Учим математике-4

(материалы открытой школы-семинара учителей математики)

под редакцией А. Д. Блинкова и П .В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2014

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-4** (материалы открытой школы-семинара учителей математики) / Под ред. А. Д. Блинкова и П .В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2014. — 192 с.

ISBN 978-5-4439-0146-6

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики, проходившей со 2 по 9 мая 2013 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-4
(материалы открытой школы-семинара учителей математики)

Технический редактор *Т. Струков*
Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 15.03.2014 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 12 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-4439-0146-6

© МЦНМО, 2014.

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***четвертой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики***, проходившей со 2 по 9 мая 2013 года на берегу Черного моря (с. Морское, Николаевская область, Украина). Семинар был организован Московским центром непрерывного математического образования и Центром педагогического мастерства. Материалы предыдущих школ-семинаров — см. сборники «Учим математике», «Учим математике 2» и «Учим математике 3», М.: МЦНМО, 2007, 2009 и 2013 гг.

На семинар приглашались все желающие. На приглашение откликнулось много творческих учителей, которые, помимо прочего, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками.

Всего в работе школы-семинара приняло участие 49 преподавателей. По традиции, большинство участников было из Москвы и из республики Саха (Якутия). Приехали также преподаватели из Алматы, Киева, Махачкалы, Московской и Ростовской областей, Стокгольма. Приятно отметить, что есть преподаватели, не пропустившие ни одного выездного семинара.

На прошедшем семинаре, как всегда, обсуждались различные вопросы, связанных с обучением школьников. Использовались различные формы деятельности: лекции, семинары, «круглые столы». Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим».

Организатором и координатором четвертой школы-семинара (равно, как и всех предыдущих) являлся преподаватель лицея №1557 г. Москвы И.Б. Писаренко, научным руководителем — исполнительный директор МЦНМО, директор ЦПМ, учитель школы №57 г. Москвы, к. ф-м. н. И.В. Ященко, его заместителем — сотрудник МЦНМО и ЦПМ, заместитель директора Центра образования №218 г. Москвы заслуженный учитель РФ А.Д. Блинков, методистом — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ФМШ №2007 г. Москвы, заслуженный учитель РФ П.В. Чулков.

По итогам школы-семинара все участники получили удостоверение о прохождении курсов повышения квалификации МЦНМО.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить экскурсионные поездки в Николаев и Одессу. За рамками учебной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению всех участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

Программа открытой школы-семинара

2 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Открытие	**А.Д. Блинков, П.В. Чулков, И.Б. Писаренко** Организационная информация
10.00	Лекция	**А.В. Шаповалов** Преподавание математики как достоверной науки
12.00	Семинар	**Г.Б. Филипповский** О прямой, проходящей через середину стороны и инцентр треугольника

13.00	Семинар	**Д.В. Прокопенко** Связки задач по геометрии, некоторые конструкции
3 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	**В.М. Гуровиц** Математика, которая нужна программистам
11.00	Семинар	**Г.Б. Филипповский** Авторские задачи Якоба Штейнера
12.00	Семинар	**П.В. Чулков** Подборки задач для кружковой работы по алгебре
13.00	Круглый стол	Система математического образования внутри различных школ (урочная и внеурочная деятельность)
4 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	**И.Б. Писаренко** Как оживить доказательство
11.00	Семинар	**Г.Б. Филипповский** Лемма о дважды биссектрисе
12.00	Семинар	**С.Л. Синякова** Оценки не для журнала. Ограничения — легко или сложно?
13.00	Семинар	**Е.Ф. Шарин** Методы решения неравенств в задачах ЕГЭ
5 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	**А.Д. Блинков** Непрерывность и начала анализа

11.00	Семинар	**Д.Г. Мухин** Тригонометрические тождества и планиметрия
12.00	Семинар	**С.А. Беляев** Выход в пространство
13.00	Круглый стол	Система работы с мотивированными школьниками в различных регионах (математические кружки, ЛМШ, олимпиады и пр.)
	6 мая	
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	**А.Н. Андреева** Математические миниатюры
11.00	Семинар	**Ю.А. Блинков** Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и … еще одна точка!
12.00	Семинар	**В.М. Гуровиц** Олимпиадные задачи по информатике, в которых только математика
13.00	Семинар	**Я.И. Абрамсон** Реализация авторской программы по математике в начальной школе
	7 мая	
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	**А.В. Шаповалов** Математические конструкции и их роль в преподавании математики
11.00	Семинар	**И.Б. Писаренко** Метод вспомогательной задачи
12.00	Семинар	**Е.Б. Гладкова** Как начинать изучение геометрии в 7 классе (из опыта работы)

13.00	Семинар	**Н.С. Попов** Решение задач по стереометрии
8 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	**А.Д. Блинков** Геометрические решения не геометрических задач
11.00	Семинар	**В.И. Антипин, Н.Н. Николаев, В.Г. Марков** Олимпиадные задачи по математике
12.00	Семинар	**В.И. Антипин, Н.Н. Николаев, В.Г. Марков** Олимпиадные задачи по математике
13.00	Круглый стол	Проблемы математического образования, которые волнуют
9 мая		
Время	Вид работы	Содержание
10.00	Семинар	**А.Д. Блинков, П.В. Чулков, И.Б. Писаренко** Подведение итогов школы-семинара

Некоторые из публикуемых материалов являлись сообщениями в рамках «круглых столов». Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

Преподавание математики как достоверной науки

А.В. Шаповалов,
г. Стокгольм, Швеция
sasja@shap.homedns.org

Математика во многом наука абстрактная. Если преподавать её как сугубо прикладную науку, она сильно обедняется. Преподавание же «высокой теории» упирается в следующие естественные возражения учащихся: а) мне это не пригодится; б) теория — одно, а жизнь — другое; в) что бы я ни сделал, учитель всегда может сказать, что я не прав. Даже не будучи высказанными вслух или до конца осознанными, эти соображения могут сильно влиять на мотивацию учащихся. Сомнения мало-помалу подтачивают даже сильных и успешных учеников и студентов, и лет через 5 активных занятий математикой у них наступает кризис. Математика начинает казаться «игрой в бисер», и немало студентов уходят в другие сферы деятельности (так, несколько моих сокурсников категорически отказались идти в аспирантуру несмотря на научные успехи и уговоры научных руководителей. У меня лично, и у некоторых других олимпиадников ввиду интенсивных занятий математикой еще в школьные годы кризис случился уже на 2–3 курсе. Я называю это «кризисом 5 лет».)

Все эти сомнения имеют одно общее: проблему достоверности и значимости абстрактных знаний, оторванных от их корней в природе и практической деятельности. Решив эту проблему, мы не только повысим мотивацию, но и создадим возможность широкого применения математики.

Менее мотивированные учащиеся отторгают абстрактную математику с самого начала. Это выражается в нежелании заниматься математикой вообще. Иногда их удается разговорить. Ниже сформулированы типовые сомнения, и типовые учительские ответы на них. Ответы правильные, но только вот в долгосрочном плане не очень помогающие. Если при подготовке занятий проблему достоверности не учитывать, придется смириться и с занятиями спустя рукава, и с уходами сильных учеников в другие области.

Сомнение 1. Мне это не пригодится.

Типовые мотивировки. Мой дядя всю жизнь работал начальником, и математика ему ни разу не пригодилась.

Тут я рассказываю про одного руководителя, которому тоже не пригодилось. Чтобы узнать сколько песка в куче, он не стал заморачиваться формулами, а пригнал бригаду землекопов, и они за два дня всю кучу лопатами на весы перекидали…

Но про себя-то я знаю, что в практической деятельности (не по работе) мне ни разу в жизни не пришлось решать квадратное уравнение, и всего раз в жизни посчитать интеграл (чтобы узнать объем нестандартной бочки).

Сомнение 2. Теория — одно, а жизнь — другое.

Тут можно ответить, что незнание законов не освобождает от ответственности, значит, знание может помочь освободиться от ответственности. Или, что знание лишним не бывает: если я знаю, что в темном переулке мне могут дать по морде, я силен уже этим знанием. Или, что глупый подгоняет жизнь под теорию, умный применяет теорию, подходящую к ситуации.

Однако над зазором между теорией и приложением её к повседневной практике учителю надо много трудиться.

Сомнение 3: что бы я ни сделал, учитель всегда может сказать, что я не прав.

Это сомнение вслух обычно не высказывают. Но ведь действительно, математика, по сути, наука не экспериментальная, учителю так или иначе приходится оценивать правильность рассуждения, и убедить ученика, что его рассуждение неверное, бывает нелегко. Ситуация заметно отличается от шахмат с их критерием «выиграл-проиграл» или от программирования с критерием «программа работает/не работает».

Я лично поощряю учеников, поправляющих мои оговорки, опечатки и ошибки (вплоть до повышения оценки самому активному).

Проблема *достоверности* мало кем ощущается. Она обычно прячется внутри другой проблемы: проблемы создания и поддержания стимулов к занятиям математикой. Рассмотрим несколько типичных решений, которые игнорируют проблему достоверности или решают её не теми средствами.

А. Отсылка к внешней необходимости

— чтобы сдать ЕГЭ, экзамен

— пригодится в институте.

Проблема достоверности полностью игнорируется.

Главная ошибка: воспринимать заданные внешней необходимостью рамки как конечную цель и строить обучение соответственно. Мы подчинены закону всемирного тяготения, считаемся с ним, но глупо перелагать на него ответственность за набитые шишки. Не надо идти туда, куда толкает тяготение — это всегда путь вниз. Занятия из-под палки стимулов не создают. Не случайны попытки школьников обойти внешнюю необходимость экзамена за счет шпаргалок и взяток. И мы должны идти своим путем. Я, например, любил говорить студентам что-нибудь такое: «Давайте я расскажу, как можно обхитрить экзаменаторов и не решать квадратное уравнение» и, добившись внимания, учил их теореме Виета».

Б. Преподавание математики как подчиненного средства для изучения одной конкретной нематематической дисциплины.

Проблема достоверности осознается и решается, но за счет сильного сужения предмета «математика». Ключевое слово здесь «подчиненное». Многие воспринимают математику лишь как средство посчитать зарплату, прибыль или как средство решения узкоприкладных задач своей дисциплины. Это не математика. Руководитель спросил бухгалтера, сколько денег понадобится, чтобы выдать всем 200 работающим премию по 10% от зарплаты. За час бухгалтер посчитала: вычислила премию каждого и сложила. А понимай она закон дистрибутивности, управилась бы за минуту.

Однако само по себе преподавание математики с ориентацией на конкретную отрасль может быть хорошо как старт: быть не только стимулом, но и снабдить обучаемых запасом интуитивно понятных моделей. Так, физические соображения могут помочь выработке математической интуиции. Важно еще понимать, что доказательное рассуждение для математиков и, скажем, для инженеров — не одно и то же. К примеру, рассуждение по индукции для человека с инженерным мышлением доказательством не является. Вопрос о сходимости ряда для них тоже схоластический (это, обычно, понятно из физических соображений), зато очень важно уметь оценить, сколько слагаемых надо оставить, чтобы получить сумму ряда с заданной точностью.

Но для каждой конкретной науки нужен лишь узкий круг разделов. Расширение списка разделов и дальнейшее преподавание должно всё-таки следовать структуре математики, не нарушать её единство.

В. Подпитка интереса за счет побед над другими.

Это процветает в кружках и матшколах, чрезмерно ориентированных на олимпиадную математику. Самолюбие — сильный стимул, его можно и нужно использовать. Но это стимул внешний. Проблема достоверности решается лишь отчасти: за счет участия во внешних соревнованиях, где ученик видит, что правильность не зависит от суждения учителя.

Проблемы начинаются, когда стимул заканчивается: учащийся терпит поражение, или просто выбывает из олимпиад по возрасту. Некоторые воспринимают этот переход тяжело. Мне известны несколько бывших победителей олимпиад, при поступлении в вуз утративших интерес к математике и переключившиеся на компьютерные игры. В качестве некоторого противоядия я стараюсь перед учениками затушевать соревновательный момент и подчеркнуть игровой. Удовольствие от процесса игры может и должно перевешивать для большинства неудовольствие от проигрыша: только тогда игра окажется полезной всем.

Г. Уход «в отрыв».

Случается интенсивное обучение «узким» областям математики с опережением на класс или на два, с забеганием в университетскую программу. Может сочетаться с игрой в научную деятельность, участием в научных конференциях школьников. Такое обучение часто производит большое впечатление на несведущих: родителей и чиновников. Проблема достоверности при этом полностью игнорируется и даже отрицается (иногда с притворными жалобами, что смежные дисциплины «не поспевают»). Под спешку и интенсивность подводится «теория»: надо успеть показать побольше красивых математических фактов, а дальше уже осознание красоты будет служить стимулом. Реально же такое опережение чаще делается в расчете на победу в олимпиаде над сверстниками. Много раз видел как «ранний старт» завершается ранним кризисом.

Собственно, осознание сути проблемы достоверности подсказывает пути её решения. Надо последовательно работать над преодолением сомнений. Способов немало.

А. Постоянный показ связей между математикой и действительностью.

Под действительностью надо понимать тот опыт, который уже имеется у учащихся. Подойдут игры, общение с компьютером и гаджетами и даже школьный опыт, в том числе общение с цифрами и числами на уроках математики. Чем объекты связей разнообразнее, тем лучше. Значительную долю могут и должны составлять задачи на обычном языке. Тогда необходимый перевод на математический язык и обратно уже дает нужные связи.

Для младших идеально подходят ситуации, когда математика сопряжена с физической активностью. Так, решение задачи про перевоз волка, козы и капусты (или ей подобных) хорошо превращается в ролевую игру для малышей с четырьмя ролями (Лодочник, Волк, Коза, Капуста), а проход между партами служит рекой. Лемму о рукопожатиях можно предварить такими заданиями: разбить учащихся на группы по 6, и каждый должен в своей группе коснуться руками и ногами ровно троих. Затем то же, но для групп по 7 человек. Впрочем, задание о касание охотно выполняют даже и старшие школьники, особенно если в каждой группе представлены лица обоих полов…

Для среднего возраста (6–9 классы) хорошо работают задания, где можно на основе расчетов сделать предсказание, а потом его экспериментально проверить. Таких заданий довольно много в книгах Я.Перельмана. В частности, годятся измерения длин на расстоянии от объекта.

Для старших (10-11 классы), помимо физических экспериментов, можно порекомендовать эксперименты со статистическими испытаниями и сравнения результатов с предсказаниями на основе теории вероятностей.

Обсуждение работоспособности и эффективности алгоритмов можно сопровождать компьютерными экспериментами.

Сильным учащимся можно предложить обратную задачу: придумать строгое математическое обоснование утверждений, очевидно верных их физических соображений. Например, из физики понятно, что а) любой выпуклый многогранник будет устойчиво стоять на одной из его граней, где бы внутри не располагался центр тяжести; б) сумма сил давления на многогранник равна 0 (то есть равна 0 сумма векторов, перпендикулярных граням с длинами, пропорциональными площадям). А как это доказать математически?

Б. Постоянный показ связей внутри математики между её разными областями

Экспериментальная проверка математических рассуждений затратна по времени, и не все сильные учащиеся её одобряют. Они предпочтут перекрёстную проверку внутри математики, то есть проверку математики математикой же, но другим способом. Для этого удобно использовать задачи с двумя сильно непохожими решениями, скажем, геометрическим и алгебраическим. В частности, полезно использовать метод координат не только для перехода к алгебре, но и обратно, то есть — для решения алгебраических задач геометрическими методами.

Полезны и «двустворчатые» задачи, то есть состоящие из двух дополняющих друг друга частей, требующих двух различных методов. К таким задачам относятся геометрические задачи на построение, где анализ и построение дополняют друг друга. Задачи на оценку + пример требуют как построения примера, так и рассуждения, доказывающего оценку (и, как правило, не опирающегося на пример). Когда такие разные оценка и пример вдруг «волшебным образом» сходятся, это производит на учащихся впечатление. Тем самым в их глазах повышается достоверность рассуждения и метода рассуждения, что в целом работает на единство математики.

Среди двустворчатых задач можно ещё выделить задачи на решение игр, то есть на поиск оптимальных стратегий за обе стороны. Здесь важно не только придумать хорошие алгоритмы, но и показать, что не существует лучших алгоритмов при *любой* игре другой стороны. Стоит отметить, что во многих случаях стратегию для каждой из сторон удобнее приводить и доказывать независимо.

Вообще, математике присущ высокий уровень рефлексии. Начав с построения моделей для понимания окружающего мира, математика в своем развитии все больше строит такие модели для целей внутреннего развития. В этом нет ничего плохого, пока это служит единству и целостности математики, а не растаскиванию её «по отдельным квартирам».

Кружковая математика потому и эффективна, что пронизана связями между разделами.

Кстати, отслеживание таких связей позволяет создать внутренний «индекс цитирования» понятий и методов. Это позволяет оценить степень их значимости и использовать его в преподавании. Скажем, идея «составить уравнение» много значимей формулы корней квадратного уравнения. Прогрессии и числа Фибоначчи встречаются много чаще тригонометрических функций. И т. п.

B. Увеличение числа ситуаций, где правильность оценивается не преподавателем, а другими не зависящими от него лицами или самими учениками.

Для этого хорошо подходят математические бои, другие командные соревнования и личные олимпиады. Очень эффективно работает привлечение старших учащихся к контролю младших учеников и даже некоторому их обучению.

Г. Показ идей решения, идущих от действительности

Математика возникла как обобщение и осмысление нашего умения понимать действительность. Понять: построить в голове адекватную модель. Математические модели — важный частный случай. Умение их строить заложено от природы. Маленький ребенок — математический гений, так как он самостоятельно открывает математическую структуру родного языка (иначе не заговоришь).

Куда девается эта гениальность? Она заваливается мусором штампов, а мы с вами всего лишь помогаем эти пласты мусора хоть немного разгрести.

Используя какой-либо метод решения, я всегда стараюсь показать его аналогию или связь с методом вне математики. Много таких аналогий читатель может найти в моих книгах «Как построить пример» и «Принцип узких мест». Так, использование неэлементарных построений в задачах на построение аналогично строительству дома не из отдельных кирпичей, а из блоков и панелей. Доказательство по индукции аналогично постройке дома поэтажно, когда следующий этаж опирается на уже построенные предыдущие. Вообще, учащиеся должны осознать, что как бы хорошо они не изучили математику, их житейский опыт в миллионы раз больше, и поэтому естественно черпать идеи и подсказки оттуда!

Математические конструкции и их роль в преподавании математики

А.В. Шаповалов,
г. Стокгольм, Швеция
sasja@shap.homedns.org

1) Креативность. Как можно определить есть у младшего школьника творческие способности к математике или нет? Надо дать ему нестандартную задачу. Почти наверняка в ней надо придумать какую-то конструкцию. Все мы помним такие задачи с детства: про волка козу и капусту, разрежь и сложи, нарисуй, не отрывая карандаша от бумаги, расставь числа в кружочке. Такие задачи легко записывать и легко проверять благодаря их наглядности. Более того, нередко школьник и сам может проверить, решил он или нет.

Напомним несколько ярких задач.

1.1. Посадите 9 деревьев так, чтобы получилось 10 прямых рядов по 3 дерева в каждом.

1.2. Разрежьте квадрат на 6 треугольников так, чтобы каждый граничил по отрезку ровно с тремя другими.

Оказывается, что умение придумать не слишком зависит от оценки по «обычной» школьной математике. И понятно почему: традиционная оценка прежде всего оценивает умение применять *заранее выученные* приёмы в более-менее *стандартных* ситуациях. Это похоже на открывание двери, и цель обучения часто понимается так: дать ученику связку из как можно большего числа ключей, и научить быстро выбирать нужный. Это, конечно, важный аспект обучения, но он не должен быть единственным, особенно при обучении математике.

Ведь в жизни ничуть не реже попадаются *лёгкие, но не стандартные* задачи, когда надо что сделать, а готового рецепта «как сделать» нет. Ну не нашлось в связке подходящего ключа, а войти надо. Придётся разобраться, а потом что-то придумать…

Решение задач на построение примеров эту способность придумывать поддерживает и развивает.

Тут есть, однако, такое возражение. Это, мол, задачи-головоломки. Какое отношение они имеют собственно к обучению математике? Ведь главное, что отличает математику от других видов деятельности — строгий стандарт доказательств. А тут придумал пример, один из многих, и доказывать ничего не надо?! Эдак не отличишь невежду от хорошо обученного школьника…

Подобные опасения лежат в основе кружковых программ, где умение строить конструкции рассматривается как своего рода «детская болезнь», которую надо мягко, но настойчиво лечить.

Автор с таким подходом решительно не согласен. Есть, конечно, задачи-головоломки, но не о них речь. Во-первых, чистых головоломок довольно мало, и в целом в задачах на конструкции математики ничуть не меньше. Достаточно поставить вопрос «Можно ли?» или «Для какого наименьшего?» и тут уж необходимость математики при решении становится очевидной. Во-вторых, научный опыт автора показал, что при поиске доказательств в «высокой математике» созидание конструкций используется ничуть не реже, чем применение теорем. В конце концов, любое доказательство само по себе является конструкцией! Наконец, большая часть школьников, вероятнее всего, будет применять свои знания и навыки в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала.

2) **Применимость.** Но ведь придумывать — это удел немногих. Для большинства школьников стоит задача хотя бы разобраться в том, что уже придумано. Помогут ли тут задачи на конструкцию? Да, конечно. В рамках обычной школьной программы школьников

надо научить применять усвоенное. Поскольку жизнь бесконечно разнообразна, применение тоже требует изобретательности. А математические конструкции служат хорошей моделью реальных задач. Впрочем, один род задач на конструкцию в программе уже есть: это задачи на построение в геометрии.

Задачи на построение и примыкающие к ним задачи на геометрические места точек широко известны, я здесь их приводить не буду. Замечу только, что они играют важную роль: служат примером применения абстрактных знаний для достижения наглядных и конкретных целей. Ведь большинство школьников вовсе не собираются становиться профессиональными математиками, и правильно догадываются, что роль строгих доказательств за пределами математики не очень велика. Вообще, доказательства выглядят не слишком достоверными, если их результаты нельзя «пощупать руками». А если еще требования «докажите» всегда идут только от учителя, они будут восприниматься лишь как навязанный «довесок», особенно для учащихся с конструктивным складом ума. В задачах же на построение требование доказательства возникает естественно, как требование к обоснованию работоспособности алгоритма. Тем самым построения работают на достоверность.

Кроме того, демонстрируется и усваивается и мощная идея собирания из блоков: мы строим обычно не из кирпичиков элементарных построений, а из блоков — неэлементарных построений, которые мы уже научились делать ранее. Такие навыки очень нужны школьникам для программирования.

Корпус задач на построение достаточно разнообразен. Это позволяет показать работу не только любого общего приёма составления или исследования алгоритма, но и очень многие «чисто» геометрические теоремы и понятия. Последнее, впрочем, верно и для задач на конструкцию вообще.

По материалу эти задачи можно разбить на комбинаторно-геометрические, числовые, алгебраические и прочие.

Числовые конструкции обычно работают с группами чисел, иногда довольно большими. Этот навык оказывается потом очень нужным в программировании. Для целых чисел обыгрывается четность, делимость, остатки. Для произвольных чисел на первый план выходят последовательности, суммы, неравенства.

2.1. Разложите 100 орехов на 10 кучек так, чтобы в них было разное число орехов, но никакую из куч нельзя было бы разбить на две так, чтобы получилось 11 кучек, и число орехов во всех них было различным.

Комбинаторно-геометрические задачи замечательны своею наглядностью. А хороши тем, что заставляют отказываться от стереотипных путей использования привычных геометрических фактов. В отличие от классических задач, уровень трудности комбинаторных по формулировке определить почти невозможно. Учителя послабее видят в этом большие трудности, а учителя посильнее — большие возможности. Кстати, особенно трудными оказываются задачи, где возможных ответов много: при избытке свободы оказывается легче заблудиться.

2.2. Дан многоугольник и точка вне его. Верно ли, что хотя бы одна сторона многоугольника видна полностью?

Алгебраические конструкции встречаются реже. Они помогают расширять расширить представления школьников при переходе от частных объектов к общим, скажем, от линейных и квадратичных функций — к многочленам, а от многочленов — к общему понятию функции. Ведь важно показывать не только то, что есть, но и чего нет. Так, если при переходе к общему свойство исчезает, очень полезно построить контрпример.

3) Достоверность. Конструктивные задачи хороши и для преподавания математики как достоверной науки. Среди них много «двустворчатых», то есть состоящих из двух дополняющих друг друга частей, требующих двух различных методов. Скажем, задачи на оценку + пример требуют как построения примера, так и рассуждения, доказывающего оценку (и, как правило, не опирающегося на пример). Когда такие разные оценка и пример вдруг «волшебным образом» сходятся, это производит на учащихся впечатление. Тем самым в их глазах повышается достоверность рассуждения и метода рассуждения, что в целом работает на единство математики.

3.1. Клетчатую квадратную рамку 17×17 (с дыркой 15×15) разрезали по границам клеток на несколько частей и сложили из них квадрат 8×8. Каково наименьшее количество частей?

Среди двустворчатых задач выделим ещё задачи на решение игр, то есть поиск оптимальных стратегий за обе стороны. Здесь важно не только придумать хорошие алгоритмы, но и показать, что не существует лучших алгоритмов при любой игре другой стороны. Стоит отметить, что во многих случаях стратегию для каждой из сторон удобнее приводить и доказывать независимо.

3.2. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

4) Контрпримеры. Для обычных уроков наибольший интерес представляют конструкции двух типов: контрпримеры к типичным заблуждениям и примеры, позволяющие с неожиданной стороны посмотреть на знакомые объекты и понятия.

4.1. Типичное заблуждение, что в русском языке нет слов с пятью согласными подряд. Приведите контрпример.

4.2. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(1)=1$, $P(2)=2$, …, $P(100)=100$. Обязательно ли $P(101)=101$?

4.3. Разрезав четырехугольник по любой из диагоналей, мы получим два равнобедренных треугольника. Обязательно ли диагонали перпендикулярны?

5) Неожиданный ракурс

5.1. а) Треугольник, где все углы измеряются рациональным числом градусов, назовем хорошим. Докажите, что в нем можно выбрать такую точку, что соединив её отрезками с вершиной, мы разобьем исходный треугольник на три хороших.

б) Докажите, что для остроугольного хорошего треугольника такое разбиение можно сделать не менее чем тремя способами.

5.2. Клетчатая таблица называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы (см. пример на рисунке). Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным?

9	5	1
4	3	8
2	7	6

5.3. Купившему головку сыра весом 3 кг магазин предлагает призовую игру. Покупатель режет головку на 4 куска, а продавец выбирает из этих кусков один или несколько и раскладывает их на одну или на обе чаши весов. При неравновесии продавец обязан за счет магазина добавить призовой кусок сыра, уравновешивающий чаши. Продавец старается сделать приз поменьше, а покупатель — побольше. Найдите вес призового куска при наилучших действиях сторон.

Ещё задачи

6.1. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Получилось 5 корок. Как такое могло быть, если корок никто не грыз?

6.2. Разрежьте квадрат на равные треугольники и сложите из всех них два меньших не равных квадрата.

6.3. Натуральное число увеличили на 10% и снова получили натуральное число. Могла ли при этом сумма цифр уменьшиться ровно на 10%?

6.4. В бесконечной возрастающей геометрической прогрессии каждое число заменили на его дробную часть. Могла ли получиться строго убывающая геометрическая прогрессия?

6.5. Среди значений многочлена от двух переменных встречаются все положительные числа. Обязательно ли среди значений есть 0?

6.6. Разрежьте треугольник на n треугольников и проведите в каждом из них по медиане так, чтобы все медианы были равны.

Концепция авторской программы по математике для высокомотивированных школьников

Я.И. Абрамсон,
Школа «Интеллектуал» г. Москва
yakovabramson@mail.ru

Аннотация.

Обсуждается проект углублённого и ускоренного обучения математике по авторской программе мотивированных детей с 1-го по 11-й классы и промежуточный анализ этого эксперимента, идущего 3-й год в начальных классах в ГБОУ «Интеллектуал».

Стремительное развитие математики и физики всё более увеличивает сумму знаний, необходимых выпускникам физико-математических факультетов университетов для выведения их на передний край современного состояния этих наук. В то же время математика — это по-прежнему область знаний, в которой важнейшие результаты делаются, в подавляющем большинстве случаев, молодыми людьми.

Программы же по математике как в ВУЗах, так и в старших классах физико-математических школ и без того уже перегружены, по крайней мере, в том виде, в котором они сегодня существует. Резерв имеется лишь в первых шести классах школы.

С другой стороны, за время пребывания в начальной школе у большинства детей отбивается напрочь интерес к математике, формируется стереотип о ней как о науке застывшей и мёртвой, наподобие латыни, состоящей из мнемонических правил, которые надо вызубривать. Разумеется, для прошедших сквозь это горнило и «уцелевших» благодаря семьям, поддерживающим этот интерес домашними занятиями, кружками, к 7–8 классам предоставляют свои услуги специализированные физико-математические школы, существующие, как правило, в крупных городах.

Автор не ставит перед собой задачу глобального изменения качества преподавания математики в массовой школе — для этого нет предпосылок, да и, пожалуй, в этом и нет необходимости. Для поддержания конкурентоспособности страны в области высоких технологий необходимо относительно небольшое количество высоких профессионалов, имеющих фундаментальную математическую подготовку.

А для этого достаточно иметь сеть школ в крупных областных центрах страны и, особенно, таких мегаполисах, как Москва, Петербург, Самара, Казань, Новосибирск и др., предоставляющих особую, интенсивную и углублённую программу развития для высокомотивированных детей, начиная с первого класса, *отобранных по конкурсу.*

Ведь не возникает же сомнений в том, что, с одной стороны, учить детей музыке, языкам, гимнастике и фигурному катанию лучше всего в раннем возрасте, начиная с 5–7 лет, а, с другой стороны, не всякий ребёнок имеет природные склонности, способности к этим занятиям! Не все одарены ростом, гибкостью, координированностью, быстроте реакций, музыкальным слухом. И потому отбор в спортивные школы, музыкальные и балетные училища вызывает понимание. Но ведь и математические способности встречаются не у всех, а, с другой стороны, необходимость их развивать с ранних лет не менее актуальна, чем та же задача в отношении языков, музыки и спорта.

Пожалуй, я бы говорил не столько о математических способностях (хотя для опытного педагога не составляет труда в течение нескольких занятий определить предрасположенность ребёнка к математике в возрасте 6–7 лет), сколько о любопытстве, любознательности, упорстве, способности фокусировать своё внимание на одной задаче в течение длительного времени, не бросая её из-за того, что она не поддаётся.

Внимательное наблюдение за ребёнком в процессе решения им разного рода «задач на смекалку» позволяет сделать выводы о целесообразности его обучения по предлагаемой программе с неменьшей степенью обоснованности, чем принимаемые решения в этом же возрасте преподавателями музыки или бальных танцев.

Интересно отметить, что во всех трёх приёмно-отборочных кампаниях в первый класс школы «Интеллектуал» мнения нескольких педагогов — преподавателей русского языка, биологии (проводивших занятия по предмету «окружающий мир»), математики, психолога и завуча начальной школы совпали в итоге почти по всем кандидатурам! Разногласий особых не было, несмотря на то, что в последний раз, когда этот отбор проводился, конкурс составлял уже 20 человек на место.

Значительная часть детей младшего школьного возраста, особенно дети, посещавшие развивающие дошкольные курсы, получившие широкую разностороннюю подготовку дома (чтение, рисование, лепка, собирание «Лего», музыка), испытывают острый интеллектуальный голод, придя в школу и не получая там адекватной умственной нагрузки. Сегодняшняя начальная школа в отношении преподавания математики, особенно контингенту так называемых «одарённых детей», совершенно неадекватна их возможностям, запросам и потребностям.

Применение совершенно новых программ с применением современных педагогических технологий, опирающихся на ТПФУДиП[1] проф. П.Я. Гальперина позволяет, как нам кажется, в значительной мере решить эту проблему.

В ходе продолжающегося эксперимента в ГБОУ «Интеллектуал» в 2010–2011, 2011–2012 и 2012–2013 учебных годах преподавание математики по описываемой методике осуществлялось 4 часа в неделю, в двух классах по 16 детей в каждом. Класс набора 2010 года заканчивает сейчас третий класс, класс, набранный в 2011-ом, соответственно — второй.

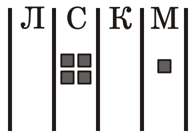
В первом классе были пройдены следующие темы: запись чисел в позиционных системах счисления, сложение и вычитание

[1] Теория Поэтапного Формирования Умственных Действий и Понятий.

многозначных чисел в различных системах счисления, первое знакомство с геометрией, умножение многозначных чисел на однозначные, деление многозначных чисел на однозначные, возведение однозначных чисел в степень, свойства операции возведения в степень, извлечение корня и взятие логарифма. Разумеется, всё это в натуральных числах и в случаях, когда эти операции выполнимы (в рамках натуральных чисел).

Знакомство с позиционными системами счисления мы начинаем с двоичной. Преимущество по сравнению с десятичной: можно наглядно продемонстрировать большое количество разрядов, легче записывать (всего два знака) и проще процедуры поразрядного сложения и вычитания. Числа дети записывают фломастерами на *пластиковых досках* (разлинованных в клеточку): рука у них ещё не поставлена и выводить каракулями ручками или карандашами в тетрадях заняло бы гораздо больше времени и сил. Кроме того, результаты они показывают и учитель сразу видит со своего места у кого правильно и может соответственно поощрять успешных учеников и корректировать ход урока.

Сами числа дети выкладывают с помощью кубиков на партах (первый, материализованный этап). В качестве ориентировочных основ для выполнения операции записи чисел выступают условные «звери». Так, один кубик — это стоимость одной мышки, две мышки (два кубика) стоят одну кошку, две кошки — одну собаку, две собаки — лису и т.д. Звери обозначаются их заглавными первыми буквами — М, К, С, Л,…



Число «пять»

Число (учитель называет устно) изображается кубиками и затем раскладывается на разграфлённых листах.

Затем число записывается с помощью символов (в двоичной системе).

Переход к троичной системе осуществляется после того, как примерно половина детей успешно осваивает запись в двоичной. Характерным здесь является тот момент, что мы *не дожидаемся, пока все ученики овладеют записью чисел в двоичной системе.*

Дело в том, что во время записи чисел в троичной системе происходит закрепление навыка у тех, у кого он уже сформировался на базе двоичной и понимание алгоритма у тех, у кого оно не сформировалось ещё ранее, так как по существу происходит повторение. Этот приём — наложение слегка изменённого алгоритма на ещё не отработанный старый, является существенным ускорителем при прохождении материала. При таком подходе, во-первых, экономится время, а, во-вторых, дети воспринимают запись в троичной системе как нечто новое и ощущение новизны позволяет избежать утомления от однообразных упражнений.

Дальше всё продолжается вплоть до десятичной системы.

Использование пластиковых досок и поощрение правильных ответов «звёздочками» *вместо оценок* позволяет поддерживать высокий темп урока (что очень важно при работе с детьми младшего школьного возраста). С другой стороны, это исключает отрицательные эмоции, связанные с выставлением неудовлетворительных оценок (неправильные ответы и решения, равно как и их отсутствие, никак не оцениваются).

Естественно, дети объясняют все свои действия, проговаривая вначале их *вслух*, постепенно сокращая промежуточные этапы. Если вначале мы пишем числа подряд (один, два, три, четыре,…) то затем начинаем «прыгать»: «четырнадцать», «семнадцать». «двадцать один».

Переходя к сложению, мы демонстрируем на кубиках свойства сложения: коммутативность и ассоциативность. Затем показываем, как, используя эти свойства, удобно складывать числа, записанные в двоичной системе счисления, разбивая складываемые числа по разрядам — мышкам, кошкам и т.д. Складывая мышек с мышками, кошек с кошками и производя при этом необходимые замены (мышек кошками, кошек собаками и т. д.) мы быстро осваиваем поразрядное сложение.

Двоичность системы позволяет *наглядно демонстрировать многозначные числа* на кубиках. Опыт показывает, что вместо того, чтобы складывать много двузначных чисел, достаточно пару раз сложить десятизначные числа, чтобы освоить алгоритм сложения «в столбик». Поэтому мы не разбиваем единую тему сложения на подтемы, как это принято в некоторых учебниках, «сложение в пределах 10», «сложение двузначных чисел», «сложение с переходом через десяток», «сложение трёхзначных чисел» и т.д.

Аналогичным образом происходит и выработка алгоритма вычитания «в столбик». И вновь мы сразу же оперируем с многозначными числами и проходим по позиционным системам, начиная с простейшей из них, двоичной, и заканчивая привычной для нас десятичной. Отметим, однако, следующий важный момент. Операцию вычитания мы определяем не как физическое «отнимание» или уменьшение данного количества, а как ответ на вопрос — что надо прибавить к такому-то известному числу, чтобы получить другое заданное число. То есть, как решение уравнения $a + x = b$. Это, с одной стороны, облегчит в дальнейшем обоснование необходимости введения отрицательных чисел, а с другой стороны позволяет в одной схеме описывать и другие обратные операции — деления, извлечения корня и взятия логарифма.

Прежде чем приступать к умножению, мы на пару месяцев отправляемся знакомиться с первыми понятиями по геометрии, чтобы в дальнейшем связать операцию умножения с площадью прямоугольников. Прямоугольники затем используются для наглядной иллюстрации свойств умножения (и сложения) — коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Прежде всего, мы обсуждаем на уроке как мы даём определения каким-либо новым словам, понятиям. Анализируя это и прослеживая процесс в обратную сторону (а с помощью чего мы определили это, а как мы определили то, с помощью чего определили и т.д.), мы приходим к пониманию необходимости *неопределяемых понятий*. Точно так же, анализируя доказываемые утверждения, мы приходим к необходимости постулирования каких-то утверждений и называем их *аксиомами*.

При неторопливом и аккуратном ведении уроков, эти понятия на первоначальном уровне вполне доступны тому контингенту 7-летних детей, о которых идёт речь.

Затем наступает время для обсуждения мотивировки некоторых неопределяемых понятий: точки, прямой и плоскости. Обсуждается источники в окружающем нас мире, при идеализации которых мы получаем эти понятия. Сам момент идеализации тоже отмечается: мы никогда не имеем дела с реальными точками, как бы малы ни были интересующие нас объекты, так же как не встречаем и идеально тонких, прямых и бесконечно длинных объектов.

Затем мы обсуждаем понятие «равенства» фигур в геометрии. Мы называем равенством то, что позже назовём конгруэнцией — возможность совместить полностью фигуры наложением. При этом мы анализируем сам процесс этого «наложения», подводя детей к важнейшему понятию геометрических преобразований. Так, например, если речь идёт о треугольниках, мы говорим, что сравниваемые треугольники как бы сделаны из тонкой жести, и их нельзя сгибать и растягивать. Один из них остаётся на месте, а другой (предварительно вырезанный из листа жести, на котором он нарисован), мы подносим к нему, чтобы попытаться наложить его и проверить на равенство.

Мы обсуждаем сам процесс этого перемещения треугольника, как твёрдого тела, в пространстве. Что мы при этом можем делать, на какие элементарные движения можно разложить этот процесс. Выясняем, что можно «нести прямо» (трансляция вдоль вектора), «крутить-вертеть» (поворачивать вокруг оси) и «переворачивать» (отражать симметрично относительно прямой на плоскости). При этом во всех случаях, кроме последнего, мы, осуществляя движение треугольника, остаёмся в плоскости, параллельной той, из которой его вырезали. Придя к этим выводам, мы в дальнейшем, устанавливая «равенство» фигур проговариваем вслух этот процесс: как подносим, что совмещаем вначале, что потом.

Обращая внимание на движения в процессе совмещения, мы осуществляем пропедевтику понятия группы движений.

Аксиом у нас всего две:

1. через любые две точки проходит и при том единственная прямая,
2. через точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, лежащая в той же плоскости, что эти точка и прямая и параллельная этой прямой.

Всё, далее мы осуществляем цепочку выводов из этих аксиом, не вызывающих сомнений в их обоснованности и логической безупречности у первоклассников. Хотя уже во 2-ом классе мы замечаем, что пользуемся без каких бы то ни было объяснений *существованием* перпендикуляра из любой точки плоскости на любую прямую. Список уже доказанных утверждений (постоянно пополняемый) распечатывается и лежит на парте у детей перед глазами, чтобы им не нужно было бы запоминать, а лишь нужно было бы ориентироваться в нём (при этом, конечно, происходит непроизвольное запоминание часто употребляемых фактов).

Важно подчеркнуть, что все доказательства находятся и проводятся *детьми*, а не учителем. Разумеется, иногда приходится задавать наводящие вопросы, делать намёки, незначительные подсказки в особо трудных случаях (когда, например, для решения поставленной задачи требуются дополнительные построения), но во всех случаях, после напряжённых, зачастую длящихся больше целого урока коллективных усилий, приходит озарение и счастливый ребёнок несётся к доске поведать о своём открытии.

Но учениками добываются самостоятельно (при поддержке и направляющей, координирующей роли учителя) не только доказательства теорем. Ими же ищутся и находятся и определения для тех или иных понятий.

Возьмем, к примеру, определение *смежных углов.* Важно отметить, что это пример отношения (на множестве углов), то есть определение даётся для пары углов. Не имеет смысла говорить об одном, отдельно взятом угле, смежный он или нет. Точно так же, как о вертикальности углов нужны два угла. Два угла могут быть или не быть вертикальными, об одном угле и вопрос ставить нельзя. Это довольно сложный (и не только для школьников младших классов) шаг — переход от определений для отдельно взятых объектов к определению для пар объектов (находящихся в определённых отношениях между собой).

Итак, учитель рисует на доске два угла и предлагает ученикам дать определение, под которое подпадали бы углы, находящиеся по отношению друг к другу в подобном отношении, и не подпадали бы другие пары углов. При этом ученикам приходится выделять скрытые отношения, отделять существенные черты на рисунке от случайных (размеры каждого из углов, взятых отдельно, например), вербализовывать видимые, но неотрефлексированные признаки и так далее.

Примерные попытки таковы: «Это углы, у которых общее начало (вершины углов совпадают)». Учитель обращается к классу: достаточно ли этого? Не может ли кто-нибудь привести пример пары углов, имеющих общую вершину и, тем не менее, не имеющие всех тех признаков, которые имеет пара углов, нарисованных на доске?

Кто-нибудь рисует на своей доске (и после одобрения учителем) демонстрирует всем соответствующий пример. Следующая попытка может выглядеть так: «У этой пары углов должна быть общая сторона». И вновь учитель предлагает поискать контрпример.

После нескольких безуспешных попыток, появляется и он. Таким образом, выясняется неполнота ООД[2], присутствовавших в ранее дававшихся определениях и выяснилась картина полной системы ООД в данном случае: два угла называются *смежными*, если

- Они имеют общую вершину;
- Они имеют общий луч и
- Два других их луча образуют прямую линию.

Точно так же, по этой же схеме находим в ходе направляемой (учителем) совместной деятельности и определение для пары вертикальных углов на основе примеров, нарисованных на доске.

В первом же классе происходит и первое знакомство с языком математической логики, с высказываниями и их отрицаниями, прямыми и обратными утверждениями, посылкой и заключением

[2] Ориентировочных Основ Действия

импликации. Давались задания сформулировать и доказать теорему, обратную к только что доказанной теореме.

Помимо вышеизложенного, первоклассники учились также работать с циркулем и линейкой, опираясь на доказанные теоремы производить простейшие базовые построения. В составе геометрического блока, после ознакомления с основными приёмами доказательств (в частности, доказательством методом «от противного»), приходит черёд и для темы «величины и измерения». Дети узнают, что бывают линейные меры и угловые, последние несут в себе воспоминания о принятой в древнем мире шестидесятеричной системе счисления. Выясняем, как сравнивать между собой по величине длины отрезков и величины углов. Выясняем, что углы можно измерять в градусах, а можно и в сантиметрах! Тут наступает время и для темы «площадь и периметр». В ходе дискуссии выясняем, что в отличие от случая с углами, когда угловая и линейная меры взаимозаменяемы, меры длины и площади не годятся для сравнения, это просто разные меры, хотя и обладающие общими свойствами.

Другое важное общее свойство длины и площади заключается в том, что если имеются два отрезка и они приставляются концами друг к другу, то длина получившегося большого отрезка равна сумме длин отрезков, его составляющих.

В случае плоских фигур это свойство звучит так: если какая-то фигура составлена из двух других путем приставления их друг к другу, то площадь составленной из них фигуры равна сумме площадей фигур, её составляющих. Это свойство называётся аддитивностью мер площади и длины, но мы пока воздерживаемся от этой терминологии, оставляя её для старших классов. Ещё можно отметить «инвариантность» обоих мер относительно движений: от переносов, поворотов и отражений площадь фигуры (или длина отрезка) не меняется. Слов таких пока на уроках мы не произносим (успеется), но сам факт отмечаем.

Начинаем, естественно, с площадей прямоугольников с целочисленными вершинами и сторонами, параллельными осям координат. Все дальнейшие наши фигуры (многоугольники) также нарисованы на клетчатой доске. Классная доска разлинована в клеточку, таковы же пластиковые доски, имеющиеся у детей на руках.

Затем выясняем, как посчитать площадь прямоугольных треугольников с катетами, параллельными осям координат. Попутно научаемся оперировать с полуцелыми числами. Мир половинок, оказывается, устроен удивительно просто: из двух половинок собирается единичка, а если остаётся лишняя половинка, то её записывают рядом с целым числом. После этого оказывается возможным вычислять площади самых разных замысловатых многоугольников с целочисленными вершинами. Важно лишь уметь правильно разрезать пространство вокруг многоугольника, заключённого в прямоугольную рамку, на прямоугольники и прямоугольные треугольники.

Занятие это — подсчитывать площади разных замысловатых многоугольников, — вызывает повышенный интерес у детей и они готовы заниматься этим бесконечно.

Отметим, что вычисляя эти площади, мы добиваемся, как всегда в подобных случаях, важных побочных эффектов в виде совершенствования вычислительных навыков, умения группировать члены в длинном арифметическом выражении для более удобного и быстрого подсчёта и т.д. Именно такой способ отработки вычислительных навыков — как побочный продукт при выполнении осмысленной и интересной деятельности, при решении содержательных, интересных для детей задач, видится нам наиболее продуктивным и эффективным.

Вычисление площадей прямоугольников, состоящих из целого числа клеточек, не только прямо и непосредственно приводит к понятию умножения, но и позволяет, опираясь на наглядные свойства прямоугольников проиллюстрировать основные правила умножения — коммутативность и ассоциативность, и правило, связывающее умножение со сложением, — дистрибутивность. Заметим, что иллюстрация правила ассоциативности связана уже понятием объёма прямоугольного параллелепипеда.

Опираясь на эти правила, мы начинаем потихонечку, умножая однозначные числа на двузначные, трёхзначные и т.д., выводить правило умножения в столбик. То есть, сначала никаких правил нет. Сначала мы просто составляем, вычисляя с помощью кубиков, таблицы умножения в системах счисления, начиная с троичной и по десятичную систему включительно. Затем выясняем, что происходит при умножении числа на основание системы счисления (все цифры сдвигаются на один разряд вправо). Вычисляя, мы полностью, со всеми подробностями, записываем все промежуточные действия и правила, которые мы при этом используем.

Точно так же, постепенно, начиная с развёрнутого подробного, с проговариванием вслух, и затем постепенного упрощения, сокращения и перевода во внутренний план, мы приходим и к правилу деления уголком (многозначных чисел на однозначные).

Далее возможны варианты: можно продолжать эту тему и перейти к умножению многозначных чисел, а можно ввести понятие степени, корня и логарифма.

Умножение многозначных чисел мы начинали с умножения на двузначное число, разбивая его на сумму десятков и единиц и используя дистрибутивность и свойство умножения на основание системы счисления. При этом вначале, как обычно, мы записываем и проговариваем все действия с максимальной подробностью, отмечая все правила, которыми мы по ходу дела пользуемся.

Освоив умножение, переходим к делению с остатком, определив его, как поиск (решение уравнения) таких чисел для, при которых произведение искомого частного (возможно, неполного) и заданного делителя не превосходит заданного делимого и как можно меньше от него отличается (на число, называемое остатком). Так, если требуется, например, разделить (с остатком) 58 на 4, мы решаем уравнение $58 = 4 \cdot ? + ?$, где искомые частное и остаток обозначены знаком вопроса. Начиная с материализованного уровня исполнения, мы из кучки в 58 фишек составляем прямоугольник 5×10 и кучку из 8 фишек. Задаёмся вопросом — вот у нас есть пять десятков, а мы хотели бы получить прямоугольник со стороной в 4 фишки (делим-то на 4, то есть, в итоге нам надо будет получить прямоугольник со стороной 4 из наших фишек и небольшую кучку, из которой уже нельзя будет выделить 4 фишки так, чтобы добавить к нашему прямоугольнику, то есть, такой, в которой останется меньше четырёх фишек) — что надо сделать?

— Убрать один лишний десяток, отвечают мне дети.

Хорошо, убираем и получаем прямоугольник 4×10 и кучку из 18 фишек. А как эту кучку разложить в прямоугольник со стороной 4? Берём в руки таблицу умножения и ищем столбик под цифрой «4». Идём по нему вниз до тех пор, пока не найдём самого большого числа из тех, которые не превосходят 18. Это оказывается 16, и мы смотрим влево и находим то число, которое при умножении даст нам 16. Это 4. Мы могли бы и просто руками разобрать кучку в 18 фишек рядами по 4 и также получили бы прямоугольничек 4×4 и оставшиеся две фишки. Этот маленький прямоугольничек присоединяем к большому и получаем прямоугольник со сторонами 4 и 14 и оставшиеся две фишки. Записываем этот результат нашего деления, как $58=4\times14+2$. Называем 58 в этой записи делимым, 4 делителем, 14 (неполным) частным, а 2 — остатком. Мы нашли те неизвестные, которые надо было подставить в уравнение, чтобы оно обратилось в верное равенство. Так мы повторяем несколько раз, постепенно увеличивая делимое и меняя делитель, приходя постепенно к пониманию процесса, называемого делением уголком. Вновь, как и при умножении, для проведения в материализованной форме деления многоразрядных чисел нам помогают системы с малым основанием. Так, деля в четверичной системе счисления трёхзначное число 231_4 на 3, мы должны использовать всего сорок пять фишек — даже меньше, чем в предыдущем примере. Ключевым моментом здесь является именно деление трёхзначных чисел на однозначные, поскольку именно на этом этапе детьми уже усваивается алгоритм; трёх разрядов им оказывается достаточно для усвоения, а переход к высшим разрядам (делению 4-, 5- и более значных чисел на однозначное число) нужен лишь для закрепления и отработки навыка.

Переход от умножения к возведению в степень осуществляется так же легко, как переход от сложения к умножению. Напомним, что речь у нас пока идёт о действиях с натуральными числами (и нулём). Если умножение появилось как операция сложения одинаковых чисел, то возведение натурального числа в натуральную степень (других чисел у нас попросту нет!) определяется как операция повторного умножения одного и того же числа на самого себя. Без каких-либо проблем обнаруживается «основное свойство степени» — $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ (для натуральных чисел). После чего находим и вытекающее из него ещё одно правило: $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$. Потренировавшись на примерах на вычисление степеней при данных основаниях и показателях степени, переходим к решению уравнений, определяющих обратные операции: извлечение корня и взятие логарифма. Отличаются они только положением вопросительного знака в уравнениях:

$$?^a = b \text{ (извлечение корня степени } a \text{ из числа } b\text{);}$$

$$a^? = b \text{ (взятие логарифма из числа } b \text{ по основанию } a\text{)}.$$

После небольшой тренировки в выполнении этих операций, переходим к примерам, содержащим композиции указанных операций (извлечение корня из логарифма, взятие логарифма от корня, под знаком которого стоит выражение, состоящее из произведения степеней и т.п.).

Следующим пунктом программы является знакомство с понятием последовательности — первым знакомством с понятием функции, заданной в этом случае на множестве натуральных чисел и нуля и имеющей множеством значений то же множество чисел.

Начинаем с самых простых последовательностей, заданных формулой общего члена: $a_n = 2n$; $a_n = 2n+1$; $a_n = 3n$; $a_n = n^2$; $a_n = n^2 - n$; $a_n = n^2 - n + 2$; $a_n = 2n^2 - 3n + 1$ и т.д.

Потренировавшись в нахождении заданного члена заданной последовательности, переходим к построению последовательностей, заданных рекуррентной формулой, начиная с простейших и постепенно усложняя:

$a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + 1$, $n = 1, 2, \ldots$; (арифметическая прогрессия)

$a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; (арифметическая прогрессия)

$a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ (геометрическая прогрессия)

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; (последовательность Фибоначчи)

Далее, идя по пути усложнения и увеличения числа предыдущих членов последовательности, используемых при вычислении следующего её члена, мы приходим к различным видам последовательностей (например, циклических), в которых вычисление членов с большими номерами достигается экспериментом и исследованием поведения членов последовательности. Этот материал хорошо бы дополнить программированием алгоритмов построения соответствующих последовательностей на уроках информатики. Этим, по существу, исчерпывается программа первого года обучения.

Второй год обучения начинается с расширения понятия числа с натуральных чисел до целых, то есть, с введения отрицательных чисел. Вводится понятие вектора на прямой (как свободного вектора с незакреплённым началом), но с числом связывается «представитель» класса «равных» векторов с началом в нуле. Действия с векторами дают правила сложения для целых чисел и умножения чисел с разными знаками (мы настаиваем на сохранении правила коммутативности и сохранении правила умножения «старых», т.е., неотрицательных целых чисел). Под сомнением оказывается лишь умножение двух отрицательных чисел. Приводятся различные аргументы (от обычной справедливости — ведь из четырёх возможных вариантов заполнения таблицы умножения целых чисел три нам уже известны и в двух случаях получился «минус», а в одном «плюс») до следующего геометрического:

при построении графиков функций $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ (а мы сразу же переходим к декартовой целочисленной плоскости) мы видим, что получаются точки, лежащие на прямой линии. В области неотрицательных чисел графики функций $y = -x$, $y = -2x$, $y = -3x$ тоже представляют собой точки, лежащие на прямых (на лучах, начинающихся в нуле). Для того, чтобы они продолжали оставаться на тех же прямых и в области отрицательных чисел, должно выполняться правило «минус на минус равняется плюс». Более убедительные аргументы в пользу этого правила, мы оставляем на последующие годы обучения.

Теперь мы в состоянии строить графики различных функций — прямых, парабол, абсолютной величины числа и их комбинаций.

Мы также переходим к правилам действий с векторами на плоскости и учимся находить неизвестный вектор из уравнений типа $2u - x = 3v$, где вектора u и v заданы графически. После приобретения достаточного опыта в построении графиков функций по точкам, мы переходим к анализу правил преобразований этих графиков, а именно, построению функций $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ по заданной графически функции $y = f(x)$, где a — целое число, положительное или отрицательное.

Далее, мы учимся осуществлять композиции этих преобразований, строя по заданному графику функции $y = f(x)$, функции $y = -f(-x)$, $y = -f(x-1)$, $y = |f(|x|)|$, $y = -f(x+1)+1$, $y = f(1-x)$, $y = 2 - f(3-x)$, $y = 1 - f(|1-x|)$, $y = |3 - f(|2-x|)|$ и т.д.

Мы продолжаем наше изучение геометрии, доказываем, в том числе и с применением векторного подхода, теоремы о средней линии треугольника и трапеции (во всевозможных её вариациях), теорему Вариньона и как следствие из неё теорему о делении медиан треугольника их точкой пересечения в отношении $1:2$. Доказываем теоремы о вписанном и центральном углах, о мере углов с вершиной внутри и вне круга, теорему о перпендикулярности касательной к радиусу, проведённому к точке касания и решаем задачи на построение, использующие эти теоремы.

В программе по математике второго года обучения значатся ещё две темы: исчисление высказываний и исчисление множеств. Мы выводим таблицу правил действий с высказываниями и на её основе проверяем теоретико-множественные тождества.

Затем составляется аналогичная (двойственная) таблица основных теоретико-множественных тождеств, на основании которых потом проверяются произвольные равенства на тождественность.

Во втором из двух классов мы перенесли эти две темы (логику и множества) на третий класс, вставив на их место разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения и группировкой слагаемых с вынесением общего множителя. В любом случае, дальнейшая программа такова:

В третьем классе мы, поупражнявшись с цепочками логических и теоретико-множественных преобразований, упражнений на применение формулы включения-исключения, перешли к бинарным отношениям. Нашли примеры отношений на все комбинации из трёх свойств — рефлексивности, симетричности и транзитивности. Привели и примеры отношений линейного и частичного порядка. Далее, основным примером отношения эквивалентности стало для нас разбиение целых чисел по модулю какого-то выбранного натурального числа. Ввели и проверили на корректность операции сложения и умножения в полученном фактор-множестве, и получили конечные арифметики (арифметики остатков по модулю натурального числа). Вывели основные правила:

$$a \bmod c [+] b \bmod c \equiv (a+b) \bmod c \text{ и } a \bmod c [\times] b \bmod c \equiv (a \times b) \bmod c,$$

где в квадратные скобки заключены арифметические действия с классами чисел, а без — обычные арифметические действия с целыми числами. На основании второго из них получили способ быстрого определения остатка от степени числа и приобрели навык в решении упражнений типа «найти остаток от деления на 8 суммы чисел $5300 + 11500$».

Далее, мы ввели понятия простых и составных чисел и с помощью процедуры «решета Эратосфена»; выявили простые числа в пределах от 2 до 61.

Затем обсудили вопрос, до какого простого делителя нужно проверять неизвестное число, чтобы убедиться в том, что оно — простое.

После этого вывели признаки делимости в десятичной системе на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3,9,11.

Поупражнялись в разложении чисел на простые множители. После этого научились, не производя деления, узнавать остатки от деления на числа, являющиеся произведением этих делителей.

Потренировались в нахождении наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел (основанном на их разложении в произведение их простых делителей).

В четвёртом учебном модуле мы развивали свои логические навыки с применением полученных сведений для решения числовых ребусов. Главной целью для нас было научиться правильно записывать последовательность и обоснование сделанных относительно каждой буквы в ребусе выводов. Заодно потренировались в использовании терминологии и символики математической логики и теории множеств. Чем-то это напоминает запись шахматных партий.

Пятый, предпоследний, модуль был посвящён построению рациональных чисел. Мотивировкой для их введения — та же, что и отрицательных чисел в своё время, — решение уравнений. И если раньше мы искали решения для уравнений вида $a+x=b$, $a,b\in N$, то теперь мы занимаемся уравнением $a\cdot x=b$, $a,b\in Z$. При некоторых (a,b) оно имеет решение в целых числах, при некоторых — нет. Паре (a,b) соответствует точка на целочисленной плоскости. Поскольку при $a=0$ уравнение либо не имеет решений вообще, либо годится любое число, мы это значение для a исключаем. Поскольку мы уверены, что в любом случае сохраняется правило «равенство остаётся верным, если обе его части умножаются на одно и то же число», мы понимаем, что тому же значению x соответствуют и все остальные точки плоскости вида (ca,cb). Таким образом, дробью объявляется любая совокупность точек целочисленной плоскости, лежащая на прямой, проходящей через начало координат, кроме самого начала координат. Сами эти точки называются «представителями дроби». Выясняем сразу же как умножаются дроби (умножение левых и правых частей уравнений $a\cdot x=b$ и $c\cdot y=d$ приводит к равенству $ac\cdot xy=b\cdot d$), какая из них служит «нейтральным» элементом по умножению, какой элемент является «обратным» к данному и какие прямые соответствуют целым числам. Смотрим, как складываются при этом целые числа и выводим по аналогии, что складывать мы должны тех представителей двух прямых, которые лежат на одной вертикальной прямой, и складываем мы их как обычные целые числа. Проверяем корректность этого определения, наличие нейтральной (нулевой) прямой, обратной по сложению («противоположной») к данной прямой (числу!)

и все необходимые свойства сложения и умножения. Опираясь на известную нам упорядоченность целых чисел, видим, что дроби растут по направлению «против часовой стрелки». Легко усматриваем, что между любыми двумя дробями можно вставить третью: любые два луча на бесконечности расходятся далеко друг от друга и между ними появляются точки целочисленной плоскости. Собственно говоря, мы произвели операцию удвоения и факторизации на множестве целых чисел. Нам пригодится этот опыт при построении поля рациональных функций из кольца многочленов через пару лет.

Ну и, наконец, последнее, чем мы занимались в этом году в 3-ем классе — это приложение только что построенных нами дробей к геометрии. А именно, занимались мы гомотетией.

Опыт преподавания по аналогичной программе, начиная с 6-го класса по 11-ый в ГБОУ «Интеллектуал» в 2004–2010 и продолжающийся 4-ый год аналогичный эксперимент с 2009 по настоящее время в старшей школе, показал, что, работая напряжённо и непрерывно (в том числе выполняя самостоятельно большие домашние задания на летних каникулах) в течение 6 лет, учащиеся фактически выполняли программу первых двух лет мехмата МГУ, при этом без того напряжения и стресса, который сопровождает там студентов, не подготовленных к «такой» математике, выпускников обычных, не специализированных школ. Ведь им вся информация обрушивается на голову, лекции предлагают уже готовые рецепты и лишь на семинарах они пытаются как-то разобраться в груде информации, которую мы пропускаем через себя постепенно, за 6 лет, доказывая *все* теоремы, которые попадаются нам по пути.

Темпы, с которыми ученики начальной школы в течение первых трёх лет осваивают материал, позволяют надеяться и предполагать, что им удастся — при условии продолжения эксперимента без помех, — качественно и без потери интереса к предмету овладеть к концу обучения в школе математикой в объёме не менее трёх курсов мехмата.

Распространение этого эксперимента позволит не только сформировать выпускников, начинающих высшее образование с качественно нового, более высокого рубежа, но и создать точки профессионального роста для молодых педагогов.

Причём я имею в виду не только собственно учителей математики — ведь такая математическая подготовка учащихся предоставляет (и предполагает!) совершенно иной уровень преподавания других смежных дисциплин, использующих математику как свой инструмент — физику, химию, биологию, информатику.

Перестройка в соответствии с требованиями современной науки и технологии преподавания математики и смежных дисциплин для отобранных в соответствии с их природными (или сформированными) предрасположенностями детей — вещь совершенно неизбежная и неотвратимая. Вопрос лишь в том — где, когда и как это произойдёт.

Литература

[1] Абрамсон Я.И. Преподавание математики (авторская программа) в НОУ «Школа Алеф» (2007/2008 уч/год), http://festival.1september.ru/articles/511767/

[2] Абрамсон Я.И. Авторская программа преподавания математики в школе-интернате для одаренных детей «Интеллектуал», http://festival.1september.ru/articles/579242/

[3] Абрамсон Я.И., Обучение одаренных детей математике. 1-й класс (2010/2011 уч/ год) http://festival.1september.ru/articles/602405/

[4] Абрамсон Я.И., Обучение одаренных детей математике. 2-й класс (2011/2012 уч/ год) http://festival.1september.ru/articles/619698/

[5] Абрамсон Я.И., Обучение одаренных детей математике. 3-й класс (2012/2013 уч/ год) http://festival.1september.ru/articles/631585/

[6] Абрамсон Я.И. Математика. 1 класс. Книга для учителя. Политехника-сервис, 2012.

Математика в олимпиадных задачах по программированию

В.М. Гуровиц,
ФМШ 2007, г. Москва
gurovic@gmail.com

Учителя математики редко интересуются задачами олимпиад по другим предметам. А зря! Например, на олимпиадах по химии и экономике значительная часть задач сводится к простым вычислениям, решениям систем уравнений и т. п. В этой статье мы покажем, что на олимпиадах по программированию часть задач — на самом деле просто задачи по математике, в других же — математические результаты используются как обязательный инструмент. Чтобы у читателя не возникло подозрений, что подобные задачи встречаются редко, и мы специально выискивали подобные задачи из большого многообразия, остановимся на задачах одной конкретной олимпиады — регионального этапа всероссийской олимпиады по информатике 2013 года. Из восьми задач, предлагавшихся на этой олимпиаде, мы разберем четыре, имеющие непосредственное отношение к математике, а затем покажем математическую подзадачу, которой возникала еще в одной задаче этой олимпиады. Таким образом, больше половины задач этой олимпиады — это «ответственность» учителя математики.

Задача 1. Игральные кости.

Юный математик Матвей интересуется теорией вероятностей, и по этой причине, у него всегда есть с собой несколько стандартных шестигранных игральных кубиков. Стандартный шестигранный кубик имеет три пары противолежащих граней, которые размечены таким образом, что напротив грани с числом 1 находится грань с числом 6, напротив грани с числом 2 — грань с числом 5 и напротив грани с числом 3 — грань с числом 4.

Анализируя различные игры с шестигранными кубиками, Матвей придумал новую игру. В эту игру играют два игрока, и проходит она следующим образом: первый игрок бросает один или несколько стандартных кубиков (количество кубиков он определяет сам). После этого первому игроку начисляется количество очков, равное сумме чисел, оказавшихся на верхних гранях всех кубиков, а второму игроку — сумма чисел, оказавшихся на нижних гранях этих кубиков. Побеждает тот, кто набрал больше очков.

Например, если был брошен один кубик, и на верхней его грани выпало число два, то первый игрок получает два очка, а второй — пять. В свою очередь, если было брошено два кубика и на их верхних гранях выпало по единице, то первый игрок получает также два очка, а второй игрок — двенадцать очков, так как на нижних гранях этих кубиков оказались шестерки.

Матвей рассказал об этой игре своему другу, юному информатику Фоме, и они начали играть в неё через Интернет. Поскольку Фома не видит результат броска и не знает, сколько кубиков бросает Матвей как первый игрок, то о набранных каждым игроком очках он узнает только от Матвея. Чтобы проверить достоверность этой информации, Фома решил узнать, какое минимальное и максимальное количество очков мог получить он, как второй игрок, если известно, сколько очков набрал Матвей.

Требуется написать программу, которая по количеству очков, которые набрал первый игрок после броска, определяет наименьшее и наибольшее количество очков, которые может получить второй игрок за этот бросок.

Решение. Решение основано на том факте, что сумма очков на противоположных гранях кубика всегда равна 7. Таким образом, если брошено N кубиков, то сумма очков на их верхней и нижней гранях равна $7N$. Осталось определить, какое минимальное и максимальное количество кубиков необходимо бросить, чтобы сумма очков на верхних гранях могла оказаться равной предложенному во входных данных числу K. Максимальное количество кубиков равно K (на каждом кубике выпало одно очко), а минимальное количество кубиков равно округленному вверх числу $K/6$: на всех кубиках, кроме, может быть, одного, выпало 6 очков. Таким образом, максимальная сумма на нижних гранях равна $(7K - K) = 6K$, а минимальная сумма равна:

$$(7^{\left\lceil \frac{K}{6} \right\rceil} - K).$$

Задача 2. Кастинг.

В театре работает n актеров. Известно, что среди них a — высоких, b — голубоглазых и c — блондинов. Для главной роли в новом спектакле режиссеру требуется только один высокий голубоглазый блондин. Чтобы спланировать свое время для беседы с каждым таким артистом из труппы театра, режиссеру необходимо узнать, какое максимальное или какое минимальное количество артистов, из работающих в театре, подходит для этой роли.

Требуется написать программу, которая по заданным числам n, a, b и c определяет минимальное или максимальное количество актеров, с которыми режиссер должен переговорить.

Решение. Рассмотрим отдельно случай поиска наибольшего и наименьшего количества актеров. В первом случае подходящий актер должен обладать всеми тремя свойствами в отдельности. Наибольшее количество актеров, обладающих всеми тремя свойствами, не превосходит каждое из чисел a, b, c. Несложно построить пример распределения свойств, при котором это количество в точности равно $\min\{a,b,c\}$. Например, пусть первым свойством обладают первые a актеров, вторым свойством — первые b актеров, а третьим — первые c актеров. Тогда всеми тремя свойствами обладают только первые $\min\{a,b,c\}$ актеров.

При решении данной задачи в случае поиска наименьшего количества актеров рассмотрим два возможных способа рассуждений. *Первый способ* заключается в следующем. Расставим актеров по кругу и будем последовательно назначать им свойства следующим образом: первым a актерам присвоим первое свойство, следующим за ними b актерам — второе, и следующим за ними c актерам — третье. При этом может оказаться, что некоторым актерам будет назначено два или три свойства. Поскольку движение осуществляется по кругу, то для того, чтобы какому-то актеру назначить три свойства, необходимо сначала сделать два полных круга, то есть назначить каждому актеру по два свойства. Количество актеров, которые получат три свойства, будет равно количеству актеров, которых обошли, делая третий круг. Если всего назначено $(a+b+c)$ свойств, и длина круга равна *n*, то за два круга будет назначено $2n$ свойств, а на третьем круге — оставшиеся $(a+b+c-2n)$ свойств. При этом, если $(a+b+c-2n)<0$, то ни один актер не получит все три свойства. В этом случае ответ будет равен 0.

Теперь осталось только доказать, что если $(a+b+c-2n)>0$, то полученный вариант действительно будет соответствовать наименьшему количеству актеров. Для этого воспользуемся формулой включения-исключения для трех подмножеств *A*, *B*, *C*, соответствующих актерам, обладающим каждым из трех свойств:

$$|A|+|B|+|C|-|AB|-|BC|-|CA|+|ABC|=n.$$

Отсюда $ABC|=n-a-a-b-c+|AB|+|BC|+|CA|$. Чтобы минимизировать $|ABC|$, нам нужно минимизировать $|AB|+|BC|+|CA|$. Минимальное значение $|AB|$ равно $(a+b-n)$, минимальное значение $|BC|$ равно $(b+c-n)$, минимальное значение $|CA|$ равно $(c+a-n)$. Подставляя эти значения в формулу, получаем требуемое соотношение:

$$|ABC|=n-a-b-c+(a+b-n)+(b+c-n)+(c+a-n)=a+b+c-2n.$$

Второй способ рассуждений для случая поиска наименьшего количества актеров заключается в следующем. Сначала решим аналогичную задачу для двух свойств. Пусть *a* актеров обладают первым свойством, а *b* актеров — вторым. Тогда всего у нас имеется $(a+b)$ свойств на *n* актеров, следовательно, как минимум $(a+b-n)$ актеров обладают обоими свойствами. Пример получить несложно: выстроим актеров в ряд и наделим первым свойством первых *a* актеров, а вторым свойством — последних *b* актеров. При этом если $(a+b) \le n$, то актеров с обоими свойствами не будет вовсе. Поэтому ответ в задаче для двух свойств будет равен $\max\{a+n-n,0\}$.

Теперь применим полученный результат к таким двум свойствам: 1) высокие и голубоглазые; 2) блондины. В первой группе не более $(a+b-n)$ актеров, во второй — c актеров. С учетом доказанного выше факта, всеми тремя свойствами будут обладать не более чем:

$$\max\{\max\{a+b-n,0\}+c-n,0\} = \max\{\max\{a+b-n+c-n,c-n\},0) =$$
$$= \max\{a+b+c-2n,c-n,0\} = \max\{\{a+b+c-2n,0\}$$

актеров. Последнее равенство верно в силу того, что $(c-n)$ не больше нуля.

Задача 3. Города.

Юный программист решил придумать собственную игру. Игра происходит на поле размером $N \times N$ клеток, в некоторых клетках которого расположены города (каждый город занимает одну клетку; в каждой клетке может располагаться не более одного города). Всего должно быть ***чётное*** количество городов.

Изначально про каждую клетку игрового поля известно, расположен ли в ней город или нет. Чтобы начать игру, необходимо разделить игровое поле на два государства так, чтобы в каждом государстве было ***поровну*** клеток-городов.

Граница между государствами должна проходить по границам клеток таким образом, чтобы из любой клетки каждого государства существовал путь по клеткам этого же государства в любую другую его клетку (из клетки можно перейти в соседнюю, если они имеют общую сторону). Каждая клетка игрового поля должна принадлежать только одному из двух государств, при этом государства не обязаны состоять из одинакового количества клеток.

Требуется написать программу, которая с учетом сказанного разделит клетки заданного игрового поля между двумя государствами.

Решение состоит из двух этапов. На первом этапе считываются входные данные и подсчитывается общее количество городов, то есть букв «C» во входном файле. Разделив это количество на 2, можно узнать требуемое количество городов K в каждом государстве.

На втором этапе выбираются города-клетки, относящиеся к первому государству. Это можно сделать разными способами. Самый простой из них заключается в следующем. Рассматриваем строки игрового поля сверху вниз, а элементы в каждой строке — слева направо и подсчитываем количество встречающихся городов. Процесс останавливается, как только встречается K-й город. Все пройденные к этому моменту города-клетки, включая клетку с K-м городом, следует отнести к первому государству, а остальные города-клетки – ко второму. Полученные государства будут связными, так как они состоят из нескольких последовательных полных строк и части еще одной строки, соседней с полными строками.

В простейшем случае, когда на игровом поле всего два города, для решения данной задачи достаточно найти один город и создать первое государство, состоящее только из клетки с этим городом. Второе государство будет состоять из всех остальных городов-клеток.

Задача 4. Две окружности.

Юный футболист Митя обнаружил на школьном футбольном поле две различные окружности, нарисованные едва заметной белой краской. Вспомнив истории о загадочных кругах на полях, он отметил эти окружности с помощью небольших камешков. Митя разложил на поле n камешков так, чтобы каждый из них находился на одной из окружностей или даже на их пересечении, если эти окружности пересекаются. Получилось так, что на каждой окружности размещался хотя бы один камешек. Обладая великолепным глазомером, Митя расположил камешки на окружностях абсолютно точно, без какой-либо погрешности.

На следующий день пошел дождь, краска стерлась, и нарисованные окружности исчезли, но все камешки остались на своих местах.

Теперь Мите очень нужно найти доказательство необычного явления, свидетелем которого он был, то есть, восстановить окружности.

Требуется написать программу, которая по координатам камешков на поле находит вариант размещения их на двух несовпадающих окружностях.

Решение. Рассмотрим сначала решение задачи для малых количеств камешков. Если камешков не больше трёх, то ответом (одним из возможных) для первой окружности будет камешек с номером 1, для второй — камешки с номерами 3 и 4. Если камешков — четыре, то первой окружности будут принадлежать камешки с номерами 1 и 2, а второй окружности — камешки с номерами 3 и 4.

В более общем случае, когда $n \le 50$, в качестве частичного можно использовать следующее решение. Переберем все тройки камешков (это можно сделать тремя вложенными циклами). Для каждой тройки предположим, что все три камешка лежат на одной из искомых окружностей. Для каждого камешка проверим, лежит ли он на этой окружности, а затем для всех камешков, которые не лежат на полученной окружности, проверим, лежат ли они на одной из других окружностей. Если да — решение найдено, если нет — переходим к следующей тройке точек. При реализации этого решения для каждой тройки точек нужно предварительно проверить, что они лежат на одной окружности (то есть, не лежат на одной прямой).

Чтобы проверить, что четыре точки лежат на одной окружности, не обязательно находить ее центр и радиус. Более того, можно обойтись исключительно вычислениями с целыми числами, то есть, задача допускает решение *без использования вещественной арифметики.* Рассмотрим два возможных случая взаимного расположения точек A, B, C, D.

Случай 1. Точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC, то есть, псевдоскалярные произведения $[AB, AC]$ и $[DB, DC]$ имеют одинаковый знак (их произведение больше нуля). Тогда угол ABC должен быть равен углу DBC, то есть, их косинусы должны быть равны. Косинусы можно выразить через скалярные произведения и длины векторов, при этом мы получим равенство:

$$\frac{(AB, AC)}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{(DB, DC)}{|DB| \cdot |DC|}.$$

Поскольку обе части равенства — одного знака, то можно их возвести в квадрат и помножить на знаменатели:

$$(AB, AC)^2 \cdot |DB|^2 \cdot |DC|^2 = (DB, DC)^2 \cdot |AB|^2 \cdot |AC|^2.$$

Полученное выражение может быть вычислено без использования вещественной арифметики, что позволяет решить задачу точно (при этом потребуется реализовать операции с длинными числами).

Случай 2. Точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC. В этом случае точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD и для них можно повторить рассуждения для случая 1.

При рассмотрении обоих случаев нужно не забывать, что три точки могут оказаться и на одной прямой. В этом случае соответствующее псевдоскалярное произведение будет равно 0. Поэтому при проверке знака псевдоскалярного произведения все неравенства должны быть строгими.

Несложно показать, что описанное решение имеет асимптотическую сложность $O(n^4)$, и поэтому не для всех заданных в условии задачи значений n позволяет получить правильный ответ. Чтобы его улучшить, покажем, как при переборе обойтись *десятью* окружностями вместо порядка n^3 окружностей.

Пусть задано не меньше пяти камешков. Рассмотрим первые пять из камешков. Среди них хотя бы три принадлежат одной из искомых окружностей. Переберем все возможные тройки камешков из этих пяти (их всего $C_5^3 = 10$). Далее решение в точности повторяет описанное выше частичное решение.

Данное решение уже является полным и позволяет получить правильный ответ для всего диапазона значений n. Асимптотическая сложность этого решения — $O(n)$.

Теперь, как и было обещано, приведем подзадачу, использующуюся в решении еще одной задачи данной олимпиады.

Задача. Пусть нам дан набор чисел $a_1, \dots, a_S$. Требуется вычислить сумму всех возможных произведений вида $a_i a_j a_k$, где числа i, j, k попарно различны. При этом количество операций должно быть $O(S)$.

Решение. Вычисление искомого выражения «в лоб» потребовало бы $O(S^3)$ операций. Покажем, как это можно сделать эффективней. Заметим, что требуется вычислить значение симметрического многочлена третьей степени, который можно выразить через многочлены:

$$P_1 = a_1 + \ldots + a_k$$
$$P_2 = a_1^2 + \ldots + a_k^2$$
$$P_3 = a_1^3 + \ldots + a_k^3$$

Зная значения P_1, P_2, P_3, несложно вычислить искомую сумму, которая будет равна $(P_1^3 - 3P_1P_2 + 2P_3)/6$. При этом вычисление каждого из многочленов P_1, P_2, P_3 требует $O(S)$ операций.

Непрерывность
и начала математического анализа

А.Д. Блинков,
ЦО № 218, г. Москва,
adblinkov@yandex.ru
В.М. Гуровиц,
ФМШ 2007, г. Москва
gurovic@gmail.com

На творческом семинаре учителей в Москве уже рассказывалось о некоторых задачах, в которых применяются соображения непрерывности. Есть также цикл задач для 6–8 класса, о котором написано в статье, опубликованной в журнале «Квантик», №2/2013, есть цикл задач для 9 класса, где собраны задачи о применении непрерывности для квадратичной функции и модуля. В этой статье речь пойдет о задачах для 10–11 классов. К сожалению, в базовом школьном курсе непрерывность, как правило, применяется только в задачах на поиск экстремальных значений и, в какой-то степени, для исследования функций и построения их графиков.

Мы рассмотрим другие задачи, в которых фигурируют функции общего вида и функциональные соотношения. Помимо обсуждения самих задач, мы поговорим о том, каким образом некоторые из них связаны с теоремами и фактами высшей математики.

Для рассматриваемых задач не существенно, насколько строго дано определение непрерывности. Достаточно наглядного представления о графике непрерывной функции, а также *теоремы об обращении непрерывной функции в ноль*, которая в том или ином виде есть во всех школьных учебниках. В курсах математического анализа она обычно называется *теоремой Больцано*.

Если функция непрерывна на $[a;b]$ и на его концах принимает значения разного знака, то внутри этого отрезка существует точка x_0, в которой значении функции равно нулю.

Важными являются следствия из этой теоремы.

1) Если функция при этом строго монотонна на $[a;b]$, то точка x_0 — единственная.

2) Если функция непрерывна на $[a;b]$ и не обращается в нуль ни в какой внутренней точке этого отрезка, то на промежутке $(a;b)$ функция сохраняет свой знак.

3) Если функция непрерывна на $[a;b]$ и ее значения на концах этого отрезка равны A и B ($A<B$), то для любого числа C из промежутка $(A;B)$ найдется такая точка x_0 из промежутка $(a;b)$, что $f(x_0)=C$.

Это следствие часто называют *теоремой о промежуточном значении*.

Кроме этого, мы будем опираться на то, что *сумма и произведение непрерывных функций* также являются *непрерывными*, в частности, *непрерывной функцией является многочлен*.

Помимо *непрерывности*, мы будем использовать и другие общие свойства функций, как то: *монотонность*, *периодичность*, *дифференцируемость*, а также *поведение функций «на бесконечности»*.

Первые две задачи, которые мы рассмотрим, связаны как раз с многочленами. Решения этих задач основаны на следующем базовом факте.

Любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Доказательство. Рассмотрим сначала многочлен нечетной степени, у которого первый коэффициент равен 1:

$$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

где все a_i – действительные числа, n — нечетное натуральное число. Запишем его в виде: $P(x) = x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)$, тогда при достаточно больших (по модулю) значения x выражение в скобках положительно. Для таких x знак $P(x)$ будет зависеть только от знака x^n. Так как n — нечетное, то при $x>0$ $x^n>0$, а при $x<0$ $x^n<0$. Следовательно, найдутся как значения x, для которых $P(x)>0$, так и значения x, для которых $P(x)<0$. Так как многочлен — *непрерывная функция*, то в силу *теоремы Больцано* в некоторой точке x многочлен $P(x)$ будет принимать значение 0.

Случай произвольного многочлена нечетной степени сводится к уже разобранному, так как при почленном делении многочлена на первый коэффициент корни многочлена не изменяются.

Доказанное утверждение является частным случаем *основной теоремы алгебры*: *любой многочлен (отличный от постоянной функции), имеет хотя бы один комплексный корень*. Она доказывается, исходя из соображений непрерывности на комплексной плоскости[1].

Задача 1.1. Существует ли непрерывная функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

Ответ: да, существует.

Решение. Например, рассмотрим функцию $f(x)=x^3$. Ее график пересекается с любой вертикальной прямой вида $x=a$ в точке $(a; a^3)$. Остальные прямые на плоскости задаются уравнениями вида $y=kx+b$. Абсциссами точек пересечения графика $f(x)$ и таких прямых являются корни уравнения $x^3-kx-b=0$. Так как в левой части уравнения — многочлен нечетной степени, то при любых значениях k и b это уравнение имеет хотя бы один корень, то есть график функции $f(x)$ пересекается и с прямой вида $y=kx+b$.

---

[1] Этой теореме посвящена отличная статья в журнале «Квант», №2/1990: *А. Тоом. Дама с собачкой.*

Задача 1.2. (*П. Кожевников*) Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться так, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет четное количество решений?

Ответ: нет, не может.

Решение. Заметим, что данный многочлен обязан иметь точки экстремума (иначе, функция $f(x)$ строго монотонна, а так как она *непрерывна*, то при любом значении a уравнение $f(x) = a$ будет иметь ровно одно решение). В каждой точке экстремума проведем к графику $y = f(x)$ горизонтальные касательные, (это возможно, так как многочлен дифференцируем в любой точке), например, синим цветом (показан пунктиром).

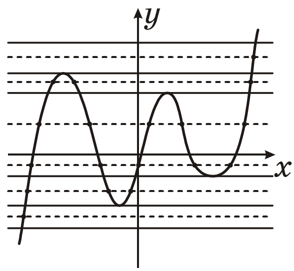


Рис. 1.2

Между каждыми двумя соседними синими прямыми, а также выше самой верхней прямой и ниже самой нижней, проведем по одной горизонтальной прямой, например, красного цвета (см. рис. 1.2, показаны сплошными линиями). Синие точки (точки пересечения и касания синих прямых с графиком) разделяют график на конечное число участков монотонности, при этом, *по следствию из теоремы Больцано*, на каждом таком участке есть ровно одна красная точка. Поэтому красных точек на графике на одну больше, чем синих, и общее количество «цветных» точек нечетно. Значит, хотя бы на одной из «цветных» прямых лежит нечетное число точек графика. Это означает, что найдется значение a, для которого уравнение $f(x) = a$ имеет нечетное количество решений.

Следующие две задачи — также о количестве корней, но речь уже идет о произвольной непрерывной функции.

Задача 2.1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и ее множество значений принадлежит этому же отрезку. Докажите, что на этом отрезке уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Наглядно утверждение очевидно, а для доказательства используется весьма распространенный прием. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$. Она непрерывна на $[a; b]$ (разность непрерывных функций). Так как $a \le f(x) \le b$, то $g(a) = f(a) - a \ge 0$, а $g(b) = f(b) - b \le 0$. Следовательно, *по теореме Больцано*, найдется такое значение $x \in [a; b]$, что $g(x) = 0$, то есть $f(x) = x$.

Задача 2.2. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на R и уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

Решение. Из условия задачи следует, что функция $g(x) = f(x) - x$ не имеет нулей. Так как эта функция непрерывна (разность непрерывных функций), то для всех значений x либо $g(x) > 0$, либо $g(x) < 0$ (*следствие из теоремы Больцано*). В первом случае, для всех x $f(x) > x$, тогда $f(f(x)) > f(x) > x$. Во втором случае, для всех x $f(x) < x$, тогда $f(f(x)) < f(x) < x$. Таким образом, уравнение $f(f(x)) = x$ корней не имеет.

Следующие две задачи связаны с функциональными соотношениями.

Задача 3.1. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что для всех действительных x выполняется неравенство: $f(x^2) - (f(x))^2 \ge \frac{1}{4}$. Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно имеет точки экстремума?

Ответ: да, верно.
Решение. При $x = 0$ получим, что

$$f(0) - (f(0))^2 \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow (f(0))^2 - f(0) + \frac{1}{4} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, при $x = 1$: $f(1) - (f(1))^2 \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2}$.

Так как *непрерывная функция* принимает одинаковые значения на концах отрезка $[0; 1]$, то внутри этого отрезка есть хотя бы одна точка максимума или точка минимума, что и требовалось.

Отметим, что если для всех $x \in [0;1]$ $f(x)=\frac{1}{2}$, то любая точка этого отрезка является точкой экстремума.

Задача 3.2. Функция $f(x)$ определена на множестве R и для любого x выполняется равенство: $f(x+1)\cdot f(x)+f(x+1)+1=0$. Докажите, что $f(x)$ не является непрерывной.

Решение. Пусть это не так, то есть функция $f(x)$ непрерывна. Предположим, что существует такое $x_0 \in R$, что $f(x_0)=0$. Тогда исходное равенство не выполняется в точке $x=x_0-1$, так как в этом случае левая часть равенства равна 1. Значит, $f(x)$ не имеет нулей, поэтому для всех значений x либо $f(x)>0$, либо $f(x)<0$ (*следствие из теоремы Больцано*). В первом случае левая часть данного равенства положительна, значит, оно выполняться не может.

Во втором случае, преобразовав исходное равенство, получим, что для всех x $f(x)=-\frac{1}{f(x+1)}-1>-1$, так как $f(x+1)<0$. Вместе с тем, $-f(x+1)=1+f(x)\cdot f(x+1)>1$, то есть $f(x+1)<-1$. Противоречие.

Решение некоторых задач, связанных с количеством корней уравнения, основано на одном замечательном свойстве интеграла.

Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ непрерывна на отрезке $\boldsymbol{[a;b]}$ и $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=0}$, то уравнение $\boldsymbol{f(x)=0}$ имеет корень на отрезке $\boldsymbol{[a;b]}$.

Доказательство. Пусть это не так, тогда для всех $x \in [a;b]$ либо $f(x)>0$, либо $f(x)<0$. В первом случае, $\int_a^b f(x)dx$ равен площади соответствующей криволинейной трапеции, значит, $\int_a^b f(x)dx>0$. Во втором случае, это число противоположно значению площади, то есть $\int_a^b f(x)dx < 0$. В обоих случаях получено противоречие с условием.

Отметим, что число $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{|a-b|}$ *называется средним значением функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$. Учитывая это, доказанное свойство можно сформулировать иначе: *если на* $[a;b]$ *среднее значение непрерывной функции равно нулю, то на этом отрезке существует точка, в которой функция обращается в ноль*.

Задача 4.1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на промежутке $(0;1)$.

Решение. Так как

$$\int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right)dx = = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2a + 3b + 6c}{6} = 0$$

и функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ непрерывна на отрезке $[0;1]$, то она обращается в ноль в некоторой его точке. Эта точка является внутренней, иначе площадь соответствующей криволинейной трапеции отлична от нуля (сделать рисунок).

Отметим, что эту задачу можно решить иначе, подобрав два значения *x*, в которых значения функции имеют разные знаки, но такие решения гораздо более громоздки.

Задача 4.2. Сколько точек пересечения с осью *x* имеет график функции вида

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin(nx) + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + ... + b_k \cos(kx),$$

где $n \in N$, $k \in N$, $a_i \in R$, $b_j \in R$?

Ответ: бесконечно много.

Решение. Заметим, что заданная функция определена на R и $T = 2\pi$ является ее периодом. Докажем, что на каком-то отрезке длины T, например, на $[0; 2\pi]$ график $f(x)$ функции пересекает ось x.

Действительно, для любых натуральных p и q

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)dx = \frac{-\cos(px)}{p}\Big|_0^{2\pi} = -1-(-1) = 0 \text{ и}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(qx)dx = \frac{\sin(qx)}{q}\Big|_0^{2\pi} = 0-0 = 0\,.$$

Так как $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ является суммой соответствующих интегралов, то $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 2\pi]$ (*сумма непрерывных функций*), значит, она обращается в ноль в некоторой точке этого отрезка.

Следовательно, в силу периодичности, $f(x)$ имеет бесконечно много нулей.

В заключение — две задачи, которые, на первый взгляд, не имеют никакого отношения к функциям, но это не так. Более того, их решение позволяет «выйти» на фундаментальные математические факты.

Задача 5.1. (*Н. Константинов*) Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей, чем $2R$, смогли доехать от A до B, не порвав веревки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса R, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Ответ: нет, не смогут.

Решение. Пусть x — доля расстояния от A до B по первой дороге между экипажем, находящимся на этой дороге, и городом A. Аналогичную долю на второй дороге обозначим через y. Так как $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$, то множество точек с координатами $(x; y)$

образует единичный квадрат $OKMN$ (см. рис. 5.1). Тогда каждому положению экипажей на двух дорогах соответствует точка этого квадрата и, наоборот, каждой точке квадрата соответствует некоторое положение экипажей.

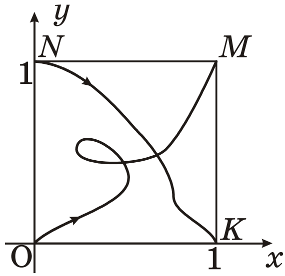


Рис. 5.1

В частности, начальному положению экипажей в городе A соответствует точка $O(0; 0)$, а их прибытию в город B — точка $M(1; 1)$. Движение экипажей из A в B изображается некоторой кривой, ведущей из O в M. Аналогично, начальное положение центров возов соответствует точке $N(0;1)$, прибытие возов в конечный пункт — точке $K(1; 0)$, а их движение — кривая, ведущая из N в K.

Так как любые две непрерывные кривые, соединяющие пары противоположных вершин квадрата, пересекаются, то, независимо от того, как двигались возы, в какой-то момент их центры окажутся в том же положении, в котором в некоторый момент находились экипажи. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше, чем $2R$, то есть возы заденут друг друга.

Эта задача приводится в некоторых статьях и книжках В.И. Арнольда. Рассмотренный при решении квадрат называется *фазовым пространством* движения экипажей и возов, а точки этого квадрата — *фазовыми точками.* В.И. Арнольд указывает, что описание состояний процесса как точек подходящего фазового пространства часто оказывается полезным при решении различных задач вплоть до решения дифференциальных уравнений.

Задача 5.2. Цирковая лошадь, по команде дрессировщика, плавно начинает бег по окружности арены в точке A и, пробежав круг, плавно останавливается в той же точке. Докажите, что существуют две диаметрально противоположные точки арены, которые лошадь проходит с одной и той же скоростью.

Решение. Рассмотрим радиус арены OA, проведенный в исходную точку, произвольную точку P окружности и ей диаметрально противоположную точку P' (см. рис. 5.2а). Пусть $\angle POA = \alpha$, тогда значение скорости в соответствующей точке обозначим через $V(\alpha)$. Рассмотрим функцию $U(\alpha) = V(\alpha + \pi) - V(\alpha)$. Она *непрерывна* на $[0;\pi]$, так как лошадь двигалась плавно. При этом, $U(0) = V(\pi) - V(0) = V(\pi)$, $U(\pi) = V(2\pi) - V(\pi) = -V(\pi)$. Тогда, либо $V(\pi) = 0$, то есть $U(0) = U(\pi) = 0$, либо $V(\pi) \neq 0$, тогда числа $U(0)$ и $U(\pi)$ имеют противоположные знаки, значит, по *теореме Больцано* найдется значение α, для которого $U(\alpha) = 0$. Диаметрально противоположные точки, соответствующие этому значению α, являются искомыми.

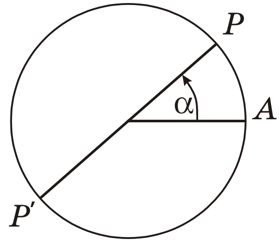


Рис. 5.2а

Отметим, что: 1) условие равенства нулю начальной скорости — не существенно, важно только условие $V(2\pi) = V(0)$, то есть точку A лошадь должна проходить с одной и той же скоростью; 2) в какие-то моменты $V(\alpha)$ может быть и отрицательной, то есть лошадь может временами бежать и в обратную сторону.

Полученный результат можно также интерпретировать графически. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a) = f(b)$. Из доказанного следует, что существует отрезок длины $l = \dfrac{b-a}{2}$, параллельный оси x, концы которого лежат на графике функции (см. рис. 5.2б). Более того, это утверждение можно усилить.

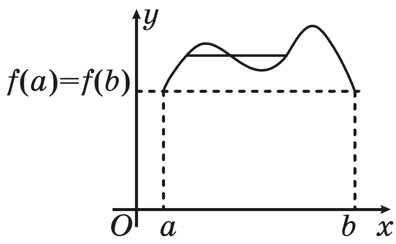


Рис. 5.2б

По аналогии с окружностью, назовем отрезок, концы которого лежат на графике*, хордой этого графика*. Докажем, что:

если функция, непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=f(b)$, то существует горизонтальная хорда длины $l=\dfrac{b-a}{n}$, где n — любое натуральное число.

Решение. Так как функция *непрерывна* на $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке как своего *наибольшего* значения, так и *наименьшего*. Пусть M_0 и N_0 — точки графика, соответствующие этим значениям, тогда проведя через каждую из них прямую, параллельную оси x, получим полосу, в которой целиком лежит график (см. рис. 5.2в). При этом, кривая M_0N_0 делит эту полосу на две части: «левую» и «правую».

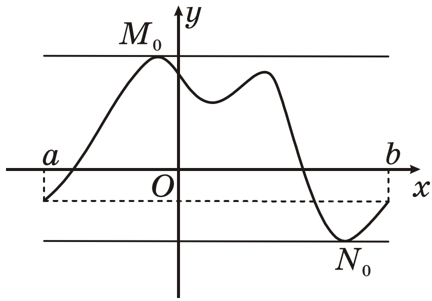


Рис. 5.2в

Обозначим исходный график через Γ_0, а графики, получаемые из него параллельными переносами на отрезки длиной kl вправо (вдоль оси x) — через Γ_k ($k=1;2;...;n$). Пусть искомой хорды не существует, тогда графики Γ_0 и Γ_1 не имеют общих точек. Так как кривая Γ_1 непрерывна, то она целиком расположена в «правой» части полосы.

Рассмотрим кривую M_kN_k, соответствующую на графике Γ_k кривой M_0N_0. Если $p>l$, то график Γ_p целиком находится справа от этой кривой, а если $p<l$, то слева. В частности, график Γ_0 расположен слева от M_1N_1, а график Γ_n — справа от M_1N_1, поэтому эти графики не имеют общих точек.

С другой стороны, график Γ_n получается из графика Γ_0 параллельным переносом на отрезок $nl=b-a$. Образом точки $A(a;f(a))$ при этом переносе является точка $A'(a+nl;f(a))$. Так как $a+nl=b$ и $f(a)=f(b)$, то точка A' совпадет с точкой

$B(b;\, f(b))$ графика Γ_0, то есть графики Γ_0 и Γ_n имеют общую точку B. Противоречие.

Отметим также, что на графике непрерывной периодической функции можно найти горизонтальную хорду любой длины.

Самое же интересное в задаче о беге лошади состоит в том, что она является двумерным случаем знаменитой *теоремы Борсука — Улама*:

если функции f и g определены и непрерывны на некоторой сфере, то на этой сфере найдутся две диаметрально противоположные точки P и P', для которых $f(P) = f(P')$ и $g(P) = g(P')$.

Эту теорему часто формулируют в занимательной форме:

в любой момент времени на Земле найдутся две такие диаметрально противоположные точки, в которых совпадают температура и давление.

Из теоремы *Борсука — Улама* есть следствие, весьма огорчительное для географов. Известно, что положение любой точки на земной поверхности описывается двумя координатами: широтой и долготой. Их можно рассматривать как функции точек земной сферы. В этой системе координат особое место занимают полюсы: широта у каждого из них $90°$ (северная или южная), а долготу им можно приписать любую. Поэтому, если, например, двигаться к Северному полюсу по одному меридиану, а достигнув его, продолжить движение по любому другому меридиану, то при таком *непрерывном движении* широта будет изменяться *непрерывно*, а долгота испытает «скачок». Если условиться приписать знак плюс восточной долготе, а знак минус — западной, то долгота испытывает «скачок» и при переходе из западного полушария в восточное через меридиан, являющийся «продолжением» гринвичского.

Возникает вопрос: нельзя ли на поверхности сферы ввести координаты так, чтобы они обе являлись непрерывными функциями соответствующих точек сферы?

Согласно теореме *Борсука — Улама* это невозможно. Действительно, в этом случае нашлись бы две диаметрально противоположные точки с одинаковыми координатами!

Еще одно утверждение, связанное с теоремой *Борсука – Улама*:

пусть f — непрерывная функция, задающая в каждой точке сферы вектор, касательный к ней. Тогда существует хотя бы одна такая точка P, в которой $f(P) = 0$.

Это утверждение является следствием *теоремы Брауэра*, доказанной в 1912 году, которая обычно формулируется так:

любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном евклидовом пространстве имеет неподвижную точку.

Само утверждение часто называют *теоремой о причесывании ежа*, так как оно интерпретируется следующим образом: сфера — это еж, свернувшийся в клубок, векторы — его колючки. Такого ежа нельзя «причесать» так, чтобы об него нельзя было уколоться (без вихров и проборов).

Интересное «метеорологическое» приложение этой теоремы получится, если считать ветер *непрерывным векторным полем* на поверхности планеты. Рассмотрим идеализированный случай, в котором нормальная к поверхности составляющая поля пренебрежимо мала.

Случай, когда полностью отсутствует ветер, соответствует нулевому векторному полю. Этот случай неинтересен и физически невозможен (в силу неустойчивости). Но если ветер есть, то *теорема о причёсывании ежа* утверждает, что на поверхности планеты всегда будет точка, в которой не будет ветра (нуль касательного векторного поля).

Такая точка будет центром циклона или антициклона: как иголки ежа, ветер будет закручиваться вокруг этой точки (в силу непрерывности, он не может быть направлен внутрь этой точки или из нее). Таким образом, по *теореме о причёсывании ежа*, если на Земле дует хоть какой-то ветер, то где-то обязательно должен быть циклон. Его центр может быть сколь угодно большим, так же, как и сила ветра вокруг.

Список литературы и веб-ресурсов

1. В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск, РХД, 2000.

2. М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. Теорема Борсука — Улама. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №8, 1983.

3. Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2001.

4. Л.Э. Медников, А.В. Шаповалов. Турнир городов: математика в задачах. — М.: МЦНМО, 2012.

5. В.В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2011.

6. С.Л. Табачников. Соображения непрерывности. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №9, 1987.

7. И.М. Яглом. О хордах непрерывных кривых. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №4, 1977.

8. www.problems.ru — База задач по математике.

Геометрические решения не геометрических задач

А.Д. Блинков,
ЦО № 218, г. Москва
adblinkov@yandex.ru

Я достаточно давно занимаюсь коллекционированием различных задач, допускающих геометрический подход. В частности, недавно в журнале «Квант» была моя статья, в которой показано, что геометрический подход сильно упрощает решение алгебраических задач, связанных с модулем числа.

Такой подход бывает эффективен и во многих других математических задачах. В моей коллекции есть разнообразные уравнения и системы, решаемые геометрическими методами, многие из которых достаточно широко известны. Серия тригонометрических тождеств, допускающих геометрическую интерпретацию, была на этом семинаре показана Д. Мухиным. Широко известны также задачи на геометрическое суммирование.

Но хочется отдельно поговорить о примерах и задачах, иллюстрирующих геометрический подход, и адресованных более младшим школьникам. Приведу небольшую подборку задач, адресованных, в основном, школьникам 7 – 8 классов. Для удобства они разбиты на несколько серий, что отражено с помощью двойной нумерации.

1.1. Докажите геометрически тождества ($a \ge 0$, $b \ge 0$):

а) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; б) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

в) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;

г) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

1.2. Докажите геометрически на одном чертеже:

а) тождество $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$;

б) неравенство $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{4}$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$).

1.3. Докажите геометрически неравенства ($a \geq 0$, $b \geq 0$): а) $(a+b)^2 \geq 4ab$; б) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

1.4. Известно, что сумма n неотрицательных чисел равна 1. Докажите, что сумма их квадратов не меньше, чем $\frac{1}{n}$.

1.5. Известно, что $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ и $a+b+c+d=1$.

Найдите наименьшее значение выражения $7a^2+5b^2+3c^2+d^2$.

2.1. Много лет подряд, каждый день, в полдень, из Гавра в Нью-Йорк отправлялся почтовый пароход, и в это же самое время из Нью-Йорка отходил пароход той же компании, идущий в Гавр. Каждый из этих пароходов находился в пути ровно 7 суток, и шли они по одному и тому же маршруту. Сколько пароходов своей компании встречал на своём пути пароход, идущий из Гавра в Нью-Йорк?

2.2. Ежедневно в полдень из Москвы в Астрахань и из Астрахани в Москву выходит рейсовый теплоход. Теплоход, вышедший из Москвы, идет до Астрахани ровно четверо суток, затем двое суток стоит, и в полдень, через двое суток после своего прибытия в Астрахань, отправляется в Москву. Теплоход, вышедший из Астрахани, идет в Москву ровно пять суток и, после двухсуточного отдыха в Москве, отправляется в Астрахань. Какое наименьшее количество теплоходов должно работать на линии Москва — Астрахань — Москва при описанных условиях движения?

2.3. На берегах большого круглого водоема последовательно расположены пристани A, B, C и D. Катер и лодка одновременно направились из A в B и из D в C (по кратчайшему пути, каждый — с постоянной скоростью) и прибыли в конечный пункт одновременно. На каком бы расстоянии друг от друга прошли бы катер и лодка, если бы они поменялись пунктами назначения?

2.4. Два пловца, стартовав из разных точек с одного берега озера, стремятся доплыть до буйка, двигаясь прямолинейно по направлению к нему с постоянными скоростями. В 10 часов 35 минут расстояние между пловцами было 300 метров, в 10 ч 36 мин оно сократилось до 200 метров, а в 10 ч 37 мин стало равным 100 метров. Верно ли, что пловцы приплывут к буйку одновременно?

2.5.* По четырем попарно пересекающимся дорогам издалека с постоянными скоростями идут 4 человека. Известно, что первый встретится со вторым, с третьим и с четвертым; второй встретится с третьим и с четвертым. Встретятся ли третий и четвертый?

2.6.* Три спортсмена стартовали одновременно из точки A и бежали по прямой в точку B каждый со своей постоянной скоростью. Добежав до точки B, каждый из них мгновенно повернул обратно и бежал с другой постоянной скоростью к финишу в точке A. Их тренер бежал рядом так, чтобы в каждый момент времени находиться в точке, сумма расстояний от которой до участников забега была наименьшей. Известно, что расстояние от A до B равно 60 метров, и все спортсмены финишировали одновременно. Мог ли тренер пробежать меньше, чем 100 метров?

3.1. Докажите геометрически иррациональность числа $\sqrt{2}$.

3.2. Петя искал наибольший общий делитель чисел a и b, используя алгоритм Евклида, и получил следующую цепочку равенств:

$$\text{НОД}(a;\, b) = \text{НОД}(b;\, c) = \text{НОД}(c;\, d) = \text{НОД}(d;\, e) =$$
$$= \text{НОД}(e;\, f) = \text{НОД}(f;\, 1) = 1.$$

Петя заметил, что на каждом шаге алгоритма (кроме последнего) он получал неполное частное, равное 1. Найдите наименьшие возможные значения a и b.

3.3. Коля и Вася живут в одном доме. В каждом подъезде дома — по 4 квартиры на этаже. Коля живет на пятом этаже в 83 квартире, Вася — на третьем этаже в 169 квартире. Сколько этажей в доме?

3.4. При каком наименьшем натуральном значении n уравнение $x^2 + y^2 = n^2$ имеет:

а) 12; б) 20 целочисленных решений?

3.5.* Оцените приближенно количество целочисленных решений неравенства:

а) $x^2 + y^2 \le m$; б) $x^2 + y^2 + z^2 \le m$, где m — натуральное число.

4.1. В группе 12 учеников, которые по двое сидят за партой. Каждый день учитель рассаживает их так, чтобы за каждой партой сидели два ученика, которые никогда не сидели рядом до этого. Какое наибольшее количество дней учитель сможет это делать?

4.2. Две команды шахматистов сыграли матч по шевенингенской системе (каждый шахматист из одной команды сыграл одну партию с каждым шахматистом из другой). Какое наибольшее количество партий могло быть сыграно в этом матче, если всего было: а) 12; б) 13 шахматистов?

4.3.* В ряде стран парламентские выборы проводятся по системе пропорционального представительства. Пусть в некотором округе требуется выбрать пять членов парламента. В выборах участвуют три партии *A*, *B* и *C*, которые получают мандаты пропорционально количеству поданных голосов за их списки. Проблема состоит в том, что при пересчете количество мандатов оказывается, как правило, не целым. Предложите геометрическую интерпретацию способа определения количество мандатов для каждой партии в зависимости от количества поданных за нее голосов.

Для одной из задач каждой серии приведу решения.

Первая серия — это алгебраические тождества и неравенства. Весьма продуктивным являются геометрические способы их доказательства с помощью квадратов и прямоугольников. Такие доказательства были особенно популярны у математиков древнего мира. Рассмотрим пример **1.2.**

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a \ge b$. В противоположных углах квадрата со стороной $a + b$ построим два квадрата со стороной a, общей частью которых будет темный квадрат со стороной $a - b$ (см. рис. 1.2).

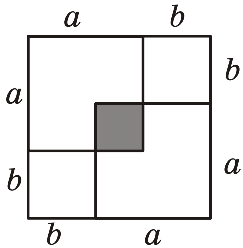


Рис. 1.2

а) Левая часть доказываемого равенства это сумма площадей четырех построенных квадратов, а правая часть — сумма площадей исходного квадрата и темного (пересечения). Эти суммы равны.

б) Умножив обе части доказываемого неравенства на 4, получим неравенство $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$, то есть сумма площадей четырех построенных квадратов либо больше, чем площадь квадрата со стороной $a+b$ (за счет площади общей части), либо они равны (при $a = b$).

Интересно также, что доказанное неравенство равносильно неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2}$. *Другие примеры из этой серии также иллюстрируют неравенства о средних.*

Вторая серия посвящена текстовым задачам. Разберем задачу **2.3.**

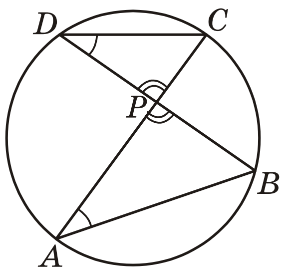


Рис. 2.3

Решение. Рассмотрим окружность, на которой последовательно расположены точки A, B, C и D.(см. рис. 2.3). Проведем хорды AB и DC (изначальные маршруты), а также хорды AC и DB (предполагаемые маршруты). Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке P, тогда из подобия треугольников APB и DPC ($\angle APB = \angle DPC$ и равны вписанные углы A и D) следует, что $\dfrac{AP}{DP} = \dfrac{AB}{DC}$. Так как катер и лодка проходили отрезки AB и DC соответственно за одинаковое время, то $\dfrac{AB}{DC}$ показывает отношение их скоростей. Следовательно, отрезки AP и DP катер и лодка пройдут за одно и то же время. Значит, выйдя на измененные маршруты одновременно, они неизбежно столкнутся.

Ответ: на нулевом, то есть они бы столкнулись.

Третья серия посвящена задачам на целые числа. Характерный пример — задача **3.4. Ответ**: а) при $n = 5$; б) при $n = 25$.

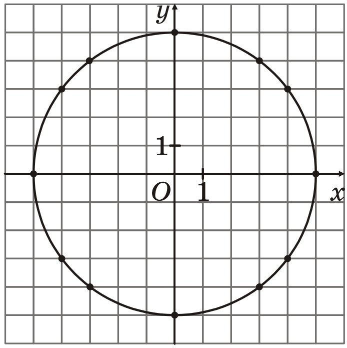


Рис. 3.4

Решение. а) Данное уравнение задает в декартовой системе координат окружность с центром $O(0; 0)$ радиусом n. Так как пары $(\pm n; 0)$ и $(0; \pm n)$ являются решениями уравнения, то эта окружность пересекает оси координат в целочисленных точках. Таким образом, остается найти наименьший радиус окружности, которая пройдет еще через 8 точек с целыми координатами. Поскольку начало координат является центром симметрии окружности, а оси координат — ее осями симметрии, то это равносильно тому, что в каждой координатной четверти найдутся ровно две такие точки.

Рассмотрим (для удобства) первую четверть, в которой $x > 0$ и $y > 0$. Так как заданная окружность симметрична также относительно прямой $y = x$, то для решения задачи достаточно найти прямоугольный треугольник с целыми сторонами и наименьшей гипотенузой. Таким треугольником является египетский треугольник, со сторонами 3, 4 и 5. Таким образом, наименьшее значение $n = 5$.

Отметим, что полученный результат широко используется на практике. Для проведения на клетчатой бумаге окружности без помощи циркуля чаще всего используют именно эти 12 точек (см. рис. 3.4).

б) Продолжим рассуждения пункта а). Учитывая все указанные симметрии окружности, получим, что вместе с каждым целочисленным и не содержащим нулей решением заданного уравнения можно указать еще 7 целочисленных решений. Значит, для того, чтобы решений было 20, достаточно найти два неравных прямоугольных треугольника с одной и той же целой гипотенузой и целыми катетами так, чтобы гипотенуза была наименьшей из возможных. Будем последовательно перебирать, так называемые, «пифагоровы тройки» в порядке возрастания гипотенуз: (3; 4; 5), (6; 8; 10), (5; 12; 13), (9; 12; 15), (8; 15; 17), (12; 16; 20), (7; 24; 25), (15; 20; 25). Последние две тройки — искомые ($25^2 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2$). Следовательно, искомое $n = 25$.

В заключение — пример геометрического подхода в комбинаторной задаче **4.1.**

Ответ: 11 дней.

Решение. Так как каждый ученик может сидеть рядом не больше, чем с одиннадцатью учениками, то дольше, чем 11 дней, процесс продолжаться не может.

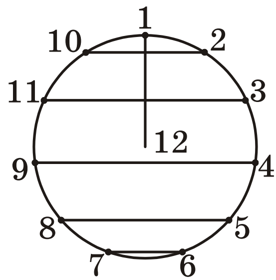


Рис. 4.1

Покажем геометрически, каким образом можно составить требуемое расписание рассадки для 11 дней. Занумеруем учеников числами от 1 до 12, расставим числа от 1 до 11 на окружности через равные промежутки (*в вершинах правильного одиннадцатиугольника*), а число 12 разместим в центре окружности.

Соединим отрезком числа 1 и 12. Остальные точки соединим попарно отрезками, перпендикулярными первому (см. рис. 3.4). Эта схема попарной рассадки учеников в первый день (за одной партой сидят два ученика, номера которых соединены отрезком).

Для получения схемы рассадки учеников во второй день соединим отрезком числа 2 и 12, а остальные точки опять соединим отрезками, перпендикулярными первому.

Аналогично, в схеме рассадки третьего дня начнем с отрезка, соединяющего точки 3 и 12, и так далее. Поскольку никакие два из одиннадцати отрезков, являющихся радиусами окружности, не лежат на одной прямой (количество точек на окружности нечетно), то перпендикуляры к ним каждый раз образуют новую пару чисел.

Описанная процедура является геометрической интерпретацией разбиения чисел от 1 до 12 на всевозможные пары, использующее все остатки от деления на 11. Проводимые хорды окружности соединяют две точки так, чтобы сумма их номеров имела *одинаковый остаток от деления на 11. В первый день этот остаток равен 2, во второй день он равен 4, далее: 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7 , 9 и 0. Точка, соединяемая изначально с центром окружности, особая: для ее номера нет числа, в сумме с которым получается тот же остаток от деления на 11.*

Очень похожая процедура позволяет составить расписание по турам для кругового турнира при любом количестве участников. Если участников 2n, то турнир можно провести за $2n-1$ *день, а если их* $2n+1$, *то требуется* $2n+1$ *день (ежедневно у одного участника нет пары и он вынужден отдыхать).*

Ограниченный объем статьи не позволяет привести интересные решения остальных задач, но идеи геометрического подхода, на мой взгляд, понятны из изложенного выше. Понятно также, что есть еще много задач, в которых уместен геометрический подход, и которые остались за границами нашего обсуждения.

Список литературы и веб-ресурсов

1. А.Д. Блинков. Вычисление некоторых конечных сумм. Научно-практический журнал «Математика для школьников», №4/2008.

2. А.Д. Блинков. Расстояния на прямой и не только. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №3/2012.

3. А.Д. Блинков. Числовые средние в арифметике и геометрии (серия «Школьные математические кружки»). — М.: МЦНМО, 2012.

4. Г.А. Гальперин, А.К. Толпыго. Московские математические олимпиады. — М.: «Просвещение», 1986.

5. И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Кириллов. Метод координат. — М.: «Наука», 1973.

6. И.М. Гельфанд, А.Х. Шень. Алгебра. — М.: МЦНМО, 2009.

7. А.В. Жуков, П.И. Самовол, М.В. Аппельбаум. Элегантная математика. — М.: URSS, 2005.

8. Московские математические регаты / Сост. А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2007.

9. LXXVI Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. — М.: МЦНМО, 2013.

10. А.И. Сгибнев. Геометрия помогает алгебре. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №20/2008.

11. И.Н. Сергеев, С.Н. Олехник, С.Б. Гашков. Примени математику. — М.: «Наука», 1989.

12. http://olympiads.mccme.ru/regata — Математические регаты

13. http://www.problems.ru — База задач по математике.

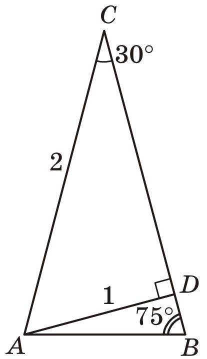
Тригонометрические тождества и планиметрия

Д.Г. Мухин,
Школы 91, 179, г. Москва
dmitry.g.mukhin@gmail.com

В школьной программе есть довольно неприятная тема: тригонометрические формулы и преобразования. Обычно они изучаются в девятом или десятом классе в курсе алгебры. Давно известно, что многие формулы и тождества можно проиллюстрировать геометрическими аналогиями. Мне кажется, что их стоит показывать школьникам, чтобы они увидели, что за этими довольно-таки бездушными формулами скрыты вполне наглядные и даже иногда интересные планиметрические факты. Да и вообще, полезно демонстрировать детям одну и ту же задачу с разных точек зрения. В этой заметке разбираются некоторые из таких примеров.

Задача 1. Доказать тождество:

$$30° + 75° = 2.$$



Решение.

Этот пример, конечно, совсем просто решается алгебраически, но все же что-то посчитать здесь придется (например, воспользоваться формулой тангенса суммы). Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник с углом при вершине $30°$.

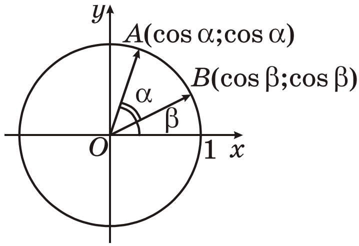
Пусть высота AD, проведенная к боковой стороне, равна 1. Тогда $AB = 2$ (катет, лежащий напротив угла $30°$ равен половине гипотенузы!), а $BC = 30° + 75°$. Боковые стороны равны, так что задача решена.

Задача 2. Доказать тождество:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Решение.

Стандартный вывод этой формулы (из которой потом легко получаются все остальные тригонометрические формулы сложения) основан на изящном геометрическом соображении:



Рассмотрим тригонометрическую окружность и точки A и B на ней. Запишем скалярное произведение векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ двумя способами: через координаты и через произведение длин на косинус угла между векторами.

1. $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = |\overline{OA}|\cdot|\overline{OB}|\cdot\cos(\alpha-\beta) = 1\cdot 1\cdot\cos(\alpha-\beta).$

2. $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

Вот и все!

Задача 3. Доказать тождество: $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.

Алгебраическое решение.

Домножим на общий знаменатель:

$$\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ = 4\sin 10^\circ \cos 10^\circ\,.$$

Разделим на 2:

$$\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 10^\circ = 2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\,.$$

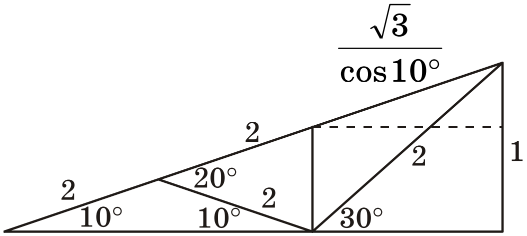
$$\sin(30^\circ - 10^\circ) = \sin 20^\circ\,.$$

Что и требовалось доказать.

Я обязательно рассказываю школьникам и другое решение той же задачи, догадаться до которого, правда, почти невозможно, но иллюстрация получается хорошая:

Геометрическое решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник с углом 10° и меньшим катетом, равным 1. Тогда его гипотенуза равна $\frac{1}{\sin 10^\circ}$, а дальнейшее ясно из чертежа.



Эта задача взята из Творческого конкурса учителей 2011 года.

Задача 4. Пусть α, β, γ — острые углы. $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$. Найти $\alpha + \beta + \gamma$.

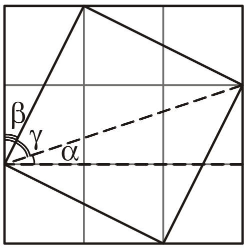
Алгебраическое решение: Ясно, что $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Найдем $\alpha + \beta$.

$$(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

Значит, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, а $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Приятным дополнением к такой задаче служит следующее:

Геометрическое решение.

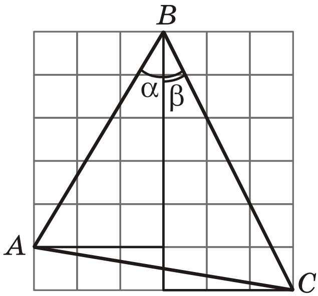


Здесь все ясно из рисунка.

Следующая задача тоже про тангенс суммы:

Задача 5. Можно ли расположить на клетчатой бумаге равносторонний треугольник так, что его вершины будут находиться в узлах сетки?

Решение. Пусть нам удалось расположить правильный треугольник *ABC* так, как сказано в условии. Рассмотрим картинку:



Ясно, что α и β являются рациональными числами (это отношения целого числа клеточек к целому числу клеточек). Поэтому $(\alpha+\beta)=\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$ тоже является рациональным числом. Но, с другой стороны, $\alpha+\beta=60^\circ$, поэтому $(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$ — иррациональное число! Полученное противоречие доказывает, что ответ на вопрос задачи отрицательный.

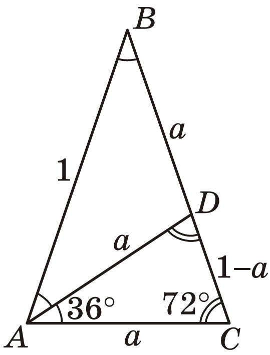
Задача 6. Вычислить $\sin 18^\circ$.

Алгебраическое решение. Заметим, что $\sin 54^\circ=\cos 36^\circ$. Теперь воспользуемся формулами синуса тройного и косинуса двойного угла: $3t-4t^3=1-2t^2$, где $t=\sin 18^\circ$. Получаем:

$$4t^3-2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2+2t-1)=0.$$

Решая это уравнение, получаем, что $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Геометрическое решение.



Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом при основании $A = 72°$ и проведем биссектрису AD этого угла. Тогда треугольники ABC и CAD подобны (по двум углам). Пусть боковая сторона треугольника равна 1, а основание равно a. Тогда получаем уравнение:

$$\frac{1-a}{a} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow a^2 = 1 - a.$$

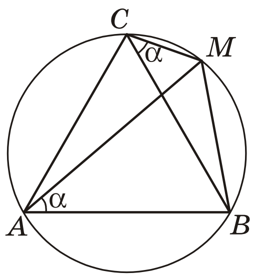
Отсюда $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, а $\sin 18° = \cos 72° = \dfrac{a}{2} : 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Обратим внимание, что биссектриса AD делит боковую сторону в отношении золотого сечения.

Задача 7. Доказать тождество:

$$\sin\alpha + \sin(60° - \alpha) = \sin(60° + \alpha).$$

Задача, конечно, совсем безобидная. Для решения достаточно просто воспользоваться формулами сложения. Интересна геометрическая интерпретация этого равенства, приводящая к известной теореме:

Теорема Помпею. Пусть равносторонний треугольник ABC вписан в окружность, точка М лежит на меньшей дуге BC. Тогда $BM + CM = AM$.



Доказательство. Пусть R — радиус описанной окружности. По теореме синусов получаем (см. рисунок):

$$CM = 2R\sin\alpha,\ BM = 2R\sin(60^\circ - \alpha),$$
$$AM = 2R\sin(60^\circ + \alpha).$$

Теперь разделим это равенство на $2R$ и получим тождество, только что нами доказанное!

Задача 8. Известно, что $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$. Доказать тождество: $\sin(\alpha + \beta)\cdot\sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha\cdot\sin\gamma + \sin\beta\cdot\sin\delta$.

Алгебраическое решение. Используем формулы преобразования произведения в сумму:

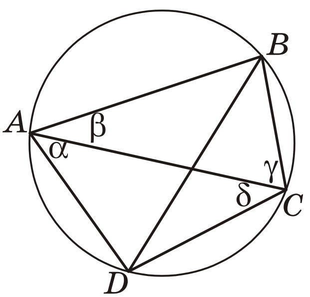
$$\delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma \Rightarrow \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + 2\beta + \gamma)) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma) + \cos(\alpha + 2\beta + \gamma - \pi) - \cos(\pi - \alpha - \gamma)) \Rightarrow$$

Раскрываем скобки, аккуратно упрощаем, и получаем, что $0 = 0$. Это было несложно, но совсем скучно. Посмотрим теперь, как это тождество может использоваться в геометрии:

Теорема Птолемея. Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то выполняется равенство:

$$AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC.$$



Доказательство. Пусть R — радиус описанной окружности. По теореме синусов получаем (см. рисунок): $AD = 2R\sin\alpha$,

$CD = 2R\sin\beta$, $BC = 2R\sin\gamma$, $AB = 2R\sin\delta$. Подставив все это в теорему Птолемея и сократив на $4R^2$, мы получим доказанное только что тригонометрическое тождество.

Задача 9. Доказать тождество:

$$\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

Алгебраическое решение. Домножим обе части равенства на $\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$, получим:

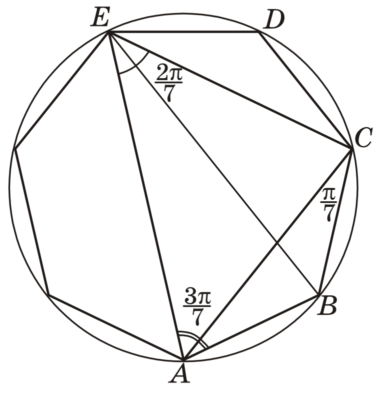
$$\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}.$$

В правой части воспользуемся формулой синуса двойного угла, получим:

$$\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Далее: $\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} = 2\cos\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$. Что и требовалось доказать.

А теперь давайте посмотрим на такую картинку:



В окружность диаметра 1 вписан правильный 7-угольник. Рассмотрим четырехугольник $ABCE$, и применим к нему теорему синусов и теорему Птолемея:

$$\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}$$

А это равносильно доказываемому тождеству.

Блестящие свойства прямой M_1I в треугольнике!

Г.Б. Филипповский,
Русановский лицей, г. Киев
g.filippovsky@yandex.ua
А.В. Карлюченко
Русановский лицей, г. Киев
alexey.karluchenko@gmail.com

Давайте сначала договоримся об обозначениях. Затем докажем свойства прямой M_1I. После этого постараемся убедить Вас, что эти свойства действительно являются блестящими!

Итак, имеем ΔABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 1). AM_1, BM_2 и CM_3 — медианы в этом треугольнике, пересекающиеся в его центроиде — точке M. I — центр вписанной в ΔABC окружности (инцентр). K_1, K_2, K_3 — точки касания вписанной окружности соответственно со сторонами BC, AC и AB. AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника. T_1, T_2, T_3 — точки касания соответствующих вневписанных окружностей со сторонами BC, AC и AB.

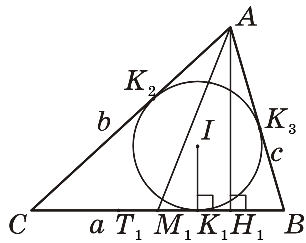


Рис. 1

Свойство 1. $M_1I \parallel AT_1$.

Доказательство. Пусть K_1D — диаметр вписанной в ΔABC окружности (рис. 2). Касательная EF к этой окружности в точке D будет, очевидно, параллельна стороне BC.

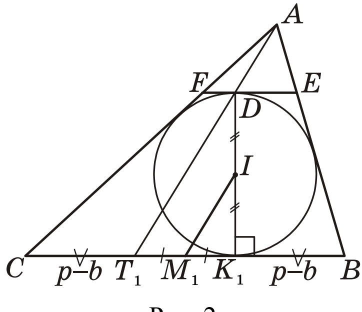


Рис. 2

Точка D является точкой касания вневписанной окружности треугольника AEF со стороной EF. В свою очередь, T_1 — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Треугольники AEF и ABC гомотетичны с центром гомотетии в точке A. Поэтому A, D и T_1 лежат на одной прямой. Известно также, что $BK_1 = CT_1 = p - b$ (докажите!). Следовательно, $T_1M_1 = M_1K_1$ и M_1I — средняя линия в ΔDK_1T_1. А это и означает, что $M_1I \parallel AT_1$.

Свойство 2. Прямая M_1I делит отрезок AK_1 пополам. (*Всесоюзная олимпиада*, 1968 г.)

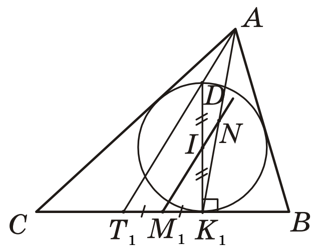


Рис. 3

Доказательство. Пусть прямая M_1I пересекает AK_1 в точке N (*рис.* 3). Поскольку $M_1I \parallel AT_1$ и $T_1M_1 = M_1K_1$, то M_1N — средняя линия в ΔAK_1T_1. Таким образом, $AN = NK_1$.

Заметим, что свойство 2 может быть эффектно доказано с помощью *теоремы Ньютона*: если в четырехугольник вписана окружность, то её центр расположен на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

Действительно, ΔABC можно рассматривать как вырожденный четырехугольник ABK_1C ($\angle BK_1C = 180°$). Тогда согласно теореме Ньютона, точки M_1 и N (середины диагоналей), а также центр окружности I лежат на одной прямой.

Свойство 3. Прямая M_1I отсекает от высоты AH_1 отрезок AQ, равный радиусу вписанной в ΔABC окружности. (*Всесоюзная олимпиада*, 1970 г.)

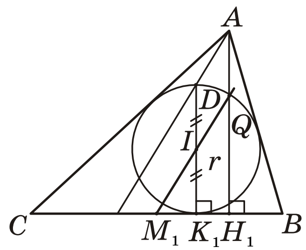


Рис. 4

Доказательство. Поскольку $ADIQ$ — параллелограмм (его противоположные стороны параллельны), то $AQ = DI = r$ (рис. 4).

Теперь наступает время аргументировано показать, что указанные три свойства прямой M_1I с блеском решают непростые геометрические задачи.

Задачи на доказательство

Задача 1. Докажите, что M_1I делит отрезок MK_1 в отношении $1:3$, считая от центроида M.

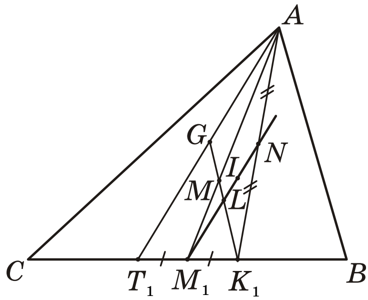


Рис. 5

Доказательство. Поскольку:

$T_1M_1 = M_1K_1$ и $AM : MM_1 = 2:1$,

то точка M – центроид в ΔAK_1T_1 (рис. 5). А значит и $K_1M : MG = 2:1$. Вместе с тем $M_1I \parallel AT_1$ (свойство 1) и $K_1L = LG$. Теперь нетрудно подсчитать, что $ML : LK_1 = 1:3$.

Задача 2. Прямая M_1I делит периметр $\Delta M_1M_2M_3$ пополам. Докажите!

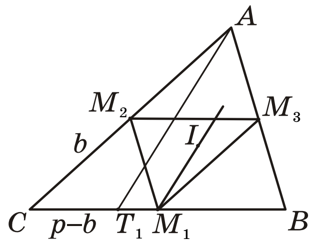


Рис. 6

Доказательство. AT_1 делит периметр ΔABC пополам. Действительно (рис. 6):

$AC + CT_1 = b + p - b = p$ и $M_1I \parallel AT_1$

Тогда AT_1 и M_1I — соответственные прямые в гомотетичных треугольниках ABC и $M_1M_2M_3$.

Задача 3. Докажите, что прямые M_1I, T_1M и AK_1 пересекаются в одной точке.

Доказательство. В задаче 1 мы показали, что точка M является центроидом в треугольнике ΔAK_1T_1, а значит, точки T_1, M и N лежат на одной прямой (рис. 5). Также по свойству 2 точки M_1, I, N лежат на одной прямой. Таким образом, прямые M_1I и T_1M пересекаются в середине отрезка AK_1.

Задача 4. Докажите, что T_1I делит высоту AH_1 пополам.

Доказательство. T_1I делит DK_1 пополам ($DI = IK_1 = r$). Поскольку $DK_1 \parallel AH_1$, то прямая T_1I разделит пополам и высоту AH_1 (рис. 7).

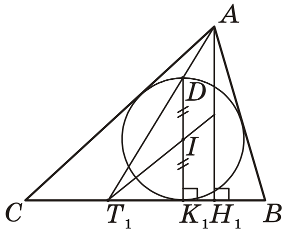


Рис. 7

Задачи на построение

Задача 5. Постройте ΔABC по трём точкам: вершине A, инцентру I и центроиду M.

Решение. Соединим A и M. Продлив AM наполовину этого отрезка, получим M_1 — середину BC.

Можно провести прямую M_1I. Согласно её свойствам, $M_1I \parallel AT_1$ и M_1I отсекает от высоты AH_1 отрезок $AQ = r$ (рис. 8). Анализ показывает, что если провести через точку Q прямую параллельно BC — до пересечения с AT_1 в точке F, то $\Delta AQF = \Delta IK_1M_1$ (по катету и острому углу).

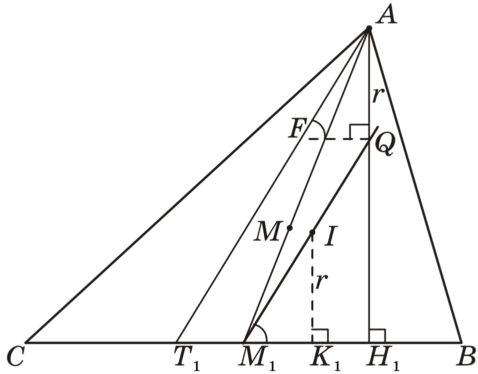


Рис. 8

Отсюда и построение: через вершину A проведём прямую параллельно прямой M_1I. Отложим на ней отрезок $AF = M_1I$. Окружность, построенная на AF как на диаметре, пересечет прямую M_1I в точке Q. При этом $AQ \perp BC$. Дальнейшее построение очевидно.

Задача 6. Восстановите ΔABC по инцентру I, точке M_1 — середине BC, а также прямой, содержащей высоту AH_1.

Решение. Итак, необходимо построить треугольник ABC по I; M_1, h_{ax}. Проведём через M_1 прямую a_x перпендикулярно h_{ax}. Перпендикуляр из точки I на эту прямую даст точку K_1 и отрезок $IK_1 = r$ (рис. 9). Пусть M_1I пересечёт h_{ax} в точке Q. Отложив от точки Q вверх отрезок, равный r, получим вершину A. Касательные из точки A к окружности с центром I радиуса $IK_1 = r$ пересекут прямую a_x в недостающих вершинах B и C.

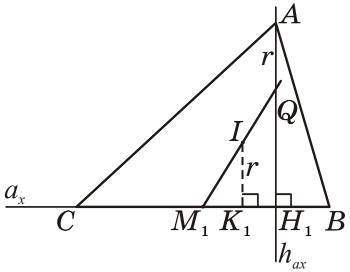


Рис. 9

Задача 7. Постройте ΔABC по h_a, m_a, r.

Решение. Строим прямоугольный ΔAH_1M_1 по катету h_a и гипотенузе m_a (рис. 10). Откладываем от A отрезок $AQ = r$. Прямая t, проведенная параллельно H_1M_1 на расстоянии r от неё пересечёт M_1Q в инцентре I. Дальнейшее очевидно.

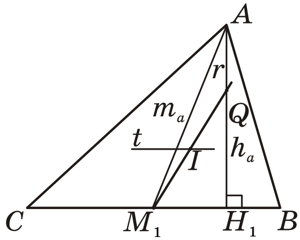


Рис. 10

Задача 8. Восстановите ΔABC по точкам M, I и прямой a_x, содержащей сторону BC.

Решение. Из точки I проведём перпендикуляр IK_1 к прямой a_x, причём $IK_1 = r$ (рис. 11). Соединим M и K_1 и, разделив этот отрезок в отношении $1:3$, получим точку L (задача 1). IL пересечёт a_x в точке M_1 — середине BC. Удвоив отрезок M_1M, получим вершину A. Касательные из A к окружности с центром I радиуса r пересекут a_x в вершинах B и C.

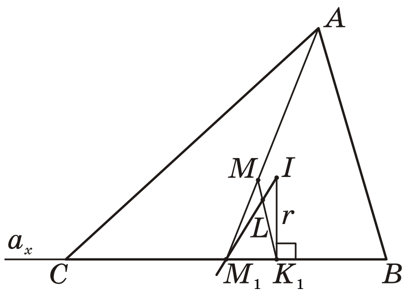


Рис. 11

Задачи с разностным треугольником ($b + c = 2a$)

Задача 9. Дан ΔABC, в котором $b+c=2a$. Докажите, что в нём $QH_1 = 2r$.

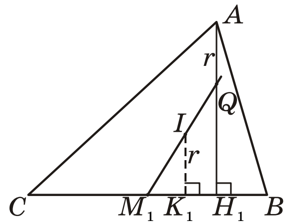


Рис. 12

Доказательство. $\dfrac{QH_1}{QA} = \dfrac{h_a - r}{r}$, поскольку M_1I отсекает от высоты h_a отрезок $AQ = r$ (рис. 12).

$$\frac{QH_1}{QA} = \frac{h_a}{r} - 1 = \frac{\frac{2S}{a}}{\frac{S}{p}} - 1 = \frac{2p-a}{a} = \frac{b+c}{a} = \frac{2a}{a} = 2 .$$

Значит, $QH_1 = 2r$.

Следствие. В разностном треугольнике ($b+c=2a$) $h_a = 3r$.

Задача 10. Докажите, что в разностном треугольнике $M_1K_1 = K_1H_1$.

Доказательство. Поскольку $QH_1 = 2r$, а $IK_1 = r$ и к тому же $IK_1 \parallel QH_1$, то IK_1 является средней линией в ΔQH_1M_1 (рис. 12), то есть $M_1I = IQ$ и $M_1K_1 = K_1H_1$.

Задача 11. В разностном треугольнике ($b+c=2a$) $MI \parallel BC$. Докажите!

Доказательство. Это очевидно, поскольку расстояние от центроида M и инцентра I в таком треугольнике до стороны BC составляют $\dfrac{1}{3}h_a = r$.

Следствие. В разностном треугольнике прямые M_1I и MI делят высоту h_a на 3 равные части.

Задача 12. Инцентр I разностного треугольника ABC является центроидом треугольника AT_1H_1. Докажите!

Доказательство. Поскольку

$$M_1I = IQ$$

(см. задачу 10), то медиана H_1G треугольника AT_1H_1 проходит через точку I (рис. 13). Но тогда из параллельности прямых M_1I и AT_1, а также из равенства

$$T_1M_1 = M_1K_1 = K_1H_1,$$

следует $H_1I = 2IG$. А это значит, что I — центроид ΔAT_1H_1.

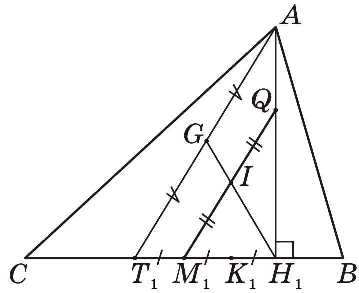


Рис. 13

Задачи с прямоугольным треугольником

Задача 13. Докажите, что в прямоугольном ΔABC ($\angle C = 90°$) точки T_1, I; M_2 принадлежат одной прямой (рис. 14).

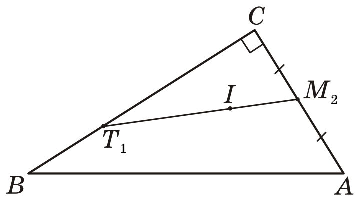


Рис. 14

Доказательство. Так как прямая T_1I делит высоту h_a пополам (задача 4), а в прямоугольном треугольнике катет AC совпадает с h_a, то задача решена.

Задача 14. Дан прямоугольный ΔABC ($\angle C = 90°$) с указанным положением центроида M и инцентра I. При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.

Решение. Прямая AM пересечёт BC в точке M_1 (рис. 15). Прямая M_1I пересечёт AC в точке Q такой, что $AQ = r$ (свойство 3). Прямая BQ разделит периметр ΔABC пополам, ибо

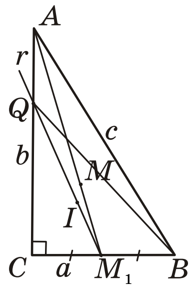


Рис. 15

$$c + r = c + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = p.$$

Задача 15. В прямоугольном ΔABC через середину гипотенузы BC и центр I вписанного круга проведена прямая. Она пересекает катет AB под углом $75°$. Найдите острые углы ΔABC.

Решение. Пусть прямая M_1I пересекает AH_1 в точке Q и AB — в точке F (рис. 16). Тогда, согласно условию, $\angle BFM_1 = 75°$, а $AQ = r$ (свойство 3).

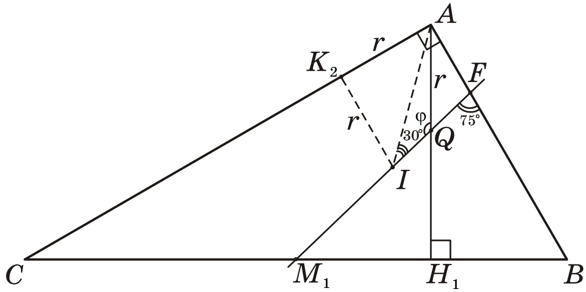


Рис. 16

$AI = r\sqrt{2}$ и $\angle AIF = 30°$ (т.к. $\angle BFM_1 = 75°$ — внешний для ΔAIF). Пусть $\angle AQI = \varphi$. По теореме синусов для ΔAQI имеем: $\dfrac{AI}{\sin\varphi} = \dfrac{AQ}{\sin 30°}$, или $\dfrac{r\sqrt{2}}{\sin\varphi} = \dfrac{r}{\frac{1}{2}}$, откуда $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\varphi = 135°$.

Из четырехугольника $BFQH_1$ найдём угол B.

$$B = 360° - 90° - \varphi - 75°,$$

откуда $B = 60°$. Тогда $C = 30°$.

Задачи, связанные с вневписанной окружностью

Заметим, что свойства, аналогичные найденным, можно наблюдать и при рассмотрении вневписанных окружностей треугольника ABC.

Пусть I_a — центр вневписанной окружности ω, касающейся стороны BC и продолжений AB и AC (рис. 17).

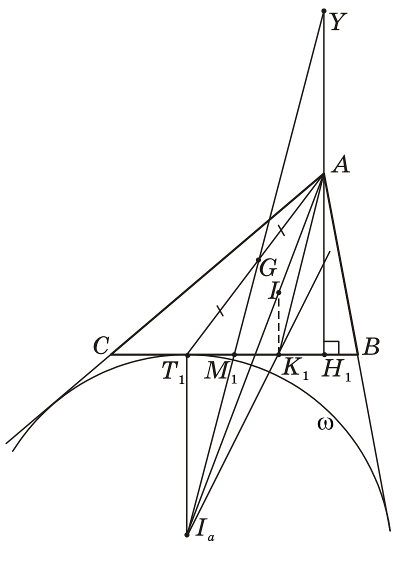


Рис. 17

Вот несколько фактов, которые предлагаем доказать самостоятельно.

Задача 16. Докажите, что:

а) I_aK_1 делит h_a пополам;

б) I_aM_1 отсекает на продолжении h_a за точку A отрезок AY, равный радиусу окружности ω;

в) $I_aM_1 \parallel AK_1$;

г) I_aM_1 делит отрезок AT_1 пополам.

И в заключение отметим, что не считаем разговор на эту тему исчерпанным, поскольку свойства прямой M_1I приглашают к поискам новых идей, геометрических фактов в треугольнике, интересных задач.

Литература

1) Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988.
2) Кушнир И. Геометрия. — К.: Астарта, 1996.
3) Кушнір І. Повернення втраченої геометрії. — К.: Факт, 2000.
4) Скопец З.А., Жаров В.А. Задачи и теоремы по геометри. — М.: Учпедгиз, 1962.
5) Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. — М.: Наука, 1986.

Слова признательности Якобу Штейнеру

Г.Б. Филипповский,
Русановский лицей, г. Киев
g.filippovsky@yandex.ua

Выдающийся Швейцарский математик Якоб Штейнер (1796–1863), представитель так называемой «чистой геометрии» обогатил ее многими замечательными теоремами и задачами. 14 лет он работал в средней школе в Берлине, уделяя большое внимание одаренным ученикам, придумывая для них яркие индивидуальные задания. Затем был профессором в Берлинском университете, читая студентам вдохновенные лекции по геометрии. Слушателям лекций импонировало, что Штейнер во время лекций постоянно ставил задачи перед студентами и вызывал их к доске для решения!

Якоб Штейнер уделял большое внимание задачам на геометрические построения при помощи одной линейки, а также линейки и фиксированной неподвижной окружности.

При помощи геометрических средств он решал задачи, касающиеся максимумов и минимумов, в том числе изопериметрическую задачу. Он был также одним из создателей проективной геометрии.

Многие задачи Якоба Штейнера красивы, изящны, остроумны! Они вызывают добрую «белую» зависть к автору этих задач, рождая эмоцию: «Ах, почему он, а не я?!» Якоб Штейнер утверждал, что расчет заменяет мышление, а геометрия наоборот, это мышление углубляет. Перед тем, как переходить к авторским задачам Штейнера по элементарной геометрии, заметим, что некоторые решения этих задач совпадают с авторскими, другие же являются более поздними, современными.

Задача 1. Дан круг и прямая, содержащая диаметр AB (рис.1). С помощью одной линейки опустите из данной точки K вне круга перпендикуляр на диаметр.

Решение.

1) Проведем KA и KB. Пусть они пересекут окружность в точках D и E.

2) Проведем AE и BD. Поскольку $\angle AEB = \angle ADB = 90°$ (вписанные, опираются на диаметр), то точка пересечения AE и BD совпадет с ортоцентром H в треугольнике AKB. А так как в любом треугольнике три высоты пересекаются в одной точке, то прямая KH будет искомой.

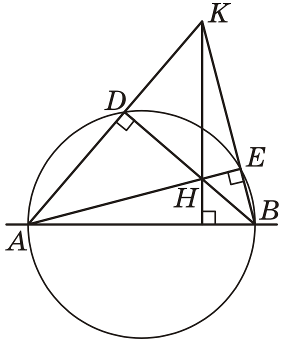


Рис. 1

Задача 2. (*важнейшее свойство трапеции*) Если провести прямую через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения ее непараллельных сторон, то основания разделятся этой линией пополам. Докажите!

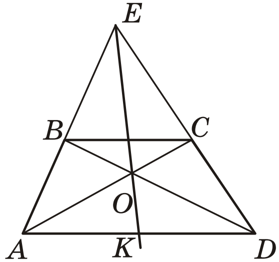


Рис. 2

Доказательство. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, а продолжения боковых сторон в точке E (рис.2). Пусть также прямая EO пересекает AD в точке K. Тогда по теореме Чевы для треугольника AED: $\frac{EC}{CD}\cdot\frac{DK}{KA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$. Заметим, что $\frac{EC}{CD}=\frac{BE}{AB}$ (по теореме Фалеса). Следовательно, $\frac{BE}{AB}\cdot\frac{DK}{KA}\cdot\frac{AB}{BE}=1$, или $\frac{DK}{KA}=1$, т.е. K – середина AD. Поскольку $BC \parallel AD$, то очевидно, что прямая EO пересечет и меньшее основание BC в его середине.

Задача 3. На прямой даны три точки A, B, C, причем $AB = BC$. Через произвольную точку K вне прямой проведите прямую, параллельную AC.

Решение.

1) Проведем прямую CK и возьмем на ней произвольную точку N (рис.3).

2) Проведем NA и NB.
3) Проведем AK, и пусть $O = AK \cap NB$.
4) Проведем прямую CO, и пусть $T = CO \cap AN$.
5) Очевидно, что прямая TK — искомая (см. задачу №2).

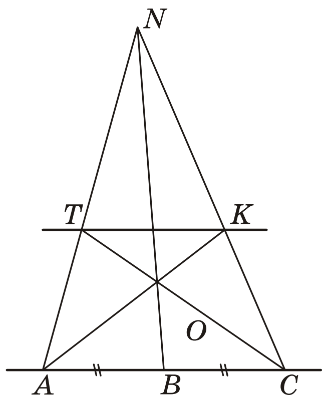


Рис. 3

Задача 4. (*Теорема Штейнера–Лемуса*) Докажите, что если биссектрисы двух внутренних углов некоторого треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

Доказательство. Пусть $l_b = l_c$. Докажем, что в таком случае $b = c$.

Для доказательства воспользуемся известными формулами, выражающими длины биссектрис через стороны треугольника:

$l_b = \dfrac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$; $l_c = \dfrac{2\sqrt{abp(p-c)}}{a+b}$ (докажите!).

Согласно условию, $\dfrac{acp(p-b)}{(a+c)^2} = \dfrac{abp(p-c)}{(a+b)^2}$, или

$$c(p-b)(a+b)^2 = b(p-c)(a+c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cp(a+b)^2 - bc(a+b)^2 = bp(a+c)^2 - bc(a+c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc((a+c)^2 - (a+b)^2) = p(ba^2 + 2abc + bc^2 - ca^2 - 2abc - cb^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc(c-b)(2p+a) = p(a^2(b-c) - bc(b-c)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-c)(pa^2 - pbc) + (b-c)(2pbc + abc) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-c)(pa^2 + pbc + abc) = 0 .$$

Поскольку во втором множителе все числа положительны, то $b - c = 0$ и $b = c$.

Задача 5. Если дано по одному катету двух прямоугольных треугольников и известна сумма длин двух других катетов, то сумма длин гипотенуз будет наименьшей в случае подобия треугольников. Докажите!

Доказательство. Отложим сумму катетов $b+b_1$, а также катеты a и a_1 данных треугольников (рис.4). Тогда на CC_1 необходимо найти такую точку X, чтобы сумма $BX+B_1X$ была наименьшей. А это — известная задача Герона, т.е. точка X такова, что $\angle 1=\angle 2$. А это и означает, что ΔBCX и ΔB_1C_1X подобны.

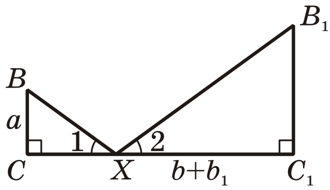


Рис. 4

Задача 6. Имеются три деревни: *A*, *B*, *C*. требуется соединить их минимальной по длине сетью дорог.

Решение. Рассмотрим случай, когда углы образовавшегося ΔABC меньше, чем 120°. Покажем, что в этом случае искомой будет точка *T* — так называемая точка Торричелли, из которой все стороны видны под углами 120°.

Через вершины *A*, *B*, *C* проведем прямые, соответственно перпендикулярные *TA*, *TB*, *TC* (рис.5). Очевидно, что в пересечении получится равносторонний треугольник *DEK* (все его углы по 60°). Известно, что для равностороннего треугольника сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его сторон есть величина постоянная. То есть, в нашем случае $TA+TB+TC=h$.

Покажем, что для любой другой точки *N* в плоскости ΔABC сумма $NA+NB+NC$ будет большей.

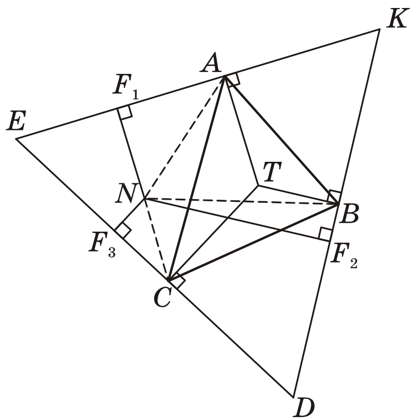


Рис. 5

Проведем из *N* перпендикуляры на стороны треугольника *DEK* (NF_1, $NF_{2.}$, NF_3). Очевидно, что $NA>NF_1$, $NB>NF_2$, $NC>NF_3$ (катет меньше гипотенузы). Но $NF_1+NF_2+NF_3=h=TA+TB+TC$. Следовательно, $TA+TB+TC<NA+NB+NC$.

Задача 7. Через вершину A треугольника ABC внутри него проведены две прямые, образующие равные углы с AB и AC и пересекающие BC в точках N и K (рис.6). Докажите, что $\frac{BK \cdot BN}{CK \cdot CN} = \frac{c^2}{b^2}$ (*теорема Штейнера*).

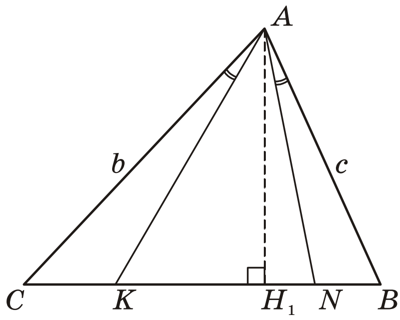


Рис. 6

Доказательство.

$$\frac{S_{AKB}}{S_{ACN}} = \frac{AK \cdot c}{AN \cdot b} \text{ (поскольку } \angle BAK = \angle CAN\text{).}$$

С другой стороны, $\frac{S_{AKB}}{S_{ACN}} = \frac{BK}{CN}$ (так как высота AH_1 в этих треугольниках общая).

Аналогично,

$$\frac{S_{ACK}}{S_{ANB}} = \frac{AK \cdot b}{AN \cdot c} = \frac{CK}{BN} \text{ или, перевернув, } \frac{AN \cdot c}{AK \cdot b} = \frac{BN}{CK}.$$

Тогда имеем:

$$\frac{BK}{CN} \cdot \frac{BN}{CK} = \frac{AK \cdot c}{AN \cdot b} \cdot \frac{AN \cdot c}{AK \cdot b} = \frac{c^2}{b^2}\text{, то есть } \frac{BK \cdot BN}{CK \cdot CN} = \frac{c^2}{b^2},$$

что и требовалось доказать.

В заключение — несколько задач Якоба Штейнера, а также импровизаций на темы его задач – для самостоятельного решения.

Задача 8. С помощью одной линейки опустите из точки K перпендикуляр на диаметр AB для рисунков 7(*а*) и 7(*б*).

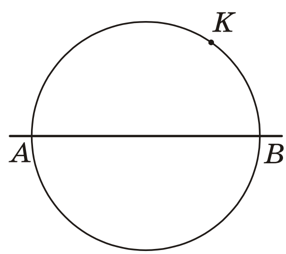


Рис. 7 (а)

Задача 9. Даны две параллельные прямые и точка вне прямых. С помощью одной линейки проведите через эту точку третью прямую, параллельную данным.

Задача 10. Дана прямая l и параллельный ей отрезок AB. С помощью одной линейки разделите отрезок AB пополам.

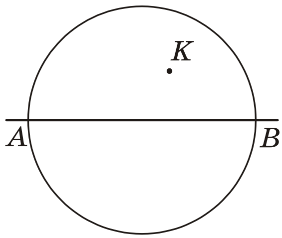


Рис. 7 (б)

Задача 11. Постройте кратчайшую сеть дорог для точек A, B, C, если в ΔABC $\angle A \geq 120°$.

Задача 12. Постройте для точек A, B, C, D (где $ABCD$ — квадрат) кратчайшую сеть дорог

а) с одним узлом;

б) с двумя узлами.

Лемма о «дважды биссектрисе» треугольника

Г.Б. Филипповский,
Русановский лицей, г. Киев
g.filippovsky@yandex.ua

Любителям геометрии известно достаточно много фактов «из жизни» биссектрисы треугольника. Сюда следует отнести: свойство биссектрисы $\frac{b}{c}=\frac{x}{y}$ (рис.1). То, что биссектриса является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла. Две знаменитые формулы: $l_a^2 = bc - xy$ и $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ (рис. 1). И даже несколько изысканную, но также весьма полезную формулу: $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$. Все это так. Биссектриса — один из главных отрезков в геометрии треугольника.

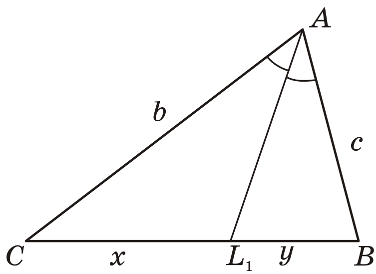


Рис. 1

Мы же сейчас поведем разговор о менее популярном, но чрезвычайно важном, необходимом свойстве биссектрисы. О том, что *биссектриса угла треугольника делит пополам угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенными из вершины того же угла.* Иными словами, l_a (биссектриса угла A) является биссектрисой угла OAH_1 (рис. 2).

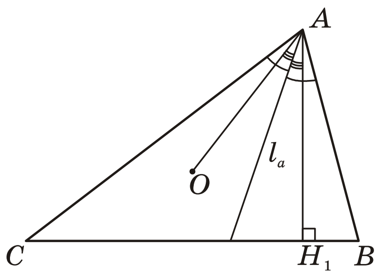


Рис. 2

После доказательства этого свойства (назовем его *леммой о «дважды биссектрисе»*) постараемся аргументированно показать, насколько оно полезно при решении геометрических задач.

Лемма о «дважды биссектрисе».

Биссектриса l_a треугольника ABC является также биссектрисой угла OAH_1, где O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH_1 — высота h_a (рис. 3).

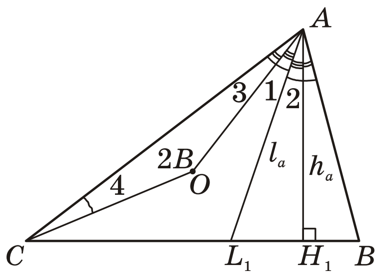


Рис. 3

Доказательство.

Угол AOC является центральным, т.е. $\angle AOC = 2B$. Тогда $\angle 3 = \angle 4 = \dfrac{180° - 2B}{2} = 90° - B$. Но и $BAH_1 = 90° - B$ (из треугольника BAH_1). Поскольку l_a делит $\angle BAC$ пополам, то, отняв от равных углов равные, мы вновь получим равные. Поэтому, $\angle 1 = \angle 2$. Лемма доказана.

Задача 1. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к BC и продолжение биссектрисы l_a пересекаются в точке Q (рис. 4). Докажите, что Q лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство.

Проведем высоту AH_1 и радиус AO. $\angle 1 = \angle 2$ (согласно лемме). Но $\angle 2 = \angle 3$ — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых ($AH_1 \parallel OQ$). Следовательно, ΔAOQ — равнобедренный, причем $OQ = OA = R$. А это и означает, что точка Q принадлежит описанной окружности ΔABC.

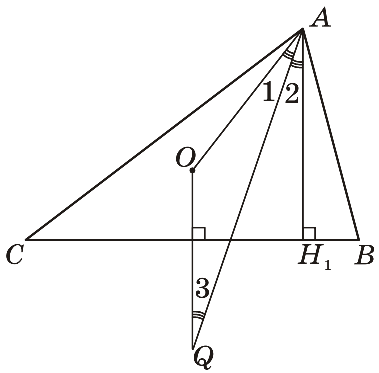


Рис. 4

Задача 2. В треугольнике ABC высота h_a и медиана m_a делят угол A на три равные части. Найти угол A.

Решение. Проведем биссектрису $AL_1 = l_a$ (рис. 5). Поскольку $\angle 3 = \angle 5$ (из условия), то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, центр O описанной окружности ΔABC лежит на медиане m_a. Но и серединный перпендикуляр t к стороне BC содержит точку O. Значит, $O \equiv M_1$ (где M_1 — середина BC). Но тогда BC — диаметр, и угол A равен $90°$.

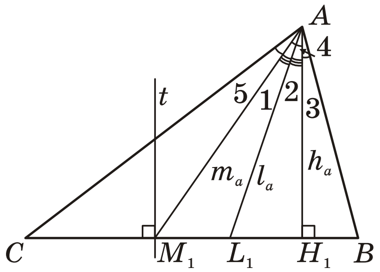


Рис. 5

Задача 3. Постройте треугольник ABC по h_a, l_a, m_a.

Решение. Треугольники AH_1L_1 и AH_1M_1 легко строятся по катету и гипотенузе (рис. 6). Через вершину A проведем луч n под углом 1, равным углу 2. Согласно *лемме* луч n содержит центр O описанной окружности ΔABC. Но и перпендикуляр t, восстановленный в точке M_1 к прямой M_1H_1, также содержит точку O. Таким образом, O находится на пересечении n и t. Дальнейшее построение очевидно. Анализ решения задачи предлагаем провести самостоятельно.

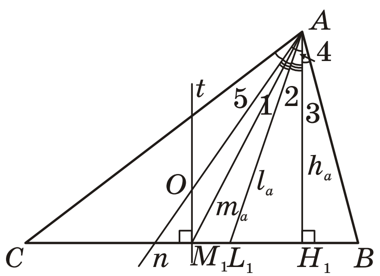


Рис. 6

Задача 4. Известно, что в треугольнике ABC модуль разности углов B и C равен φ, т.е. $|B - C| = \varphi$. Найдите величину угла OAH_1.

Решение. Пусть $\angle B > \angle C$. Проведем биссектрису l_a и найдем $\angle 2$ (рис.7).

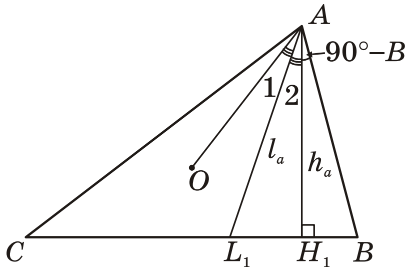


Рис. 7

$$\angle 2 = \frac{A}{2} - (90^\circ - B) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} + B = \frac{B-C}{2} = \frac{\varphi}{2}.$$

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle OAH_1 = \varphi$.

Аналогично для случая, когда $\angle C > \angle B$.

Задача 5. Постройте треугольник ABC по l_a, R, $B-C$ ($B > C$, R — радиус описанной окружности треугольника ABC).

Решение. Откладываем $AL_1 = l_a$. По обе стороны от l_a строим $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{B-C}{2}$ и проводим лучи t и h (рис. 8) . Согласно *лемме* и задаче 4 луч t содержит точку O, а луч h содержит высоту h_a . Далее на луче t откладываем отрезок $AO = R$. Из центра O радиусом $AO = R$ проводим окружность. Перпендикулярная к h прямая, проведенная из L_1, пересекает эту окружность в вершинах B и C.

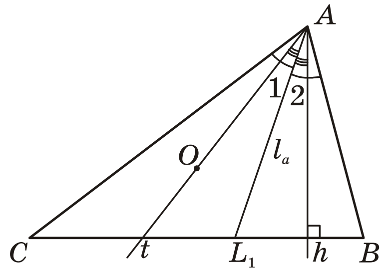


Рис. 8

Задача 6. Серединный перпендикуляр к BC и продолжение l_a пересекаются в точке Q_1 (рис. 9). Аналогично получены точки Q_2 и Q_3 (с помощью серединных перпендикуляров к AC и AB, а также биссектрис l_b и l_c). Известно, что $AQ_1 = BQ_2 = CQ_3$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

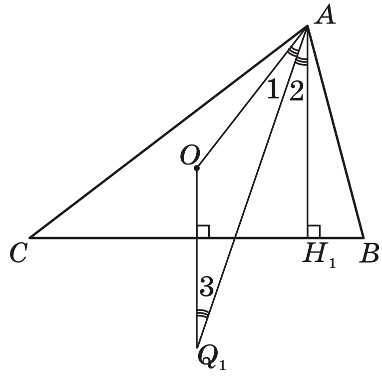


Рис. 9

Доказательство. По задаче 1 точки Q_1, Q_2, Q_3 принадлежат описанной окружности ΔABC. Тогда $\Delta AOQ_1 = \Delta BOQ_2 = \Delta COQ_3$ — по трем сторонам (две являются радиусами описанной окружности ΔABC, а третьи — равны по условию). Согласно *задаче 4*

$\angle 1 = \dfrac{|B-C|}{2}$. Аналогичные углы в треугольниках BOQ_2 и COQ_3 равны $\dfrac{|A-C|}{2}$ и $\dfrac{|A-B|}{2}$. Тогда имеем: $|B-C| = |A-C| = |A-B|$, откуда $A = B = C = 60°$.

Задача 7. Известно, что в остроугольном треугольнике ABC $l_a \perp OH$ (H — ортоцентр, точка пересечения высот треугольника ABC). Найдите угол A.

Решение. По *лемме о «дважды биссектрисе»* $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 10). Но, согласно условию, эта биссектриса является также и высотой в ΔOAH. Значит, $AH = AO = R$. Известно, что $AH = 2R \cdot |\cos A|$ (докажите!). Поскольку ΔABC — остроугольный, то $\cos A = \dfrac{1}{2}$ и $A = 60°$.

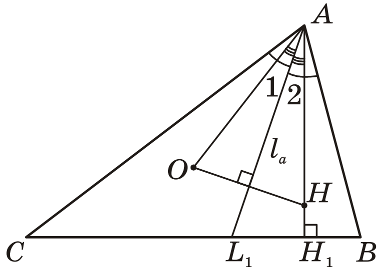


Рис. 10

Задача 8. Докажите, что в условии *задачи 7* выполняется равенство $OI = IH$ (I — инцентр, точка пересечения биссектрис треугольника ABC).

Доказательство.
$\Delta AOI = \Delta AHI$ — по двум сторонам и углу между ними (рис. 11). Действительно, $AH = OA = R$. AI — общая сторона и $\angle 1 = \angle 2$ (*согласно лемме*). Следовательно, $OI = IH$.

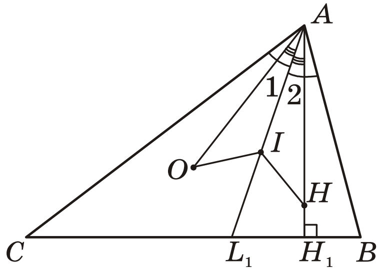


Рис. 11

Задача 9. Известно, что в треугольнике ABC инцентр I принадлежит отрезку OH. Докажите, что в таком случае треугольник ABC — равнобедренный.

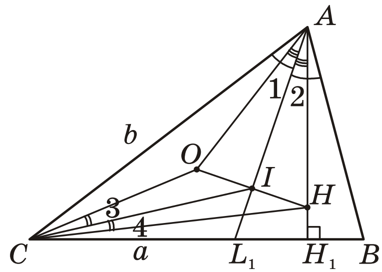


Рис. 12

Доказательство. AI — биссектриса в ΔOAH ($\angle 1 = \angle 2$ — *по лемме*). Воспользуемся известным *свойством биссектрисы*: биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. В нашем случае $\frac{OI}{IH} = \frac{AO}{AH} = \frac{R}{AH}$ (рис. 12). CI также является биссектрисой в ΔCOH. Вновь по свойству биссектрисы имеем: $\frac{OI}{IH} = \frac{CO}{CH} = \frac{R}{CH}$. Сравнив первое и второе равенства, получим: $AH = CH$. А это и означает, что $a = c$, поскольку $AH^2 = 4R^2 - a^2$, $CH^2 = 4R^2 - c^2$ (докажите!).

Задача 10. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90^\circ$) известны высота $AH_1 = h$ и биссектриса $AL_1 = l$. Найдите площадь треугольника ABC.

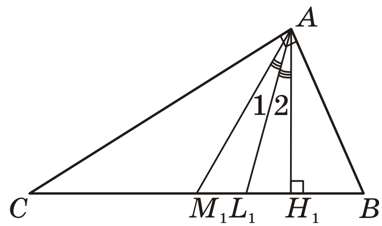


Рис. 13

Решение. Проведем медиану $AM_1 = m$. Поскольку гипотенуза BC является диаметром описанной окружности, то $M_1 \equiv O$ (рис. 13). Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$. Тогда $\angle M_1AH_1 = 2\alpha$. Из AH_1L_1: $\cos\alpha = \frac{h}{l}$, а из ΔAH_1M_1: $\cos 2\alpha = \frac{h}{m}$. Следовательно,

$$\frac{h}{m} = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2h^2}{l^2} - 1 = \frac{2h^2 - l^2}{l^2},$$

откуда $m = \frac{hl^2}{2h^2 - l^2}$. Поскольку $BC = 2m$, то $BC = \frac{2hl^2}{2h^2 - l^2}$. И, наконец, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h$, $S_{ABC} = \frac{h^2l^2}{2h^2 - l^2}$.

Задача 11 . Постройте прямоугольный треугольник ABC ($\angle A = 90°$) по точкам H_1, L_1, M_1 — соответственно основаниям высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины прямого угла. *(Польские олимпиады)*.

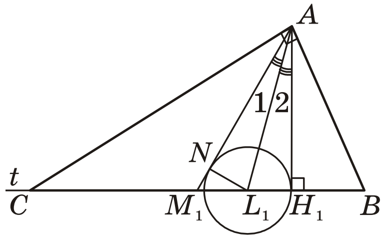


Рис. 14

Решение. Точки H_1, L_1, M_1 задают прямую t, содержащую BC. Анализ показывает, что поскольку $M_1 \equiv O$ и $\angle 1 = \angle 2$ (*по лемме*), то $\Delta AL_1H_1 = \Delta AL_1N$ ($L_1N \perp AM_1$) — по гипотенузе и острому углу (рис. 14).

Отсюда построение: Из точки L_1 как из центра «крутим» окружность радиусом L_1H_1. Касательная к этой окружности из точки M_1 пересечет перпендикуляр, восстановленный к t из точки H_1, в вершине A. И далее: $M_1C = M_1B = M_1A$.

Задача 12. В треугольнике известны длины отрезков h_a, l_a, m_a. Найдите R — длину радиуса описанной окружности треугольника ABC. (Заметим в скобках, что это — одна из трудных задач планиметрии).

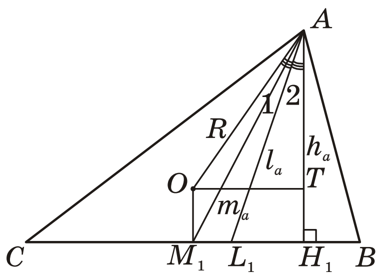


Рис. 15

Решение. Пусть $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$ (рис. 15). Тогда $\cos\alpha = \dfrac{h_a}{l_a}$ и $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{l_a^2 - h_a^2}}{l_a}$. Проведем $OT \perp h_a$. Очевидно, что $OT = M_1H_1 = \sqrt{m_a^2 - h_a^2}$. Поскольку $OAH_1 = 2\alpha$, то из ΔAOT имеем: $\dfrac{OT}{OA} = \sin 2\alpha$, или

$$\frac{\sqrt{m_a^2 - h_a^2}}{R} = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{l_a^2 - h_a^2}}{l_a}\cdot\frac{h_a}{l_a}.$$

Остается лишь записать ответ: $R = \frac{l_a^2}{2h_a} \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}}$.

Еще несколько задач, в которых успешно применяется *лемма о «дважды биссектрисе»*, предложим решить самостоятельно.

Задача 13. В треугольнике ABC h_a и m_a составляют равные углы соответственно с AB и AC. Найдите угол A.

Задача 14. Высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины угла A, разделили его на 4 равные части. Найдите углы треугольника ABC.

Задача 15. Точка движется по окружности с центром O. BC — неподвижный диаметр. A_1 — проекция точки A на BC. Докажите, что биссектриса угла OAA_1 проходит через неподвижную точку.

Задача 16. Центр окружности, проходящей через середины сторон неравнобедренного треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла A. Найдите угол A.

Задача 17. Из вершины угла треугольника ABC проведены высота, биссектриса и медиана. Какой из углов больший: между высотой и биссектрисой или между биссектрисой и медианой?

Задача 18. В треугольнике ABC угол A равен $45°$. В каком отношении биссектриса угла A делит отрезок прямой Эйлера (прямой, проходящей через центр описанной окружности O, центроид M и ортоцентр H)?

Задача 19. Известно, что в треугольнике ABC: $AH_1 = h$, $AH = q$ и $H_1L_1 = L_1M_1$. Найдите l_a.

Задача 20. Постройте треугольник ABC по вершине A, инцентру I и точке F пересечения продолжения высоты AH_1 с описанной около треугольника ABC окружностью.

Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и… еще одна точка!

Ю.А. Блинков,
ЦО №218, г. Москва
yura_blinkov@zmail.ru

В этой статье будет рассмотрена следующая геометрическая конструкция.

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Окружности ω и ω_1, описанные около треугольников ABC (O — центр) и A_1B_1C (O_1 — центр) соответственно, повторно пересекаются в точке P.

Оказывается, эта точка обладает некоторыми интересными свойствами.

Сначала о структуре текста.

В конце статьи приведены (без доказательств) вспомогательные *утверждения*, которыми мы будем пользоваться. Там же расположен раздаточный материал, который может быть использован для занятия (или занятий) математического кружка.

Основные факты в статье пронумерованы и называются *задачами*.

Кроме того, в тексте есть *упражнения* двух видов: 1) имеющие непосредственное отношение к данной точке (приводятся с решениями); 2) некоторые дополнительные свойства рассматриваемой конструкции (они приводятся без решений).

Некоторые из задач и упражнений (иногда в другой формулировке) предлагались на различных олимпиадах, причем некоторые — в качестве сложных. Но, если разобраться в конструкции (что и предлагается сделать читателю), задачи становятся вполне по силам и «непрофессионалам».

Итак, рассмотрим свойства точки P. Для начала «свяжем» ее с высотами и серединой стороны.

Задача 1. Точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.

Решение. Так как CH — диаметр окружности ω_1, то $\angle CPH = 90°$ (см. рис. 1). То есть точка пересечения прямой PH с окружностью ω диаметрально противоположна точке C.

С другой стороны, точка, симметричная H относительно M, диаметрально противоположна точке C (утверждение 2). Следовательно, прямые PH и MH совпадают, что и требовалось.

Задача 2. Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точку P.

Решение. Заметим, что $\angle MAA_1 = \angle HCA_1 = \angle HPA_1 = \angle MPA_1$ (см. рис. 2), то есть точки A, M, A_1 и P лежат на одной окружности. Для точек B, M, B_1 и P доказательство аналогично.

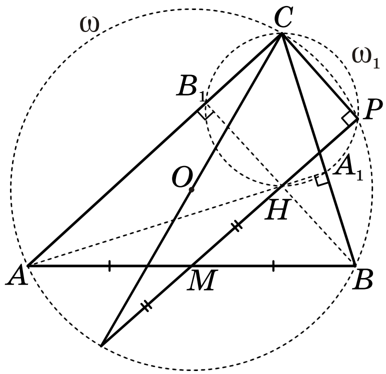


Рис. 1

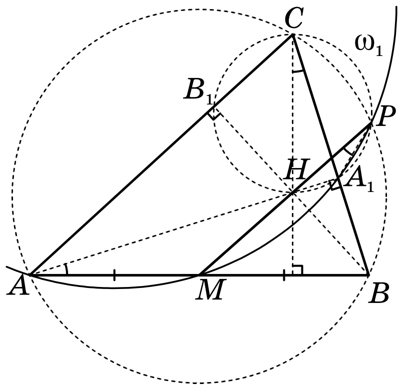


Рис. 2

Еще несколько свойств данных окружностей предлагаем читателю доказать самостоятельно.

Упражнение 1. а) Пусть окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, пересекают прямые BC и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M, O и L лежат на одной прямой.

б) (*Ю.Блинков, Московская устная олимпиада по геометрии, 2011*)

Пусть окружности, описанные около треугольника AMA_1 и BMB_1, пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M, O_1 и L лежат на одной прямой.

Еще одно свойство этих окружностей содержится в упражнении 4.

Теперь добавим в конструкцию прямую A_1B_1. Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S.

Задача 3. Точки *C, P* и *S* лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим общие хорды трех окружностей: ω, ω_1 и ω_2 с диаметром AB (см. рис.3). По утверждению 7, прямые AB, A_1B_1 и CP пересекаются в одной точке, откуда следует утверждение задачи.

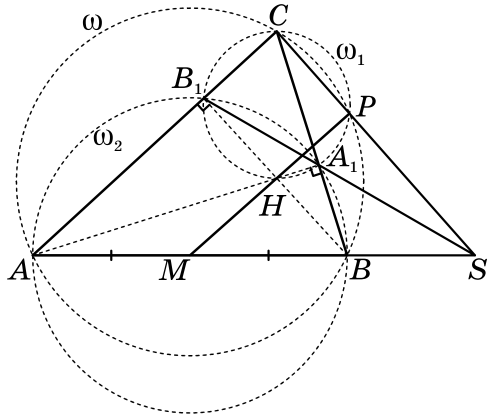


Рис. 3

Комментарии для знатоков:

Комментарий 1. Точка P — точка Микеля для прямых AC, BC, AB и A_1B_1.

Комментарий 2. CS — поляра точки H относительно окружности ω_2.

Вернемся к нашей конструкции.

Проведем медиану CM.

Из задачи 3 можно получить, например, такие утверждения:

Упражнение 2. Докажите, что прямые *SH* и *CM* перпендикулярны.

Докажите самостоятельно.

Упражнение 3. (*Ф. Ивлев, Московская устная олимпиада по геометрии, 2013*) *Пусть R — середина CM. Докажите, что* $\boldsymbol{OR \perp SC}$.

Решение. Заметим, что из утверждения 4 и параллельности прямых OM и CH следует, что четырехугольник $MOCO_1$ — параллелограмм, то есть точка R — середина OO_1 (см. рис. 4).

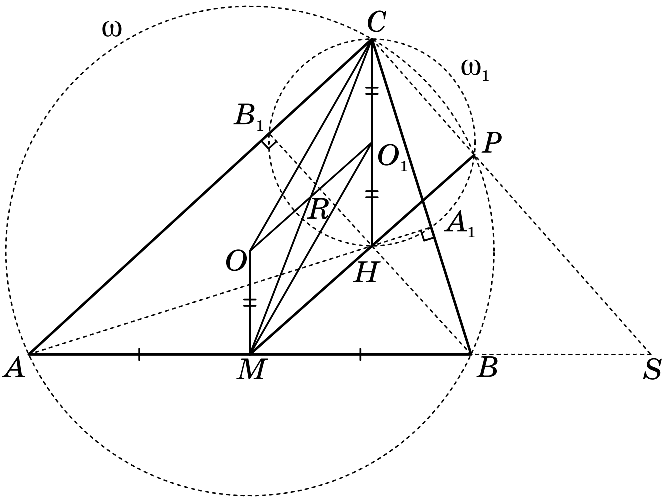


Рис. 4

Аналогично, четырехугольник MOO_1H — параллелограмм, то есть OO_1 параллельно MH.

Но прямая MH содержит точку P (задача 1), а значит перпендикулярна CS, что и требовалось.

Продолжим изучение свойств точки P, добавив в конструкцию касательные к окружности ω.

Пусть касательные в точках A и B к окружности ω, пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z.

Упражнение 4. (*Ю.Блинков, турнир математических боев им. Савина, 2011*) Докажите, что окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точки X и Y соответственно.

Из упражнения 4 можно получить важное утверждение, которое мы будем использовать далее.

Лемма. *M* — центр вписанной окружности треугольника *XYZ*.

Решение. 1) Так как $ZA = ZB$, то ZM — биссектриса угла XYZ (см. рис.5).

2) Так как четырехугольник AMA_1X — вписанный (упражнение 4) и $MA = MA_1$, то XM — биссектриса угла ZXY.

Комментарий. Можно рассуждать и по другому: использовав угол между касательной и хордой и антипараллельность отрезков AB и A_1B_1*, доказать, что треугольник* XAB_1 *равнобедренный. Далее — равенство треугольников.*

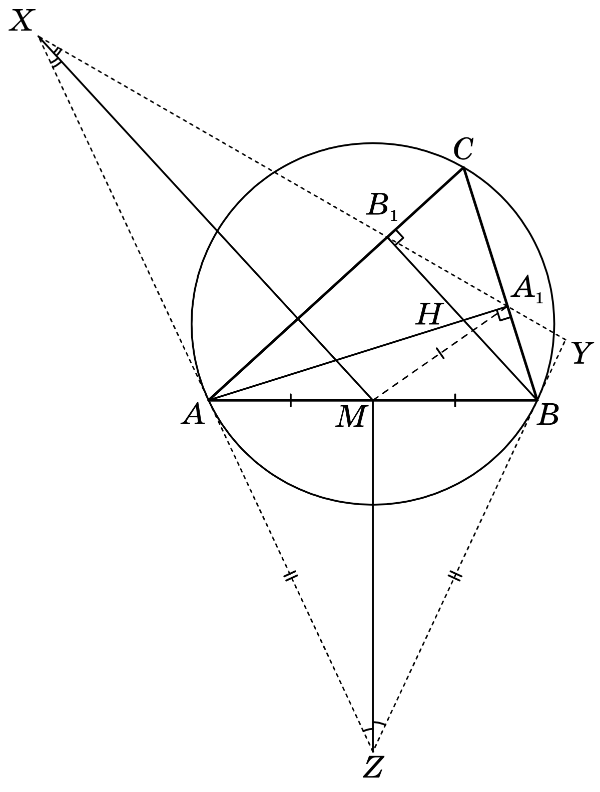


Рис. 5

Эту лемму можно использовать, например, для решения следующей задачи.

Упражнение 5. (*Ю. Блинков, турнир математических боев им. Савина, 2008*) Пусть C_1 — основание третьей высоты. Докажите, что прямые MH, A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке.

Указание. Используйте утверждения 1, 5 и 6, а также доказанную лемму.

Ну, а что же точка P? Оказывается, она имеет к данной конструкции самое непосредственное отношение.

Задача 4. (*Ю.Зайцева, Московская устная олимпиада по геометрии, 2012*) Описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.

Решение. Так как P принадлежит первой из окружностей, то достаточно доказать, что P — центр гомотетии, переводящей первую окружность во вторую.

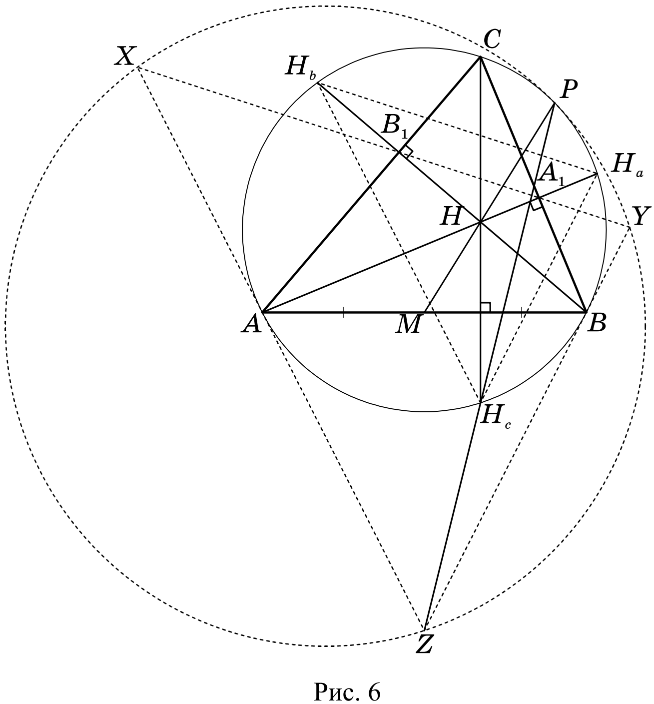


Рис. 6

Рассмотрим треугольники YXZ и $H_aH_bH_c$ (H_a, H_b и H_c — точки симметричные H относительно соответствующих сторон треугольника ABC, см. рис. 6).

Заметим, что:

1) Из утверждений 1 и 3 следует, что H центр вписанной окружности треугольника $H_aH_bH_c$.

2) Из утверждений 3, 5 и 6 следует, что треугольники YXZ и $H_aH_bH_c$ гомотетичны.

3) Так как треугольник $H_aH_bH_c$ вписан в окружность, описанную около треугольника ABC (утверждение 3), то при этой гомотетии окружности перейдут друг в друга.

4) Из леммы и предыдущих пунктов следует, что центр гомотетии лежит на прямых MH и ZH_c, то есть на их пересечении.

Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение.

Упражнение 6. Докажите, что точки *Z, P* и H_c лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что PZ — симедиана треугольника PAB (утверждение 8).

Так как, в силу симметрии, $\angle PMB = \angle H_cMB$ (см. рис.7), то H_c лежит на симедиане, что и требовалось.

Комментарий. Возможен и другой способ решения задачи 4 — через свойства полувписанной окружности (см. *http://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=116754*.)

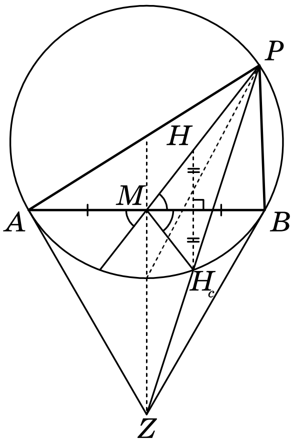


Рис. 7

И, наконец, последнее. В упражнении 5 была рассмотрена прямая ZC_1. Через точку P, в отличие от прямой ZH_c она не проходит, но зато верно следующее утверждение, похожее на упражнение 5.

Задача 5. (*Ю. Блинков, Московская устная олимпиада по геометрии, 2011*) Прямые *AP, BC* и ZC_1 пересекаются в одной точке.

Прежде чем доказывать утверждение задачи, рассмотрим

Упражнение 7. Пусть A_2 — точка, симметричная A_1 относительно высоты CC_1. Докажите, что:

а) A_2, A и P лежат на одной прямой.

б) A_2 лежит на прямой B_1C_1 и на окружности ω_1.

Решение. а, б) Так как $\angle MAA_1 = \angle MA_1A$ (A_1M медиана прямоугольного треугольника AA_1B), то, учитывая Задачу 2, получим, что PM — биссектриса $\angle APA_1$, то есть A_2 — точка пересечения AP и окружности с диаметром CH (см. рис. 8). Отметим также, что CC_1 — биссектриса $A_1C_1B_1$ (утверждение 1), откуда следует, что A_2 лежит на прямой B_1C_1.

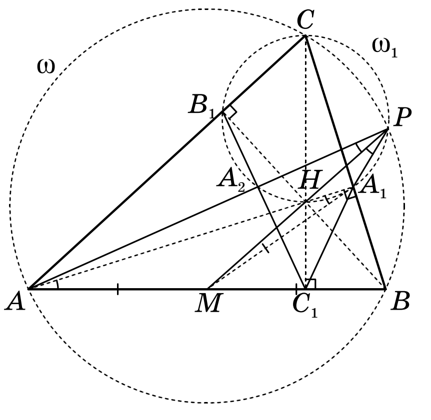


Рис. 8

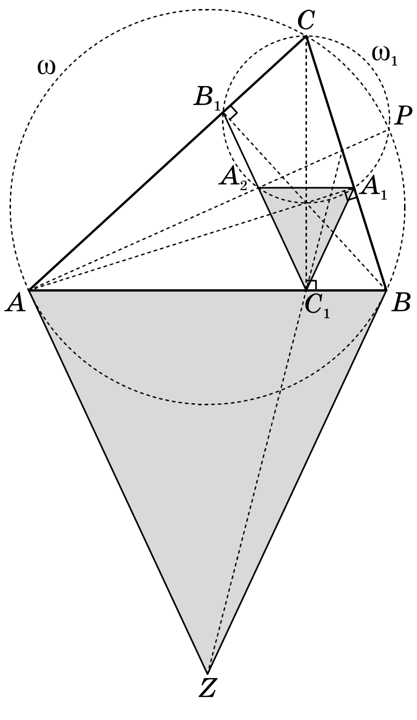


Рис. 9

Теперь докажем утверждение задачи.

Из утверждения 5 следует, что $B_1C_1 \parallel AZ$; $A_1C_1 \parallel BZ$. Кроме того, $A_2A_1 \parallel AB$ (см. рис. 9).

То есть у равнобедренных треугольников AZB и $A_2C_1A_1$ соответствующие стороны параллельны, следовательно они гомотетичны (утверждение 6), причем центр гомотетии лежит на пересечении прямых AA_2, BA_1 и ZC_1. Следовательно, прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

Вспомогательные утверждения

1) Докажите, что ортоцентр треугольника — центр вписанной окружности его ортотреугольника.

2) Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны AB треугольника ABC лежит на описанной окружности и диаметрально противоположна точке C.

3) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника ABC лежат на его описанной окружности и образуют треугольник, гомотетичный ортотреугольнику.

4) Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника ABC до середины стороны AB равно половине расстояния от вершины C до ортоцентра треугольника.

5) Докажите, что касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.

6) Докажите, что треугольники с соответственно параллельными сторонами — гомотетичны.

7) *Радикальный центр.* Даны три окружности, из которых каждые две пересекаются. Докажите, что прямые, содержащие их общие хорды пересекаются в одной точке.

8) *Основное свойство симедианы.* Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке Z. Докажите, что прямая CZ содержит симедиану (прямую, симметричную медиане относительно биссектрисы) треугольника ABC.

Раздаточный материал
Математический кружок

Занятие рассчитано на учеников 9 – 11 класса, имеющих опыт в решении элементарных задач (см. **вспомогательные утверждения**). Возможно, часть из вспомогательных утверждений имеет смысл предварительно разобрать.

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Окружности ω и ω_1, описанные около треугольников ABC (O — центр) и $A_1B_1C_1$ (O_1 — центр) соответственно, повторно пересекаются в точке P. Докажите, что:

1. а) Точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.

б) Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точку P.

2. а) Пусть окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, пересекают прямые BC и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M, O и L лежат на одной прямой.

б) Пусть окружности, описанные около треугольника AMA_1 и BMB_1, пересекают прямые AC и BC в точках K и L соответственно. Докажите, что K, M, O_1 и L лежат на одной прямой.

3. Пусть касательные в точках A и B к окружности ω, пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z. Докажите, что:

а) Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1, проходят через точки X и Y соответственно.

б) M — центр вписанной окружности треугольника XYZ.

в) точки Z, P и H_c (симметричная H относительно стороны AB), лежат на одной прямой.

г) описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.

4. Пусть A_2 — точка, симметричная A_1 относительно высоты CC_1. Докажите, что:

а) A_2 лежит на прямой B_1C_1 и на окружности ω_1

б) A_2, A и P лежат на одной прямой.

5. а) прямые MH, A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке.

б) прямые AP, BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.

6. Пусть A_1B_1 и AB пересекаются в точке S, R — середина CM. Докажите, что:

а) C, P и S лежат на одной прямой.

б) прямые SH и CM перпендикулярны.

в) прямые OR и SC перпендикулярны.

Занятие можно разбить на следующие серии (и предлагать ученикам только некоторые из них):

Серия 1 (вокруг окружностей): 1А, 1Б, 2А, 2Б, 3А.

Серия 2 (пересечение на стороне ортотреугольника): 3Б, 5А.

Серия 3 (пересечение на стороне треугольника): 1А, 4А, 4Б, 5Б.

Серия 4 (касание): 3Б, 3В, 3Г.

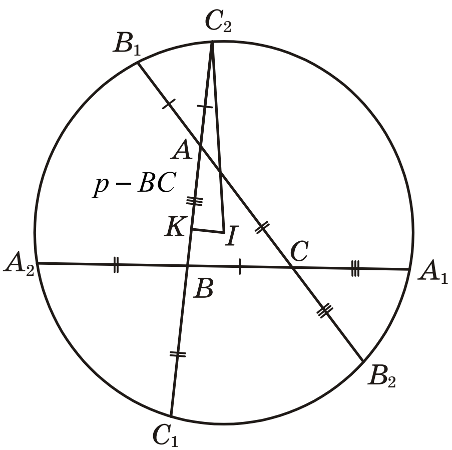
Серия 5 (перпендикулярность): 1А, 6 А, 6 Б, 6В.

Окружности Конвея и Тейлора, «точка Мякишева»

Д.В. Прокопенко,
ФМШ 2007, г. Москва
Prokop.dm@mail.ru

В предлагаемой небольшой подборке задач рассматриваются две классические окружности, их связь с задачами.

Задача 1 (*окружность Конвея*) На продолжении сторон BA и CA за точку A отложим отрезки AB_1 и AC_2, равные стороне BC. Аналогично построим точки B_2 и A_1, A_2 и C_1. Докажите, что все построенные таким образом точки лежат на одной окружности.



Заметим, что $B_1C_1B_2C_2$ — равнобедренная трапеция. Вокруг нее можно описать окружность. Центр этой окружности лежит на серединном перпендикуляре к B_1C_2. Треугольник AB_1C_2 — равнобедренный. Серединный перпендикуляр к B_1C_2 совпадает с биссектрисой угла B_1AC_2, а также вертикального ему угла BAC. Следовательно, центр окружности, описанной около $B_1C_1B_2C_2$ лежит на биссектрисе угла BAC .

Докажем, что центр вписанной окружности *I* равноудален от точек $A_1,...C_2$.

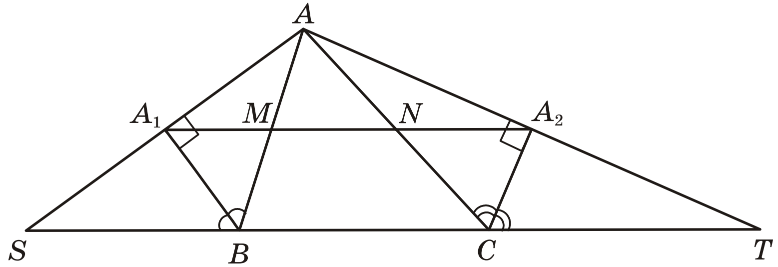
Пусть вписанная окружность касается стороны *AB* в точке *K*, *p* — полупериметр треугольника *ABC*. Известно, что $AK = p - BC$. Тогда, учитывая, что $C_2A = BC$, получим

$$C_2K = C_2A + AK = BC + p - BC = p .$$

Поскольку в прямоугольном треугольнике C_2KI стороны $IK = r$ и $C_2K = p$, то все такие треугольники равны. Точка *I* равноудалена от точек $A_1,...C_2$ на расстояние $\sqrt{p^2 + r^2}$. Следовательно, все точки $A_1,...C_2$ лежат на одной окружности, центр *I* которой совпадает с центром вписанной окружности исходного треугольника *ABC*. Эта окружность называется окружностью Конвея.

Задача 2 Пусть A_1 и A_2 — проекции точки *A* на биссектрисы внешних углов при вершинах *B* и *C* треугольника *ABC*. Точки B_1 и B_2, C_1 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что 1) отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны; 2) все эти точки лежат на одной окружности.

1) Пусть лучи AA_1 и AA_2 пересекают прямую *BC* в точках *S* и *T*.

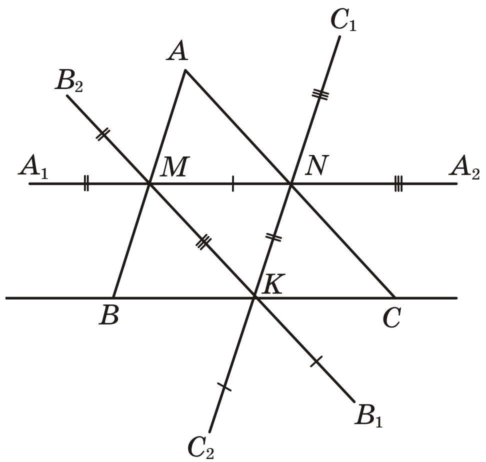


Тогда в треугольнике *ABS* отрезок BA_1 — биссектриса и высота. Следовательно, треугольник *ABS* — равнобедренный, $BS = AB$ и A_1 — середина *AS*. Аналогично, $CT = AB$ и A_2 — середина *AT*.

Тогда A_1A_2 — средняя линия треугольника AST. Следовательно, $A_1A_2 \parallel BC$. Учитывая, что $BS = AB$ и $CT = AB$, найдем $A_1A_2 = \dfrac{1}{2}ST = p$, где p — полупериметр треугольника ABC. Таким образом, $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = p$, и первая часть задачи решена.

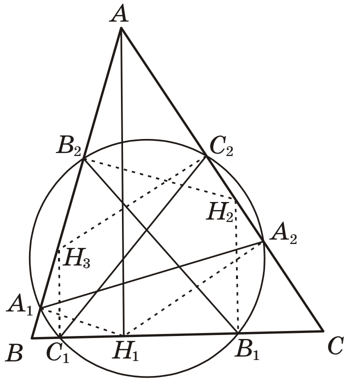
2) Пусть M, N и K — середины сторон AB, AC и BC соответственно. Тогда точки A_1, A_2, M и N лежат на одной прямой. Аналогично, прямые B_1B_2 и C_1C_2 проходят через стороны серединного треугольника MNK. При этом выполняются равенства:

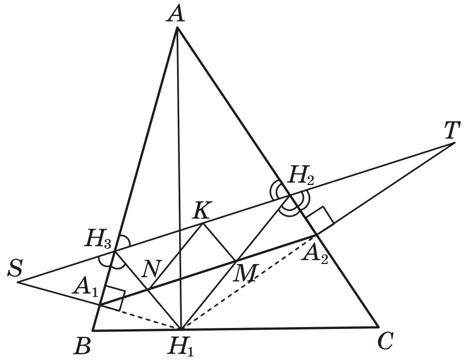
$$A_1M = B_2M = KN,\ A_2N = C_1N = KM \text{ и } B_1K = C_2K = MN.$$



Заметим, что треугольник MNK и точки $A_1,...C_2$ образуют конструкцию из задачи 1. Тогда все точки $A_1,...C_2$ лежат на окружности Конвея треугольника MNK. Ее центр совпадает с центром вписанной окружности серединного треугольника MNK.

Задача 3 (*окружность Тэйлора*) Пусть AH_1, BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC. A_1 и A_2 — проекции точки H_1 на прямые AB и AC. Аналогично определим точки B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажем, что отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны, и все эти точки лежат на одной окружности.





Пусть прямые H_1A_1 и H_1A_2 пересекают прямую H_2H_3 в точках S и T. Известно, что углы BH_3H_1 и AH_3H равны (см. приложение, свойство 2). Углы SH_3A_1 и AH_3H_2 — вертикальные. Следовательно, H_3A_1 — биссектриса угла SH_3H_1. Аналогично, H_2A_2 — биссектриса угла TH_2H_1. Получим, что A_1 и A_2 — проекции точки H_1 на биссектрисы внешних углов треугольника $H_1H_2H_3$ при вершинах H_2 и H_3. Можно показать, что аналогичное утверждение выполняется и для других пар точек. Заметим, что треугольник $H_1H_2H_3$ и точки $A_1,...C_2$ образуют конструкцию из задачи 2. Следовательно, отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 равны, и все эти точки лежат на окружности Конвея треугольника MNK, вершины которого являются серединами сторон треугольника $H_1H_2H_3$. В треугольнике ABC окружность, на которой лежат точки $A_1,...C_2$, называется окружностью Тэйлора.

Неожиданно мы получили довольно редкий факт, что один классический объект, которым является окружность Тэйлора, оказался другим классический объектом (окружность Тэйлора) во вспомогательном треугольнике.

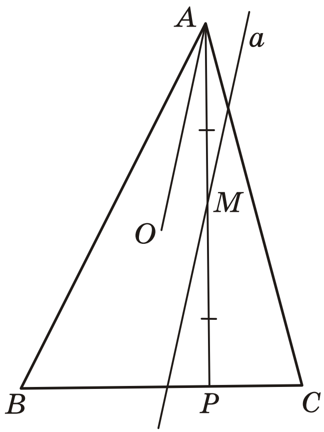
Задача 4. («*точка Мякишева*»)

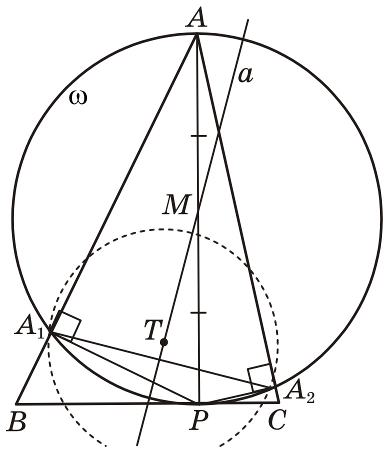
В треугольнике ABC O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Эта задача была включена в шестую устную олимпиаду по геометрии в 2010 году в качестве самой сложной. Автор задачи — известный московский геометр Алексей Геннадиевич Мякишев. Впечатляет лаконичность условия, редко можно увидеть сложную олимпиадную задачу по геометрии, условие которой можно записать в три строчки.

Пусть AP — высота треугольника ABC. Точки A_1 и A_2 — проекции точки P на AB и AC.

Четырехугольник AA_1PA_2 вписан в окружность ω с центром в точке M — середине отрезка AP. Как доказано в задаче №3, точки A_1 и A_2 лежат на окружности Тейлора треугольника ABC. Пусть T — ее центр. A_1A_2 — общая хорда двух окружностей. Следовательно, их линия центров MT перпендикулярна общей хорде A_1A_2.





По условию $a \parallel OA$, по свойству 1 из приложения $AO \perp B_1C_1$. Следовательно, $a \perp B_1C_1$. Аналогично, $b \perp A_1C_1$ и $c \perp A_1B_1$. Вспомним из задачи №3, что $A_1A_2 \parallel B_1C_1$, тогда $a \perp A_1A_2$.

Теперь понятно, что прямая a из условия совпадает с прямой MT и проходит через центр окружности Тейлора. Аналогичное утверждение верно и для прямых b и c. Следовательно, прямые a, b, и c

пересекаются в одной точке T — центре окружности Тейлора. Задача решена.

Конечно, хочется назвать точку T «*точкой Мякишева*», но это не совсем правильно, поскольку она совпала с центром классической окружности. Приходится писать кавычки.

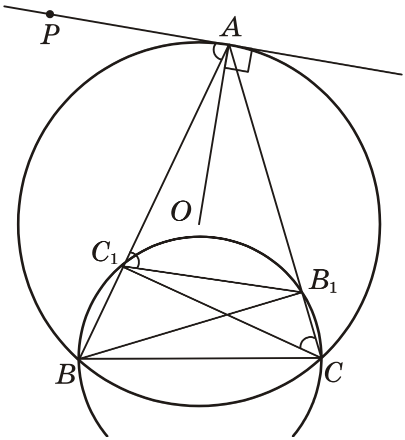
Приложение

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, O — центр описанной окружности.

Свойство 1. $OA \perp B_1C_1$.

Доказательство.

Углы BC_1C и BB_1C — прямые. Следовательно, вокруг четырехугольника BC_1B_1C можно описать окружность. По свойству вписанного четырехугольника $\angle AC_1B_1 = 180° - \angle BC_1B_1 = \angle BCA$ (1).



Проведем касательную AP к описанной окружности треугольника ABC (см. рисунок). По теореме об угле между касательной и хордой и, учитывая (1), $\angle PAC_1 = \angle ACB = \angle AC_1B_1$. По признаку параллельности прямых $AP \parallel B_1C_1$. По свойству касательной $AP \perp OA$, следовательно, $AP \perp B_1C_1$.

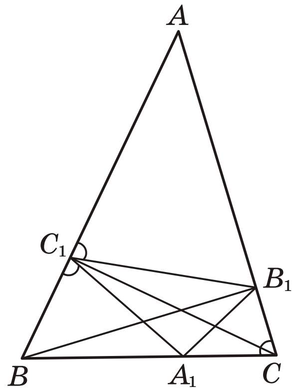
Треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями высот, часто называют ортотреугольником.

Доказанное свойство можно сформулировать кратко (и не совсем точно), так: сторона ортотреугольника перпендикулярна радиусу, проведенному к этой стороне.

Докажем еще одно полезное свойство ортотреугольника.

Свойство 2

$\angle AC_1B_1 = \angle AC_1B_1$. Аналогично для точек B_1 и A_1.



Четырехугольник BC_1B_1C — вписанный. Следовательно, $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$.

Четырехугольник AC_1A_1C — вписанный, $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$.

Следовательно, $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$.

Доказанное свойство удобно сформулировать так:

стороны ортотреугольника образуют равные углы со сторонами треугольника.

Начало изучения геометрии в 7 классе
(из опыта работы)

Е.Б. Гладкова,
Школа №192, г. Москва
jemandpr@gmail.com

- Нужны ли доказательства теорем?
- Как быть с аксиомами?
- О записи решений задач.

Каждый учитель, начиная преподавать геометрию в 7-м классе, поневоле задается вопросом, как построить обучение. Не секрет, что после отмены устных экзаменов по геометрии в 9-м и 11-м классах, центр тяжести изучения геометрии часто перемещается на решение задач, а изучение теории ограничивается формулировками теорем и их иллюстрацией на тщательно выполненных чертежах. В последнее время существенную помощь учителю здесь оказывают различные компьютерные программы, позволяющие демонстрировать теоремы на экране красочно и в динамике. В то же время, в классах с углубленным изучением математики сохраняется традиция начинать изучение геометрии с введения – более или менее полной – системы аксиом. Хотя и в этих классах возможны, конечно, разные подходы: кто-то предлагает детям самостоятельно прочитать доказательство теорем в учебнике, другие – нарисовать на альбомных листах ту или иную конфигурацию (три медианы треугольника, например), подметить закономерность и, считая все прочитанное и увиденное уже установленным, быстро переходит к решению довольно непростых задач. Не ставя под сомнение правомерность любого из этих способов и право учителя выбирать тот вариант, который он считает более правильным и соответствующим составу класса, расскажу о своем опыте работы в 7-м классе.

Мне кажется нежелательным отказываться от дедуктивного способа изучения геометрии не только потому, что непроверенные сведения (особенно с учетом Интернета) окружают современного ребенка со всех сторон. Сейчас увиденное, услышанное и прочитанное не стоит считать *a priori* верным, любой факт требует проверки. И именно математика, с ее повышенным уровнем требований к обоснованию, может привить привычку подвергать сомнению достоверность информации. Однако еще важнее, на мой взгляд, продемонстрировать новый, во многом непривычный, способ мышления и установления истинности рассуждений. И здесь учитель встречается с серьезными препятствиями. Одно из них — опыт изучения математики в 5–6 классе на основании непосредственного наблюдения (иногда вплоть до суммы углов треугольника!), второе — содержание фактов в начале курса геометрии: все они или их подавляющее большинство уже известны учащимся. Если начинать сразу с аксиом, то первые уроки речь будет идти об уже знакомых детям объектах и фактах. А самое главное, конечно, что потребность в доказательстве надо еще сформировать. И разговор об очевидных вещах этому не способствует. Какой ребенок сомневается в том, что:

— существуют точки, принадлежащие прямой и не принадлежащие ей;
— из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими;
— прямая разбивает плоскость на две полуплоскости;
— каждая точка на прямой разбивает эту прямую на две части так, что точки из разных частей лежат по разные стороны от данной точки, а точки из одной части лежат по одну сторону от данной точки;
— если прямая, не проходящая через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других его сторон и т.п.?

(Первые четыре утверждения — аксиомы, а последнее — теорема в учебнике А.В.Погорелова).

Все они, на взгляд учащихся, тривиальны, логические же тонкости остаются недоступными (в частности из-за непривычных формулировок: существуют, одна и только одна и т.п.). К тому же многие дети плохо говорят, сложные предложения часто не понимают. Не один раз на экзамене у коллег приходилось наблюдать, как дети либо тараторят дословно заученное, либо переставляют или заменяют слова, меняя смысл утверждения и даже не замечая этого. Неслучайно в науке математике аксиоматический метод был завершением длительного этапа, а совсем не началом развития. Прелесть и смысл аксиоматического метода остается непонятной семиклассникам. Значит, им предлагается жить по принципу: сперва выучи, потом поймешь. Но тогда теряется весь смысл изучения математики, в которой как раз ничего не следует принимать на веру.

Я решила так спланировать курс, чтобы разговор об аксиомах и доказательствах возник ПОСЛЕ появления соответствующего опыта у ребят. Поэтому первый урок был якобы «повторением» — шло обсуждение вопросов: что такое геометрия? какие геометрические фигуры вы знаете? какие из них относятся к планиметрии, т.е. к геометрии на плоскости? какая из фигур самая простая? как изобразить точку? как обозначить? сколько линий можно провести через отмеченную точку? а сколько линий можно провести, через две отмеченные точки? Ответ на последний вопрос в каждом из моих классов всегда был одинаков: «Одну». Собственно этот ответ и являлся целью беседы. Во-первых, здесь возникает возможность обратить внимание на необходимость точного употребления слов, во-вторых, появляется первый пример неверного, но совершенного «очевидного» детям утверждения. Заметив мое недоумение, несколько человек догадываются, что линий может быть много. После этого обсуждается смысл основного свойства прямой: через две точки можно провести прямую и притом только одну. (Именно основным свойством, а вовсе не аксиомой будет называться это утверждение в течение полугода.) Затем переходим к следующему блоку вопросов: сколько общих точек могут иметь две прямые. И здесь, после утверждения: ни одной или одну, впервые на уроке возникает вопрос — почему? После конфуза с числом линий он звучит вполне оправдано, и позволяет семиклассникам провести первое в их жизни математическое доказательство! Небольшое отступление: недавно, разговаривая со своими учениками в конце уже 10-го класса (т.е. почти через 4 года после первого в их жизни урока геометрии), я с удивлением обнаружила, что они до сих пор помнят эту историю с числом линий. Вряд ли формулировка аксиом произвела бы такое же сильное впечатление…

И тут возникает еще одна серьезная проблема: запись решений геометрических задач. Во-первых, семиклассники очень медленно пишут. И если решение хотя бы и «одноходовки» записывать со всеми обоснованиями — то за урок много задач не решить. А если решение не обосновывать, то теряется весь смысл геометрии, она попросту подменяется арифметикой. Положение осложняется еще и тем, что в курсе математики 5–6 классов те же самые задачи решались «выражением». Например, решая задачу: «На прямой отмечены точки A, B, C так, что $AB = 6$ см и $BC = 4$ см. Найти расстояние между серединами отрезков AB и BC», дети приучены писать: $6:2+4:2=5$ см — и все! И если в данной задаче ход мысли ребенка понять можно, то вряд ли похожее «решение», оперирующее лишь с числами, может устроить при решении даже немного более содержательных задач. Скажем, такой: «Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен $120°$. Высота, проведенная к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника». Думаю, немного найдется учителей, которые сочтут исчерпывающим решением единственную запись: $9:2=4{,}5$ см. А ведь сложность задач со временем будет расти!

На самом деле, вопрос как научить ребят записывать решения геометрических задач с необходимыми обоснованиями, как мне кажется, просто другая сторона все того же вопроса: насколько важны доказательства при обучении геометрии. Поэтому я решила разделить процессы собственно решения задачи и его записи, причем обучение записи вести отдельно. На практике это выглядит так: во время урока в тетрадь записывается максимум одно решение; задачи, решенные дома, записываются обязательно (но их не бывает много: 1–2). Все записанные решения обязательно проверяются. А через пару-тройку недель проводится специальный зачет, на котором каждому предлагается решить 2 задачи, причем решение одной надо рассказать — и по ней возможен диалог, уточняющий и исправляющий неудачные выражения, а решение другой записать — и никакие пояснения автора по написанному тексту уже не принимаются (хотя сама запись, конечно, подробно разбирается с указанием всех ее достоинств и недостатков). В результате, к концу первого месяца ученики уже вполне сносно записывают решения, и всем есть чем заняться, хотя никакого нового геометрического содержания все еще нет (отрезки и углы). Аргументация: в новом предмете так принято — спокойно воспринимается большинством ребят. А к октябрю уже появляются и первые содержательные задачи. Завершая разговор о записи решений, необходимо добавить, что все остальные задачи на уроке решаются либо по готовым чертежам, либо на черновике. По ним ведется либо общее обсуждение (ввиду важности или сложности задачи), либо микрообсуждение с товарищами. Например, вопрос, о биссектрисах смежных и вертикальных углов обязательно обсуждается всем классом (первый — ввиду важности самого факта, второй — ввиду важности способа рассуждения). А, скажем, задача: «При пересечении двух прямых третьей сумма двух углов оказалась равной $220°$. Найдите все получившиеся углы» — такой чести не удостаивается. Несколько слов о черновике. Когда я вводила эту форму работы, предполагалось, что каждый заведет специальный блокнот или тетрадку (так и говорилось на родительских собраниях и на первом уроке), где будут решаться задачи без записи полного обоснования с целью экономии времени. В любой момент ученики могут вернуться к этим задачам и по своим наброскам в черновике восстановить решение. Конечно, можно было ограничиться и решением задач на готовых чертежах, но мне кажется важным, уже с самого начала изучения геометрии научить читать условие задачи и самостоятельно создавать по нему чертеж. Оказалось, однако, что все эти специальные блокноты и тетради имеют обыкновение оставаться дома, использоваться и на других предметах тоже или даже вовсе теряться. Но поскольку, как я убедилась, раз решенная задача более или менее легко восстанавливалась каждым, а количество рассмотренных за урок задач при работе на черновике резко возрастало, я не стала проявлять в этом вопросе излишнюю придирчивость и часто довольствовалась отдельными листочками.

Вернемся теперь к содержанию. Распределение часов на самые первые уроки выглядит следующим образом:

- основное свойство прямой, символьные записи (2ч);
- отрезки, запись решения геометрических задач (4 ч);
- зачет;
- углы (4 ч);
- контрольная.

Следующий важный момент в 7-м классе: признаки равенства треугольников. До них мы не произносим слов теорема и доказательство. Были, конечно, свойства смежных и вертикальных углов, пояснения по решениям задач, но они воспринимались спокойно: действительно ведь не всем всё понятно, почему бы и не пояснить. Теперь же вдруг какая-то теорема. Зачем доказывать первый признак равенства? — этот вопрос в классе возникает обязательно. Идея проверить утверждение наложением также возникает практически немедленно (скорее всего, подготовленная курсом 5–6 классов). Тогда я предлагаю всем разбиться на пары. Один дома вырезает любой треугольник и сообщает по телефону партнеру длины двух сторон и величину угла между ними. Тот по указанным размерам вырезает свой треугольник (лучше, чтобы треугольники были разного цвета — можно для этого просто выдать каждой паре два разноцветных листка). На следующем уроке мы пытаемся совместить треугольники, изготовленные каждой парой. Понятно, что неточность измерений, построений и наложения приводит к нужному эффекту: утверждение о равенстве треугольников перестает быть безоговорочно очевидным. Полезно еще продемонстрировать и различные оптические иллюзии, которые легко найти во всевозможных книгах и на сайтах. В результате категорическое отторжение идеи доказательства пропадает само собой. И далее мы долго (14 ч) занимаемся первым признаком равенства треугольников. Почему так много времени на один признак? Ну, прежде всего, он совсем не один; здесь еще и равнобедренный треугольник, и новые слова: медиана, биссектриса, высота. Кроме того, решаются весьма важные для дальнейшего изучения геометрии задачи:

- понять смысл, как самого математического высказывания, так и роль каждого слова в нем;
- научиться записывать решения задач в два-три шага;
- научиться (каждому!) находить на чертеже равные треугольники (и здесь это получается довольно просто, т.к. признак-то всего одни, поэтому ясно, равенство каких элементов надо искать).

Конечно, возникает закономерный вопрос, откуда взять время? Но дело в том, что оно потом вернется сторицей: на хорошо понятый и отработанный материал новые знания ложатся значительно легче, тем более, если обратить внимание учеников на имеющиеся аналогии. Вообще, я неоднократно убеждалась, что самая важная для учителя поговорка: «Тише едешь — дальше будешь».

Что касается дальнейшего, то можно, конечно, продолжить изучение материала и по учебнику. Но я предпочитаю немного поменять порядок и сразу после второго и третьего признаков равенства треугольников рассмотреть соотношение между сторонами и углами треугольника и неравенство треугольника. Таким образом, к концу второй четверти фактически оказывается изученной абсолютная геометрия, т.е. факты, которые не зависят от аксиомы параллельности. И второе полугодие начинается с разговора о логическом строении геометрии (определения и теоремы, аксиомы, неопределимые понятия). Обсуждение идет на основе уже накопленного опыта. На детей сильное впечатление производит тот факт, что они, оказывается, уже немного знают и геометрию Лобачевского — это значительно повышает интерес к обсуждаемым вопросам. Понятно, что разговор об аксиомах на этом не заканчивается: мы непременно вернемся к нему совсем на другом уровне в начале 10-го класса при изучении стереометрии и математического анализа. Дальше курс геометрии строится уже традиционно: параллельные прямые, сумма углов треугольника, прямоугольные треугольники и т.д. Но к этому моменту ученики уже сами убедились, что от изменения порядка слов может меняться смысл высказывания; что доверять непосредственно видимому очами не стоит; им даже начинают нравиться точность формулировок и обоснованность рассуждений — короче говоря, они вовсе не считают геометрию скучным и непонятным предметом.

«Долгая серия» задач: от арифметики к алгебре

П.В. Чулков,
ФМШ 2007, г. Москва
chulkov2007@yandex.ru

Красивые обозначенья
Вас выведут из затрудненья.
И.В. Гёте

В алгебре числа обозначают не цифрами, а буквами.
А.Н. Барсуков

Понимание математических идей приходит постепенно, к ним требуется привыкнуть.

В качестве примера рассмотрим серию задач на вычисление, которые можно решить, обозначив число или числовое выражение буквой.

Задачи, предлагаемые здесь, образуют «долгую серию», — первые из них можно решать в 7 классе, а некоторые вполне могут подождать до 11 класса.

Цель — представить условие задачи в обозримой форме, в виде алгебраических выражений, структура которых проще (понятней), чем структура соответствующих арифметических выражений.

***Задача* 1** (7 класс).

Вычислите:

$$2\frac{1}{11}\cdot 2\frac{12}{13}+1\frac{2}{11}\cdot 2\frac{1}{13}+\frac{10}{11}\cdot 7\frac{1}{13}.$$

Обозначим: $\frac{1}{11}=a$, $b=\frac{1}{13}$, тогда:

$$(2+a)\cdot(3-b)+(1+2a)\cdot(2+b)+(1-a)\cdot(7+b)=15.$$

***Задача* 2** (8 класс).

Сравните числа:

$$\frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1} \text{ и } \frac{10^{2007}+1}{10^{2008}+1};$$

Обозначим: $10^{2006}=a$.

Теперь требуется сравнить

$$\frac{a+1}{10a+1} \text{ и } \frac{10a+1}{100a+1};$$

Рассмотрим разность дробей. Общий знаменатель этой разности положителен, выясним знак числителя.

Получим: $(a+1)(100a+1)-(10a+1)^2=81a>0$. Первая дробь больше.

***Задача* 3** (8 класс).

Докажите, что все числа последовательности 16, 1156, 111556, 11115556 … являются квадратами натуральных чисел.

Рассмотрим число

$$\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ цифр}}\;\underbrace{5\ldots5}_{n-1\text{ цифра}}\;6=\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ цифр}}\cdot10^n+5\cdot\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ цифр}}+1.$$

Тогда $\underbrace{1\ldots1}_{n\text{ цифр}}=\frac{1}{9}\left(10^n-1\right)$. Обозначим $10^n=a$.

Исходное число представим в виде:

$$\frac{1}{9}\left((a-1)a+5(a-1)+9\right)=\frac{1}{9}\left(a^2+4a+4\right)=\left(\frac{a+2}{3}\right)^2.$$

Число 10^n+2 — целое, следовательно, исходное число — полный квадрат.

***Задача* 4** (8 класс).

Найдите сумму цифр числа $\underbrace{9\ldots9}_{100\text{ цифр}}{}^3$.

$$\underbrace{9\ldots9}_{100}{}^3=\left(10^{100}-1\right)^3=10^{300}-3\cdot10^{200}+3\cdot10^{100}-1=$$

$$=\underbrace{9\ldots9}_{300}-3\underbrace{0\ldots0}_{200}+3\underbrace{0\ldots0}_{100}=\underbrace{9\ldots9}_{99}6\underbrace{9\ldots9}_{200}+3\underbrace{0\ldots0}_{100}=$$

$$=\underbrace{9\ldots9}_{99}7\underbrace{0\ldots0}_{99}2\underbrace{9\ldots9}_{100}.$$

Таким образом, сумма цифр данного числа равна $9\cdot200$

Ответ: 1800.

***Задача* 5** (9 класс).

Докажите, что число $4^9+6^{10}+3^{20}$ является квадратом натурального числа

Пусть $2^9=a$, $3^{10}=b$, тогда исходное выражение примет вид: $(a+b)^2=\left(2^9+3^{10}\right)^2$.

Следующая задача выглядит как-то уж чересчур громоздко, но замена делает её почти устной.

***Задача* 6** (8–9 класс).

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{n}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{n}}}}}$$

Обозначим:

$$x=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{\ddots}{+\cfrac{1}{n}}},$$

тогда исходное выражение принимает вид:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}+\frac{1}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{2x+1}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{2x+1}=\frac{1+x}{1+2x}+\frac{x}{2x+1}=1.$$

***Задача* 7** (8–10 класс).

Решите уравнение $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$.

Обозначим: $a=\sqrt{3}$. Получим квадратное уравнение относительно a:

$$a^2-\left(2x^2+1\right)a+x^4+x=0.$$

Найдем корни, получим два квадратных уравнения:

$$x^2+x-\sqrt{3}=0 \quad \text{и} \quad x^2-x+1-\sqrt{3}=0.$$

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$; $\dfrac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8. Вычислите:

а) $\underbrace{8\ldots8}_{100\text{ цифр}}\cdot\underbrace{3\ldots3}_{100\text{ цифр}}-\underbrace{4\ldots4}_{100\text{ цифр}}\cdot\underbrace{6\ldots6}_{100\text{ цифр}}$;

б) $2379\cdot23782378-2378\cdot23792379$;

в) $3\frac{1}{117}\cdot4\frac{1}{119}-1\frac{116}{117}\cdot5\frac{118}{119}-\frac{5}{119}$.

Задача 9. Сократите дроби:

а) $\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}\cdot\dfrac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{49}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}}$; б) $\dfrac{3737373737}{8181818181}$;

в) $\dfrac{8+222\cdot444\cdot888+444\cdot888\cdot1776}{2\cdot4\cdot8+444\cdot888\cdot1776+888\cdot1776\cdot3552}$;

г) $\dfrac{123456788\ldots887654321}{123456799\ldots997654321}$, цифра 8 встречается в числителе 2000 раз, а цифра 9 — в знаменателе 1999 раз (V Соросовская олимпиада 1998–1999, II тур, 10 класс).

Задача 10. Сравните числа:

а) $\dfrac{2007}{2011}$ и $\dfrac{20072008}{20112013}$; б) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100}$ и $\dfrac{1}{2}$.

Задача 11. Расположите числа в порядке возрастания:

$\dfrac{111110}{111111}, \dfrac{222221}{222223}, \dfrac{333331}{333334}$.

Задача 12.

а) если в числе 121 между парами соседних цифр поставить одинаковое количество нулей, то полученное число будет квадратом натурального числа;

б) если в числе 1331 между парами соседних цифр поставить одинаковое количество нулей, то полученное число будет кубом натурального числа.

Задача 13. Докажите, что данное число является квадратом натурального числа:

а) $2007\cdot2008\cdot2009\cdot2010+1$;

б) $2007\cdot2009\cdot2011\cdot2013+16$.

Задача 14. Вычислите квадратный корень из числа:

а) $\underbrace{11\ldots11}_{200\text{цифр}}-\underbrace{22\ldots22}_{100\text{ цифр}}$; б) $\underbrace{4\ldots4}_{100\text{ цифр}}+\underbrace{1\ldots1}_{51\text{ цифр}}-\underbrace{6\ldots6}_{50\text{ цифр}}$;

Задача 15. Докажите, что число является составным:

а) $53\cdot83\cdot109+40\cdot66\cdot96$;

б) $100007\cdot1000131\cdot100001+55$.

Решение. а) Пусть $a=139$, тогда:

$53\cdot 83\cdot 109+40\cdot 66\cdot 96=(a-96)(a-66)(a-40)+40\cdot 66\cdot 96$ — исходное число кратно 139.

б) Пусть $100005=x$. Рассмотрим многочлен:

$$(x+2)\cdot(x+8)\cdot(x-4)+55=x^3+6x^2-24x-9\,.$$

Получили многочлен кратный $x-3$.

Задача 16. (ММО–1974) Докажите, что число $10\ldots01$ (две единицы и $2^{1974}+2^{1000}-1$ нулей) — составное.

Указание. Число $a^{n+1}+1$ делится на $a+1$, если a — нечетное.

Задача 17. (ВО–1989) Докажите, что число $4^{545}+545^4$ — составное.

Указание. Примените формулы квадрат суммы и разность квадратов.

Задача 18. Сравните числа:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2007}}}}} \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{2007}}}}}$$

Указание. Пусть $5+\cfrac{1}{6+\ddots+\cfrac{1}{2007}}=x$

тогда требуется сравнить

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}= \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{x}}}}$$

Для этого достаточно сравнить x и $4+\frac{1}{x}$. А для этого достаточно заметить, что $x > 5$.

Задача 19. Решите уравнение:

а) $\sqrt{5-x} = x^2 - 5$; б) $x^3 - \left(\sqrt{2}+1\right)x^2 + 2 = 0$.

Литература

1. *Васильев* Н.Б., *Савин* А.П., *Егоров* А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика. — М.: Бюро Квантум, 2007.

2. *Горбачев* Н.В. Сборник олимпиадных задач. — М.: МЦНМО, 2010.

3. Всероссийские олимпиады школьников по математике. Заключительные этапы. 1993–2009. — М.: МЦНМО, 2014.

Математические миниатюры

А.Н. Андреева,
Школа №91 РАО, г. Москва
andreeva@i.home-edu.ru

В данной статье приведено очень небольшое количество задач из коллекции автора, с необычными вопросами, неожиданно короткими решениями и важными по содержанию. Я попробовала упорядочить в каждом разделе их по сложности.

После формулировки задач даны указания к некоторым задачам, а потом решения всех задач.

I. Веселая математика

1.1 Найти значение выражения $\dfrac{Г \cdot Р \cdot У \cdot З \cdot И \cdot Я}{Т \cdot Б \cdot И \cdot Л \cdot И \cdot С \cdot И}$, где разным буквам соответствуют разные цифры и наоборот разным цифрам соответствуют разные буквы?

1.2 Окружим Землю вдоль экватора ремнём так, чтобы он плотно прилегал к поверхности по всей длине. Землю будем считать идеальным шаром с радиусом 6 400 000 м. Увеличим длину ремня на 1 метр и приподнимем его над экватором так, чтобы расстояние от ремня до линии экватора было одинаковым по всей длине. Чему будет равно это расстояние? Проползет ли под ремнем кошка?

1.3 Можно ли положить 100 монет в два мешочка так, чтобы в одном из них было в два раза больше монет, чем в другом?

1.4 Найти $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cdot \ldots \cdot \sin\omega$.

1.5 Перед слепым лежат 2 красных и 2 синих таблетки (на ощупь и запах одинаковые). Он должен за один раз принять по одной разного цвета. Как он может это сделать?

1.6 Почему не делают квадратных люков?

1.7 Придумать геометрическую интерпретацию равенства

$$1+3+5+...+(2n-1)=n\times n$$

1.8 Мама с сыном едят шоколадку. Сын откусывает половину и отдает маме, мама откусывает половину остатка и передает сыну и так далее. Какую часть шоколадки съест сын?

1.9 Почему пластиковые стаканы и ведра делают в виде усеченных конусов?

1.10 Два друга стоят на балконах, друг под другом. Они одновременно вскрикнули, кто раньше услышит другого? Предполагаем, что звук во все стороны распространяется равномерно.

II. Арифметика. Алгебра. Теория чисел

2.1 Попробуйте геометрически изобразить увеличение числа a на 25%, а затем, выясните, на сколько процентов надо уменьшить полученное число b, чтобы получить первоначальное число a.

2.2 Леспромхоз собрался вырубить часть сосен в лесу, но это решение наткнулось на яростное сопротивление организации зеленых. Директор леспромхоза заявил, что вырубка не нанесет ущерба лесу, так как до вырубки сосны составляют 99% всех деревьев в лесу, а после вырубки будут составлять 98%. Какую часть леса собирается вырубить леспромхоз?

2.3 Сколько существует трёхзначных положительных чисел n таких, что число n^2+8n-1 делится на 239?

2.4 Решите уравнение

$$\left[\frac{x^3-3x^2+2x}{6}\right]=x-2$$

III. Планиметрия

3.1 Докажите, что для площади любого выпуклого четырехугольника $ABCD$ со сторонами a, b, c, d (последовательные стороны) имеет место соотношение $S\le\dfrac{ac+bd}{2}$.

3.2 Докажите равенство $1/r=1/h_a+1/h_b+1/h_c$.

3.3 Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых — целые числа. Может ли площадь четырёхугольника быть простым числом?

IV. Стереометрия

4.1 Имеются треугольная и четырехугольные правильные пирамиды, все ребра которых равны. Грань треугольной пирамиды совместили с треугольной гранью четырехугольной пирамиды. Сколько граней имеет полученный многогранник?

4.2 В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны $\sqrt{156}$, $\sqrt{228}$, $\sqrt{247}$. Найдите объем пирамиды.

V. Тригонометрия

5.1 Докажите иррациональность числа $\cos 20°$.

5.2 Найдите все такие p, что уравнение $\dfrac{\sin ax}{a\sin x} = p$ имеет решение при любом a ($a > 0, a \neq 1$).

VI. Математический анализ

6.1 Решите уравнение $8^x(3x+1) = 4$.

6.2 Сравните числа e^π и π^e.

6.3 Найдется ли такое n, при котором $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}>10$?

6.4 Найдется ли такое n, при котором $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}>10$?

VII. Межпредметные

7.1 Сколько корней имеет уравнение $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$ на $(0;1)$?

7.2 а) Докажите, что для положительных чисел a, b и c выполняется неравенство:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

б) Укажите соотношение между данными величинами, при котором выполняется равенство.

7.3 Известно, что $9x^2+16y^2+144z^2=169$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $6x-4y+24z$.

Указания

1.1 Подсчитайте число различных букв.

1.4 Вспомните все буквы греческого алфавита.

1.8 Попробуйте в двух строчках описать математическую модель описанной ситуации.

1.9 Вспомните, как продаются пластиковые стаканы.

1.10 Изобразите описанную ситуацию, но рисуйте как можно меньше, только по существу.

2.1 Нарисуйте четыре равных квадрата рядом.

2.3 Рассмотрите многочлен $n^2+8n-240$.

2.4 Разложите на множители многочлен под знаком целой части и учтите, что x — целое.

3.1 Разделите четырехугольник диагональю, и один из треугольников переверните так, чтобы он опирался на ту же диагональ.

3.2 Воспользуйтесь разными формулами для площади треугольника.

4.1 Добавьте мысленно еще одну четырехугольную пирамиду.

4.2 Переверните пирамиду на боковую грань.

5.1 Воспользуйтесь формулой тройного угла для $\cos 60°$.

5.2 Рассмотрите два различных значений для a.

6.1 Угадайте ответ и, используя монотонность, докажите, что других значений нет.

6.2 Рассмотрите функцию $\ln x/x$.

6.3 Можно.

6.4 Нельзя.

7.1 Используйте тригонометрическую замену.

7.2 Используйте теорему косинуса для треугольника, подобрав нужные углы.

7.3 Введите вектора.

Решения

1.1 В записи использованы десять разных букв, следовательно, использованы и все цифры, а тогда обязательно используется и ноль, который может находиться только в числителе, то есть вместо букв Г, Р, У, З.

Ответ: 0.

1.2 Вспомним формулу длины окружности и запишем условие задачи: длина нового ремня равна x. Фактически к старому радиусу добавлена величина $x/2\pi$ — это величина зазора между землей и ремнем, что составляет приблизительно 16 см.

Замечание. Интересно, что величина зазора не зависит от первоначальной длины радиуса.

Ответ: кошка может проползти под ремнем.

1.3 Можно. В один мешок кладем 50 монет, и этот мешок кладем в мешок, в котором лежат оставшиеся 50 монет. Тогда во внешнем мешке будет 100 монет, а во внутреннем только 50.

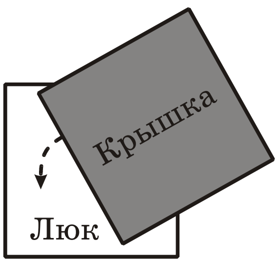
Ответ: можно.

1.4 Надо заметить, что аргументы синусов — это буквы греческого алфавита, а в греческом алфавите есть буква π и известно что $\sin\pi = 0$, следовательно, один из множителей равен нулю и все произведение равно нулю.

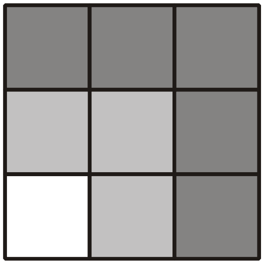
Ответ: 0.

1.5 Слепой на ощупь делит каждую таблетку на половинки, и раскладывает, например, от себя по разные стороны. Тогда и слева, и справа будет по одной таблетки красного и синего цвета.

1.6 Можно уронить такую крышку в люк по диагонали.



1.7 Смотри схему, которую можно продолжить до любого натурального числа.



1+3+5

1.8 Записываем две бесконечные суммы:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots$ — это часть шоколадки, съеденная сыном и

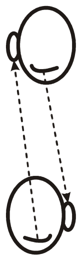
$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ — часть шоколадки, съеденная мамой.

Можно заметить, что каждое слагаемое в первой сумме в два раза больше соответствующего слагаемого во второй сумме, следовательно, шоколадка съедена в отношении 2:1. И тогда получаем равенство $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{2}{3}$.

Ответ: сын съест $2/3$ шоколадки.

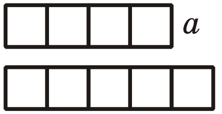
Замечание. Приведен пример задачи, где математическая модель — это пример бесконечного процесса заведомо отличается от жизненной ситуации.

1.9 Для удобства транспортировки.



1.10 Достаточно нарисовать простую схему, из которой ясно, что нижний услышит друга быстрее, так как расстояние ото рта верхнего до его ушей меньше, чем расстояние от его рта до ушей верхнего.

2.1 Если целое число a представить в виде четырех квадратиков, то 25% составляет четверть фигуры, т.е. один квадратик. Тогда новое число $\underline{b}$ будет составлять пять квадратиков. Чтобы из нового числа b получить старое число a, надо новое



число уменьшить на один квадратик или на пятую часть, что составляет 20%.

Замечание. При работе с процентами очень важно каждый раз четко понимать, что брать за 100%, с каким числом мы сравниваем. В нашей задаче, если 100% это число a, то один квадратик — это 25%. Если же за 100% берем b,то один квадратик — это 20%.

2.2 Первое решение. Пусть a количество деревьев в лесу, тогда сосны составляют в нем $0{,}99a$ деревьев. Пусть x сосен в лесу вырублено, тогда деревьев в лесу стало $a-x$. Так как сосен стало 0,98%, то после вырубки число сосен стало $0{,}98(a-x)$, а с другой стороны их стало $0{,}99a-x$, т.е. можно составить уравнение $0{,}98(a-x)=0{,}99a-x$, откуда $0{,}02x=0{,}01a$ или $a=2x$.

Второе решение. Пусть количество всех деревьев до вырубки a, а после вырубки b. Заметим, что вырубали только сосны, следовательно, остальные деревья не трогали. До вырубки «не сосны» составляли один процент, т.е. $0{,}01a$, а после вырубки «не сосны» составляют 2%, т.е. $0{,}02b$. Составляем уравнение $0{,}01a=0{,}02b$ или $a=2b$, откуда следует, что вырубили половину леса.

Ответ: леспромхоз собирается вырубить половину леса.

2.3 Многочлены $n^2+8n-240$ и n^2+8n-1 делятся на 239 при одних и тех же n. $n^2+8n-240=(n-12)(n+20)$ делится на 239, когда $n-12=239k$ или $n+20=239k$. Если $n=239k+12$, то получаем четыре трехзначных числа: при $k=1$ $n=251$, $k=2$ $n=490$, $k=3$ $n=729$, $k=4$ $n=968$.

Если $n=239k-20$, то также получаем четыре числа. При $k=1$ $n=219$, $k=2$ $n=458$, $k=3$ $n=697$, $k=4$ $n=936$.

Ответ: 8.

2.4 Левая часть уравнения принимает только целые значения, поэтому число x является целым.

Так как $x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2)$, то при любом целом x многочлен x^3-3x^2+2x представляет собой произведение трех последовательно целых чисел, среди которых имеется хотя бы одно четное число и число, кратное трем. Следовательно, многочлен x^3-3x^2+2x делится на 6 без остатка, т.е. $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{6}$ является целым числом.

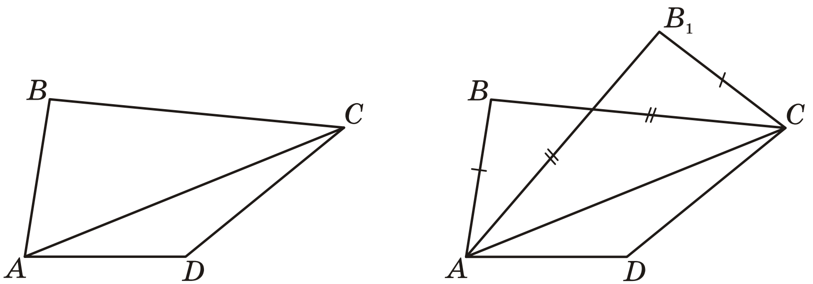
Поэтому $\left[\dfrac{x^3-3x^2+2x}{6}\right]=\dfrac{x^3-3x^2+2x}{6}$ и уравнение принимает вид $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{6}=x-2$ или $x^3-3x^2+2x=6x-12$.

Так как $x^3-3x^2-4x+12=(x-3)(x^2-4)$, то корнями уравнения являются $x_1=3$, $x_2=-2$ и $x_3=2$.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=-2$ и $x_3=2$.

3.1 Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Проведем диагональ AC, и треугольник ABC перевернем так, как показано на правой части рисунка, при этом площади $ABCD$ и $AB1CD$ равны. Если первоначально соседними сторонами были стороны с длиной a, b и c, d, то теперь соседними сторонами стали a, c и b, d. Осталось воспользоваться формулой площади треугольника и записать:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\lambda+\frac{1}{2}bd\sin\delta\le\frac{1}{2}ac+\frac{1}{2}bd=0{,}5\left(ac+bd\right)$$

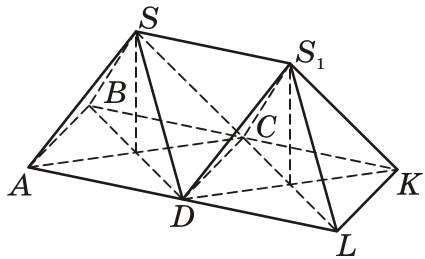


3.2 Для доказательства равенства воспользуемся формулами для площадей треугольников $S=pr$, $S=0{,}5a\cdot h_a$. Тогда можем записать:

$$\frac{1}{r}=\frac{p}{S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

3.3 Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников, пронумерованные, например, по часовой стрелке. Используя формулу для площади треугольника $S = ab\sin\lambda/2$ и учитывая, что синусы углов между диагоналями равны, получаем формулу $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Пусть S_1 — составное число, тогда часть его множителей входит в один множитель, а другие в другой множитель правой части. Пусть $S_1 = pq$, $S_2 = pn$, $S_4 = qm$, а тогда отсюда будет следовать, что $S_3 = mn$, где все множители целые числа. Площадь четырехугольника $S = pq + pn + qm + nm = (q+n)(p+m)$, а это число составное.

4.1 Рассмотрим две равные правильные четырехугольные пирамиды *SABCD* и *S*1*CDLK*, данные в условии (см. рис.), и расположим их на одной плоскости так, чтобы у них было общее ребро *CD*. Соединив вершины S_1 и *S*, получим $S_1S = AB$, а следовательно, S_1SCD — треугольная пирамида, данная в условии. Грань S_1SD лежит в плоскости *SAD*. Если убрать одну из четырехугольных пирамид, то получим многогранник с пятью гранями



Ответ: 5.

4.2 Если перевернуть пирамиду и сделать одно боковую грань основанием, то основание будет прямоугольным треугольником, а третье ребро будет высотой. Если *a*, *b*, *c* — боковые ребра первоначальной пирамиды, то объем пирамиды равен $V = abc/6$. В нашем случае

$$V = \sqrt{156}\cdot\sqrt{228}\cdot\sqrt{247} = \sqrt{3\cdot4\cdot13}\cdot\sqrt{3\cdot4\cdot19}\cdot\sqrt{13\cdot19} = 19\cdot13\cdot4\cdot3 = 2964.$$

Замечание. Не перемножать трехзначные числа, а раскладывать на множители, что позволит без таблиц вычислить корень.

Ответ: 2964 кв.ед.

5.1 Известна формула $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, тогда $1/2 = \cos 60° = 4\cos^3 20° - \cos 20°$, следовательно, $\cos 20°$ является корнем кубического уравнения с целыми коэффициентами $8t^3 - 6t - 1 = 0$. Для проверки отсутствия рациональных корней надо проверить числа ± 1; $\pm 1/2$; $\pm 1/4$; $\pm 1/8$, где числитель является делителем свободного члена 1, а знаменатель является делителем старшего коэффициента, и убедиться, что они не являются корнями. Итак, все корни уравнения — иррациональные числа, следовательно, $\cos 20°$ — иррациональное число.

5.2 Решение. Обратим внимание, что a — любое. Основная идея решения состоит в разумном подборе параметра.

Попробуем выбирать такие значения параметра, при которых мы умеем преобразовывать выражение в левой части уравнения.

1-й случай. При $a = 2$ получим уравнение $\dfrac{\sin 2x}{2\sin x} = p$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = p; \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = p; \\ \cos x \neq \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = p; \\ p \neq \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-1, 1).$$

2-й случай. При $a = \dfrac{1}{2}$ получим уравнение

$$\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}\sin x} = p \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\dfrac{x}{2}} = p \Leftrightarrow |p| > 1.$$

Мы получили для нахождения p систему $\begin{cases} |p| > 1; \\ |p| < 1, \end{cases}$ которая не имеет решения.

При решении была дважды использована формула $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$ (при $\gamma = x$ и при $\gamma = \dfrac{x}{2}$).

Ответ: решений нет.

6.1 Число $x=1/3$ является решением данного уравнения. Докажем что других решений нет. При $x>-1/3$ функции $y_1(x)=8^x$ и $y_2(x)=3x+1$ принимают положительные значение и возрастают, следовательно их произведение также является возрастающей функцией. Поэтому при $x>-1/3$ уравнение не может иметь более одного решения. Далее, при $x\le -1/3$ имеем $y_1(x)>0$, $y_2(x)\le 0$, а значит, $y_1(x)y_2(x)\le 0$. Поэтому на промежутке $(-\infty;-1/3]$ уравнение не имеет решений.

Ответ: $x=1/3$.

6.2 Рассмотрим функцию $f:[e;+\infty)\to R$; $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

Так как производная функции *f*,

$$f'(x)=\frac{x(\ln x)'-(x)'\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

принимает отрицательные значения для всех $x\in(0;+\infty)$ и *f* непрерывна на $[e;+\infty)$, следовательно, *f* строго убывает на $[e;+\infty)$. Отсюда, учитывая что $e<\pi$, получаем

$$f(e)>f(\pi)\ \Rightarrow\ \frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}\ \Rightarrow\ \pi\ln e>e\ln\pi$$

и, значит, $e^\pi>\pi^e$.

6.3 Сгруппируем слагаемые

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

Если в каждой скобке все слагаемые заменить на последнее (меньшее) слагаемое, то мы всё выражение уменьшим и каждая скобка будет равна $1/2$. Так как *n* произвольно большое, то величинами $1/2$ можно превысить любое число и тем более 10 (надо взять 19 скобок).

Ответ: можно.

6.5 Воспользуемся соотношением $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ и запишем равенство

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2 < 10.$$

При преобразовании учтено, что второе слагаемое в скобке взаимно уничтожается с первым слагаемым в следующей скобке (кроме последней).

Ответ: нельзя.

7.1 Так как $x \in (0;1)$, то можно сделать замену $x = \sin\alpha$. Тогда получим уравнение

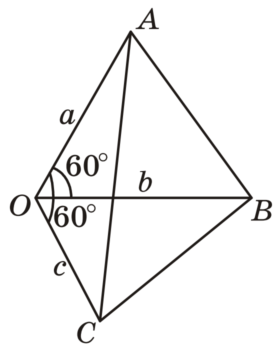
$$8\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)(8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1) = 1,$$

что можно преобразовать к виду $8\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = 1$.

Значения $\cos\alpha = 0$ не являются решениями полученного уравнения, поэтому, умножим обе части уравнения на $\cos\alpha$ и получим $\sin 8\alpha = \cos\alpha$. Решая это уравнение на $(0;1)$, получим: $\alpha = \frac{\pi}{18}$ или $\alpha = \frac{5\pi}{18}$ или $\alpha = \frac{\pi}{14}$.

Ответ: три.

7.2 а) Построим на плоскости отрезки *OA*, *OB* и *OC* такие, что $|OA| = a$; $|OB| = b$; $|OC| = c$; углы *AOB* и *BOC* по $60°$ (см. рис.). Тогда, из треугольников *AOB*, *BOC* и *AOC* по теореме косинусов соответственно получим:



$$|AB| = \sqrt{a^2 - ab + b^2};$$

$$|BC| = \sqrt{b^2 - bc + c^2};$$

$$|AC| = \sqrt{a^2 + ac + c^2}\ .$$

Так как $|AC| < |AB| + |BC|$, то выполняется доказываемое неравенство.

б) Для того, чтобы выполнялось равенство, необходимо и достаточно, чтобы точка B лежала на отрезке AC. Следовательно, OB — биссектриса треугольника AOC. Тогда $|OB| = \dfrac{2ac}{a+c}\cos 60°$, то есть,

$b = \dfrac{ac}{a+c}$.

Ответ: $b = \dfrac{ac}{a+c}$.

7.3 Рассмотрим векторы: $\overline{m}(3x;\,4y;12z)$ и $\overline{n}(2;-1;\,2)$ такие, что $\overline{m}\cdot\overline{n} = 6x - 4y + 24z$. Тогда $|\overline{m}| = \sqrt{9x^2 + 16y^2 + 144z^2} = 13$, $|\overline{n}| = 3$. Так как $\overline{m}\cdot\overline{n} = |\overline{m}|\cdot|\overline{n}|cos\alpha \le |\overline{m}|\cdot|\overline{n}|$, то $6x - 4y + 24z \le 39$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\overline{m}\uparrow\uparrow\overline{n}$, то есть

$$\frac{3x}{2} = \frac{4y}{-1} = \frac{12z}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -\dfrac{3}{2}z \\ z > 0 \end{cases}.$$

Подставив выражения для x и y в данное равенство получим, что найденное значение достигается, если $x = \dfrac{26}{9}$; $y = -\dfrac{13}{12}$; $z = \dfrac{13}{18}$.

Ответ: 39.

Принцип Дирихле

И.Ж. Ибатулин,
Школа-интернат им. О.А. Жаутыкова, г. Алматы
mathibragim@mail.ru

Среди всех тем подготовки к олимпиадам Принцип Дирихле является, наверное, самым популярным. Трудно найти учебный план факультативных занятий, в котором бы не упоминался принцип Дирихле. Однако, несмотря на популярность, изложение принципа Дирихле далеко от идеала. В простейшем случае он формулируется следующим образом.

Теорема 1 (дискретный принцип Дирихле, частный случай). *Если количество предметов больше количества мест и все предметы разложены по местам, то найдется место, на котором будет не менее двух предметов*.

Пример 1. Если 10 кроликов посадить в 9 клеток, тогда найдется клетка, в которой будет не менее двух кроликов. Комментарии излишни.

Если в частном случае (теорема 1) все более или менее понятно, то в общем случае существуют различные интерпретации.

Некоторые формулировку вызывают бурную реакцию учащихся: «если 10 кроликов сидят в 9 ящиках, то найдется ящик, в котором сидят не меньше, чем $\frac{10}{9}$ кролика» (см. [1], стр. 37). Что в этот момент должен представить учащийся с живым воображением? Девять кроликов зашли успешно, а одному, увы, не повезло? Далее, конечно, авторы поясняют: «пусть вас не смущает дробное число кроликов», «… в ящике не меньше $\frac{10}{9}$ кроликов, значит, не меньше двух». Подобное изложение есть и в [2], стр. 14 (см. также [3-4]). Однако что каждый раз будет вспоминать учащийся, когда будет упоминаться принцип Дирихле? Скорее всего, то, что вызвало больше эмоций у него — разрезанный кролик.

Некоторые формулировки Принципа Дирихле, несмотря на математическую строгость изложения, на практике вызывают у учащихся определенную трудность в применении. Например, к книге [5], стр. 36 (подобные формулировки есть также книгах [6-11]): «если в n клетках сидит не менее $kn+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит более k кроликов».

Математически это утверждение абсолютно верно, но в задачах так не формулируют условия. Например, если в задаче будет сказано, что дано 500 конфет, которые необходимо разложить в 23 коробки, то для учащихся определенную трудность составляет изменение условия задачи. Ведь, чтобы применить принцип Дирихле им необходимо количество конфет вида $23k+1$ (конечно, при этом что под словом «кролик» здесь учащийся должен понимать конфету), а $500=23\cdot 21+17$. То есть учащийся должен сделать сначала вывод: если разложить $484=23\cdot 21+1$ конфеты в 23 коробки, то найдется коробка, в которой будет не менее 22 конфет, значит, когда мы будем раскладывать 500 конфет, тоже найдется коробка, в которой будет не менее 22 конфет. При первичном изучении принципа Дирихле такие выводы делать не так просто. Формулировки принципа Дирихле, в которых $kn+1$ заменено на $kn+r$, где $0<r<n$, не существенно облегчают учащимся применение его на практике. Ниже приведена еще одна формулировка, и хотя существует более компактная и удобная для запоминания форма записи принципа Дирихле (см. замечание 1), преимуществом такой формулировки, помимо того, что на практике учащиеся легко могут ее использовать без дополнительных пояснений, является то, что внимание учащихся акцентировано на делимости количество предметов на количество мест. Что возможно в дальнейшем поможет им не совершать типичных ошибок.

Теорема 2 (дискретный принцип Дирихле, общий случай). *Пусть даны целые положительные числа n и m, имеется n мест и* *m предметов, все предметы разложены по местам. Пусть* x_j *– количество предметов на j-ом месте* ($j = 1, 2, ..., n$). *Тогда*

1) *если* $\frac{m}{n} \in Z$, *то существует номер* j_0 *такой, что* $x_{j_0} \geq \frac{m}{n} = \left[\frac{m}{n}\right]$,

2) *если* $\frac{m}{n} \notin Z$, *то существует номер* j_0 *такой, что* $x_{j_0} \geq \left[\frac{m}{n}\right] + 1$.

Замечание 1. Существует другая, более короткая, формулировка дискретного принципа Дирихле: если m предметов разложено на n мест, то найдется место, в котором будет более $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ предметов (см. [12], стр. 20). Предлагаем читателю найти связь между $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ и $\left[\frac{m}{n}\right]$.

Замечание 2. С одной стороны, дискретный принцип Дирихле не дает способа, например, найти номер j_0 такой, что $x_{j_0} > \left[\frac{m-1}{n}\right]$ и, вроде бы, не может быть применен на практике. Однако это совершенно не так. В некоторых задачах существование такого x_{j_0} может оказаться решающим, особенно в задах, в которых необходимо доказать невозможность совершения некоторого действия при достаточно общих условиях.

Пример 2. Можно ли увезти 50 камней весом 370, 372, …, 468 кг на 7 трехтонках (камень раскалывать на части нельзя)?

Решение. Обычно, первое, что начинают делать — это вычисляют общий вес всех камней. Как не сложно убедиться, он равен 20950 кг, и вроде бы все замечательно, ведь 7 трехтонок могут увезти груз весом $7 \times 3000 = 21000$ кг. Однако в задаче указано, что камень раскалывать на части нельзя. Т.е. на грузовики камни грузят целиком. Тогда согласно (дискретному) принципу Дирихле, поскольку всего 50 камней и 7 грузовиков, обязательно должен быть хотя бы одни грузовик, который повезет не менее $\left[\frac{50}{7}\right]+1=8$ камней. Дадим такому грузовику самые легкие камни: 370, 372, …,384 кг. Но общий вес даже этих самых легких 8 камней равен 3016 кг. Значит, одна трехтонка увезти этот груз не сможет. Следовательно, 50 камней весом 370, 372, …, 468 кг на 7 трехтонках, не раскалывая камни на части, увезти нельзя.

Дискретный принцип Дирихле имеет широкое применение в задачах, в которых необходимо доказать существование чисел или расположения фигур или точек с некоторыми свойствами.

Пример 3. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

Решение. Поскольку при делении на 3 есть три остатка: 0, 1, 2, то согласно принципу Дирихле среди 7 чисел существуют не менее $\left[\frac{7}{3}\right]+1=3$ чисел, имеющие при делении на 3 одинаковые остатки. Тогда искомыми числами будут эти три числа.

Как было отмечено ранее доказательство обобщенного дискретного принципа Дирихле проводится с помощью метода от противного. Но в некоторых задачах не обязательно все подводить под принцип Дирихле, может быть полезно и использование метода от противного.

Пример 4. 25 покупателей купили 73 арбуза. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что среди них имеется покупатель (хотя бы один), который купил не менее 4 арбузов?

Решение. Предположим противоположное, т.е. каждый покупатель купил не более 3 арбузов. Тогда, поскольку известно что был хотя бы один покупатель, который купил 1 арбуз, и хотя бы один — 2 арбуза, то оставшиеся 23 покупателя могли купить не более 69 арбузов, т.е. 25 покупателей могли купить не более 72 арбузов. Пришли к противоречию, значит наше предположение не верно, а верно — существует хотя бы один покупатель, который купил не менее 4 арбузов.

Пример 5 (СПО, 1985). На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из можно составить не менее 100 годных пар обуви.

Решение. В каждом размере каких-то сапог меньше: правых или левых. Выпишем эти типы сапог по размерам. Какой-то тип, например, левый, повторится по крайне мере дважды, в 41 и 42 размерах. Но так как количество левых сапог этих размеров суммарно не меньше 100 (ведь левых сапог 43 размера не больше 200, а всего левых сапог — 300), то мы имеем не менее 100 годных пар обуви.

Теорема 3 (непрерывный принцип Дирихле для отрезков). *Пусть даны положительные числа a и b, отрезок I, длина которого равна a, такой, что* $b > a$. *И пусть даны несколько отрезков* I_1, I_2, ..., I_k, *каждый из которых являяется подмножеством отрезка I, и сумма длин всех отрезков равна b. Тогда*

1) *если* $\frac{b}{a} \in Z$, *то существует точка* ξ, *которая лежит не менее чем в* $\frac{b}{a} = \left[\frac{b}{a}\right]$ *отрезках из* I_1, I_2, ..., I_k,

2) *если* $\frac{b}{a} \notin Z$, *то существует точка* ξ, *которая лежит не менее чем в* $\left[\frac{b}{a}\right] + 1$ *отрезках из* I_1, I_2, ..., I_k.

Пример 6 (II этап Республиканской олимпиады школьников, Казахстан, 2009; [5], стр. 49). Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Доказать, что найдется прямая, пересекающая по крайне мере четыре из этих окружностей.

Решение. Пусть дан квадрат *ABCD* и несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Тогда сумма длин диаметров этих окружностей равна $\frac{10}{\pi}$, а значит и сумма длин проекций окружностей на сторону квадрата AB равна $\frac{10}{\pi}$ (длина проекции окружности на прямую равна длине ее диаметра), больше 3. Согласно непрерывному принципу Дирихле для отрезков существует точка M, принадлежащая как минимум четырем из этих проекций окружностей. Через точку M проведем прямую перпендикулярную AB. Данная прямая будет искомой, т.е. она пересекает не менее 4 окружностей.

Было бы неверным считать, что непрерывный принцип Дирихле применяется только в геометрических, а дискретный — только в алгебраических задачах. Приведем соответствующие примеры.

Пример 7. На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся друг от друга на расстоянии, не большем 1м.

Решение. Разделим газон прямыми параллельными сторонам на 9 равных треугольников со стороной 1 м. Тогда согласно дискретному принципу Дирихле найдутся хотя бы $\left[\frac{10}{9}\right]+1=2$ гвоздики, лежащие в одном из этих 9 правильных треугольников со стороной 1 м, значит, расстояние между этими гвоздиками будет не больше 1м.

Пример 8. Даны 2010 пар чисел (a_k, b_k) такие, что $b_k = a_k + \frac{1}{3} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$, $0 < a_k < 0{,}5$ и $a_k \neq b_m$, $m \neq k$, $m, k = 1, 2, ..., 2010$. Докажите, что всегда можно выбрать 671 пару из них так, что $b_m > a_k$ для любых соответственно чисел m и k.

Решение. Рассмотрим отрезки $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, ..., 2010$. Ясно, что для каждого k выполнено $[a_k, b_k] \subset [0, 1]$. А сумма длин всех отрезков равна

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + ... + (b_{2010} - a_{2010}) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4}\right) + ... + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2011\cdot 2012}\right) =$$

$$=\frac{2010}{3}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2012}\right)=670+\frac{1}{2}-\frac{1}{2012}>670.$$

Значит, согласно непрерывному принципу Дирихле существует точка ζ, которая лежит не менее чем в 671 отрезке. В качестве искомых пар возьмем те пары, соответствующие отрезки которых содержат точку ζ.

И хотя точка ζ может совпадать с некоторыми из чисел a_1, b_1, a_2, b_2, …, a_{2010}, b_{2010}, для выбранных пар чисел выполнено $b_m > a_k$, где m и k — произвольные номера, соответствующие выбранным парам.

Упражнения

1. (Московская математическая олимпиада, 1970) В парке растет 10 000 деревьев (100 рядов по 100 деревьев). Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось условие: если встать на любой пень, то не будет видно ни одного другого пня? (Деревья можно считать достаточно тонкими).
2. (Словения, 2010, 2 тур, 2 уровень) Для каких целых положительных чисел n существует число, кратное 7, у которого сумма цифр равна n?
3. (ВО, 1965, X класс) Некоторая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовало 10 членов комиссии, причем никакие двое из них не были на заседаниях вместе более одного раза. Докажите, что комиссия содержит более 60 членов.
4. (ВО, 1981, второй день) В прямоугольнике 3×4 см расположено 6 точек. Докажите, что найдется пара точек, удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$ см.
5. (СПО, 2009, 9 кл, 2 тур) 40 членов жюри подбирают вторую задачу для 9-го класса. У них есть список из 30 задач. Они договорились поставить в вариант задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

6. (СПО, 2008, 10 кл, 1 тур) Числа от 1 до 600 выписаны в строку в некотором порядке. Сумма любых двух соседних чисел не превосходит 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, стоящих через одно, больше 800.
7. (СРР, 1979) Функции $f, g, h: N \to N$ удовлетворяют следующим трем условиям:
   a. функция $h(n)$ не принимает ни какое значение более чем в одной точке $n \in N$;
   b. множество значений функции $g(n)$ есть N;
   c. $f(n) = g(n) - h(n) + 1$, $n \in N$.

   Докажите, что справедливо тождество $f(n) \equiv 1$, $n \in N$.
8. (Югославия, 1972) Для каждого значения $n \in N$ найдите наибольшее число $k \in N$, обладающее тем свойством: во множестве, состоящем из n элементов, можно выбрать k различных подмножеств, любые два из которых имеют непустое пересечение.
9. (Англия, 1976) Пусть в конечном множестве X выбраны 50 подмножеств A_1, A_2, …, A_{50}, каждое из которых содержит больше половины элементов множества X. Докажите, что можно найти подмножество $B \subset X$, содержащее не более пяти элементов и имеющее хотя бы один элемент, общий с каждым из множеств A_1, A_2, …, A_{50}.

Список литературы

1. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2004.
2. Спивак А.В. Тысяча и одна задача по математике. — М.: Просвещение, 2010.
3. Спивак А.В. Математический кружок. 6-7 классы. — М.: Посев, 2003.
4. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике – М.: Экзамен, 2006.
5. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.

6. Агаханов Н.Х. и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2009: Заключительные этапы. — М.: МЦНМО, 2010.
7. Коннова Е.Г. Математика. Поступаем в вуз по результатам олимпиад. 5-8 класс. Часть 1. — Ростов-на-Дону: Легион; Легион-М, 2010.
8. Севрюков П.В. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике. — М.: Илекса, 2009.
9. Праслов В.В. и др. Московские математические олимпиады 1935-1957 г. — М.: МЦНМО, 2010.
10. Уфрановский В.А. Математический аквариум. — М.:МЦНМО, 2010.
11. Федоров Р.М. и др. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. — М.: МЦНМО, 2006.
12. Yao Zhang Combinatorial Problems in Mathematical Competitions. — Shanghai: East China Normal University, 2011.
13. Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. Зарубежные математические олимпиады — М.: Наука, 1987.

Конкурс одной задачи

Д.Б. Невидимый,
Гимназия №1530, г. Москва
ndb1530@mail.ru

Ежегодно, как и в каждой школе, у нас проходит неделя математики. В олимпиадах, матбоях принимают участие небольшая часть гимназистов, склонных к математике. Что же остается остальным, которым ничего не светит на олимпиаде? Чаще всего — ничего, они и не заметят, что такая неделя была. Чем их зацепить? Конкурсом газет? Вряд ли. Конкурсом головоломок, который проводится на переменах, и где можно покрутить в руках проволочные и деревянные головоломки? Да, наверно. Но все же тоже мало. И вот уже несколько лет я провожу у нас в гимназии «Конкурс одной задачи».

Смысл конкурса состоит в том, что в течение всей Недели математики ежедневно, в одно и то же время, на стенде вывешивается задача, решение которой доступно даже пятикласснику. Ответы на эту задачу принимаются только в течение этого же дня. Легко представить себе чувства одиннадцатиклассника, который узнает, что задачу, над которой он думал пару уроков, уже решил пятиклассник, причем за 5 минут. Именно этот момент и создает особую соревновательную атмосферу между учащимися. Как трогательно выглядит семиклассник, которому идея решения пришла во время урока биологии, и он, не в силах терпеть до перемены, трясет рукой с просьбой выйти в туалет… а сам напрямую несется к моему кабинету, чтобы вручить своё решение. А в это время с другой стороны коридора бежит, пытаясь опередить его, со своим решением шестиклассница…

Старшеклассники из углубленки не бегают наперегонки. Они снисходительно посматривают на толпящихся у стенда малышей, и издалека, через головы читают условие задачи, делая вид, что они здесь случайно. И лишь после уроков кто-нибудь из них подходит ко мне, старательно напуская на себя равнодушный вид, и спрашивает: «Ну, что кто-то задачу сделал?» И если вдруг задача никому еще не поддалась, и я говорю: «Пока ни одного верного решения», то глаза его загораются и, протягивая мне бумажку, он произносит: «Ну тогда посмотрите, что я тут нарешал».

Не любую интересную задачу можно использовать в Конкурсе. Они должны удовлетворять нескольким критериям:

— доступность даже 5-классникам,

— не должна быть очевидной для старшеклассников,

— условие задачи должно зацепить, понравиться ребенку,

— решение должно быть по возможности коротким, не заумным.

Находить такие задачи становится всё сложнее и сложнее, поэтому я благодарен всем, кто откликнулся на мою просьбу и предложил мне новые задачи.

Конкурс Одной Задачи

1. (Самая популярная задача. Почти все, кто подходили ко мне, предлагали ее решение.)

   На карточках написано следующее:

   $$\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{1}\,\boxed{-}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{2}\,\boxed{=}\,\boxed{1}$$

   Как, передвинув всего лишь одну карточку, получить верное равенство? (Вариантов у этой задачи много: $99-92=18$, $33-5=22$ и т.д.)
2. Один господин писал о себе: «…Росту я среднего. Пальцев у меня двадцать пять на одной руке, столько же на другой, да на ногах десять…» Чем это можно объяснить, если этот господин не врун и не урод?
3. Где сначала идет детство, затем пенсия, потом рождение, потом смерть, потом старость, и только после этого юность?
4. С этой последовательностью каждый из вас сталкивается ежедневно:

   0,01 0,05 0,1 0,5 1 ? 5 10 50 100 500 1000 5000

   Какое число спрятано под вопросительным знаком?

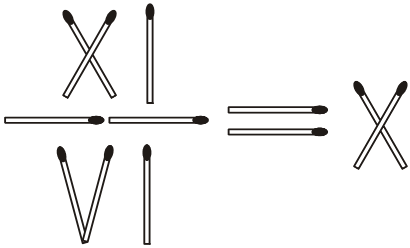
5. Какая буква должна стоять вместо пропуска:

Ь Ь Т Ь … Ь Ь Т Ь Ь Ь Ь

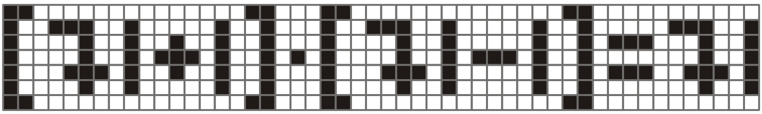
6. Проверяющий пришел инспектировать школу, и был очень удивлен, заметив, что на любой его вопрос классу, в ответ тянули руки все ученики. И хотя школьный учитель каждый раз выбирал другого ученика, ответ всегда был правильным. Как учителю удалось добиться такого высокого уровня знаний?
7. В магазине продается шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют разные цены. Известно, что слово ONE стоит 6 долларов, слово TWO — 9 долларов, а слово ELEVEN — 16 долларов. Сколько стоит слово TWELVE?
8. Согласно советской экранизации, их обоих постигла трагическая участь. Первый, соответствовавший шестому из семи, был расстрелян. А чем стали остатки второго, соответствовавшего четвертому из семи?
9. Это загадочное и темное дело было описано в одном произведении. Два немолодых алхимика, воздействуя на подопытное существо, получают некий очень ценный продукт, который тотчас же пытаются уничтожить. Их действия привлекают одну скромную серую личность, которой и удается ликвидировать результаты опыта. Чем же заканчивается произведение?
10. Один человек (ваш хороший знакомый) посидел и ушел, но вы при всем своем желании не сможете усесться на его место, хотя до этого места буквально рукой подать. Где же он сидел?
11. Первый из них получил свое название благодаря своим размерам, второй — из-за способности давать дополнительную информацию, третий прославился своим месторасположением, четвертый предпочитает выступать инкогнито. Как именуют пятый?
12. Какой последний член в этой последовательности: **П1 Е2 П2 АИ И6 ЕП П3 Е2 П1 А1 Н1 А2 А3 … ?**
13. На каждом километре шоссе из города в деревню стоит столб с табличкой, на одной стороне, которой написано, сколько километров до города, на другой — до деревни. Известно, что на

каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Какое расстояние от города до деревни?

14. Переложите одну спичку, чтобы равенство стало верным: (задача для 8-11 кл.)

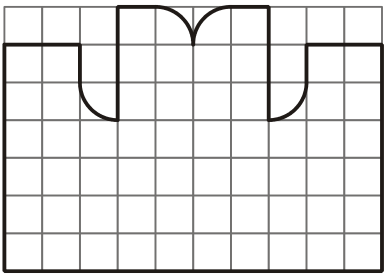


15. На электронном табло написано верное равенство. Но один пиксель работает неправильно. Какой?

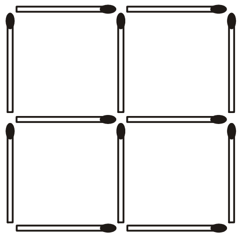


16. На микрокалькуляторе всякая цифра записывается с помощью не более семи маленьких отрезков. В примере, изображенном на рисунке, у каждой из цифр один отрезок стоит не на своем месте. Переложите отрезки так, чтобы равенство стало верным.

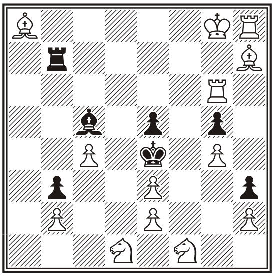
17. На рисунке изображена часть крепостной стены. Один из камней имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной. Какова форма этого камня?



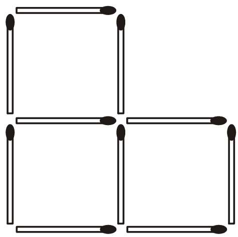
18. Переложите четыре спички, чтобы получить два квадрата.



19. **Белые начинают… и не дают мат в один ход.**
Необычную задачу, изображённую на рисунке, предложил немецкий шахматный композитор Карл Фабель. Нужно найти такой ход белых, чтобы чёрному королю этим ходом не был сразу же поставлен мат.



20. Из 10 спичек легко выложить три равных квадрата: Попробуйте выложить три равных квадрата только из 9 спичек.



21. Однажды в вагоне поезда Таня стала зашифровывать слова, заменяя буквы их номерами в алфавите. Когда она зашифровала пункты прибытия и отправления поезда, то с удивлением обнаружила, что они записываются с помощью лишь двух цифр:

211221 — 21221.

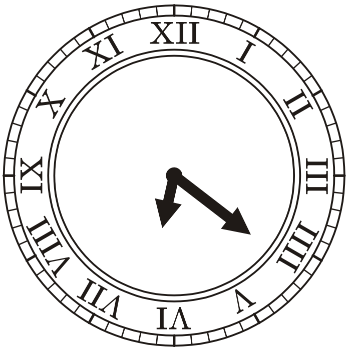
Откуда и куда идет поезд?

22. 4 мальчика разрезали арбуз на четыре части и съели его. После этого осталось 5 корок. Как это произошло? (Конечно, ни один мальчик не разгрызал корку на две части…)

23. Два шулера сели играть друг с другом. Кому ходить первым, они решили определить с помощью монетки. Но так как каждый жулик не доверяет другому, то оба достали свои монетки, и каждый хочет подбросить её сам.

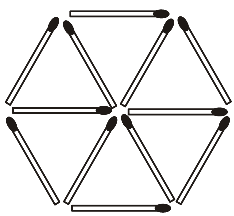
    Как им выйти из положения, не отказываясь от избранного метода жеребьевки и не пользуясь никакими дополнительными предметами?

24. Эти часы разломили на четыре части. При этом оказалось, что если сложить все числа на каждой из частей, то всё время получался одинаковый результат, равный двадцати.

    Попробуйте нарисовать, как разломили эти часы.

25. Переложив четыре спички, образуйте три правильных треугольника.



26. В этом списке два слова стоят не на своих местах.

    Найдите закономерность и расставьте слова по порядку.

РОДИНА
МИЛЛИОНЕР
АВСТРИЯ
ПРИПЯТЬ
СЕМЬЯНИН
ПОДРОСТОК
ПОДВАЛ

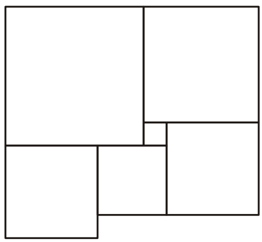
27. Разбейте квадрат 4×4 по клеткам на 9 прямоугольников так, чтобы никакие два равных прямоугольника не имели общих точек.
28. Профессор за свою работу по римской истории получил грант 10 000 долларов. Деньги он решил разделить между внуками так:

Martina – 1000$	*Daniel – 500$*
Christine – 100$	*Leon – 50$*
Xaver – 10$	*Viktoria – 5$*
Ingrid – 1$	

Рассказав об этом внукам, дед добавил: «Кто угадает, почему я именно так поделил деньги, получит оставшиеся 8334$».

Разные известные задачи

29. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего, если сторона самого маленького равна 1.



30. Найдите закономерность и продолжите последовательность чисел:

а) 1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213 …

б) 14, 91, 62, 53, 64, 96, 48, 11 …

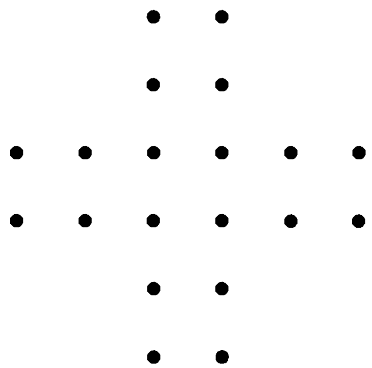
31. Расставьте скобки в данном выражении, чтобы получившееся число было больше 40: $2:2-3:3-4:4-5:5$.

(Задачу можно переформулировать так: «Получите самое большое число, расставив скобки в данном выражении»)

32. Бомжи, которых развелось немало в наших городах, научились из 3 собранных окурков делать 1 сигарету. Какое максимальное количество сигарет может выкурить бомж, если он нашел 24 окурка?

33. Расположите шесть одинаковых карандашей (цилиндрической формы) так, чтобы любые два из них соприкасались. А семь сможете?

34. Сколько квадратов с вершинами в данных двадцати точках (см. рис.) можно насчитать? Как убрать 6 точек так, чтобы не осталось ни одного квадрата?



35. А сможете ли Вы изобразить такой многоугольник, внутри которого можно указать точки, из которых ни одна сторона не видна полностью?

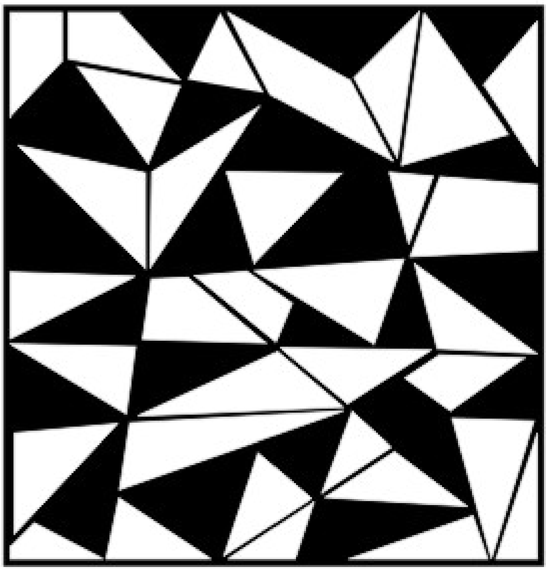
36. Существуют ли такой многоугольник и точка вне его, что из этой точки не было видно полностью ни одной из его сторон?

37. Изобразите шестизвенную ломаную, каждое звено которой ровно один раз пересекается с каким-то другим звеном этой же ломаной.

38. Имеется 9 одинаковых монет, одна из которых фальшивая и по этой причине легче остальных. Мы располагаем двумя весами без гирь, позволяющими сравнивать по весу любые группы монет. Однако одни из имеющихся весов являются грубыми, на них нельзя отличить фальшивую монету от настоящей. Их точность не позволяет уловить разницу в весе. Зато другие весы точные. Но какие весы грубые, а какие точные, неизвестно. Как в этой ситуации с помощью трех взвешиваний определить фальшивую монету?

39. Имеются 6 гирь весом 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г. На них нанесена соответствующая маркировка. Однако есть основания считать, что при маркировке гирь допущена одна ошибка. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах, на которых можно сравнить веса любых групп гирь, определить, верна ли имеющаяся на гирях маркировка?

40. Можете ли вы обнаружить на приведенном здесь рисунке правильную пятиконечную звезду?

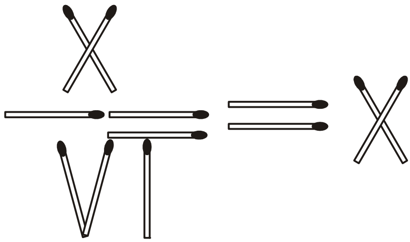


Ответы

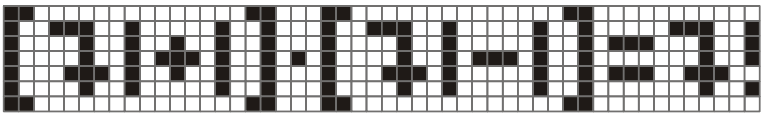
1. $101 - 10^2 = 1$.
2. Этот господин был просто безграмотный. После слова «двадцать» он не поставил двоеточие. Запись должна была выглядеть так: «…Пальцев у меня двадцать: пять на одной руке, столько же на другой …»
3. Эти слова «детство», «пенсия», «рождение», «смерть», «старость» и «юность» именно в таком порядке идут, например, в толковом словаре.
4. Вместо знака вопрос должно стоять 2. Это последовательность современных российских денежных знаков: 1 коп, 5 коп. Пропущена монета в 2 рубля.
5. Буква Й. Это последовательность последних букв месяцев в году.
6. Учитель предварительно договорился с учениками, чтобы они вызывались отвечать независимо от того, знают ответ или не знают. Но те, кто знает ответ, должны поднимать правую руку, а те, кто не знает, — левую. Учитель каждый раз выбирал другого ученика, но всегда того, кто поднимал правую руку.
7. 19 долларов. В слова TWELVE и ONE входят те же самые буквы, что и в слова ELEVEN и TWO. Тогда, TWELVE = ELEVEN + TWO – ONE = 16 + 9–6 = 19.
8. Синий шарик прострелил Винни-Пух, а остатки зеленого подарили Иа-Иа.
9. «Не плачь, дед, не плачь, баба, я снесу вам новое яичко — не золотое, а простое».
10. На ваших коленях.
11. Пятый — мизинец. (Первый — большой, второй — указательный, третий — средний, а четвертый — безымянный.)
12. Последний в ряду российских императоров — Николай II. (Пётр I, Екатерина I, Пётр II…)
13. Неверно было бы предполагать, что ответом может быть любое число, лишь бы сумма его цифр равнялась 13. Например, 67 км. Но на дороге длиной 67 км вы наткнетесь на табличку

59 км с одной стороны и 8 км с другой стороны, сумма цифр которых намного больше 13. Единственный правильный ответ — 49 км.

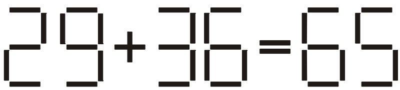
14.



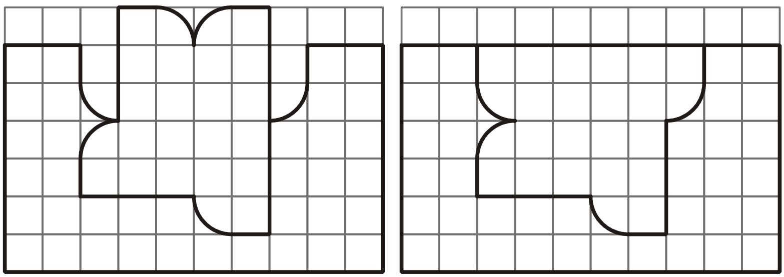
15.



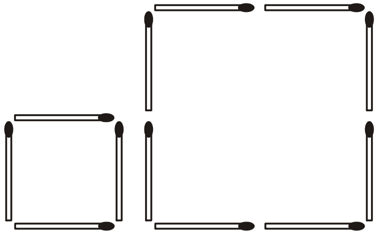
16.



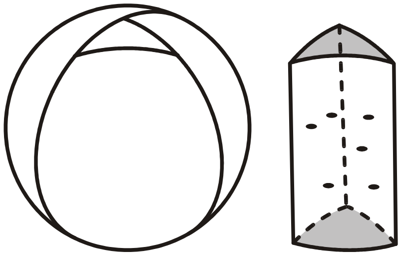
17.



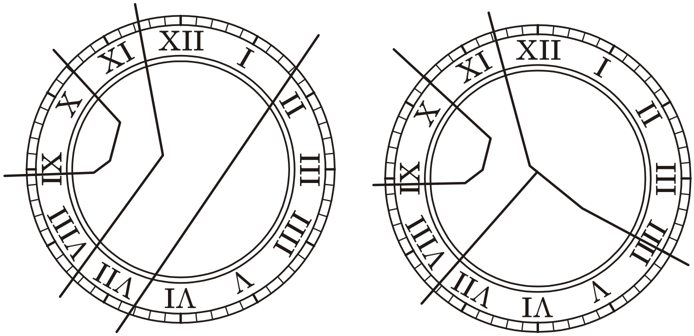
18.



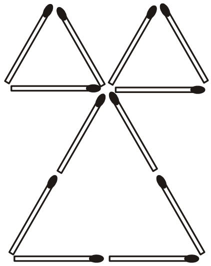
19. У белых есть единственный способ не объявить мат чёрному королю: перевести ладью с поля g6 на поле c6. Правда, этим ходом чёрному королю объявляется шах, но мат не получится, так как чёрные возьмут белого слона (h7) ладьёй (b7).
20. Нужно выйти в пространство – составить три смежные грани куба.
21. Баку-Уфа
22. Арбуз нужно разрезать так, чтобы осталась середина с двумя корками (сверху и снизу) После съедения от неё остаются две корки.



23. Кидать монету они будут вдвоем: если выпадут одинаковые значения (2 орла или 2 решки), то ходить будет первый, а если разные (орел и решка), то второй. Ни один шулер при этом повлиять на результат выпадения монетки не может...
24. Возможностей разломить часы достаточно много, достаточно было указать хотя бы одно из них. Из-за того, что число IV на рисунке было записано, как IIII, количество решений увеличилось. Ниже на рисунке приведена пара решений.



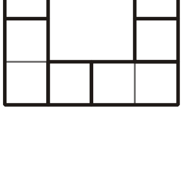
25.

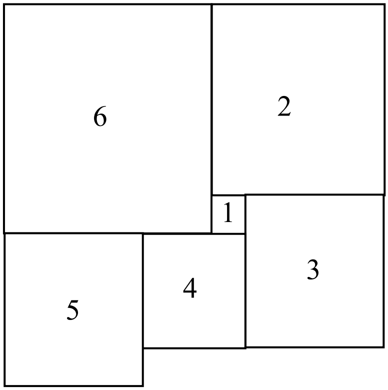


26. Решение: спрятанные в словах числа нужно расположить по порядку

рОДИНа
поДВАл
авсТРИя
приПЯТЬ
СЕМЬянин
подроСТОк
МИЛЛИОНер

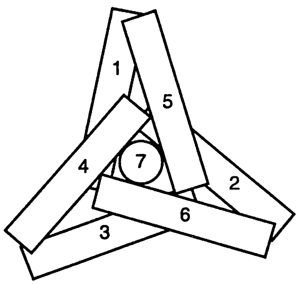
27.



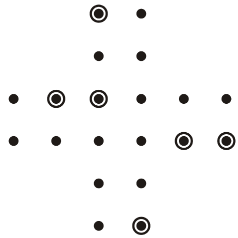


28. Каждая буква имени (M, V, X, I и т.д.) — обозначает число в римской нумерации. Внуки получили столько, с какого числа начинаются их имена.
29. Пусть длина стороны второго квадрата равна x, тогда длина стороны третьего равна $x-1$, четвертого $x-2$, шестого $x+1$. Чтобы найти длину стороны пятого квадрата, нужно из суммы длин сторон шестого и первого вычесть длину стороны четвертого: $(x+1)+1-(x-2)=4$.
30. а) Каждое число, начиная со второго, описывает предыдущее число: запись «11» означает, что перед этим числом была написана «одна единица», запись «1112» означает, что перед этим числом была написана «одна единица, одна двойка» и.д. Продолжается последовательность числом 31121314.

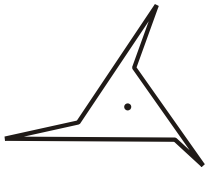
    б) В этом ряду записаны квадраты натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25 36… Просто их сгруппировали по 2 цифры вместе. Следующая пара в этом ряду 00.
31. $(2:((2-3):3)-4):((4-5):5)=50$ или $2:(((2-3):(3-4):4-5)):5)=52{,}5$.
32. Нетрудно понять, что наш герой сможет выкурить $8+2+1=11$ сигарет, после чего у него останется 2 окурка. Одолжив у другого бомжа один окурок, он сможет выкурить еще одну сигарету и вернуть долг. Таким образом, всего он сможет выкурить 12 сигарет.
33. Решение показано на рисунке, вид сверху.



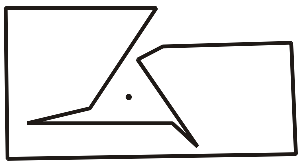
34. Всего 21 квадрат. Удаленные шесть точек обведены кружками на рисунке.



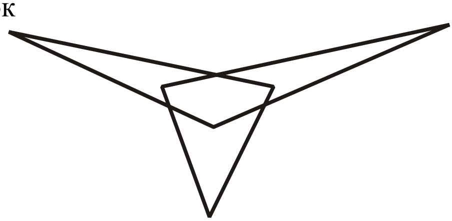
35. См. рисунок.



36. Решение аналогично предыдущей задаче.



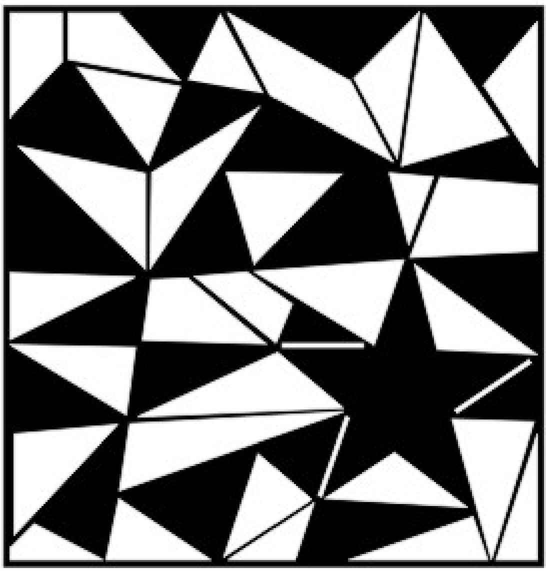
37. См. рисунок



38. Положим на весы №1 по 4 монеты на каждую чашку. Если одна группа монет перевесила, то остальное понятно — эти весы точные, и мы знаем 4 монеты, среди которых одна фальшивая. Пусть весы оказались в равновесии. Обозначим через A девятую монету и добавим к ней монеты B и C — по одной из каждой четверки. Оставшиеся две тройки монет положим на чаши

весов №2. Худший вариант — вновь равновесие. Тогда на весах №2 сравниваем монеты *B* и *C*. В случае равновесия фальшивой будет монета *A*.

39. На одну чашу весов кладем гири, маркированные 1, 2 и 3 г, а на другую — 6 г. Равновесие означает, что ошибка в маркировке возможна лишь внутри групп 1–2–3 и 4–5. При втором взвешивании на одну чашу кладем гири 3 и 5 г, на другую — 6 и 1 г. Если первая чаша перевесила, то ошибки в маркировке нет.
40. На рисунке искомая пятиконечная звезда окрашена целиком.



С математикой по Лондону

А.Г. Королева, Н.Г. Брюсова,
Гимназия №1514, г. Москва
korolevaalla@rambler.ru

Несколько лет подряд, работая в 5–7 классах нам доводилось часто слышать одно и то же: «Если вы когда-нибудь работали в классе, где учатся дети, увлеченные математикой, и преподавали предмет, не связанный с математикой и техническими дисциплинами, вы поймете нас…»

И дальше — высказывания учителей-«нематематиков» о том, как трудно вести уроки у детей, погруженных в мир математики. Конечно, большинство учащихся, интересующихся математикой, с восторгом обсуждают решение задач повышенной трудности (как правило, это задачи кружков, факультативов, олимпиад и т.п.). Дети заворожено они смотрят на хитросплетения чисел и знаков, с упоением погружаются в решение задач, уравнений, пытаются доказать невозможное тождество или построить замысловатый как восточный орнамент график. Для них исчезает все — остается только очарование математики.

И вот однажды нам в голову пришла безумная идея: для расширения кругозора увлеченных математиков, повышения у них интереса к другим учебным дисциплинам, отправиться в путешествие в Великобританию, соединив воедино изучение английского языка и решение математических задач.

В результате получилась удивительная математико-страноведческая программа, включающая 5 тем, которую мы и предлагаем вашему вниманию.

Программа кружка «С математикой по Лондону»:

Занятие 1. Перед отъездом (ознакомление со страной, ее географией, историей, обычаями, валютой).

Занятие 2. В Лондоне (ознакомление с распорядком дня, традициями английской кухни, английскими пабами — public houses).

Занятие 3. Обзорная экскурсия на традиционном двухэтажном автобусе (ознакомление с достопримечательностями города, с главными площадями и парками, с Вестминстерским аббатством, Вестминстерским дворцом, с «бриллиантом» в золотой «оправе» — Биг Беном, с Букингемским дворцом, Тауэрским мостом).

Занятие 4. Музеи Лондона (Британский музей, собор Святого Павла, Музей восковых фигур мадам Тюссо, Музей Шерлока Холмса, Великий Тауэр, Лондонская Национальная галерея, Музей естествознания, Музей Науки, Колесо обозрения «Лондонский Глаз»).

Занятие 5. По Темзе (экскурсия по реке, с посещением достопримечательностей Гринвича — «морских ворот» Лондона).

Занятие 6. Окрестности Лондона (посещение Виндзорского Замка, а также бывшей загородной резиденции королей — Хэмптон Корт).

Каждое занятие предполагает внимательное изучение предлагаемого английского текста (описание традиций, правил, достопримечательностей и т.п.), а также решение задач, имеющих отношение к данной теме занятия и составленных с использованием данного материала. Длительность занятия, посвященного той или иной теме, определяется учителем, и может включать несколько учебных часов. Задачи рассчитаны на учащихся 5–6 классов.

В качестве примеров предлагается разработка двух уроков: посещение Вестминстерского дворца (в сокращенном варианте), а также одного из районов Лондона — исторического Гринвича.

WESTMINSTER PALACE AND BIG BEN

Вестминстерский дворец — здание на берегу Темзы в лондонском районе Вестминстер, где проходят заседания Британского парламента. Соединяется с Трафальгарской площадью улицей Уайтхолл.

Первоначально, до 1529 года, служил столичной резиденцией английских королей. После пожара 16 октября 1834 года дворец выстроен заново по проекту Ч. Бэрри. От средневекового дворца уцелели Вестминстерский зал приёмов (1097) и башня Драгоценностей (построена для хранения казны Эдуарда III).

Во дворце 1200 помещений, 100 лестниц и 5 километров коридоров. Из дворцовых башен наиболее знаменита часовая башня Башня Елизаветы (ранее называлась башней Святого Стефана — Биг-Бен) — символ Великобритании. В 1987 году дворец и близлежащая церковь Святой Маргариты (1486—1523) были включены в список всемирного наследия ЮНЕСКО.

Теперь самое время рассказать про «бриллиант» в золотой «оправе» Вестминстера. Первоначально «Большим Беном» назвали только колокол, но, как часто бывает, позже так стали называть и саму башню.

И колокол, и часы «Большого Бена» задумывались с единственной целью — быть самыми большими в мире. Таковыми они и оставались долгое время. Колокол, вследствие погони за весом, начал выполнять свои функции только с третьей попытки. Сегодня его бой каждый час слышат по радио миллионы человек.

При создании часов Биг-Бена, комиссия поставила условие: отставание либо опережение часового механизма не должно превышать 1 секунды в сутки. Эдмунд Беккет Денисон «всего» за пять лет изготовил такой механизм и четыре циферблата по 9 метров каждый. Несмотря на то, что вес механизма составляет 5 тонн, его точность соответствовала требуемой вплоть до Второй мировой войны, когда, вследствие бомбёжек, нарушение точности увеличилось до 2 секунд за сутки. Корректировать ход механизма догадались с помощью монеты в один пенни, которую кладут на четырёхметровый маятник.

The Palace of Westminster, known also as the Houses of Parliament or just Westminster, is where the two Houses of the Parliament of the United Kingdom (the House of Lords and the House of Commons) conduct their sittings. It is the place where laws are debated and passed.

From the middle of the 11th century until 1512 the Palace of Westminster was the royal home to the Kings and Queens of England.

The Queen rides in a State coach to Westminster to open each new session of Parliament, usually in the second week in November.

The modern Palace of Westminster is the largest Gothic building in the world — there are over 1,000 rooms and two miles of corridors in it.

A light in the clock tower tells when the House of Commons is in session.

Big Ben is one of the most famous landmarks in the world. The clock tower is situated on the banks of the river Thames and is part of the Palace of Westminster.

Officially "Big Ben" does not refer to the whole clock tower, but to the huge thirteen ton bell that strikes the hour.

The Big Ben bell has the following measurements: 9'-0" diameter, 7'-6" high, and weighs 13 tons 10 cwts 3 qtrs 15lbs (13,760 Kg)

The tower opposite the Big Ben is the Victoria Tower, built in 1860. The tower contains the records of both the House of Lords and the House of Commons since 1497. During the parliamentary year the Union Flag is hoisted on top of the 98m tall tower.

The oldest part of the Houses of Parliament is Westminster Hall, dating back to 1097. The large hammer beam roof was built in the 14th century and replaced the original roof which was supported by two rows of pillars. The hall is one of Europe's largest unsupported medieval halls. The Houses of Parliament are open to the public.

Здание Парламента хранит в себе несметное богатство математических тайн. Предлагаем прикоснуться к некоторым из них.

1. Хорошо известно, что длина стрелок Кремлевских курантов равна приблизительно 3,0 м (часовые) и 3,3 м (минутные). Найти длину стрелок Биг Бена, если известно, что длина часовых стрелок кремлевских курантов и стрелок часов башни Вестминстерского дворца соотносится как $10:9$, а минутных стрелок — как $11:14$.

2. Определить, на сколько расстояние, которое прокручивают концы минутных стрелок больше расстояния, которое проходят концы часовых стрелок Биг Бена за год (365 дней; длину часовой стрелки и минутной стрелки узнаете, решив задачу 1). Полученный ответ округлить до сотен.
3. Высота башни Елизаветы (Биг-Бен) Вестминстерского дворца составляет 96,3 метра, а высота Великого Тауэра — 30м. Найти, во сколько раз нужно увеличить высоту крепости, чтобы она сравнялась с высотой Биг Бена.
4. Сможет ли сотрудник службы безопасности пройти все коридоры и осмотреть за день все комнаты Вестминстерского дворца, если его скорость равна 8 км/ч, на осмотр одной комнаты требуется 2,5 минуты?
5. В Палате Общин парламента Великобритании было 650 депутатов, среди которых большая часть представляли интересы консервативной, лейбористской и либерально-демократической партий и остальные 38 человек — интересы более мелких партий. Число депутатов от первой партии на 420% больше, чем от третьей, число депутатов которой в 4 раза меньше числа депутатов от второй партии. Сколько депутатов было от консервативной, лейбористской и либерально-демократической партий представлено в парламенте?
6. Каждый год 5 ноября в Великобритании отмечают Ночь Гая Фокса. Небо Лондона и других крупных городов освещается фейерверками, повсюду взрывают петарды. В этот день в 1605 году был раскрыт «пороховой заговор». В подвал, находившийся под зданием Парламента, был прорыт тоннель и было спрятано 36 бочонков пороха. Первоначально заговорщики планировали прорыть подземный ход за две недели, но за месяц построили 20% тоннеля. Какова длина тоннеля, если осталось построить 168 м?

7. Подвал (для хранения продуктов) имел высоту 1,85 м. Его ширина составляла 280% высоты, а длина 350% ширины. Найдите площадь подвала и округлите до целых.
8. Порох находился в бочках, на которых было написано: «брутто — 30 кг, нетто — 27 кг». Запишите десятичной дробью часть, которую вес нетто составляет от веса брутто. Выразите эту часть в процентах.
9. Черный (дымный) порох способен впитывать влагу. Когда его влажность увеличивается до 7%, он становится непригодным для стрельбы. Отличается от бездымного пороха тем, что будучи подмоченным, своих свойств не восстанавливает. Возможен ли был взрыв, если, пока заговорщики готовились к взрыву, часть пороха (66 кг) отсырела и стала негодной?

GREENWICH

Гринвич — «морские ворота» Лондона, историческое предместье, а теперь — один из районов Лондона на юго-востоке британской столицы, на правом берегу Темзы, издавна тесно связан с Британским флотом.

Гринвич знаменит тем, что является нулевой точкой отсчёта долготы и часовых поясов земного шара. Нулевой меридиан исторически связан с Гринвичской обсерваторией.

Королевская гринвичская обсерватория, через которую проходит нулевой или гринвичский меридиан, основана Карлом II в 1674 г. Сейчас в зданиях старой обсерватории расположен музей астрономических и навигационных устройств. Здание обсерватории расположено в Гринвичском парке.

Королевский морской госпиталь построен в 1694—1705 гг. по проекту Кристофера Рена. Прежде на месте госпиталя для моряков стоял средневековый королевский дворец, от которого сохранился домик королевы (Queen’s House). В настоящее время здание госпиталя используется Гринвичским университетом.

Greenwich is notable for its maritime history and for giving its name to the Greenwich Meridian (0° longitude) and Greenwich Mean Time. The town became the site of a royal palace, the Palace of Placentia from the 15th century, and was the birthplace of many in the House of Tudor, including Henry VIII and Elizabeth I.

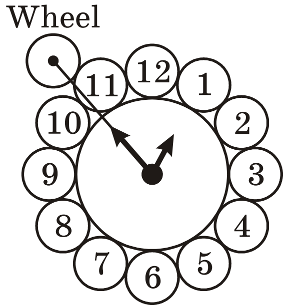
The palace was ruined during the English Civil War and was rebuilt as the Royal Naval Hospital for Sailors by Sir Christopher Wren. These buildings became the Royal Naval College in 1873, and they remained an establishment for military education until 1998. The historic rooms within these buildings remain open to the public; other buildings are used by University of Greenwich.

Погуляли по парку, соприкоснулись с историей, побывали одновременно в западном и восточном полушариях. Теперь самое время заняться решением задач, чтобы усвоить всю полученную информацию.

18 га	?
27 га	18 га

1. Гринвич-парк — зеленая прямоугольная зона отдыха юго-восточных лондонцев, известный как первый огороженный (в тридцатых годах XV века) Королевский парк английской столицы. Длины сторон соотносятся как $3:4$. Парк условно можно поделить на 4 зоны, из которых площади трех — известны и равны 18 га, 18 га, 27 га (см. рисунок). Найти площадь четвертой части; а также размеры парка.
2. Ровно в 10 часов самые большие часы в экспозиции обсерватории вдруг пошли в полтора раза быстрее и шли так, пока не дошли ровно до 11 часов, после чего пошли в полтора раза медленнее, пока не дошли до 12 часов. Сколько в этот момент показывали обычные часы?
3. В экспозиции Обсерватории находится коллекция часов. Каждая цифра на циферблате одного из экспонатов заключена в кружок, кружки расположены по кругу и касаются друг друга. К минутной стрелке на пружинке приделано колесико ра-

диусом, равным радиусу кружков с цифрами так, что он катится по этим кружкам. Вопрос очевиден: сколько оборотов вокруг своей оси сделает колесико за час?



4. Во все времена мореплаватели много внимания уделяли точному определению своего места нахождения по расположению звезд на небе. Для решения многих важных мореходных задач им было необходимо было уметь решать задачи следующего типа: «На сколько градусов повернется земля за 1 час и за 1 минуту»? Помоги им ответить на этот вопрос.
5. Для географов, составителей карт, астрономов определение точного расположения того или иного пункта имеет большое значение. Определить это значение можно исходя из значения времени в данных пункта. Найди, на сколько градусов западнее расположен Плимут по отношении к Лондону, если в тот момент, когда в Лондоне полдень, в Плимуте часы показывают 11 ч 44 мин.

The Cutty Sark

Знаменитый чайный клипер «Катти Сарк» установлен в Гринвиче на вечную стоянку в сухом доке. Неподалёку находится Национальный морской музей (открыт в 1937 году).

The Cutty Sark is a British clipper ship. Built on the Clyde in 1869 for the Jock Willis shipping line, she was one of the last tea clippers to be built and one of the fastest.

The opening of the Suez Canal in 1869 meant that steam ships now had a much shorter route to China, so Cutty Sark spent only a few years on the tea trade before turning to the trade in wool from Australia, where she held the record time to Britain for ten years.

6. Чайные гонки: Основным товаром, сулившим купцам немалые прибыли, был китайский чай. Перевозимый на старых

судах, он иногда находился в пути по 12 месяцев, отсыревая и пропитываясь запахами трюма. В середине XIX века появился новый тип парусных судов, применяемых для перевозки чая — чайные клипера, прозванные «гончими псами океана». Длина пути от Китая до Лондона составляла 13200 морских миль. Во сколько раз быстрее доставляли чай клипера, если их скорость (с учетом штилей, штормов и т.п.) составляла в среднем 5,5 узлов (миль в час)?

7. За сколько дней известный чайный клипер «Катти Сарк» мог доставить чай из Китая, если при идеальных погодных условиях он легко развивал скорость 16 узлов?
8. В 1866 г. ставка за тонну привезенного чая равнялась семи фунтам стерлингов, а судно, прибывшее первым, получало дополнительную премию в размере 10 шиллингов с каждой тонны привезенного груза. Капитан, первым поставивший свое судно под разгрузку, получал премию 100 фунтов стерлингов. Сколько потерял в знаменитой Чайной гонке клипер «Ариел», который был нагружен 1230000 фунтами чая и пришел первым в Лондон, по сравнению с клипером «Типинг» который был нагружен 1108700 фунтами чая и пришел вторым, но из-за более высокой посадки, встал под разгрузку на 55 минут раньше? Сколько получил «Типинг»? (Доп. информация: 1 фунт = 0,454 кг; 1 фунт стерлингов = 20 шиллингов.)

Представленные материалы были апробированы на уроках и на занятиях факультатива по математике и английскому языку. Они могут быть также использованы при проведении недели математики в школе, а также недели английского языка. По материалам занятий вышла книга:

Математическое страноведение / Н.Г. Брюсова, А.Г. Королева. — МО Щелково: Издатель Мархотин П.Ю., 2013. —128 с.: ил.

Содержание