получать не умею. При решении этой «задачи-догонялки» (каждый, получив целое число может искать способ получить следующее) ученики не заметно для себя множество раз повторяют все действия с обыкновенными дробями. Так что эта задача хорошо подходит для урока повторения по теме «действия с обыкновенными дробями». Причем такое повторение можно делать не только в 5 или 6 классе. В старших классах задачу решают с не меньшим удовольствием, так как в ней есть элемент поиска и соревнования.

Как можно несколько развить эту задачу? Например, так: получите число 1 наибольшим количеством способов (можно обсудить заодно какие способы разумно считать различными).

Можно поставить такой вопрос: пусть теперь у нас есть пять одинаковых, но неизвестных обыкновенных дробей, написанных в ряд. Какие целые числа мы заведомо можем получить?

Содержание