# Учим математике-6

## Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2017

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-6.** Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2017. — 138 с.

ISBN 978-5-4439-2527-1

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики, проходившей с 30 апреля по 9 мая 2016 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-6
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Технический редактор *Т. Струков*
Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 07.04.2017 г. Формат $60 \times 90$ $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 9 печ. л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“». 121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

**ISBN 978-5-4439-2527-1**

# Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***шестой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики***. Семинар был организован Образовательным фондом «Талант и успех» совместно с Российской ассоциацией учителей математики, Центром Педагогического Мастерства города Москвы и Московским Центром Непрерывного Математического Образования. Он проходил на базе Образовательного центра «Сириус» в г. Сочи (Адлерский район) на берегу Черного моря в период с 30 апреля по 9 мая 2016 года.

Материалы предыдущих школ-семинаров — см. сборники «Учим математике», «Учим математике 2», «Учим математике 3», «Учим математике 4» и «Учим математике 5» – М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014 и 2015 гг.

На семинар приглашались все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие более семидесяти человек, представлявших республики Башкорстан, Дагестан и Татарстан, Краснодарский и Ставропольский край, города Липецк, Омск, Орел, Саратов, Челябинск, Московскую и Ярославскую области, а также Москву, Санкт-Петербург и даже Стокгольм.

Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение семинара на базе ОЦ «Сириус» параллельно с очередной детской учебной сменой дало возможность изменить традиционный регламент выездных школ-семинаров. Наряду с лекциями, семинарами и практическими занятиями для учителей, наиболее опытные преподаватели — участники семинара проводили мастер-классы со школьниками, а остальные участники семинара выступали на этих занятиях в качестве ассистентов или зрителей. Эта работа была организована таким образом, чтобы любой участник семинара смог, при желании, посетить занятия у каждого преподавателя, проводившего мастер-классы. Проведенные занятия со школьниками «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Помимо этого, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, каждый участник семинара имел возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением.

По итогам школы-семинара все участники получили удостоверение о прохождении курсов повышения квалификации.

Научным руководителем семинара был директор ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, член Правления Образовательного Фонда «Талант и успех», учитель математики школы №57 г. Москвы, к. ф.-м. н. И.В. Ященко, его заместителем, координатором и методистом семинара — старший методист и учитель математики школы №218 г. Москвы, сотрудник ЦПМ и МЦНМО, Заслуженный Учитель РФ А.Д. Блинков, методистом — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора и учитель математики ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ П.В. Чулков, координатором — учитель математики лицея «Вторая школа» г. Москвы, сотрудник ЦПМ Н.А. Наконечный.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить различные экскурсионные поездки. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

Организаторы семинара надеются, что последующие выездные школы будут еще более содержательными.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем учителям, которые нашли силы и время подготовить статьи для этого сборника.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

**Программа шестой открытой школы-семинара**

| 1 мая | |
|---|---|
| Время | Докладчики и содержание |
| 9.00–9.50 | **М.И. Случ, А.Д. Блинков, Н.А. Наконечный**<br>Организационная информация |
| 10.00–10.50 | **Д.Г. Мухин**<br>Верные и неверные признаки равнобедренного треугольника |
| 11.10–13.00 | **В.А. Рыжик**<br>Об учебниках по геометрии коллектива авторов А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик |
| 14.45–16.35 | **И.Б. Писаренко**<br>Метод вспомогательной задачи как рабочий инструмент учителя математики |

| | |
|---|---|
| 2 мая | |
| 9.00–10.50 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 11.10–13.00 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 14.45–16.35 | **К.М. Столбов**<br>О содержании и стиле изложения математики в классах ее углубленного изучения (из опыта работы) |
| 3 мая | |
| 9.00–10.50 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 11.10–13.00 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 14.45–16.35 | **К.В. Медведев**<br>Криптография на уроках математики |
| 4 мая | |
| 9.00–10.50 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 11.10–13.00 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 14.45–15.35 | **К.В. Козеренко**<br>Гомотетия. Имитация научного исследования |
| 15.45–16.35 | **А.Г. Королева**<br>Проведение творческих уроков в 6-7 классах |
| 5 мая | |
| 9.00–10.50 | **А.В. Шаповалов**<br>Уравнение за кадром, или Учим строить математическую модель |

| | |
|---|---|
| 11.10–13.00 | **А.С. Штерн**<br>Теория чисел почти без алгебры |
| 14.45–15.35 | **Д.Э. Шноль**<br>Вокруг программы 6 класса |
| 15.45–16.35 | **П.В. Чулков**<br>Примеры циклов задач |
| 6 мая | |
| 9.00–10.50 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 11.10–13.00 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 14.45–15.35 | **Г.И. Вольфсон**<br>Задачи на делимость, примеры и конструкции в ЕГЭ по математике |
| 15.45–16.35 | **А.В. Иванищук**<br>Внеклассная работа в лицее 1511 г. Москвы |
| 7 мая | |
| 9.00–10.50 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 11.10–13.00 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 14.45–15.35 | **В.Ю. Лупашевская**<br>Лучшие задачи №18 (С5) из типовых экзаменационных вариантов ЕГЭ |
| 15.45–16.35 | **А.В. Забелин**<br>Форматы работы с задачей на математическом кружке в зависимости от возраста участников |
| 8 мая | |
| 9.00–10.50 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |

| | |
|---|---|
| 11.10–13.00 | Посещение и обсуждение занятий, проводимых со школьниками |
| 14.45–15.35 | **А.Ю. Эвнин**<br>Формулы «включения – исключения» (новое компактное доказательство, применение к хроматическому многочлену графа и выводу формулы Эйлера-Пуанкаре для простых многогранников) |
| 15.45–16.35 | **А.С. Ваганова**<br>Решение неравенств. Метод координат в пространстве. Текстовые задачи (из опыта работы) |
| 16.45–17.45 | **М.И. Случ, А.Д. Блинков, Н.А. Наконечный**<br>Подведение итогов семинара |

# Четырнадцать «восемнадцатых»

**В.Ю. Лупашевская,**
**ФМШ 2007, г. Москва**
**vasilisa.lupashevskaya@gmail.com**

«Введение параметра способствовало появлению качественно новых типов задач, вдохнуло, если так можно выразиться, новую жизнь в такие традиционные типы задач, как решение уравнений и неравенств»

*И. Ф. Шарыгин*

Однажды Израиль Моисеевич Гельфанд на вопрос, как увлечь ребёнка математикой, ответил: «*Надо давать хорошие задачи*». Его попросили уточнить: «*А какие задачи хорошие?*» Помедлив несколько секунд, Гельфанд ответил: «*Хорошие задачи — это интересные и лёгкие*».

Именно с двух таких задач мы и начнём. Автор первой задачи — С.Л. Берлов.

**1**. Дан квадратный трёхчлен $f(x) = 2x^2 - ax + 7$. При каких значениях параметра $a$ найдётся такое число $\varphi$ из промежутка $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, что выполнится равенство $f(\sin\varphi) = f(\cos\varphi)$ ?

**Решение**. Если $f(\sin\varphi) = f(\cos\varphi)$, то

$$2\sin^2\varphi - a\sin\varphi + 7 = 2\cos^2\varphi - a\cos\varphi + 7 .$$

Получается, что $2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = a(\sin\varphi - a\cos\varphi)$. Поскольку на указанном промежутке $\sin\varphi > \cos\varphi$, полученное равенство можно сократить на $(\sin\varphi - \cos\varphi)$.

И тогда получается, что $a = 2(\sin\varphi + \cos\varphi) = 2\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$.

Если $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\varphi + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ может принимать любое значение от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 1. Следовательно, подходящие значения параметра $a$ образуют промежуток $(2; 2\sqrt{2})$.

Но можно рассуждать и иначе. Если $f(\sin\varphi) = f(\cos\varphi)$, то точки $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ симметричны относительно вершины параболы $x_0 = \frac{a}{4}$: $\sin\varphi - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} - \cos\varphi$. Отсюда следует, что $a = 2(\sin\varphi + \cos\varphi)$ ...

Ответ: $(2; 2\sqrt{2})$.

Вторая задача предложена А.Д. Блинковым.

**2.** Для всех значений параметра $a$ решить уравнение:

$$a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}.$$

Решение. Далеко не всегда можно объяснить себе, почему в голову неожиданно приходит идея решения. То ли ощущение некоторой дисгармонии в условии задачи, то ли какие-то неуловимые ассоциации, может быть даже связанные с преобразованиями алгебраических выражений, подсказывают нам выполнить следующие действия:

$$a^5 + x = \sqrt[5]{a - x} \Rightarrow a^5 + (x - a) + a = \sqrt[5]{a - x} \Rightarrow a^5 + a = (a - x) + \sqrt[5]{a - x}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$. Перепишем уравнение в виде $f(a) = f(\sqrt[5]{a - x})$; так как функция $f(t)$ возрастает, исходное уравнение эквивалентно уравнению $a = \sqrt[5]{a - x} \Rightarrow x = a - a^5$.

Но можно действовать и иначе! Для каждого конкретного значения параметра $a$ левая часть исходного уравнения — возрастает с увеличением $x$, а правая — убывает. Поэтому, если корень существует, то он — единственный! И здесь его можно подобрать (угадать). Сделать это совсем не трудно, намного труднее догадаться начать подбор решения.

Ответ: $x = a - a^5$.

В решениях этих двух задач одновременно затронуто так много тем и технических аспектов, что их перечисление («ключевых слов») займёт не меньше места, чем сами решения. Задачи с параметром, как нельзя лучше подходят для реализации принципа «параллельности», когда вместо последовательного изучения тем в поле зрения удерживают сразу несколько, постепенно продвигаясь по ним вперёд и вглубь.

Следующие задачи предлагались (с ответами) участникам семинара в Образовательном центре «Сириус». Здесь же приводятся и их решения.

**3.** Найдите, при каких значениях $a$ один из корней многочлена $(a^2+a+1)x^2+(2a-1)x+a^2=0$ больше 2, а другой меньше 2 (Физфак МГУ, 1961).

**4.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x-3-a)\cdot\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$$

имеет хотя бы один корень (ЕГЭ-2013).

**5.** Найдите все значения $a$, при которых уравнение

$$\sqrt{a-4\sin^4 x}=\cos^2 x$$

имеет решение.

**6.** Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых область значений функции $y=\dfrac{\cos 3x+a}{\cos 6x+5}$ содержит число 1.

**7.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{\sqrt{a+1}-2\cos 3x+1}{\sin^2 3x+a+2\sqrt{a+1}+2}$ содержит отрезок $[2;3]$.

**8.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a-(a^2-2a-3)\cos x+4}{\sin^2 x+a^2+1}<1$ содержит отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**9.** Найдите все значения $a$, для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ имеет хотя бы один корень принадлежащий промежутку $[-1;1)$ (ЕГЭ-2013).

**10**. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\log_{3x-4}(a+9x+5)=-1$ имеет единственное решение на промежутке $\left(\dfrac{4}{3};2\right]$.

**11**. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $4x^3-ax^2+2x-1=0$ имеет хотя бы одно решение на интервале $(0;1)$.

**12.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение $x^3+ax^2+3x-2=0$ не имеет ни одного решения на интервале $(0;2)$.

**13**. При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3+6x^2+ax+8=0$ имеет не более двух решений (ОММО-2016).

**14.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-x\log_2(b-3)+6=0$ имеет единственное решение на отрезке $[-2;2]$.

## Ответы

**3.** $\left(\dfrac{-4-\sqrt{6}}{5};\dfrac{-4+\sqrt{6}}{5}\right)$ **4.** $(-\infty;-6];[0;+\infty)$ **5.** $\left[\dfrac{4}{5};4\right]$

**6.** $a\in\left[\dfrac{31}{8};7\right]$ **7.** $a=-1$ **8.** $a\in\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$

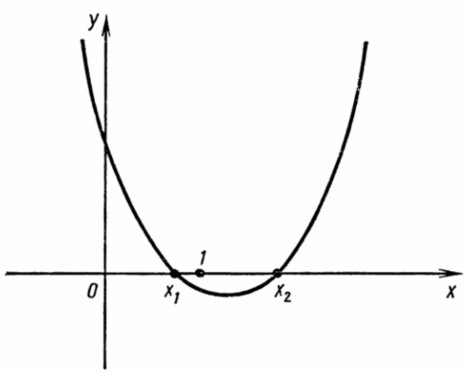
**9.** $\left[-\dfrac{5}{4};-1\right);(-1;1]$ **10.** $[-22{,}5;-19);(-19;+\infty)$ **11.** $a<5$ **12.** $a\le-3$

**13**. $[-15;+\infty)$ **14**. $3<b\le\dfrac{385}{128};\ b=2051;\ b>32771$.

## Решения

**3.** Найдите, при каких значениях $a$ один из корней многочлена $(a^2+a+1)x^2+(2a-1)x+a^2=0$ больше 2, а другой меньше 2 (Физфак МГУ, 1961).

Решение. Решение легко получается на основании простого наглядного соображения. Так как коэффициент $(a^2+a+1)>0$, ветви параболы $y(x)=(a^2+a+1)x^2+(2a-1)x+a^2$ направлены вверх. По условию эта парабола должна пересекать ось $x$, причём отрезок $[x_1;x_2]$ должен содержать внутри себя точку 2. Следовательно, значение квадратичной функции в этой точке должно быть отрицательным.



Решая относительно параметра $a$ неравенство $y(2)<0$, получаем ответ: $\left(\dfrac{-4-\sqrt{6}}{5};\dfrac{-4+\sqrt{6}}{5}\right)$.

**4.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x-3-a)\cdot\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$$

имеет хотя бы один корень (ЕГЭ-2013).

Решение. Обозначив $\cos x=t, |t|\le 1$, получаем квадратное уравнение $t^2+(3+a)\cdot t-4=0$. Ветви параболы $f(t)=t^2+(3+a)\cdot t-4$ направлены вверх, и можно заметить, что $f(0)=-4<0$, следовательно, наше квадратное уравнение имеет два решения, но для того, чтобы хотя бы одно из них удовлетворяло условию $|t|\le 1$, надо, чтобы выполнилось хотя бы одно из двух условий: $\left[\begin{array}{l} f(-1)\ge 0,\\ f(1)\ge 0.\end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-6];[0;+\infty)$.

**5.** Найдите все значения $a$, для каждого из которых уравнение $\sqrt{a-4\sin^4 x}=\cos^2 x$ имеет решение.

Решение. $\sqrt{a-4\sin^4 x}=\cos^2 x$. Так как $\cos^2\ge 0$, обе части уравнения можно возвести в квадрат, получаем $a-4\sin^4 x=\cos^4 x$.

Чтобы удобнее было ввести новую переменную $\cos 2x=t$, умножим всё на 4:

$$4a-4\cdot 4\sin^4 x=4\cos^4 x,$$

так как

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x \text{ и } 2\cos^2 x=1+\cos 2x,$$

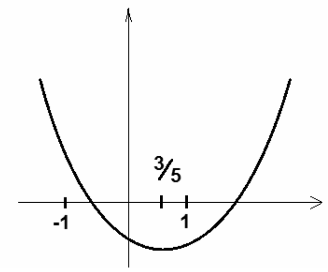
получаем уравнение

$$4a-4\cdot(1-t)^2=(1+t)^2 \Rightarrow 5t^2-6t+5-4a=0.$$

Опять рассматриваем квадратичную функцию

$$f(t)=5t^2-6t+5-4a,$$

её вершина $t_0=\dfrac{3}{5}$.




Так как точка $t=-1$ удалена от абсциссы вершины параболы $t_0=\frac{3}{5}$ на большее расстояние, чем точка $t=1$, для ответа на вопрос задачи решаем систему неравенств $\begin{cases} f(t_0)\le 0, \\ f(-1)\ge 0 \end{cases}$.

Ответ: $\left[\frac{4}{5}; 4\right]$

**6.** Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых область значений функции $y=\frac{\cos 3x+a}{\cos 6x+5}$ содержит число 1.

Решение. Заметим, что и здесь функция $y(x)$ непрерывна, так как знаменатель $\cos 6x+5>0$. Найдем условия, при которых уравнение $\frac{\cos 3x+a}{\cos 6x+5}=1$ имеет решения. Обозначив $\cos 3x=t, |t|\le 1$, получим уравнение

$$2t^2-t-a+4=0.$$

Рассмотрим параболу $f(t)=2t^2-t-a+4$. Ее вершина имеет абсциссу $t_0=\frac{1}{4}$. Далее рассуждаем, как в задаче **5**. Так как точка $t=-1$ удалена от вершины параболы на большее расстояние, чем точка $t=1$, то уравнение $f(t)=0$ будет иметь на отрезке $[-1;1]$ хотя бы один корень при выполнении следующих двух условий:

$$\begin{cases} f(t_0)\le 0, \\ f(-1)\ge 0 \end{cases}.$$

Из первого неравенства находим, что $a \ge \frac{31}{8}$, а из второго получаем, что $a \le 7$. В итоге получаем ответ: $a \in \left[\frac{31}{8}; 7\right]$.

**7.** Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a+1} - 2\cos 3x + 1}{\sin^2 3x + a + 2\sqrt{a+1} + 2}$ содержит отрезок $[2; 3]$.

Решение. Обозначив $\sqrt{a+1} + 1 = b \ge 1$ и $\cos 3x = t$, получим функцию $y(t) = \frac{b - 2t}{1 - t^2 + b^2}$. Знаменатель дроби при $|t| \le 1$ положителен, и на этом множестве функция $y(t)$ непрерывна. Отрезок $[2; 3]$ содержится в множестве значений функции $y(t)$ тогда и только тогда, когда уравнения $y(t) = 3$ и $y(t) = 2$ имеют решения, принадлежащие области определения $|t| \le 1$.

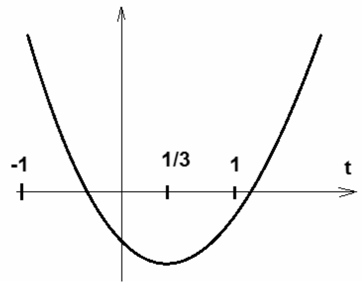
В первом случае мы получаем уравнение

$$3t^2 - 2t - 3b^2 + b - 3 = 0,$$

а во втором — уравнение

$$2t^2 - 2t - 2b^2 + b - 2 = 0.$$

Рассмотрим квадратичную функцию $f(t) = 3t^2 - 2t - 3b^2 + b - 3$. Абсцисса вершины параболы $t_0 = \frac{1}{3}$, причем $f(t_0) < 0$, так как $-3b^2 + b - 3\frac{1}{3} < 0$ при всех значениях $b$.



Так как точка $t=-1$ удалена от абсциссы вершины параболы на большее расстояние, чем точка $t=1$, уравнение $f(t)=0$ будет иметь на отрезке $[-1;1]$ хотя бы один корень, если $f(-1)\geq 0$.

Это условие выполняется при $-\frac{2}{3}\leq b\leq 1$. Но ведь $b\geq 1$! Следовательно, здесь $b=1$, и нам осталось только убедиться, что при этом значении $b$ и второе уравнение имеет подходящие корни. Итак, $b=1$, следовательно, $a=-1$.

**8.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a-(a^2-2a-3)\cos x+4}{\sin^2 x+a^2+1}<1$ содержит отрезок $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

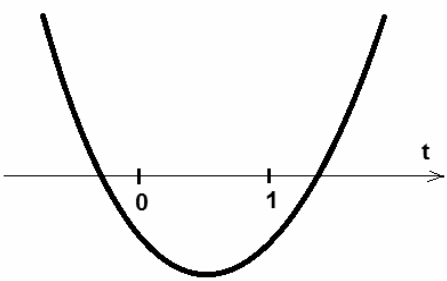
Решение. При любых значениях $x$ и $a$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$a-(a^2-2a-3)\cos x+4<\sin^2 x+a^2+1.$$

Введя переменную $t=\cos x$, получаем квадратное неравенство относительно $t$:

$$t^2-(a^2-2a-3)t-a^2+a+2<0.$$

Так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$ $\cos x$ принимает все значения от 0 до 1, то при искомых значениях параметра $a$ график функции $f(t)=t^2-(a^2-2a-3)t-a^2+a+2$ должен иметь следующий вид.



Это выполнится, если $\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases}$ Получаем систему неравенств: $\begin{cases} 2a^2 - 3a - 6 > 0, \\ a^2 - a - 2 > 0 \end{cases}$. Решив ее, получаем ответ:

$$a \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right).$$

**9.** Найдите все значения $a$, для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ имеет хотя бы один корень принадлежащий промежутку $[-1; 1)$ (ЕГЭ-2013).

Решение. Начинаем решать, как самое обычное логарифмическое уравнение:

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1, \\ a - x + 2 = (1-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ x^2 - x - 1 - a = 0 \end{cases}.$$

Как и в предыдущем примере, рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x^2 - x - 1 - a$ и обратим внимание на то, что нам известна абсцисса вершины параболы $x_0 = \frac{1}{2}$. Чтобы корни были, должно выполняться условие $f(x_0) \le 0 \Rightarrow a \ge -\frac{5}{4}$. Теперь выясним, при каких значениях параметра $a$ один из корней квадратного уравнения равен 0. Подставив это значение в уравнение, находим, что $a = -1$. А чему в этом случае равен второй корень? Оказывается, $x_2 = 1$, но это и неудивительно, ведь точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ симметричны относительно вершины параболы $x_0 = \frac{1}{2}$. Итак, к условию $a \ge -\frac{5}{4}$ добавилось условие $a \neq 1$.

Так как точка $x=-1$ удалена от абсциссы вершины параболы $x_0=\dfrac{1}{2}$ на большее расстояние, чем точка $x=1$, уравнение $f(x)=0$ будет иметь на промежутке $[-1;1)$ хотя бы один корень, если $f(-1)\geq 0$, $\Rightarrow a\leq 1$. Ответ: $\left[-\dfrac{5}{4};-1\right);(-1;1]$.

**10**. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $\log_{3x-4}(a+9x+5)=-1$ имеет единственное решение на промежутке $\left(\dfrac{4}{3};2\right]$.

Решение. Начинаем, как в задаче **7,** но вскоре окажется, что ситуация здесь иная: абсцисса вершины параболы нам неизвестна, точнее сказать, что она зависит от параметра $a$.

$$\begin{cases} 3x-4>0, \\ 3x-4\neq 1, \\ a+9x+5=\dfrac{1}{3x-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\dfrac{4}{3}, \\ x\neq\dfrac{5}{3}, \\ 27x^2-(21-3a)x-4a-21=0 \end{cases}.$$

Попробуем выяснить, при каких значениях параметра $a$ один из корней полученного квадратного уравнения равен $x_1=\dfrac{5}{3}$. Подставив это значение в уравнение, находим, что $a=-19$. А чему в этом случае равен второй корень? Так как $x_1+x_2=\dfrac{21-3a}{27}$, находим, что $x_2=\dfrac{11}{9}<\dfrac{4}{3}$. Тем самым мы выяснили, что при $a=-19$ исходное логарифмическое уравнение не имеет решений на промежутке $\left(\dfrac{4}{3};2\right]$.

Если же подставить в квадратное уравнение $x=\dfrac{4}{3}$ с целью выяснить, при каких ещё значениях параметра нас могут поджидать «неприятности», мы неожиданно обнаружим, что ни при каких! Параметры взаимно уничтожаются, и мы получаем, что $-1=0$, а это не совсем правильно. Но в какой-то счастливый момент приходит понимание того, что же мы получили в результате такой подстановки:

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=-1<0, \text{ где } f(x)=27x^2-(21-3a)x-4a-21.$$

А это означает, что уравнение $f(x)=0$ имеет два корня, причём один из них меньше, чем $\frac{4}{3}$, а другой — больше. И чтобы найти все значения *a*, при которых исходное логарифмическое уравнение имеет единственное решение на промежутке $\left(\frac{4}{3};2\right]$, нам надо решить неравенство $f(2)\geq 0$ и исключить из найденных значений $a=-19$. Ответ: $[-22{,}5;-19);(-19;+\infty)$.

**11**. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $4x^3-ax^2+2x-1=0$ имеет хотя бы одно решение на интервале $(0;1)$.

Решение. Пусть $f(x)=4x^3-ax^2+2x-1$. Так как $f(0)=-1<0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ в случае выполнения условия $f(1)>0$ уравнение $f(x)=0$ обязательно будет иметь хотя бы одно решение на интервале $(0;1)$.

$f(1)=5-a>0$, следовательно, $a<5$. Теперь надо доказать, что в случае $a\geq 5$ решений на указанном интервале не будет. Сделать это оказалось не очень-то и просто. Всего три строчки, но дались они нелегко.

Выделим полный квадрат, прибавив и отняв $x^2$.

$$4x^3-ax^2+(x^2-x^2)+2x-1 \Rightarrow x^2(4x+1-a)-(x-1)^2.$$

Но в случае $a\geq 5$ на интервале $(0;1)$ это выражение отрицательно, так как $(4x+1-a)<5-a<0$. Получатся, что на интервале $(0;1)$ $f(x)<0$ при $a\geq 5$, что и требовалось установить. Заметим, что и эту, и следующую задачу можно решить, исследовав поведение функции $a(x)$. Таким способом будут решены задачи **13** и **14**.

Ответ: $a < 5$.

**12.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение $x^3 + ax^2 + 3x - 2 = 0$ не имеет ни одного решения на интервале $(0; 2)$.

Решение. Пусть $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 2$. Так как $f(0) = -2 < 0$, то в случае выполнения условия $f(2) > 0$ уравнение $f(x) = 0$ обязательно будет иметь хотя бы одно решение на интервале $(0; 2)$. $f(2) = 12 + 4a > 0$ при $a > -3$. Покажем теперь, что при $a \le -3$ решений на интервале $(0; 2)$ не будет. Здесь это делается немного иначе, чем в задаче **9**. В ней выделялся полный квадрат, а здесь — куб. Прибавим и отнимем $3x^2$:

$$x^3 + ax^2 + 3x - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x^2 + ax^2 + 3x - 2 = (x-1)^3 - 1 + (3+a)x^2 .$$

При $a \le -3$ на интервале $(0; 2)$ это выражение меньше нуля, так как здесь $(x-1)^3 - 1 < 0$, и $(3+a)x^2 \le 0$. Следовательно, при $a \le -3$ на интервале $(0; 2)$ $f(x) < 0$.

Ответ: $a \le -3$.

**13**. При каких значениях параметра $a$ уравнение $x^3 + 6x^2 + ax + 8 = 0$ имеет не более двух решений (ОММО-2016).

Решение. Так как $x = 0$ не является решением исходного уравнения, оно равносильно уравнению $a = \dfrac{-x^3 - 6x^2 - 8}{x}$. Обозначив правую часть через $f(x)$, исследуем поведение этой функции. Заметим, что $f(x) \to -\infty$ при $x \to \pm\infty$. Также $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = -2x - 6 + \frac{8}{x^2} = \frac{8 - 6x^2 - 2x^3}{x^2} = -\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^2} .$$

Получается, что на промежутке $(-\infty; -2]$ функция $f(x)$ возрастает от $-\infty$ до $f(-2) = 12$; на промежутке $[-2; 0)$ — продолжает возрастать от 12 до $+\infty$; на промежутке $(0;1)$ — возрастает от $-\infty$ до $f(1)=-15$; на промежутке $[1;+\infty)$ — убывает от $-15$ до $-\infty$.

Получается, что каждое значение из промежутка $(-\infty;-15)$ функция $f(x)$ принимает ровно три раза; $-15$ — два раза (один раз в точке 1, а второй раз — на промежутке $(-\infty;-2)$; каждое значение из промежутка $(-15;+\infty)$ — один раз.

Следовательно, уравнение $a=\dfrac{-x^3-6x^2-8}{x}$, а вместе с ним и исходное уравнение имеет не более двух решений при $a\geq -15$. Ответ: $[-15;+\infty)$.

**14.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-x\log_2(b-3)+6=0$ имеет единственное решение на отрезке $[-2;2]$.

Решение. Обозначив $\log_2(b-3)=a$, получим уравнение, подобное тем, что встретились в трёх предыдущих задачах: $x^3+4x^2-ax+6=0$. Так как ни при каком значении параметра число $x=0$ не является корнем этого уравнения, перепишем его так: $a=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$. Рассмотрим функцию

$$f(x)=x^2+4x+\frac{6}{x}, -2\leq x\leq 2, x\neq 0.$$

Её производная $f'(x)=2x+4-\dfrac{6}{x^2}=\dfrac{2(x-1)(x^2+3x+3)}{x^2}$. Следовательно, $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty;0)$ и на промежутке $(0;1]$, а на промежутке $[1;+\infty)$ — возрастает. Следовательно, точка $x=1$ является точкой минимума, причём $f(1)=11$. Нам важно знать также и значения функции в двух крайних точках отрезка $[-2;2]$: $f(-2)=-7$ и $f(2)=15$. Получается, что функция $f(x)$ на промежутке $[-2;0)$ убывает от $-7$ до $-\infty$, на промежутке $(0;1]$ убывает от $+\infty$ до 11, на промежутке $[1;2]$ возрастает от 11 до 15. Из полученных свойств функции $f(x)$ можно определить число корней исходного уравнения на отрезке $[-2; 2]$ для каждого значения параметра $a$:

При $a \le -7$ уравнение имеет ровно один отрицательный корень; при $-7 < a < 11$ корней нет; при $a = 1$ корень единственный; при $11 < a \le 15$ ровно два корня; при $a > 15$ корень опять единственный. Окончательный ответ найдём, решив следующие два неравенства и одно уравнение: $\log_2(b-3) \le 7$, $\log_2(b-3) = 11$, $\log_2(b-3) > 15$.

Ответ: $3 < b \le \frac{385}{128}$; $b = 2051$; $b > 32771$.

# Вокруг формулы включения-исключения

**А.Ю. Эвнин,**
**ЮУрГУ, г. Челябинск**
**graph98@yandex.ru**

В популярных руководствах по комбинаторике [1-3] формулу включения — исключения доказывают методом математической индукции. В монографии [4] она доказывается с помощью обращения Мёбиуса, а в учебнике [5] — с применением свойств биномиальных коэффициентов.

Между тем, существует короткий способ вывода указанной формулы. В основе его лежит следующее простое, но полезное утверждение.

**Лемма 1.** *В непустом конечном множестве подмножеств чётной и нечётной мощности поровну. Среди непустых подмножеств количество подмножеств нечётной мощности на единицу больше, чем количество подмножеств чётной мощности.*

Доказательство. Пусть $A$ — непустое конечное множество. Зафиксируем некоторый его элемент $x$. Все подмножества множества $A$ разбиваются на пары вида $\langle C, C \cup \{x\} \rangle$ где $C \subset A \setminus \{x\}$. В каждой такой паре одно множество чётной мощности, а другое — нечётной (ведь эти мощности отличаются на единицу). Отсюда следует утверждение леммы.

**Теорема 1. [Формула включения-исключения]**

*Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— подмножества некоторого конечного множества* $U$ *,* $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ *Тогда*

$$\left| \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \right| = \sum_{I \subset N} (-1)^{|I|} |B_I|, \qquad (1)$$

*где* $\overline{A_i} = U \setminus A_i$, $B_\varnothing = U$ и $B_I = \bigcap_{i \in I} A_i$, если $\varnothing \neq I \subset N$.

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ и подсчитаем его вклад в правую часть (1). Пусть $J_x = \{j \mid x \in A_j\}$. Если $J_x \neq \varnothing$, этот вклад равен $\sum_{I \subset J_x} (-1)^{|I|} \cdot 1 = 0$, что непосредственно вытекает из леммы. Если же элемент $x$ не входит ни в одно из множеств $A_i$, то за счёт того, что $x \in B_\varnothing = U$, его вклад равен единице. Значит, правая часть формулы (1) равна количеству элементов пересечения множеств $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Замечание. Если упорядочить множества индексов $I$ по возрастанию их индексов, то получим традиционную форму записи формулы включения-исключения:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

**Лемма 2.** *Используя предположения и обозначения теоремы 1, введём для каждого множества индексов* $I \subset N$ *множество* $D_I$, *состоящее в точности из элементов, входящих в множества* $A_i$ *при* $i \in I$ *и не входящих в* $A_i$, *при* $i \notin I$. *Тогда*

$$\left|D_I\right| = \sum_{J \supset I} (-1)^{|J|-|I|} \left|B_J\right| \qquad (2)$$

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $x \in U$ и подсчитаем его вклад в правую часть доказываемой формулы. Пусть, как и выше, $J_x = \{j \mid x \in A_j\}$.

Если $x \in D_I$, т. е. $J_x = I$, элемент $x$ учитывается ровно один раз в правой части (2). Если же $J'_x = J_x \setminus I \neq \varnothing$, то, обозначив $J' = J \setminus I$, получим $|J'| = |J| - |I|$, а вклад элемента $x$ в правую часть (2) будет равен

$$\sum_{J' \subset J'_x} (-1)^{|J'|} \cdot 1 = 0$$

в силу леммы 1. Это и означает, что правая часть формулы (2) равна мощности множества $D_I$.

**Теорема 2. [Обобщённая формула включения-исключения]**

*Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— подмножества некоторого конечного множества* $U$*, а* $M(r)$ *— число элементов множества* $U$*, которые входят ровно в* $r$ *различных множеств* $A_i$ *(если* $r=0$*, то ни в одно). Тогда (в обозначениях теоремы 1)*

$$M(r) = \sum_{|I|\ge r} |B_I| \cdot C_{|I|}^{r} (-1)^{|I|-r}.$$

Доказательство. Очевидно, $M(r) = \sum_{|I|=r} |D_I|$. Применим лемму 2, а затем поменяем порядок суммирования:

$$M(r) = \sum_{|I|=r} \sum_{J\supset I} (-1)^{|J|-|I|} |B_J| = \sum_{|J|\ge r} |B_J| \cdot \sum_{|I|=r,\, I\subset J} (-1)^{|J|-|I|} = \sum_{|J|\ge r} |B_J| \cdot C_{|J|}^{r} (-1)^{|J|-|I|}.$$

Замечание. Если сгруппировать множества индексов $J$ по их мощности, то получим традиционную (см. [4, 5]) форму записи обобщённой формулы включения-исключения:

$$M(r) = \sum_{k=0}^{n-r} C_{r+k}^{r} (-1)^k w(k),$$

где $w(0) = |U|,\ w(k) = \sum_{|J|=k} |B_J|$.

**Теорема 3. [Формула Эйлера-Пуанкаре]**

*Пусть* $M$ *– многогранник в d-мерном пространстве, а* $f_i$ *— число его граней размерности* $i$ *(* $f_0$ *– число вершин,* $f_1$ *– число рёбер, ...,* $f_d = 1$*). Тогда*

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i = 1 \qquad (3)$$

В случае простого многогранника (в нём степень каждой вершины равна размерности пространства, в силу чего любые $i$ ребёр, идущие из одной вершины, определяют ровно одну $i$-мерную грань) существует элементарное доказательство формулы (3), опирающееся на лемму 1. Приведем его.

Выберем ось $Ox$ так, чтобы у любых двух вершин были разные проекции на эту ось. Условимся, что эта ось направлена вверх. Будем группировать грани многогранника по их нижней вершине. Из каждой вершины, кроме самой верхней, число способов выбрать чётное (включая ноль) число рёбер, идущих вверх, равно числу способов выбрать нечётное число рёбер, идущих вверх. Поэтому в каждой такой группе граней (с фиксированной нижней вершиной) число граней чётной размерности совпадает с числом граней нечётной размерности. А самая верхняя вершина даёт только грань нулевой размерности. Отсюда и вытекает равенство (3).

Замечание. Доказательство формулы Эйлера-Пуанкаре в общем случае можно найти в [6].

**Формула Райзера.** Известна (см., например, [7]) формула вычисления перманента квадратной матрицы размера $n \times n$:

$$per(A) = \sum_{I \subset Y} (-1)^{n-|I|} S(I)\,, \tag{4}$$

где $Y$ — множество столбцов матрицы $A$, а $S(I)$ — произведение строчных сумм подматрицы, образованной столбцами из $I \subset Y$:

$$S(I) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j \in I} a_{ij}\,.$$

Приведём элементарное доказательство этой формулы, также основанное на лемме 1. Подсчитаем, сколько раз произведение $t = a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{n,i_n}$ учитывается в правой части формулы (4). Если все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ разные, произведение $t$ появляется только при вычислении $S(Y)$ — один раз. Пусть теперь среди указанных индексов ровно $k$ различных, где $k < n$. Тогда количество способов добавить к соответствующим $k$ столбцам, образующим множество $I$, чётное число столбцов из оставшихся $n-k$ столбцов равно количеству способов добавить нечётное число столбцов. Значит, сколько раз произведение $t$ будет взято с плюсом, столько же раз и с минусом. Стало быть, вклад такого произведения в правую часть формулы (4) равен нулю. Таким образом, правая часть формулы (4) равна сумме произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, т. е. перманенту матрицы.

**Замечание.** Формула Райзера для общего случая прямоугольной матрицы доказывается в [7] с помощью обобщённой формулы включения–исключения. О применении формулы включения-исключения к исследованию хроматического многочлена графа см. [8].

## Библиографический список

1. Н. Я. Виленкин. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. — 400 с.

2. А. Кофман. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. — М.: Мир, 1975. — 480 с.

3. В. Липский. Комбинаторика для программистов / В. Липский. — М.: Мир, 1988. — 213 с.

4. М. Айгнер. Комбинаторная теория / М. Айгнер. — М.: Мир, 1988. — 558 с.

5. Вся высшая математика: учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко и др. — М.: КомКнига, 2014. — Т.7 — 208 с.

6. В. А. Емеличев. Многогранники, графы, оптимизация / В. А. Емеличев, В. А. Ковалев, М. К. Кравцов. — М.: Наука, 1981. — 344 с.

7. А. Ю. Эвнин. Перманент матрицы и его вычисление / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. — 2008. — № 2(46). — с. 45-49.

8. А. Ю. Эвнин. Хроматический многочлен графа в задачах / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. — 2014. — № 4(72). — с. 9-15.

# Свойства ортоцентра в задачах на готовых чертежах

**Н.А. Ленская, Д.В. Прокопенко,**
**ФМШ 2007, г. Москва**
**n.a.t.a.sh.a@mail.ru, prokop.dm@mail.ru**

## Вступление

Статья предназначена для учителей и представляет собой готовый материал для классной работы или проведения кружков. Несмотря на то, что свойства ортоцентра хорошо известны и описаны в статьях (см. список литературы), мы считаем полезным собрать разрозненные факты в одну таблицу.

В статье приведен подробный разбор двух занятий кружка по геометрии, который можно давать в 8-9 классе. На первом мы докажем основные свойства ортоцентра. Во второй части приведем задачи на готовых чертежах, что позволяет увеличить количество решенных задач этой части. Задачи подобраны достаточно простые, с коротким решением. которые помогают закрепить материал из первой части, многократно проговорить свойства ортоцентра. В конце списка задач есть две задачи повышенной, но вполне доступной сложности: с региональной олимпиады по математике и доказано существование прямой Эйлера. Желательно, чтобы все приведенные задачи были решены без использования подобия.

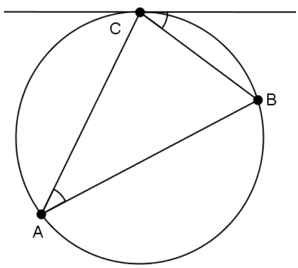
## Повторение некоторых фактов и методов планиметрии

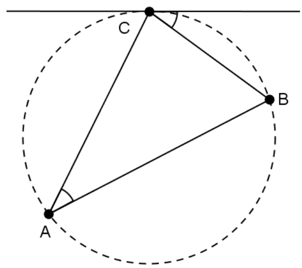
В задачах на ортоцентр треугольника часто используются свойства и признаки вписанных четырехугольников, вписанные углы, прямой угол опирается на диаметр и т.д. Поэтому перед занятиями полезно провести повторение. Особенно это важно в 8 классе, когда опыта решения задач на эту тему еще немного. Предварительно полезно провести отдельный кружок на эту тему.

### 1. Свойство и признак касательной

*Свойство:* угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную между ними.

*Признак:* прямая, проходящая через вершину треугольника и образующая со стороной, исходящей из этой вершины, угол, равный углу треугольника, лежащему против этой стороны, является касательной к описанной окружности треугольника.



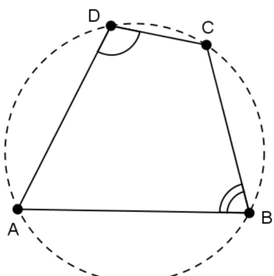



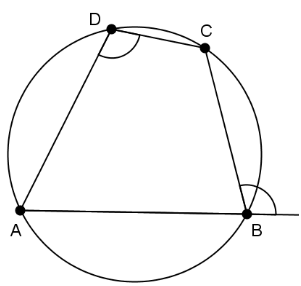

При решении задач часто приходится использовать признаки того, что четыре точки лежат на одной окружности. Перечислим те, которые нам пригодятся при изучении этой темы и некоторые полезные вспомогательные факты.

### 2. Признаки и свойства вписанного четырехугольника

*Признак:* Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то четырехугольник вписан в окружность. Верно и обратное.

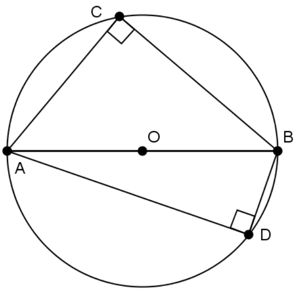
*Свойство:* внешний угол вписанного четырехугольника равен противоположному внутреннему углу. Верно и обратное.

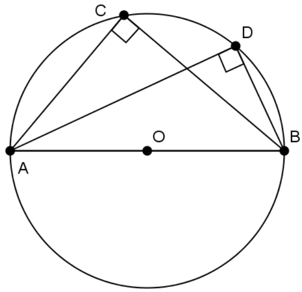


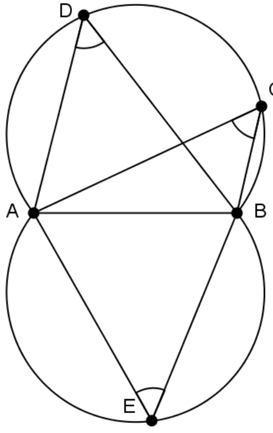
### 3. Геометрическое место точек

а) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре, без концов отрезка.



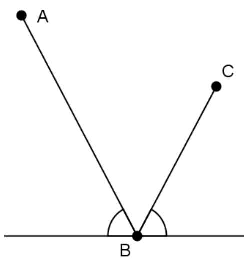

б) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две симметричные дуги (см. рисунок), без концов отрезка.

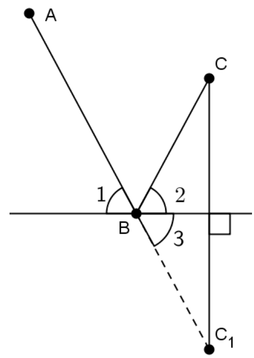



### 4. Метод выпрямления траектории

Довольно часто в задачах встречается следующая конструкция (см. рис.). Ее можно сформулировать в физических терминах: луч света отражается от зеркала по закону угол падения равен углу отражения.

В большинстве случаев решить задачу с такой конструкцией можно, сделав простое дополнительное построение: продолжим луч $AB$ за точку $B$. Другими словами, мы «выпрямляем» траекторию движения. Этот метод так и называют «метод выпрямления траектории». Получаем, что $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Следовательно, на чертеже возникает биссектриса, а вместе с ней и симметрия, свойства которых можно подключить к решению задач.

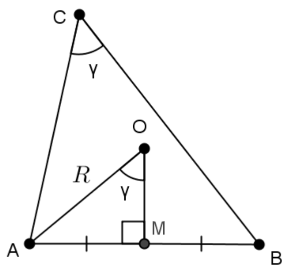



**5. Радиус — как важное дополнительное построение**

С этой конструкцией связано еще одно дополнительное построение. Опустим перпендикуляр на хорду $AB$ из центра $O$ окружности. Получим прямоугольный треугольник, в котором $\angle MOA$ равен вписанному $\angle BAC$. Мы воспользуемся этим дополнительным построением при доказательстве свойств ортоцентра.

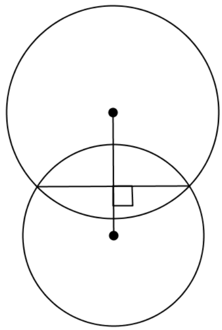
Вписанный угол равен половине центрального: $\angle AOM = \gamma$.



## 6. Линия центров двух пересекающихся окружностей

*Линией центров* двух окружностей называется прямая, походящая через их центры.

*Свойство:* линия центров двух пересекающихся окружностей является серединным перпендикуляром к их общей хорде.



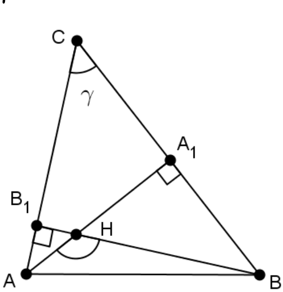
## 7. Важная конструкция, связанная с двумя высотами

Обозначим углы треугольника $ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

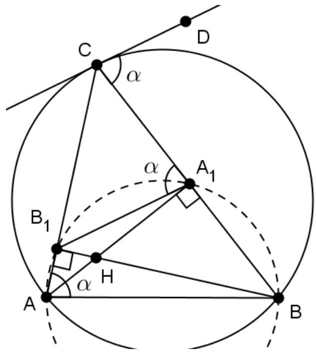
Конструкция, о которой идет речь, возникает в задачах довольно часто, поэтому необходимо, чтобы учащиеся, глядя на нее (см. рис.), умели отвечать на вопросы:

1. Назовите четверки точек, лежащие на одной окружности. Укажите центры этих окружностей, общую хорду.
2. Чему равен а) угол между высотами $AHB$? б) угол между высотой $AA_1$ и стороной $AB$? в) угол между высотой $BB_1$ и стороной $BC$?

Стоит запомнить очень полезную формулу «угла между высотами»: $\angle AHB = 180° - \gamma$.



3. Проведем через точку $C$ касательную к описанной окружности треугольника $ABC$. Что можно сказать о взаимном расположении этой касательной и прямой, содержащей сторону $A_1B_1$ ортотреугольника?




Ответ: Они параллельны.

Решение: по свойству касательной $\angle DCB = \angle CAB = \alpha$. По свойству внешнего угла вписанного четырехугольника углы $\angle CA_1B_1 = \angle B_1AB = \alpha$. Следовательно, прямые $CD$ и $A_1B_1$ параллельны.

4. Верно ли, что если через точку $C$ провести прямую, параллельную стороне $A_1B_1$, то она окажется касательной к описанной окружности треугольника $ABC$.

Ответ: верно.

Указание: примените признак касательной.

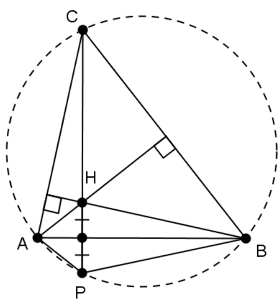
После повторения школьникам сначала раздается таблица с чертежами, на которых отображены основные свойства ортоцентра и ортотреугольника (см. таблицу 1). Затем начинается коллективная работа с детьми. Их задача: глядя на чертеж, сформулировать соответствующее свойство.

## Основные свойства ортоцентра и ортотреугольника

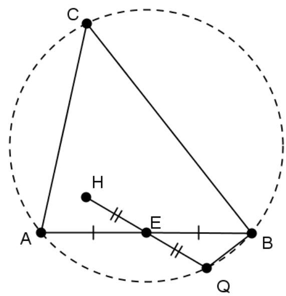
*Ортоцентром* треугольника называется точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника. Основания являются вершинами высот треугольника *ортотреугольника*.

На всех чертежах будем использовать обозначения: $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$, $H$ — ортоцентр.

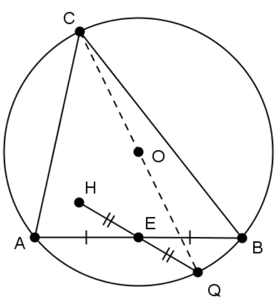
Таблица 1



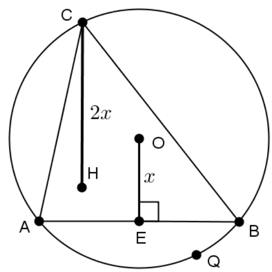
1



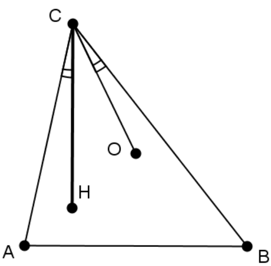
2



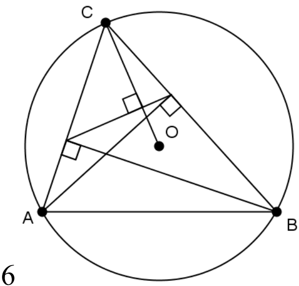
3



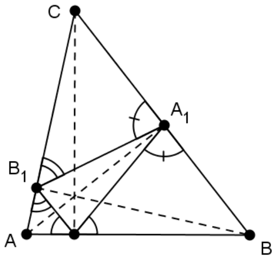
4



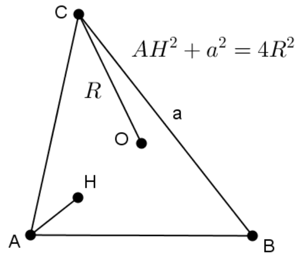
5



6




7




8

Нарисуй свою картинку

**Формулировки**

После обсуждения вариантов формулировок и корректировки их учителем, наиболее удачные записываются. Приведем их:

*Свойство 1.* Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно его стороны, лежит на описанной около этого треугольника окружности.

*Свойства 2 и 3.* Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины его стороны, лежит на окружности, описанной около треугольника, и диаметрально противоположна вершине треугольника, противолежащей данной стороне.

*Свойство 4.* Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.

*Свойство 5.* Угол между радиусом и стороной равен углу между высотой и стороной (все они выходят из одной вершины).

*Свойство 6.* Радиусы описанной окружности, проведенные к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.

*Свойство 7.* а) Стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующими сторонами данного треугольника.

б) Ортоцентр остроугольного треугольника является точкой пересечения биссектрис ортотреугольника (центром его вписанной окружности).

*Свойство 7.* Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до его ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.

Отметим, что раздавать детям готовые формулировки мы не рекомендуем, поскольку работа по самостоятельному формулированию и записи свойств положительно влияет на запоминание.

Далее занятие посвящено самостоятельному доказательству свойств. Заметим, что основные этапы доказательств были проработаны на этапе повторения, что существенно повышает процент учащихся, способных самостоятельно провести доказательство, и как следствие, запомнить свойство.

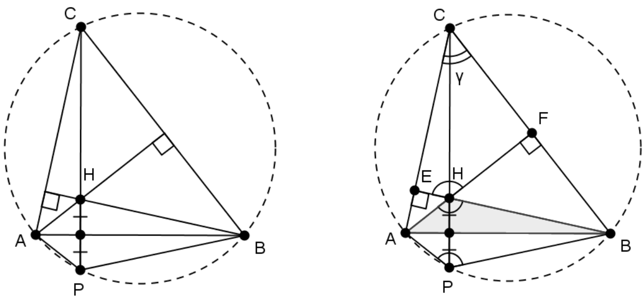
Таким образом, мы «убиваем сразу двух зайцев»: и доказываем свойства ортоцентра, и еще раз прокручиваем важные факты планиметрии.

Мы приведем некоторые соображения по поводу доказательств именно с этой целью. Если школьник приводит правильное, но не рациональное доказательство или использует совершенно другие идеи, то мы засчитываем решение, задаем наводящие вопросы и подводим его к тому способу, который нам нужен.

## Доказательства свойств ортоцентра

Свойства 1 и 2 — отличный повод потренироваться в применении определения равных фигур в общем виде (через движение), формулы угла между высотами, признака вписанного четырехугольника.

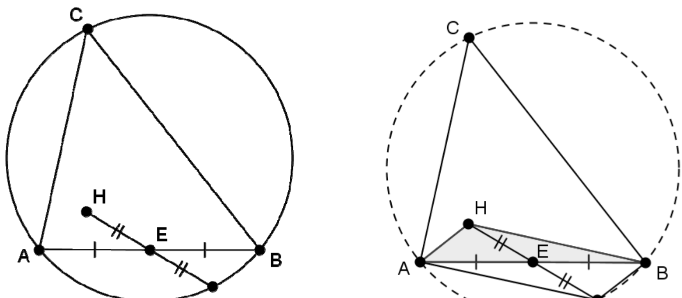
*Свойство 1.*




Точка $P$ симметрична точке $H$. Треугольники $AHB$ и $APB$ симметричны, следовательно, они равны, значит, $\angle APB = \angle AHB = 180° - \angle ACB$ (как угол между высотами). В четырехугольнике $ACBP$ $\angle C + \angle P = 180°$. Следовательно, он — вписанный, тогда точка $P$ лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.

На наш взгляд здесь полезно обратить внимание на треугольник $AHB$.

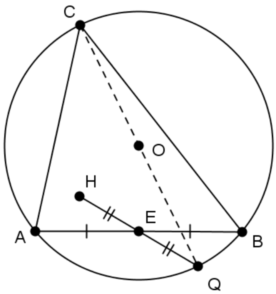
*Свойство 2.*

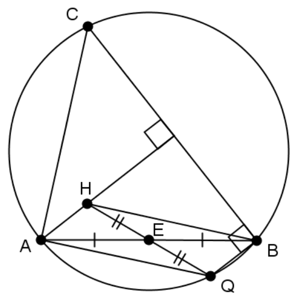



Рассмотрим снова треугольник $AHB$.

Доказательство почти буквально повторяет доказательство свойства 1. Полезно заметить, что $AHBQ$ — параллелограмм. Это нам пригодится при доказательстве свойств 3 и 8 и в решении задач.

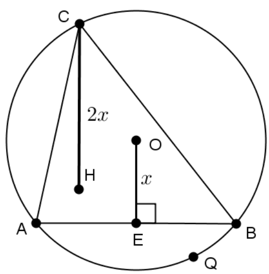
*Свойство 3.*

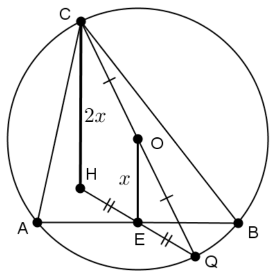



Из п. 2 известно, что $AHBQ$ — параллелограмм. Значит, $BQ \parallel AH$ и $AH \perp BC$ (т.к. $AH$ содержит высоту треугольника). Получили, что $\angle CBQ = 90°$. Следовательно, $CQ$ — диаметр.

*Свойство 4.*



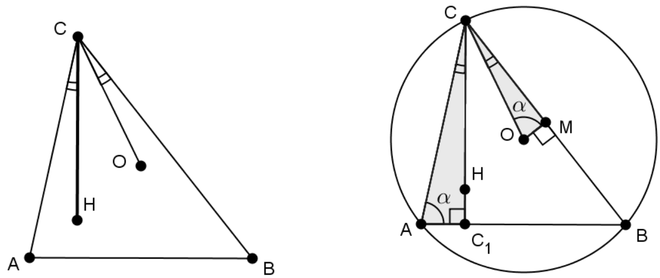




Совместим на одном чертеже свойства 2 и 3 (см. рис). $CQ$ — диаметр, тогда $OE$ — средняя линия треугольника $CQH$. Здесь же в качестве подготовки решения задачи о прямой Эйлера можно продолжить работать с чертежом, используя следующие вопросы:

1. Чем являются для треугольника $CQH$ а) отрезок $CE$; б) отрезок $HO$?
2. Чем является для треугольника $CQH$ точка пересечения отрезков $CE$ и $HO$?

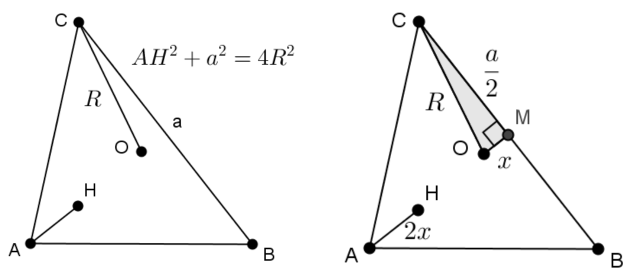
Свойства 5 и 8 можно доказать с помощью одного построения. Из точки $O$ опустим перпендикуляр $OM$ на $CB$ (см. Повторение, п.6 «Радиус — как важное дополнительное построение»).

*Свойство 5*




Равенство нужных углов следует из того, что $\angle COM =$ $= \angle CAB = \alpha$.

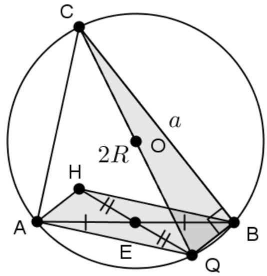
*Свойство 8.*




Из треугольника $COM$ по теореме Пифагора $OC^2 = OM^2 + CM^2$. По свойству 4 $OM = \dfrac{1}{2} AH$. Получим, что $R^2 = \dfrac{AH^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}$, $4R^2 = AH^2 + a^2$.

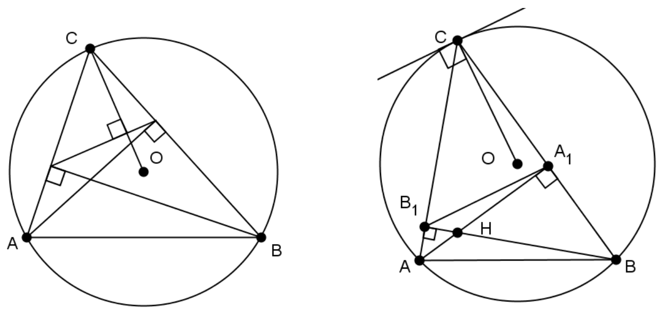
Обратим еще раз внимание, что в треугольнике $COM$ собраны три элемента треугольника $ABC$ $\angle COM = \angle CAB = \alpha$ радиус описанной окружности, половина стороны и угол. Поэтому это дополнительное построение можно использовать для решения совсем других задач. С помощью треугольника $COM$ можно доказать, например, теорему синусов для остроугольных треугольников, когда точка $O$ лежит внутри треугольника $ABC$.

Способ 2: воспользуемся свойствами 2 и 3.



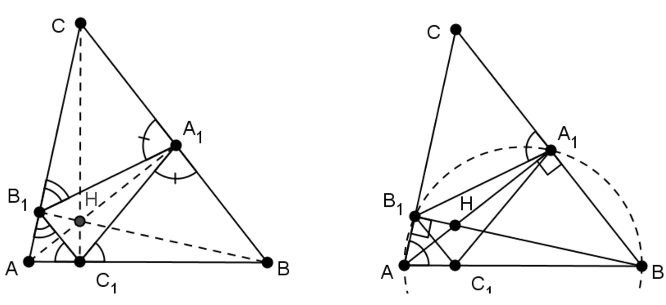

$AH = BQ$, см. доказательство свойства 2. Из треугольника $CBQ$ по теореме Пифагора $4R^2 = BQ^2 + a^2 = AH^2 + a^2$.

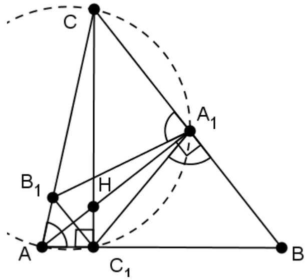
*Свойство 6.*




Вспомним «Повторение. Важная конструкция, связанная с двумя высотами». Мы доказали, что касательная в точке $C$ параллельна стороне $A_1B_1$ ортотреугольника. Радиус перпендикулярен касательной и, следовательно, прямой $A_1B_1$.

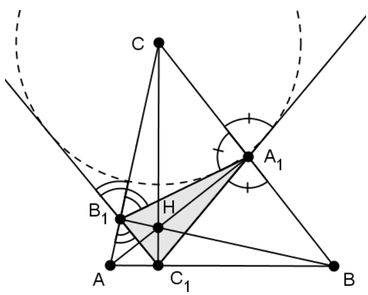
*Свойство 7.*






Доказательство очевидно из рисунков 2 и 3. См. «Повторение: внешний угол вписанного четырехугольника равен противоположному внутреннему углу».

Полезно обратить внимание, что в точках $A_1$ и $B_1$ можно воспользоваться методом выпрямления траектории (см. Повторение).




Продолжим лучи $C_1B_1$ и $C_1A_1$. Тогда $B_1C$ и $A_1C$ — биссектрисы внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Точка $C$ — центр вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

## Занятие 2. Задачи на готовых чертежах

На втором занятии кружка школьники получают в распечатанном виде задачи в виде таблицы (см. Таблицу 2) с указаниями. Задачи на построение надо решать с помощью циркуля и линейки. Достаточно объяснить *как* построить. Само построение можно не выполнять.

*Есть ограничения в задачах на построение*

а) ортоцентра — не разрешается опускать перпендикуляр из *вершины* на прямую, содержащую противолежащую сторону;

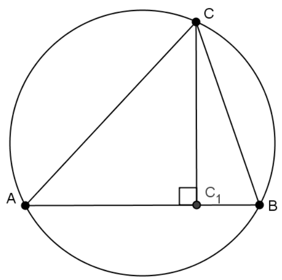
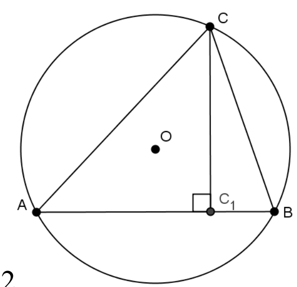
б) центра описанной окружности — нельзя строить серединный перпендикуляр к стороне треугольника.

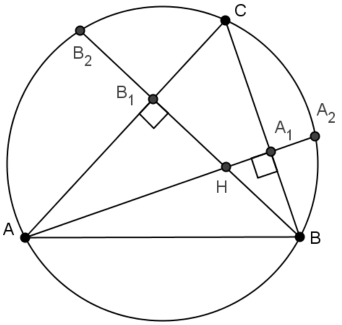
Будем использовать обозначения: $O$ — центр описанной окружности, $H$ — ортоцентр. Для решения этих задач у каждого ученика должна быть распечатанная табличка свойств ортоцентра.

Указания к решению являются частью задания и приучают школьников искать знакомые конструкции, проводить дополнительные построения, помогают закрепить материал из первой части. На наш взгляд важно не только показывать на чертеже решение, но и многократно проговорить свойства ортоцентра.

### Решите задачи, опираясь на свойства ортоцентра и ортотреугольника

Таблица 2

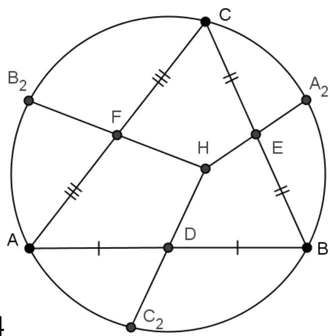
| Чертеж | Формулировка |
|---|---|
| <br>1<br>*Указания к решению:* Свойство 1. | Постройте ортоцентр треугольника, не используя построение центра описанной окружности и перпендикуляра. |
| <br>2<br>*Указания к решению:* 1 способ: свойства 2, 3.<br>2 способ: свойство 4.<br>3 способ: свойство 5. | Постройте ортоцентр треугольника (предложите три способа). |




$A_2B_2 = 10$. Найдите сторону ортотреугольника $A_1B_1$.

3

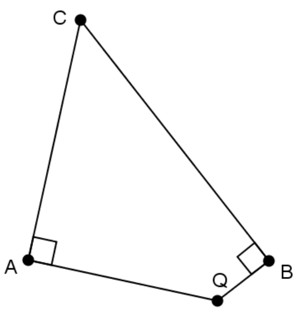
*Указания к решению:* Свойство 1.




$D$, $E$ и $F$ — середины сторон. Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника $ABC$ равны 5, 6, 7.

4

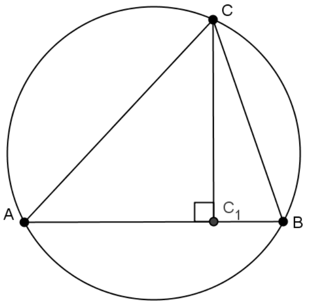
*Указания к решению:* Свойство 2.




Постройте ортоцентр треугольника $ABC$, проведя всего две линии.

5

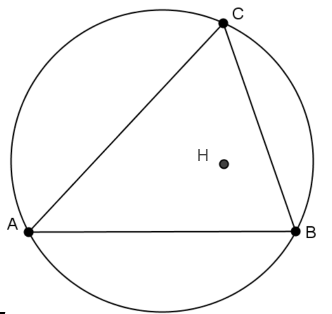
*Указания к решению:* Свойство 2 и 3.




6

Постройте центр описанной окружности.

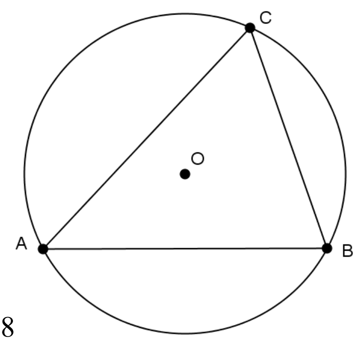
*Указания к решению:* Свойство 5.




7

Постройте центр описанной окружности (3 способа).

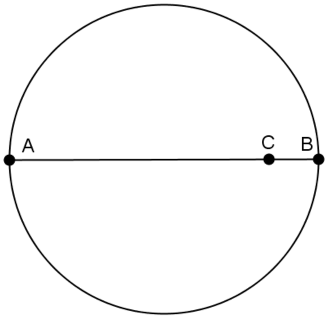
*Указания к решению:* 1 способ: свойство 5.
2 способ: свойства 2, 3.
3 способ: свойство 4.




8

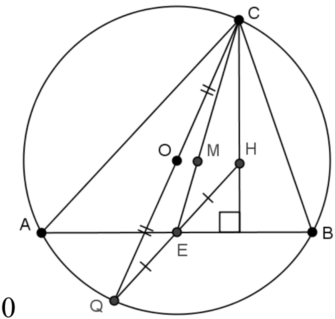
1. Опустите из точки $C$ перпендикуляр на $AB$.
2. Постройте ортотреугольник.
3. Через вершины треугольника проведите прямые, перпендикулярные сторонам ортотреугольника.
4. Постройте касательную к окружности в точке $C$.

*Указания к решению:* Свойство 6.




9

Дана окружность с диаметром $AB$ и точка $C$ на диаметре. Постройте на окружности точки $X$ и $Y$, симметричные относительно $AB$, для которых прямые $AX$ и $YC$ были бы перпендикулярны друг другу.




10

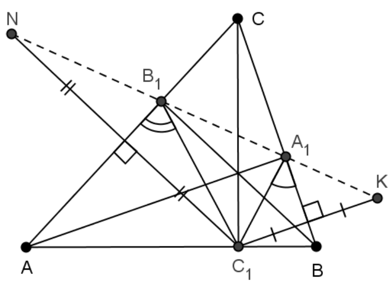
$M$ — точка пересечения медиан треугольника $ABC$.

1. Докажите, что точки $O$, $M$ и $H$ лежат на одной прямой.

Эта прямая называется прямой Эйлера.

2. Докажите, что $OM : MH = 1 : 2$.

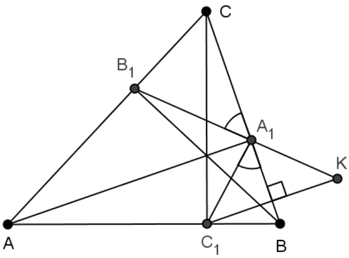
*Указания к решению:* Чем является точка $M$ в треугольнике $CQH$?




11

В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Докажите, что точки $N$ и $K$ лежат на прямой $A_1B_1$.

*Указания к решению:* Метод «выпрямления траектории». Свойство 7.

12 


В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Прямая, перпендикулярная стороне $BC$ и проходящая через точку $C_1$, пересекает прямую $A_1B_1$ в точке $K$. Докажите, что угол $CKB$ — прямой.

*Региональный этап Всероссийской олимпиады, 2008-2009, 9 класс, №3.*

*Указания к решению:* Смотри!

## Заключение

К сожалению, объем статьи не позволяет привести задачи олимпиадного уровня, которые можно достаточно просто решить с помощью изученных свойств ортоцентра и ортотреугольника. В списке литературы указаны источники, изучение которых будет полезно и, одновременно, интересно.

## Список литературы


1. *Егоров А.,* Ортоцентрический треугольник, Квант, №4, 2001.
2. *Филипповский Г.Б.*, О двух параллелограммах в треугольнике, Квант, №4, 2008.
3. *Филипповский Г.Б.*, Лемма о «дважды биссектрисе», Математика в школе, 2008, №4.
4. *Филипповский Г.Б.*, «О двух точках, симметричных ортоцентру треугольника», Математика в школе, 2009, №3.
5. geometry.ru/articles.php, статьи на сайте, посвященном геометрии.

# Кратчайшие маршруты

**А.Д. Блинков,**
**ЦО №218, г. Москва**
**adblinkov@yandex.ru**

*Использованы материалы из книжки М.А. Волчкевича «Геометрия 7-8», — М.: МЦНМО, 2016.*

Задачи этого занятия будут связаны с поиском кратчайших маршрутов на плоскости или наименьших сумм расстояний.

В качестве примера рассмотрим знаменитую задачу Герона Александрийского.

**Пример**. Дана прямая $m$ и точки $A$ и $B$, лежащие в одной полуплоскости относительно $m$. Постройте на прямой $m$ такую точку $M$, чтобы ломаная $AMB$ имела наименьшую длину.

*Идея решение может возникнуть из физических соображений. Из курса физики известно, что свет распространяется прямолинейно с одной и той же скоростью по кратчайшему пути. Представим себе, что прямая $m$ — это зеркало. Тогда луч, выпущенный из точки $A$ и попавший в точку $B$, отразившись от зеркала в точке $M$,*

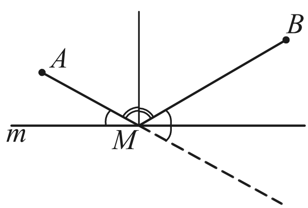



Рис. 1а

*пройдет так, что угол его падения будет равен углу отражения, то есть равны углы, которые образуют эти лучи с перпендикуляром к прямой m (см. рис. 1а). Следовательно, должны быть равны и углы, которые эти лучи образуют с прямой $m$, то есть, продлив $AM$ за точку $M$, мы получим равные углы. Теперь эту идею можно оформить геометрически.*

**Решение**. Пусть искомая точка $M$ построена. Рассмотрим точку $B'$, симметричную точке $B$ относительно прямой $m$ (см. рис. 1б). Длина ломаной $AMB$ равна: $AM + MB = AM + MB'$. Эта длина будет наименьшей из возможных, если точка $M$ лежит на отрезке $AB'$. Действительно, для любой другой точки $N$, лежащей на прямой $CD$,

$$AN + NB = AN + NB' > AB' = AM + MB'.$$

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки $B'$, симметричной точке $B$ относительно прямой $m$. Искомая точка $M$ является пересечением прямых $AB'$ и $m$.

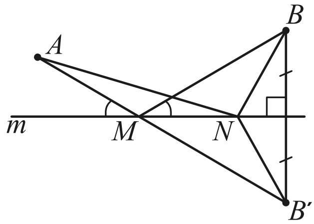


Рис. 1б

*Понятно, что точки $A$ и $B$ равноправны, поэтому можно было строить точку, симметричную точке $A$. Отметим также, что эту задачу можно формулировать различным образом, моделируя различные жизненные ситуации.*

**Упражнения и задачи для самостоятельного решения**

**1.** Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

**2.** а) Дан острый угол $AOB$ и точка $M$ внутри него. На сторонах угла постройте точки $X$ и $Y$ так, чтобы периметр треугольника $MXY$ был наименьшим.

б) Найдите этот периметр, если $\angle AOB = 30°$, $OM = 1$.

**3.** Внутри острого угла $AOB$ даны точки $M$ и $N$. Постройте на сторонах угла точки $X$ и $Y$ так, чтобы периметр четырехугольника $XMNY$ был наименьшим.

**4.** Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до всех вершин и до всех сторон треугольника — наименьшая.

**5.** Какой из треугольников с данной стороной и данной высотой, проведенной к этой стороне, имеет наименьший периметр?

**6.** В треугольнике $ABC$: $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 15°$. На сторонах $AB$ и $BC$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной $AED$.

**7.** В треугольнике $ABC: AB = BC = 1$, $\angle ABC = 20°$. На сторонах $AB$ и $BC$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной $AEDC$.

**8.** Один из углов остроугольного треугольника равен $30°$. На сторонах треугольника отмечено по одной точке. Докажите, что наименьший периметр треугольника с вершинами в этих точках равен одной из высот данного треугольника.

**9.** Дан остроугольный треугольник $ABC$. На его сторонам отмечены точки $K$, $L$ и $M$ (по одной на каждой стороне). Укажите положение этих точек, для которого периметр треугольника будет наименьшим. (*Задача Фаньяно*)

**10.** На каждой стороне прямоугольника отмечено по точке. Докажите, что наименьший периметр четырехугольника с вершинами в этих точках равен сумме диагоналей прямоугольника.

## Ответы, решения, указания

**1. Ответ**: точка пересечения диагоналей.

Для обоснования достаточно применить неравенство треугольника, рассматривая искомую точку и противолежащие вершины.

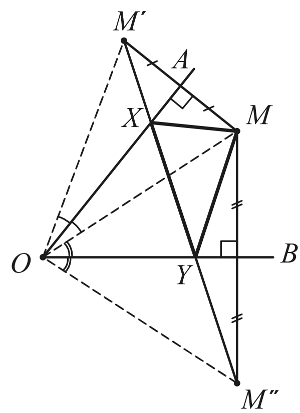


Рис. 2

**2.** а) Пусть искомые точки $X$ и $Y$ на сторонах $OA$ и $OB$ данного угла построены (см. рис. 2). По аналогии с примером 1а рассмотрим точки $M'$ и $M''$, симметричные относительно сторон угла. Тогда

$$P_{\Delta MXY} = MX + XY + YM = M'X + XY + YM''.$$

Так как положение концов ломаной $M'XYM''$ фиксировано, то такая сумма принимает наименьшее значение, если точки $X$ и $Y$ лежат на отрезке $M'M''$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точек $M'$ и $M''$. Искомые точки $X$ и $Y$ являются пересечением отрезка $M'M''$ со сторонами данного угла.

*Отметим, что поскольку угол $AOB$ — острый, то отрезок $M'M''$ обязательно пересечет его стороны (для прямого или тупого угла это не так).*

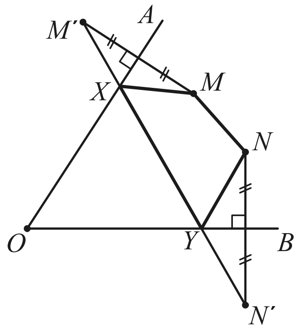


Рис. 3

б) **Ответ**: 1.

Заметим, что $OM' = OM = OM'' = 1$ и $\angle M'OM'' = 2\angle AOB = 60°$. Следовательно, треугольник $M'OM''$ — равносторонний, поэтому $P_{\Delta MXY} = M'M'' = 1$.

**3.** Так как длина $MN$ фиксирована, то задача сводится к предыдущей (см. рис. 3).

**4. Ответ**: ортоцентр треугольника.

Предположим, что это не так. Выберем точку $M$ внутри данного треугольника $ABC$, не совпадающую с его ортоцентром $H$, и рассмотрим сумму расстояний от точки $M$ до всех вершин и до всех сторон треугольника (см. рис. 4).

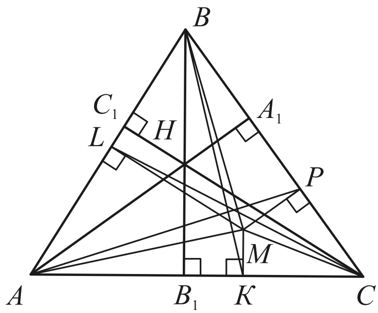


Рис. 4

Пусть $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ — высоты треугольника; $P$, $K$ и $L$ — проекции точки $M$ на стороны. Попарно сгруппировав эти расстояния, применив неравенство треугольника и то, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета, получим:

$$MA + MB + MC + MP + MK + ML =$$
$$= (MA + MP) + (MB + MK) + (MC + ML) >$$
$$> AP + BK + CL > AA_1 + BB_1 + CC_1 = HA + HA_1 + HB + HB_1 + HC + HC_1$$

*Знаки неравенства не изменятся, если точка $M$ принадлежит какой-либо из высот треугольника.*

**5. Ответ**: равнобедренный.

Пусть в треугольнике $ABC$ зафиксирована сторона $AC$ и проведенная к ней высота. Тогда вершины $B$ всех таких треугольников лежат на прямой $m$, параллельной $AC$ (см. рис. 5). Для того, чтобы периметр треугольника $ABC$ был наи-

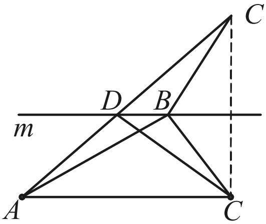


Рис. 5

меньшим, достаточно, чтобы сумма $AB + BC$ принимала наименьшее значение. Рассмотрим точку $C'$, симметричную точке $C$ относительно $m$. Тогда $AB + BC = AB + BC' \geq AC'$. Равенство достигается, если точка $B$ совпадает с точкой $D$ — пересечением прямых $AC'$ и $m$. Тогда треугольник $ADC$ — равнобедренный.

**6. Ответ**: $0{,}5$.

Построим треугольник $A'BC$, симметричный данному относительно прямой $BC$, точка $D'$ симметрична точке $D$ (см. рис. 6). Длина ломаное $AED$, равная $AE + ED = AE + ED'$, принимает наименьшее значение, если точки $A$, $E$ и $D'$ лежат на одной прямой, которая перпендикулярна $A'B$. В этом случае $AD' = \frac{1}{2}AB = 0{,}5$, так как $\angle ABD' = 30°$.

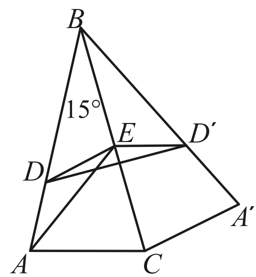



Рис. 6

**7. Ответ**: $1$.

Построим треугольники $A'BC$ и $ABC'$, симметричные данному относительно прямых $BC$ и $AB$ соответственно (см. рис. 7). Длина ломаной $AEDC$, равная

$$AE + ED + DC = A'E + ED' + DC'$$

принимает наименьшее значение, если точки $D$ и $E$ лежат на отрезке $A'C'$. Так как $A'B = C'B = 1$ и $\angle A'BC' = 60°$, то треугольник $A'BC'$ — равносторонний, то есть $A'C' = 1$.

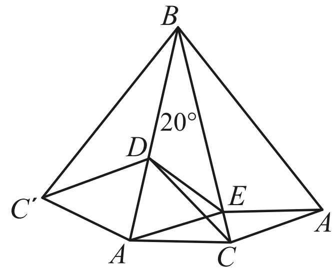



Рис. 7

**8.** Пусть точки $K$, $L$ и $M$ отмечены на сторонах данного треугольника $ABC$ ($\angle ABC = 30°$), тогда периметр треугольника $KLM$ равен длине ломаной $L'KML''$, где точки $L'$ и $L''$ симметричны точке $L$ относительно сторон $AB$ и $BC$ (см. рис. 8).

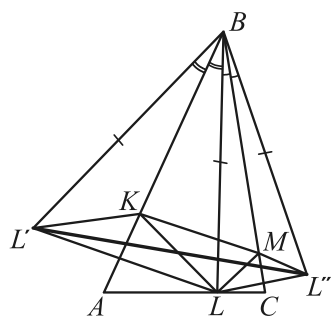



Рис. 8

Наименьшая длина этой ломаной равна длине отрезка $L'L''$. Треугольник $L'BL''$ — равносторонний (см. задачу 2б), значит, $L'L'' = BL' = BL$. Наименьшее значение длины $BL$ достигается, если этот отрезок является высотой треугольника.

**9. Ответ**: $KLM$ является ортотреугольником треугольника $ABC$.

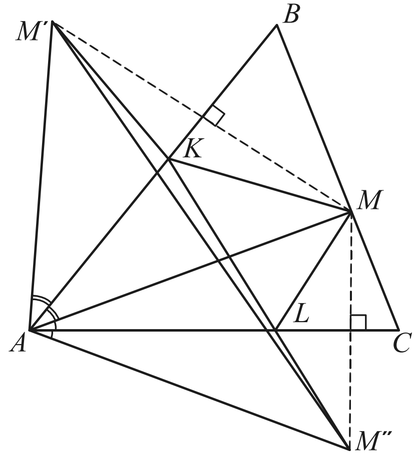



Рис. 9

Зафиксируем точки $K$ и $L$ на сторонах $AB$ и $AC$ и докажем, что периметр треугольника $KLM$ — наименьший, если $AM$ — высота треугольника $ABC$ (см. рис. 9).

Для этого рассмотрим точку $M'$, симметричную точке $M$ относительно прямой $AB$, и точку $M''$, симметричную точке $M$ относительно прямой $AC$. Тогда периметр треугольника $KLM$ равен длине трехзвенной ломаной $M'KLM''$. Длина такой ломаной будет наименьшей (равной длине отрезка $M'M''$), если $K$ и $L$ будут являться точками пересечения $M'M''$ со сторонами $AB$ и $AC$. Заметим, что $AM' = AM = AM''$ и $\angle M'AM'' = 2\angle BAC$, то есть, независимо от положения точки $M$ на стороне $BC$, треугольник $M'AM''$ — равнобедренный с фиксированными углами. Его линейные размеры будут наименьшими, если наименьшей будет боковая сторона, равная $AM$, значит, $AM$ — высота треугольника $ABC$. При этом, точки $K$ и $L$ пересечения $M'M''$ со сторонами $AB$ и $AC$ также являются основаниями высот данного треугольника, поскольку стороны треугольника $ABC$ являются биссектрисами внешних углов его ортотреугольника.

**10.** Пусть точки $K$, $L$, $M$ и $N$ отмечены на сторонах $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ прямоугольника $ABCD$ (см. рис. 10). Отразив ломаную $KLM$ относительно прямой $CD$, получим ломаную $K'L'M$. Затем отразим отрезок $K'L'$ относительно прямой $BC$ и получим отрезок

$K''L'$. Отразив отрезок $KN$ относительно прямой $AD$, получим отрезок $K'''N$.

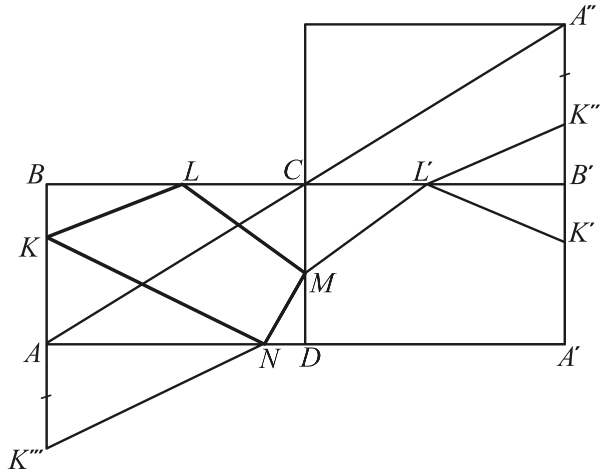



Рис. 10

Таким образом, периметр четырехугольника $KLMN$ равен длине ломаной $K'''NMK''$, которая не меньше, чем расстояние $K'''K''$ между ее концами. Заметим, что $AK''' = AK = A'K' = A''K''$ и $AK''' \parallel A''K''$, где $A'$ и $A''$ — точки, симметричные точке $A$ относительно прямой $CD$ и точки $C$ соответственно. Следовательно, отрезок $K'''K''$ равен удвоенной диагонали исходного прямоугольника.

Указанное наименьшее значение достигается, если $K$, $L$, $M$ и $N$ — середины сторон прямоугольника.

# Понять — значит привыкнуть...

**П.В. Чулков,**
**ФМШ 2007, г.Москва**
**chulkov2007@yandex.ru**

...Учителю зачастую приходится говорить об одной и той же вещи не раз и не два, а три раза, четыре раза, пять раз...

*Дж. Пойа*

Замечено, что решения алгебраических задач основанные на простых и понятных утверждениях нередко оказываются трудными для школьников.

Подтверждающих примеров много.

Так, одной из самых трудных задач Регионального этапа XVII Всероссийской олимпиады школьников по математике оказалась задача 10.8. [3, с. 52]. Большая часть десятиклассников, участвовавших в олимпиаде не справились со следующей задачей, решение которой не содержало никаких специфических олимпиадных идей.

**Задача 1.** Найдите все пары различных действительных чисел $x, y$ такие, что

$$x^{100}-y^{100}=2^{99}(x-y) \text{ и } x^{200}-y^{200}=2^{199}(x-y).$$

Идея решения: *если число, не равное нулю, умножить на положительное число меньшее единицы, то абсолютная величина произведения будет меньше абсолютной величины исходного числа*.

Немного упростим условие с помощью простой замены.

**Задача 1а.** $a^{100}-b^{100}=a-b$, $a^{200}-b^{200}=a-b$**,** $a\neq b$**.**

Разделим второе уравнение на первое, получим $a^{100}+b^{100}=1$, и, следовательно, $|a|\leq 1$, $|b|\leq 1$.

Рассмотрим случаи:

1) Если $-1<a<0$, $-1<b<0$, тогда сократив первое равенство на $a-b$, получим $a^{99}+a^{98}b+\ldots+ab^{98}+b^{99}=1$, что невозможно, так как левая часть равенства отрицательна.

2) Если $0<a<1$, $0<b<1$, тогда одновременно

$$a^{100}+b^{100}=1,\ a^{99}+a^{98}b+\ldots+ab^{98}+b^{99}=1.$$

Но: $a^{100}<a^{99}$, $b^{100}<b^{99}$, то есть левая часть второго равенства больше левой части первого равенства, что невозможно.

3) $0<a<1$, $-1<b<0$, тогда $a^{100}-b^{100}<a^{100}<a=a-b$, что противоречит равенству $a^{100}-b^{100}=a-b$.

4) $0<b<1$, $-1<b<0$. Решается аналогично предыдущему, но исходя из равенства $b^{100}-a^{100}=b-a$.

В следующей задаче использование той же идеи позволяет существенно упростить решение.

**Задача 2.** Известно, что $0\le a,b,c\le 1$. Докажите, что:

$$a^{17}-a^{10}b^{7}+b^{17}-b^{10}a^{7}+c^{17}-c^{10}a^{7}\le 1.$$

Из неравенств: $0\le x^{17}\le x^{10}$ и $0\le -x^{7}\le -x^{10}$, следует, что достаточно доказать:

$$a^{10}-a^{10}b^{10}+b^{10}-b^{10}c^{10}+c^{10}-c^{10}a^{10}\le 1,$$

или после замены:

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)\le 1 \text{ при } 0\le x,y,z\le 1.$$

Полученное выражение можно рассматривать как линейную функцию относительно любой из переменных и поэтому оно достигает наибольшего значения на границе области определения. Следовательно, наибольшее значение последнего выражения можно найти подстановкой.

Рассмотрим пример из тригонометрии.

**Задача 3.** Докажите неравенство:

$$\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos z+\sin^2 z\cos x\le 1{,}5.$$

Достаточно доказать более простое неравенство

$$\sin x\cos y+\sin y\cos z+\sin z\cos x\le 1{,}5,$$

так как без потери общности можно считать, что значения $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ неотрицательны, а в этом случае $\sin^2 x \cos y \le \sin x \cos y$.

Последнее неравенство можно доказать, сложив три неравенства, аналогичных неравенству:

$$\sin x \cos y \le \frac{\sin^2 x + \cos^2 y}{2}.$$

В чем причина того, что задачи, аналогичные приведенным выше, трудны для учащихся?

Возможно дело в том, что факты, лежащие в их основе представляются настолько простыми, что их отработке на уроках и занятиях кружка не уделяется должного внимания и поэтому они не достаточно усвоены учащимся.

Давно замечено [1] и подтверждено на практике [например, 2], что обучение успешно, если знакомство с основными математическими идеями (результатами, методами) растянуто во времени, а неоднократное возвращение и использование идеи происходит в относительно новой ситуации [2].

Задачи, представленные здесь заимствованы из материалов вступительных экзаменов и олимпиад можно предлагать учащимся, начиная с 7 класса.

Коллекцию задач при желании можно легко пополнить.

## Задачи и упражнения

***Задача* 4.** а) Докажите, что $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

б) Решите уравнение $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = 0$.

***Задача* 5.** а) Решите систему уравнений: $x^3 + y^3 = 1$, $x^4 + y^4 = 1$.

б) Решите уравнение: $\sqrt[4]{1 - x^2} + \sqrt[4]{x^2 + x - 1} + \sqrt[4]{1 - x} = 1$.

в) Найдите наибольшее значение выражения $x^6 + y^6$, если $x^2 + y^2 = 1$.

***Задача* 6.** Решите систему уравнений:

а) $x + y = a$, $x^6 + y^6 = a^6$;

б) $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=a^2, x^3+y^3+z^3=a^3$.

***Задача* 7.** Известно, что $a+b=c$ и $a,b,c>0$. Докажите, что

$$a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}>c^{\frac{3}{4}}.$$

***Задача* 8.** Решите уравнение:

а) $\sin^5 x+\cos^6 x=1$;

б) $\sin^5 x+\cos^5 x=-1$;

в) $\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x=2$.

***Задача* 9.** Найдите наибольшее значение

а) $\sin^8 x+\cos^{14} x$; б) $\sin^6 x+\cos^6 x$.

***Задача* 10.** Докажите, что если $0<a,b<1$, то:

а) $a^2+b^2+(a-b)^2\le 2$; б) $a^4+b^5+(a-b)^6\le 1$

в) Докажите, что если $2\le x,y\le 3$, то

$$(3-x)^2+(3-y)^2+(x-y)^2\le 2.$$

***Задача* 11.** Докажите, что если $x>0$, то

а) $9x^{10}+2\ge 2x^9+9x^8$; б) $17x^{19}+4\ge 4x^{17}+17x^{15}$.

***Задача* 12.** Решите систему уравнений: $\sin^2 x=\sin y$, $\sin^2 y=\sin z$, $\sin^2 z=\sin x$, где $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, $0<z<\pi$.

***Задача* 13.** а) Известно, что $x,y>0$ и $x+y>1$. Докажите, что $2(x^2+y^2)>x+y$.

б) Известно, что $|x|<1$. Докажите, что $(1-x)^n+(1+x)^n\le 2^n$.

**Задача 14.** Известно, что $x,y>0$ и $x+y=2$. Докажите, что $x^2y^2(x^2+y^2)\le 2$.

## Указания, решения, комментарии.

**2.** *Комментарий*. Из неравенства:

$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)\le 1$, где $0\le x,y,z\le 1$ следует:

$x^m(1-y)^n+y^p(1-z)^k+z^s(1-x)^t\le 1$, где $m,n,p,k,s,t$ — произвольные натуральные числа, а $0\le x,y,z\le 1$.

Действительно, $x\ge x^n$ при $0\le x\le 1$ и, следовательно,

$$x^m(1-y)^n + y^p(1-z)^k + z^s(1-x)^t \le x(1-y) + y(1-z) + z(1-x).$$

**4.** а) При $x \ge 1$, $x \le 0$ получим: $x^8 - x^5 \ge 0$, $x^2 - x \ge 0$, откуда $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$; при $0 < x < 1$ получим: $1 - x > 0$, $x^5 - x^8 > 0$, откуда следует требуемое неравенство.

**5.** б) (Киевский фестиваль). Указание: сводится к системе:

$$a+b+c=1,\ a^4+b^4+c^4=1.$$

в) Ответ: 1. Из равенства $x^2 + y^2 = 1$ следует, что $x^2 \le 1$, $y^2 \le 1$, откуда $x^6 \le x^2$, $y^6 \le y^2$ и $x^6 + y^6 \le x^2 + y^2 = 1$. Равенство достигается, например, при $x = 1$, $y = 0$.

*Другое решение*. Замена: $x = \sin A$, $y = \cos A$, тогда

$$x^6 + y^6 = \sin^6 A + \cos^6 A =$$

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A)^3 - 3\sin^2 A\cos^2 A = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2A \le 1.$$

Наибольшее значение: $\sin^2 2A = 0$, $A = \frac{\pi}{2}$.

Комментарий. Можно найти наименьшее значение. Оно достигается при $\sin^2 2A = 1$, $A = \frac{\pi}{4}$ и равно 0,25.

**6.** а) (ММО, 1952) Однородность позволяет уменьшить число переменных и свести к системе: $m + n = 1$, $m^6 + n^6 = 1$.

б) (ММО, 1937) аналогично предыдущему.

**7.** Сводится к задаче: известно, что $x + y = 1$ и $1 > x, y > 0$. Докажите, что $x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{4}} > 1$.

**8.** а) $\sin^5 x \le \sin^2 x$, $\cos^6 x \le \cos^2 x$, откуда $\sin^5 x + \cos^6 x \le 1$, причем в последнем неравенстве равенство достигается, если одновременно $\sin^5 x = \sin^2 x$, $\cos^6 x = \cos^2 x$. Первое уравнение выполнено, когда $\sin x = 1$, $\sin x = 0$. В этих случаях второе уравнение также выполнено. Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi n$, $n \in Z$.

б) (ФНМ, 2000, олимпиада, заочный тур). Ответ: $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in Z$. Решение аналогично предыдущему.

в) (ВМК, 2001, 2002, устно). Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

**9.** а) (ВМК, 1998, устно). Из неравенств $\sin^8 x\le\sin^2 x$, $\cos^{14} x\le\cos^2 x$, получаем $\sin^8 x+\cos^{14} x\le 1$.

б) (ВМК, 2004, устно). Ответ: 1. Смотри решение 4в.

**10.** а) Пусть $a\ge b$, тогда

$$a^2+b^2+(a-b)^2\le a+b+(a-b)=2a\le 2.$$

б) (СПб, 2004, 11 класс) Аналогично пункту а).

в) (СПб, 2004, 8 класс) Сводится к предыдущему заменой

$$3-x=a,\ 3-y=b.$$

**11.** а) Рассмотрим разность

$$9x^{10}-9x^8+2-2x^9=9x^8(x^2-1)-2(x^9-1)=$$

$$=(x-1)(9x^9+7x^8-2x^7-\ldots-2x-2)>0.$$

При $x>1$ верно $9x^9+7x^8>2x^7+\ldots+2x+2$, так как $x^m>x^n$ при $m>n$ и $9x^9+7x^8<2x^7+\ldots+2x+2$ при $x<1$.

б) (СПб, 2003, 11 класс) Аналогично пункту а)

**12.** Поскольку $\sin^2 x\le\sin x$, из системы уравнений следует, что: $\sin x\ge\sin y$, $\sin y\ge\sin z$, $\sin z\ge\sin x$, откуда $\sin x=\sin y=\sin z$ и с учетом условий $0<x<\pi$, $0<y<\pi$, $0<z<\pi$ получаем ответ.

**13.** (Турнир Савина, XI). а) $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2>x+y$.

б) (ММО, 1952) Перепишем неравенство в виде:

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n+\left(\frac{1+x}{2}\right)^n\le 1.$$

Оно сводится к неравенству $a^n+b^n\le 1$, при $a+b=1$.

**14.** Заметим, что $4=(x+y)^2\ge 4xy$, откуда $xy\le 1$.

Осталось доказать, что: $x^2y^2(x^2+y^2)=x^2y^2(4-2xy)\le 2$.

То есть, $a^2(2-a)\le 1$ при $0\le a\le 1$.

Получим: $a^3-2a^2+1=(a-1)(a^2-a-1)\ge 0$. Оба слагаемых неположительны.

## Литература

1. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Мир, 1970.

2. Сивашинский И.Х. Задачи по математике для внеклассных занятиях (9-10 классы). — М.: Просвещение, 1968.

3. Региональный этап XVII Всероссийской олимпиады школьников по математике // — Квант, №2, 2016.

4. Петербургские олимпиады школьников по математике 2000-2002 / Сост. К.П. Кохась, А.И. Храбров, С.В. Иванов и др. — СПб.: «Невский диалект»; БХВ-Петербург, 2006.

5. Петербургские олимпиады школьников по математике 2003-2005 / Сост. С.В. Иванов, К.П. Кохась, А.И. Храбров, и др. — СПб.: «Невский диалект»; БХВ-Петербург, 2006.

6. Московские математические олимпиады 1935-1957 г. / В.В. Прасолов и др. — М.: МЦНМО, 2010.

7. Алгебра на вступительных экзаменах в МГУ / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

8. Тригонометрия на вступительных экзаменах в МГУ / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

# Обыкновенные иррациональные уравнения

**Ю.О. Пукас,**
**МАОУ СОШ №2, г. Троицк**
**y-o-p1951@yandex.ru**

***«Решая иррациональное уравнение, рассуждайте рационально!»***
***Совет старого учителя***

Поверхностное представление о простейших иррациональных уравнениях типа $\sqrt{f(x)} = g(x)$ помешало даже некоторым достаточно сильным выпускникам этого года решить задачи с параметром, предложенные им 6.06.16 на ЕГЭ по математике. Мы обязательно разберём эти задачи, но начнём разговор с очень простых уравнений, вроде тех, что даются под номером 5 в первой части профильного варианта ЕГЭ по математике:

Найдите корень уравнения $\sqrt{9+8x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них. (Задание 5, прототип № 12841.)

Да и так ли порой велика разница между простыми и сложными задачами?

**1.** Решите уравнение $\sqrt{33-8x} = 3-x$. (Географический факультет МГУ, 1996.)

После возведения в квадрат получаем уравнение-следствие исходного уравнения:

$$\sqrt{33-8x} = 3-x \;\Rightarrow\; x^2 + 2x - 24 = 0.$$

Оно содержит все корни исходного уравнения, но может содержать посторонние для него корни, поэтому корни квадратного $x_1 = -6$ и $x_2 = 4$ необходимо проверить, например, подставив в исходное уравнение. Для первого корня получаем $\sqrt{81}=9$, а для второго $\sqrt{1}=1$.

**Ответ:** $-6$.

**2.** Решите уравнение $\sqrt{3x^2-25x+51}=7-2x$. (Химфак МГУ, 1997.)

Возведя в квадрат обе части, после преобразований получаем квадратное уравнение $x^2-3x-2=0$; $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. Проверять эти корни подстановкой в исходное уравнение не очень приятное занятие, но есть более простой путь. Дело в том, что уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе:

$$\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=(g(x))^2,\\ g(x)\geq 0;\end{cases}$$

поэтому проверять найденные корни мы будем в условии $7-2x\geq 0$, а не в исходном уравнении! В результате этой проверки убеждаемся, что корнем исходного уравнения является меньший корень квадратного уравнения.

**Ответ:** $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Обратим внимание на ошибочность утверждения о том, что уравнение $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases}f(x)=(g(x))^2,\\ f(x)\geq 0;\end{cases}$ так как для всех корней уравнения $f(x)=(g(x))^2$ условие $f(x)\geq 0$ выполняется автоматически, ведь для них $f(x)=(g(x))^2$, а посторонние корни так и не будут выявлены! Их выявит проверка условия $g(x)\geq 0$.

**3.** При всех значениях параметра $a$ решите уравнение $\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x$. (Физфак МГУ, 1968.)

Не пугаясь параметра, действуем, как в задаче **2.** Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a(2^x-2)+1=(1-2^{x})^2, \\ 1-2^x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x-(2+a)\cdot 2^x+2a=0, \\ 1-2^x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x=2 \\ 2^x=a, \end{array}\right. \\ 1-2^x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\log_2 a, \end{array}\right. \\ x \le 0. \end{cases}$$

Понятно, что первый корень не подходит, а как проверить второй, зависящий от параметра? Условие $1-2^x \ge 0$ для $2^x=a$ выполняется, если $\log_2 a \le 0$, решив это неравенство, мы найдём, при каких условиях $x=\log_2 a$ будет решением исходного уравнения!

**Ответ:** $x=\log_2 a$ при $0<a\le 1$; при остальных значениях $a$ решений нет.

В параллельном варианте тех экзаменов уравнение с параметром было совсем другого типа! Зачем же я его привожу здесь? Просто именно его я решал 5 июля 1968 года:

**4.** При всех значениях параметра $a$ решите уравнение $\sin x+\sqrt{2}\sin(a-x)=1$. (Физфак МГУ, 1968.)

Введя вспомогательный угол, вы, как и я когда-то, получите примерно вот такой **ответ:**

$$x=-\arccos\left(\frac{1-\sqrt{2}\cos a}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}\right)+(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos a}}+\pi n$$

при $\frac{\pi}{4}+2\pi k\le a\le \frac{7\pi}{4}+2\pi k$; при остальных значениях $a$ решений нет.

Интересно, что две следующие задачи в 2003 году шли под номерами 2 и 3 в одном и том же варианте. Получается, что первая из них является подсказкой, как решать вторую!

**5.** Решите уравнение $\sqrt{\sin x\cdot\sin 3x}=\cos x$. (ВМК МГУ, 2003.)

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin 3x=\cos^2 x,\\ \cos x\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x-\cos 4x=2\cos^2 x,\\ \cos x\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 4x=-1,\\ \cos x\ge 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=0,\\ \cos x\ge 0;\end{cases}\ldots$$

**Ответ:** $\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ .

**6.** Найдите множество значений функции $y=\sqrt{x^2-3x+2}-x$ . (ВМК МГУ, 2003.)

Переформулируем задачу: *при каких значениях параметра a уравнение* $\sqrt{x^2-3x+2}=a+x$ *имеет хотя бы одно решение*. Теперь остаётся найти, при каких значениях параметра $a$ имеет решения система $\begin{cases}x^2-3x+2=(a+x)^2,\\ a+x\ge 0.\end{cases}\ldots$

**Ответ:** $[-2;-1{,}5);\ [-1;+\infty)$ .

**7.** Найдите все значения параметра $p$, при каждом из которых уравнение $x-2p=\sqrt{2px+2p^2-7}$ имеет единственное решение. (ВШЭ-1996.)

Действуем, как в задаче **3**:

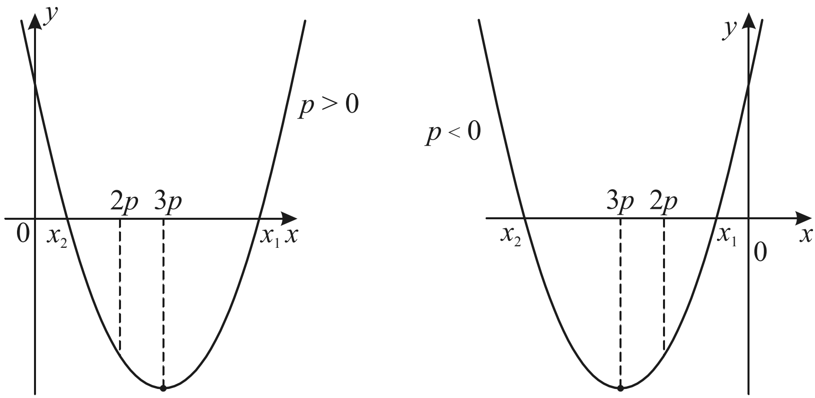
$$\begin{cases}x-2p\ge 0,\\ x-4px+4p^2=2px+2p^2-7;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2p\ge 0,\\ x^2-6px+2p^2+7=0.\end{cases}$$

Для полученного квадратного уравнения:

$$\frac{D}{4}=9p^2-2p^2-7=7p^2-7\ .$$

При $p=-1$ единственный корень $x=3p=-3$ не выдерживает проверки в условии $x-2p\ge 0$, при $p=1$ для корня $x=3p=3$ условие $x-2p\ge 0$ выполняется.

Если же $|\,p\,|>1$, то $x_{1,2}=3p\pm\sqrt{7p^2-7}$ . Нам надо найти условия, при которых только один из этих корней удовлетворяет условию $x-2p\ge 0$. Проще всего это можно сделать, используя наглядные представления о поведении графика квадратичной функции $y(x) = x^2 - 6px + 2p^2 + 7$ для положительных и для отрицательных значениях $p$:




Для $p > 0$ это: $\begin{cases} y(3p) < 0, \\ y(2p) < 0; \end{cases}$ а для $p < 0$: $\begin{cases} y(3p) < 0, \\ y(2p) \le 0. \end{cases}$

Заметим, что условие $y(3p) < 0$ равноценно условию $\dfrac{D}{4} > 0$.

Осталось получить ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{7}{6}}\right]; \{1\}; \left(\sqrt{\dfrac{7}{6}}; +\infty\right)$.

**8.** Решите уравнение $5\sqrt{27 + 54x - 81x^2} + 6x - 9x^2 = 31$. (ВМК МГУ, 1989.)

Напрашивается, бросается в глаза замена $t = 6x - 9x^2$, после чего получаем уравнение $5\sqrt{27 + 9t} = 31 - t$, равносильное уже привычной нам системе $\begin{cases} 25(27 + 9t) = (31 - t^2), \\ 31 - t \ge 0; \end{cases}$ …

Но есть и другой путь! Если вынести из-под корня тройку, то получим уравнение $15\sqrt{3 + 6x - 9x^2} + 6x - 9x^2 = 31$, а здесь уже напрашивается замена $z = \sqrt{3 + 6x - 9x^2} \ge 0$, и далее мы ищем неотрицательный корень уравнения $z^2 + 15z - 34 = 0$ …

**Ответ:** $x = \frac{1}{3}$.

**9.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $2^x - z = \sqrt{4^x - a}$ имеет единственное решение. (ЕГЭ-2016.)

Совсем простая задача! Проще даже, чем разобранная здесь задача №3. Кому-то очень повезло этим летом. Случайно ли? В других вариантах задания №18 были заметно сложнее.

**Ответ:** $(-1;0) \cup (0;1]$.

**10.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$ имеет ровно три различных решения. (ЕГЭ-2016.)

Здесь у возведения в квадрат хорошие перспективы: можно заметить, что сокращаются $x^4$ и $a^2$, и у полученного уравнения обязательно будет корень $x = 0$, который удовлетворит исходному уравнению для всех $a \le 0$. Смело начинаем действовать!

$$\begin{cases} x^2 + x - a \ge 0, \\ x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + x - a)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - a \ge 0, \\ 2x^3 - x^2(2a-2) - 2ax = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - a \ge 0, \\ x(x^2 - x(a-1) - a) = 0. \end{cases}$$

Все три корня уравнения-следствия находятся в явном виде: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = a$.

Корни $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$ удовлетворяют условию $x^2 + x - a \ge 0$ при всех $a \le 0$; корень $x_3 = -a$ — при любых значениях $a$.

Однако, корни могут совпадать. Если $a = 0$, то $x_1 = x_3$, ещё при $a = -1$ $x_2 = x_3$. Учитывая это, находим, при каких значениях параметра *a* исходное уравнение имеет ровно три различных решения.

**Ответ:** $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

**11.** Найдите все значения параметра ***a***, при каждом из которых уравнение $\sqrt{15x^2 + 6ax + 9} = x^2 + ax + 3$ имеет ровно три различных решения. (ЕГЭ-2016.)

И здесь у возведения в квадрат хорошие перспективы: сокращаются $6ax$ и 9, и $x=0$ обязательно будет решением при любых значениях $a$. Но есть и другой путь. Понимая общую схему решения рассматриваемых в этой статье уравнений, можно действовать раскованно, мы же не смотрим себе под ноги, сбегая по ступенькам эскалатора!

Обозначив $x^2+ax+3=t$, получаем уравнение $\sqrt{6t+9x^2-9}=t$, равносильное системе

$$\begin{cases} t^2-6t+9=9x^2, \\ t\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-3=\pm 3x, \\ t\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+ax=3x, \\ x^2+ax=-3; \end{array}\right. \\ x^2+ax+3\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-a+3, \\ x_3=-a-3; \end{array}\right. \\ x^2+ax+3\ge 0. \end{cases}$$

Корень $x_1=0$ удовлетворяет условию $x^2+ax+3\ge 0$ при любых значениях $a$; корень $x_2=-a+3$ при всех $a\le 4$; корень $x_3=-a-3$ при всех $a\ge -4$.

По условию задачи все корни должны быть различными. Понятно, что $x_2\ne x_3$, но надо ещё исключить случаи, когда или $x_2$, или $x_3$ равны $x_1$, то есть нулю. Корни совпадают, если $a=\pm 3$. Исключая эти значения, получаем окончательный ответ.

**Ответ:** $[-4;-3)\cup(-3;3)\cup(3;4]$.

**12.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных решения. (ЕГЭ-2016.)

Можно, конечно, возвести обе части в квадрат, но лучше и проще действовать, как в задании **11**. Обозначив $x^2+ax+1=t$, получаем уравнение $\sqrt{2t+x^2-1}=t$, равносильное системе $\begin{cases} 2t+x^2-1=t^2, \\ t\ge 0. \end{cases}$ Остальное — просто.

**Ответ:** $[-2;1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$.

**13.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$ имеет ровно два различных решения. (ЕГЭ-2016.)

Это уравнение другого типа? Не будем спешить с выводами! Обозначив $\sqrt{x}=t\ge 0$, получаем уравнение $\sqrt{2a-t^2}=a-t$. Нам надо найти все значения параметра *a*, при каждом из которых это уравнение имеет ровно два различных неотрицательных решения.

Действуя привычным образом, приходим к системе

$$\begin{cases} a-t\ge 0, \\ 2t^2-2at+a^2-2a=0. \end{cases}$$

Рассмотрев график квадратичной функции $y(t)=2t^2-2at+a^2-2a$, можно заметить, что вершина параболы $t_0=\dfrac{a}{2}$ находится как раз посередине между двумя очень важными для исследуемой системы точками $t=0$ (ищем неотрицательные решения) и $t=a$ (условие $a-t\ge 0$)!

Решая теперь систему $\begin{cases} y\left(\dfrac{a}{2}\right)<0, \\ y(0)\ge 0; \end{cases}$ мы найдём ответ задачи **13**.

**Ответ:** $[2;4)$.

**14.** При всех значениях параметра *a* решите уравнение $2x^2+2ax-a^2=\sqrt{4x+2a+3a^2}$ (Мехмат МГУ, 1994).

Решение этой задачи заслуживает отдельного разговора. Оно намного сложнее и интереснее, чем разобранные выше задачи. Отметим также, что приведённые в некоторых книгах ответы к этому уравнению не совсем точны, а вы получите правильные!

**Ответ:** $\{0\}$, $\{1\}$, $a=0$; $\dfrac{1-a+\sqrt{1+3a^2}}{2}$, $a\ne 0$; $-\dfrac{1+a+\sqrt{3a^2-3}}{2}$, $|a|\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

# Уравнение за кадром или Учим строить математическую модель

**А.В. Шаповалов,**
**г. Стокгольм, Швеция**
**alexandre.chapovalov@gmail.com**

Обучая математике, мы обычно ограничены количеством часов, зато можем управлять качеством. Последнее включает ту или иную свободу в выборе материала, и ещё большую — в выборе форм подачи материала и расстановке акцентов. Неопытный учитель скован программой, для опытного она не большая помеха, чем погода или закон всемирного тяготения.

Итак, вы научились в заданных рамках пользоваться свободой выбора материала. Как её применить?

Прежде всего, надо ранжировать знания и навыки по степени их полезности или хотя бы по степени применимости в дальнейшем. Причем речь идет не только о применимости в математике или на других уроках, но и за пределами школы. То, что редко применяется — быстро забывается. Даже если ученик выучил сложение дробей как следует, но пару лет не применял их — он почти наверняка это забудет. Значит, важный навык у ученика нужно не только выработать, но и поддерживать. Крайне желательно, чтобы поддержка проходила в непринужденной форме, а не как занудное напоминание вида «а вот сейчас мы в 100-й раз повторим, как». Если сложение дробей будет регулярно возникать как сама собой разумеющаяся часть других задач, оно усвоится и станет таким же автоматическим, как застегивание пуговиц.

Отсутствие ранжирования приводит к перекосам и неоправданным затратам времени. Вот, например, умение решать квадратное уравнение мне не пригодилось ни разу в жизни за пределами моей профессиональной деятельности как преподавателя: ни в программировании, ни в обыденной жизни. А вот умение работать с арифметической прогрессией — найти $n$-й член или просуммировать — требуется регулярно. Между тем, в школьной программе квадратными уравнениями мучат всех и подолгу, а прогрессию почему-то проходят только в старших классах и, как правило, мельком.

По моему опыту линейное уравнение нужнее квадратного, обратный ход нужнее линейного уравнения, сопоставление двух точек зрения (подсчет двумя способами) еще нужнее и т. д.

Интеграл и числа Фибоначчи встречаются одинаково часто, а тригонометрическое уравнение вообще никогда.

Но всего не перечислишь, да и опыт у каждого свой. Так что ранжирование каждый может сделать сам. Ключевое слово здесь: применение.

Математическая подготовка состоит из двух частей: знания математических формул и теорем и умения их применять. Давайте посмотрим повнимательнее: а к чему, собственно, мы хотим применять эти знания? Первый ответ будет: к математическим задачам, стандартным и, возможно, нестандартным. А откуда возьмутся эти задачи? Про стандартные понятно: есть типовые ситуации вроде подсчета сдачи, надбавки к зарплате, бюджета времени, количества стройматериалов и т. п. Н-да, как-то бедновато. Стоит ли ради этого зубрить математику 10 лет? Кроме того, такие расчеты все больше и больше закладываются в компьютеры: вызвал нужную программу, набрал исходные данные, нажал кнопку — и получил результат. Понятно, что в некоторых профессиях список стандартных задач шире, при расчетах нужны квадратные уравнения, синусы-косинусы, интегралы. Ну, так и там нужные программы для компьютеров тоже уже написаны, только, возможно, вместо числовых данных придется какие-нибудь функции вводить, и ответ может быть графиком или формулой. Но сути дела это не меняет: ввел, нажал, получил результат.

Но есть же ещё и нестандартные задачи?! Есть, только к ним готовят меньшинство школьников. Считается, что такие задачи нужны лишь тем, кто обладает творческим мышлением и собирается посвятить свою жизнь точным наукам. Процент творчески мыслящих учеников действительно невелик, из них выходят победители олимпиад. Любопытно, однако: в науку из них идут лишь немногие, большинство оказываются востребованы в массовых профессиях — программисты, менеджеры, экономические аналитики. Но и менее успешные участники олимпиад, летних школ и математических кружков находят себя в этих профессиях. Востребованным оказывается умение разбираться в нестандартных ситуациях. А оно не столь уж редко. Вспомните, ведь и вам наверняка приходилось в такие ситуации попадать: отменили электричку, забыли дома кошелёк, ключ перестал открывать дверь… В общем, стандартный способ перестал работать, но вы как-то разобрались и выкрутились. Скажем, применили какие-то знания или средства, о которых в нормальной ситуации и не вспоминали.

Ровно так же решаются и нестандартные задачи, в частности, пресловутая задача С6 из ЕГЭ. Математических знаний для неё нередко хватает и семикласснику, но подводит неготовность разбираться в ситуации. Вот эту-то готовность кружковцы и олимпиадники в себе постоянно и тренируют, и она потом им помогает в жизни даже тогда, когда содержимое уроков оказывается забытым.

Традиционный курс математики в школе содержит, конечно, навыки анализа ситуации. Однако потребность в таких навыках возникает сравнительно редко и нерегулярно. Темы, где навыки нужны, заслуженно считаются сложными (например, математический анализ или решение неравенств с рациональными функциями). Кружковцы же с этими темами обычно справляются гораздо успешнее. Хитрость тут в том, что навыки и сложный материал они изучают по отдельности: навыки приобретаются в младших классах и на простом и интересном в этом возрасте материале, а сложный материал в старших классах ложится на уже подготовленную почву. Помогает и то, что привыкание к непростым навыкам происходит без спешки, в течение длительного периода, а не за короткие недели, отведенные на усвоение темы.

Что же это за навыки такие волшебные? И нельзя ли научить им и обычных, не слишком склонных к математике учеников? Нет ли понятных, более-менее традиционных задач, на которых этим навыкам можно учить?

Для ответа на этот прикладной вопрос давайте сначала ответим на фундаментальный: а чем вообще занимается математика? Это наука естественная или гуманитарная? Естественная? А где в природе вы видите отрицательные и нецелые числа, точки нулевой ширины, бесконечные прямые линии? Это ведь всё абстракции, существующие в головах людей. Но может математика — наука гуманитарная? Почему же тогда её предсказания для физики, химии и даже биологии столь эффективны? Похоже, что математика занимает особое положение между естественными и гуманитарными науками.

Неожиданный ответ на эти вопросы дает профессор С. Р. Когаловский: математика — это наука о том, как человек познает окружающий мир с помощью особого типа мышления, называемого *математическим моделированием.* Математика потому и эффективна, что она часть генетически заложенной способности человека к познанию. Вообще, понять — это построить в голове модель. Вот умение строить математические модели и является фундаментальным навыком. Те термины, понятия, формулы, теоремы, которые мы сообщаем школьникам — это кирпичики, из которых они будут строить модели. Хотя точнее сказать, не строить, а описывать и исследовать. Потому что модель в голове ученика строится часто из каких-то смутных, одному ему понятных образов. Собственно, каждый ребенок сделал гениальное математическое открытие: он самостоятельно открыл математическую структуру родного языка, чтобы заговорить на нем. Теперь эта модель сидит у него в голове, он ею успешно пользуется, благо ему не надо её описывать. А вот когда он разбирается с задачей или ситуацией на уроке, ему надо будет сообщить решение — вот тут-то изученные термины и пригодятся.

Итак, главная цель — научить строить продуктивную математическую модель. Это значит: разобраться в ситуации и *описать её на математическом языке*, сохранив (математическую) суть и отсеяв ненужное. Почему именно это — главное? Потому что в 99 случаях из 100 человек использует математику как прикладную науку: в экономике, в инженерном деле, в программировании и т. п. И в первую очередь ему из задания, сформулированного на языке предметной области, вычленить и сформулировать математическую суть. Если он не сделает этого сам, то никакой математик ему не поможет: ведь математик предмета не знает. А вот если он правильно перевел задачу на язык математики, то специалисты по решению скорее всего найдутся. И останется только перевести решение обратно на предметный язык.

Итак, внешним проявлением построения математической модели является переформулировка задачи, то есть как бы перевод с одного языка на другой.

Из этого уже очевидно, что для этой цели наиболее подходят текстовые задачи. Их можно и нужно практиковать, начиная с первого класса и заканчивая 11-м. Условие описывается на обычном человеческом языке, с его нечеткостями и избыточностью. Неясностей не надо боятся, пусть школьники учатся переспрашивать и уточнять. Именно эти вопросы и ответы и покажут вам, как идет осмысление и перевод с житейского языка на математический.

Когда я ещё учился в школе, текстовые задачи были неотъемлемой частью уроков арифметики, скучной, но полезной. В учебниках алгебры их уже было меньше, и они были однообразнее: в основном на движение и совместную работу. И только попав на олимпиаду, я опять к своей радости увидел много разнообразных и интересных текстовых задач.

Сейчас много подходящих задач для всех возрастов можно найти в сети и в книгах (см. список литературы).

Но не приведет ли увлечение текстовыми задачами к пренебрежению другими аспектами в изучении математики: усвоению математического языка и математических понятий, отработке стандартных математических действий. И неужели все нетекстовые задачи для главной цели не годятся? Ведь обычно мы даём ученику задачу, уже сформулированную на математическом языке. Скажем, сложить две дроби или решить квадратное уравнение. Здесь переводить на математический язык ничего не надо, и получается, что построения модели нет?

В простейших примерах нет, соглашусь я. Такие примеры в самом деле годятся только для отработки стандартных навыков-алгоритмов, а для главной цели не подходят. Однако стоит их немного изменить, как указанный момент возникнет. Можно, например, дать неполное квадратное уравнение или уравнение $x(x+2)=15$. Ученик должен понять, что оно на самом деле квадратное — только надо его преобразовать. Конечно, само преобразование стандартно, но оно становится стандартным только когда отработано. А вначале школьнику самому придется догадаться до нужных шагов. Это и будет тренировкой умения переформулировать. Часто преобразования можно выполнить разными путями, и надо дать школьнику возможность самому выбрать путь. Вообще, выбор такого пути — это искусство (большое или маленькое — зависит от задачи). Надо помочь ученику овладеть этим искусством. Умение ориентироваться в условиях неоднозначного выбора более важно, чем умение ходить по быстро ведущей к цели протоенной дороге. Проблема в том, что даже хорошо зная сеть таких дорог, но плохо ориентируясь, школьник может не увидеть хода ни к одной из них. Кроме того, умение ориентироваться включает в себя умение заметить свой шаг в неверном направлении и вернуться на верный путь. Помня об этом, опытный учитель всегда сохранит хотя бы маленький элемент новизны, чтобы школьник чувствовал себя первооткрывателем, а не калькулятором, на чьи кнопки нажимают.

Попробуем конкретизировать вышесказанное на примере обучения уравнениям. Почему именно им? Так ведь весь школьный курс алгебры пронизан ими. А теперь спросите обычного человека через 20 лет после окончания школы: как часто ему в его жизни пригодились уравнения. 95% искренне ответят «Никогда». И ведь среди опрошенных, помимо охранников, продавцов и секретарш, будут и топ-менеждеры, и офицеры, и, о ужас, инженеры[1]. Почему? А все потому же: 90% учебного времени уходит на то, чтобы научить уравнения *решать*, ещё 9% — чтобы научить их составлять для узкого списка *специально подобранных задач*. Тот 1% случаев, когда уравнение естественно возникает и эффективно применяется, явно недостаточен для закрепления в памяти учеников.

Но, казалось бы, похожие проблемы должны возникать и с другими математическими навыками. Они и возникают, но все же не до такой степени: складывать-вычитать население худо-бедно умеет, проценты подсчитывает, и немало таких, кто может рассчитать, как развести краску или другой раствор до нужной концентрации. Что же такого заковыристого в уравнениях?

А колдовство, о котором почему-то не предупреждают: возможность что-то узнать наверняка, *сравнивая две неизвестные* величины. Решая «ненастоящее» уравнение $2x+5=17$, мы чуда не увидим. Просто проделаем действия в обратном порядке: сложение заменим на вычитание $2x=17-5=12$, а умножение — на деление $x=12:2=6$. Этот приём называется *обратный ход*, он подсказывается здравым смыслом и воспроизводится по мере необходимости. А вот в уравнении $2x+5=5x-13$ неизвестная входит в обе части. Их значений мы не знаем, но из совпадения можем найти. Решение последнего уравнения трудности не представляет, но вот идея свести решение задачи к сравнению двух *неизвестных* величин здравому смыслу противоречит. Она выглядит примерно столь же контринтуитивной, как вопрос в логической задаче вида «...Я не

[1] Последнее не шутка: я участвую в разработке коммерческой компьютерной программы для моделирования микроклимата в зданиях. Пользуясь ей, инженеры навешивают на чертеж здания радиаторы, двери, вентиляторы и другое оборудование, затем нажимают кнопку и видят разные графики, скажем по теплу, влажности, освещенности. Чтобы выдать графики, программа сама составляет систему уравнений и решает её. Так вот, нам строго запрещено в диалоге с пользователем упоминать слово «уравнение» — чтобы не отпугивать клиентов.

знаю твоего числа, сказал первый. И я не знаю твоего числа, сказал второй. Найдите эти числа» (см. например[2]).

Итак, самая большая трудность при применении уравнения: поверить, что оно поможет помочь! Не упускайте возможности показать это школьникам. Ситуаций полным-полно! Скажем, верным признаком полезности уравнения является применение метода проб и ошибок: задрал ствол пушки повыше — перелет, опустил пониже — недолет; ага, значит ставим ствол в промежуточное положение. Кажется, что не зная явной зависимости дальности выстрела от угла наклона, уравнения не напишешь. Но оценив величину перелета и недолета, мы можем с помощью линейной интерполяции значительно увеличить точность следующего выстрела. А линейная интерполяция — это линейное уравнение (готовые формулы мало кто помнит, да и зачем). Конечно, вряд ли на уроке вам понадобится разбираться со стрельбой, но можно, скажем, продемонстрировать это на приближенном вычислении квадратного корня. Пусть нужен $\sqrt{150}$. Знаем $12^2=144$ — недолет 6, $13^2=169$ — перелет 19. Обозначив дробную часть искомого корня $x$, считаем, что $x$ и $1-x$ пропорциональны 6 и 19: $\frac{x}{6}=\frac{1-x}{19}$, откуда $x=0{,}24$, $\sqrt{150}\approx 12{,}24$. На самом деле $\sqrt{150}=12{,}2474\ldots$ — ошибка меньше одной сотой. Всё-таки, кроме внутриматематических приложений, ищите возможность продемонстрировать полезность уравнений и вне математики — без этого большинство учащихся в них в глубине души не поверят...

Уравнения идут рука об руку с другим важным приёмом в математике: подсчётом двумя способами. В школьной программе он вообще не упомянут, но в кружковой математике это один из базовых принципов. С одной стороны, он универсален, и составление

[2] В одиночных камерах сидят 4 друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке различны, двузначны, и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера троих других, никто из них не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера?

уравнений и неравенств на него опирается. С другой стороны, он понятен и нагляден, и есть много ситуаций, где легко продемонстрировать его полезность. Поэтому сказать об этом приёме можно школьникам любого возраста, а дальше в самых разных ситуациях ненавязчиво напоминать о нем. Идея проста: увиденное двумя глазами всегда больше, чем сумма увиденного каждым глазом по отдельности. В частности, если что-то можно подсчитать двумя разными способами, это всегда можно использовать. Второй подсчет поможет проверить первый. Из двух вариантов можно выбрать тот, что короче для записи. Самое же главное: если результаты выглядят по-разному, то может получиться либо противоречие (и мы поймем, что таких объектов не бывает), либо уравнение (и это поможет нам найти что-то неизвестное).

Вернемся к уравнениям. Даже если школьники привыкли к идее подсчета двумя способами и поверили, что уравнение — это хороший помощник, останется непростая техническая проблема — как уравнение составить. Для некоторых камень преткновения — написать букву вместо неизвестного числа. Это нежелание преодолевается тренировкой, то есть решением некоторого количества задач на составление уравнений. Вначале можно и нужно подсказывать, что выбрать за $x$. Но учитель не должен забывать, что выбор неизвестного — это искусство, полностью формализовать его нельзя. В любой мало-мальски содержательной задаче выбор неоднозначен. Научитесь уважать выбор школьника, даже если он ведет к более громоздким уравнениям и выкладкам. Не набив себе шишек, ученик не научится этот выбор оптимизировать, и тем более не научится составлять уравнение там, где оно не очевидно.

Кроме трудных текстовых задач есть немало чисто математических задач, которые при первом взгляде не отнесешь к задачам на уравнение. Я их называю «уравнение за кадром». Решение и разбор этих задач выполняют важную методическую функцию: они разрушают у учащихся неправильный стереотип — мол, уравнение надо писать только в тех задачах, где в условии есть ключевые слова (например, бассейн, трубы, скорость, время и т. п.). У кого-то список слов короткий, у кого-то подлиннее. Но любой такой список — это попытка заменить содержательный анализ ситуации и построение адекватной математической модели на упрощенный алгоритм. Повторюсь: даже неумелый анализ и моделирование гораздо важнее умения написать и решить уравнение по шаблону.

Разберем несколько примеров.

**1.** Возле каждого из углов прямоугольного бассейна $10 \times 25$ *м* стояло по спортсмену. Тренер подошел к краю бассейна, и подозвал к себе всех спортсменов. Все подошли кратчайшими путями по кромке бассейна. Известно, что трое прошли в сумме 50 метров. Сколько прошел четвертый?

Указание. Заметим, что сумма расстояний, пройденных спортсменами, не зависит от расположения тренера и равна периметру бассейна.

Комментарий. Задача сравнительно проста, поскольку ключевые слова правильно подталкивают к написанию уравнений. Неожиданна единственность ответа: ведь положение тренера не определяется однозначно. Обратите внимание, что в условии минимально количество математических терминов (например, вместо «периметра» употреблено нематематическое слово «кромка»). Это дает маленькое упражнение по переводу на математический язык и маскирует подсказку «посчитайте периметр двумя способами»).

**2.** Большой клетчатый прямоугольник разрезали на 4 меньших прямоугольника двумя перпендикулярными разрезами, идущими по сторонам клеток. Одна из частей состоит из 12 клеток, другая — из 15, третья — из 44. Из какого количества клеток состоит большой прямоугольник?

Ответ. 55.

Указание. Равны произведения площадей прямоугольных частей в противоположных углах. Разбиение на пары противоположных частей однозначно ввиду соображений делимости.

Комментарий. Школьники, скорее всего, буду решать эту задачу перебором, рисуя в клетчатой тетради немногочисленные конкретные варианты. Обсудите с ними, что делать, если бы числа в задаче были велики. Идея уравнения здесь возникает из наблюдения изначально неочевидного равенства произведений площадей. Когда две величины, вычисленные *разным способом,* оказываются равны, это почти всегда повод написать уравнение.

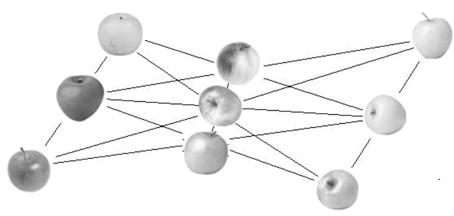
**3.** Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

Ответ. На 9.

Указание. Обозначим исходные числа $x$, $y$, $z$, и положим $p = xy + xz + yz$, $s = x + y + z$. Тогда все три приращения линейно зависят от $s$ и $p$. Составив и решив систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, найдем третье приращение.

Комментарий. Хороший пример внутриматематической переформулировки. Естественные неизвестные позволяют записать уравнения, но это система двух уравнений второй степени с тремя неизвестными. Заметив повторяемость, введем новые неизвестные, сильно упростив систему.

**4. Ряды яблок.** На столе лежат 9 яблок, образуя 10 рядов по 3 яблока в каждом (см. рис.). Известно, что у девяти рядов веса одинаковы, а вес десятого ряда отличается. Есть электронные весы, на которых за рубль можно узнать вес любой группы яблок. Какое наименьшее число рублей надо заплатить, чтобы узнать, вес какого именно ряда отличается?



Совет. Надо не тратить деньги, а подумать.

Ответ. 0 рублей. Отличается вес среднего горизонтального ряда.

Указание. У нас есть 10 весов рядов, из них 9 весов совпадают. Сумма весов всех яблок тремя способами представляется как сумма весов трех рядов, причем в эти тройки входят все ряды, кроме упомянутого в ответе. Запишем равенство сумм двух троек. Если какое то из слагаемых отличается, обозначим его $x$, а остальные $a$. Решив уравнение, найдем $a = x$. Значит, все 9 рядов, вошедшие в тройки, весят одинаково.

Комментарий. Задача была придумана специально, чтобы щелкнуть по носу тех, кто «набивал руку» на задачах на взвешивание в ущерб умению думать. Уравнение здесь запрятано не слишком глубоко, но скрыто от тех, кто смотрит только на антураж.

**5.** Род Муромцевых (ныне, увы, прекратившийся) основали трое сыновей Ильи Муромца. Все мужчины в этом роду имели по трое детей, за исключением семерых, не оставивших потомства. Всего в роду были 1994 женщины. Сколько всего человек было в роду Муромцевых? (Роду принадлежали основатели, а также те и только те дети, чей отец принадлежал роду).

Ответ. 3000.

Указание. Обозначив $m$ число мужчин рода, общее число людей рода считаем двумя способами: как сумма мужчин и женщин, и как сумма сыновей Ильи Муромца и детей мужчин рода. Из полученного уравнения найдем $m$.

Комментарий. Трудность здесь тоже в антураже, который побуждает применять теорию графов (ведь «генеалогическое дерево»!), а не уравнение.

**6.** Дорожки парка идут вдоль краев двух квадратных газонов с одной общей стороной. Вокруг газонов (каждый вокруг своего) против часовой стрелки гуляют с постоянными скоростями. Ватсон и на $20\%$ быстрее него Холмс. Время от времени они встречаются на общей дорожке. Во второй раз они встретились через 10 минут после первого, а в третий — через 10 минут после второго. Через какое время они встретятся в 4-й раз?

Ответ. Через 35 мин.[3]

Комментарий. Эта по-настоящему трудная задача служит обратным примером: здесь попытка обойтись *только* уравнениями не проходит. Без них на начальном этапе не обойтись, но далее нужен

[3] Подробное решение см. в [4].

переход к дискретной модели прыжков по вершинам правильного 11-угольника. Подробное решение можно найти в книге [4], задача 114.

## Список литературы

1. А. В. Шаповалов, И. В. Ященко. Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6-го класса. — М.: МЦНМО, 2014.

2. А. В. Адельшин, Е. Г. Кукина и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск 2007–2010. — М.: МЦНМО, 2011.

3. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. Московские математические регаты. — М.: МЦНМО, 2007.

4. А. В. Шаповалов, Л. Э. Медников. XVII турнир математических боев имени А. П. Савина. — М.: МЦНМО, 2012.

# Задачи на составление дробно-рациональных уравнений с физическим смыслом

**Т.В. Алейникова, А.В. Игошин,**
**Физико-математический лицей №38, г. Ульяновск**

Все отрасли современной науки тесно связаны между собой. Взаимосвязи наук находят адекватное отражение в учебных предметах, представляющих по существу основы соответствующих наук — в этом проявляется один из аспектов дидактической проблемы межпредметных связей, поэтому и школьные учебные предметы не могут быть изолированы друг от друга.

Межпредметные связи являются дидактическим условием и средством глубокого и всестороннего усвоения основ наук в школе. Установление межпредметных связей в школьном курсе физики и математики способствует более глубокому усвоению знаний, формированию научных понятий и законов, совершенствованию учебно-воспитательного процесса и оптимальной его организации, формированию научного мировоззрения, единства материального мира, взаимосвязи явлений в природе и обществе. Это имеет огромное воспитательное значение. Кроме того, они способствуют повышению научного уровня знаний учащихся, развитию логического мышления и их творческих способностей. Реализация межпредметных связей устраняет дублирование в изучении материала, экономит время и создает благоприятные условия для формирования общеучебных умений и навыков учащихся.

Под межпредметными связями мы понимаем единство целей, функций, содержательных элементов, учебных дисциплин, которое, будучи реализовано в учебно-воспитательном процессе, способствует обобщению, систематизации и прочности знаний, формированию обобщенных умений и навыков, в конечном итоге —

формированию целостного научного мировоззрения и качеств всесторонне и гармонически развитой личности.

1. Межпредметные связи, выражая диалектический метод познания, способствуют повышению теоретического и практического уровня обучения. Методологическая функция межпредметных связей в учебном познании заключена в обнаружении единства в многообразии процессов и явлений, изучаемых разными учебными предметами. Межпредметные связи выявляют общее, особенное и единичное в изучении объектов.

2. Межпредметные связи приносят в учебное познание методологический аппарат современной науки. Их осуществление способствует приобщению школьников к системному методу мышления. Они расширяют область познания, выделяя связи между элементами знаний из разных учебных дисциплин в качестве объектов усвоения. Межпредметные связи выступают как метод деятельности ученика, развивающий у него способность к синтезу знаний из разных предметов, в единичном видеть общее и с позиций общего оценивать особенное.

3. Межпредметные связи побуждают учителя к самообразованию, творчеству и взаимодействию с другими учителями-предметниками. Это способствует повышению педагогического мастерства и сплочению педагогического коллектива в режиме одних задач обучения.

Межпредметные связи можно рассматривать как необходимый элемент системы предметного обучения, ибо предметы и их отношения не могут быть противопоставлены друг другу. Логические связи отдельных систем знаний внутри учебных предметов находят выражение в содержании обучения. Коллектив Физико-математического лицея много лет работает над развитием идей МПС физики и математики, что обусловлено статусом лицея и спецификой программ по физике и математике. Необходимость углубленного преподавания физики требует, в свою очередь, нестандартного подхода к преподаванию математических дисциплин: многие темы курса изучаются раньше, перенесены по времени в другой класс (производная в 9 классе). Требуется отработка специальных вычислительных навыков таких, как действия с числами в стандартном виде (7 класс), погрешности (7, 8, 9 класс), определение размерности величины по ее формуле (8 класс).

Практика показала, что насыщение содержания образования по математике физическими задачами, применение математических алгоритмов к физическим величинам, позволяет добиться положительного результата при изучении этих понятий в физике, а также расширить кругозор учащихся в восприятии темы на математике. Таким образом, МПС объединяют два предмета в достижении единой цели — получение знаний и применение их на практике.

В своих работах мы не раз обращались к этому вопросу. (См. работы авторов «Способы поиска решения задач на движение в курсе математики 5-6 классов», «Реализация межпредметных связей при изучении темы «Пропорциональные величины», «Практические работы на уроках математики», «Формирование графической культуры учащихся на уроках математики», «Графический метод в преподавании физики»). Практически, в каждой теме школьного курса математики 5-6 классов и алгебры 7-9 классов возможно привлечение материала из физики. Цель таких уроков не только подготовить математический аппарат для решения физических задач, но и показать учащимся многообразие методов и областей применения математики.

В 8 классе при изучении темы «Дробно-рациональные уравнения» очень удачным оказалось включение физических задач в раздел «Решение задач на составление ДРУ». Конечно, это достаточно сложные задачи для учащихся, так как кроме логической составляющей одной из трудностей являются действия с большими числами или с числами в стандартном виде. Эти уроки мы проводим в заключительной части изучения темы, когда отработан алгоритм решения ДРУ, решены стандартные задачи и задачи повышенного уровня из учебника.

В начале урока необходимо повторить основные физические законы и формулы, а также соотношения между физическими величинами:

$$S = \nu t;\ \ v = \frac{S}{t};\ \ t = \frac{S}{v};\ \ S = ab;\ \ m = \rho V;\ \ \rho = \frac{m}{V};$$

$$p = \frac{F}{S};\ \ F = pS;\ \ A = FS;\ \ U = IR;\ \ I = \frac{U}{R}$$

и напомнить учащимся, как определить вид пропорциональности по формуле (Об. П. или Пр. П.). Этот вопрос подробно изучается в 6 и 7 классах. Далее предлагаем задачи из сборника [1]. Для оформления решения и построения рассуждений используем таблицу, колонки которой заполняем, исходя из условия задачи.

**Задача 1**. *Имеется два слитка из разных сплавов массой по 720 г. Плотность первого на 1 г/см³ меньше плотности второго. Найти объем каждого слитка, если объем одного из них на 10 см³ больше объема другого.*

Сначала устанавливаем «главную» формулу, связывающую величины и определяем вид зависимости между ними:

$$m = \rho V \text{, тогда } V = \frac{\boldsymbol{m}}{\rho},$$

т. к. $m = const$, то $V$ и $\rho$ — Об. П. величины, то есть: чем больше плотность $\rho$, тем меньше объем $V$.

Тогда: если $\boldsymbol{\rho_1} < \rho_2$, то $V_1 > \boldsymbol{V_2}$.

При составлении уравнения уравниваем ***меньшее*** — это $\boldsymbol{\rho_1}$ **(+1)**.

за $x$ выбираем ***меньшее*** — это $\boldsymbol{V_2}$.

| Что | Масса (г) | Плотность (г/см³) | Объем (м³) |
|---|---|---|---|
| 1 слиток | 720 | $\frac{720}{x+10}+1$ | $x+10$ |
| 2 слиток | 720 | $\frac{720}{x}$ | $x$ |

Составляем уравнение: $\dfrac{720}{x+10} + 1 = \dfrac{720}{x}$.

Если исследовать таблицу, то она ничем не отличается от обычной алгебраической задачи ([2], № 610). Сложность — в установлении зависимостей между величинами и в выборе величины, которую надо уравнять.

**Задача 2.** *На столе находится гиря массой в 200 г. Когда ее перевернули, площадь опоры уменьшилась на* $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ *м³, а давление на стол возросло на* $1{,}2 \cdot 10^{3}$ *Па. Найти площадь опоры в каждом из случаев (* $g = 10$ *м/с²).*

Формулы: $p = \dfrac{F}{S}$; $F_{тяж} = mg$; $p = \dfrac{mg}{S}$, т. к. $mg = const$, то $p$ и $S$ — Об. П. величины, то есть: чем больше площадь опоры $S$, тем меньше давление $p$.

Тогда: $\boldsymbol{S_2} < S_1$ — ***меньшее*** за $x$; $p_2 > p_1$ — ***меньшее*** → ***уравнять*** $(+1{,}2 \cdot 10^3)$

Необходимо единицы измерения всех физических величин перевести в систему СИ: $m = 200\,г = 0{,}2\,кг$.

| Что | $mg$ $(H)$ | Давление (Па) | Площадь (м²) |
|---|---|---|---|
| 1 раз | $0{,}2 \cdot 10$ | $\dfrac{2}{x + 0{,}0015} + 1{,}2 \cdot 10^3$ | $x + 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 раз | $0{,}2 \cdot 10$ | $\dfrac{2}{x}$ | $x$ |

Составляем уравнение:

$$\frac{2}{x + 0{,}0015} + 1200 = \frac{2}{x};\ 1200 \cdot 0{,}0015 = 1{,}8$$

$\dfrac{1200x^2 + 1{,}8x - 0{,}003}{x(x + 0{,}0015)} = 0$, и т. к. $x > 0$ (по условию), то $x(x + 0{,}0015) > 0$, тогда:

$$1200x^2 + 1{,}8x - 0{,}003 = 0$$

$$200x^2 + 0{,}3x - 0{,}0005 = 0$$

$$D = 0{,}09 + 4 \cdot 0{,}0005 \cdot 200 = 0{,}49$$

$x_1 < 0$ — не удовлетворяет условию задачи, $x_2 = 0{,}001 = 1 \cdot 10^{-3}$.

Значит $S_1 = 1 \cdot 10^{-3}\,(м^2) = 0{,}001(м^2)$, $S_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,(м^2) = 0{,}0025(м^2)$.

Ответ: $S_1 = 0{,}001\,м^2$, $S_2 = 0{,}0025\,м^2$.

При решении этой задачи важно показать учащимся необходимость рациональных вычислений при решении квадратного уравнения с дробными коэффициентами.

Надо отметить, что на уроках физики задачи этого типа также решаются не в общем виде (как обычно у них принято), а именно с численными данными задачи. Поэтому проработка этого материала на алгебре помогает учащимся применять полученные знания на уроках физики.

Решение большинства задач можно провести по алгоритму:

1. Рабочая формула, константы.
2. Вид зависимости между переменными величинами (чем больше, тем больше (или меньше)).
3. Выбор неизвестного (вопрос задачи), выбор уравниваемого компонента (меньшее) и способ уравнивания ($+$ — «на», $\cdot$ — «в») или другой способ составления уравнения.
4. Заполнение таблицы и составление уравнения.
5. Решение уравнения, проверка результата и анализ его реальности по условию.

**Задача 3.** *При перемещении тела вдоль пути $ABCD$ на участках $AB$, $BC$ и $CD$ была совершена работа равная 36 Дж, 40 Дж и 63 Дж соответственно. Из-за различного характера поверхностей этих участков сила $F_1$ меньше $F_2$ на 2 Н и на 1 Н больше силы $F_3$. Найдите силы $F_1$, $F_2$ и $F_3$, если участки $AC$ и $CD$ имеют равные длины.*

1.Формулы: $A = FS$, то $S = \dfrac{A}{F}$, $AC = CD$ или $AB + BC = CD$ (условие составления уравнения).

2. $F_1$ | $x+2$
$F_2$ — на 2 Н < | $x$
$F_3$ — на 1 Н < | $x-1$

3. Таблица:

| Что | Работа, $A$ (Дж) | Сила, $F$ (Н) | Перемещение, $S$ (м) |
|---|---|---|---|
| $F_1$ ($AB$) | 36 | $x+2$ | $\frac{36}{x+2}$ |
| $F_2$ ($BC$) | 40 | $x$ | $\frac{40}{x}$ |
| $F_3$ ($CD$) | 63 | $x-1$ | $\frac{63}{x-1}$ |

Составляем уравнение: $\frac{36}{x+2}+\frac{40}{x}=\frac{63}{x-1}$. $F_1=10\ H$, $F_2=12\ H$, $F_3=9\ H$.

Задачи с физическим смыслом очень разнообразны (см. Приложение) и охватывают более широкий круг вопросов по сравнению с алгебраическими задачами, которые предлагает учебник [2] (в основном, это задачи на движение и работу). Решение физических задач на уроках алгебры требует привлечения знаний из смежного предмета, причем из всего курса: это и механика (кинематика, динамика, законы сохранения, гидростатика), и электродинамика (законы постоянного тока), и тепловые явления. Используются понятия: сила, работа, мощность, количество теплоты, потенциальная энергия, архимедова сила, давление в жидкостях и др. Происходит глобальное обобщение изученного физического материала в применении алгебраических алгоритмов. Несомненно, в выигрыше — оба предмета!

Однако, в виду своего разнообразия и непривычности условия, а также в связи с использованием чисел в стандартном виде, эти задачи сложны для решения, но очень интересны для учащихся, потому что более реальны, приближены к жизненным ситуациям. Они требуют глубокого осмысления и качественных вычислений. В любом случае решать их надо и весьма полезно со всех точек зрения.

Следует отметить успех проведенного эксперимента в двух восьмых классах, где с 5 класса применяется методика МПС. На уроках физики, до проработки этого материала на уроках алгебры, такие задачи «не шли». После — большинство учащихся уже не испытывало трудностей при решении. В третьем 8 классе, где эта методика не применялась, приходилось жертвовать обсуждением физического смысла задачи, в связи с неумением учащихся увидеть и решить алгебраическое уравнение. Проблемы с математическим аппаратом отразились на восприятии физического материала. Поэтому межпредметные связи являются важнейшим фактором совершенствования процесса обучения в целом, на всех его уровнях. Межпредметные связи выступают как потребность развивающего обучения современных школьников. Методологическая функция межпредметных связей обеспечивается, когда они используются как метод системного усвоения знаний и как метод совершенствования процесса обучения в предметной системе, его организации в единое целое.

**Приложение**

Задачи с физическим смыслом на составление дробно-рациональных уравнений.

1. *К выпрямителю с напряжением* $22\,В$ *подключен реостат. Когда напряжение возросло на* $10\%$*, а сопротивление реостата уменьшилось на* $90\,Ом$*, сила тока в цепи увеличилась на* $1{,}1\,А$*. Найдите первоначальное сопротивление реостата.*

2. *На какой глубине в море давление равно* $412\,кПа$*, если в озере, глубина которого на* $15\,м$ *больше, давление равно* $550\,кПа$ *(плотность морской воды больше плотности пресной воды на* $90\,кг/м^3$*).*

3. Имеется два слитка из разных сплавов, массой по $720\,г$. Плотность одного из них на $1\,г/см^3$ меньше плотности второго. Найти объем каждого слитка, если объем первого слитка на $10\,см^3$ больше объема второго.

4. На столе находится гиря массой в $200\,г$. Когда её перевернули, площадь опоры уменьшилась на $1{,}5\cdot 10^{-3}\,м^2$, а давление на стол увеличилось на $1{,}2\cdot 10^3\,Па$. Найти площадь опоры в каждом случае. ($g = 10\,м/с^2$)

5. При перемещении тела вдоль пути $ABCD$ на участках $AB$, $BC$, и $CD$ была совершена работа 36 Дж, 10 Дж и 63 Дж соответственно. Из-за различного характера поверхностей этих участков сила $F_2 < F_1$ на 2 Н и на 1 Н больше, чем $F_3$. Найти силы $F_1$, $F_2$ и $F_3$, если участки $AC$ и $CD$ имеют одинаковую длину.

6. На 2 тела, объемы которых отличаются на $40\,см^3$, помещенных в сосуды с водой и со спиртом, действует архимедова сила $1{,}6\,Н$. Найти объем каждого тела, если плотность воды на $200\,кг/м^3$ больше плотности спирта.

7. Электрическая плитка при силе тока $5\,А$ потребляет $1080\,кДж$ энергии. Найти сопротивление плитки, если другая плитка, сопротивление которой на $12\,Ом$ больше, потребляет эту же энергию за время, на $10\,мин$ меньшее. (При той же силе тока).

8. Какой объем сосновых и дубовых дров надо сжечь в печи, чтобы выделилось количество теплоты $2{,}6\cdot 10^8\,Дж$, если объем сосновых дров на $0{,}025\,м^3$ больше, а плотность дуба — на $400\,кг/м^3$ больше. ($q_{сосны} = q_{дуба} = 1{,}3\cdot 10^6\,Дж/кг$)?

9. Двигатели космического корабля «Восток» произвели работу $1{,}5\cdot 10^7\,Дж$. Какова мощность двигателей, если, уменьшив мощность на $10^7\,Дж$, для выполнения той же работы потребуется увеличить время на $2\,сек$?

10. Тело, поднятое на некоторую высоту, обладает потенциальной энергией $9000\ Дж$. Если массу тела увеличить на $6\ кг$ и поднять его на высоту, большую на $5\ м$, то $E_П = 14400\ Дж$. Найти первоначальную массу тела и высоту, на которую оно было поднято.

## Литература

1. Сборник задач по физике: Для 7-8 кл. общеобраз. учреждений / Лукашик В.И. / М: Просвещение, 1999.

2. Алгебра 9 — учеб. для 9 кл. общеобраз. учрежд./ Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г.-под редакцией С.А. Теляковского. / М.: Просвещение,2003.

3.Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для ст-тов пед. ин-тов по физ.-мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; сост. В. И. Мишин. — М.: Просвещение, 1987.

# Проведение творческих уроков в 5–7 классах

**А.Г. Королева,**
**Гимназия 1514, г. Москва**
**korollevaalla@rambler.ru**

Урок математики, как впрочем и любой другой, часто сводится к прохождению программы, причём преимущественно — с использованием объяснительно-иллюстративного метода (посмотри – повтори – запомни). Отрабатывая на уроке с ребятами тот или иной материал, иногда замечаешь, что некоторым из них скучно, неинтересно, не хочется тратить время на выполнение вычисления непростых выражений, или тот или иной ученик еще не втянулся в учебный процесс, и мысли витают где-то за пределами школы. К сожалению, это приводит к снижению качественной успеваемости учащихся и не решает проблемы развития их математических способностей.

Да, конечно, это объяснить можно уменьшением выделяемых часов на обучение математике, усложнением программ по предмету и, как следствием, быстрой утомляемостью учащихся. Но соответственно это и подталкивает к решению задачи: как провести урок, чтобы учащиеся хорошо усвоили материал, и при этом не снижался интерес к изучению математики? Чтобы ученик относился к знаниям неравнодушно, с возрастающим интересом, самостоятельно находил, составлял и решал задачи, применяя полученные знания?

Одним из возможных вариантов разрешения сложившейся ситуации является проведение так называемых творческих уроков, когда детям дается право придумывать что-то свое — задачу или ребус, или уравнение, или кроссворд, отражающие связь математики с реальностью. Конечно, при этом важно, чтобы ребята использовали полученные знания по изучаемой теме или по пройденным темам. Но поскольку уровень учащихся разный, то следует ожидать сочинения разных задач — и простых, и сложных, для решения которых необходимы смекалка и изобретательность, а подчас и чувство юмора, и здравый смысл. Эти ожидания и подтвердились на практике при выполнении творческих заданий на уроках.

В 5-х и 6-х классах у меня была возможность проводить такие уроки во время часов, посвященных занимательной математике (или развивающей математике); в 7-м классе времени на уроках алгебры было всегда мало, поэтому творчеством мы занимались или в течение последних нескольких минут урока, или на факультативах. Но если у учащихся появлялись идеи какой-либо задачи, а отведенного времени на грамотную формулировку и оформление идеи не хватало, то ребята доделывали задачи дома.

Более подробно остановимся на заданиях, в которых требовалось создать нечто новое. Для ребят наиболее близкой, удобной формой оказалось составление задач. Составление задач учащимися, умение критически подходить к условию, анализировать данные в условии имеет большое значение не только для проверки усвоенных ими знаний, но также способствует развитию творческой деятельности. Особо приветствовались задачи с разнообразным интересным и занимательным содержанием, чтобы стимулировать более разнообразный выбор темы при составлении новой задачи. Тематика задач могла сильно варьироваться. У отдельных учащихся задачи отличаются оригинальностью, многообразием образов, необычностью сюжетов, более связаны с жизнью, интересами подростков, их чувствами и межличностными отношениями, всё чаще в них присутствует юмор.

Задачи складывались в копилку и в один прекрасный день появлялся урок, составленный из заданий, придуманных учащимися. Критериями отбора задач к уроку служили оригинальность формулировки и формы представления результата, уровень сложности, количество взаимосвязанных элементов, отражение этих связей в формуле или описании.

Следует отметить, что если с самого начала творить пытаются все ребята, но успех сопутствует где-то четверти учащихся класса, то в дальнейшем это число возрастает почти вдвое, причём активное участие в такой творческой работе начинают принимать и слабоуспевающие ученики.

Еще одно важное условие успешного проведения творческих уроков — ознакомление учащиеся с предстоящей тематикой урока. Например, можно объявить, что урок будет посвящен решению и составлению задач на дроби про космос (предполагая при этом повторение на уроке всех правил сложения и вычитания обычных и десятичных дробей). Знание темы урока подтолкнет ребят дома посмотреть кое-какие факты, фотографии космических кораблей, узнать новую информацию о космосе, об освоении космоса. Тогда при составлении задач они будут чувствовать себя знатоками космоса.

Ниже приведены *некоторые* задачи из творческих уроков в 5–7 классах.

**Примеры задач, составленных учащимися 5 класса**:

**1. Урок отработки сложения и вычитания обычных и десятичных дробей (**урок, посвященный Рекордам Космоса)

А) Самый продолжительный полет в космос совершил Валерий Поляков в 1994–1995 гг. В то время как длительность полета Ю. Гагарина составляла $\frac{3}{40}$ суток, В. Поляков пробыл в космосе на $437\frac{27}{40}$ суток дольше. Определить длительность полета В. Полякова. (Ответ: $437\frac{3}{4}$ суток *или* 437 суток 18 часов)

Б) «Рабочие» сутки космонавтов примерно выглядят так: $\frac{3}{8}$ суток требуется на сон; $\frac{1}{12}$ суток — на завтрак, обед и ужин; $\frac{5}{48}$ суток — занятия физкультурой. Хозяйственные дела, в том числе и уборка помещений, занимают около $\frac{1}{24}$ суток. $\frac{1}{16}$ суток уходит на разговоры с Землёй. Остальное время идёт на проведение экспериментов и наблюдений, ремонтно-профилактические работы, операции по стыковке и расстыковке транспортных кораблей. Какую часть суток занимают эксперименты, ремонтно-профилактические и другие работы? (Ответ: $\frac{1}{3}$ суток или $8$ часов)

В) Общая длина космических кораблей «Восток», «Союз» и «Прогресс» составляет $22{,}25$ м. Длина кораблей. «Союз» и «Прогресс» составляет $14{,}9$ м, а длина кораблей «Восток» и «Союз» — $14{,}33$ м. Определить длину каждого из кораблей и станции (Ответ: Длина корабля «Восток» $7{,}35$ м; длина корабля «Союз» $6{,}98$ м; длина корабля «Прогресс» $7{,}92$ м)

**2. Повторение умножения и деления десятичных дробей на натуральное число** (задачи составлены по мотивам поездки в Устюг)

А) Автомобильный маршрут: Москва – Устюг имеет протяженность $0{,}917$ тыс. км. Дорога очень опасная, местами ледяная; темнеет уже в $16:00$. Определить, с какой скоростью следует перемещаться, чтобы все-таки попасть в Устюг через $14$ часов.

Б) Решите задачу, составив уравнения: Одна мастерица сшила $4$ шапки Деда Мороза и у нее осталось $3{,}94$ м ткани, вторая мастерица успела сшить только $2$ шапки и у нее осталось $7{,}26$ м ткани. Сколько метров идет на одну шапку, если всего мастерицам было выдано $22$ м ткани.

В) Найдите скорость зайца на соревнованиях на Тропе Сказок, если известно, что ее величина в $8$ раз меньше суммы произведения чисел $21{,}4$ и $12$ и числа $84{,}2$.

Г) В санатории «Бобровниково» хозяйка пригласила отведать угощение в Русской избе — пшенную кашу и пирожки с клюквенным вареньем. Для того, чтобы сварить варение, она собрала клюкву в две корзины — всего $23{,}36$ кг ягод. В одной корзине ягод на $0{,}4$ кг меньше, чем в другой. Сколько килограммов ягод в каждой корзине?

Д) На Вотчине Деда Мороза было холодно и все решили отведать медовуху. В одном бочонке было в $5$ раз больше медовухи, чем в другом. Сколько литров медовухи в каждом бочонке, если во втором на $28{,}6$ л меньше, чем в первом?

**3. Умножение обыкновенных дробей** (урок, посвященный творчеству Леонардо да Винчи)

А) Сократите дроби. Расшифруйте имя живописца, скульптора, архитектора, инженера, ученого, математика, ботаника

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{9}{15}$ | $\frac{12}{18}$ | $\frac{28}{35}$ | $\frac{24}{42}$ | $\frac{3\cdot 38}{19\cdot 27}$ | $\frac{4\cdot 5}{25\cdot 6}$ | $\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$ | $\frac{8\cdot 13}{39\cdot 2}$ | $\frac{15}{35}$ | $\frac{6}{21}$ |
| д | н | л | о | и | а | е | ч | в | р |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{7}$ |
| | | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{2}{9}$ |
| | | | | | | |

(Ответ: Леонардо да Винчи)

Б) Сколько картин создал Леонарда да Винчи? Решите примеры, и вы узнаете, что известно $39\cdot\frac{2}{3}=$ ____ картин, созданных художником, из них $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{10}=$ ____ считаются сохранившимися, $\frac{9}{26}\cdot\frac{5}{9}=$ ____ картин утеряно и $\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{11}{26}=$ ____ приписываются кисти автора (Ответ: Известно $26$ картин, созданных Леонардо да Винчи, из них $\frac{1}{2}$ (половина, т. е. $13$, считаются сохранившимися), $5$ картин утеряно и $8$ приписываются кисти Леонардо да Винчи).

В) Где находятся картины? $6\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \_\_\_\_$ сохранившихся картин находятся в Лувре, $\frac{9}{17} \cdot 5\frac{2}{3} = \_\_\_\_$ — во Флоренция и $3\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{15} = \_\_\_\_$ в Эрмитаже. (Ответ: Из всей коллекции картин Леонардо да Винчи $5$ находятся в Лувре, $3$ — в галерее Уффици (Флоренция) и $2$ в Эрмитаже)

Г) Изобретение парашюта: а) Вычисли значение выражения и определи, какую часть метра составляет длина локтя: $3\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{20} + \frac{9}{20} \cdot 5\frac{1}{2} - 7\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{20}$; б) Определи сколько м$^2$ составляет площадь квадратного парашюта, сторона которого равна $12$ локтей. (Ответ: $1\,локоть = 0{,}45\,м = \frac{9}{20}\,м$; $12\,локоть = \frac{27}{5}\,м = 5\frac{2}{5}\,м$; $S_{парашюта} = 29{,}16\,м^2 = 29\frac{4}{25}\,м^2$.)

Д) Самоходная повозка размером $1\times1\times1$ м была придумана Леонардо да Винчи с целью перемещения театральных декораций во время королевских праздников. Реши задачу и узнай какую скорость могла развить модель предка автомобиля:

Из пункта А в пункт В выехали одновременно повозка с лошадью и созданный энтузиастами по рисункам Леонардо да Винчи деревянный автомобиль. Повозка ехала со скоростью $12\frac{1}{6}$ км/ч и достигла пункта В за $3$ часа Автомобилю оставалось проехать еще $21\frac{1}{2}$ км. Найти скорость автомобиля. (Ответ: Скорость автомобиля составляла $5$ км/ч).

Е) Определи длину моста, построенного по проекту Леонардо да Винчи, если путнику, идущему со скоростью $4\frac{4}{5}$ км/ч потребуется $3$ мин, чтобы его перейти. (Ответ: длина моста $240$ м).

**4. Действия с дробями** (урок, посвященный кубку мира по биатлону)

А) Автомобилист, едущий с постоянной скоростью, поднимается по серпантину на высоту $500$ м за $1$ час. Определить высоту города Поклюка, в котором проходит $3$ этап, если автомобилисту необходимо еще $1{,}6$ часа, чтобы до него подняться. (Ответ: $1300$ м).

Б) На холме, недалеко от места, где расположена биатлонная трасса г. Оберхоф, находится телевизионная башня для трансляции соревнований. Абсолютная высота холма $720$ м, а башни — $150$ м. Известно, что если забраться на башню на $\frac{2}{3}$ ее высоты, то окажешься ровно на уровне биатлонного стрельбища. На какой высоте расположен стадион? (Ответ: $820$ м).

В) Городок Антерсельва, в котором проходит очередной этап кубка мира по биатлону, делится на три деревушки-района. Она из деревушек находится на высоте $1200$ м, что составляет $\frac{6}{7}$ от высоты, на которой расположен известный стадион Зюдтироль-Арена, предназначенный для проведения соревнований по биатлону. Найти абсолютную высоту стадиона. (Ответ: $1400$ м).

Г) Символом города Хольменколлен является $115$ -метровый трамплин, на вершине которого находится смотровая площадка. Высота трамплина составляет $23\%$ высоты холма, на котором проложена биатлонная трасса. Найти абсолютную высоту места проведения данного этапа. (Ответ: $500$ м).

**5. Повторение материала 5-го класса «Вся правда о каникулах»** (задачи учеников 6-го класса)

**А)** Черноголо́вка — город в России — наукоград, крупнейший населённый пункт муниципального образования Московской области, где начинают свой летний отдых половина ребят 5–7 классов нашей школы.

Вычисли, применяя правила:

1) $42{,}34+21{,}072$ и округли до единиц — это расстояние (в километрах) от Москвы до Черноголовки.

2) $2{,}123-0{,}89$ и округли до сотых — это время (в часах), которое потребуется, чтобы доехать от Москвы до Черноголовки.

3) $5{,}7\cdot 47{,}3$ и округли до десятков — это расстояние (в метрах) от гостиницы, где жили, до школы, в которой проходили занятия и соревнования

4) $41{,}6:0{,}052$ — это длина тропинки (в метрах) вокруг озера, где проходил утренний марафон.

(Ответ: От Москвы до Черноголовки $63$ км; времени требуется $1{,}23$ часа; $270$ м — от гостиницы до школы; $800$м — длина тропинки вокруг озера)

**Б)** В Британии насчитывается более трех тысяч учебных заведений, принимающих иностранных студентов. Вычислите значения выражений и найдите, сколько высших учебных заведений находится в Англии, в Шотландии, в Уэльсе и в Северной Ирландии:

В Англии: $147{,}05-18{,}91:(2{,}48+3{,}72)$

В Шотландии: $53{,}008-75{,}48:(40-21{,}5)\cdot 7{,}6$

В Уэльсе: $13{,}345+0{,}16\cdot 4{,}5-0{,}026:0{,}4$

В Северной Ирландии: $8{,}12\cdot 0{,}25-0{,}12\cdot 0{,}25$

(Ответ: $144$ университета в Англии, $22$ в Шотландии, $14$ в Уэльсе и $2$ в Северной Ирландии.)

**В)** Перечислять достопримечательности страны можно бесконечно, эта богатая южная страна славится не только своим архитектурным и природным разнообразием, но и неповторимой культурой. Сюда приезжают не только загорать и купаться в море, но и кататься на горных лыжах. Найди правильно вычисленные примеры, расположи их в порядке убывания и расшифруй название страны:

| | | |
|---|---|---|
| А $5{,}5-8:5=3{,}9$ | Н $7-4\cdot 1{,}3=1{,}8$ | Т $0{,}9:0{,}3+5=5{,}3$ |
| С $2{,}5:0{,}5+2{,}1=7{,}1$ | О $0{,}24:(0{,}5+0{,}3)=3$ | Я $0{,}25\cdot 0{,}34\cdot 4=0{,}34$ |
| И $8{,}4:12\cdot 15=10{,}5$ | Р $0{,}27:0{,}9:0{,}1=0{,}3$ | К $28:(0{,}4\cdot 0{,}7)=10$ |
| П $(8-3{,}2):0{,}8=6$ | Л $0{,}81:(2{,}7:30)=0{,}9$ | И $12\cdot 0{,}01:0{,}2=0{,}6$ |

(Ответ: Испания)

**6. Новый год шагает по планете. По странам и континентам** (Предложенные задачи использовались для проведения урока занимательной математики в 5-ых классах).

**1.** Выбери правильный ответ из предложенных и составь название страны, о которой пойдет речь. Как только церковные колокола пробьют полночь, жители этой страны принимаются по традиции громко поздравлять друг друга. Они бьют в барабаны, трубят в дудки, свистки и шумелки, а те которым подручных средств мало просто кричат, что есть мочи, разные поздравления.

| | Пример | Варианты ответов | | Страна |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1{,}05+7{,}5$ | 8,10 а | 8,55 и | |
| 2 | $15-11{,}02$ | 4,02 с | 3,98 в | |
| 3 | $0{,}15-\dfrac{3}{20}$ | 0,3 л | 0 с | |
| 4 | $6{,}42+0{,}358$ | 6,778 т | 10 а | |
| 5 | $-1\dfrac{3}{4}+2{,}71$ | 0,96 р | 4,05 т | |
| 6 | $6{,}36-(-0{,}64)$ | 5,72 р | 7 а | |
| 7 | $-1{,}8+1\dfrac{4}{5}$ | 0 л | 2,16 м | |
| 8 | $-2{,}49+3{,}5$ | 5,99 т | 1,01 и | |
| 9 | $2{,}69-(7-5{,}5)$ | 1,19 я | 0,19 а | |

По причине отсутствия снега, елок, оленей и прочих привычных атрибутов праздника Дед Мороз появляется в плавательном костюме, на специальном ярко украшенном серфе на пляжах столицы. В полночь в гавани вспыхивает один из самых грандиозных в мире фейерверков, полюбоваться которым каждый год собираются толпы туристов и жителей этой страны. Многие предпочитают взглянуть на знаменитый фейерверк со смотровой площадки самой высокой городской башни. Решив задачу, ты определишь высоту данной площадки. (Ответ: Австралия)

**Задача**: Наименьшую высоту над уровнем моря в этой стране имеет озеро Эйр — $16{,}02$ м, а высота смотровой площадки превышает данную еще на $233{,}98$ м. Найти высоту площадки. (Ответ: $250$ м).

2. Название следующей страны, в которой в канун Нового Года происходят казусы, вы узнаете, выбрав правильный ответ в следующей таблице. Жители этой страны щеголяют в набедренных повязках, а каменные монеты все еще имеют хождение как платежное средство:

| | Пример | Варианты ответов | | Страна |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $17{,}035-15{,}35$ | $0{,}964$ к | $1{,}685$ м | |
| 2 | $13:10$ | $1{,}3$ и | $13$ а | |
| 3 | $6\frac{2}{5}-2{,}5$ | $3{,}9$ к | $4$ р | |
| 4 | $1{,}28+0{,}372$ | $1{,}625$ р | $5$ в | |
| 5 | $4\frac{1}{4}-1\frac{3}{16}$ | $3\frac{3}{16}$ и | $3\frac{1}{16}$ о | |
| 6 | $6{,}25-0{,}42$ | $6{,}67$ в | $5{,}83$ н | |
| 7 | $1{,}4-1\frac{2}{5}$ | $0$ е | $2{,}8$ р | |
| 8 | $2{,}25+1{,}5$ | $2{,}45$ д | $3{,}75$ з | |
| 9 | $5{,}4:25$ | $0{,}216$ и | $1{,}86$ о | |
| 10 | $5{,}32-(-2{,}17)$ | $3{,}15$ к | $7{,}49$ я | |

Священный ритуал Новогоднего праздника — это смена имени. Каждый житель считает, что назвать себя 1 января новым именем — означает обмануть злых духов, которые неустанно следят за каждым человеком и подстерегают, когда же тот совершит ошибку в течение года. С такими мыслями в первый день Нового года в каждой семье люди, прикрывая рот ладонями, шепчут друг другу на ухо новое имя. В этот момент необходимо обязательно бить в бубен, чтобы нечистая сила не подслушала. Когда ритуал с именами окончен, тогда начинается художественное творчество. Еще до наступления праздника охотниками заготавливаются красные перья. В день Нового года перья склеивают в круги, которые в диаметре составляют 1 м. С такой ношей ходят по магазинам, чтобы купить продукты для праздника, а круги из перьев служат средством уплаты за товар, другими словами — деньгами. Вес этих кругов узнаешь, выполнив действия:

$$10 \cdot ((46{,}83 + 15{,}77) - (6{,}83 - 5{,}77) + 0{,}06) : 88$$

(Ответ: Микронезия, 7 кг).

**3**. В этой стране новогодние праздники достаточно сильно отличаются от тех, к которым все мы привыкли. Знакомого нам Деда Мороза здесь именуют как Синтеркласс. В отличие от других Дедов Морозов, которые прибывают на праздник с севера, Синтерклас приезжает в в эту страну из Испании на своем личном корабле вместе со своей свитой. Каждую ночь Дед Мороз совершает поездки на своем коне и одаривает сладкими подарками всех маленьких детей. Есть среди свиты Синтеркласса и те, кто занимается непослушными детьми — это Черные Питеры. Их лица вымазаны сажей, они обязательно увешаны кнутами и цепями. Со всеми, кто не слушается, Черные Питеры ведут себя бесцеремонно. Они могут наказать их розгами или же вовсе забрать детей вместе с собой в Испанию.

| | Пример | Варианты ответов | | Страна |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $6{,}52 \cdot 10$ | 65,2 г | 0,652 л | |
| 2 | $14{,}706 : 1000$ | 1470,6 а | 0,014706 о | |
| 3 | $0{,}17 \cdot 100$ | 17 л | 0,170 п | |
| 4 | $0{,}0142 : 10$ | 0,00142 л | 1,42 н | |
| 5 | $2{,}357 \cdot 100$ | 23,57 о | 235,7 а | |
| 6 | $46{,}8 : 10$ | 4,68 н | 0,468 р | |
| 7 | $0{,}8 \cdot 1000$ | 8000 е | 800 д | |
| 8 | $9{,}607 : 10$ | 96,06 л | 0,9607 и | |
| 9 | $0{,}006 \cdot 10000$ | 60 я | 6 л | |

На новогодний стол принято готовить пончики с изюмом. Для приготовления 20 пончиков взяли 50 частей муки, 40 частей изюма, 2 части дрожжей, 35 частей молока, 8 частей масла и 5 частей сахара. Оказалось, что всего вместе взяли 1,4 кг продуктов. Сколько взяли изюма? (Ответ: Голландия, 400 г — изюма).

**4.** В этой стране Новый год особенно ждут и почитают. Главный атрибут Нового года — это кадомацо — «сосна у входа». Таким образом жители приветствуют божество Нового года Тосигами. Также обязательно натягивается веревка перед входом в дом. Считается, что злой дух не сможет проникнуть в жилище через веревку и навредить хозяевам. Дом украшается на Новый год бамбуковыми или ивовыми букетами, на которых подвешивают маленькие хлебцы моти в виде цветов, фруктов, рыб. Все это раскрашивается в желтый, розовый и зеленый цвета и вешается у входа в дом или ставится на самом видном месте.

| | Пример | Варианты ответов | | Страна |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $0{,}3^2+0{,}4^2$ | 0,49 л | 0,25 я | |
| 2 | $2{,}3-(1{,}9-1{,}6)$ | 2,6 и | 2 п | |
| 3 | $3{,}28\cdot 100$ | 328 о | 32,8 т | |
| 4 | $0{,}64\cdot 5$ | 3,2 н | 0,32 в | |
| 5 | $46{,}2:10$ | 0,462 а | 4,62 и | |
| 6 | $1{,}31313:13$ | 0,10101 я | 1,111 н | |

В 12 часов ночи начинают звонить колокола храмов. В этой стране считается, что человек обладает 6 пороками — нерешительностью, глупостью, алчностью, злостью, жадностью и легкомысленностью. Каждый порок имеет несколько оттенков. С каждым ударом, как считают японцы, уходит все плохое, что не должно повториться в Новом Году. Количество ударов — символической число. Ты узнаешь это число, произведя вычисления:

$$100\cdot(824{,}8:8+174\cdot 0{,}1)\cdot 0{,}01$$

(Ответ: Япония, 108 ударов).

**7. Олимпиада в Сочи** (задачи, составленные учащимися 7 класса)

1. Реши ребус: $СНЕГ + КРУГ = СПОРТ$

(Ответ: $1792 + 8562 = 10354$).

2. Ледовая арена

Размеры и форма ледовой арены могут быть какими угодно. Если речь идёт о катке для развлечений и любительского фигурного катания, это может быть круглый каток или прямоугольный — например, $12 \times 24$ м. Если ширину этого катка увеличить на $a$ метров, а длину катка на $2a$ метров, то получим стандартный олимпийский каток площадью 1800 кв. метров. Определите стандартные олимпийские размеры катка. (Ответ: $30 \times 60$ м$^2$)

3. Вероятность забросить шайбу

В команде по хоккею 6 игроков. Известно, что вероятность того, что первый игрок забьет шайбу $30\%$; вероятность, что второй игрок забьет шайбу $25\%$; третий забьет шайбу — $40\%$; четвертый — $35\%$, пятый — $20\%$ и шестой — $5\%$. С какой вероятностью команда забьет шайбу в игре?

4. Расшифруй имя

Расшифруй имя советского шорт-трекиста, если полученный результат каждого вычисления соответствует букве русского алфавита:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

1) $\dfrac{3^{81} \cdot 7^{42} \cdot 81^{21}}{9^{40} \cdot 63^{42}}$

2) $\begin{cases} 6x - 10y = 300 \\ x - 20y = -60 \end{cases}$ ; $\quad x : y = ?$

3) $(x-12)^2 = (x+4)^2 - 256$ ;

4) Найти значение выражения:

$2xy - x^2 - y^2 + x^2 - 2x(y-2) + (y-2)^2$ при $x - y = 4$

5) $\dfrac{4^{11} + 2^{22} + 2^{23} + 256^3}{8^7}$ ;

6) $\dfrac{180 \cdot 7{,}654 - 180 \cdot 7{,}554}{64^{64} : 2^{384}}$;

7) $(y+1)^2 = y(y+1) + 2$;

8) $\dfrac{y+15}{4} - \dfrac{3y+4{,}5}{9} = 2$

(Ответ: Виктор Ан)

5. Скорость на дистанции

На Олимпийской лыжной дистанции 30 км победила спортсменка из России. Она прошла дистанцию на 20 минут быстрее спортсменки из Японии. Скорость россиянки была на 3 км/час больше скорости соперницы. Какова скорость каждой лыжницы?

6. Фигурное катание

На чемпионате мира по фигурному катанию в 2013 году, который проходил в канадском Лондоне первые места распределились следующим образом:

| № | Имя | Страна | Баллы | Короткая программа | | Произвольная программа | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Татьяна Волосожар / Максим Траньков | Россия | 225,71 | 1 | 75,84 | 1 | 149,87 |
| 2 | Алёна Савченко / Робин Шолковы | Германия | 205,56 | 3 | 73,47 | 2 | 132,09 |
| 3 | Мэган Дюамель / Эрик Рэдфорд | Канада | 204,56 | 2 | 73,61 | 3 | 130,95 |
| 4 | Кирстен Мур-Тауэрс / Дилан Москович | Канада | 199,50 | 5 | 69,25 | 5 | 130,25 |
| 5 | Пан Цин / Тун Цзянь | КНР | 194,64 | 6 | 63,95 | 4 | 130,69 |

На олимпиаде в Сочи первое и второе места заняли пары Татьяна Волосожар / Максим Траньков (236,86 баллов) и Ксения Столбова / Федор Климов (218,68 баллов). Определить набранные баллы и расположение остальных пар, если Алёна Савченко / Робин Шолковы улучшили свой результат на 6,4%; Мэган Дюамель / Эрик Рэдфорд ухудшили свой результат на 5,03 балла;

Кирстен Мур-Тауэрс / Дилан Москович в короткой и произвольной программах получили, соответственно, на 1,67 и 0,93 баллов больше, а Пан Цин / Тун Цзянь повысили результат на 7,8%.

7. Биатлон. Спринт

Биатлон. Спринт, женщины. Дистанция 7,5 км. Без промахов спортсменка пробежала бы за 22 минуты. Но допустила три промаха и бежала три штрафных круга по 150 м. На сколько процентов увеличилось время преодоления дистанции?

Проведение творческих уроков помогает эффективно решать определенные образовательные, воспитательные, развивающие задачи и достичь более высоких результатов. При этом:

1. Ребята *учатся самостоятельно* составлять задачи оригинального содержания (аналогичные ранее решенным).

2. Учащиеся создают задачи, которые информативно являются новыми для одноклассников.

3. Более слабые ученики имеют возможность проявить себя и показать свою некоторую компетентность.

4. Повышается мотивация к изучению не только математики.

5. Процесс создания творческих заданий подразумевают организацию практической познавательной деятельности: составить, зашифровать, начертить, заполнить таблицу и др.

6. Создаются творческие задания занимательного характера на смекалку.

7. Придумываются творческие задания, содержащие игровой момент.

8. Составляются занимательные уроки для проведения в младших классах.

# О критической деятельности школьника на уроках математики и «хороших» задачах

**К. М. Столбов,**
**Лицей ФТШ, г.Санкт-Петербург**
**stolbov2000@mail.ru**

Двумя основными целями математического образования в школе для автора является «научить школьников думать и рассуждать» и постараться привить ученикам хороший математический вкус («Однако <математическим> воспитанием называется именно привитие правильных вкусов». Ханс Фройденталь [1]) — в противовес обучению умению действовать по шаблонным алгоритмам, натаскиванию на решения тех или иных типов задач, в настоящее время на «механическую» подготовку к ЕГЭ.

В первой части данной статьи, которая написана по мотивам выступления на Всероссийском семинаре учителей математики (Сочи, май 2016 г.), автор расскажет о том, как он старается достигнуть первой цели (точнее, об одном из направлений этой работы), а во второй приведет примеры задач, на которых, в частности, воспитывается (по мнению автора) хороший вкус.

Размышляя над целью «научить думать и рассуждать» я выделил для себя несколько направлений (с условными названиями «развитие логического мышления», «обучение поиску решения задачи», «критическая деятельность», «обучение различным методам доказательства»). В первой части я подробнее остановлюсь на одном из направлений — «критической деятельности».

Критическая деятельность школьника, понимаемая автором достаточно широко, чрезвычайно важна для того, чтобы научиться думать и рассуждать. На одном из семинаров учителей математики один известный учитель привел решение его ученицей кубического уравнения:

$$x^3 - 3x = 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = \pm\sqrt{3}\,.$$

Решение, конечно, неправильное, скорее всего случилось «затмение» при разложении на множители, но что возмутило учителя больше всего в этом решении? То, что не было проверено простой подстановкой, что 1 корнем не является. Автор разделяет эту точку зрения в отношении важности критической деятельности ученика — учащийся должен уметь проверять себя и критически относиться к решениям — своим, одноклассников, учителя, написанным в учебнике.

В данной статье я расскажу про некоторые (далеко не все) методы, приемы, приведу примеры задач, развивающие и «стимулирующие» эту деятельность, в частности:

- развитие умения искать ошибки в неправильных решениях;
- развитие критического настроя к решениям, предлагаемым одноклассниками, учителем, написанным в учебнике или решебнике;
- работу с определением;
- решение задач на нахождение контрпримеров и примеров.

## Поиск ошибок в неправильных решениях

Начну с «классических» примеров неправильных решений. Подобные задачи с неправильным «решением», я часто предлагаю своим ученикам — как в виде рассказа в классе у доски, так и (чаще) в виде распечатанных листков, раздающихся ученикам.

**Задача 1.** Какое наименьшее значение принимает функция

$$f(x) = (5 - 2x + x^2)^2 - 4\cdot(5 - 2x + x^2)\ ?$$

**«Решение».** Сделаем замену переменной $t = 5 - 2x + x^2$, получим функцию $g(x) = t^2 - 4t$, наименьшее значение которой равно $-4$.

**«Ответ»:** наименьшее значение функции $f$ равно $-4$.

Ясно, что ответ неправильный из-за того, что $t = 5 - 2x + x^2 \geq 4$ и нужно искать наименьшее значение функции $g$ на промежутке $[4;+\infty)$, а не на множестве всех вещественных чисел. Это значение достигается при $t = 4$ и равно $0$. **Правильный ответ:** $0$.

Вот пример еще одного листка.

**Задача 2.** При каких значениях параметра $a$ область определения функции $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+a}+\sqrt{x+2}$ является точкой?

**«Решение».** Для того, чтобы $x$ входил в область определения должны быть неотрицательны оба выражения под корнями. Решением неравенства $x+2\geq 0$ является луч $\left[-2;+\infty\right)$, решением неравенства $-x^2-2x+a\geq 0$ является промежуток между корнями уравнения $-x^2-2x+a=0$. Их пересечение должно быть одной точкой, что происходит тогда и только тогда, когда больший корень уравнения $-x^2-2x+a=0$ равен $-2$. Подставим $-2$ в уравнение, получим $-(-2)^2-2(-2)+a=0$, откуда $a=0$.

**«Ответ»:** $a=0$.

**Комментарий:** во-первых, $a=0$ не годится (при $a=0$ число $-2$, конечно, является корнем уравнения $-x^2-2x+a=0$, но не бóльшим корнем — второй корень $x=2$); во-вторых, не рассмотрен случай, когда решением неравенства $-x^2-2x+a\geq 0$ является точка — именно он и дает единственный правильный ответ). **Правильный ответ:** $a=-1$.

Подобные листки можно предлагать в различных темах (лучше предложить по 1 такому листку в каждой четверти, чем 4 листка за одну неделю). Предыдущие два листка были про квадратный трехчлен. Вот пример из тригонометрии.

**Задача 3.** Решите уравнение $\sin x-\cos x-3\sin 2x+1=0$.

**«Решение».** Сделаем замену $t=\sin x-\cos x$. Так как $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$, то получаем уравнение:

$$t-3(1-t^2)+1=0 \text{ или } 3t^2+t-2=0.$$

Корнями этого уравнения являются $t_1=-1$ и $t_2=\frac{2}{3}$. Подставив найденные значения в формулу $\sin 2x=1-t^2$, получаем $\sin 2x=0$ или $\sin 2x=\frac{5}{9}$.

**«Ответ»:** $\frac{\pi k}{2}, \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{5}{9}+\frac{\pi k}{2};\ k\in \mathrm{Z}$.

**Комментарий.** Ошибка в этом решении заключается в том, что мы свели уравнение к совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=-1\\ \sin x-\cos x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$, решая которую, мы фактически возвели в квадрат каждое уравнение и, естественно, получили лишние корни. Правильно было «честно» решить уравнения из совокупности, например, воспользовавшись методом вспомогательного аргумента для преобразования левой части:

$$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

**Правильный ответ:**

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=2\pi k,\ x=\arcsin\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}+2\pi k$$

$$x=-\arcsin\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k\in \mathrm{Z}.$$

Много хороших примеров с неправильными «решениями» можно найти среди задач творческих конкурсов учителей математики разных лет, проводимых, например, МЦНМО в Москве (http://www.mccme.ru/oluch) или фондом Эйлера в Санкт-Петербурге (http://www.euler-foundation.org).

Часто подобные примеры появляются благодаря «удачным» ошибкам школьников в домашних или самостоятельных работах. Вот несколько таких случаев.

В задаче «найдите наименьшее значение выражения $x+\frac{1}{x}$ при $x>0$» часто всё решение школьников заключается в том, что $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ по неравенству Коши, а значит, наименьшее значение выражения равно 2 и донести мысль, что при таком рассуждении нужен еще пример числа $x$, при котором значение 2 достигается, бывает непросто.

Следующему «решению», которое хорошо показывает необходимость приводить пример такого числа, я обязан одному из своих учеников, который привел его в своей домашней работе, чем спровоцировал последующее обсуждение на уроке.

**Задача 4.** Найдите наименьшее значение выражение $\frac{(x+3)(x+12)}{x}$ при $x>0$.

**«Решение».** Воспользуемся дважды неравенством Коши $(a+b\geq 2\sqrt{ab})$ для чисел $x$ и 3 и чисел $x$ и 12. Получим $\frac{(x+3)(x+12)}{x}\geq \frac{2\sqrt{3x}\cdot 2\sqrt{12x}}{x}=24$, то есть наименьшее значение выражения равно 24. ■

Теперь это решение я часто рассказываю при разговоре о неравенстве Коши. А после это привожу другое рассуждение:

$$\frac{(x+3)(x+12)}{x}=\frac{x^2+15x+36}{x}=15+x+\frac{36}{x}\geq 15+2\sqrt{36}=27,$$

откуда следует, что 24 не может быть наименьшим значением.

Далее начинается обсуждение — где ошибка в первом рассуждении и можно ли утверждать, что 27 — правильный ответ (можно, если мы приведем пример, при котором значение 27 достигается, а оно достигается при $x=6$).

Еще один пример из решений домашних заданий учениками.

**Задача 5.** Докажите, что убывает следующая последовательность, заданная рекуррентно: $x_1=13$, $x_n=\sqrt{x_n+7}$.

**«Решение».** Последовательность убывает в том и только том случае, если для любого натурального $n$ выполняется неравенство $x_n>x_{n+1}$, то есть $x_n>\sqrt{x_n+7}$, что равносильно (учитывая то, что все члены последовательности положительны) неравенству $x_n>\frac{1+\sqrt{29}}{2}$. При этом $x_1=13>\frac{1+\sqrt{29}}{2}$, а значит, последовательность убывает. ■

Следует ли из этого «решения», что последовательность убывает? Что на самом деле доказано? Только то, что $x_2 < x_1$. А выполняется ли, например, неравенство $x_3 < x_2$ зависит от того, больше или меньше $x_2$ числа $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ (а нам это неизвестно).

Чтобы получить правильное решение можно (и нужно) дополнительно доказать, что если $x_n > \frac{1+\sqrt{29}}{2}$, то и $x_{n+1} > \frac{1+\sqrt{29}}{2}$. (Заметим, впрочем, что проще эту задачу решать по «другой» индукции, заметив, что если $x_n > x_{n+1}$, то

$$x_{n+1} = \sqrt{7+x_n} > \sqrt{7+x_{n+1}} = x_{n+2}).$$

А вот пример листка из темы «Интегралы».

**Задача 6.** Проверяя вчера вечером работы 11а класса, я обнаружил два разных вычисления одного интеграла с разными ответами:

Решение ученика 1:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4}dx = \int \frac{2xdx}{x^2+4} - 3\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx^2}{x^2+4} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(x/2\right)^2+1} =$$

$$= \int \frac{dy}{4+y} - \frac{3}{4}\cdot 2\int \frac{dt}{t^2+1} = \ln|y+4| - \frac{3}{2}arctg(t) + C =$$

$$= \ln(x^2+4) - \frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Решение ученика 2:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4}dx = 2\int \frac{4t-3}{4t^2+4}dt = \int \frac{2t}{t^2+1}dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \int \frac{dt^2}{t^2+1} - \frac{3}{2}arctg(t) = \ln\left(\frac{x^2}{4}+1\right) - \frac{3}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Кто из учеников ошибся в вычислениях?

Школьники с интересом проверяют оба решения, ошибки не находят, а при ближайшем рассмотрении оказывается, что ответы отличаются на константу ($\ln 4$) и оба решения (и ответа!) верны.

И еще один пример из домашней работы школьника.

**Задача 7.** Дифференцируема ли в 0 функция $\cos|x|$?

**«Решение».** По формуле производной композиции $(\cos|x|)' = -\sin x \cdot (|x|)'$, но у модуля нет производной в 0, значит и у функции $\cos|x|$ нет производной в 0.

Рассуждение неправильное хотя бы потому, что применять теорему о композиции в нуле как раз и нельзя, потому что у модуля нет производной в нуле. Что же касается функции $\cos|x|$, то она в некоторой окрестности нуля совпадает с $\cos x$, а значит, имеет производную в нуле, поэтому неправильный и ответ.

## Критический настрой

Критическая деятельность — деятельность, обращенная не только на решения, про которые заранее известно, что в них есть ошибка. Важно, чтобы на уроках математики проходило осмысление того, что происходит, а тогда необходимо критическое отношение к тому, что рассказывается — одноклассниками или учителем. То же самое касается чтения учебника. То, что в учебнике могут встретиться неправильные утверждения, часто кажется школьникам невозможным (видимо, настолько сильно доверие к печатному слову). В то время как неверные утверждения кочуют из книги в книгу или могут быть уникальны для данного учебника или задачника.

Например, хорошо известна формула $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, приведенная во многих учебниках, которая при ближайшем рассмотрении оказывается неверна. В самом деле, функция $g(x) = \begin{cases} \ln(-x)+1, x<0 \\ \ln(x)+2, x>0 \end{cases}$ является первообразной функции $y(x) = \frac{1}{x}$, но не представима в виде $\ln|x| + C$. Константы на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$ могут быть разными и правильный ответ:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x)+C_1, x<0 \\ \ln(x)+C_2, x>0 \end{cases}.$$

На уроке я иногда специально рассказываю «неправильные доказательства» (когда-то предупреждая школьников об этом, а когда-то нет), после чего начинается обсуждение.

Например, известное «доказательство» того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$, если $\lim\limits_{n\to\infty}=b$ (обычно служащее леммой к доказательству теоремы о пределе частного и не очень приятное, если доказывать «честно»):

Напишем равенство $1=b_n\cdot\frac{1}{b_n}$. Перейдем к пределу справа и слева. Получим $1=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\frac{1}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=b\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$, откуда следует требуемое утверждение.

В чем ошибка? Все дело в том, что, написав равенство $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\frac{1}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}$, мы воспользовались теоремой о пределе произведения, в которой требуется, чтобы пределы сомножителей (в частности, последовательности $\frac{1}{b_n}$, существовали, а это как раз то, что нам нужно было доказать).

Еще один вопрос здесь для обсуждения со школьниками — а что мы собственно доказали, приведя это рассуждение (если предел у последовательности $\frac{1}{b_n}$ существует, то он равен $\frac{1}{b}$).

После нескольких таких ситуаций школьники быстро начинают понимать, что рассказ учителя у доски (даже если он доказывает теорему или разбирает домашнее задание) — это не догма, у учителя могут встречаться ошибки и это дополнительно стимулирует их внимание к рассказу. Конечно, не надо такими доказательствами злоупотреблять, чтобы у школьника не оставалось «каши» в голове после большого количества таких рассказов.

**Работа с определением**

Еще одним поводом «стимулировать» критическую деятельность учащихся является работа с определением. Поясню это на примере определения касательной к графику функции.

Определение касательной обычно я даю в теме «Производная». В процессе обсуждения мы исходим из того, что интуитивное представление о касательной у школьников есть и вряд ли кто-нибудь будет сомневаться в том, что прямая $x=0$ не является касательной к графику функции $y=x^2$, а прямая $y=0$ является.

Начинается обсуждение с определения касательной к окружности как прямой, имеющей одну общую точку с окружностью (вспоминают ученики). Обсуждаем — можно ли также определить касательную к графику функции — как прямую, имеющую ровно одну общую точку с графиком? Нет — показывает приведенный выше пример — прямая $x=0$ и функция $y=x^2$.

Часто следующая гипотеза школьников такова — касательной называется прямая, проходящая через точку графика функции, такая, что график функции лежит по одну сторону от прямой. Опять неверно — рисуется пример какой-нибудь невыпуклой функции. После этого чаще всего находится несколько учеников, которые предлагают улучшение этого определения: график функции лежит по одну сторону от прямой «в некоторой окрестности» точки касания. Но и здесь есть контрпример: для графика функции $y=x^3$ в нуле прямая $y=0$ является касательной, но в любой окрестности нуля есть точки графика по обе стороны от касательной.

Так потихоньку мы приходим (иногда с помощью наводящих вопросов и соображений) к определению касательной как «предельного положения секущих», а потом обсуждаем почему эту формулировку нельзя взять за определение (нет формального определения что такое «предельное положение секущих») и на основе представления о касательной как о предельном положении секущих даем определение касательной (как прямой, проходящей через точку графика и имеющей угловой коэффициент, равный производной).

Работа с определениями может включать в себя обсуждение вопросов существования и единственности.

Мы определили арифметический квадратный корень из числа как такое неотрицательное число, квадрат которого равен данному числу. Все ли хорошо?

Конечно, нет, — а кто сказал, что корень существует? (то, что нужно задуматься о существовании определяемого объекта вначале совсем не очевидно для школьников). Хорошо, я нарисовал график функции $y = x^2$ и по нему показал, как по числу $a$ на оси $y$ найти число $\sqrt{a}$ на оси $x$. Это доказательство?

Мне представляется важным, чтобы в работе с определениями вопросы существования и единственности стали естественными для учеников (конечно, они «нужны» не для всех определений).

Отдельный важный вопрос — вопрос о корректности определения, который обычно встречается в нескольких местах курсов алгебры и геометрии.

Самое известное, пожалуй, — определение угла между прямыми в пространстве. Пусть даны две прямые $a$ и $b$. Возьмем любую точку $O$ и проведем через нее прямые $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$. Углом между прямыми $a$ и $b$ будем называть угол между пересекающимися прямыми $a_1$ и $b_1$.

Все ли хорошо в этом определении? Нет. Определение зависит от выбора точки $O$. Если мы взяли бы другую точку $O_1$ и провели другие соответственно параллельные прямые, будет ли угол тем же? Это требует доказательства.

Подобных определений (когда нужно доказывать корректность определения) в курсе школьной математики не так много — определение степени с рациональным показателем, определение синуса угла, определение радиана, но каждый раз это становится предметом подробного обсуждения на уроке.

### Поиск примеров и контрпримеров

Важным элементом «критической деятельности» является решение задач на построение примеров и контрпримеров. («Использование контрпримеров в обучении/изучении может углубить понимание предмета, способствовать развитию математического мышления, усилить развитие таких сторон критического мышления как способность к анализу, обоснованию, проверке» С. Климчук [3]).

Следующие две задачи взяты из книги [2].

**Задача 8. а)** Докажите, что если $a > b > 0$, то $2a^2 + 51a > 2b^2 + 51b$; б) Выясните, верно ли, что для любых чисел $a$ и $b$ из того, что $a > b$ следует, то $2a^2 + 51a > 2b^2 + 51b$?

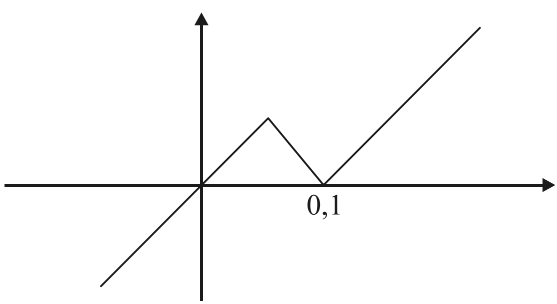
**Решение.** а) Да, это следует из свойств неравенств; б) Нет, можно взять $a = -200$, $b = -201$. В пункте б) имеет смысл обсудить, а как можно придумать этот контрпример, основываясь на свойствах квадратичной функции.

**Задача 9.** Известно, что значения функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в точках 1, 2 и 3 являются целыми числами. Верно ли, что тогда коэффициенты $a$, $b$ и с обязаны быть целыми числами?

**Решение.** Нет. Не обязательно. Например, функция $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ принимает целые значения в точках 1, 2 и 3.

**Задача 10.** Верно ли, что если для любого вещественного числа $x$ выполняется неравенство $f(x+1) > f(x)$, то $f$ — возрастающая на $R$ функция?

**Решение.** Нет, эскиз графика функции $f$, которая не является возрастающей, но для которой выполняется данное условие, приведен на рисунке.




Замечу, что важно частью работы с контрпримерами, которая не обсуждается в этой статье, является обсуждение того, как можно было догадаться до этого примера.

А вот две задачи, в которых интуиция часто обманывает школьников и непонятно, что делать — доказывать утверждение или искать контрпример.

**Задача 11.** Верно ли, что а) Наименьший радиус среди всех окружностей, содержащих данный треугольник, будет у описанной окружности?

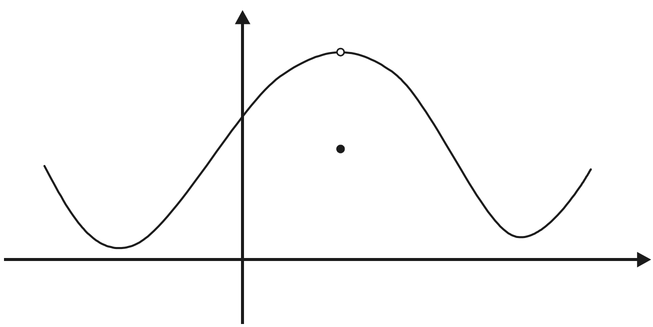
б) Если сечение прямого кругового конуса — треугольник, то наибольшая площадь такого сечения будет у осевого сечения?

**Решение:** а) нет (для тупоугольного треугольника это не так); б) нет (опять-таки это неверно, если осевым сечением будет тупоугольный треугольник, наибольшее сечение будет достигаться у прямоугольного треугольника, что сразу же следует из формулы $S = 0{,}5ab\sin\varphi$).

Вот еще две задачи из замечательной книги [3]. В этой книге можно найти много интересных несложных задач на построение контрпримеров к утверждениям из области математического анализа.

**Задача 12.** Верно ли, что между любыми точками двух локальных минимумов находится точка локального максимума?

**Решение.** Нет, график функции, для которой это не выполняется, изображен на рисунке.



**Задача 13.** Верно ли, что если функция не является монотонной на промежутке $(0;+\infty)$, то и ее квадрат тоже не является монотонным?

**Решение.** Нет. Рассмотрим функцию

$f(x)=\begin{cases} x, \text{ если } x - \text{рациональное число} \\ -x, \text{ если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$. Эта функция не является монотонной на данном промежутке, но ее квадрат: $f^2(x)=x^2$ является.

## Некоторые избранные задачи

И в заключение приведу несколько «красивых» (по мнению автора) задач, некоторые из которых были упомянуты в докладе, а также их решения.

**Задача 14.** На книжной полке стоят два тома Пушкина: первый и второй. Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а обложка — каждая — 2 мм. Червь прогрыз (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Какова длина его пути?

Это любимая задача академика В.И. Арнольда. Он считал, что она «совершенно недоступна академикам, но некоторые дошкольники легко справляются с ней». Лучше к ней рисовать картинку, чтобы было понятно, что первый том стоит левее второго.

**Решение.** Большинство дают ответ 4 см и 4 мм, однако если понять, где находятся первая страница первого тома и последняя второго (можно даже провести физический эксперимент), то станет понятно, что червь прогрыз только две обложки и правильный ответ 4 мм.

**Задача 15.** Докажите, что произведение $k$ последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

Казалось бы, это задача из теории чисел и школьники нередко предлагают решение: поскольку среди $k$ последовательных натуральных чисел есть число, делящееся на $k$, число, делящееся на $k-1$ и т. д., то и их произведение делится на произведение чисел от $k$ до 1. Однако мы знаем, что если число делится на $a$ и делится на $b$, то оно не обязательно делится на $ab$ (например, 36 делится на 4 и 6, но не делится на 24).

Короткое красивое решение приходит из другой области математики — комбинаторики.

**Решение.** В самом деле, рассмотрим число способов выбрать $k$ предметов из $n+k$. Оно равно $C_{n+k}^{k}$. С одной стороны, это целое число, с другой стороны, $C_{n+k}^{k}=\dfrac{(n+k)(n+k-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{k!}$, то есть произведение любых $k$ подряд идущих чисел (от $n+1$ до $n+k$) делится на $k!$, что и требовалось доказать.

Вообще, в комбинаторике можно найти много задач с красивым и часто неожиданным решением. Вот еще один пример.

**Задача 16.** Сколько точек пересечения у диагоналей выпуклого $n$-угольника, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

**Решение.** Каждые четыре вершины $n$-угольника однозначно определяют одну точку пересечения диагоналей и наоборот каждой точке пересечения диагоналей $n$-угольника соответствует ровно одна «четверка» вершин, поэтому точек пересечения у диагоналей столько же, сколько «четверок» вершин, а их $C_n^4$.

Следующую задачу я обычно предлагаю для устного решения (и это уже является подсказкой).

**Задача 17.** Упростить выражение

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}.$$

**Решение:** Можно, конечно, раскрыть скобки, но уж очень не хочется… Вместо этого рассмотрим данное выражение как многочлен от переменной $x$ и заметим, что в трех точках: $x=a$, $x=b$ и $x=c$ данный квадратный трехчлен принимает значение 1, но квадратный трехчлен не может принимать никакое значение 3 раза, значит это выражение константа и тождественно равно 1.

Если у ребят не получается придумать эту идею, возможная подсказка: чему равен этот многочлен в точке $x=a$ …

**Задача 18.** Пусть $a$, $b$ и $c$ — числа от 0 до 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ не превосходят $0{,}25$.

**Решение.** Рассмотрим произведение чисел $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$:

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $x(1-x) \leq 0{,}25$ при $0 \leq x \leq 1$. Отсюда сразу же следует утверждение задачи.

В заключение хочется отметить, что сформулировать что значит «научить думать и рассуждать», тем более выделить «алгоритмы-рецепты-примы» такого обучения непросто. Быть может еще сложнее говорить о том, как «прививать» хороший вкус (вне всяких сомнений многое здесь зависит от вкуса самого учителя). В рутине ежедневной работы с квадратными, логарифмическими уравнениями, неравенствами, решениями треугольников, подготовкой к контрольным и экзаменам часто забывается о «главных» целях, которые тем не менее очень хочется не упустить. В любом случае, ясно, что процесс этот непрерывный (вряд ли может быть темой отдельного урока или отдельной четверти «учимся думать» или «воспитываем хороший вкус») и желательно, чтобы он шел от первого урока до последнего.

## Литература

1. Х. Фройденталь. Математика как педагогическая задача. Москва. «Просвещение». 1982 г.
2. Иванов О. А., Иванова Т. Ю, Столбов К. М. Алгебра в 9 классе. Уроки обобщающего повторения. Санкт-Петербург. «СМИО Пресс». 2013 г.
3. О. А. Иванов, С. Климчук. Математический анализ для первокурсников. Москва. МЦНМО. 2013 г.

# Уроки Александрова

**В.А. Рыжик,**
**Лицей ФТШ, г.Санкт-Петербург**
**rvi@inbox.ru**

Александровские учебники геометрии живут больше 35 лет, созданы для всех классов как массовой, так и физико-математической школы — последние впервые в нашей школьной литературе. Имеют несколько модификаций и неоднократно переизданы. В дальнейшем тексте говорится про его Учебник вообще, без привязки его к какому-либо конкретному изданию для того или иного класса.

Александровские статьи о геометрии, её преподавании, о конкретных непростых её понятиях — золотой фонд методической литературы — необходимы учителю математики для понимания самого предмета. Они публиковались в журнале «Математика в школе», начиная с 1980 года. В дальнейшем тексте говорится про Статью вообще, не указывая конкретно ту или иную статью.

Вклад А.Д.Александрова в школьное математическое (и, прежде всего, геометрическое) образование уникален. Уникальность его уже в том, что он объясняет почему в Учебнике именно такое содержание, почему именно так оно выстроено, почему приняты именно такие определения и почему проведены именно такие доказательства. Дело ясное — прежде чем учитель возьмёт учебник в работу, он просто обязан понимать, каковы его особенности и почему они именно такие.

Курс элементарной геометрии был разработан А.Д. Александровым в 1979 — 1983 г.г. Этот курс, с одной стороны, сохранил евклидовский дух, а с другой — сделал его более современным. Стремясь к экономии времени ученика, А.Д. Александров освободил основную теоретическую линию курса от второстепенных понятий и теорем, он хотел сделать и сделал этот курс «короче, чем у Погорелова» (в его основной, общеобразовательной части).

Отмечу высокий литературный стиль, характерный для Александра Даниловича. В Учебнике выдержан серьезный разговор с учеником, но читается он легко.

**Урок 1. Тема урока Общий взгляд на геометрию и школьный курс геометрии**

Во введении Учебника про геометрию сказано так:

«Своеобразие геометрии, выделяющее ее среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из этих двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика — привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины — "лед и пламень не столь различны меж собой". Так геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так её и надо изучать: соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины — со строгими формулировками и доказательствами».

Реализуя эту общую установку, Александр Данилович формулирует принципы преподавания геометрии.

1. Геометрия в своей сущности есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга. Поэтому геометрия и должна быть преподана в соединении *наглядности и логики*, как живое пространственное воображение, пронизанное строгой логикой.

2. Поскольку одной из сторон геометрии является ее строгая логичность, а школьники VII–XI классов уже способны воспринять эту логичность, то курс геометрии должен быть изложен с достаточной строгостью, без логических разрывов в *основной линии курса.*

3. Так как второй основной стороной геометрии является её наглядность, то в преподавании геометрии *каждый элемент курса следует начинать с возможно более простого и наглядного, с того, что можно нарисовать на доске, показать на моделях, на реальных предметах, насколько это возможно.*

4. *Геометрия возникла из практики и применяется на практике. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать её с реальными вещами, с другими дисциплинами, с искусством, архитектурой и т.д.*

Таким образом, уже перечисленные принципы преподавания геометрии приводят к следующему выводу: *задача преподавания геометрии — развить у учащихся в трёх направлениях — пространственное воображение, практическое понимание и логическая культура мышления.* Следовательно, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но, вместе с тем, и противоположных элемента: *логику, наглядное представление, применение к реальности.*

5. Учебник, предназначенный для общеобразовательной средней школы, *в основной своей части не должен включать ничего лишнего, второстепенного, малозначительного, не имеющего теоретической или практической ценности*

6. Так как способности и наклонности учащихся весьма различны, то в таком учебнике должен содержаться дополнительный материал, предназначенный для учащихся, интересующихся математикой.

7. Геометрия должна быть изложена геометрически, она сама содержит в себе метод — прямой геометрический метод понимания, доказательства теорем и решения задач. Синтетический метод элементарной геометрии не должен быть подавлен в школьном преподавании ни координатным, ни векторным, ни каким-либо

другим методом. Прямой геометрический метод проще, важнее и естественнее для целей всеобщего среднего образования и соответствует самому существу геометрии. Он нужен любому человеку, имеющему дело с реальными объектами.

8. Курс школьной геометрии *должен быть причастен к современной науке, включать, по возможности элементы современной математики.* Кроме того, курс геометрии, как логическая система, где все доказано, важен для воспитания основ научного мировоззрения, которое требует доказательства, а не ссылок на авторитеты.

9. Но поскольку *абсолютной строгости вообще не существует, то должен быть выбран и принят некоторый уровень строгости*, и он должен быть выдержан во всём курсе. Курс не должен иметь логических разрывов, во всяком случае, в основных линиях. Иначе в нём будет потеряна система, смазана логика изложения, получится не целостная наука — геометрия, а ее фрагменты.

В соответствии с этими принципами сформированы три основные линии школьного курса геометрии.

*Первая из этих линий* — это *геометрия построений.* А.Д.Александров говорит: «Итак, самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы давать точно обоснованные правила для построения фигур с теми или иными заданными свойствами». Основной предмет школьного курса геометрии — важнейшие геометрические фигуры. Их надо построить, начиная с самых простых, а затем постепенно переходя к более сложным. Построить — значит доказать существование нужной нам фигуры, по возможности указав алгоритм поэтапного построения, основанный на аксиомах.

*Вторая линия* — это *геометрия вычислений*. После того, как необходимая фигура построена, можно её *измерить* и *вычислить* характеризующие её или связанные с ней величины — длины, углы, площадь, объём. *Геометрия вычислений* связывает курс геометрии с курсом алгебры: вывод формул и счёт по этим формулам — основная часть такой геометрии.

Ведущий аппарат в доказательствах — использование свойств и признаков изученных фигур, в первую очередь — треугольников.

*Третья линия* — это линия *понятий*, *идей и методов современной геометрии.* В Учебнике представлены современные трактовки традиционных понятий, современные методы: координатный, векторный и преобразований.

Учеников знакомят, например, с такими понятиями современной геометрии как: расстояние между произвольными фигурами, цилиндр и конус в общем случае (не только как тела вращения), внутренние и граничные точки фигур, опорная прямая и плоскость, выпуклая фигура, внутренняя геометрия поверхности… всего не упомянем. Движения и преобразования изучаются подробно.

Некоторым классическим теоремам даются современные обобщения и доказательства.

Здесь должно быть ясно, что часть содержания Учебника предназначена для любознательных, возможно, будущих математиков и даже геометров.

(Замечу, что по первому изданию Учебника стереометрии учился у автора статьи Гриша Перельман.)

Связь геометрической науки, школьного учебника геометрии и программы по геометрии требует дотошной расшифровки, о том говорит вся история образования.

Первичность программы вызывала сомнение у Александра Даниловича. Сочинять в чересчур жёстких условиях, задаваемых программой, вряд ли возьмётся кто-либо из авторов уровня Ж. Адамара (французского академика, автора классического сочинения по элементарной геометрии). Составители программ вряд ли находятся на таком же уровне понимания математики в целом и геометрии в частности, на котором находились А.Д. Александров, А.Н. Колмогоров, А.В. Погорелов, нашедшие время и возможности для написания школьных учебников.

По поводу программ как таковых А.Д. Александров сказал в Статье:

«Однако остаётся настоятельная необходимость их усовершенствования по крайней мере в двух направлениях. Во-первых, сделать программный материал более интересным и содержательным и исключить второстепенные формальные вопросы (вроде внутреннего строения рака, ряда химических реакций или искусственных уравнений в алгебре). Во-вторых, необходимо дифференцировать материал, разделив его на: 1) обязательный для всех минимум, доступный подавляющему большинству учащихся, но сохраняющий самые существенные элементы курса, и 2) дополняющий его материал, предназначенный более слабым только для ознакомления, а более сильным и интересующимся предметом учащимся — для овладения».

**Урок 2. Тема урока: Планиметрия**

Содержание Учебника соответствует провозглашённым принципам.

Это видно уже в аксиоматике планиметрии. Александр Данилович за основной объект курса выбирает *отрезок*, а за основное отношение — *равенство отрезков*.

В традиционном толковании прямой как исходного понятия «сидит» бесконечность, которую вряд ли кто может толком представить. А отрезок виден на практике на каждом шагу.

Равенство любых фигур (в том числе, и равенство углов) определятся через равенство отрезков, задающих фигуру. Такое толкование соответствует принятому в геометрии определению равенства произвольных фигур через равенство соответствующих отрезков.

Равенство треугольников А.Д.Александров определяет равенством их сторон: *треугольники называются равными, если их стороны соответственно равны.*

Тем самым исчезает признак равенства треугольников по трём сторонам вместе с его доказательством (оно, как указывал А.Н. Колмогоров, весьма долго в школьных учебниках было некорректным ).

Традиционную аксиому о единственности параллельной прямой Александр Данилович заменяет *аксиомой прямоугольника*:

*На любом отрезке как на основании можно построить прямоугольник любой данной высоты*.

Одним из аргументов в пользу такой замены является то обстоятельство, что мы, можно сказать, «окружены прямоугольниками» и сомнений в возможности построения прямоугольника с заданными измерениями у учеников не появится, в то время как аксиома о единственности параллельной прямой на практике не проверяема. Да и выводы важных результатов планиметрии с опорой на аксиому прямоугольника проще.

*Площадь прямоугольника равна произведению его сторон.* Эта формула в одном из вариантов Учебника доказывалась вот как. Из наглядных соображений ясно, что площадь прямоугольника пропорциональна его длине и высоте, а, следовательно, их произведению. Коэффициент пропорциональности равен 1, поскольку площадь квадрата со стороной 1 принимается за 1.

Особенно эффектно эта идея использована при выводе формулы объёма прямого цилиндра в 11 классе, причём тому приводится подробное доказательство.

Важнейшая теорема геометрии — теорема Пифагора доказывается через площадь, так сказать, в «индийском стиле», то есть с опорой на наглядность. Тем самым, она начинает работать в курсе раньше подобия.

Вот что сказал в Учебнике по этому поводу Александров «Теорема Пифагора замечательна ещё и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Например, свойства равнобедренного треугольника можно увидеть непосредственно на чертеже. Но сколько ни гляди на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что между его сторонами есть такое простое соотношение: $a^2+b^2=c^2$... В этом и состоит самый лучший математический стиль: посредством остроумного построения, приёма или соображения сделать неочевидное очевидным».

Предложенное А.Д.Александровым изучение тригонометрических функций (а также изучение подобия треугольников) свободно от трудностей, связанных с несоизмеримостью отрезков — эта трудность замечательно «спрятана» в формуле для площади прямоугольника. В одном из вариантов Учебника подобие треугольников рассматривается как частный случай подобных фигур в общем виде. А необходимые конкретные результаты — теоремы синусов или косинуса — получаются из тригонометрии.

Курс элементарной планиметрии, построенный А.Д. Александровым, включает элементы стереометрии, т.е. решает старую задачу *фузионизма*.

Наконец, полный курс оснований геометрии создан Александром Даниловичем в написанной научной монографии.

**Урок 3. Тема урока: Стереометрия**

Курс стереометрии Александр Данилович строит так, что плоскость в пространстве *определяется* как фигура, на которой выполняется планиметрия. Тем самым можно на плоскости использовать все результаты планиметрии. (Сама идея построения $n$–мерной геометрии, исходя из $n$–1-мерной, обоснована им в специальной научной статье.)

В Учебнике есть несколько непривычных для школы проблемных ситуаций и доказательств известных теорем. Приведу лишь три примера.

1) Речь идёт о построениях в пространстве, конкретно — о построении призмы в результате последовательного приложения по стороне равных прямоугольников. Вопрос, в частности, такой: откуда изначально известно, что сомкнутся первый и последний прямоугольник? Оказывается, нужна транзитивность параллельности прямых в пространстве, которая учениками воспринимается в начале курса как нечто само собой разумеющееся, коль скоро это имеет место в планиметрии.

2) Теорема о трёх перпендикулярах является частным случаем более общей теоремы о ближайшей точке: *точка плоской фигуры является ближайшей к данной точке тогда и только тогда, когда эта точка фигуры ближайшая к проекции данной точки на плоскость фигуры.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы точка $A$ и фигура $F$, лежащая в плоскости $\alpha$. Пусть $B$ — проекция точки $A$ на плоскость $\alpha$.

Возьмём любую точку $X$ фигуры $F$. Тогда $AX^2 = AB^2 + BX^2$. Квадраты расстояний $AX$ и $BX$ отличаются на постоянную $AB^2$. Поэтому расстояние $AX$ становится наименьшим тогда и только тогда, когда наименьшим становится $BX$. А это и значит, что точка $X$ является ближайшей к точке $A$ тогда и только тогда, когда она является ближайшей к точке $B$.■

Если фигура $F$ в этой теореме — прямая в плоскости α, то получим теорему о трёх перпендикулярах. Причём сразу и прямое, и обратное утверждение.

3) Теорема о касательной плоскости к сфере формулируется как теорема об опорной плоскости к шару: *плоскость, проходящая через конец диаметра шара перпендикулярно к этому диаметру, не имеет с шаром других общих точек и служит его опорной плоскостью.* (Определение опорной плоскости уже известно.)

Дав эту формулировку, Александр Данилович пишет:

«Оказывается, эта теорема дословно обобщается на произвольные фигуры: *плоскость, проходящая через конец диаметра фигуры перпендикулярно к этому диаметру, не имеет с фигурой других общих точек и служит его опорной плоскостью*».

(Диаметр фигуры — это наибольшее расстояние между её точками или, что всё равно, самый длинный отрезок, вмещающийся в этой фигуре, иначе — наибольшая его хорда.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть отрезок $AB$ — диаметр фигуры $F$. Проведём через точку $A$ плоскость α, ему перпендикулярную. Если $X$ — точка этой плоскости, отличная от $A$, то $BX > BA$. Поскольку расстояние $AB$ — наибольшее расстояние между точками фигуры $F$, то точка $X$ не принадлежит $F$. Следовательно, никакая точка плоскости α, кроме точки $A$, не принадлежит $F$. Вся фигура $F$ лежит с той стороны от α, где лежит точка $B$. Действительно, если допустить, что имеется точка $Y$ фигуры $F$, которая лежит с точкой $B$ по разные стороны от α, то окажется, что отрезок $BY > BA$, что невозможно. ■

Теорема о шаре оказалась частным случаем теоремы, относящейся к любым фигурам, лишь бы в ней существовали наиболее удалённые друг от друга точки. Это примечательно!

Один из моментов в развитии математики состоит в том, что результаты, которые прежде относились к более специальным фигурам, уравнениям, функциям или иным объектам математики, обобщаются позже на гораздо более общие объекты.

В Учебнике даны определения достаточно сложных понятий, которые обычно не сообщаются ученикам, как то: расстояние между фигурами, многоугольная фигура, тело, многогранник, грань многогранника, простая фигура. Но все они приведены не ради «красоты», а по существу.

Например. Если не иметь определения тому, что такое тело, то «зависает» определение многогранника как такого тела, у которого… Определение грани многогранника требуется, если мы сообщаем ученикам о теореме Эйлера, в которой задействовано число граней.

Понятие простой фигуры необходимо для того, чтобы задать класс фигур, которым приписывается объём. Явной теоретической нелепостью является тот факт, что объём определяется обычно для каждой фигуры отдельно. (Аналогичная ситуация для расстояний.)

Но ведь на практике можно находить объёмы не только, например, шара, но и его частей, хотя бы полушара или его «дольки» наподобие дольки мандарина. Или есть нужда сложить объёмы нескольких тел при любом их расположении, когда находят, к примеру, объём нескольких цистерн, перевозящих жидкость.

Теория, которая не объясняет то, что реализуется практически, явно нуждается в улучшении.

Существовании объёма у простых фигур доказано Александром Даниловичем в специальной научной статье.

**Урок 4. Тема урока: Гуманитаризация курса геометрии**

Об Александровском понимании геометрии говорят уже форзацы Учебника: на них Парфенон, решетка Летнего Сада, храм Покрова на Нерли, спираль ДНК, кристаллическая решётка, арабский орнамент, здание современной архитектуры и слова: «Окружающий нас мир — это мир геометрии». Чудо геометрии подчёркнуто икосаэдром вписанным в додекаэдр и невозможными фигурами в стиле фигур Р.Пенроуза.

Учебник местами можно просто читать, и даже с удовольствием, а не только «разбирать» и тем более «заучивать». (Александр Данилович говорил, что заучивать надо стихи, а не математику.)

Учебник сблизился с научно-популярной литературой и, тем самым, к общей культуре.

Примером тому такие названия пунктов: О значении перпендикуляра (перпендикулярная прямая — это ось вращения! ); Условность аксиом; О значении теоремы Пифагора; О роли понятия выпуклости в современной математике и его применения; Цилиндры, конусы и усечённые конусы в практике; Геометрия на поверхности; Задачи картографии.

Подчёркнута роль симметрии. О симметрии фигур говорится раньше, чем она изучается систематически. Приводятся все возможные виды симметрии плоских фигур, рассказано о группе симметрии фигуры.

Отдельная глава посвящена истории геометрии. В ней рассказано о развитии геометрии от древнейших времен до наших дней. Завершается эта глава пунктом «Геометрия и действительность». Последняя фраза в ней: «Движение познания бесконечно... ».

**Урок 5. Тема урока: Практика**

Александр Данилович много и подробно пишет о диалектике математики и, в особенности, геометрии, о её противоречивой сущности.

«Так всякая теорема геометрии, отнесённая к реальности, выражает закон природы и может быть неточной: совершенно точной она является только как вывод из аксиом, но тогда отвлечённой от реальности. Заостряя, можно сказать: *либо смысл — и тогда неточность, либо точность, но тогда отказ от смысла. ...*

Всякая теория чистой математики, взятая именно в этом качестве чисто математической теории, является системой логических выводов, и её собственная математическая истинность состоит только в её непротиворечивости. Но вместе с тем она имеет смысл и значение только в меру того, насколько так или иначе, прямо или косвенно через другие теории она служит познанию действительности и овладению ею в практике.

Наука, восходя к абстракциям и тем непосредственно удаляясь от действительности, обретает возможность проникать в неё глубже и разностороннее».

Ясно, что под практикой понимается деятельность людей, отличная от сугубо геометрической. Первое место тут, видимо, следует отвести строительству, технике и физике.

Будучи физиком по образованию, Александр Данилович неоднократно подчёркивал эту связь. В Учебнике есть такие пункты: О величинах (предложено толкование скалярной величины); Механическое и геометрическое движение; Возможная геометрия реального пространства; Теория относительности и геометрия; Понятие об общей теории относительности.

А среди задач, им предложенных, есть такая: «Если надавить посередине на туго натянутую нить, то она лопнет. Почему?»

**Урок 6. Тема урока: «узкие» места в курсе геометрии.**

В теоретическом курсе школьной геометрии известны «узкие» места. Их наличие порождает многовековые дискуссии о том, как их проходить. Порождены они противоречивой сутью самой геометрии, а также противоречиями между научной и образовательной составляющей школьного курса. Каждый автор школьного учебника геометрии по-своему проходит эти самые «узкие» места. Иногда вовсе не обращено на них внимания, иногда обращено, но говорится нечто вроде «примем без доказательства». Напомню эти «узости».

1. Аксиоматика.
2. Строгость при изложении теории.

3. Использование множеств для определения основных понятий.
4. Скалярные величины (расстояние, длина, площадь, объём).
5. Векторы (определение).
6. Многогранники (определение).
7. Преобразования (содержание темы).
8. Стереометрия в курсе планиметрии.

Тем ценнее позиция Александра Даниловича. В Учебнике и Статье он не скрывает возникающие трудности, находит пути их преодоления, порой совершенно оригинальные для методики, однако доступные ученикам. Именно.

1. Создана оригинальная аксиоматика как планиметрии, так и стереометрии. Изложена в Учебнике.

2. Дано толкование понятию строгости. Строгость сравнивается с инструментом для достижения определённой точности. Указано, что для школьного курса геометрии можно обойтись без включения аксиом порядка и непрерывности, апеллируя к пространственному мышлению школьника.

И главное — выдерживать этот уровень строгости во всём курсе так, чтобы основное в теории было доказано — на этом принятом уровне строгости.

Александр Данилович не раз говорил, что не видит смысла в том, чтобы школьники знакомились с теорией на уровне, который был неизвестен Гауссу, Лобачевскому или Риману.

3. Александр Данилович объяснил, что без простейших понятий о множестве ныне не обойтись при изложении таких тем, как построения, координаты, преобразования. Смысл термина «равенство» можно растолковать в каждом конкретном случае. Помню его реплику: «Равными могут быть только неравные». Ясно, что имелось ввиду. Из равенства $a = a$ ничего не следует!

4. Что такое скалярная величина в школьном курсе обычно не объясняется — вопрос непростой. Недаром в Математической Энциклопедии статью о ней написал А.Н.Колмогоров. Александр Данилович умудрился дать в Учебнике чёткое толкование положительной скалярной величины, так что и ученикам оно стало доступно.

5. Александр Данилович подробно описал всевозможные подходы к понятию вектора как в математике, так и в физике, критически оценил каждый из них. А в Учебнике предложил собственное толкование, которое прекрасно работает в школьных курсах обоих предметов.

6. Дать аккуратное определение многогранника вовсе непросто, известны ошибочные или неудачные определения даже в школьных учебниках. Александр Данилович в Учебнике, предлагает два равнозначных его определения, обусловленных необходимостью говорить про их объёмы и развёртки.

7. Что делать в школьном курсе с преобразованиями? Обойтись без них нельзя в принципе, ученики должны понимать, что они занимаются геометрией подобия. Роль симметрии в жизни и науке громадна, без неё курс геометрии неполноценен. Откладывать изучение преобразований до построения их систематической теории — это значит оторвать симметрию, скажем, шара от прочих его свойств, что совсем негоже.

Поэтому в Учебнике симметрия фигур появляется вместе с самой фигурой. А систематическое изучение преобразований, завершающееся удивительной теоремой Шаля, отправлено в конец Учебника.

8. Еще в первых изданиях Учебника стереометрия появилась в курсе планиметрии. Никак нельзя забывать о развитии пространственного мышления школьника. Исключать этот параметр развития школьника вплоть до старших классов, как это было довольно долго — явная нелепость. Разумеется, это не было частью систематического курса, просто, когда позволяла аналогия, вместе с плоскими фигурами ученики знакомились с неплоскими, вроде окружность — сфера.

На все вопросы, которые могут возникнуть у учителей по этим проблемам, они могут найти обстоятельные ответы у А.Д. Александрова. По сути, он их «закрыл» на все времена.

Содержание статьи основано на статьях А.Л. Вернера и выступлениях автора перед учителями.

## Содержание