

Учим математике-5

(материалы открытой школы-семинара
учителей математики)

под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2015

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

Учим математике-5 (материалы открытой школы-семинара учителей математики) / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2015. — 136 с.

ISBN 978-5-4439-0633-1

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики, проходившей с 1 по 8 мая 2014 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-5
(материалы открытой школы-семинара учителей математики)

Технический редактор *Т. Струков*

Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 15.08.2015 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 12 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“». 121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-4439-0633-1

© МЦНМО, 2015.

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы *пятой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики*, проходившей с 1 по 8 мая 2014 года в Московской области (дер. Кузино Солнечногорского района). Семинар был организован Московским центром непрерывного математического образования и Центром педагогического мастерства. Материалы предыдущих школ-семинаров — см. сборники «Учим математике», «Учим математике 2», «Учим математике 3» и «Учим математике 4» — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013 и 2014 гг.

На семинар приглашались все желающие. На приглашение откликнулось много творческих учителей, которые, помимо прочего, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками.

Близость к Москве позволила построить гибкий график работы семинара: некоторые участники смогли приехать не на весь срок. Кроме того, это дало возможность приглашать лекторов на 1–2 дня. Всего в работе школы-семинара приняло участие 62 преподавателя. Большинство участников представляло Москву и Московскую область. Кроме того, на семинар приехали преподаватели из Волгограда, Дагестана, Саратова, Челябинска, Омска и даже из Израиля и Швеции. Приятно отметить, что среди участников были преподаватели, которые не пропустили ни одного выездного семинара.

На прошедшем семинаре, как всегда, обсуждались различные вопросы, связанных с обучением школьников. Использовались различные формы деятельности: лекции, семинары, «круглые столы».

Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим».

Организатором и координатором пятой школы-семинара (равно, как и всех предыдущих) являлся преподаватель лицея №1557 г. Москвы И.Б. Писаренко, научным руководителем — исполнительный директор МЦНМО, директор ЦПМ, учитель школы №57 г. Москвы, к. ф-м. н. И.В. Яценко, его заместителем — сотрудник МЦНМО и ЦПМ, старший методист школы №218 г. Москвы заслуженный учитель РФ А.Д. Блинков, методистом — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ФМШ №2007 г. Москвы, заслуженный учитель РФ П.В. Чулков.

По итогам школы-семинара все участники получили удостоверение о прохождении курсов повышения квалификации МЦНМО.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить экскурсионные поездки в Москву. За рамками учебной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению всех участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

Организаторы семинара надеются, что следующие выездные школы будут еще более содержательными.

К сожалению, далеко не все докладчики предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов. Организаторы благодарны всем докладчикам, но особенно тем учителям, которые нашли силы и время подготовить статьи для этого сборника.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

Программа открытой школы-семинара

1 мая		
Время	Вид работы	Содержание
15.00	Открытие	А.Д. Блинков, П.В. Чулков, И.Б. Писаренко Организационная информация
15.30	Лекция	Л.Э. Медников Многочлены и линейные рекуррентные последовательности
2 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	А.Ю. Эвнин Теорема Холла и задачи о фокусниках
11.00	Семинар	Ю.А. Блинков Симедиана
12.00	Семинар	А.Н. Андреева Математические миниатюры
13.00	Семинар	Г.Г. Левитас Преподавание математики в 5 и 6 классах
15.00	Практическое занятие	С.А. Данелян Опыт применения ПО GeoGebra при прохождении в школьной программе графиков функций и уравнений
3 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	В.Ю. Протасов Геометрия звездного неба
11.15	Семинар	Е.С. Горская Курс ТВС в математическом классе
12.15	Семинар	Д.А. Калинин Олимпиада «Открытие»: новая форма, новое содержание

13.15	Практическое занятие	З.В. Ильиченкова, О.Г. Вержховская Практические работы на уроках геометрии в старшей школе
15.00	Круглый стол	Д.Э. Шноль Математические кружки и обучение в школе: есть ли преемственность?
4 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	И.Б. Писаренко Авторский курс математического анализа для школьников (часть 1)
11.15	Лекция	М.А. Латышева Модели в решении текстовых задач
13.00	Семинар	С.Л. Синякова Вопросы здравогомыслящего человека или «Как до этого догадаться?»
15.00	Семинар	А.Ю. Эвнин Различные формы проведения математических олимпиад и конкурсов
15.30	Семинар	Н.М. Нетрусова Организация выездных школ
5 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	Л.Э. Медников Смена языка
11.15	Лекция	Н.Н. Андреев Математические этюды
13.00	Семинар	С.М. Крачковский Переформулирование условия задачи и сведение ее к другой
15.00	Презентация	М.Ю. Панов Презентация новой версии диска задач по геометрии Р.К. Гордина

6 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	А.В. Шаповалов Блеск и нищета аксиоматического метода в геометрии
11.00	Семинар	Д.В. Прокопенко Геометрические конструкции
12.00	Семинар	Н.А. Наконечный Кружки по математике для школьников 7 - 11 классов
13.00	Практиче- ское занятие	Е.А. Ширяев Конструирование моделей для кабинета математики
15.00	Семинар	К.В. Медведев Задачи по криптографии
7 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Семинар	А.В. Шаповалов Почему школьники плохо понимают ин- дукцию
10.45	Лекция	С.А. Беляев Восстановление треугольника по некото- рым точкам
12.15	Лекция	С.П. Коновалов Математика и русский язык
15.00	Круглый стол	И.В. Яценко Проекты «трехуровневого» математического образования и «двухуровневого» ЕГЭ
8 мая		
Время	Вид работы	Содержание
9.30	Лекция	И.Б. Писаренко Авторский курс математического анализа для школьников (часть 2)

11.00	Семинар	П.В. Чулков Подбор заданий для занятий по алгебре
12.00	Семинар	Я.И. Абрамсон Предварительные итоги преподавания математики по альтернативной программе в начальной школе ГБОУ «Интеллектуал»
13.00	Семинар	О.Ю. Дмитриев Олимпиадные задачи. Кубок Урала
15.00	Круглый стол	А.Д. Блинков Олимпиадное движение в его современном виде. Польза и вред для школьников
16.00	Закрытие	А.Д. Блинков, П.В. Чулков, И.Б. Писаренко 1) Рефлексия школы-семинара 2) Подведение итогов школы-семинара

Теорема Холла и задачи о фокусниках

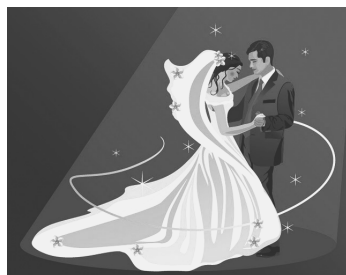
Май 2014 г.

А.Ю. Эвнин,
г. Челябинск
graph98@yandex.ru

Теорема Холла

В популярной математической литературе широкую известность получила следующая задача.

Задача о свадьбах. *Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно одновременно поженить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?*



Ответ таков: задача разрешима тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее чем с k девушками.

Для того, чтобы сформулировать задачу о свадьбах на математическом языке, приведём некоторые определения из теории графов [1].

Множество попарно несмежных рёбер графа называется **паросочетанием**.

Пусть G — двудольный граф с долями V_1 и V_2 (в этом графе любое ребро соединяет некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2). **Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2** называется паросочетание в G , покрывающее V_1 (т. е. для всякой вершины из V_1 в паросочетании найдётся инцидентное ей ребро).

Пусть $A \subset V$ — подмножество вершин графа $G = \langle V, E \rangle$.

Окружением множества A называют множество

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v \in A} \Gamma(v) \setminus A,$$

где $\Gamma(v)$ — множество вершин, смежных с v .

Теперь решение задачи о свадьбах может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 0.1 (Ф. Холл, 1935 г.) *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall A \subset V_1 \mid \Gamma(A) \geq |A|.$$

В книге [2] можно найти четыре разных способа доказательства теоремы Холла (индукцией по числу юношей, через теорему Менгера, методом Радо, с помощью принципа двойственности в линейном программировании).

Обобщение теоремы Пуанкаре

В данной заметке речь пойдёт об одном (простом, но малоизвестном) достаточном условии существования совершенного паросочетания в двудольном графе.

Теорема 0.2 *Пусть в непустом двудольном графе $G(V_1, V_2)$ степень любой вершины из доли V_1 не меньше степени любой вершины из доли V_2 . Тогда в этом графе существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 .*

Доказательство. Пусть q — число, которое не больше степени любой вершины из V_1 и не меньше степени любой вершины из V_2 . Возьмём произвольные k вершин первой доли $b_1, b_2, \dots, b_k$ и смежные с ними вершины $g_1, g_2, \dots, g_l$ второй доли и рассмотрим порождённый этими $k+l$ вершинами подграф исходного графа. В полученном графе степень любой вершины из первой не меньше q , а из второй — не больше q . Число рёбер двудольного графа равно сумме степеней вершин любой из его долей. Поэтому

$$\sum_{i=1}^k \rho(b_i) = kq = \sum_{j=1}^l \rho(g_j) \leq lq,$$

откуда $l \geq k$. Таким образом, выполнены условия теоремы Холла о существовании в двудольном графе совершенного паросочетания.

Теорема 2 является несложным обобщением следующего утверждения (граф называется **регулярным**, если степени всех его вершин равны между собой).

Теорема 0.3 (А. Пуанкаре, 1901 г.) *В любом непустом регулярном двудольном графе существует совершенное паросочетание.*

Задачи о фокусниках

Имеется ряд задач, которые легко решаются с помощью теоремы 2.

Фабула этих задач такова. Зрители предъявляют ассистенту фокусника некоторый случайным образом выбранный объект (например, несколько игровых карт), после чего ассистент по своему выбору как-то изменяет этот объект. Далее фокусник по новому объекту восстанавливает исходный.



Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$ следующим образом. Пусть вершины из V_1 — это всевозможные конфигурации, которые зрители могут предъявить ассистенту фокусника, а вершины из V_2 — те конфигурации, которые может получить ассистент. Если из конфигурации $a \in V_1$ может быть получена конфигурация $b \in V_2$, то в графе должно быть ребро ab ; других рёбер в графе нет.

Если в данном графе существует совершенное паросочетание и V_1 в V_2 , то фокусник с ассистентом, используя его, смогут осуществить фокус: фокусник по конфигурации b однозначно определит конфигурацию a .

Во многих таких задачах можно подсчитать степени вершин графа; если окажется, что из каждой вершины первой доли выходит не меньше рёбер, чем входит в произвольную вершину

второй доли, то, согласно теореме 2, в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

Рассмотрим конкретные задачи.

- Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен назвать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было определить спрятанную?

Ответ: да, могут.

Решение. Рассмотрим двудольный граф, в одной доле которого — сочетания из 27 по 4, в другой — размещения из 27 по 3, и ребро соединяет размещение с сочетанием, если все элементы размещения входят в сочетание.

Подсчитаем степень произвольной вершины из первой доли. Здесь нужно ответить на вопрос: сколько вариантов действия у первого участника фокуса? Он может убрать любую из четырёх карт, а три оставшиеся положить в ряд одним из $3!$ способов. Значит, степень вершины первой доли равна $4 \cdot 3! = 24$.

Степень произвольной вершины второй доли равна количеству способов действия второго участника фокуса. Поскольку он может назвать любое из 27 чисел, кроме тех трёх, которые он видит на карточках, и здесь степень вершины равна 24.

Значит, по теореме Пуанкаре, в рассматриваемом двудольном графе существует совершенное паросочетание. Фокусникам осталось договориться о том, какое совершенное паросочетание им использовать.

- Фокусник и его помощник показывают следующий фокус. Фокусник выкладывает колоду из 36 карт и просит двух зрителей — мальчика и девочку — выбрать по две карты. Видя, кто какие карты выбрал, помощник тоже берёт две карты из оставшихся и отдаёт их зрителям. Зрители перемешивают все 6

карт и отдают их фокуснику. Тот объявляет, кто какие карты брал из колоды. Доказать, что такой фокус действительно возможен.

Доказательство. Здесь в первой доле графа — упорядоченные пары неупорядоченных пар. Например, вершина $(\{1,2\}, \{3,4\})$ соответствует случаю, когда мальчик выбрал карты с номерами 1 и 2 (можно считать, что карты пронумерованы числами от 1 до 36), а девочка — карты с номерами 3 и 4. Во второй доле графа — неупорядоченные шестёрки карт. Степень вершины первой доли равна $C_{32}^2 = 496$ — количеству способов к четырём картам добавить две. Степень вершины второй доли равна $C_6^2 \cdot C_4^2 = 90$ — числу способов выделить из шести карт две, которые (якобы) выбрал мальчик, а затем ещё две, которые выбрала девочка. Выполнены условия теоремы 2, гарантирующей существование совершенного паросочетания — фокус возможен.

- Зритель пишет на доске слева направо 10 цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр карточкой. После этого входит фокусник и называет закрытую цифру. Доказать, что такой фокус действительно возможен.

Доказательство. Пусть V_1 и V_2 — множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, рёбра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2 . Требуется доказать, что в этом графе существует совершенное паросочетание.

Если $u \in V_1$, то $\rho(u)=10$, поскольку помощник может закрыть любую из 10 записанных зрителем цифр. Если $v \in V_2$, то $\rho(v)=10$, поскольку карточка может закрывать любую из цифр от 0 до 9.

Согласно теореме Пуанкаре, в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

Заметим, что в графе довольно много вершин — по 10^{10} в каждой доле. Покажем, что фокус осуществим не только теоретически, но и практически.

Пусть места, где записаны цифры, пронумерованы слева направо: 1, 2, ... 9, 0. Помощник подсчитывает сумму S всех записанных зрителем цифр и закрывает карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S . Фокусник вычисляет сумму девяти открытых цифр, и (по положению карточки) зная последнюю цифру суммы десяти цифр, легко определяет закрытую цифру.

• Зритель пишет на доске слева направо n цифр. Помощник фокусника закрывает одну из цифр красной карточкой, другую — синей, ещё одну — зелёной. После этого входит фокусник и называет закрытые цифры. При каком наименьшем n такой фокус возможен?

Ответ: при $n = 12$.

Решение. Пусть V_1 и V_2 — множества тех «картинок», которые могут увидеть помощник и фокусник соответственно. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, рёбра которого описывают возможные переходы от картинок из V_1 к картинкам из V_2 .

Заметим, что $|V_1| = 10^n$, $|V_2| = n(n-1)(n-2)10^{n-3}$. Для существования совершенного паросочетания из V_1 в V_2 необходимо, чтобы в доле V_2 вершин было не меньше, чем в V_1 . Отсюда

$$n(n-1)(n-2) \geq 10^3 (*)$$

и $n \geq 12$.

Степень произвольной вершины первой доли равна $n(n-1)(n-2)$ (столько, как леко видеть, вариантов действий у помощника фокусника). Степень произвольной вершины второй доли равна 10^3 (столько разных ответов может дать фокусник).

В силу теоремы 2 неравенство (*) оказывается не только необходимым, но и достаточным для существования совершенного паросочетания в $G(V_1, V_2)$.

Ответ к задаче получен — наименьшее значение n равно 12.

Покажем, как фокус осуществить практически.

Пусть места, где записаны цифры, пронумерованы слева направо: 1, 2, ... 9, 0, 11, 12, а S — сумма всех записанных зрителем цифр. Будем действовать за помощника следующим образом. Закроем красной карточкой место, номер которого является последней цифрой числа S , после чего мысленно удаляем это место, а синей карточкой закроем место с номером, равным цифре, которая спрятана под красной карточкой. Затем зелёной карточкой закроем место, номер которого (вычисленный после «удаления» цифр, находящихся под красной и синей карточками) спрятан под синей карточкой.

Теперь фокусник по положению зелёной карточки поймёт, какая цифра под синей, а по положению синей карточки — какая цифра под красной. Все цифры, кроме той, которая под зелёной карточкой, уже известны фокуснику, а положение красной карточки говорит о последней цифре суммы всех 12 цифр. Поэтому фокусник сможет определить цифру и под зелёной карточкой.

Задачи на теорему Холла

В заключение статьи приведём подборку задач из сборника [3], при решении которых возможно применение теоремы Холла. Некоторые задачи совсем простые (решаются простой ссылкой, например, на теорему 3; нужно лишь увидеть соответствующий двудольный граф!), некоторые предлагались на школьных и студенческих олимпиадах различного уровня. Задачи 9–13 посвящены доказательству и применению леммы Шпернера. Предлагаемые задачи могут лечь в основу проведения нескольких занятий школьного или студенческого математического кружка.

- На танцевальном вечере каждый юноша знаком с k девушками, а каждая девушка знакома с k юношами. Доказать, что можно провести k (медленных) танцев так, чтобы каждый участник вечера станцевал со всеми своими знакомыми (противоположного пола).

- На шахматной доске поместили 16 из 64 клеток так, что на каждой вертикали и горизонтали оказалось по две помеченные

клетки. Доказать, что на помеченных клетках можно расставить 8 чёрных и 8 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло по одной белой и одной чёрной фигуре.

- Вуз посылает 8 юношей и 8 девушек на стажировку по восьми специальностям в 8 зарубежных университетов, причем каждый университет принимает по два человека и учит их двум разным специальностям, и каждой из восьми специальностей учат два университета. Всегда ли можно так распределить студентов, чтобы в каждом университете стажировались юноша и девушка, и при этом как юноши, так и девушки обучались (в совокупности) по всем восьми специальностям?

- Карточная колода из 36 карт раздаётся на 9 человек по 4 карты каждому. Доказать, что каждый может выложить по одной карте так, что все эти карты будут разного достоинства.

- Выполняя домашнее задание, каждый студент группы решил по 4 задачи. Известно, что каждая задача была решена четырьмя студентами. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый студент рассказал решение ровно одной задачи и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

- В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. В каждой деревне общее число женихов и невест не больше половины общего их числа. Доказать: можно всех переженить так, что в каждой паре жених и невеста будут из разных деревень.

- $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф; для любого подмножества A доли V_1 выполняется неравенство $|\Gamma(A)| \geq |A| - d$. Доказать, что максимальная мощность паросочетания в графе G не меньше $|V_1| - d$.

- $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф; $|V_1| = |V_2| = n$. Известно, что любой подграф с $n + m$ вершинами непуст. Доказать, что максимальная мощность паросочетания в графе G не меньше $n - m + 1$.

• Пусть A — n -элементное множество, $n \geq 3$, натуральное число k удовлетворяет условию $1 \leq k < \frac{n}{2}$, V_1 — множество k -элементных подмножеств множества A , V_2 — множество $(k+1)$ -элементных подмножеств множества A , $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, в котором вершины $X \in V_1$ и $Y \in V_2$ смежны тогда и только тогда, когда $X \subset Y$. Доказать, что в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

• Рассмотрим булеан (т. е. множество всех подмножеств) как упорядоченное множество (отношением порядка является отношение включения). Основываясь на результате предыдущей задачи, доказать, что существует разбиение булеана n -элементного множества на цепи, каждая из которых содержит множество мощности $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

• Доказать **лемму Шпернера**: максимальная длина антицепи в булеане n -элементного множества равна $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

• Среди 250 сотрудников международной фирмы в любой паре сотрудников каждый знает язык, который не знает другой сотрудник из этой пары. Какое наименьшее возможное число языков знают (в совокупности) сотрудники фирмы?

• В деревне живут 250 хоббитов. Каждый хоббит живёт в отдельном домике. По вечерам они ходят друг к другу в гости. За один вечер каждый хоббит посещает всех, кого можно застать дома, причём если он идёт в гости, то у себя дома в этот вечер уже не появляется. За какое наименьшее число вечеров может случиться так, что каждый житель деревни побывал в гостях у всех остальных?

• Пусть в непустом двудольном графе степень каждой вершины равна k . Доказать, что в нём не менее $k!$ совершенных паросочетаний.

• Имеется бесконечное множество юношей и бесконечное множество девушек. Для любого натурального числа k верно, что

любые k юношей знакомы в совокупности не менее чем с k девушками. Верно ли, что всех юношей удастся одновременно поженить на знакомых им девушках? Другими словами, справедлива ли теорема Холла в случае бесконечного графа?

- Решить (предыдущую) задачу в предположении счётности множеств юношей и девушек.

- Пусть G — граф с множеством вершин V . Известно, что $\forall A \subset V \quad |\Gamma(A)| \geq |A|$. Доказать, что мощность максимального паросочетания не меньше $|V|/3$.

- В двудольном графе $G(V_1, V_2)$ для любой вершины v из доли V_1 выполняется неравенство $|\Gamma(v)| \geq |\Gamma(\Gamma(v))|$. Доказать, что существует совершенное паросочетание из V_1 в V_2 .

- В социальной сети n человек. Назовём участника сети общительным, если у него число друзей больше, чем число друзей друзей (считая его самого). Каково наибольшее возможное число общительных участников?

Библиографический список

1. Краснов, М. Л. *Вся высшая математика: учебник*. Т.7 / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко, Е. В. Шикин, В. И. Заляпин, А. Ю. Эвнин. — М.: КомКнига, 2012. — 208 с.
2. Эвнин А. Ю. *Вокруг теоремы Холла*. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 88 с.
3. Эвнин А. Ю. *Задачник по дискретной математике*. 5-е изд. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. — 264 с.

Восстановление треугольника по заданным точкам

С.А. Беляев,
Школа № 1199 «Лига школ», г. Москва
srgblv@ya.ru

В треугольнике отметили некоторые точки, а потом треугольник стёрли. Как восстановить (с помощью циркуля и линейки) треугольник по отмеченным точкам?

Наверняка такие задачи были известны ещё в Древней Греции. Однако первой печатной работой на эту тему, скорее всего, была статья [1] Л. Эйлера «Лёгкое решение одной трудной геометрической задачи». В ней Эйлер поставил вопрос о восстановлении треугольника по ортоцентру H , центроиду M , инцентру I и центру описанной окружности O . Ясно, что если эти точки совпадают, то треугольник является правильным. Если же эти точки не совпадают, то треугольник по ним определяется однозначно. Другое дело, что треугольник, будучи однозначно определённым, может быть, тем не менее, нестроимым. Так например, не всегда с помощью циркуля и линейки решается задача о трисекции угла.

Первое обобщение этого труда Эйлера было сделано в 1982 году Вильямом Верником. В своей статье [2] Верник расширяет список точек для восстановления треугольника до следующего:

A, B, C, O — вершины треугольника и центр описанной окружности;

M_1, M_2, M_3 и M — середины сторон и центроид;

H_1, H_2, H_3 и H — основания высот и ортоцентр;

L_1, L_2, L_3 и I — основания биссектрис и инцентр.

Конечно, такие задачи встречались и ранее, но Верник первым задался вопросом их полного перечисления и решения. Три точки

из 16 можно выбрать $C_{16}^2 = 560$ способами. Из них лишь 139 троек дают принципиально различные, нетривиальные задачи. Тройка (A, B, C) является, очевидно, тривиальной, а из трёх вариантов (A, B, M) , (B, C, M) и (A, C, M) естественно оставить только один. Список оставшихся задач и составляет так называемый список Верника (см. таблицу).

1	(A, B, O)	L	48	(A, H_1, I)	S	95	(M_1, M, L_2)	U
2	(A, B, M_1)	S	49	(A, H_2, H_3)	S	96	(M_1, M, I)	S
3	(A, B, M_3)	R	50	(A, H_2, H)	L	97	(M_1, H_1, H_2)	S
4	(A, B, M)	S	51	(A, H_2, L_1)	S	98	(M_1, H_1, I)	L
5	(A, B, H_1)	L	52	(A, H_2, L_2)	L	99	(M_1, H_1, L_1)	L
6	(A, B, H_3)	L	53	(A, H_2, L_3)	S	100	(M_1, H_1, L_2)	U
7	(A, B, H)	S	54	(A, H_2, I)	S	101	(M_1, H_1, I)	S
8	(A, B, L_1)	S	55	(A, H, L_1)	S	102	(M_1, H_2, H_3)	L
9	(A, B, L_3)	L	56	(A, H, L_2)	U	103	(M_1, H_2, H)	S
10	(A, B, I)	S	57	(A, H, I)	S	104	(M_1, H_2, L_1)	S
11	(A, O, M_1)	S	58	(A, L_1, L_2)	S	105	(M_1, H_2, L_2)	S
12	(A, O, M_2)	L	59	(A, L_1, I)	L	106	(M_1, H_2, L_3)	U
13	(A, O, M)	S	60	(A, L_2, L_3)	S	107	(M_1, H_2, I)	U
14	(A, O, H_1)	S	61	(A, L_2, I)	S	108	(M_1, H, L_1)	U
15	(A, O, H_2)	S	62	(O, M_1, M_2)	S	109	(M_1, H, L_2)	U
16	(A, O, H)	S	63	(O, M_1, M)	S	110	(M_1, H, I)	U
17	(A, O, L_1)	S	64	(O, M_1, H_1)	L	111	(M_1, L_1, L_2)	U
18	(A, O, L_2)	S	65	(O, M_1, H_2)	S	112	(M_1, L_1, I)	S
19	(A, O, I)	S	66	(O, M_1, H)	S	113	(M_1, L_2, L_3)	
20	(A, M_1, M_2)	S	67	(O, M_1, L_1)	L	114	(M_1, L_2, I)	U
21	(A, M_1, M)	R	68	(O, M_1, L_2)	U	115	(M, H_1, H_2)	U
22	(A, M_1, H_1)	L	69	(O, M_1, I)	S	116	(M, H_1, H)	S
23	(A, M_1, H_2)	S	70	(O, M, H_1)	S	117	(M, H_1, L_1)	S

24	(A, M_1, H)	S	71	(O, M, H)	R	118	(M, H_1, L_2)	
25	(A, M_1, L_1)	S	72	(O, M, L_1)	U	119	(M, H_1, I)	
26	(A, M_1, L_2)	U	73	(O, M, I)	U	120	(M, H, L_1)	U
27	(A, M_1, I)	S	74	(O, H_1, H_2)	U	121	(M, H, I)	U
28	(A, M_2, M_3)	S	75	(O, H_1, H)	S	122	(M, L_1, L_2)	U
29	(A, M_2, M)	S	76	(O, H_1, L_1)	S	123	(M, L_1, I)	
30	(A, M_2, H_1)	L	77	(O, H_1, L_2)		124	(H_1, H_2, H_3)	S
31	(A, M_2, H_2)	L	78	(O, H_1, I)		125	(H_1, H_2, H)	S
32	(A, M_2, H_3)	L	79	(O, H, L_1)	U	126	(H_1, H_2, L_1)	S
33	(A, M_2, H)	S	80	(O, H, I)	U	127	(H_1, H_2, L_3)	
34	(A, M_2, L_1)	S	81	(O, L_1, L_2)	U	128	(H_1, H_2, I)	
35	(A, M_2, L_2)	L	82	(O, L_1, I)	S	129	(H_1, H, L_1)	L
36	(A, M_2, L_3)	S	83	(M_1, M_2, M_3)	S	130	(H_1, H, L_2)	U
37	(A, M_2, I)	S	84	(M_1, M_2, M)	S	131	(H_1, H, I)	S
38	(A, M, H_1)	L	85	(M_1, M_2, H_1)	S	132	(H_1, L_1, L_2)	
39	(A, M, H_2)	S	86	(M_1, M_2, H_3)	S	133	(H_1, L_1, I)	S
40	(A, M, H)	S	87	(M_1, M_2, H)	S	134	(H_1, L_2, L_3)	
41	(A, M, L_1)	S	88	(M_1, L_1, L_2)	U	135	(H_1, L_2, I)	
42	(A, M, L_2)	U	89	(M_1, M_2, L_3)	U	136	(H, L_1, L_2)	U
43	(A, M, I)	S	90	(M_1, M_2, I)	U	137	(H, L_1, I)	
44	(A, H_1, H_2)	S	91	(M_1, M, H_1)	L	138	(L_1, L_2, L_3)	U
45	(A, H_1, H)	L	92	(M_1, M, H_2)	S	139	(L_1, L_2, I)	S
46	(A, H_1, L_1)	L	93	(M_1, M, H)	S			
47	(A, H_1, L_2)	S	94	(M_1, M, L_1)	S			

Расшифровка условных обозначений в этой таблице такова.

R (*redundant*) — задачи, в которых положение двух точек определяет положение третьей. Например, такой является тройка (A, B, M_3) . Такие задачи не имеют однозначного решения. В списке Верника их 3.

L (locus dependent) — задачи, в которых присутствует более слабая зависимость точек друг от друга. Точки не могут располагаться произвольно: одна из них по отношению к другим должна лежать на каком-либо геометрическом месте. В зависимости от взаимного расположения точек задача может не иметь решения или иметь бесконечно много решений. Задач этого типа — 23.

S (solvable) — разрешимые задачи. Их 72.

U (unsolvable) — неразрешимые задачи. Таких 29.

Если соответствующее поле в таблице оставлено пустым, то ответ на сегодняшний день не известен. Пока это относится к 12 задачам.

Задача 102 у Верника значилась как *S*-задача. Майерс показал, что она является задачей *L*.

Верник так или иначе установил тип 90 из этих 139 задач. 49 задач остались нерешёнными или неклассифицированными. Интересно, что после Верника остались нерешёнными задачи, которые позднее получили своё конструктивное решение.

Следующий прорыв через 14 лет, в 1996 году, сделал Майерс в [3], который решил ещё 29 из вышеупомянутых 49 задач и исправил решение Верника 102-ой задачи.

Долгое время не была известна судьба оставшихся 20 задач. Существует мнение, что все задачи списка Верника, которые вообще имеют решение, решены Майерсом и остальные задачи решения не имеют (даже если это пока не установлено). Майерс также был первым, кто применил к неразрешимым задачам технику сведения задачи к кубическому уравнению, про которое известно, что его корни являются (в общем случае) непостроимыми с помощью циркуля и линейки. Именно с помощью этой техники позднее было доказано, что некоторые задачи не имеют решения. Для задач №№90, 109, 110, 111 это сделал в 2009 году Шпехт [4], а для задач №№81, 132, 136, 138 — А. В. Устинов [5] тоже в 2009 году (оба — через 13 лет после Майерса).

На сегодняшний день остались нерешёнными 12 задач. Надеюсь они будут решены быстрее, чем за 14 лет, разделяющие самые значимые статьи по этому вопросу.

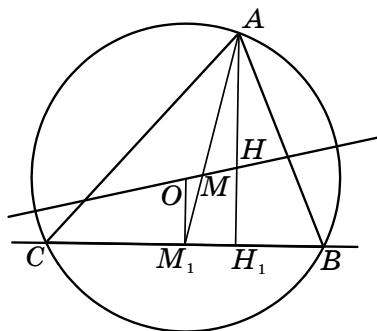
Меня, как учителя, больше интересуют задачи списка Верника, которые имеют решение. Важно понять, как их использовать в учебном процессе и в какой именно момент этого процесса можно давать ту или иную задачу. Для этого, очевидно, их надо все решить. Это сделано в моей книжке [15]. Кроме собственно решений она снабжена навигатором по этим решениям: по сложности и по применённой (мной) идее. Ниже приводятся избранные, самые яркие на мой взгляд решения некоторых задач списка Верника. Для четырёх задач этого списка мне известно только алгебраическое решение. Это задачи №57 (A, I, H) , №69 (O, M_1, I) , №82 (O, L_1, I) и №136 (H_1, H, I) .

Дорогие читатели, если Вы или Ваши ученики сможете найти геометрическое решение хотя бы одной из этих задач, напишите пожалуйста мне по адресу srgblv@ya.ru. Я буду Вам очень и очень признателен.

Перейдём теперь к избранным решениям задач из списка Верника (нумерация как раз и идёт по этому списку).

Задача №70. (O, M, H_1)

Эта задача — замечательный пример применения теоремы Эйлера.



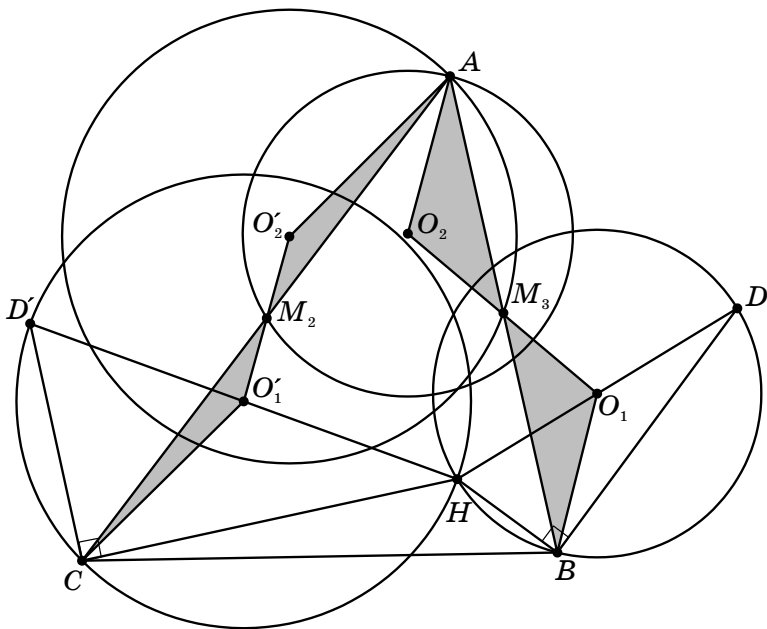
1. Проведём отрезок $MH = 2OM$;
2. Проведём прямую $h_{a_x} = HH_1$, содержащую высоту h_a

треугольника;

3. Проведём прямую $a_x \perp h_{a_x}$, содержащую сторону BC ;
4. Проведём отрезок $OM_1 \perp a_x$;
5. Построим отрезок $MA = 2MM_1$ на прямой MM_1 ;
6. Построим теперь описанную окружность по центру O и радиусу OA . Она пересекает прямую a_x в точках B и C .

Задача №87. (M_1, M_2, H)

Долгое время в этой задаче мне было известно лишь алгебраическое решение. Я приведу здесь блестящее геометрическое решение, найденное моим учеником¹.



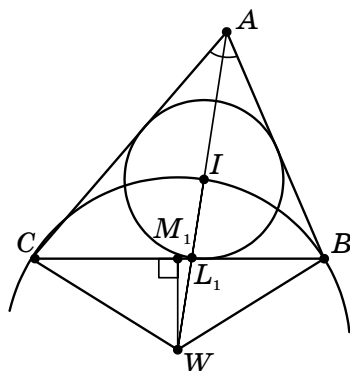
Пусть точка D симметрична точке M_2 относительно точки M_3 . Тогда BCM_2D — параллелограмм. Так как прямая BH перпендикулярна стороне CM_2 этого параллелограмма, то она перпендикулярна и другой его стороне BD . Значит, треугольник

¹ Ярославом Колотилковым, учеником 9 класса школы №1199 «Лиги Школ».

HBD прямоугольный и середина O_1 отрезка HD является диаметром его описанной окружности. Отразим теперь точку O_1 относительно точки M_3 чтобы получить точку O'_1 . Из равенства треугольников BO_1M_3 и AO_2M_3 (по двум сторонам $M_3O_1 = M_3O_2$, $BM_3 = AM_3$ и углу между ними) следует, что отрезок AO_2 равен BO_1 , то есть половине уже построенного отрезка HD . Следовательно, точка A лежит на окружности с центром в точке O'_1 и радиусом $\frac{1}{2}HD$.

Построив аналогичную конструкцию отражая точку M_3 относительно M_2 , получим, что точка A лежит на окружности с центром в точке O'_2 и радиусом $\frac{1}{2}HD'$ (обозначения см. на рисунке). Таким образом, можно найти точку A как точку пересечения двух окружностей и окончательно восстановить треугольник.

Задача №112. (M_1, L_1, I)

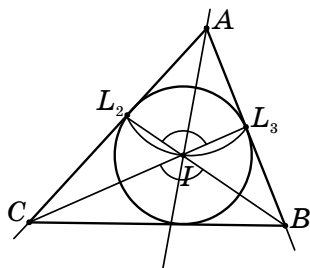


1. Строим прямые $a_x = M_1L_1$ и $l_{a_x} = IL_1$;
2. Опускаем перпендикуляр $IK_1 \perp a_x$. Тогда $IK_1 = r$ — радиус вписанной окружности;

5. Серединный перпендикуляр к отрезку AW_1 и прямая t пересекаются в точке O — центре описанной окружности;
6. Описанная окружность пересекает прямую a_x в точках B и C .

Задача №60. (A, L_2, L_3)

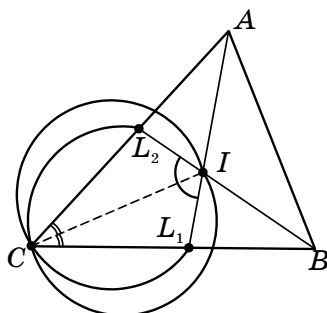
В этой задаче хорошо работает тот факт, что из центра вписанной окружности сторона BC треугольника видна под углом $90^\circ + \frac{A}{2}$.



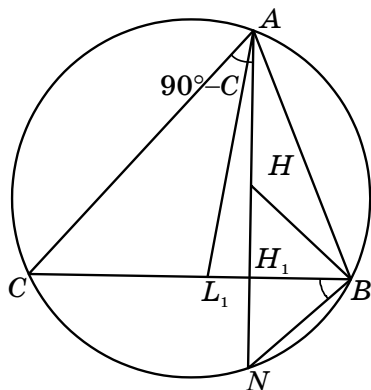
1. Так как угол A известен, то на отрезке L_1L_2 построим сегмент, вмещающий угол $90^\circ + \frac{A}{2}$;
2. Проткнув его теперь биссектрисой угла A , получим инцентр I ;
3. Точки B и C получаются теперь как пересечение прямых: $L_2I \cap AL_3 = B$, $L_3I \cap AL_2 = C$.

Задача №139. (I, L_1, L_2)

Ещё один изящный пример применения той же идеи.



Задача №55. (A, H, L_1)



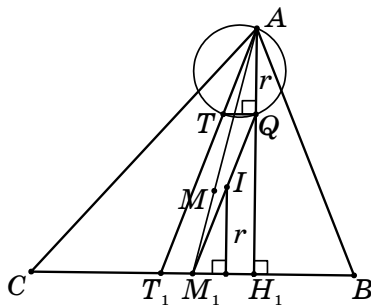
1. Известно, что $\varphi = \angle L_1AH = \frac{B-C}{2}$;
2. Построим прямые $h_{a_x} = AH$ и $a_x \perp h_{a_x}$ (через L_1);
3. Пусть точка N_1 симметрична H относительно a_x ;
4. Простой подсчёт даёт, что

$$\angle ABN_1 = B + \angle H_1BN_1 = B + \angle CAH_1 = B + 90^\circ - C = 90^\circ + 2\varphi.$$

Строим на отрезке AN_1 сегмент, вмещающий угол $90^\circ + 2\varphi$. Он пересекает прямую a_x в точке B . Дальнейшее очевидно.

Задача №43. (A, M, I)

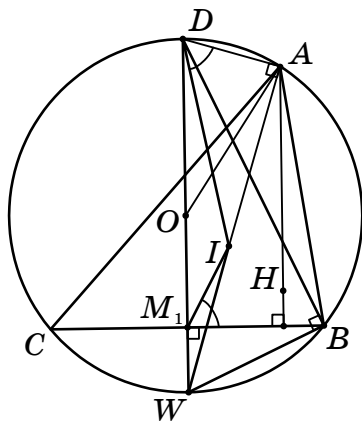
Это самая сложная задача на построение из списка Верника!



1. Продлим отрезок AM на половину своей длины:
 $MM_1 = \frac{1}{2} AM$;
2. Проведём $AT \parallel IM_1$ и отложим на этой прямой отрезок $AT = IM_1$;
3. Построим окружность ω_1 на AT как на диаметре.
4. Пусть $\omega_1 \cap (IM_1) = P$, известно, что $AP = r$ (докажите!)
5. Строим теперь вписанную окружность $\omega(I, r)$ и касательные к ней из точки A ; Эти касательные пересекают перпендикуляр к прямой AP , опущенный из точки M_1 в точках B и C .

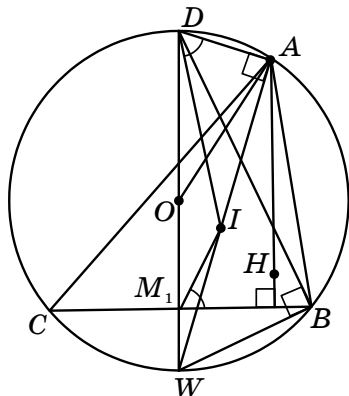
Задача №57. (A, I, H)

Предположим, что задача решена и обозначения выбраны так, как на рисунке.



Докажем, что треугольники IDW и IM_1W подобны. В самом деле, у них есть общий угол $\angle AWD = \angle IAH = \varphi = \frac{B-C}{2}$. Покажем, что их стороны пропорциональны. В прямоугольном треугольнике BDW с проведённой высотой BM_1 воспользуемся тем, что квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу. Имеем $BW^2 = WD \cdot WM_1$. По теореме трилистника

$BW = IW$. Тогда $IW^2 = WD \cdot WM_1$. Последнее соотношение означает пропорциональность сторон треугольников IDW и IM_1W , а в совокупности с указанным равенством углов это доказывает их подобие.



Обозначим теперь длины отрезков как на рисунке. Пусть $AI = a$, $AE_1 = b = \frac{AH}{2}$, $IW = x$. Тогда отрезок AW с одной стороны равен $x + a$. С другой стороны он равен сумме длин оснований равнобедренных треугольников, образованных пересечением прямых AW и M_1E_1 . Значит

$$x + a = 2y \cos \varphi + 2b \cos \varphi,$$

откуда $WM_1 = y = \frac{x + a}{2 \cos \varphi} - b$.

Так как из прямоугольного треугольника AWD следует, что $WD = z = \frac{x + a}{\cos \varphi}$, то указанное выше подобие запишется в виде

$$x^2 = yz = \left(\frac{x + a}{2 \cos \varphi} - b \right) \cdot \frac{x + a}{\cos \varphi}.$$

Корень x этого квадратного уравнения строится с помощью циркуля и линейки. После этого восстановить треугольник не составляет труда.

Литература

- [1] Euler L. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum. — *Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, 11 (1767) 103-123.
- [2] Wernick W. Triangle Constructions with Three Located Points. — *Mathematics Magazine*, 55 (1982), pp. 227–230.
- [3] Meyers, L.F. Update on William Wernick's «triangle constructions with three located points». — *Mathematics Magazine* 69(1) (1996), pp. 46–49.
- [4] Specht, E. Wernicks liste (in German), <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/wernick/>
- [5] Устинов А. В. Можно ли восстановить треугольник по основаниям биссектрис?. *Журнал «Потенциал»: Математика, Физика, Информатика*, 10 (2013), 41-50.
- [6] Marinkovic V., Janicic P. Towards Understanding Triangle Construction Problems. — *Intelligent Computer Mathematics*, 7362, (2012), pp. 127–142.
- [7] Sandifer E. How Euler Did It. The Euler line. — *MAA Online*. 2009.
- [8] Фурсенко В. В. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. — *Математика в школе*, 5,6 (1937).
- [9] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
- [10] Учим математике-4 (материалы открытой школы--семинара учителей математики)/ Под. ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2014.
- [11] Кушнир И. А. Геометрия на баррикадах. — К.: Факт, 2009.
- [12] Кушнир И. А. Геометрия. Поиск и вдохновение. — М.: МЦНМО, 2013.
- [13] Кушнир И. А. Геометрия на баррикадах-2. — К.: Знання України, 2011.
- [14] Ефремов Д. Новая геометрия треугольника. Одесса, Типография Бланкоиздательства М. Шпенцера, д. №64, 1902.
- [15] Беляев С. А. Восстановление треугольника по заданным точкам. — М.: МЦНМО, 2015. В печати.

Симедиана

Ю.А. Блинков,
Школа №218, г. Москва
yura_blinkov@zmail.ru,

В статье будет рассмотрено понятие симедианы. В отличие от медианы, симедиана не является широко известным геометрическим объектом, однако её рассмотрение вполне естественно, поскольку симметрия относительно биссектрисы — достаточно часто встречающийся прием.

Сразу оговорим, что свойства симедианы, которые будут рассмотрены, могут быть доказаны другими способами, в частности более сильными методами (инверсия, поляра, двойные отношения).

Мы же постараемся выбрать наиболее «школьный» подход, так как хотим показать, что эти свойства и задачи по силам и обычным детям.

Для начала рассмотрим определение симедианы.

1. Определение и антипараллельность.

А) Рассмотрим треугольник ABC , его медиану AM и его биссектрису AL (см. рис. 1). Пусть луч AS симметричен лучу AM относительно прямой AL , где S — точка пересечения этого луча с BC . Тогда отрезок AS называется *симедианой* треугольника ABC .

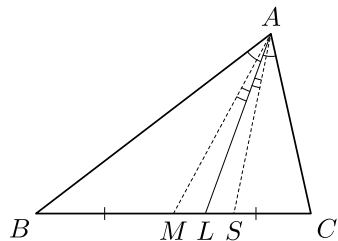


Рис. 1

Известно, что медиана треугольника ABC делит пополам не только сторону, к которой она проведена, но и любой отрезок, параллельный этой стороне, с концами на двух других сторонах.

Попробуем сформулировать и доказать аналогичное утверждение для симедианы. При симметрии относительно биссектрисы отрезок, параллельный BC перейдет в антипараллельный (см. рис. 2, а также рис. 4–7).

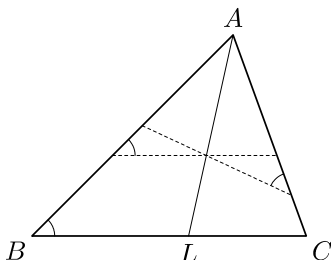


Рис. 2

Б) В треугольнике ABC проведен отрезок B_1C_1 , антипараллельный стороне BC , с концами на сторонах AB и AC соответственно. Отрезок AS является симедианой треугольника ABC т. и т. т., когда он делит B_1C_1 пополам.

Доказательство:

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы угла A . Тогда отрезок B_1C_1 перейдет в отрезок B_2C_2 , который параллелен BC , а его середина — в середину B_2C_2 (см. рис. 3). Для завершения доказательства достаточно использовать гомотетию с центром A .

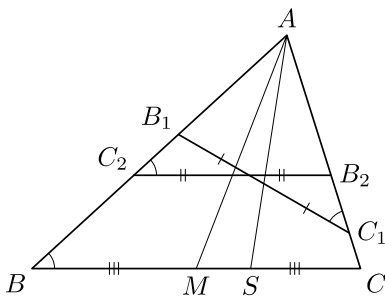


Рис. 3

Комментарий. И наоборот, медиана в треугольнике ABC — симедиана в AB_1C_1 .

На самом деле, доказано следующее: если один треугольник можно перевести в другой композицией симметрии относительно биссектрисы угла и гомотетии с центром в вершине угла, то прямая, содержащая медиану одного треугольника (проведенную из этой вершины) содержит симедиану другого и наоборот.

Возможны различные случаи расположения точек (см. рисунки 4–7).

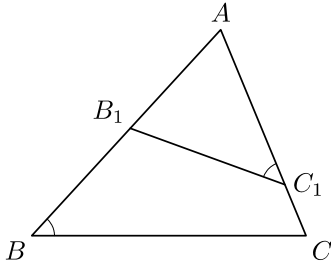


Рис. 4

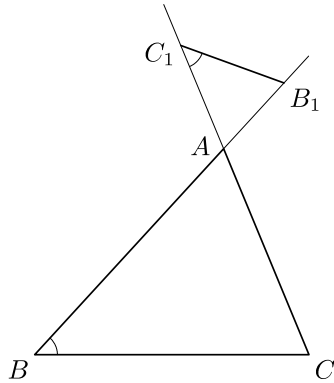


Рис. 5

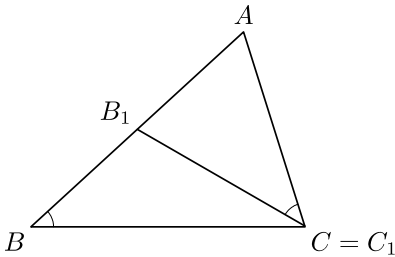


Рис. 6

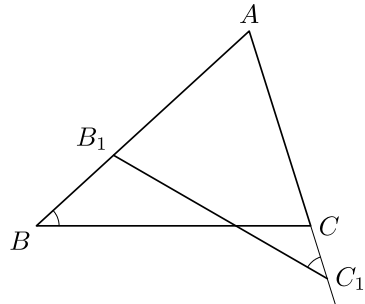


Рис. 7

2. Другое определение

Мы знаем, что медиана делит сторону и, соответственно, площадь пополам. А в каком отношении делит сторону (площадь) симедиана? Итак, другое определение симедианы:

AS — симедиана т. и т. т., когда $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Докажем эквивалентность определений.

Доказательство:

1) Пусть AS — симедиана, $AB = c$, $AC = b$. Проведем перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника из точек M (середина BC) — h_c и h_b — и S — h'_c и h'_b , см. рис. 8.

Из подобия прямоугольных треугольников следует, что

$$\frac{h'_c}{h_b} = \frac{AS}{AM} = \frac{h'_b}{h_c}, \text{ то есть } \frac{h'_c}{h'_b} = \frac{h_b}{h_c}.$$

Тогда

$$\frac{BS}{CS} = \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c \cdot h'_c}{b \cdot h'_b} = \frac{c \cdot h_b}{b \cdot h_c} = \frac{c^2}{b^2},$$

что и требовалось.

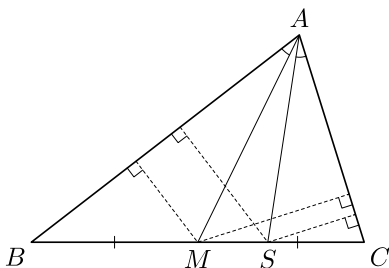


Рис. 8

2) Пусть S лежит на отрезке BC и $\frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Если провести симедиану, то она разделит отрезок в таком же отношении, то есть совпадет с AS .

3. Симедиана как г.м.т.

Известно, что расстояния от вершин B и C до прямой, содержащей медиану AM равны. Следовательно, если взять произвольную точку P на медиане треугольника, то $S_{ABP} = S_{ACP}$, откуда в частности следует, что расстояния от точки P до прямых, содержащих стороны AB и AC треугольника ABC обратно пропорциональны этим сторонам.

Посмотрим, как обстоит дело с симедианой.

Луч, содержащий симедиану — г.м.т. S , лежащих внутри угла BAC таких, что:

А) расстояния от вершин B и C до прямой AS пропорциональны квадратам сторон AB и AC .

$$\text{Б) } \frac{S_{ABS}}{S_{ACS}} = \frac{c^2}{b^2}.$$

В) расстояния до сторон пропорциональны сторонам, то есть

$$\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}.$$

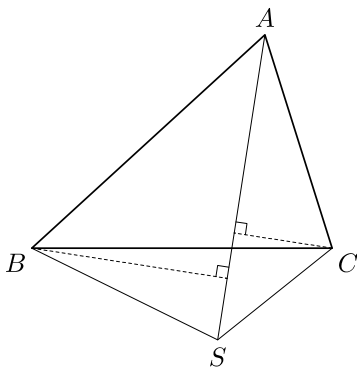


Рис. 9

Доказательство:

Заметим, что и для точки S , не лежащей на стороне BC , отношения площадей сохраняется и равно отношению перпендикуляров, проведенных к прямой AS из точек B и C (см. рис. 9).

Дальнейшее рассуждение (в обе стороны) предоставляем читателю.

После того, как с понятием симедианы разобрались, можно поискать на ней хорошие точки...

4. Симедиана и подобие

В геометрических задачах очень часто возникает следующая конструкция.

Дан треугольник ABC и точка X внутри него так, что

$$\angle BAX = \angle ACX, \angle CAX = \angle ABX$$

(см. рис. 10).

Оказывается, AX содержит симедиану треугольника ABC .

Доказательство:

Заметим, что треугольники ABX и CAX подобны. Далее, используя отношения соответствующих элементов в подобных треугольниках, достаточно воспользоваться любым из утверждений: 3б или 3в.

Комментарий. Также можно использовать, что AX содержит биссектрису угла BXC .

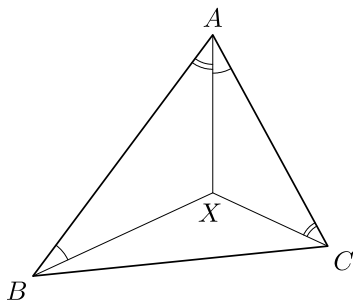


Рис. 10

5. Гармонический четырехугольник

Теперь добавим в конструкцию окружность, описанную около треугольника ABC .

1. Пусть симедиана AS пересекает окружность, описанную около треугольника ABC в точке D (см. рис. 11). Тогда $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Доказательство:

Из второго определения симедианы:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BS}{CS} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

С другой стороны, используя, что четырехугольник $ABCD$ вписанный, получим: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot DB \cdot \sin \angle ABD}{AC \cdot DC \cdot \sin \angle ACD} = \frac{AB \cdot DB}{AC \cdot DC}$, откуда следует искомое равенство.

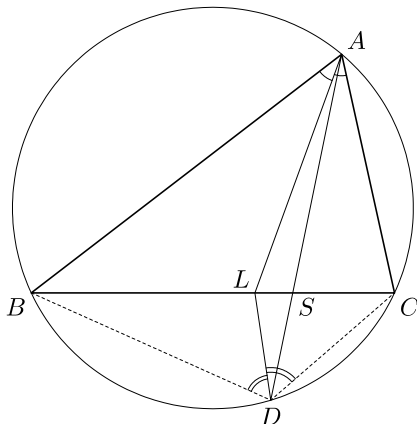


Рис. 11

Верно и обратное утверждение (докажите!):

2. Если точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC и $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, то AD содержит симедиану.

Следствия (верны и обратные утверждения):

А) биссектрисы углов A и D пересекаются на стороне BC .

Б) $AB \cdot DC = AC \cdot DB$ (такой вписанный четырехугольник называется гармоническим)

Сразу получим свойство и признак гармонического четырехугольника.

В) Четырехугольник — гармонический т. и т. т., когда его диагонали являются симедианами.

И еще один любопытный факт.

Г) точка D лежит на окружности Аполлония треугольника ABC .

Докажите самостоятельно.

Комментарий: Отметим, что точка X из утверждения п.4 — середина AD .

6. Основная задача

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в точках B и C , пересекаются в точке P . Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC (см. рис. 12).

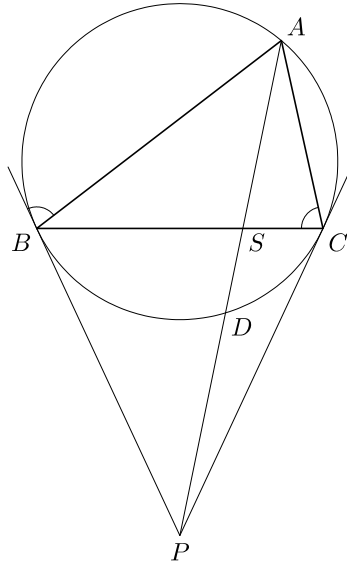


Рис. 12

Доказательство: Запишем отношение площадей и используем угол между касательной и хордой, равенство касательных и теорему синусов для треугольника ABC .

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \angle ABP}{AC \cdot PC \cdot \sin \angle ACP} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \angle C}{AC \cdot PC \cdot \sin \angle B} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Далее воспользуемся утверждением 3б.

Задачи

Рассмотрим несколько задач на применение полученных фактов. Отметим, что большинство предложенных задач без предварительной подготовки вызовут затруднения даже у сильных школьников, не знакомых с понятием симедианы.

Но если разобраться в этой конструкции, то задачи будут по силам и «непрофессионалам».

На самом деле, с симедианой сталкивался почти любой школьник. Например, в следующей задаче.

1. Докажите, что высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении квадратов катетов.

Решение: Пусть M — середина гипотенузы AB , CH — высота (см. рис. 13). Тогда $\angle ACH = \angle ABC = \angle BCM$, то есть CH — симедиана. Используя *второе* определение симедианы, получим требуемое.

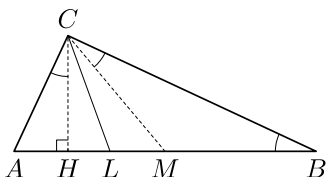


Рис. 13

Комментарий. Стандартное доказательство этого факта — через средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.

Следующая задача предлагалась на олимпиаде в качестве сложной.

2. (Московская математическая олимпиада 2008) Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 — середина

стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1 .

Решение: Заметим, что A_1C_1 — отрезок,

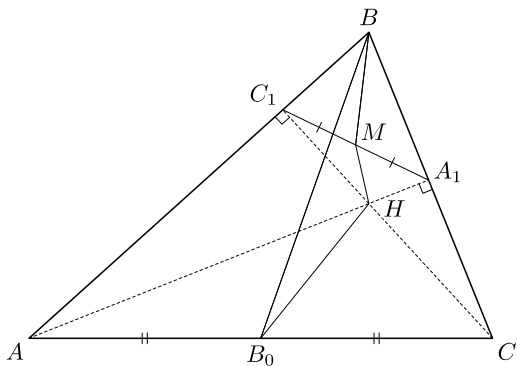


Рис. 14

антипараллельный AC (см. рис. 14). Из 16 следует, что прямая, симметричная BB_0 относительно биссектрисы угла ABC проходит через середину A_1C_1 (точку M).

Аналогично, прямая, симметричная HB_0 , относительно биссектрисы угла AHC , проходит через точку M .

Решить следующие три задачи без знания *основной задачи* весьма непросто.

3. (Всероссийская олимпиада по математике 1995, 4 этап) В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность S , пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности S в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения P лежит на прямой, содержащей медиану треугольника ABC , проведенную из вершины B .

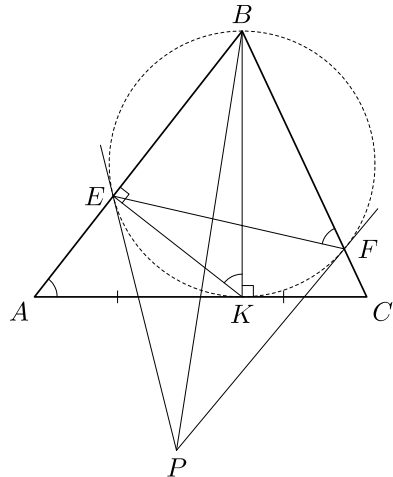


Рис. 15

Решение: Из *основной задачи* следует, что BP — симедиана в треугольнике BEF (см. рис. 15). Тогда достаточно доказать, что EF — антипараллель к AC (см. 16). Действительно, $\angle BAK = \angle EKB = \angle EFB$, что и требовалось.

4. Две окружности пересекаются в точках M и K . Из точки A одной окружности проводятся лучи AM и AK , пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно.

Докажите, что все медианы треугольника ABC , проведенные из вершины A , пересекаются в одной точке.

Решение: Заметим, что точки B , M , K и C являются вершинами вписанного четырехугольника (см. рис. 16). Из этого следует, что MK антипараллель к BC , поэтому медиана в треугольнике ABC содержит симедиану треугольника AMK (см. 16). Из *основной задачи*,

Теперь рассмотрим известную задачу, которая просто решается при помощи симедианы.

6. (теорема о симметричной бабочке)

На диаметре KW окружности взята точка M . Лучи MA и MD таковы, что $\angle KMA = \angle WMD < 90^\circ$ (A и D — точки пересечения этих лучей с окружностью лежат в одной полуплоскости относительно прямой KW). Докажите, что все прямые AD , построенные описанным образом, пересекают прямую KW в одной и той же точке P .

Решение: Проведем через M хорду BC , перпендикулярную KW (см. рис. 18). Пусть AM пересекает окружность в точке E . Тогда $\angle EMW = \angle AMK = \angle DMW$. Следовательно, точки E и D симметричны относительно диаметра KW , то есть дуги BD и CE , а значит и $\angle BAD$ и $\angle CAE$ — равны. Так как AM является медианой треугольника ABC , то AD — симедиана. Далее используем основную задачу.

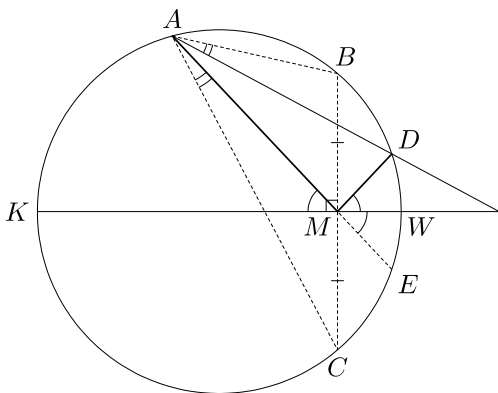


Рис. 18

7. (Всероссийская олимпиада по геометрии 2013) В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Из точки H провели перпендикуляры к прямым B_1C_1 и A_1C_1 , которые пересекли лучи CA и CB в точках P и Q соответственно. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки C на прямую A_1B_1 , проходит через середину отрезка PQ .

Решение: Так как отрезок A_1B_1 антипараллелен AB , то перпендикуляр из точки C на прямую A_1B_1 и высота CC_1 симметричны относительно биссектрисы угла C (см. рис. 19). Поэтому достаточно доказать, что CH — симедиана в треугольнике PCQ .

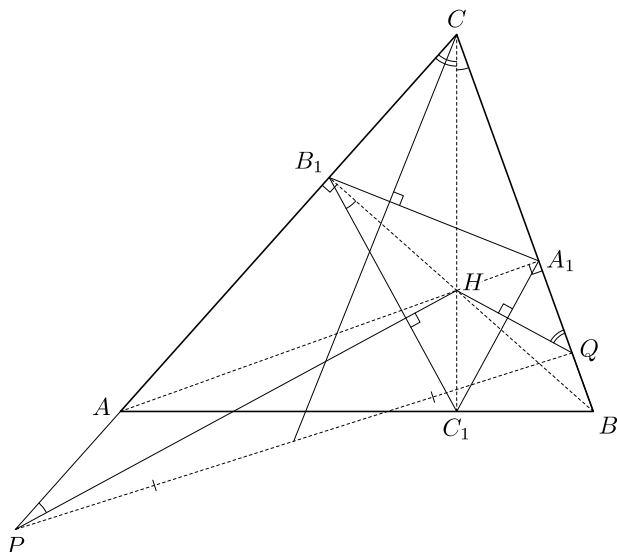


Рис. 19

Используя равенство вписанных углов и прямоугольные треугольники, получим, что $\angle QCH = \angle BCH = \angle BB_1C_1 = \angle CPN$. Аналогично, $\angle PCH = \angle CQH$, то есть CH — симедиана (см. утверждение п. 4 и рис. 10).

8. (Всероссийская олимпиада по математике 2009) В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω , описанную около треугольника ABC , в точках B и E . Окружность ω , построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F . Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD , содержит медиану треугольника ABC .

Решение: Докажем, что BF — симедиана (см. рис. 20).

Пусть K — точка пересечения FD с окружностью Ω . Тогда KE — диаметр окружности, то есть точка K — середина дуги ABC . В четырехугольнике $ABCF$ биссектрисы углов B и F пересекаются на стороне AC (в точке D), то есть он гармонический (следствие 5а) и его диагонали являются симедианами (следствие 5б).

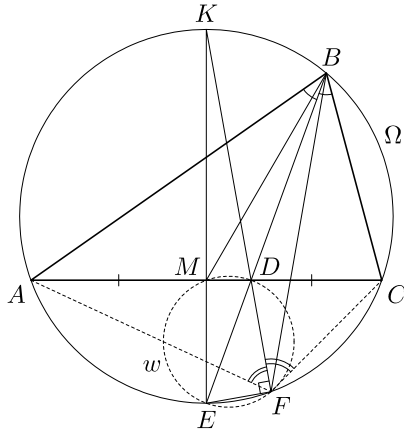


Рис. 20

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в неравностороннем треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой и т. т., когда этот треугольник — прямоугольный.

2. CI — биссектриса угла BCA треугольника ABC . CD — симедиана треугольника ABC . Точка D — пересечение симедианы с описанной окружностью. Докажите, что DI — биссектриса угла BDA .

3. Окружность S_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC , окружность S_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB . Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC .

4. (Всероссийская олимпиада по геометрии 2008) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC , серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A' и B' , прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1 . Докажите, что CC_1 — симедиана треугольника ABC .

5. Касательные, проведенные в точках B и C к окружности, описанной около треугольника ABC , пересекаются в точке P . Из P опущены перпендикуляры PP' и PP'' на прямые AB и AC соответственно. Докажите, что прямая, содержащая медиану AM треугольника ABC , перпендикулярна отрезку $P'P''$.

6. Точки A и A' инверсны относительно окружности ω , причем A' — внутри ω . Через A' проводятся хорды XY . Докажите, что центры вписанной и одной из внеписанных окружностей треугольника AXY — фиксированы.

7. Касательная в точке B к описанной окружности S треугольника ABC пересекает прямую AC в точке K . Из точки K проведена вторая касательная KD к окружности S . Докажите, что BD — симедиана треугольника ABC .

8. (Всероссийская олимпиада по геометрии 2008) Прямые, симметричные диагонали BD четырехугольника $ABCD$ относительно биссектрис углов B и D , проходят через середину диагонали AC . Докажите, что прямые, симметричные диагонали AC относительно биссектрис углов A и C , проходят через середину диагонали BD .

9. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E . Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X . Докажите, что AX — симедиана треугольника ABC .

10. Докажите, что если из точки D (пересечения симедианы CS с описанной окружностью треугольника ABC) опустить перпендикуляры DD_1 , DD_2 и DD_3 на прямые AC , AB и BC соответственно, то D_2 — середина отрезка D_1D_3 .

11. (Московская математическая олимпиада 2007) Точки A' , B' и C' — середины сторон BC , CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH — его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M , отличную от H , то $\angle ABM = \angle CBB'$.

12. (Московская устная олимпиада по геометрии 2009) К двум окружностям w_1 и w_2 , пересекающимся в точках A и B , проведена их общая касательная CD (C и D — точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD , чем A). Прямая, проходящая через A , вторично пересекает w_1 и w_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P . Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL .

Вопросы здравомыслящего человека или «как до этого догадаться?»

С.Л. Синякова,
школа № 315, г. Москва
sin-stella-leo@yandex.ru

*P.S. Клише и штампы.
Хорошо или плохо?*

Когда мы рассказываем решение красивой задачи в классе или обсуждаем ее вместе с учениками, после получения ответа или даже раньше часто проносится вздох с вопросом: «Как до этого догадаться?» Слышали такое?

Действительно, как? Сказать: «Не знаю»? Или честно признать, что все приходит с опытом, и, ограничившись этим, частично убить интерес детей к творчеству и познанию? Получается, что прежде, чем решишь сотню похожих задачек, ничего не выйдет...

Нам думается, что тут дело еще и в другом. А именно, в умении человека задавать вопросы. Нужные. И вовремя. Каждый раз при исследовании подходов к любой проблеме. Сначала — вопросы другим, и внимательно выслушивать ответы. На следующем этапе — себе, и учиться, учиться, учиться на них отвечать. А еще — ставить вопросы к условию задачи. И задавать их в процессе решения. Пока не возникает никаких вопросов, у человека нет никаких шансов справиться с проблемой.

Идея настоящего текста — привести примеры вопросов, которые мы можем задавать при решении различных задач, преимущественно таких, которые учителю выгодно *акцентировать* и впоследствии повторить на других задачах, добиваясь возникновения подобных вопросов уже у учащихся. И, конечно, проиллюстрировать конкретными примерами. Начнем?

«Теория»

1. ***Вылить воду из чайника...** Ленимся вовремя и нужным образом. Если бы человек не ленился, не было бы изобретено колесо.*

Умение сводить задачу к уже решенной — великое дело. Если есть возможность не решать все заново, это приводит к быстрому и практически гарантированному успеху. Просто надо немного подумать...

Вероятно, каждый учитель математики в какой-то момент рассказывает детям анекдоты про математиков, например, как перед математиком поставили задачу вскипятить чайник. Математик ее решил: «Наливаем воду. Зажигаем газ. Ждем, когда закипит.». И тогда задачу поменяли: а что, если вода в чайнике уже есть? Математик, как всегда, задумывается, и произносит: «Выливаем воду из чайника и сводим задачу к предыдущей!» Смешно? Да. Но и запоминается изумительно.

2. ***Вини-Пух.** Вопросы для детского садика старшего школьного возраста.*

«Вини-Пух и Пятачок начали строить домик для ослика 3 числа, а закончили — 5 того же месяца. Сколько дней они строили дом?»

«У Винни-Пуха и Пятачка было конфет поровну. Пятачок подарил Винни-Пуху на день рождения несколько конфет, после чего у Винни-Пуха стало на 4 конфеты больше, чем у Пятачка. Сколько конфет подарил Пятачок?»

Ошибки в простейших рассуждениях. Очевидно ли, что, сделав n распилов, мы распилим бревно не на n , а на $n + 1$ частей? Оказывается, далеко не всегда. И даже старшеклассникам надо прокрутить подобные вопросы не один раз. В нужный момент. А если облечь их в детскую красивую формулировку, то она (и, главное, ситуация!) становится вполне узнаваемой. И в следующий раз ошибки не будет.

3. ***Прием «Повторюшка».** Конфигурации — разные. Буквы и действия — те же.*

С первого взгляда — просто магия. Ловкость рук, и никакого мошенничества. Простите, ловкость не рук, а мозгов! Встречали? В задаче две конфигурации, но одно решение с точностью до буквы!!! (Буквы желательно ставить во второй конфигурации такие же, как в первой. Это сильно упрощает рассуждения, раза в два.)

4. **«Я оглянулся посмотреть...»** Решил — молодец. Оценил правильность — вдвойне!

В простейшем варианте так: если скорость пешехода в твоём ответе 200 км/ч, задумайся, не поискать ли ошибку! Полезно выработать привычку анализировать ответы и тестировать выводы на правдоподобие. Кстати, никто не запрещает проверить ответ на частных случаях.

5. **Детские игрушки.** «Сколько треугольничков на картинке?»
Увидеть в чертеже знакомую картинку.

Некоторые конфигурации встречаются в геометрических задачах довольно часто, и действия в таких случаях надо производить довольно стандартные. Например, две окружности с общей касательной (надо достраивать «волшебный прямоугольный треугольник», из которого все считается). Проблема только в том, что эти конфигурации надо уметь разглядеть за сложной общей картинкой или за накрученным текстом условия.

И ещё одна сложность: видимо, психологически в первую очередь напрашивается рассмотрение наиболее мелких, «не заштрихованных» частей чертежа, в то время, как знакомая картинка может состоять из более крупных деталей.

6. **Если плохо видно...** Сделай, чтобы было видно хорошо!
Отобрази на картинке максимум данных. Если нужно, сделай зумм. Выносные чертежи и другие картинки полезны.

Зачастую при решении сложной стереометрической задачи общий стереометрический чертеж с изображением всех участвующих фигур вообще не нужен, а какой-либо вообще стереометрический чертеж нужен только для привязки выносных чертежей друг к другу с помощью обозначений (конкретных названий вершин многогранника, например). Тогда решение большой задачи распадается

на решение нескольких планиметрических задач с соответствующими (выносными) чертежами. Важно только вовремя понять, каких именно.

7. *Не спешим работать. А вдруг не придется? Не торопись. Вдруг успеешь?*

Никогда (почти) не стоит бросаться реализовывать первую пришедшую в голову мысль. Сначала надо ее проанализировать. Ведет ли она вообще к решению? Нет ли рядом другой, значительно более плодотворной идеи? Кратко оцениваем перспективы и соответствующий объем работ. См. пункт 1.

8. *«Если в первом акте пьесы на стене висит ружье, то в последнем акте оно непременно должно выстрелить».*

А.П. Чехов

Если задача не решается, всегда полезно перечитать условие. Все ли я использовал, или есть незадействованные данные? Скорее всего, без их учета ничего не выйдет...

9. *Очень уж лень решать «как положено»...*

Допустим, Вы знаете надежный, «бронепробивный», но требующий значительного объема работ, либо не очень лично Вам симпатичный метод, которым задача гарантированно может быть решена. Стоит ли его применять? Возможно. Но не ранее, чем Вы убедитесь, что нет более легкого и эффективного способа справиться с задачей.

10. *«Почему вилка одна?» Где в условии спрятаны данные? Немного о Гуманизме составителей задачи.*

В старом советском кукольном мультике Колобок-следователь разыскивал пропавшего мальчика. И вот он читает записку с требованиями «похитителей» ребенка. «Принесите в полночь на кладбище *шесть котлет и одну вилку*». И Колобок, уцепившись за нелогичность (?) требования, раскручивает «преступление», оказывается, что мальчик сбежал сам. Как он это делает? Очень просто. Он задает себе вопрос: *«Почему вилка одна?»* И верно отвечает на него.

Зачем дано такое-то условие? Где я это видел? Уходим в свободные ассоциации.

Отпускаем себя на свободу, снимаем те ограничения, которые, кажется, накладывает тематика задачи или структура ее условия. Иногда удается взглянуть на проблему с другой стороны, и там-то как раз и находится наиболее красивый и быстрый путь к решению!

Да, не всегда составители формулируют задачу так, чтобы она стала сложнее. Часто именно в формулировке условия содержатся явные или скрытые подсказки. Например... *Не все скобки стоит бросать раскрывать!*

11. Что делать, если не знаешь, что делать? Делать, что знаешь. Например, рисовать.

Не секрет, что не для каждой задачи решение приходит мгновенно. Иногда требуются длительные размышления и, в первую очередь, наблюдения. Так сказать, решаем *методом внимательного рассмотрения*.

Но надо с чего-то начинать... С чего? С того, что можно сделать в данной ситуации. С привычного. А визуализация условия — вообще очень мощное орудие. Так что пишем и рисуем. Или рисуем и пишем. А дальше — анализируем.

12. Нельзя объять необъятное. «Я бы взял частями, но мне нужно сразу». А нужно ли сразу? Может все-таки возьмете частями?

Внимательно читаем условие. Не надо делать лишнее! Например, при решении задач с параметром графическими методами с применением математического анализа не надо проводить полное исследование функции. А при решении уравнений и неравенств с корнями далеко не всегда надо решать все неравенства и находить ОДЗ полностью. Иногда это даже невозможно, а не только не необходимо...

Или так: решить задачу на всем промежутке не представляется возможным. А вот если его разбить на части — другое дело!

13. Все числа проверить не удастся. Даже за бесконечное время. Следовательно...

Следовательно, надо начать с частных случаев. Только следим за логикой решения! Допустим, решается задача с вопросом про

единственность решения. Ведь таким образом мы не получим достаточного условия, а только необходимое! Получается метод перехода *от частного к общему*.

14. Слишком «плохо». Что-то здесь не так!

Если выбранный метод привел к длительным вычислениям, которым не видно конца, неплохо бы вернуться к началу и поискать либо элементарную ошибку, либо другой метод решения.

15. Как реализовать конфигурацию??? Например, не покатаешь ли шарик? Представь, как ты это делаешь... или: сколько нужно векторов?

Вопросы интерпретации и переформулировки условия. Пересказываем другими словами. С участием других объектов. Думаем, сколько параметров данного типа могут задать данную конфигурацию.

16. Чем страшнее, тем легче? Ищем тему.

Если не очевидно, как решить «честно», вспоминаем *свойства функций*! Значит, задача не про то, что показалось с самого начала. Громоздкие выражения, включающие различные элементы, например, многочлены и показательную функцию, или иррациональности и модули, или логарифмы и тригонометрию, зачастую являются подсказкой, а не усложнением.

17. Смелость города берет. Не ввести ли новые переменные? или параметры... добровольно.

Кто запретит, например, считать дискриминант с переменными?

Что здесь лишнее? Если видишь «чужеродную» величину — введи букву и смотри «сверху».

Структура выражения — великое дело! В конце концов, параметр — это всего лишь одна из переменных, выделенная из каких-то соображений. А замена переменных — дело знакомое.

18. Симметрия и гармония?! Храним и лелеем!

Симметрия выражений не только является «наводкой» на симметричный вид ответа, но и стимулом применять симметричные действия, включающие все строки условия. Кроме того, симметричные выражения — повод ввести новые переменные. Стандартные. Или применить оценки с помощью стандартных неравенств.

19. Мы сдаем алгебру и анализ? Правда?? Ой, оказывается, математика едина...

Все связано. С какой стороны будем смотреть? Иногда алгебра при ближайшем рассмотрении оказывается геометрией, геометрия — тригонометрией, а тригонометрия — математическим анализом...

Одна и та же задача может быть рассмотрена с различных точек зрения, и уже вопрос нашей компетентности и личных предпочтений — что выбрать.

А теперь приведем примеры задач и примеры вопросов, уже знакомых читателю. Кратко. Сами решения приводить не будем, это не является целью настоящей статьи. Оставим читателю получить удовольствие от решения самостоятельно!

Примеры

1. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B . Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A , а большую окружность — в точке C . Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC .

Вylить воду из чайника... в частности, «повторюшка». Ситуации внешнего и внутреннего касания.

«Я оглянулся посмотреть...» В этой задаче можно при правильном ответе заработать всего лишь « $\mp$ ». Это если рассмотреть одну конфигурацию. Или « $\pm$ ». Если две. А полностью решит тот, кто рассмотрит оба случая, а затем *оглянется* и проанализирует. Во втором случае *хорда не влезет в окружность!* То есть он не реализуется.

2. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей касательной касается третья окружность. Найдите ее радиус.

«Я оглянулся посмотреть...» Тут целых 6 возможных конфигураций! И, конечно, работает «повторюшка».

Конечно, если увидим знакомую картинку. С «волшебным прямоугольным треугольником», позволяющим найти расстояние между точками касания с общей касательной.

3. Окружности с центрами O и B радиуса OB пересекаются в точке C . Радиус OA окружности с центром O перпендикулярен OB , причем точки A и C лежат по одну сторону от прямой OB . Окружность S_1 касается меньших дуг AB и OC этих окружностей, а также прямой OA , а окружность S_2 касается окружности с центром B , прямой OA и окружности S_1 . Найдите отношение радиуса окружности S_1 к радиусу окружности S_2 .

Знакомая картинка. И более — ничего! При таком нагруженном условии. «Повторюшка». И ответ!

4. Параллелограмм $ABCD$ и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно.

А) Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

Б) Найдите DQ , если $AP = a$, $BC = b$, $BQ = c$.

Знакомая картинка. Теорема о касательной и секущей в действии! А дальше — отсечь все ненужное... И увидеть трапецию. Уже без окружностей.

5. Почему, например, систему $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$ решать не нужно?

Не торопись. Вдруг успеешь? Решений-то не больше двух, так как сводится все к квадратному уравнению. А два решения мы угадаем.

$$6. \begin{cases} (x+1)^{x^2} \leq (x+1)^2 \\ \log_{x-1}((x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})) > \frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5) \end{cases}$$

Очень уж лень решать «как положено»... Если делать все по порядку, то приятного мало. Начнем со второй строки! И — изумительная ОДЗ второго неравенства сведет решение первого неравенства к простому случаю!

7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

Очень уж лень решать «как положено»... И правильно. Определять, где именно наибольшее значение функции, вовсе не обязательно. Задачи с вопросами «Наибольшее значение больше... Наибольшее значение меньше...» и т.д. прекрасно сводятся к «Есть значение больше... Все значения меньше...» и т.д. (В дискретном случае — переход к равносильной совокупности или системе).

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, в него вписана окружность радиуса R . Лучи AB и DC пересекаются в точке M , отрезок OK — радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания этой окружности и прямой AM .

А) Докажите, что длина отрезка KM равна полупериметру треугольника CBM .

Б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиус окружности, вписанной в треугольник BMC , равен r .

«Если в первом акте пьесы на стене висит ружье, то в последнем акте оно непременно должно выстрелить». Нужно обязательно заметить и картинку с вневписанной окружностью (равные отрезки касательных и периметр треугольника, который по ним раскладывается), и подобные треугольники, связанные с описанной около четырехугольника окружностью.

9. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение (система) имеет решение. Укажите все решения уравнения (системы) при найденных значениях a .

$$\text{А) } 2\sqrt{2(x + |x|)} = 10 + a(x - 6); \quad \text{Б) } \begin{cases} y^2 + 2y + 2 = 5\frac{|x|}{x}; \\ y + 5 - a = (x - a)^2 \end{cases}$$

$$\text{В) } \begin{cases} y = \log_2\left(1 + \frac{|x|}{x} + \frac{|x-6|}{x-6}\right); \\ x^2 + (y - a - 1)^2 = 100 \end{cases}; \quad \text{Г) } \begin{cases} y = 2\log_3\left(1 + \frac{|x|}{x} + \frac{|x+9|}{x+9}\right); \\ (y - a - 2)^2 - (x + 9)^2 = 144 \end{cases}$$

Очень уж лень решать «как положено»... Можно было бы решить каждую из задач с помощью теорем о расположении корней квадратного трехчлена, но есть красивые графические и графически-аналитические решения. Так быстрее. А) — либо вращаем прямую, либо делаем замену и исследуем функцию; Б) — замена $t = x - a$ дает возможность построить график $a = a(t)$ (задача «в одну картинку»); В) — красивые кусочки окружностей; Г) — то же, с гиперболами, но проблема в том, что такие уравнения гипербол в школе не проходят. Выход — изобразить $y = (x + 9)^2 + 144$ и «нарезать на части». Попробуйте!

10. При каких значениях параметра a неравенство

$$|\sin^3 x - \cos^3 x + (\sin x - \cos x)(1 - 3\sin x \cos x) + 2\sin 2x - 2| < \sqrt{a - 2} - 3$$

не имеет решений?

Чем страшнее, тем легче? Ищем тему. Речь о наименьшем значении функции.

Не торопись. Вдруг успеешь? Наученные люди! Не спешите вводить замену и исследовать с производной кубическую функцию! Значение 0 достижимо! И достаточно доказать только это.

11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$ не имеет корней.

«Почему вилка одна?» «Вилка» спрятана. Зачем выражение поставили в скобки?

Чем страшнее, тем легче? Ищем тему. Конечно, функции! Монотонность.

Или... разложение на множители. После *симметризации* с помощью замены переменной!

12. В сферу радиуса 1 см вписан параллелепипед, объем которого равен $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ см³. Найти площадь полной поверхности параллелепипеда.

Видим и любим *единую математику*... И ищем *спрятанную «вилку»*. Катастрофически не хватает одного уравнения! Спасает знакомое неравенство Коши. (Помним, когда оно обращается в ра-

венство!) Оказывается, здесь реализуется «крайний случай»! Ограниченность дает недостающее уравнение.

13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых

$$\text{система } \begin{cases} 2^{|x|+2} + 3|x| + 5 = 4y + 3x^2 + 2a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ имеет единственное}$$

решение.

Симметрия и гармония. От знака x ничего не зависит. Следовательно, у нас есть *необходимое* условие единственности решения. Но дальше нужна проверка...

Свободные ассоциации. Зачем дано второе уравнение? Где я это видел? Окружность? Тригонометрия? Оказывается, всего лишь ограниченность переменных!

$$14. \text{Сколько решений имеет система } \begin{cases} y - x^2 = c \\ x - y^2 = c \end{cases} \text{ в зависимости}$$

от параметра c ?

Делай, что знаешь. Рисуй — и увидишь *симметрию*! Дальше — дело техники. И логики.

15. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{ax-7}(16x - 4x^2 - 15) = 2$$

имеет единственное решение?

Делай, что знаешь. Пробуй. Красивая замена $t = ax - 7$, $p = 2x - 4$ приводит к *симметризации*. Дальше — рисуем и вращаем прямую!

16. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{2a \sin x}{x} - \cos x = 0 \text{ имеет хотя бы одно решение на } [0; 1] ?$$

Делай, что знаешь. Замена. С обязательным отслеживанием множества значений новой переменной! А дальше — математический анализ. *Математика* ведь *едина*!

17. Найти все $a \in R$, при каждом из которых уравнение

$$\left(a - x^2 - \cos \frac{11\pi x}{4}\right) \sqrt{8 - ax} = 0 \text{ имеет на отрезке } x \in [-2; 3] \text{ не-}$$

четное число различных корней.

Очень «неудобная» задача. Нам представляется, что даже увидевшим *симметрию* (четность) первой скобки (*функции!*) и разбившим данный промежуток *на части* (симметричный отрезок и «остаток») решить ее не просто.

Советуем *нарисовать картинку* (выполнить чертеж.... простите, эскиз чертежа!).

Причем *не надо делать лишнее!* Для первой скобки достаточно видеть «коридор», «ожерелье», в котором расположен график.

А дальше — зумм той части, которую рассматриваем более подробно.

$$18. \frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

Домножаем на переменную.... *Осторожно*, по случаям! *Частями*. Неравенство, все-таки.

А потом — *рисуем!* И — можно решать.

Проблема... *кажется*, что пересечений от 0 до 2 нет. А почему? Обосновываем ограничениями *функции*.

Только концы с концами не сходятся. На $[0; 2]$. А вот если *частями*... То все в порядке! На $[0; 1]$ решений нет, как и на $[1; 2]$.

19. Правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ описана около шара радиуса 1. Пусть M — середина ребра BB' и N — середина ребра CC' . В шар вписан прямой круговой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN . Найдите объем этого цилиндра.

Если плохо видно. И не понятно, с чего начать. Разбиваем задачу *на части (подзадачи)* и делаем для каждой свой отдельный *выносной чертеж*.

1) Призма и шар. Находим размеры призмы. 2) Призма и секущая плоскость AMN . Находим расстояние от центра шара до плоскости AMN . 3) Шар и вписанный цилиндр. Находим объем цилиндра. Каждая из подзадач вполне решается и не представляет сложности.

20. Найдите все x , при которых равенство

$$2\log_{2+a^2}(4-\sqrt{7+2x}) = \log_{2+a^2x^2}(4-3x)$$

выполняется при любом значении a .

Что же здесь параметр, а что — переменная? Выходит, параметр — x , а переменная — a ?

Все числа проверить не удастся. «При любом»? То есть «при каждом»? То есть и при тех, которые «нам нравятся»! Значит, и при $a = 0$ (для данной задачи это позволяет сузить множество рассматриваемых значений x до конечного). С проверкой, естественно. *Переход от частного к общему* дает необходимое условие.

21. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$ имеет два корня.

Можно раскрыть модули и нарисовать в осях x ; a . Но... Не спешим работать, трезво оценим время, нужное для этого. Минимум — минут 15, а то и 40. *А вдруг не придется?*

Тогда... Воспользуемся *методом внимательного рассмотрения*. Ах, вот оно что!

Свойства функций! Знакомая монотонность. Только не на всей оси, а частями.

То есть мы не полностью исследуем функции... *Не надо делать лишнее!* Достаточно знать монотонность, непрерывность и пределы на бесконечности! И тогда у нас есть 1) наибольшее значение непрерывной функции; 2) отсутствие ее наименьшего значения (воображаемый график уходит на минус бесконечность)!

22. Высота конуса 20см, образующая 25см. Найти объем вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

Простенько. Но, пока не поймем, *как реализовать конфигурацию*, будут ошибки (во всяком случае, они здесь часто встречаются — ребята, как правило, изображают (или вычисляют) совпадающие основания конуса и полушара. Не выйдет! Элементарно не влезет. Итак, рецепт отсутствия ошибки: *представим*, как половинку апельсина накрывают конической крышкой.

И, конечно, нужен исключительно *выносной* планиметрический чертеж.

23. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит квадрат со стороной 2. Боковые

ребра равны $\sqrt{10}$. Точка M — середина SB , точка N лежит на ребре AB , причем $4BN = AB$. Найдите минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AD и прямой MN .

Представим! Что именно? Как это — прямая «протыкает» грани двугранного угла, и в эту конструкцию втиснут шарик? Самый маленький?

Как реализовать конфигурацию? «Руками»? Оказывается, шарик прокатывают в трехгранной призматической поверхности (трубе треугольного сечения)!

24. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x-4a+1|$$

имеет хотя бы один корень.

Задача-близнец номера 21. Разница лишь в том, что здесь нет очевидного длинного способа решения. Только *метод внимательного рассмотрения! И свойства функций.*

25. Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \arctg(\sqrt{3} \cos 8x) + \operatorname{arccctg}(\sin 3x),$$

а также все значения x , при которых оно достигается.

Не торопись. Вдруг успеешь? Не надо бросаться делать все, что под руку попадается! Производная вряд ли поможет. Опять *метод внимательного рассмотрения! И свойства функций.* Работает монотонность. Сложной функции. И вера в гуманизм составителей. Дело в том, что при *внимательном рассмотрении* оказывается, что мы находимся в условиях редчайшего везения: *есть точки*, в которых достигается наибольшее значение *каждого* из слагаемых! И, естественным образом, там же достигается и наибольшее значение суммы!

26. Решите уравнение $\cos^2 8x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 8x$.

Чем страшнее, тем легче? Ищем тему. Потыкались так, сяк... не выходит. Нестандартное тригонометрическое уравнение.

Кто-то увидел *функции*. (Конечно, функция одна. А переменные — разные!) И ограниченность.

Кто-то действует по правилу «не ввести ли новые переменные? или параметры... добровольно». Помогает!

Кстати, отдельные хитроумные товарищи решают это уравнение с помощью оценки через неравенство Коши! Итого — способа три точно получается!

27. Найдите все такие a , при которых система $\begin{cases} y + a \geq 2|x - a| \\ x + |y - a| = a + 1 \end{cases}$

имеет решения.

Выглядит страшновато? *Симметризуем!* Новые переменные $t = x - a$ и $p = y - a$ делают задачу простой и гармоничной. Далее — делаем, что знаем. Рисуем!

28. Решите уравнение при всех значениях параметра a :

$$2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0.$$

Великовата степень. Кубическое... С параметром. Включаем *метод внимательного рассмотрения*. Нас обманули! Квадратное! Только относительно *параметра*! Что ж, придется x временно побыть не переменной, а параметром. Не забываем вернуться обратно!

29. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)} \cdot \sin(\pi x) - \cos(\pi x) = 2,$$

расположенные на отрезке $[-3; 2]$.

Что здесь лишнее? Если применить опять же *метод внимательного рассмотрения* структуры уравнения, то видим классическое $a \sin x + b \cos x$ и включенную в задачу «чужеродную» величину

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}.$$
 Обозначаем ее буквой.

Далее — делаем, что знаем. Вспомогательный аргумент и свойства функций (ограниченность).

30. Решить уравнение $\frac{x(7-x)}{x^2-3} = \sqrt{10-x}$.

Симметрия и гармония?! Ищем, храним и лелеем!

Вводим *новую переменную* $t = \sqrt{10-x}$. Только бы не перестаться... Не надо уничтожать *старую переменную* окончательно!

Вводим в рассмотрение *функцию* ... и... Перед нами задача с двумя переменными — $f(a) = f(b)$.

Дальше — *делаем, что знает*. Монотонность или группировка, но первый шаг выполнен! Задача решается!

$$31. \text{Решить систему: } \begin{cases} \frac{y}{x} - 9xy = 2 \\ \frac{z}{y} - 9yz = 6 \\ \frac{3x}{z} - 3zx = 2 \end{cases}.$$

После некоторой *симметризации* уравнения становятся одинаковыми (относительно разных переменных). Попытки решить систему алгебраически, скорее всего, не приведут к успеху.

Включаем свободные *ассоциации*. После выражения любой из переменных и замены обнаруживаем тригонометрическую формулу — тангенс двойного угла. Это и дает решение задачи; получаем ответ, совершенно необычный для алгебраической системы — с тангенсами.

$$32. \text{Решить систему } \begin{cases} |x+1| + |x-y| + |x-z| + |x-3| = 4 \\ 2(y^2+2)^2 = 9(z^3+1) \end{cases}.$$

Во-первых, переменных слишком много. Во-вторых, переменная x навязчиво присутствует в каждом подмодульном выражении, а их целых 4. То есть разобраться с первой строкой условия обычным методом интервалов или использовать стандартные неравенства с модулями типа $|a| + |b| \geq a + b$, $|a + b| \leq |a| + |b|$ кажется, по меньшей мере, проблематичным. *слишком «плохо»*. *Что-то здесь не так!*

А что, если переменная — только x ? А остальное — *параметры* (добровольно рассматриваемые)? Тогда все несколько проще. А при *внимательном рассмотрении* выясняется, что сумма только первого и последнего модулей уже не меньше 4. Вывод: два модуля

из четырех обращаются в 0. Далее — ограничение из первой строки и уравнение с одной переменной из второй. Решаемо.

33. Решить систему:
$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} \leq \sqrt{34} \\ \frac{|x-y+6|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+7y-18|}{5\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Задание по алгебре? Неправда. *Математика едина*. Это — геометрия. В первой строке эллипс... *выродившийся в отрезок!* А, значит, мы находимся в рамках школьной программы.

А что же во второй строке? Если нужно интерпретировать геометрически, то это уравнения биссектрис двух пар углов, образованных при пересечении прямых $y = x + 6$ и $y = \frac{1}{7}(18 - x)$.

34. В окружность радиуса R вписан квадрат (или правильный треугольник). Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки на окружности до всех вершин квадрата (треугольника) постоянна, то есть не зависит от выбора точки.

Самое удобное — ввести векторы. Только точка неизвестно где. Базис на плоскости, как мы помним, содержит два вектора... Какие же два вектора выбрать? Попробуем *реализовать конфигурацию*. Сколько нужно векторов? Так... Квадрат или треугольник можно задать двумя векторами. Кстати, желательно выбрать такие, которые свяжут фигуру с окружностью, то есть пустить эти векторы в вершины фигуры по радиусам. А еще один вектор нужен для того, чтобы зафиксировать «бегающую» точку.

И не надо пытаться сделать «как положено» и *выразить его через базисные!* Просто записываем условие. И все автоматически получается!

35. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D . Точка E лежит на прямой BC , причем угол DAE — прямой. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 640$, $DE = 198$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $66\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

Понятно, что где-то будет использовано свойство биссектрисы угла треугольника. А вот остальное...

Обращает на себя внимание очень необычное условие. Разность квадратов... *Чем страшнее, тем легче?* Как ни странно, это всего лишь разность квадратов, ни больше, ни меньше. Формула сокращенного умножения. Попытки интерпретировать ее геометрически, видимо, окажутся лишними.

А вот на что надо обратить внимание. *«Почему вилка одна?»* Что за странная точка E , заданная с помощью прямого угла? И вдруг нас осеняет: перпендикулярна *биссектрисе угла треугольника* именно *биссектриса его внешнего угла!*

И последняя догадка, необходимая для решения (тут помочь школьникам *непрофильных* классов может только знание приема *«повторюшка»!*): для биссектрисы внешнего угла треугольника выполняется точно то же самое свойство, что и для биссектрисы внутреннего угла, даже записывается и доказывается оно легко с теми же буквами!

Последний вопрос в решении даже не требует догадливости. «О чем нас спросили?» Или: «Что связывает *данный* радиус и *искомую* площадь?» Чуть-чуть выкладок, и можно писать ответ.

Думается, многое из изложенного Вы и так знаете и применяете. Успехов в обучении, а оно, как известно, — движение двустороннее!

Переформулировки условия и трансформация задачи

С.М. Крачковский,
гимназия № 1514, г. Москва
smath@mail.ru

*Язык переодевает мысли.
Причем настолько, что внеш-
няя форма одежды не позволя-
ет судить о форме облаченной
в нее мысли...*

Людвиг Витгенштейн

Способы переформулировки или модификации задачи бывают весьма разнообразны. В некоторых случаях они фактически не затрагивают ее математическое содержание, а меняется лишь сюжет, способ записи, используемые слова и обозначения. Но за счет изменения даже только этих параметров задача уже начинает восприниматься по-иному. В других ситуациях для облегчения хода решения оказывается удобным заменить задачу на совсем другую, но эквивалентную исходной или каким-то образом тесно связанную с ней. Для этого уже необходимо умение взглянуть на задачу с другой стороны, переформулировать ее условие в других категориях, трансформировать заданные объекты и/или ввести в рассмотрение новые.

Вначале обсудим немного «лингвистический» аспект данной темы. Вообще вопрос о наличии взаимно-многозначного соответствия между идеями, абстрактными категориями и их символической или вербальной репрезентацией имеет весьма широкий характер. Он затрагивает общие проблемы адекватности языковых средств выражаемым ими понятиям, влияния этих средств на наше восприятие самих идей. Вспомним, что развитие математического знания

долгие века тормозилось из-за отсутствия удобных способов записи чисел, арифметических действий, абстрактных понятий и законов. К числу поворотных моментов в создании математических обозначений, а тем самым, и в развитии математической науки можно отнести следующие:

- изобретение десятичной позиционной системы записи чисел (Индия, около 500 года н. э.);
- создание современной алгебраической символики (XIV–XVII вв., особая роль в этом принадлежит Ф. Виету и Р. Декарту);
- разработка символики анализа бесконечно малых (XVII–XIX вв., здесь велика заслуга Г. Лейбница, Л. Эйлера и ряда других ученых).

Таким образом, те языковые средства, символы, которые мы выбираем для выражения математических идей и работы с ними, могут не только кардинально изменять восприятие и понимание этих идей, но и определять интенсивность их генерации.

Говоря об этом, стоит обращать внимание учащихся на то, что современная система обозначений в математике — это не какое-то искусственное и формализованное образование, а созданный веками поисков чрезвычайно краткий, точный и удобный способ выразить те идеи, которые стоят за ней. И весь образ мышления современного человека, даже использующего математику в чисто прикладных целях, опирается на эту систему и стимулируется ею.

Небезынтересно и то, что сам процесс использования некоторого языка, символики способен иногда приводить к получению нового результата, поначалу иной раз никак не ожидавшегося интуитивно. Речь, в частности, идет о том, что путем совершенно формальных преобразований некоторого алгебраического объекта — формулы, уравнения — удается привести его к такой форме, которая позволяет обнаружить новые закономерности, которые до того вовсе не были очевидны или ожидаемы. Другими словами используемый аналитический язык сам приводит исследователя к результатам, которые он, вероятно, не смог бы обнаружить другим способом. И некоторый новый результат вначале выводится чисто фор-

мально путем алгебраических выкладок, а уже затем осмысливается и осознается его реальный смысл. Это лишний раз подчеркивает значимость выбора удобных для работы обозначений и правил записи производимых операций.

Наряду со всем сказанным, существенной проблемой в обучении математике является склонность многих учащихся воспринимать и запоминать не суть дела, а то, какие слова в какой очередности надо произносить и какие буквы где писать — так сказать, обрядовую часть процесса решения задач. Вообще, учащимся полезно как можно чаще разъяснять и демонстрировать разницу между внутренним смыслом, содержанием производимых действий и формой их записи. Обобщая, можно сказать, что даже в повседневной жизни умение видеть разницу между содержанием чего-либо и формой, в которой это представлено, является важным и незаменимым качеством для любого современного человека.

Упомянем еще, что в языкознании известно понятие лингвистического детерминизма (язык способен определять мышление) и лингвистической относительности (указанный детерминизм зависит от конкретного языка). В нашем случае восприятие математической идеи и формируемый у учащихся образ мышления могут существенно зависеть от используемых учителем или автором учебника слов, обозначений, общей логики и стиля изложения.

По этой причине для того, чтобы по-настоящему глубоко разобраться в каком-либо, особенно тонком и многогранном математическом вопросе, учащемуся важно не только послушать рассказ учителя, но и прочитать несколько разных книг по теме, желательно максимально различных между собой по стилю изложения. Именно в этом случае делается возможным получение максимально объективного представления о предмете, не зависящего от образа мыслей и способа их выражения конкретным человеком — учителем или автором учебника. Об этом стоит говорить самим учащимся, особенно сильным и заинтересованным в глубоком и всестороннем понимании предмета.

В свою очередь одним из важнейших качеств хорошего учителя математики является умение рассказать излагаемую тему, используя различные подходы, подобрать разные формулировки для одного и того же понятия. Дело осложняется еще тем, что, как известно, разные люди, глядя на одно и то же, видят разное, читая или слушая одни и те же слова, понимают их по-разному в зависимости от своего личного опыта. Когда данные люди — это учитель и ученик, различие сказанного первым (того, что имелось в виду) и услышанного вторым (усвоенного) может быть практически как угодно велико. Поэтому так важно, объясняя что-либо учащимся, всегда уметь рассказать это же самое другими словами, одновременно стараясь понять, какие слова лучше воспринимаются данным конкретным учеником.

Рассмотрим некоторые конкретные случаи проявления всего вышесказанного.

1. Занимательные, сказочные сюжеты как «обертка» математических идей. Они способны существенно облегчать восприятие математики, особенно для младших школьников. Но также способны подчас и затемнять суть дела, поскольку вместе с ними нередко вливается некоторая доля «воды» и смешивается с собственно математической идеей в задаче. Занимательные сюжетные оболочки активно используются при составлении олимпиад, играя важнейшую роль популяризации знания. Вместе с тем, интерес к математике не должен подменяться интересом к подобному антуражу. И иной раз случается, что идея в более строгой и дистиллированной математической формулировке выглядит отчетливее и интереснее даже для самих детей.

2. Переход на «повседневный язык» при изложении материала нередко помогает эффективно прояснять содержание абстрактных понятий. Вот пара примеров.

а) Разницу между объектами « $\emptyset$ » и « $\{\emptyset\}$ » часто иллюстрируют на примере пустого кошелька и кошелька, в котором лежит пустой кошелек.

б) Элемент a частично упорядоченного множества $\langle M; \leq \rangle$ называется наибольшим, если для любого элемента $x \in M$ верно, что $x \leq a$. Элемент $b \in M$ называется максимальным, если не существует такого элемента $x \in M$, что $x > b$. Разницу между понятиями наибольшего и максимального элемента можно проиллюстрировать так. Известно, что в фирме M некоторые сотрудники являются начальниками некоторых других. Тогда «наибольший элемент фирмы» (если он существует) — это тот человек, которому подчиняются все без исключения остальные сотрудники. Максимальный же элемент — это сотрудник, над которым нет ни одного начальника, но при этом ему не обязательно подчиняются все остальные и у него даже может вообще не быть подчиненных.

3. Задачи с разным практическим, сюжетным содержанием, описываемые одинаковой математической моделью. Эта ситуация имеет еще большее значение, поскольку демонстрирует эффективность математического моделирования — возможность применения одной математической модели для описания разных по характеру явлений и процессов. В следующих трех задачах несхождение с практической точки зрения ситуации математически описываются одинаково.

Задача 1.

а) Сколько плоскостей можно провести через восемь точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат в одной плоскости?

б) Миша хотел купить восемь дисков с новыми фильмами, однако оказалось, что денег хватит только на три. Сколькими способами Миша может теперь произвести покупку?

в) Города A и B связаны прямоугольной сеткой дорог размером 3×5 (рис. 1). Ехать разрешается только по линиям сетки и только

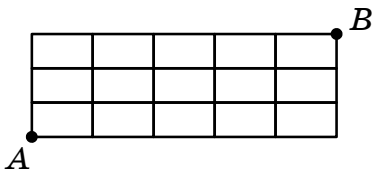


Рис. 1

«вправо» или «вверх». Сколько существует различных маршрутов из A в B ?

Все три задачи сводятся к нахождению числа сочетаний из семи элементов по трем, то есть $C_8^3 = 56$.

Решение «текстовых задач» в школьном курсе — типичный случай, когда производится переформулировка — условие, заданное словесным описанием, переводится на язык математики — уравнений, неравенств, их систем и т.д. Кстати, интересен и полезен для учащихся и обратный переход — например, по данному уравнению придумать практические задачи, которые описывались бы им.

4. Использование различных обозначений. Сформировавшаяся у учащихся устойчивая привычка к использованию всегда только одних определенных обозначений и стандартных способов записи может подвести их даже в самых простых ситуациях.

Задача 2. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения $9(3x-1) \cdot a^2 - (21x-19) \cdot a + 2(x-1) = 0$.

Задание не представляет особых трудностей, если вовремя увидеть, что предложенное уравнение — линейное относительно переменной x , и решать его соответственно. К сожалению, формат, в котором оно записано, с самого начала приводит недостаточно внимательных учащихся к бессмысленным действиям, связанным с исследованием квадратного уравнения относительно a . Подобные проблемы возникают при невнимательном прочтении условия и в следующем задании, где нужно еще понять, что параметром на деле является x .

Задача 3. Найдите такие значения x , при которых неравенство $(4-2a)x^2 + (13a-27)x + (33-13a) > 0$ выполняется для всех a , удовлетворяющих условию $1 < a < 3$.

5. Задания, технически решаемые одинаково, но сформулированные по-разному. Важно, чтобы в ходе учебного процесса задания, одинаковые с технической точки зрения, предлагались в

разнообразных формулировках и обсуждались их особенности и единство. Даже самое стандартное и распространенное в школьной практике задание — «решите уравнение» — может предлагаться во множестве формулировок: «найдите нули функции», «укажите абсциссы точек пересечения графиков функций», «найдите x , при которых выражения принимают равные значения», в текстовом формате вроде «если число увеличить вдвое, затем..., то получится число на 5 меньше...» и т.д.

Проблема здесь заключается в том, что в сознании учащихся задачи, сформулированные по-разному, представляются задачами «на разные темы» и может возникать ступор «а что нужно делать?» даже в самых элементарных ситуациях. А тем более в более сложных случаях, где для того, чтобы свести непривычную по формулировке задачу к известной схеме, требуется сначала произвести определенные логические рассуждения.

Задача 4. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых:

а) отрезок $[-3; -1]$ целиком содержится среди решений неравенства $\frac{x-3b}{b-2x} < 0$ (МГУ, факультет почвоведения, 2003 г).

б) из неравенства $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ следует неравенство $\frac{x-3b}{b-2x} < 0$.

в) неравенство $(x-3b)(b-2x) < 0$ выполняется для любого $x \in [-3; -1]$.

г) неравенство $2(\cos x + 2)^2 + 7b(\cos x + 2) + 3b^2 > 0$ выполняется для любого x .

С математической точки зрения эти задания попарно эквивалентны между собой. Ответ везде: $b \in (-\infty; -6) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. При этом задача «в)», вероятно, окажется проще всех для большинства учащихся. Остальные потребуют для решения большего числа логических рассуждений и переформулировки условия в более стандартном виде. Заметив равносильность предложенных задач, можно понять, что каждая из них в итоге сводится к нахождению тех b ,

при которых неравенство $2t^2 - 7bt + 3b^2 > 0$ выполняется для любого $t \in [-3; -1]$. А это представляет собой совершенно типовой пример на утверждения о расположении корней квадратного трехчлена (см. рис. 2).

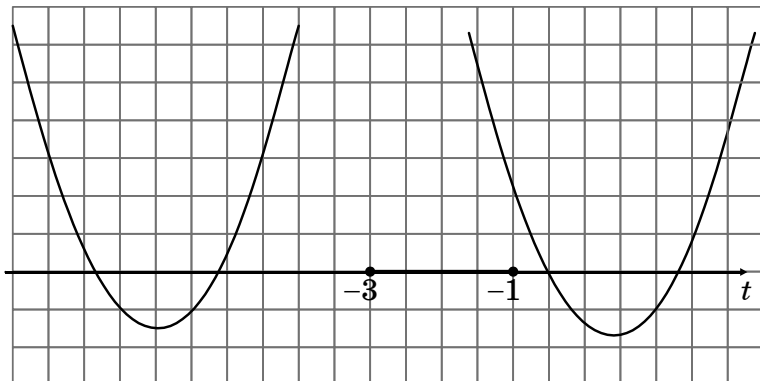


Рис. 2

Или еще проще можно решить эту задачу графически в осях координат (x, b) (см. рис. 3).

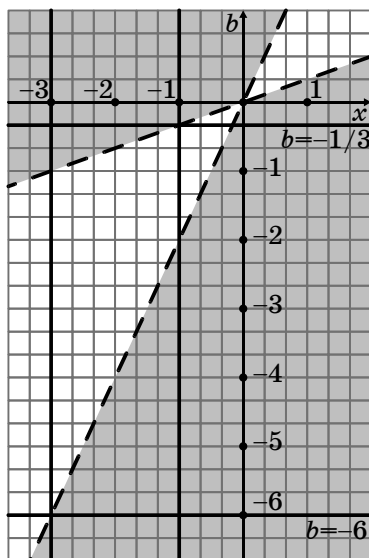


Рис. 3

Вообще переформулировки в задачах с параметрами играют весьма важную роль и позволяют сводить самые разные на вид задачи к стандартным схемам вроде исследования расположения корней квадратного трехчлена и построения графиков в осях (x, y) или (x, a) .

Поговорим теперь непосредственно о переформулировках условий, в результате которых, мы сводим задачу к другой — решаемой иначе технически или идейно, заменяем заданные объекты на другие, вводим новые и т. д. Путем определенных рассуждений и преобразований заданных объектов их иногда удается свести к более удобным для работы. Собственно говоря, даже замена переменной в уравнении выполняет именно эту функцию.

Прежде всего, здесь надо упомянуть о возможностях перевода задачи с одного языка на другой — например, с алгебраического на геометрический. Речь идет об известных подходах к решению многих алгебраических задач при помощи использования геометрических моделей, векторов, тригонометрии и т. д. Этот вопрос уже неоднократно рассматривался в литературе и потому мы не будем сейчас на нем останавливаться.

Обратимся к геометрии. Целый ряд геометрических фактов и методов позволяют трансформировать заданные в условии объекты в более удобные для работы. Так, например, известно, что при перемещении вершины треугольника (пирамиды) параллельно основанию (плоскости основания) их площадь (объем) не меняются.

Задача 5. а) Точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно параллелограмма $ABCD$ площадью S . Найти площадь треугольника AMN .

б) Дан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите объем тетраэдра $AB_1 CD_1$.

Решение (конечно, лишь одно из многих возможных для этих задач):

а) Проведем через точку N прямую, параллельную AM до пересечения со стороной AD в точке P . Очевидно, $AP = 3PD$. Тогда

$S_{AMN} = S_{AMP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{3S}{8}$. В этом решении заданный треугольник был заменен на другой с равной площадью, но расположенный более удобно для непосредственного ее вычисления.

б) «Передвинем» точку D_1 в плоскости грани CDD_1 параллельно плоскости AB_1C до ребра CC_1 . Очевидно, что при этом точка D_1 перейдет в такую точку P на продолжении ребра CC_1 , что $CC_1 = C_1P$. Тогда $V_{AB_1CD_1} = V_{AB_1CP} = \frac{1}{3} S_{B_1CP} \cdot AB = \frac{1}{3}$. Таким образом, исходный тетраэдр мы заменили на другой — более удобный, одна из граней которого оказалась лежащей в плоскости грани куба, а высота стала равной длине ребра куба.

Особо выделим методы, при использовании которых заданные в условии фигуры вообще заменяются или дополняются некоторыми другими. Ярким примером может служить применение инверсии, при котором имеющиеся в условии окружности могут трансформироваться в прямые и наоборот.

Задача 6 (взято с сайта www.problems.ru). Даны четыре окружности, причем окружности S_1 и S_3 пересекаются с обеими окружностями S_2 и S_4 . Докажите, что если точки пересечения S_1 с S_2 и S_3 с S_4 лежат на одной окружности или прямой, то и точки пересечения S_1 с S_4 и S_2 с S_3 лежат на одной окружности или прямой (рис. 4).

Решение:

В результате применения инверсии с центром в точке пересечения окружностей S_1 и S_2 получаем прямые l_1 , l_2 и l , пересекающиеся в одной точке. Прямая l_1 пересекает окружность S_4^* в точ-

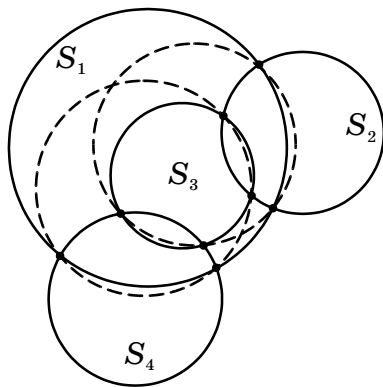


Рис. 4

ках A и B , прямая l_2 пересекает S_3^* в точках C и D , а прямая l проходит через точки пересечения этих окружностей. Поэтому точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

Инверсия, использование двойственности интересно и тем, что при знакомстве с ними формируется новый уровень понимания взаимосвязей между известными геометрическими объектами — окружность и прямая, оказываются единым целым с более общей точки зрения. Вообще мы здесь выходим на обсуждение возможности отождествления объектов, которые всегда до этого считались принципиально различными, и, наоборот, различения того, что считалось одинаковым. Для учащихся все это интересные, новые и совсем не банальные мысли.

В следующих примерах также вводятся новые вспомогательные объекты, никак не присутствующие в изначальном условии.

Задача 7. Найти множество значений выражения $\frac{2x+3}{x^2+1}$. Этот пример иллюстрирует общий метод введения параметра в задачах на отыскание области значений. Наша задача равносильна такой: найти все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{2x+3}{x^2+1} = a$

имеет решения. А поскольку полученное уравнение равносильно уравнению $ax^2 - 2x + a - 3 = 0$, то все сводится к проверке того, что $a = 0$ удовлетворяет условию и требованию неотрицательности дискриминанта квадратного уравнения при $a \neq 0$. Кстати, если учащийся вдруг забыл более простые способы, то так же (через введение параметра и требование $D \geq 0$) можно найти область значения даже самой обычной квадратичной функции.

В качестве еще одного варианта замены задачи рассмотрим переход от данной задачи к более простой (ее частному случаю) или, наоборот, более общей.

Переход к частному случаю позволяет в ряде случаев получить сам ответ, а уже обосновать его в общем случае оказывается легче.

Возьмем широко известную задачу о переливании кофе и молока: имеются две одинаковые чашки — одна с кофе, другая — с мо-

локом. Из первой чашки взяли ложку кофе и перелили в чашку с молоком, затем взяли ложку образовавшейся смеси и перелили обратно в кофе. Чего больше: кофе в молоке или молока в кофе?

К верному ответу — поровну — можно придти, рассмотрев вырожденный случай, когда объемы чашек равны объему ложки. Конечно, это не будет доказательством для общего случая, но может подтолкнуть мысль в верном направлении.

Приведем еще один пример «нечестного метода решения», приводящего, тем не менее к верному результату: найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника площадью S .

«Решение»: Поскольку результат требуется получить для произвольного четырехугольника, то он должен быть верен и для квадрата. Но для квадрата сразу очевидно, что ответ $S/2$. Задачи, допускавшие подобные «решения», которые на деле, очевидно, решениями не являются, не раз предлагались в тестовой части ЕГЭ. Нельзя не признать, что для совсем слабого ученика подобное «решение» окажется самым надежным и эффективным. Но, все же, более интересно и важно то, что верный ответ, полученный в той или иной задаче подобными методами способен навести грамотного ученика на полноценную идею решения. И нередко при решении особенно олимпиадных задач обращение к частному случаю оказывается вполне разумным и плодотворным этапом решения.

Возникают и в некотором смысле обратные ситуации — когда вместо требуемой задачи оказывается легче решить более общую — например, получить более точную оценку какой-либо величины, чем та, которую требуют в условии.

Задача 8. Доказать неравенство:

$$\text{а) } \sqrt{1+|b|^2} \leq 2\left(\sqrt{1+|a|^2} + |a-b|\right). \quad \text{б) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

$$\text{в) } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2015 < 1008^{2015}.$$

а) Наличие двойки в правой части может на время сбить с толку.

Докажем более сильное неравенство $\sqrt{1+|b|^2} \leq \sqrt{1+|a|^2} + |a-b|$. По-

сле возведения в квадрат и несложных преобразований получаем:
 $ab + 1 \leq \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}$. Последнее есть неравенство Коши-Буняковского для векторов $\bar{p}(a; 1)$ и $\bar{q}(b; 1)$.

б) Вместо требуемого неравенства нетрудно доказать (по индукции) более сильное утверждение $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

в) Заметив, что $1008 = \frac{2015+1}{2}$, возникает идея доказать более общее соотношение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) < n^{2n-1}$, которое и в самом деле несложно доказывается по индукции, а требуемое неравенство получается из него при $n = 1008$.

Ярко и поначалу очень непривычно для учащихся процесс перехода к более сильным соотношениям проявляется также в начале изучения математического анализа — в ходе проведения оценок выражений для доказательства факта ограниченности последовательности, существования пределов по определению. Данные оценки нередко бывают отчасти произвольными, неоднозначными и потому вызывают трудности у многих учащихся.

Если говорить в широком смысле, то те или иные переформулировки необходимо или, как минимум, весьма выгодно делать при решении очень многих задач. Иногда они достаточно очевидны, в других случаях требуют заметной доли наблюдательности и логических рассуждений. Самое важное здесь — чтобы учащиеся действовали в любой ситуации не механически, всегда решая задачу «в лоб», а имели привычку смотреть на все с разных сторон и модифицировать условие удобным для себя образом.

Олимпиадные задачи — на уроке

П.В. Чулков,
ФМШ 2007, г. Москва
chulkov2007@yandex.ru

Принято считать, что «обычный» школьник, не прошедший специальной «олимпиадной» подготовки, не может рассчитывать на успех в математических соревнованиях. Объясняют это тем, что олимпиадные задачи можно решать, используя специальные — «олимпиадные» — методы, которые в школе не проходят.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что это верно лишь отчасти. Действительно, чтобы добиться серьезных успехов, необходимо иметь сведения из дополнительных к школьному курсу разделов элементарной математики (графы, теория чисел, логика, векторы). Однако даже и на заключительных этапах Всероссийской олимпиады по математике встречаются задачи, для решения которых достаточны обычные «школьные» знания и которые можно (и желательно) разбирать на уроке.

В тексте приведены решения задач, соответствующие теме урока «Неравенства, метод интервалов».

Решение всех предложенных задач основано на утверждении: *квадратичная функция, определенная на отрезке, достигает наибольшего и наименьшего значений в вершине соответствующей параболы или на концах отрезка.*

Кроме «тематических» решений в тексте приведены другие решения — для сравнения и использования в работе.

Задача 1. Докажите, что $a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1)$.

Перепишем в виде квадратичного неравенства относительно a с параметром b :

$$a^2 + (b - 3)a + b^2 - 3b + 3 \geq 0.$$

«Ветви» соответствующей параболы направлены вверх.

Найдём дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена $f(a)$:

$$D = (b-3)^2 - 4(b^2 - 3b + 3) = -3(b-1)^2 \leq 0.$$

Следовательно, график $y = f(a)$ расположен выше оси абсцисс или, в крайнем случае, касается её.

Неравенство доказано.

Задача 2. Докажите, что если $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, то

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}.$$

Заметим, что если $0 < a, b < 1$, то $(1-ab)^2 > 0$, поэтому достаточно доказать, что

$$4ab(1-a)(1-b) < (1-ab)^2.$$

Получили квадратичное неравенство относительно b с параметром a :

$$(3a^2 - 4a)b^2 + (6a - 4a^2)b - 1 < 0.$$

«Ветви» соответствующей параболы направлены вниз, следовательно, достаточно доказать, что $f(0) \leq 0$, $f(1) \leq 0$, $f(x_0) < 0$, где x_0 — координата вершины параболы.

$$f(0) = -1,$$

$$f(1) = (3a^2 - 4a) + (6a - 4a^2) - 1 = -(a-1)^2 < 0,$$

$$f(x_0) = f\left(\frac{2a-3}{3a-4}\right) = \frac{a(2a-3)^2}{3a-4} + \frac{2a(3-2a)(2a-3)}{3a-4} - 1;$$

$$f(x_0) = \frac{-a(2a-3)^2 - 3a + 4}{3a-4} = \frac{-4a^3 + 12a^2 - 12a + 4}{3a-4};$$

$$f(x_0) = \frac{-4(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)}{3a-4} = \frac{4(1-a)^3}{3a-4} < 0.$$

Неравенство выполнено при $0 < a < 1$, следовательно, доказано исходное неравенство.

Задачи и упражнения

Задача 3. Докажите неравенство $5x^2 + 5y^2 \geq 6xy$.

Задача 4. Докажите неравенство $2x^2 + 2y^2 \leq 5xy$, где $1 \leq x$, $y \leq 2$.

Задача 5. Докажите неравенство $2x^2 + 2y^2 < 3xy + 4$, где $1 < x$, $y < 2$.

Задача 6. Докажите неравенство

$$3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \leq 3,$$

где $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Задача 7. Докажите неравенство

$$x^2(1 - y) + y^2(1 - z) + z^2(1 - x) \leq 1,$$

где $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Задача 8. Ненулевые числа a , b , c таковы, что $ax^2 + bx + c > cx$ при любом x . Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x .

Указания, решения, комментарии.

1. (9 класс, Окружной этап Всероссийской олимпиады по математике, 1992–1993).

Другое решение. Воспользуемся основным свойством симметрических многочленов. Пусть $m = a + b$, $n = ab$.

Тогда $m^2 \geq 4n$ и осталось доказать, что $m^2 - n \geq 3m - 3$.

Рассмотрим разность, умножив предварительно на 4.

$4m^2 - 4n - 12m + 12 = 3(m - 2)^2 + (m^2 - 4n) \geq 0$, что и требовалось доказать.

2. (9 класс, Окружной этап Всероссийской олимпиады по математике, 1995–1996).

Другое решение. Пусть $m = a + b$, $n = ab$.

Тогда $m^2 \geq 4n$ и осталось доказать, что $\frac{m(1-n+m)}{(1-m)^2} \leq \frac{1}{4}$. По-лучим:

$$\frac{m(1-n+m)}{(1-m)^2} \leq \frac{m(1-2\sqrt{m}+m)}{(1-m)^2} \leq \frac{m(1-\sqrt{m})^2}{(1-m)^2} = \frac{m}{(1+\sqrt{m})^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Достаточно доказать $\frac{\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \leq \frac{1}{2}$, $2\sqrt{m} \leq 1+\sqrt{m}$, $\sqrt{m} \leq 1$.

Последнее очевидно.

3. Рассмотрим квадратный трёхчлен:

$$f(x) = 5x^2 - 6xy + 5y^2.$$

«Ветви» соответствующей параболы направлены вверх. Следова-тельно, наибольшее значение $f(x)$ достигается в вершине

$$x_0 = \frac{3y}{5} \text{ и равно } y_0 = f(x_0).$$

$$f(x_0) = 5(0,6y)^2 - 6(0,6y)y + 5y^2 = 3,2y^2 \geq 0.$$

Неравенство доказано.

Другое решение 1. Если $xy \leq 0$ неравенство выполнено. Если $xy > 0$, то $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 5(x-y)^2 + 4xy \geq 0$.

Другое решение 2. Выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6xy + 5y^2 &= \left(5x^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} xy + \frac{9}{5} y^2 \right) + \frac{16}{5} y^2 = \\ &= \left(\sqrt{5}x - \frac{3}{\sqrt{5}} y \right)^2 + \frac{16}{5} y^2 \geq 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. Рассмотрим квадратный трёхчлен:

$$f(x) = 2x^2 - 5xy + 2y^2 \text{ при } 1 \leq x \leq 2.$$

«Ветви» соответствующей параболы направлены вверх. Следовательно, наибольшее значение $f(x)$ на $1 \leq x \leq 2$ может достигаться в точках 1 или 2.

Вычислим значения $f(x)$ в этих точках.

$$f(1) = p(y) = 2 - 5y + 2y^2, \quad f(2) = q(y) = 8 - 10y + 2y^2.$$

Осталось найти наибольшее значение каждого из многочленов при $1 \leq y \leq 2$.

Для этого достаточно найти:

$$p(1) = -1, \quad p(2) = 0 \quad \text{и} \quad q(1) = 0, \quad q(2) = -4.$$

Следовательно, $2x^2 - 5xy + 2y^2 \leq 0$ и $2x^2 + 2y^2 \leq 5xy$, что и требовалось доказать.

5. Рассуждаем аналогично.

$$f(x) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 \quad \text{при} \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Вычислим:

$$f(1) = p(y) = 2 - 3y + 2y^2, \quad f(2) = q(y) = 8 - 6y + 2y^2.$$

Найдём наибольшее значение каждого из многочленов при $1 \leq y \leq 2$.

Далее:

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 4 \quad \text{и} \quad q(1) = 4, \quad q(2) = 4.$$

Наибольшее значение выражения может достигаться только в вершинах квадрата $1 \leq x, y \leq 2$, то есть, при $1 < x, y < 2$ выполнено неравенство $2x^2 + 2y^2 < 4 + 3xy$, что и требовалось доказать.

6. (8-9 классы, Отборочный тур к Всесоюзной олимпиаде, Ленинград, 1980).

1) Наибольшее значение квадратного трёхчлена $f(x)$, «ветви» которого направлены вверх, достигается на краях соответствующей параболы, поэтому неравенство достаточно доказать при $x = 0$ и $x = 1$.

Получим:

$$f(0) = 3y^2z^2 \leq 3 \quad \text{и} \quad f(1) = 3(y^2 + y^2z^2 + z^2) - 2yz(1 + y + z).$$

2) Последнее выражение будем рассматривать, как квадратный трёхчлен относительно y :

$$g(y) = 3y^2(1-z)^2 - 2yz(1+z) + 3z^2.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что неравенство достаточно доказать при $y = 0$ и $y = 1$.

$$g(0) = 3z^2 \leq 3 \text{ и } g(1) = 3(1-z)^2 - 2z(1+z) + 3z^2$$

3) Последнее выражение будем рассматривать, как квадратный трёхчлен относительно z :

$$p(z) = 4z^2 - 4z + 3.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что неравенство достаточно доказать при $z = 0$ и $z = 1$.

$$p(0) = p(1) = 3 \leq 3.$$

Неравенство доказано.

7. Решение аналогично предыдущему.

Комментарий. Интересно, что данное неравенство следует из неравенства 7а:

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leq 1, \text{ где } 0 \leq x, y, z \leq 1.$$

Последнее неравенство можно решить, воспользовавшись утверждением: *линейная функция, определенная на отрезке, достигает наибольшего и наименьшего значений на концах отрезка.*

То есть, чтобы доказать неравенство достаточно убедиться, что неравенство верно, если переменные принимают значения 0 и 1 во всех возможных сочетаниях. Интересно, что из неравенства 7а следует неравенства вида 7б:

$$x^m(1-y)^n + y^p(1-z)^k + z^s(1-x)^t \leq 1,$$

где m, n, p, k, s, t — произвольные натуральные числа, а $0 \leq x, y, z \leq 1$.

Действительно, $x \geq x^n$ при $0 \leq x \leq 1$ и, следовательно

$$x^m(1-y)^n + y^p(1-z)^k + z^s(1-x)^t \leq x(1-y) + y(1-z) + z(1-x).$$

8. (10 класс, Региональный этап Всероссийской олимпиады, 2009–2010).

Неравенство $f(x) = ax^2 + (b - c)x + c > 0$ верно для любого x , если «ветви» соответствующей параболы направлены вверх, дискриминант отрицателен:

$$D = (b - c)^2 - 4ac < 0, \quad a > 0.$$

Кроме того, из условия следует: $f(x) = c > 0$.

Следовательно, «ветви» параболы

$$g(x) = cx^2 - (b + c)x + a + b$$

направлены вверх и осталось заметить, что дискриминанты $f(x)$ и $g(x)$ одинаковы.

Следовательно, $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x , что и требовалось доказать.

Литература

1. *Седрабян Н.М., Авоян А.М.* Неравенства. Методы доказательств. — М.: Физматлит, 2002.
2. *Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А.* Избранные олимпиадные задачи. Математика. — М.: Бюро Квантум, 2007.
3. Петербургские математические олимпиады, 1961-1993: Учебное пособие. 2-е изд. доп. / Под ред. Д.В. Фомина, К.П. Кохася. — СПб.: Издательство «Лань», 2007.
4. *Агаханов Н.Х.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.3. / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов. — М.: Просвещение, 2011.

Применение моделей в решении текстовых задач

М.А. Латышева,
г. Москва
lma062012@rambler.ru

Решать текстовые задачи по математике можно разными способами, а еще лучше уметь решать по-разному. Мы рассмотрим лишь один из этих способов, а именно, как решить задачу, изобразив её модель.

Для начала, хотелось бы более подробно рассказать, что именно я понимаю под моделью. Во-первых, модель должна отражать все отношения между величинами, содержащимися в задаче. Во-вторых, модель должна «подсказывать» путь решения; указывать, какие действия нужно совершить с теми или иными величинами, чтобы получить ответ на поставленный вопрос.

В этой статье мы поговорим о модели, которую не так часто используют на уроках, но которая дает порой очень интересные и, доступные для понимания решения задач. Речь идет о чертеже.

Дело в том, что когда мы решаем задачи на равномерные процессы (движение, работа, купля-продажа), то имеет смысл использовать очень простую и понятную детям модель — прямоугольник. Ведь его стороны и площадь находятся в тех же отношениях, как и, например, скорость, расстояние и время в равномерном движении.

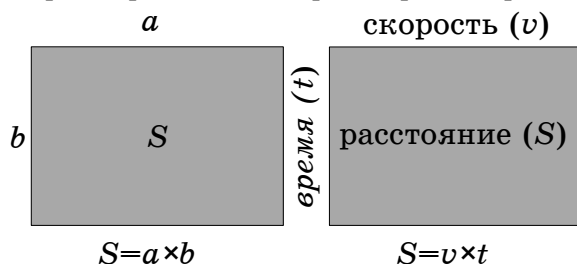


Рис. 1

В качестве первого примера рассмотрим одну несложную задачу из курса 4–5 классов.

Задача 1. Улитка ползет по дорожке со скоростью 35 см/мин, а вслед за ней ползет гусеница со скоростью 50 см/мин. Через какое время гусеница догонит улитку, если сначала между ними было 300 см?

Решение:

Для того чтобы изобразить модель этой задачи нам понадобится 2 прямоугольника, на одном из которых будут отражены величины, характеризующие процесс движения улитки, а на втором процесс движения гусеницы.

Обратим внимание, что время движения в первом и втором случае будет одинаковым, а это обозначает, что и одна из сторон первого прямоугольника должна иметь ту же длину, что и одна из сторон другого прямоугольника.

Также отметим, что то расстояние, которое указано в задаче (300 см) обозначает не что иное, как разность расстояний, пройденных гусеницей и улиткой. Это будет обозначать, что нам нужно сравнить площади прямоугольников, поэтому удобнее всего изобразить их с одной общей стороной (AD) и наложенными друг на друга, так как на рис.2.

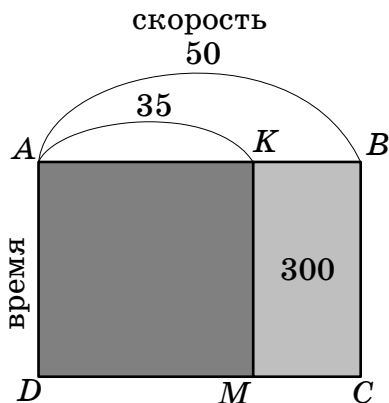


Рис. 2

Разность площадей будет равна площади прямоугольника $KBCM$ (в статье прямоугольники обозначены с помощью букв исключительно из-за особенностей печати, на уроках целесообразнее вместо букв использовать различные цвета). Из чертежа мы видим, что единственное первое действие, которое здесь логично сделать, это найти длину отрезка KB как разность отрезков AB и AK .

$$1) 50 - 35 = 15 \text{ (см/мин)}$$

Теперь про прямоугольник $KBCM$ мы знаем одну из его сторон и его площадь, а значит, сумеем найти и вторую сторону, длина которой собственно и будет обозначать количество минут до встречи.

$$2) 300 : 15 = 20 \text{ (мин)}$$

Ответ: через 20 мин.

Рассмотрим более сложные задачи, которые предлагались учащимся 5-6 классов на различных олимпиадах.

Задача 2. Пароход от Горького до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

Решение:

Начнем рисовать чертеж. Сначала изобразим первый процесс, т.е. движение парохода от Горького до Астрахани.

Т.к. длина одной из сторон прямоугольника будет обозначать время, то ее мы уже знаем из условия ($AB = 5$). Длина другой стороны будет обозначать скорость и нам удобнее сразу изобразить её в виде суммы двух отрезков (т.к. очевидно, что речь в задаче идет о движении по течению и против течения), где длина AK будет обозначать собственную скорость парохода, а длина отрезка KC будет обозначать скорость течения (рис.3).

Теперь изобразим процесс движения от Астрахани до Горького. В этом случае, длина той стороны, которая изображала время, должна увеличиться (т.к. время теперь равно 7 суткам), а длина стороны, обозначающей скорость должна уменьшиться, т.к. очевидно, что пароход движется против течения, а это значит, что она должна стать меньше отрезка AC на $2KC$.

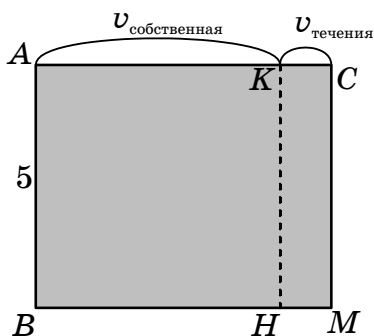


Рис. 3

Важно обратить внимание на то, что площади первого и второго прямоугольника равны, а это значит, что изображать их лучше не отдельно друг от друга, а так, чтобы их было удобно сравнивать, например, как на рис.4.

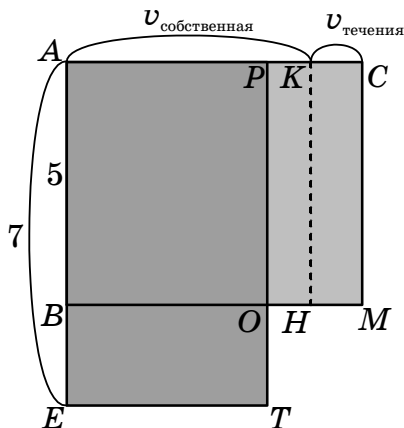


Рис. 4

Возникает вопрос, как увидеть на чертеже то, что нам нужно найти. Т.к. плот будет двигаться со скоростью течения и пройдет то же расстояние, что и в первых двух случаях, то нам нужно изобразить прямоугольник со стороной, равной KC и площадью, равной площади прямоугольника $ACMB$ (или $EAPT$).

Но если бы мы знали, сколько раз поместится прямоугольник $KCMH$ в прямоугольнике $ACMB$, то построить такой прямоугольник не

составило бы труда. Более того, мы сразу бы нашли ответ на поставленный вопрос, достаточно было бы умножить 5 на найденное число.

Обратим внимание, что из равенства площадей прямоугольников $ACMB$ и $EAPT$ следует равенство площадей прямоугольников $PCMO$ и $BOTE$, а значит и равенство их половин. Но про половину прямоугольника $BOTE$ мы точно знаем, что он помещается в прямоугольнике $APTE$ 7 раз, это очень ясно видно из чертежа (рис. 5).

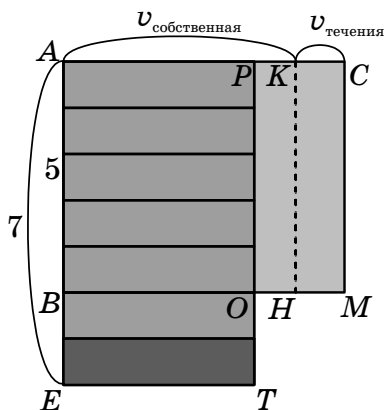


Рис. 5

Это обозначает, что и прямоугольник $KCMH$ укладывается в прямоугольнике $ACMB$ ровно 7 раз. Значит, чтобы найти ответ к нашей задаче необходимо 5 умножить на 7 (рис.6).

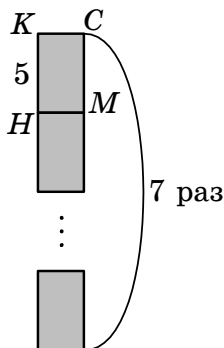


Рис. 6

Ответ: 35 суток.

Задача 3. Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменял направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бежит быстрее сына?

Решение:

Сначала проанализируем условие, чтобы понять, что изменилось после изменения направления движения?

Когда отец с сыном двигались в одном направлении, к моменту первой встречи отец пробежал на один круг больше чем сын. Это значит, что когда мы будем изображать расстояния в виде площадей прямоугольников, нам удобнее изобразить их как в задаче №1, наложив один на другой (рис.7).

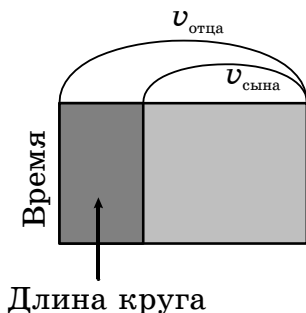


Рис. 7

Когда направление поменялось, к моменту первой встречи, сумма расстояний, которое проехал отец и сын вместе равна длине одного круга, поэтому прямоугольники удобнее изобразить рядом друг с другом, имеющими одну общую сторону, которая будет изображать время. Но время по условию задачи уменьшилось в 5 раз, поэтому и длина отрезка тоже сократиться в 5 раз по сравнению с предыдущим рисунком (рис. 8).

Чтобы лучшего «чтения» чертежа, изобразим обе разобранные ситуации на одном чертеже (рис. 9).

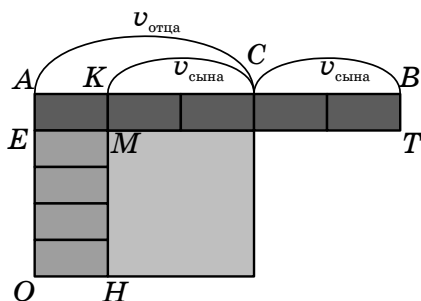


Рис. 8

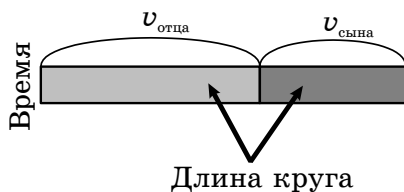


Рис. 9

Площади прямоугольников $AKHO$ и $ABTE$ равны, т.к. изображают длину одного круга. Т.к. прямоугольник $AKME$ 5 раз укладывается в прямоугольник $AKHO$, то и в прямоугольник $ABTE$ он должен укладываться тоже 5 раз. Это обозначает, что длина отрезка KC должна быть в 2 раза больше длины отрезка AK (т.к. $KC = CB$), поэтому скорость отца в 1,5 раза больше скорости сына.

Ответ: в 1,5 раза

Задачи «на работу» воспринимаются детьми гораздо хуже, чем задачи на движение, т.к. понять, что такое производительность им еще сложнее, чем понять суть скорости движения.

В этом случае, модель если и не поможет представить себе весь процесс работы, то хотя бы покажет зависимости между всеми величинами процесса.

Задача №4 Ваня, Коля и Антон могут одинаково быстро вскопать землю лопатой. Если любые два из этих мальчиков будут работать вместе, то справятся с земельным участком за полтора часа. За какое время ребята вскопают тот же участок, если будут работать все трое вместе?

Решение:

Процесс работы также изобразим в виде чертежа (рис. 10).

Т.к. сначала работают двое мальчиков вместе, причем одинаковое количество времени, то изобразим первую ситуацию («если любые два из этих мальчиков будут работать вместе, то справятся с земельным участком за полтора часа») следующим образом (рис.11):

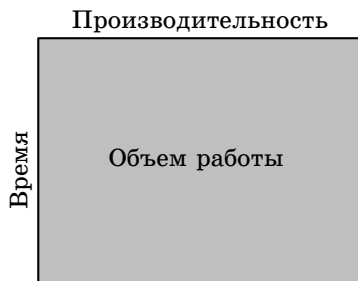


Рис. 10

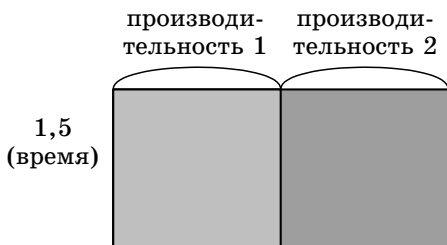


Рис. 11

Очевидно, что когда мы будем изображать вторую ситуацию («за какое время ребята вскопают тот же участок, если будут работать все трое вместе»), то нам придется увеличить отрезок, изображающий производительность (теперь он будет состоять из трех одинаковых частей), т.к. сам участок не меняется, то не будет меняться и площадь прямоугольника, изображающего ту работу, которую необходимо выполнить мальчикам. А это, в свою очередь обозначает, что длина отрезка, изображающего время должна стать меньше.

Главный вопрос: во сколько раз меньше? Ответив на этот вопрос, мы решим задачу. Поэкспериментировав с чертежом, мы получим следующий рисунок (рис. 12):

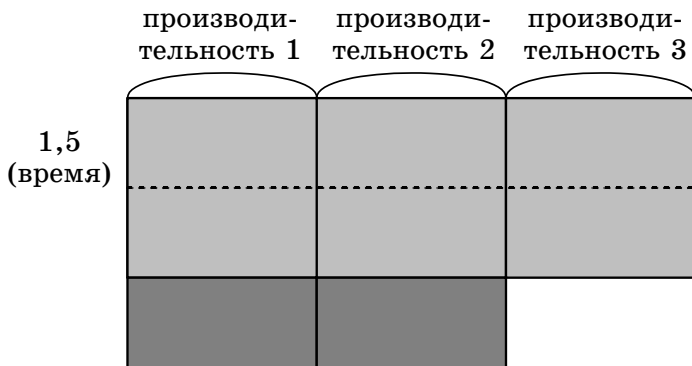


Рис. 12

Из чертежа видно, что нужное нам время равно $\frac{2}{3}$ от полутора часов.

Ответ: 1 час.

Задача 5.

Рассмотрим одно из решений задачи, которая, безусловно, известна многим, т.к. она взята из рассказа А.П.Чехова «Репетитор».

«Купец купил 138 арш. Черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.»»

Вновь воспользуемся моделью прямоугольника, обозначив величины, присутствующие в задаче следующим образом (рис. 13):



Рис. 13

Т. к. по условию задачи нам известна общая стоимость, то прямоугольники нам следует расположить рядом друг с другом, также нам известно общее количество (138 аршин), а это значит, что прямоугольники нам следует изобразить таким образом, чтобы эту величину тоже было видно на чертеже (рис. 14):

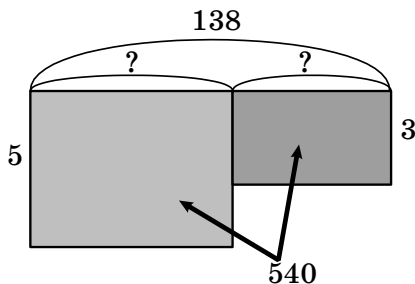


Рис. 14

Теперь начинаем работать уже с моделью, думая, как зная длины отрезков, изображенных на чертеже, а также общую площадь найти неизвестное.

Один из первых шагов может быть следующим: найдем площадь прямоугольника со сторонами 138 и 3 (рис.15):

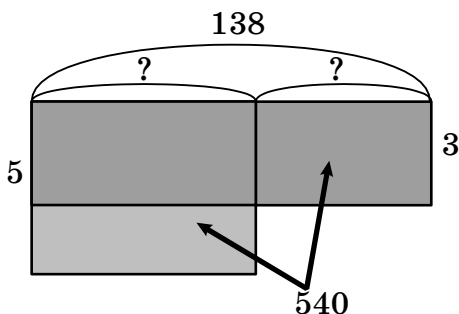


Рис. 15

$$138 \cdot 3 = 414$$

Теперь можем найти площадь не закрашенного прямоугольника:

$$540 - 414 = 126$$

Но в этом прямоугольнике нам кроме площади известна одна из сторон ($5 - 3 = 2$), а это значит, что мы можем найти и другую сторону:

$$126 : 2 = 63$$

Вернувшись к условию задачи, понимаем, что мы нашли количество аршин синего сукна. Осталось последнее действие:

$$138 - 63 = 75$$

Ответ: 63 аршина синего и 75 аршинов черного сукна.

Для решения следующих задач также можно использовать чертеж, применение которого, на мой взгляд, удобно тем, что он позволяет решать ребятам довольно сложные задачи, еще не умея решать уравнения и системы уравнений. Да, при построении чертежа нет четких алгоритмов, но может быть именно это и учит детей рассуждать? Как сказал один из моих учеников «я понимаю, что чертеж это очень легко, но это так сложно!».

Задачи для самостоятельного решения:

1. Два пешехода стартовали одновременно по круговой дороге с одного места в одном направлении. Пешеход, идущий быстрее, нагнал другого через 36 минут. Если бы они стартовали в противополо-

ложных направлениях, то встретились бы через 4 минуты. За сколько минут каждый из пешеходов может обойти круговую дорогу?

2. Кенгуру мама прыгает за 1 секунду на 3 метра, а её маленький сынишка прыгает на 1 метр за 0,5 секунды. Они одновременно стартовали от бассейна к эвкалипту по прямой. Сколько секунд мама будет ждать сына под деревом, если расстояние от бассейна до дерева 240 метров?

3. По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем другой. Кто их туристов идет быстрее и почему?

4. Железнодорожный поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда.

5. Царь выделял на содержание писарского приказа 1000 рублей в год (все писари получали поровну). Царю посоветовали сократить численность писарей на 50%, а оставшимся писарям повысить жалование на 50%. На сколько изменятся при этом затраты царя на писарский приказ?

6. Первую половину пути автобус проехал со скоростью в два раза меньшей, чем было запланировано. Сможет ли он добраться до пункта назначения вовремя, если увеличит свою скорость (по сравнению с запланированной)? Если да, во сколько раз ему нужно увеличить скорость?

7. Петя и Маша договорились встретиться и вместе пойти в школу. Они пошли навстречу друг другу. Когда Петя проходил мимо большого дуба, он вспомнил, что забыл дома дневник и решил вернуться за ним. После того, как он взял дневник, он пошёл обратно и встретился с Машей под тем же дубом. Петя ходит в три раза быстрее Маши. К чьему дому дуб ближе?

8. В клетке находятся фазаны и кролики. У всех животных 35 голов и 94 ноги. Сколько в клетке кроликов и фазанов?

Практические работы на уроках геометрии в старшей школе

**О.Г. Вержховская,
ГБОУ СОШ № 2107(1840), г. Москва,
verzhovskaja@yandex.ru
З.В. Ильиченкова,
ГБОУ СОШ № 2107(1840), г. Москва,
zilyichenkova@yandex.ru,**

В настоящее время при изучении геометрии у школьников часто возникает ощущение невостребованности получаемых знаний. Это происходит зачастую от того, что решение абстрактных задач оказывается несвязанным с окружающей действительностью. Также, к сожалению, из-за несформированности математического мышления у ряда учащихся возникают проблемы в осознанном применении теорем в связи с непониманием ими важности точности использования всех слов в формулировке.

В связи с этим представляется логичным при изучении теоретических аспектов, вызывающих наибольшие трудности, сделать акцент на самостоятельном определении учащимися необходимых и достаточных условий, предложить им самостоятельно вывести требующиеся закономерности. А при решении задач даже для сильных учащихся будет полезным применить изученные ими формулы на практике.

В статье приводятся примеры практических работ, которые можно выполнять со школьниками 10–11 классов в процессе изучения различного материала. Дается информация о необходимом оборудовании и краткое описание работы. Технически сложные работы иллюстрируются фотографиями с проведенных работ.

Практические работы на уроках глобально могут быть двух типов: получение (присвоение) нового знания или приобретение на-

выка использования имеющихся знаний при решении каких-либо практико-ориентированных задач.

Получение нового знания

Получение нового знания связано в основном с теоретическими аспектами. То есть здесь учащимся могут быть предложены различные задания на самостоятельную формулировку теорем с помощью практических исследований или на определение закономерностей в зависимости от заданных величин.



Одной из наиболее сложных тем для учащихся является *понятие угла между плоскостями*. Часто они не видят разницы между построением угла с помощью двух произвольных прямых и прямых, перпендикулярных линии пересечения. Для практической работы по-

надобится лист бумаги, прямоугольный треугольник и транспортир. Возможно, для удобства понадобятся ножницы и что-нибудь для фиксации плоскостей друг относительно друга, например, пластилин и палочки для шампуров. Учащимся предлагается провести прямую и сложить по ней лист бумаги, чтобы получился двугранный угол. Далее отмечается точка на линии пересечения и через неё к линии пересечения в обеих плоскостях проводятся несколько прямых. Причём среди них в каждой плоскости должны быть прямые перпендикулярные к линии пересечения. Далее учащимся предлагается измерить угол между парами получившихся прямых, проведённых в разных полуплоскостях. Предварительно стоит выяснить, что раз две прямые пересекаются, то они лежат в некоторой плоскости, а, значит, угол может быть измерен. На основании измерений учащиеся заключают, что расположение прямых является важным для построения угла.

Ещё одной интересной работой на получение теоретических знаний является определение **признака перпендикулярности прямой и плоскости**. Предварительно следует обсудить, что расстояние от точки до плоскости определяется длиной отрезка прямой, перпендикулярной данной плоскости. Для работы понадобятся штатив с грузиком (как правило, в школе они есть у физиков или химиков) и два прямоугольных треугольника. Можно дать три треугольника, если вы хотите несколько усложнить задачу. Учащимся предлагается найти расстояние от грузика до поверхности стола.



Определение зависимости **площади поверхности цилиндра и конуса** от значений их элементов является одной из наиболее стандартных практических работ. Для проведения работы понадобятся развёртка боковой поверхности тела и его основание, скрепки для фиксации модели. В зависимости от класса и используемой технологии можно дать каждой группе учащихся элементы нескольких цилиндров или конусов. Также, если вы хотите, чтобы разные группы получили разные зависимости, то можно подписать те величины, которые должны быть использованы учащимися при записи формул площади боковой поверхности или площади полной поверхности. Например, площадь боковой поверхности цилиндра может быть выражена через радиус основания и высоту цилиндра или через длину окружности в основании и высоту цилиндра.

Также интересной, но сложной для учащихся, практической работой является определение зависимости **объёма тел**. Для работы понадобятся прозрачный прямоугольный параллелепипед (в качестве тела, объём которого учащиеся уже умеют вычислять) и любой наполнитель, например, щебень. Для измерений потребуется линейка или сантиметр. Также, естественно, нужны тела, формулы объёма которых следует определить. Цилиндры и призмы — это

всевозможные подставки для карандашей или коробки, усечённые пирамиды и конусы — также подставки или детские пирамидки. Наибольшие сложности возникают с телами, которые являются пирамидами, конусами или шарами, но такие тела тоже можно найти. Например, конус — это бокал, пирамида — пакет молока в треугольных пакетах. Шары можно взять декоративные, которые предназначены для размещения каких-либо предметов. Чтобы вывод формул был предметным, сначала следует обсудить с учащимися, от каких величин может зависеть объём того или иного тела.

Применение формул к решению практических задач

Следующий блок — применение формул к решению практических задач. Обычно на таких занятиях предполагается, что учащиеся сами получают необходимую геометрическую информацию для решения задачи путём измерения каких-либо тел.

Практические уроки такого типа можно проводить как в кабинете, так и на улице. Для практической работы требуются тела, измерение которых производится, и сантиметр или рулетка. Также можно предложить учащимся самостоятельно найти тело, имеющее заданную форму, и составить по нему задачу.

Нестандартными для такого рода работ является *вычисление некоторых углов*. Например, можно практически определить, какой угол должен быть между двумя плоскостями (стенами) дома, чтобы он казался «плоским». Такие дома точно есть в Москве (Пресненский вал, д. 36) и Одессе (Воронцовский пер., д. 4). Пишут, что есть и в других городах (Нижнем Новгороде, Томске, Орле), но мы лично их не видели.

Как уже отмечалось, практическая работа чаще всего предполагает самостоятельное получение учащимися информации. Но также им можно предложить конкретный материал, но при этом решение задачи должно опираться на практический опыт, получаемый учащимися. Например, можно предложить учащимся следующую задачу:

«Высота Пизанской башни на самой низкой от земли её стороне равняется 55,86 м, а на самой высокой — 56,7 м. Диаметр её основания равняется 15,54 м, а её вес достигает 14 453 тонн. Центр тяжести башни находится чуть ниже её середины. Вертикальная линия, проведенная через центр тяжести башни, пересекает основание приблизительно в 2,3 м от его центра.

а) Какой угол наклона башни в настоящее время?

б) Какой максимальный угол может составить наклон башни, чтобы она не упала?»

Для решения данной задачи, то есть для определения угла наклона падающих башен, необходимо понимание, какой именно угол следует вычислять. Это можно выяснить с помощью некоторого количества экспериментов с различными телами (однородными цилиндром, параллелепипедом или даже табуретом).

Стандартными примерами задач может быть вычисление расходовемых материалов, количества времени или рабочей силы для заполнения чего-либо (в зависимости от объёма). Для успешного проведения практических работ такого типа необходимо предложить учащимся 2–3 задачи по теме. Мы приведём по каждой теме по одному заданию (№ 1), которое можно выполнить в кабинете, и по одному (№ 2), сформулированной для работы на школьном дворе московской санаторно-лесной школы № 1, где проводится выездной семинар. Все задачи, предназначенные для выполнения на улице, могут быть адаптированы для любой школы, имеющей двор. Для выполнения работы в кабинете необходимо иметь соответствующие предметы, площадь поверхности или объём которых необходимо вычислять учащимся. При выполнении работы следует обращать внимание на достоверность полученного результата.

Тема «Аксиома»

1. Можно ли утверждать, что атомы углерода циклопропана C_3H_6 (прилагается химическая модель вещества) лежат в одной плоскости. Ответ обоснуйте.

2. Несколько муравьёв ползут по дорожке к школе. Найдите муравьёв, находящихся в одной плоскости. Обоснуйте, почему они находятся в одной плоскости.

Тема «Параллельность»

1. Проверьте, является ли поверхность стола параллельной полу. Вывод обоснуйте.

2. Проверьте, являются ли перекладины лестницы турника параллельными земле. Вывод обоснуйте.

Тема «Перпендикулярность»

1. Проверьте, является ли ножка стола перпендикулярной полу. Вывод обоснуйте.

2. Проверьте, является ли столб фонарика перпендикулярным земле. Вывод обоснуйте.

Тема «Цилиндр»

1. Найдите массу блина гантели (прилагаются гантели в форме цилиндра), если плотность материала, из которого она изготовлена, равна 5060 кг/м^3 .

2. Сколько банок краски потребуется купить для покраски перекладины сломанных качелей-весов (расположены слева от выхода из школы), если на 1 квадратный метр поверхности требуется 200 г краски? Емкость банки с краской составляет 2,5 килограмма?

Тема «Призма»

1. Для участия в конкурсе на заводе решили изготовить увеличенную в 10 раз копию ластика (прилагается ластик в форме треугольной прямой или наклонной призмы). Какова будет масса изделия, если плотность винила, из которого изготавливается ластик, равна $2,17 \text{ г/см}^3$?

2. Вместимость носилок равна 60 литрам. Сколько раз придется сходить за землей, чтобы наполнить все клумбы в формы шестиугольной призмы на площадке, расположенной справа от выхода из школы?

Тема «Пирамида, конус»

1. Сколько свечей (прилагается свеча в форме конуса) аналогичных данной можно изготовить из 1 килограмма парафина (плотность парафина 900 кг/м^3)?

2. На школьной территории справа от выхода из школы построили несколько беседок. Сколько квадратных метров дерева пошло на изготовление крыши одной беседки?

Тема «Усечённые пирамида, конус»

1. Сколько литровых пакетов с землёй надо купить, чтобы посадить 10 кустиков с рассадой в одинаковые торфяные горшочки (прилагается торфяной горшок для рассады), если в каждый горшочек сажается 1 кустик?

2. На школьной территории построили макет ветряной мельницы, расположенной справа от выхода из школы. Сколько квадратных метров дерева пошло на изготовление обшивки её каркаса?

Тема «Шар»

1. Сколько весит неокуб (прилагается часть неокуба, содержащая $2 \times 3 \times 4$ шарика), содержащий 216 шариков, если плотность магнитного материала, из которого она изготовлена, равна $7,6 \text{ г/см}^3$?

2. Сколько килограммов стали (средняя плотность стали 7800 кг/м^3) пошло на изготовление крепёжных элементов, соединяющих перекладины турника «Паутинка», расположенном справа от выхода из школы?

Тема «Комбинация тел»

1. Определите массу заказываемого крепежа (прилагаются болт шестигранный с гайкой), если необходимо купить 1000 болтов и гаек? (Плотность стали равна 7850 кг/м^3 .)

2. Сколько килограммов стали (средняя плотность стали 7800 кг/м^3) пошло на изготовление ограды памятного камня перед входом в школу (без учёта цепочек)?

В ходе проведения работы участниками семинара было предложено ещё ряд практических задач. Ниже приводятся примеры заданий по разным темам, которые нам показались наиболее интересными (везде предполагается наличие и возможность измерения заданных тел):

- Объясните, почему у рояля всего один штиц (приспособление для опоры крышки рояля).

- Как с помощью ровной поверхности стола проверить качество изготовления линейки?
- Определите параллельность плинтуса и противоположной стены; противоположных стен.
- Установите перпендикулярность стены и пола.
- Проверить вертикальность торца двери.
- Проверьте правильность (вертикальность и горизонтальность соответствующих частей) сборки мебели.
- За какое время сгорит свеча, если за минуту она выгорает на $0,7 \text{ см}^3$?
- Измерить объём бочки с помощью ведра.
- Сколько понадобится метров ткани для пошива юбок-трапеций на группу солисток танцевального ансамбля в количестве 20 человек?
- Имеется бассейн в форме полусферы. До какого уровня можно наполнить его водой, чтобы при погружении в него тяжёлого шара радиусом 30 см вода не расплескалась?
- Сколько упаковок газонной травы надо купить (на 1 см^2 газона требуется 30 граммов семян), чтобы засадить холм? (Предполагается, что можно измерить высоту и радиус основания холма.) Сколько упаковок удобрения при этом понадобится?
- Даны два воздушных шарика. Надуть один из них, а потом другой так, чтобы объём одного был в 3,375 раза больше другого.
- Дано пирожное «картошка» (в форме шара). Найти плотность теста (вещества), если его вес равен 100 граммам.
- Сколько кубометров снега должно выпасть, чтобы его хватило для постройки снеговика?
- Стойка для микрофона (журавль) состоит из 5 стержней. Под каким углом при максимальной длине вытянутого стержня стойка не упадёт? (Плотность металла стержней известна.)

Опыт применения ПО GeoGebra при решении заданий с параметрами высокого уровня

С.А. Данелян,
МОУ гимназия №12 г. Волгоград
danelyan.irina@yandex.ru,

*«...но когда эти науки
(ГЕОметрия и алГЕБРА) объ-
единились, они энергично под-
держали друг друга и быстро
зашагали к совершенству».*

Ж.Л. Лагранж

Современный подход к осуществлению образовательной деятельности предполагает использование информационных и телекоммуникационных технологий. В сфере обучения открылись новые возможности широкого использования графики. Применение графических иллюстраций в учебных компьютерных системах позволяет на новом уровне передавать информацию и улучшать ее понимание.

Представленные в работе цифровые образовательные ресурсы (ЦОР) созданы с помощью интерактивной среды программного обеспечения GeoGebra.

GeoGebra — это динамическая математика и наука для изучения и обучения. С ее помощью можно анализировать функции, строить их графики, решать задачи по геометрии.

При использовании интерактивных ЦОР на уроках математики достигается высокий уровень наглядности, реализуется возможность непосредственного обращения при необходимости к теоретическому или справочному материалу по теме работы, наблюдает-

ся непрерывное совершенствование как содержания, так и методики преподавания математики в единстве с информатикой.

В соответствии со стандартами ФГОС, в процессе информатизации образования главный принцип использования компьютера — это ориентация на те случаи, когда нет возможности выполнить поставленную педагогическую задачу. Ограниченное количество часов математики в старшем звене, соответствующее базовому уровню преподавания (2,5 часа алгебры и начал анализа в неделю) — побудительный фактор для школьного учителя рационализировать процесс обучения, более эффективно использовать учебное время, применяя информационные технологии.

Апробация технологии решения задач с параметрами с использованием программного обеспечения GeoGebra проводилась в 11-а классе МОУ гимназии №12 Краснооктябрьского района города Волгограда в 2011-2012 учебном году.

Эффективность педагогического опыта подтверждается следующими данными: из 25 учащихся класса, подчеркнем, обучающихся по *базовой* программе, 11 справились с заданием С5 на 4 балла, двое на 3 балла, один на 2 балла и двое получили по 1 баллу.

11-а класс	По списку	Получили положительный балл	На 4 балла	На 3 балла	На 2 балла	На 1 балл
Кол- во	25	16	11	2	1	2
%	100%	64%	44%	8%	4%	8%

Таким образом, 64% обучающихся класса получили положительный результат, из них 44% удалось справиться с заданием без погрешностей.

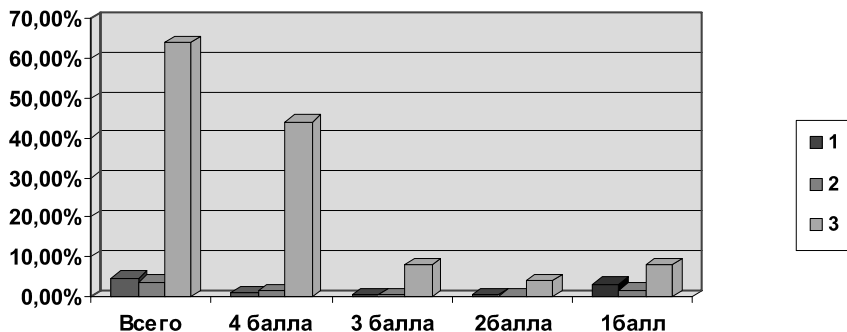
По результатам ЕГЭ-2012 по РФ, согласно аналитическому отчету ФИПИ, за задание С5 получили 1 балл 3,18%, 2 балла — 0,48%, 3 балла — 0,32 %, 4 балла — 0,80 %.

Положительный результат получили 4,78% выпускников 2012 года РФ.

Наблюдается увеличение показателей более, чем в 10 раз!

ЕГЭ-2012 Зада- ние С5	Получили положи- тельный результат	На 4 балла	На 3 балла	На 2 балла	На 1 балл
Данные по РФ	4,78%	0,80%	0,32%	0,48%	3,18%
Данные по Краснооктябрь- скому району г. Волгограда	3,66%	1,49%	0,46%	0,11%	1,60%
11-а класс МОУ гимназии №12 Краснооктябрь- ского района г. Волгограда	64%	44%	8%	4%	8%

Приведем диаграмму результативности выполнения задания С5:



1 — ЕГЭ-2012, данные по РФ,

2 — ЕГЭ-2012, Краснооктябрьский район г. Волгограда,

3 — ЕГЭ-2012, 11-а класс МОУ гимназии №12 Краснооктябрьского района г. Волгограда.

Навыки наглядно-геометрического представления, заложенные с помощью разработанных ЦОР, обусловили возможность получения обучающимися 11-а класса положительного балла за задание

С5 в ходе ЕГЭ-2012 в рамках критериев ФИПИ, получив при этом результаты более, чем в 10 раз, выше показателей по РФ.

В 2012-2013 учебном году использование опыта было продолжено автором статьи на занятиях элективного курса «Решение заданий с параметрами высокого уровня (С5) с применением ПО «GeoGebra»». По результатам ЕГЭ-2013 85,7% выпускников, посещавших занятия элективного курса, получили положительный балл за задание С5.

ЕГЭ-2013 Задание С5	Положи- тельный результат	На 4 балла	На 3 балла	На 2 балла	На 1 балл
данные по РФ	7,2%	1,5%	0,6%	0,9%	4,2%
данные по Красноок- тябрьскому району г. Волгограда	8,5%	1,4%	0,8%	1,03%	5,3%
Данные по группе элективного курса МОУ гимназии №12 Краснооктябрьского района г.Волгограда	85,7%	28,6%	—	42,9%	14,3%

Приведем таблицу результативности выполнения задания высокого уровня (С5) в ходе ЕГЭ-2013 по трем районам города Волгограда:

ЕГЭ-2013 Задание С5	Кол-во обучаю- щихся	На 4 балла	На 3 балла	На 2 балла	Положи- тельный результат	
Краснооктябрьский район г. Волгограда	776	11	6	8	25	3,2%
Тракторозаводской район г. Волгограда	860	3	3	3	9	1,05%
Советский район г. Волгограда	582	3	1	0	4	0,69%

Невольно поражает тот факт, что всего по три выпускника из 860 выпускников Тракторозаводского района и из 582 выпускников Советского района сумели справиться с заданием С5 полностью (на 4 балла), и это при наличии в районах физико-технических лицеев, классов с профильным и углубленным изучением математики. А если при этом вспомнить грустный и общеизвестный факт о появлении до экзамена в сети Интернет заданий ЕГЭ-2013 года, остается сделать плачевный вывод о неизмеримо низкой графической культуре выпускников, их неумении решать альтернативные задачи, требующие логических умений и навыков.

В то же время, как показывает опыт, высокий уровень наглядности в совокупности с системно-деятельностным подходом, применяемым при организации самостоятельных исследований выпускников, приводит к положительным результатам. Имея опыт работы с ЦОР на базе интерактивной среды программного обеспечения GeoGebra, выпускники оказываются более подготовленными к графической интерпретации заданий с параметрами и восприятию динамики процесса, заложенного в них, что дает им возможность получать более высокие результаты в ходе государственной итоговой аттестации.

Приведу в заключение решение заданий из вариантов ЕГЭ с использованием ПО GeoGebra:

Задание 1.

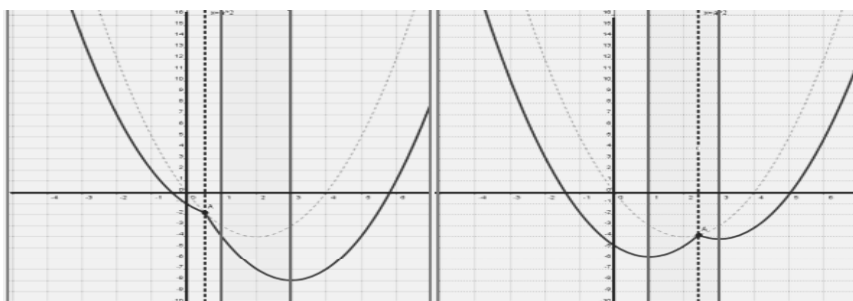
ЕГЭ-2010. Найти все значения параметра a , при которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 4x$ имеет хотя бы один максимум.

При $x < a^2$ имеем $|x - a^2| = -x + a^2$ и заданная функция принимает вид

$$f(x) = x^2 - 2(-x + a^2) - 4x = (x - 1)^2 - 2a^2 - 1.$$

При $x \geq a^2$ $|x - a^2| = x - a^2$ и получаем

$$f(x) = x^2 - 2(x - a^2) - 4x = (x - 3)^2 + 2a^2 - 9.$$



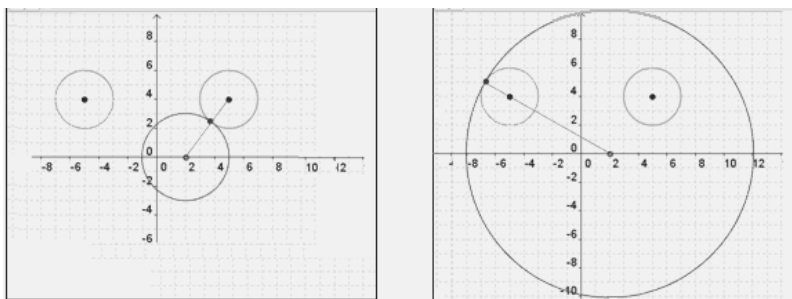
Общая точка обеих парабол лежит на прямой $x = a^2$. В зависимости от значения a и выполнения условия $1 < a^2 < 3$, график функции содержит вершины парабол, абсциссы которых равны $x = 1$, $x = 3$.

Наглядная презентация дает возможность обучающимся определить характер поведения функции и наличие у нее точки максимума в зависимости от расположения прямой $x = a^2$ в области между прямыми $x = 1$ и $x = 3$ или за ее пределами и получить условие $1 < a^2 < 3$, приводящее к ответу: $-\sqrt{3} < a < -1$ или $1 < a < \sqrt{3}$.

Задание 2.

ЕГЭ2011. Найти все положительные значения a , при каждом из которых система

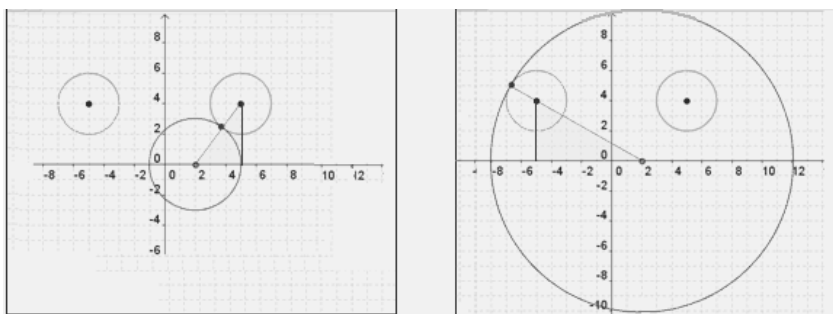
$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение.}$$



- Первое уравнение системы задает на координатной плоскости две окружности равных радиусов ($R = 2$) с центрами в точках $(-5; 4)$, $(5; 4)$.
- Второе уравнение системы задает окружность с центром в точке $(2; 0)$ и радиусом $R = |a|$.

С учетом положительности параметра a по условию задачи, $R = a$.

Динамика задачи заложена во втором уравнении системы: с увеличением радиуса, у окружности с переменным радиусом $R = a$ появляются общие точки с окружностями, заданными первым уравнением системы: сначала одна, затем две, три, четыре. Далее число общих точек начинает последовательно уменьшаться до трех, двух и, наконец, вновь имеем одну общую точку. Те значения параметра a , при которых система имеет единственное решение, то есть на рисунке наблюдается одна общая точка, задаются двумя положениями: внешнее касание с окружностью с центром в точке $(5; 4)$ и внутреннее касание с окружностью с центром в точке $(-5; 4)$.



Из чисто геометрических соображений с применением теоремы Пифагора можно вычислить искомые значения параметра a :

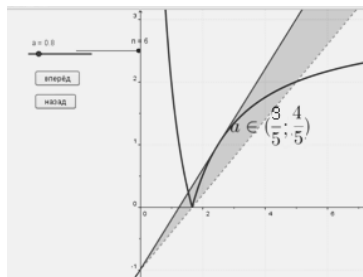
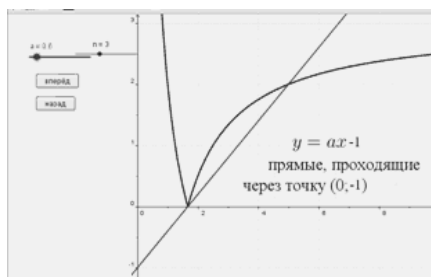
$$(a + 2)^2 = (5 - 2)^2 + (4^2) \quad \text{и} \quad (a - 2)^2 = (5 + 2)^2 + (4)^2.$$

Искомые значения параметра $a = 3$ и $a = \sqrt{65} + 2$.

Задание 3.

ЕГЭ-2012. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 1$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Строим график функции $y = \frac{5}{x} - 3$ на рассматриваемом промежутке $(0; +\infty)$: ветвь гиперболы с асимптотами $x = 0$, $y = -3$. Далее, симметричным отображением относительно оси абсцисс части графика, расположенной в нижней полуплоскости $y < 0$, получаем график функции $y = \left| \frac{5}{x} - 3 \right|$ на промежутке $(0; +\infty)$.



Функция $y = ax - 1$ задает прямую, проходящую через точку с координатами $(0; -1)$ и угловым коэффициентом a .

По рисунку в соответствии с условием определяем граничные положения прямой: 1) прямая $y = ax - 1$, проходящая через нуль функции $y = \left| \frac{5}{x} - 3 \right|$, точку $\left(\frac{5}{3}; 0 \right)$. Искомое значение $a_1 = \frac{3}{5}$ получаем непосредственной подстановкой;

2) прямая $y = ax - 1$, касательная к графику функции $y = -\frac{5}{x} + 3$, $x > 0$. Искомое значение $a_2 = \frac{4}{5}$ получаем, приведя уравнение

$-\frac{5}{x} + 3 = ax - 1$ к квадратному $ax^2 - 4x + 5 = 0$ и приравняв к нулю его дискриминант $D_1 = 4 - 5a$.

Таким образом, получаем промежуток $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Задание 4.

ЕГЭ-2013. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{3 - 2x - x^2} = -ax + 4a + 2$$

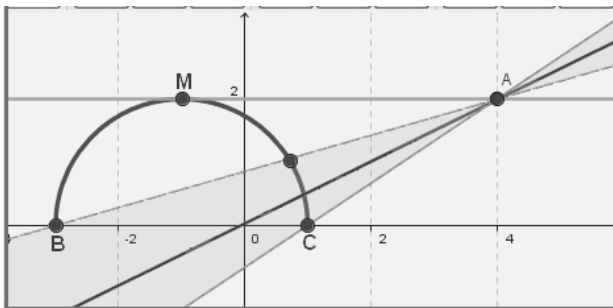
Графиком функции $y = \sqrt{3 - 2x - x^2} = \sqrt{-(x+1)^2 + 4}$, является полуокружность с центром в точке с координатами $(-1; 0)$, расположенная в верхней полуплоскости относительно оси абсцисс, радиусом, равным 2 и граничными точками $B(-3; 0)$, $C(1; 0)$.

Уравнение $y = -ax + 4a + 2 = (-x + 4)a + 2$ задает прямые, проходящие через точку $A(4; 2)$ с угловым коэффициентом $k = -a$.

Находим граничные положения прямой $y = -ax + 4a + 2$, удовлетворяющие условию задачи:

Значение $a_1 = -\frac{2}{7}$ находим из условия прохождения прямой через граничную точку $B(-3; 0)$: $0 = 3a + 4a + 2$.

Значение $a_2 = -\frac{2}{3}$ находим из условия прохождения прямой через точку $C(1; 0)$: $0 = -1a + 4a + 2$.



Значение $a_3 = 0$ получаем в случае касания прямой $y = -ax + 4a + 2$ и полуокружности, заданной функцией $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$, в точке М.

По рисунку видно, что искомое уравнение имеет один корень при $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$, $a = 0$.

И, наконец, приведу еще одно красивое задание:

Задание 5.

(Из вариантов вступительных экзаменов МИРЭА)

Найдите, при каких значениях параметра a системы уравнений

$$\begin{cases} \log_9 x^2 + \log_3 y = 0 \\ |x| + |y| = a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = a^2 + 2 \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений.

Рассмотрим первую систему:

Преобразуем первое уравнение системы при $x \neq 0$, $y > 0$:

$$\log_9 x^2 + \log_3 y = 0 \Leftrightarrow \log_3 |x| + \log_3 y = 0 \Leftrightarrow |x|y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{|x|}.$$

1. $y = \frac{1}{x}$ — функция обратной пропорциональности, графиком

которой являются две ветви гиперболы, расположенные в первой и третьей координатных четвертях.

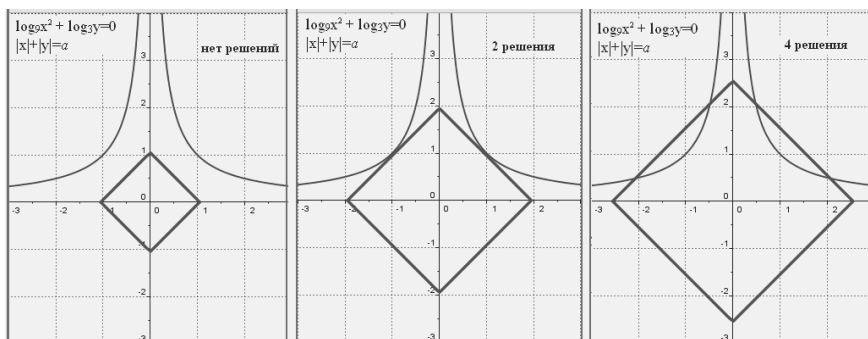


График функции $y = \frac{1}{|x|}$ получаем симметричным отображением относительно оси абсцисс ветви гиперболы, расположенной в третьей четверти, во вторую координатную четверть.

2. $|x| + |y| = a$, при $a < 0$ уравнение не имеет решений, при $a = 0$ график уравнения вырождается в точку $(0;0)$, построим график уравнения при $a > 0$:

$|y| = -|x| + a$, при $y > 0$ $y = -|x| + a$ — прямой угол с вершиной в точке $(0;a)$, стороны которого направлены вниз, при $y = 0$ получаем точки на оси x $(-a;0)$, $(a;0)$, при $y < 0$ $y = |x| - a$ получаем прямой угол с вершиной в точке $(0;-a)$ и сторонами, направленными вверх.

Таким образом, графиком уравнения является квадрат с центром в начале координат и вершинами, лежащими на осях координат.

Параметр a задает длину $\frac{1}{2}$ диагонали квадрата. Динамика графической интерпретации системы показывает, что с увеличением параметра квадрат расширяется и при $a < 2$ общих точек у графиков уравнений нет, при $a = 2$ два решения, а при $a > 2$ система будет иметь 4 решения.

Итак, возможное количество решений первой системы представляет собой конечное множество, состоящее из трех значений $\{0; 2; 4\}$.

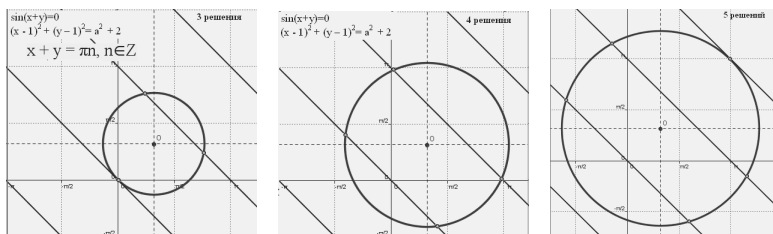
Переходим к разбору второй системы:

1. Преобразуем первое уравнение второй системы: $\sin(x + y) = 0$
 $\Leftrightarrow x + y = \pi n$,

$y = -x + \pi n$, n — целое число — семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом -1 , пересекающих ось ординат в точках с координатами $(0; \pi n)$, n — целое число.

2. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 2$ — уравнение окружности с центром в точке $(1;1)$ и радиусом, равным $\sqrt{a^2 + 2}$. Наименьшее возможное значение радиуса $\sqrt{2}$, при этом у окружности с семейством парал-

лельных прямых, задаваемых первым уравнением системы, три общие точки. Как показывает динамика рисунка, с увеличением радиуса система может иметь любое количество решений: 4, 5, 6... Итак, возможное количество решений второй системы представляет собой бесконечное множество, состоящее из значений $\{3; 4; 5\}$.



Сравнивая полученные множества возможного числа решений обеих систем, приходим к выводу, что одинаковое число решений может быть равным только 4.

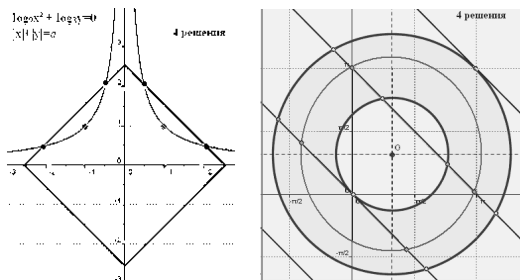
Первая система имеет 4 решения при $a > 2$.

Вторая система при $a = 0$ имеет три решения, пять решений у системы при выполнении условия

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + 2} &= (\pi - 1)\sqrt{2}, \\ a^2 + 2 &= 2(\pi - 1)^2, \\ a^2 &= 2\pi^2 - 4\pi.\end{aligned}$$

С учетом условия $a > 0$, $a = \sqrt{2\pi^2 - 4\pi}$. То есть, четыре решения у второй системы при $0 < a < \sqrt{2\pi^2 - 4\pi}$.

И, наконец, у заданных систем совпадает число решений при $2 < a < \sqrt{2\pi^2 - 4\pi}$.



Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования Зарегистрирован Минюстом России 07.06. 2012, рег. № 24480.
2. С.А. Данелян, О.Н. Колосова, Технология обучения решению задач с параметрами с использованием интерактивной среды программы GeoGebra. Материалы II международной научно-практической конференции. Пенза-Ереван-Шадринск: Научно-издательский центр «Социосфера», 2012.— 388с.
3. Аналитический отчет ФИПИ о результатах ЕГЭ 2012 (<http://www.fipi.ru/>).
4. Данелян С.А., Колосова О.Н., Эффективность использования программного обеспечения GeoGebra при обучении задачам с параметрами. Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации. Рецензируемый сборник научных трудов НИИСО ГБОУ ВПО МГПУ, Москва, 2012. Издательство «Научная книга», стр. 282-286 (<http://www.mgpu.ru/tree.php?rubric=4321>).
5. Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнений заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2013, (<http://www.fipi.ru/>)
6. Материалы сайта <http://alexlarin.net/>.
7. Эффективность использования информационных технологий в обучении математике / Сагателова Л.С., Данелян С.А. // Педагогическая информатика. – 2013. – № 1. – С. 34-39.
8. Информационные технологии в обучении математике: решение заданий ЕГЭ группы С5 / Данелян С.А., Сагателова Л.С. // Педагогические технологии. – 2013. – № 2. – С. 38-43.

Олимпиадные задачи Кубка Урала

О.Ю. Дмитриев,
Лицей прикладных наук, г. Саратов
dmitrievoleg@yandex.ru,
Р.Г. Женодаров
Белорецкая компьютерная школа,
г. Белорецк, Башкортостан

Краткая историческая справка. Кубок Урала проводится с 2001 года. Зародившись как домашний турнир ФМЛ № 31, он расширил свою географию и стал открытым для многих школ Тобольска, Белорецка, Озёрска, Снежинска, Магнитогорска, Екатеринбурга, Уфы, Тюмени и Челябинска. Создателем этого турнира был Сергей Гелиевич Корытов (СеГе) — прекрасный математик, удивительный человек и неугомонный организатор. К глубокому нашему сожалению, его жизнь оборвалась в 2012 году, и с 2013 года Кубок Урала стал носить его имя. Вместе с СеГе стоял у истоков творческих встреч Рустэм Гусманович Женодаров (РуГу), который предложил немало идей для оживления этих встреч, в частности, придумал проводить математические бои пятых классов против жюри. По традиции, в жюри турнира работают не только преподаватели и учителя, но и ученики старших классов ФМЛ №31.

Особенности матбоев для 5-х классов. Поскольку пятиклассники впервые принимают участие в Кубке Урала и не знакомы с правилами ведения матбоя, то в ходе турнира они постепенно на практике знакомятся с этими правилами (сами правила выдаются каждому на открытии) и приучаются правильно и корректно вести математические дискуссии.

- **1 день:** Команды рассказывают решение задач жюри.
- **2 день:** Команды играют против жюри. При этом 2-й судья играет роль второй команды. Причем играет «добросовестно»: не пытается протолкнуть неверное решение, убеждая команду в том,

что оно правильное, не пытается доказать, что правильное решение команды — неверное и т.д.

• **3 день:** Команды играют против жюри. При этом 2-й судья играет роль второй команды. И уже в этот раз иногда может играть «недобросовестно» в упомянутом выше смысле.

• **4 день:** Все (или некоторое количество лучших команд, по результатам 1-3 дней) играют друг против друга (1 против 2 — бой за первое место, 3 против 4 и т.д.). Остальные команды играют так же, как и в третий день.

Основные принципы составления наборов задач. Для того чтобы турнир был интересен, методическая комиссия (РуГу и ОлЮр) старается придумать такие задачи, которые хотелось бы решать. Формулируя эти принципы, проиллюстрируем их некоторыми примерами. Каждую задачу сопровождает единостишие (сочинённое ОлЮром и одобренное РуГу).

☐ Преемственность задач на протяжении турнира

☐ Введение в задачах новых понятий

Задача 1. (задачи про аборигенов встречаются каждый день на турнире) На острове аборигенов живут три племени: рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда лгут, и конформисты, которые могут лгать, только если их соседом является лжец (но могут сказать и правду). В колонну друг за другом встали 15 аборигенов. Каждый сказал (в том числе и первый): «Передо мной стоит конформист». Какое наибольшее количество рыцарей может быть в этой колонне?

Он честно лгал, и это было правдой...

Ответ: Пять.

Решение. Оценка. Среди любых трёх подряд стоящих аборигенов не более одного рыцаря. Рыцари не могут стоять подряд, иначе врёт стоящий после первого из них. Если они стоят через одного, то между ними стоит конформист, но он должен говорить правду, а перед ним рыцарь. Противоречие. Разбив колонну на пять троек

стоящих подряд аборигенов, получаем, что рыцарей не более пяти. Пример: ЛКРЛКРЛКРЛКРЛКР.

- ☐ Персонафикация персонажей (Типичный вопрос: кто прав — РуГу или ОлЮр?)
- ☐ Задачи с несколькими случаями (чтобы осваивали метод перебора)
- ☐ Классические темы (числовые ребусы и т.п.)
- ☐ Логические парадоксы

Задача 2. ОлЮр составил ребус (разные буквы соответствуют разным цифрам, одинаковые буквы — одинаковым): $\text{КУБ} + \text{КУБ} + \dots + \text{КУБ} = \text{КУЧА}$. РуГу утверждает, что ребус не имеет решения при любом количестве слагаемых. Прав ли РуГу?

Под слоем букв должны скрываться мысли...

Ответ: РуГу прав (в том смысле, что число решений ребуса равно нулю) и РуГу не прав (в том смысле, что ребус имеет решение — у него пустое множество ответов).

Решение. Ясно, что КУБов не более 10. Действительно, если КУБов более 10, то

$$\text{КУЧА} = \text{КУБ} + \text{КУБ} + \dots + \text{КУБ} \geq \text{КУБ}0 + \text{КУБ} > \text{К}(\text{У} + 1)00 > \text{КУЧА}$$

Противоречие.

Пусть было x КУБов. Тогда ребус можно переписать так:

$\text{КУ}(100 - 10x) = \text{Б} \cdot x - \text{ЧА}$. Если $x < 10$, то слева не менее, чем трёхзначное число, а справа не более чем двузначное. Если $x = 10$, то $\text{А} = 0$ и $\text{Б} = \text{Ч}$, что недопустимо в ребусах.

- ☐ Обязательность геометрии (хотя бы разрезания)
- ☐ Задачи с несколькими ответами (чтобы дети не считали первый найденный ответ единственно верным)
- ☐ Модернизация классических задач

Задача 3. РуГу попросил ОлЮра разрезать фигуру (см. рис. 1) на три клетчатых многоугольника так, чтобы из них можно было сложить квадрат. ОлЮр утверждает, что может выполнить просьбу РуГу пятью различными способами. Прав ли ОлЮр?

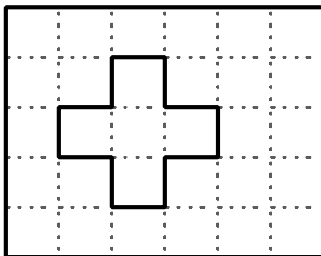


Рис. 1

Наличие дыр – ещё не признак сыра...

Ответ: ОлЮр прав.

Решение. См. рис. 2.

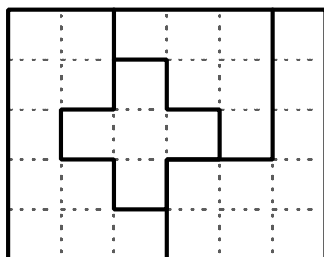
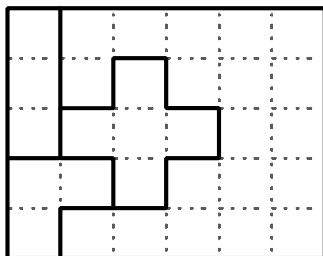
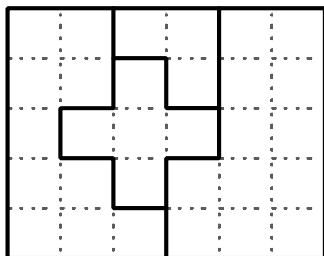
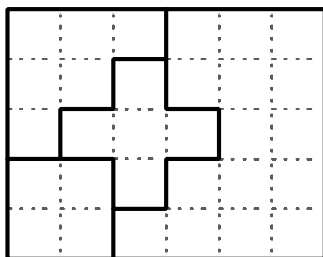
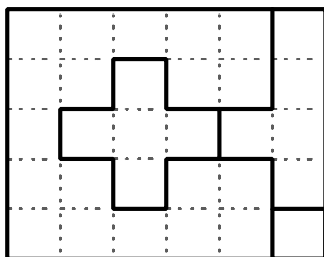


Рис. 2

- ☐ Использование задач, решаемых полным перебором
- ☐ Использование задач классической тематики (принцип крайнего и т.п.)
- ☐ Наличие простых и сложных задач в варианте

Задача 4. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 13, в записи которого каждая следующая цифра больше предыдущей.

В большом числе всем цифрам места хватит...

Ответ: 12346789.

Решение. Девятизначное 123456789 не подходит. Восьмизначные проверяем: без 1 — 23456789 (не подходит) и т.д. Подходит число без 5 — $12346789 = 949753 \cdot 13$.

- ☐ Обязательность комбинаторики
- ☐ Задачи с числами
- ☐ Возможность частично правильного решения

Задача 5. Сколько различных решений имеет ребус: $AU = PU - GU$? (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые)

Быть первым ноль стремился однозначно...

Ответ: 32.

Решение. Заметим, что $U = 0$, так как вычитаются одинаковые цифры, обозначенные одной и той же буквой. На место P и G выберем любые две различные ненулевые цифры. Таких способов $9 \times 8 = 72$. Так как буква P больше G, то из двух пар подходит только одна, упорядоченная в порядке возрастания. Получили 36 способов. Осталось отбросить те, где $P = 2G$, так как $G \neq A$. Таких пар 4 (P может быть 2, 4, 6, 8). Получим 32 решения.

- ☐ Вариация условий задачи в зависимости от класса
- ☐ Обязательное использование задач «оценка+пример»
- ☐ Использование задач классической тематики (принцип Дирихле и т.п.)

Задача 6 На доске 4×4 расположены по клеткам доминошки, причём никакие две не имеют общих клеток. Оказалось, что в каждой строке и каждом столбце нечётное число занятых клеток. Найдите

- наибольшее число доминошек (для 5 и 6 классов);
- наименьшее число доминошек (для 7 классов и сильных 6 классов).

Рождённым знать ответ не до решения...

Ответ: а) 6; б) 4.

Решение. а) В каждой строке, по крайней мере, одна клетка не занята, так как всего в строке 4 клетки, а число занятых — нечётно. Всего минимум 4 незанятых клетки. Значит, занято не более 12 клеток, и доминошек не более 6. Пример показан на рис. 3.

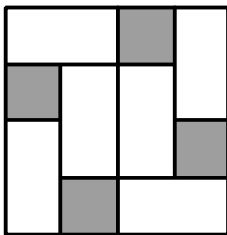


Рис. 3

б) Строку или столбец будем называть линией. Линий, в которых нет занятых клеток, не должно быть, так как 0 — это чётное число. Значит, все восемь линий должны содержать занятые клетки. Но одна доминошка может занять только три линии, значит, доминошек как минимум три.

Доминошку, целиком находящуюся в строке, назовём горизонтальной, а доминошку, целиком находящуюся в столбце — вертикальной. Так как доминошек минимум три, то найдутся две доминошки одного типа. Будем считать их горизонтальными. Кроме клеток, занятых горизонтальными доминошками, в каждой строке должна быть ещё минимум одна занятая клетка, чтобы число занятых клеток было нечётным. То есть ещё заняты как минимум четыре клетки и для этого потребуется ещё минимум две доминошки. Значит, доминошек не менее четырёх. Пример показан на рис. 4.

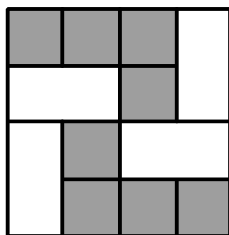


Рис. 4

Заключение. В последние два турнира появилась новая традиция — дарить участникам соревнований сборники задач Кубка Урала. В этих выпусках задачи собраны по тематическому принципу, а во втором ещё и содержат единостилия.

Я сделал так, а надо было лучше...

Литература

1. Кубок Урала. Творческие встречи. Избранные задачи/ О.Ю. Дмитриев, Р.Г. Женодаров. — Челябинск, 2012. — 120 с. ISBN 978-5-9904285-1-5.

2. Кубок Урала имени С.Г. Корытова. Творческие встречи. Избранные задачи/ О.Ю. Дмитриев, Р.Г. Женодаров. — Вып. 2 — Челябинск: Цицеро, 2013. — 118 с. ISBN 978-5-91283-439-4.

Олимпиада «Открытие»

**Д.А. Калинин,
ЦДО «Дистантное обучение»,
гимназия № 1534, г. Москва
d.a.kalinin@yandex.ru**

Олимпиада «Открытие» проходит в г. Кострома с 2005 года. Её участники — школьники 5-7 классов, показавшие лучшие результаты в олимпиадах в течение учебного года. По такой же системе олимпиада проводилась для участников выездных школ гимназий № 1514 и № 1534 г. Москвы. Автор идеи и составитель заданий олимпиады — Дмитрий Александрович Калинин.

Форма олимпиады — слияние обычной устной олимпиады и формы, в которой проходит конференция Турнира Городов. Принципиальные отличия от традиционной устной олимпиады: форма заданий и подведение итогов.

От устной олимпиады взята форма проведения. Её достоинство — свобода изложения своих мыслей, которая не ограничена отсутствием умения записывать текст решения. Ребёнок может пробовать сдать решение несколько раз. Даже если условие задачи с ходу не полностью понятно ребенку, он может разобраться и решить задачу со второй или третьей попытки.

Конференция Турнира Городов собирает лучших матшкольников РФ и других стран. На ней участникам предлагаются не задачи, а целые сюжеты. Каждый сюжет — набор задач, не просто объединённых одной темой, а являющихся дорожкой к решению определенной проблемы. Результат школьника — не баллы и не выстраивание по принципу «кто лучше кого», а достижения каждого в решении конкретных задач. Конечно, от ранжирования при этом отойти не удаётся, ребята сами решают, кто «круче». Для школьников 5-7 классов какой-то абсолютный результат необходим, поэто-

му реализована система, при которой учитывается и то, и другое: решающим результатом является сумма баллов, но учитываются успехи в погружении в задания.

Опишем проведение олимпиады по порядку.

На олимпиаде «Открытие» участникам предлагаются 3 задачи-сюжета, каждая из которых содержит 7-8 отдельных вопросов. Часто это либо сложная задача и пункты, подводящие к её решению, либо задача и её различные независимые друг от друга вариации.

Олимпиада проходит в режиме обычной устной олимпиады: участники решают задачи, полученные решения рассказывают судейским бригадам. Чтобы сократить время на понимание условий, в начале олимпиады участников собирают в одной аудитории и рассказывают суть самих ситуаций, описанных в задачах. Также разъясняется, как будут подводиться итоги. После этого ребята отправляются на свои рабочие места.

На сдачу решения каждого пункта участнику даётся три попытки. Если все три попытки использованы, а полного решения не предъявлено, участник не может получить баллы за этот пункт. Если решение пункта автоматически означает решение другого пункта, то второй пункт засчитывается только в том случае, если участник на это указал.

После окончания времени, выделенного на решение задач (обычно это 2-2,5 часа), ребята собираются в одной аудитории (на 25-30 минут), им рассказываются основные идеи, необходимые для решения. Затем проходит награждение участников.

Результаты подводятся по сумме набранных баллов. Каждый пункт задачи стоит заранее объявленное число баллов. Чтобы задачи казались равноценными, количество пунктов и общая их стоимость делается, по возможности, одинаковой. Например, в олимпиаде 2013 года задачи № 1 и № 2 содержали по 8 пунктов, задача № 3 — 7 пунктов, каждая задача стоила 15 баллов.

Также участники получают бонусные баллы за продвижение в задачах. То есть, если школьник сдавал много пунктов одной зада-

чи, то за эту задачу ему начислялись дополнительные баллы. Обычно размер бонуса и критерии заранее не объявляются, так как они зависят от общих результатов. Например, за 3-4 решенных пункта (из 6-7) одной задачи давался 1 балл, за 5-6 решенных пунктов — 2 балла, за полное решение задачи — 3 балла.

Каждый участник олимпиады получает диплом. В нём указывается количество баллов и дополнительные достижения. К последнему относятся продвижения в решении задач, которые были отмечены бонусными баллами. Текст диплома дополняется фразами «успех в задаче № ...», «продвижение в задаче № ...» или «серьёзное продвижение в задаче № ...» и, конечно, «полное решение задачи № ...».

Помимо этого, в дипломе указывается, что участник показал 1-ый, 2-ой или 3-ий результат олимпиады или что он стал лучшим в своей параллели.

Опыт неоднократного проведения олимпиады показал, что участие на равных условиях учеников 5, 6 и 7 классов воспринимается нормально. В число лучших входили ребята всех параллелей, абсолютно лучшие результаты показывали не только 6- и 7-классники, но однажды (в 2013 году) и 5-классник.

Задачи в таком виде удобно использовать для занятий математического кружка. Решение таких задач воспитывает взгляд на задачи как на ситуации, которые интересно исследовать. Такой подход помогает решать сложные задачи на традиционных олимпиадах.

Информация о прошедших олимпиадах (задания и результаты) расположена в сети Интернет по адресу:

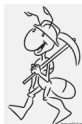
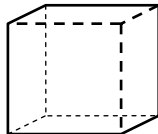
<http://kostroma-open.info/ustol57.html>.



Примеры заданий олимпиад

Задача 1. Муравьиные дорожки (олимпиада 2013 года)

- Ребра куба намазаны сахаром и пронумерованы числами от 1 до 12 так, что чем ребро слаще, тем номер больше. Муравей готов пробежать три ребра куба, но так, чтобы каждое следующее ребро было слаще предыдущего. Давайте постараемся выяснить, сколько может быть таких дорожек.



- 1.1. Сколько всего путей по трём ребрам куба?

Ответ: 48 путей.

Решение 1.1. Каждое ребро может быть средним для 4 путей (2 варианта продолжить в одну сторону и 2 варианта — в другую). Итого $4 \cdot 12 = 48$ путей.

Решение 1.1. Сначала выберем начальную вершину (8 способов), направление пути из этой вершины (3 варианта). Из второй вершины направление выбирается 2 способами, из третьей — также 2 способами. Всего $8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 96$. Каждую тройку ребер сосчитали 2 раза (в одном направлении и другом). Значит, всего $96 : 2 = 48$.

- 1.2. Из трёх ребер, выходящих из одной вершины, рассмотрим среднее по сладкости. Докажите, что оно входит, по крайней мере, в две муравьиные дорожки.

Решение 1.2. Пусть речь идёт о вершине A , ребро AB оказалось указанным средним. Значит, для остальных ребер a_1 и a_2 , выходящих из вершины A , выполнено $a_1 < AB$, $a_2 > AB$. Пусть из вершины B выходят также рёбра b_1 и b_2 . При любых соотношениях между AB и ребрами b_1 , b_2 будут две искомые дорожки:

— если $AB < b_1$ и $AB < b_2$, то будут дорожки $a_1 < AB < b_1$ и $a_1 < AB < b_2$;

— если $AB > b_1$ и $AB > b_2$, то будут дорожки $b_1 < AB < a_2$ и $b_2 < AB < a_2$;

— если $AB < b_1$ и $AB > b_2$, то будут дорожки $a_1 < AB < b_1$ и $b_2 < AB < a_2$.

- 1.3. Докажите, что для муравья всегда найдётся 8 дорожек.

Решение 1.3. Рассмотрим 4 вершины, среди которых нет соседних. Для каждой можно найти две дорожки (см. решение пункта 1.2). Они будут индивидуальными, так как средние звенья дорожек будут различны.

- 1.4. Приведите пример, когда на кубе ровно 8 дорожек для муравья.

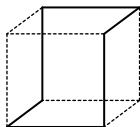
Решение 1.4. Пронумеруем (здесь и далее) ребра числами от 1 до 12 по возрастанию «сладкости». Пример, когда дорожек ровно 8: верхнее основание по циклу 1-3-2-4, нижнее — 5-7-6-8, остальные ребра нумеруем произвольно.

- 1.5. Любой замкнутый маршрут по ребрам содержит несколько дорожек по трем ребрам. Сколько из них точно не подойдут для муравья?

Решение 1.5. Всегда найдутся две дорожки, которые не подойдут: где среднее ребро минимально сладкое и где среднее ребро максимально сладкое.

- 1.6. Найдите на кубе 10 циклов, что любые два цикла пересекаются не более чем по двум рёбрам.

Решение 1.6. Шесть циклов — грани куба. На рисунке справа показан цикл, еще три получаются из него поворотами.



- 1.7. Докажите, что всегда найдутся 20 путей по трём ребрам, которые не подойдут для муравья.

Решение 1.7. В каждом цикле (см. решение 1.6) есть не менее двух «плохих» троек рёбер. Никакая такая тройка не может быть общей для двух циклов. Значит, из 48 троек ребер (см. решение 1.1) не менее 20 плохих.

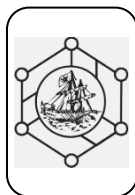
- 1.8. Приведите пример, когда на кубе ровно 28 дорожек для муравья.

Решение 1.8. Пример: верхнее основание по циклу 1-2-3-4, нижнее — 9-10-11-12, остальные ребра нумеруем произвольно.

Источник: по мотивам задачи турнира «Kostroma Open».

Задача 2. Фокусы экстрасенса (олимпиада 2010 года)

- Перед экстрасенсом лежит колода из 36 карт рубашкой вверх, то есть ему не видна масть карт. Он называет масть верхней карты и открывает её. Потом называет масть второй карты и открывает её. И так далее. Экстрасенс пытается угадать масть как можно больше-го числа карт.



- 2.1. Как экстрасенсу угадать масть 9 карт?

Решение 2.1. Достаточно постоянно называть одну и ту же масть.

- Рубашка карты показана на рисунке справа. Она не симметричная. У экстрасенса есть помощник. Он знает порядок карт в колоде, не может менять этот порядок. Но может расположить рубашку колоды так, как хочет.
- Как договориться экстрасенсу и помощнику, чтобы экстрасенс мог угадать масть

2.2. каких-то 18 карт, 2.3. каждой второй карты (второй, четвертой, ..., 36-ой), 2.4. каких-то 19 карт, 2.5. каких-то 20 карт, 2.6. более чем 20 карт?

Решение 2.2. Помощник красные карты направляет одним образом, а чёрные — другим. Экстрасенс все красные масти называет червями, все черные — крестями.

Решение 2.3. Рубашкой 1-ой карты помощник может подсказать цвет масти 2-ой карты, а рубашкой 2-ой карты — какая это масть из двух. Так экстрасенс отгадает масть 2-ой карты. Аналогично действуем дальше.

Решение 2.4. Способом, указанным в решении 2.2, из первых 34 карт экстрасенс угадает масть 17 карт. Масти оставшихся двух карт экстрасенс знает. Он договорил с помощником об определенном порядке четырех мастей. Тот рубашкой предпоследней карты подсказывает, в нужном порядке масти двух последних карт или нет. Так экстрасенс угадает масти двух последних карт, то есть всего $17 + 2 = 19$ карт.

Решение 2.5 и 2.6. Экстрасенс будет угадывать 4-ю, 6-ю, ..., 32-ю, 34-ю, 35-ю и 36-ю карты, как описано ранее. Среди 2-ой, 3-ей, 5-ой, ..., 33-ый карт найдутся 5 карт одной масти. Положением первых двух карт помощник подскажет, какая эта масть.

Источник: по мотивам задачи ММО, 2004 год, 10 класс.

Замечание. В решении задачи, указанном в материалах ММО, есть способ, как экстрасенсу может угадать 24 карты.

Содержание

<i>Введение</i>	3
А.Ю. Эвнин. <i>Теорема Холла и задачи о фокусниках</i>	9
С.А. Беляев. <i>Восстановление треугольника по заданным точкам</i>	19
Ю.А. Блинков. <i>Симедиана</i>	33
С.Л. Синякова. <i>Вопросы здравомыслящего человека или «как до этого догадаться?»</i>	47
С.М. Крачковский. <i>Переформулировки условия и трансформация задачи</i>	65
П.В. Чулков. <i>Олимпиадные задачи — на уроке</i>	78
М.А. Латышева. <i>Применение моделей в решении текстовых задач</i>	85
О.Г. Вержховская, З.В. Ильиченкова. <i>Практические работы на уроках геометрии в старшей школе</i>	96
С.А. Данелян. <i>Опыт применения ПО GeoGebra при решении заданий с параметрами высокого уровня</i>	104
О.Ю. Дмитриев, Р.Г. Женодаров. <i>Олимпиадные задачи Кубка Урала</i>	117
Д.А. Калинин. <i>Олимпиада «Открытие»</i>	124