Учим математике-7

Материалы открытой школы-семинара
учителей математики

Под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2018

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-7.** Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2018. — 106 с.

ISBN 978-5-4439-2733-6

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики, проходившей со 2 по 9 мая 2017 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности. Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-7
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Технический редактор *Т. Струков*
Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 09.04.2018 г. Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-4439-2733-6

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***седьмой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики***.

Семинар был организован Образовательным фондом «Талант и успех» совместно с Российской ассоциацией учителей математики, Центром Педагогического Мастерства города Москвы и Московским Центром Непрерывного Математического Образования.

Он проходил на базе Образовательного центра «Сириус» в г. Сочи (Адлерский район) на берегу Черного моря в период со 2 мая по 9 мая 2017 года.

Материалы предыдущих школ-семинаров — см. сборники «Учим математике», «Учим математике 2», «Учим математике 3», «Учим математике 4», «Учим математике 5» и «Учим математике 6» — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015 и 2017 гг.

На семинар приглашались все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие около пятидесяти человек, представлявших разные уголки России.

Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Второй год подряд семинар проходил на базе ОЦ «Сириус» параллельно с очередной детской учебной сменой. Это опять дало возможность включить в его программу не только лекции, семинары и практические занятия, но и мастер-классы со школьниками, которые проводили наиболее опытные преподаватели — участники семинара. Остальные участники семинара могли выступать на этих занятиях как в качестве ассистентов, так и в качестве зрителей. Эта работа была организована таким образом, чтобы любой участник семинара смог, при желании, посетить занятия у каждого преподавателя, проводившего мастер-классы. Проведенные занятия со школьниками «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Помимо этого, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, каждый участник семинара имел возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением.

По итогам школы-семинара все участники получили удостоверение о прохождении курсов повышения квалификации.

Научным руководителем семинара был директор ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, член Правления Образовательного Фонда «Талант и успех», учитель математики школы №57 г. Москвы, к. ф.-м. н. И.В. Ященко, его заместителем, координатором и методистом семинара — старший методист и учитель математики школы №218 г. Москвы, сотрудник ЦПМ и МЦНМО, Заслуженный Учитель РФ А.Д. Блинков, методистом — доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора и учитель математики ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ П.В. Чулков, координатором — сотрудник ЦПМ Н.А. Наконечный.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить различные экскурсионные поездки, в том числе, познакомиться с лабораториями городского методического центра. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

Организаторы семинара надеются, что последующие выездные школы будут еще более содержательными.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем учителям, которые нашли силы и время подготовить статьи для этого сборника.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

Программа седьмой открытой школы-семинара

3 мая	
Время	Докладчики и содержание
9.20–9.50	**М.И. Случ, И.В. Ященко, А.Д. Блинков, Н.А. Наконечный** Представление преподавателей мастер-классов, организационная информация
10.00–10.50	**Г.И. Вольфсон** Зачем нужна математика в школе?
11.10–13.00	Посещение и обсуждение мастер-классов
14.30–16.10	**И.Б. Писаренко** Как понять чужое доказательство и придумать свое
16.20–18.00	**К.В. Медведев** Использование свойств функций **И.С. Уколов** Обучение планиметрии в 10-11 классах

4 мая	
9.00–10.50	Посещение и обсуждение мастер-классов
11.10–13.00	Посещение и обсуждение мастер-классов
14.30–16.10	**М.А. Волчкевич** Избранные вопросы планиметрии
5 мая	
9.00–10.50	Посещение и обсуждение мастер-классов
11.10–13.00	Посещение и обсуждение мастер-классов
14.30–16.10	**А.С. Штерн** Алгебра как искусство раскрытия скобок
16.20–18.00	**А.В. Иванищук** Экстремальные задачи **В.Ю. Лупашевская** Сумма модулей, сумма радикалов
6 мая	
9.00–10.50	Посещение и обсуждение мастер-классов
11.10–13.00	Посещение и обсуждение мастер-классов Экскурсия по научному парку ГМЦ
14.30–16.10	**А.В. Шаповалов** Математика эксперимента с подвижными чертежами
16.20–18.00	**Д.Э. Шноль** Вокруг темы «Квадратный корень»: как разнообразить задачи и формы работы на уроке? **А.Н. Андреева** Математические миниатюры

7 мая	
9.00–10.50	Посещение и обсуждение мастер-классов
11.10–13.00	Посещение и обсуждение мастер-классов
14.30–16.10	**П.В. Чулков** Тригонометрические задачи на математических олимпиадах
8 мая	
9.00–10.50	Посещение и обсуждение мастер-классов
11.10–13.00	Посещение и обсуждение мастер-классов
14.30–16.10	**В.Б. Некрасов** Трехмерные аналоги некоторых теорем планиметрии
16.20–17.05	**Я.И. Абрамсон** Профильная математика в начальной школе **Е.В. Листопадова** Проблемное обучение на уроках математики
17.15–18.00	**М.И. Случ, И.В. Ященко,** **А.Д. Блинков, Н.А. Наконечный** Рефлексия семинара. Подведение итогов

Профильная математика в начальной школе

Я.И. Абрамсон,
Школа «Интеллектуал», г.Москва
yakovabramson@mail.ru

В [5] описывалось содержание авторской программы по математике, реализуемой на протяжении ряда лет в школе «Интеллектуал» для отобранных по конкурсу детей.

В том же сборнике в статьях [9] и [10] Александром Васильевичем Шаповаловым был поднят и рассмотрен вопрос о мотивации детей как младшего, так и старшего возрастов, вопрос, конечно, важнейший и в прикладном (а как учить того, кто не хочет учиться?) и в этическом отношении (а нужно ли? А зачем?). Вот на этом и хотелось бы сегодня остановиться.

Во-первых, конечно, да — в начальной школе, и, в значительной степени (а для многих — в первую очередь) в средней и старшей школах, детей гораздо больше интересуют конструктивные задачи, предоставляющие прекрасные возможности для творчества, креативного мышления, фантазии, интуиции. Вопрос «как это сделать» является в 7–11, а то и в 12–14 лет более актуальным, чем вопрос «почему это верно» или чем потребность обосновать какое-либо интуитивно очевидное утверждение.

С другой стороны, дети младшего школьного возраста и дошкольники легко воспринимают и любые искусственные правила, как правила некоторой игры. Сказка и быль для них ещё не разделены твёрдой гранью и они легко оперируют с символами, например, просто потому, что это тоже «такая игра». С большей лёгкостью, чем старшие дети.

Я говорю это на опыте преподавания языка математической логики и теории множеств в 3-4 классах. С удовольствием ребята преобразовывают длинные нагромождения символов, связанных скобками и логическими связками в короткие, чаще всего, заканчивающиеся истинным высказыванием, логические функции или теоретико-множественные выражения. То же самое относится и к вычислению многоэтажных численных примеров, включающих операции возведения в степень, извлечения корня и взятия логарифма. Это просто игра для них, и они получают удовольствие одновременно эстетического порядка от того, что какой-нибудь монстр на полстрочки превратился в маленькую буквочку и от того, что у них *получается*.

Это, последнее обстоятельство, я бы особенно подчеркнул, потому что оно хотя и примыкает непосредственно к «внешним стимулам», таким, как упоминавшиеся в [9] победы на олимпиадах, но всё-таки, не сводится к ним, потому как это именно внутреннее торжество ребёнка, не его победа над другим ребёнком, а победа над самим собой, чувство, сходное с тем, которое он получает, научившись ходить и говорить.

Интерес к строгости доказательств, к анализу рассуждений, к основаниям математики, абстрактным, далёким от «реальности, данной нам в ощущениях» тоже постепенно просыпается, после нескольких лет таких вот усиленных занятий математикой. Например, курс оснований геометрии в 7-ом классе, где учащиеся скрупулёзно, шаг за шагом доказывали «очевидные» утверждения, попутно устанавливая те положения, которые следовало бы отнести к первоначальным понятиям (например, «между») или аксиомам (например, неочевидная аксиома Паша или аксиомы конгруэнтности, позволяющие откладывать равные углы и отрезки) проходит весьма активно, с интересом и, самое главное, — с удивлением от того, что, например, в конце концов мы можем доказать теперь и то, что у отрезка имеется середина, а у угла существует биссектриса. Также с интересом проходится и сугубо абстрактная теоретико-множественная часть курса, в которой выстраиваются кардинальные числа, порядковые числа, доказываются эквивалентность разных форм аксиомы выбора.

Не стану утверждать, что это распространяется широко, на любых школьников, что это верно вообще и применимо всегда. Нет, конечно, ведь всё-таки речь идёт пока что об отобранных изначально по высокому конкурсу, а затем и прошедших ещё один отбор детей, оставшихся добровольно «доучиваться» у меня уже после отбытия 4-х летней обязательной «службы» в начальной школе. Конечно, у них сказывается уже и многолетний опыт регулярных, интенсивных и вполне самостоятельных занятий математикой. Приведший к совершенно иной математической зрелости и возможности получать удовольствие и от подобных абстрактных построений. Примеры можно было бы и продолжить, упомянув, к слову сказать, алгебраические структуры, в частности, группы, кольца, векторные пространства, становящиеся предметом изучения в 7-8 классах. Теоретико-множественную топологию и её приложения (например, к задачам о «блинах», о наличии комплексного корня у многочлена) в 9–10 классах. Учащиеся начинают видеть внутреннюю красоту от стройности конструкций, высокой башни постепенных обобщений, взаимопроникновения разных, казалось бы, изначально не связанных между собой её ветвей. Постепенно появляется и какая-то внутренняя потребность в занятиях математикой, стремление разобраться и постичь различные её аспекты. Можно сказать, что практика интенсивных занятий математикой с раннего возраста приводит в конечном итоге детей к интеллектуальной потребности ею заниматься, «подсаживает» многих на «математическую иглу», вырабатывает потребность заниматься ею, если и не профессионально, то хотя бы как хобби на протяжении жизни.

Конечно, при возможности как-то связать математику с жизнью, с её применением в смежных дисциплинах, следует не пренебрегать такой возможностью, демонстрировать её. Это всегда вызывает положительные эмоции у детей и дополнительный стимул к занятиям математикой. Так, в геометрии это задачи об измерении размеров удалённых, недоступных объёктов, при изучении псевдоэвклидовой метрики — применение к релятивистской механике (закон сложения скоростей), естественные применения обыкновенных дифференциальных уравнений. Но, всё-таки, нетривиальные применения математики к физике, химии и экономике требуют довольно-таки обширных в ней познаний, выходящих далеко за пределы возможностей их получения в школе.

В школе же, на наш взгляд, не стоит как раз заниматься изучением математики «глубоко продвигаясь вдоль узкого фронта», а следует, по возможности, дать представление о разных её отделах максимально широко. Математика — наука широкая, как говорил У. Тёрстон. Именно за счёт разнообразия внутри самой математики можно успешно поддерживать интерес к ней. Это значит, что немного, по чуть-чуть желательно умудриться познакомиться и с дискретной, и с непрерывной её частью, и с методами коммутативной алгебры и теории чисел, и с методами топологии и математического анализа (по-видимому, всё же, стоит ограничиться функциями одной вещественной переменной, хотя ранее я старался охватить и многомерный анализ) и теорией вероятности и математических игр. Разумно, например, хотя бы одну математическую тему, понятие, например, понятие числа, изучаемого и постепенно расширяемого в течение всего школьного периода, рассмотреть всесторонне, включая комплексные, гиперкомплексные и p-адические числа. Или комбинаторику, с включением в рассмотрение производящих функций. Или геометрические вероятности, с опорой на интегрирование по Лебегу и функциональный анализ. Или разрешимости уравнений и построений циркулем и линейкой, темами, которые тоже являются предметом изучения в школе.

Сегодня можно говорить уже и о 5-летнем опыте применения этой методики в рамках дополнительного образования, в ходе 45-минутных занятий в школе Интеллектуал, школе №1358, в частных школах («Золотое сечение», «Мир интеллекта»), школе развития «Маяк». Конечно, там «математические достижения» обучающихся куда скромнее, но и цели и задачи ставятся иные: заинтересовать детей математикой, предложить какие-то математические занятия, альтернативные олимпиадной математике, которые, с одной стороны, были бы не менее интересны, с другой — давали какое-то математическое развитие, способствовали бы лучшему усвоению и пониманию и основного школьного курса. В целом можно сказать, что в ходе уже гораздо более широкого эксперимента, проводящегося уже силами примерно десятка преподавателей с несколькими сотнями детей, не отобранных уже на этот раз по своим математическим способностям, а так называемых «обычных московских детей», выделились темы, которые неизменно пользуются успехом.

Это, во-первых, построение алгоритмов арифметических операций в разных системах счисления, вычисление громоздких, многоуровневых композиций из корней, логарифмов и степеней, композиций движений плоскости: нескольких отражений относительно прямых, параллельных координатным осям или их биссектрисам, сдвигам на вектора, поворотам на целое число прямых углов. Хорошо идут также задачи на построения циркулем и линейкой (но не на доказательства). С удовольствием также строят дети 1–4 классов графики функций (на целочисленной плоскости, естественно) и их простейших преобразований (сдвигов, отражений и их композиций). Подробности можно найти на сайте www.abramson.xyz.

Есть и ещё один немаловажный аспект в деле формирования у детей интереса к занятиям математикой, о котором как-то не очень принято говорить. Стесняемся, что ли?

Это интерес к ней самого учителя. Не факт, что если учителю интересно, то этого одного уже достаточно чтобы стало интересно и ученику. Но вот обратное верно. Если преподавание предмета неинтересно преподавателю, то уж у обучаемых интереса заведомо не возникнет. А как может быть интересно преподавание по учебникам, одного и того же по многу раз подряд, слабо связанных между собой и плохо обоснованных математических фактов, материала, неудовлетворяющего эстетическое чувство учителя? Это и ведёт к хорошо известному в учительской среде профессиональному выгоранию. Приходится заставлять учить, прибегая к разным доступным средствам поощрения и наказания. Но преодолевать сопротивление подростковой среды — вещь бесперспективная. Невыгодный для взрослого расклад душевных и физических сил. А вот формировать повестку занятий самому, подбирать задачи и на ходу самому подучиваться — вот это уже совсем другое дело. Держит учителя в тонусе. Особенно, если при этом постоянно менять, хотя бы немного, пусть не в главном, предметное содержание курса, делая акцент то на одном, то на другом аспекте преподаваемого предмета. Разумеется, это относится не к математике только, ничего специфического в этом отношении в ней нет. Более того, логика изменения содержания и стиля преподавания в рамках математики ведёт (и в конечном итоге безусловно приведёт) к изменению содержания и характера преподавания смежных дисциплин, таких как физика, информатика, химия, биология.

Да и не только них. Например, изучение языков вполне можно «математизировать» в школе, занимаясь анализом (эксперимент!) текстов и выведением закономерностей (правил). Сведением их в таблицу, поиском исключений, сравнений языков. Многое из этого имеется уже в традиционных лингвистических олимпиадах, но в практику преподавания пока не вошло. Можно ведь и такой предмет как история учить не как набор более или менее достоверных сведений о том, кто кого и когда завоевал, а как причинно-следственные связи в сфере общественных отношений. Какие законы работают в разных обществах, на разных этапах его развития, каковы роли искусств, наук и ремёсел, торговли и банковского капитала, средств массовой информации и технологических перемен на изменение общественных отношений, войн и революций, изменение норм этики и морали, изменение внутреннего и международного законодательства, глобализации и её проявлений, становление наций и государств. Всё это в какой-то мере формализуемо, подлежит моделированию, в ходе которого и обсуждаются допустимые и недопустимые упрощения, выясняются существенные и несущественные моменты, то, чем можно ради упрощения модели пренебречь.

Школа переживает сейчас идущую «снизу» реформу. Всё большее число школьников избирает семейную форму обучения. И это не только чисто российская тенденция. Могу с уверенностью утверждать, что это так, по крайней мере, и в США.

Вместе с государственными школами сосуществуют разнообразные частные, да и сами государственные тоже очень сильно разнятся между собою. В крупных городах уже немало профильных школ, школ с отбором по признаку склонности к какому-то виду деятельности (спорту, музыке, балету, языкам, математике). Набирает популярность дополнительное, кружковое образование. Кроме того, всё больше интернет-ресурсов, предлагающих онлайн обучение различным курсам. Школа в ближайшем будущем будет всё более индивидуализироваться, на мой взгляд, само понятие «массовой школы» может вскоре исчерпать себя. Дело в том, что для большинства сегодняшних учеников нынешний ФГОС, и, в частности, профильный ЕГЭ по математике, непосильны и сведения, получаемые (якобы, на самом деле — не получаемые) по математике — явно избыточны. Они и не пригодятся никогда, и забудутся скоро, даже если каким-то чудом и будут «вдолблены», и ни для каких целей не необходимы. Их преподавание происходит исключительно по традиции и по инерции. А вот для того меньшинства, которому они пригодятся, которому они интересны — для них-то, наоборот, эти сведения совершенно недостаточны. Это меньшинство (как и ещё менее значительное количество преподавателей, способных эти сведения до них донести) способно в пределах тех же 11 лет обучения достичь и на количественном и на качественном уровне совершенно других рубежей. А раз так, то не грех ли их в этом обделять?

Опираясь на свой опыт, автор предлагает коллеге-читателю, учителю, смелее экспериментировать в области преподавания, полагая, что за этим будущее, считая, что в перспективе, причём не слишком отдалённой, предметное содержание школьных курсов сильно изменится и, в частности, перестанет быть унифицированным. Имея в виду, конечно, не факультативные спецкурсы, кружковую математику и иные формы дополнительного мат. образования, которые и сегодня вполне вариативны, а именно изменения содержания, порядка прохождения материала основного курса.

Литература

[1] *Абрамсон Я.И.* Математика. 1 класс. Книга для учителя. Спб, 2015.

[2] *Абрамсон Я.И.* Поэтапное формирование математических понятий в начальной школе. Материалы второй научно-методической конференции «Новые образовательные программы МГУ и школьное образование». М, 2012.

[3] *Абрамсон Я.И., Берёзкина С.Г.* Уроки математики в первом классе. Спб, 2013.

[4] *Абрамсон Я.И.* Обучение одаренных детей математике. 4-й класс (2013/2014 уч/ год) http://festival.1september.ru/articles/644130/.

[5] *Абрамсон Я.И.* Авторская программа по математике для высокомотивированных школьников. Материалы открытой школы-семинара для учителей математики в сборнике «Учим математике-4», М., 2014.

[6] *Абрамсон Я.И.* Обучение одарённых детей математике. 5-й класс (2014/2015 год) http://festival.1september.ru/articles /654861/.

[7] *Абрамсон Я.И.* Экспериментальное обучение математике в начальной школе. Вопросы психологии, 2015, №1.

[8] *Абрамсон Я.И* Математика 2 класс Книга для учителя. Спб, 2015.

[9] *А. В. Шаповалов* Преподавание математики как достоверной науки. Материалы открытой школы-семинара для учителей математики в сборнике «Учим математике-4», М., 2014.

[10] *А.В. Шаповалов* Математические конструкции и их роль в преподавании математики. Материалы открытой школы-семинара для учителей математики в сборнике «Учим математике-4», М., 2014.

Вневписанная окружность

А.Д. Блинков,
Школа №218, г.Москва
adblinkov@yandex.ru

Использован материал из статьи А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. Вневписанная окружность. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №2/2009.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B и C (см. рис. 1а).

Сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

Рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC (см. рис. 1б). Так как сумма углов, образованных ими со стороной BC, меньше, чем $180°$, то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке Q. Тогда точка Q равноудалена от прямых AB, AC и BC. Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника ABC, получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

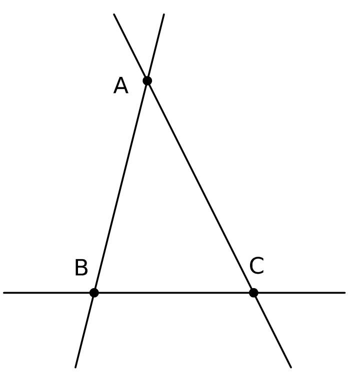


Рис. 1а

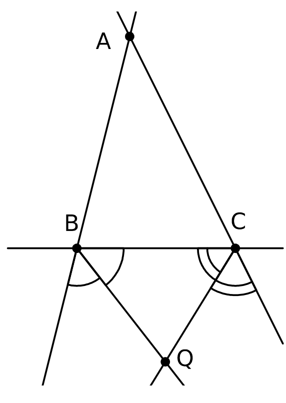


Рис. 1б

Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник ABC, существуют, по крайней мере, еще *три точки*, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром *окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон*. Такие *окружности называют вневписанными* для данного треугольника ABC.

Упражнения

1. Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых AB, AC и BC, не существует (то есть их ровно четыре). [Достаточно рассмотреть части плоскости, ограниченные углами, вертикальными углам треугольника. В них не может быть точек, равноудаленных от трех прямых.]

2. Докажите, что точка Q лежит на биссектрисе угла BAC (см. рис. 1б). [Точка Q равноудалена от прямых AB и AC.]

3. Пусть I — центр вписанной окружности. Вычислите углы BIC и BQC, если $\angle BAC = \alpha$. [$\angle BIC = 90° + 0{,}5\alpha$; $\angle BQC = 90° - 0{,}5\alpha$.]

Обратите внимание, что угол между биссектрисами внутренних углов — острый, а между биссектрисами внешних углов — тупой. Почему сумма этих углов равна $180°$? [Углы IBQ и ICQ — прямые.]

Отсюда следует, что точки B и C лежат на окружности с диаметром IQ. Где лежит центр этой окружности? Оказывается, он лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Этот факт называется *теоремой Мансиона* и является прямым следствием *теоремы о «трезубце»* или *«трилистнике»*.

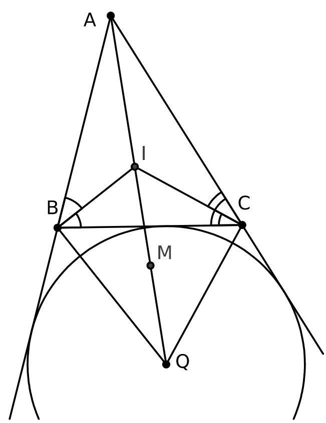


Рис. 1в

Действительно, пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$ (см. рис. 1в). Угол BIM — внешний для треугольника AIB, значит,

$$\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = 0{,}5(\alpha + \beta).$$

Кроме того, $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = 0{,}5\alpha + 0{,}5\beta$, так как $\angle MBC = \angle MAC = 0{,}5\beta$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC). Следовательно, $\angle BIM = \angle IBM$, то есть, $MI = MB$.

Аналогично, получим, что $MI = MC$, значит, M — центр окружности, описанной около треугольника BIC, а точка Q лежит на этой окружности, то есть, точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M.

4. Пусть окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC — в точках N и P соответственно (см. рис. 2). Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны BC в точке K, а стороны AB — в точке L. Докажите, что:

а) $BK = p - b$, где p — полупериметр треугольника ABC, b — длина стороны AC; б) $AN = p$.

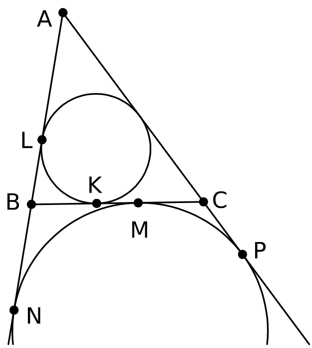


Рис. 2

[Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL, BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника ABC, поэтому, $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство а). Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT, BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда

$$P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM =$$
$$= AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP,$$

откуда и следует утверждение б)]

Пример. Объясните, как построить треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC, в котором заданы $\angle BAC = \alpha$, высота $AD = h$ и $P_{\Delta ABC} = 2p$, построен. Проведем его вневписанную окружность, касающуюся продолжений сторон AC и AB в точках K и M соответственно, тогда $AK = AM = p$ (см. рис. 3). Кроме того, касательная BC к этой окружности находится на расстоянии h от точки A.

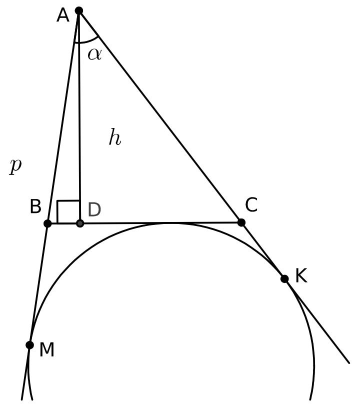


Рис. 3

Отсюда вытекает следующее построение: 1) строим угол A величины α, на его сторонах откладываем отрезки $AK = AM = p$, после чего строим окружность, касающуюся сторон угла в этих точках; 2) строим окружность с центром A и радиусом h; 3) строим общую внутреннюю касательную к двум окружностям, которая пересечет стороны угла в искомых точках B и C.

Отметим, что, в зависимости от соотношения между заданными параметрами, задача либо имеет единственное решение (так как общие внутренние касательные к двум окружностям симметричны относительно биссектрисы угла BAC), либо не имеет решений.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Докажите, что:

а) отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности и противолежащей стороны, делит треугольник на два треугольника равного периметра;

б) точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

2. Объясните, как построить треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1 и C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

3. Докажите, что радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника тогда и только тогда, когда этот треугольник — прямоугольный.

4. $ABCD$ — параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

5. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

б) Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину отрезка, если радиусы окружностей равны R и r $(R > r)$.

6. Даны угол и точка, лежащая между его сторонами. Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.

7. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 — точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

8. Существует ли треугольник, у которого радиус одной из вневписанных окружностей равен радиусу описанной окружности?

9. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

10. Объясните, как построить четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

Ответы и решения

1. См. рис. 2.

а) $P_{\Delta ABM} = AB + BM + AM = AN + AM = AP + AM =$

$$= AC + CM + AM = P_{\Delta ACM};$$

б) Так как $AT = p$, то и $CM = CT = AT - AC = p - b = BK$.

2. Пусть искомый треугольник ABC построен. Центр каждой его вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов. Проведя их, получим точки A_1, B_1 и C_1 (см. рис. 4).

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины A, B и C искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то $A_1A \perp B_1C_1$, $B_1B \perp A_1C_1$, $C_1C \perp A_1B_1$. Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

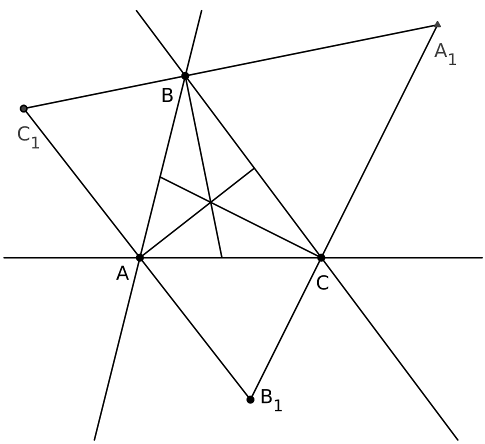


Рис. 4

Используя результат упражнения 3, нетрудно доказать, что задача имеет решение (причем единственное) тогда и только тогда, когда треугольник $A_1B_1C_1$ — остроугольный.

Это позволяет сформулировать полезный факт: вершины остроугольного треугольника являются центрами вневписанных окружностей для его ортотреугольника (треугольника, образованного основаниями высот).

3. Пусть вневписанная окружность треугольника ABC с центром Q и радиусом R касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках D и E соответственно (см. рис. 5). Тогда $CD = CE = \frac{P_{ABC}}{2}$.

1) Если $\angle ACB = 90°$, то $CDOE$ — квадрат, значит, $R = \frac{P_{ABC}}{2}$;

2) Обратно, если $R = \frac{P_{ABC}}{2}$, то из равенства $P_{\Delta ABC} = 2CD = 2CE$ следует, что $R = CE = CD$. Тогда $CDOE$ — квадрат, следовательно, $\angle ACB = 90°$.

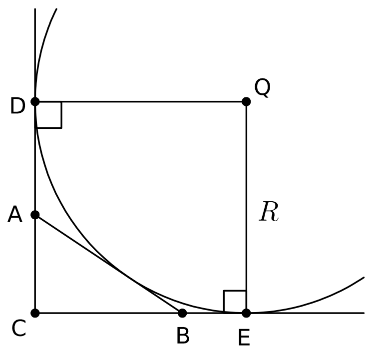


Рис. 5

4. Пусть вневписанная окружность треугольника ABC касается прямой AC в точке K. Тогда $AK = \frac{P_{ABC}}{2}$. Аналогично, если M — точка касания другой окружности с прямой AC, то $AM = \frac{P_{ADC}}{2}$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то треугольники ABC и ADC равны, значит равны и их периметры. Следовательно, $AK = AM$, то есть точки K и M совпадают.

5. а) Рассмотрим окружность с центром I радиуса r, вписанную в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$, см. рис. 6а). Проведя радиусы IA_1, IB_1 и IC_1, перпендикулярные сторонам треугольника, получим, что IA_1CB_1 — квадрат, значит, $AB_1 = b - r$; $BA_1 = a - r$.

Кроме того, $AB_1 = AC_1$ и $BA_1 = BC_1$, значит,

$$a - r + b - r = c = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника. Следовательно, $a + b = 2R + 2r$, что и требовалось.

б) Ответ: $R - r$.

Заметим, что данный отрезок не может разбивать квадрат на два четырехугольника, поскольку эти четырехугольники будут являться прямоугольными трапециями, у которых сумма боковых сторон больше суммы оснований. Так как $R \neq r$, то данный отрезок не является диагональю квадрата. Следовательно, этот отрезок MK разбивает квадрат $ABCD$ на треугольник и пятиугольник (см. рис. 6б). Тогда, окружность, вписанная в пятиугольник $MBCDK$, является вневписанной для прямоугольного треугольника AMK и совпадает с окружностью, вписанной в квадрат. Используя, что $P_{\Delta AMK} = 2R$ и формулу, выражающую радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, через его стороны, (см. пункт а), получим, что $MK = P_{\Delta AMK} - (AM + AK) = 2R - (2r + MK)$. Следовательно, $MK = R - r$.

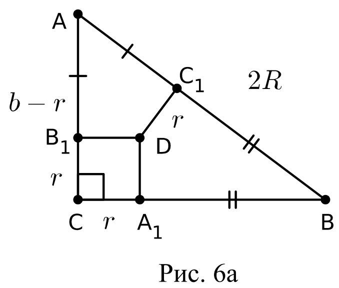


Рис. 6а

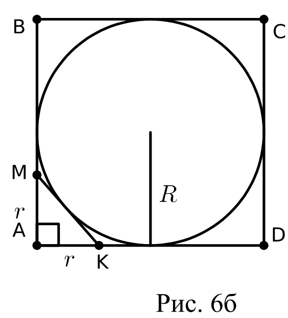


Рис. 6б

6. Пусть на плоскости даны угол O и точка M. Предположим, что искомая прямая AB построена, то есть треугольник AOB имеет заданный периметр P. Проведем окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка AB (см. рис. 7). Пусть K и L — точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда $OK = OL = 0{,}5P$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника KOL (сторону KL которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L. После этого через точку M проводится касательная AB к этой окружности.

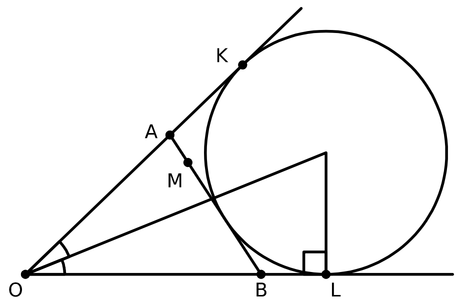


Рис. 7

Отметим, что, зависимости от расположения точки M, задача может иметь два решения, одно решение или не иметь решений. Кроме того, точка M может быть задана и вне угла или вместо точки можно, например, задать прямую и потребовать, чтобы искомая прямая была ей параллельна.

7. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, I_a — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BC (см. рис. 8 а, б).

Первый способ. BI_a и CI_a — биссектрисы внешних углов B и C данного треугольника. По условию, треугольники A_1BC и A_2CB — равнобедренные, поэтому $BI_a \perp A_1C$ и $CI_a \perp A_2B$ (см. рис. 8а). Следовательно, I_a — точка пересечения двух высот треугольника A_0BC, значит, третья высота этого треугольника лежит на прямой A_0I_a, то есть $A_0I_a \perp BC$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Так как треугольник A_1BC — равнобедренный, то $\angle BA_1C = \dfrac{180° - (180° - \angle B)}{2} = \dfrac{\angle B}{2}$, то есть отрезок A_1C параллелен биссектрисе BI (см. рис. 8б). Аналогично, отрезок A_2B параллелен биссектрисе CI. Следовательно, четырехугольник A_0BIC является параллелограммом. Поэтому основания перпендикуляров, опущенных из точек I и A_0 на отрезок BC, симметричны относительно его середины — точки A'. Этим же свойством обладают точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC, поэтому радиус вневписанной окружности лежит на прямой, проходящей через точку A_0 перпендикулярно к BC. Следовательно, эта прямая содержит центр I_a вневписанной окружности.

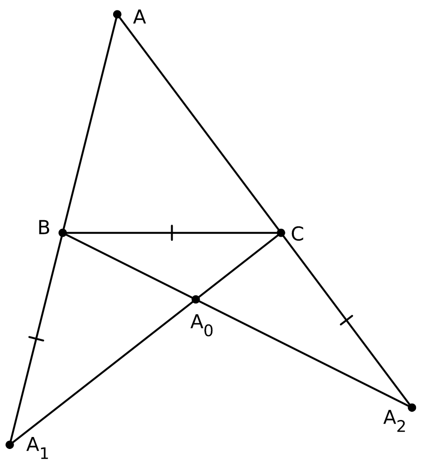


Рис. 8а

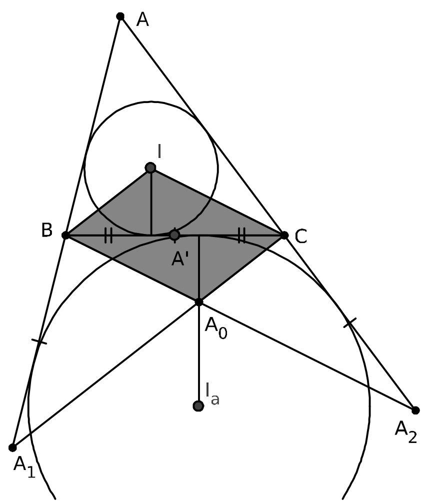


Рис. 8б

8. Ответ: да, существует. Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (см. рис. 9). Радиус R его описанной окружности равен медиане CM (совпадающей с высотой треугольника). Центр Q его вневписанной окружности, касающейся катета BC, лежит на биссектрисе внешнего угла C, которая параллельна AB. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки Q до прямой AB, то есть равен R.

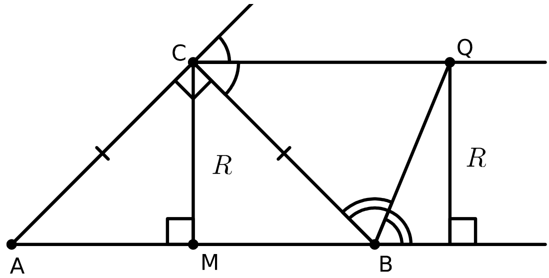


Рис. 9

9. Пусть отрезок MN пересекает стороны BC и CD параллелограмма в точках P и Q соответственно, а F — точка касания данной окружности с отрезком BD (см. рис. 10). Так как треугольники ABD и CDB симметричны относительно середины отрезка BD, то симметричны и точки касания вписанных в эти треугольники окружностей со стороной BD. Используя также для треугольника ABD симметрию точек касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BD, получим, что F — точка касания с этой стороной окружности, вписанной в треугольник CDB. Треугольник MAN — равнобедренный ($AM = AN$), $BP \parallel AM$, значит, треугольник PBN — также равнобедренный, то есть $BP = BN = BF$. Аналогично, используя параллельность DQ и AN, доказывается, что $DQ = DM = DF$. Из того, что $BP = BF$ и $DQ = DF$, следует, что P и Q — также точки касания окружности, вписанной в треугольник BCD, с его сторонами.

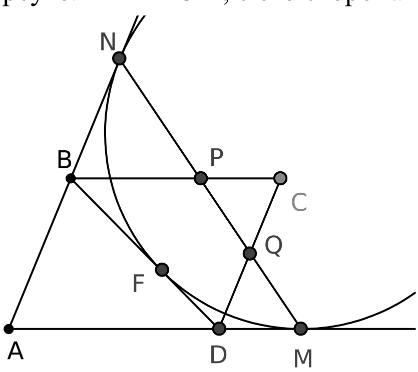


Рис. 10

10. Пусть искомый четырехугольник построен, O — центр вписанной в него окружности (см. рис. 11). Предположим, что $AD > AB$. Рассмотрим симметрию относительно прямой AO. Так как AO — биссектриса угла BAD, то точка B' — образ точки B лежит на отрезке AD и $B'D = AD - AB$. Пусть M — точка пересечения прямой, симметричной BC, и стороны CD, тогда $\angle MB'D = 180° - \angle B$. Таким образом, искомое построение сведется к построению вспомогательного треугольника $B'MD$ по стороне и двум прилежащим углам и построению точки O, которая является центром вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны BM.

Отметим, что если $AB \neq AD$, то задача имеет единственное решение; если $AB = AD$ и $\angle B = \angle D$, то решений бесконечно много; если $AB = AD$ и $\angle B \neq \angle D$, то решений нет.

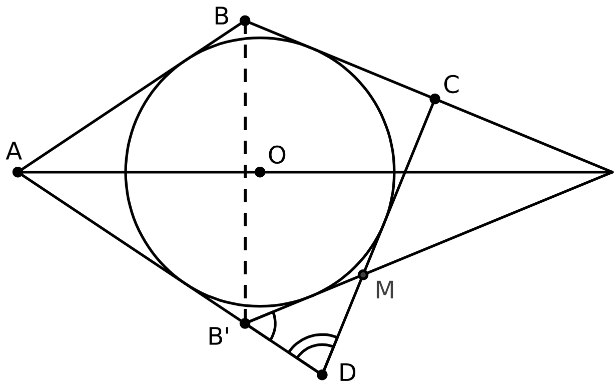


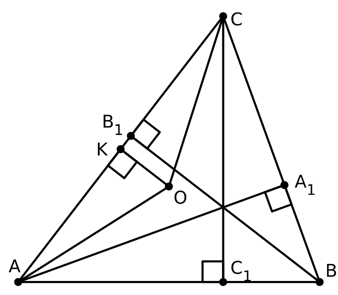
Рис. 11

Угол между радиусом описанной окружности и стороной треугольника

А.Д. Блинков,
Школа №218, г.Москва
adblinkov@yandex.ru

Сформулируем и докажем *основной факт*, выражающий связь между двумя углами: углом между радиусом описанной окружности и стороной треугольника и углом треугольника. Знание этого факта помогает решить много геометрических задач.

Пусть O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Тогда $\angle OCA = 90^\circ - \angle ABC$.



Доказательство. Пусть K — середина стороны AC (см. рис.), тогда треугольник AOC — равнобедренный, поэтому $OK \perp AC$. Значит, $\angle KOC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$. Следовательно, $\angle OCA = 90^\circ - \angle KOC = 90^\circ - \angle ABC$. Понятно, что для других радиусов все аналогично.

Следствия. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника (дополнить рис.). Тогда:

1) $\angle OCA = \angle C_1CB$; 2) прямые CO и CC_1 симметричны относительно биссектрисы угла ACB; 3) $OC \perp A_1B_1$, то есть, радиусы описанной окружности перпендикулярны сторонам ортотреугольника; 4) касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.

Доказательство. 1) $\angle C_1CB = 90^\circ - \angle ABC$; 2) разность равных углов; 3) $\angle A_1B_1C + \angle KCO = \angle ABC + 90^\circ - \angle KOC = 90^\circ$, значит, $OC \perp A_1B_1$; 4) касательная, проведенная к описанной окружности в точке C, перпендикулярна радиусу OC, а $OC \perp A_1B_1$, значит, она параллельна A_1B_1.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Выведите аналогичный основной факт для случаев, когда угол B треугольника ABC — прямой или тупой. Верны ли следствия для этих случаев?

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса CL, O — центр окружности, описанной около ABC. На стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$. Докажите, что $CO \perp DL$.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр O которой лежит внутри него. Докажите, что если $\angle BAO = \angle DAC$, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

4. Биссектриса угла A равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ пересекает описанную окружность в точке W, I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника IBW лежит на стороне BC.

5. H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, O_A и OC — центры окружностей, описанных около треугольников AHB и CHB соответственно. Докажите, что $O_AO_C = AC$.

6. Дан треугольник ABC. Рассматриваются все такие пары точек K и L на стороне AC, что $\angle ABK = \angle CBL$. Докажите, что центры описанных окружностей всех треугольников KBL лежат на одной прямой.

7. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную около ABC окружность — в точке M. Докажите, что: а) центры O_A описанных окружностей всех таких треугольников AMK лежат на одной прямой; б) $O_AK \perp BC$. в) Пусть O_C — центр окружности, описанной около треугольника CMK. Докажите, что прямые AO_A и CO_C пересекаются на высоте треугольника ABC.

8. Из середины D стороны BC треугольника ABC опущены перпендикуляры DE и DF на стороны AB и AC соответственно. M — середина отрезка EF. Докажите, что $DM \parallel AO$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

9. Пусть I, I_A и I_C — центры вписанной и двух вневписанных окружностей треугольника ABC, O — центр описанной окружности треугольника II_AI_C. Докажите, что $OI \perp AC$.

10. Точка D вне остроугольного треугольника ABC такова, что $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке AD.

Решения задач

1. Для прямоугольного треугольника: факт и первые два следствия формально верны (см. рис. 1а), но угол OCA — «вырожденный»; следствия 3) и 4) не имеют смысла (ортотреугольник «вырожденный»). Для тупоугольного треугольника: $\angle OCA = \angle ABC - 90^\circ$ (см. рис. 1б). Все следствия верны.

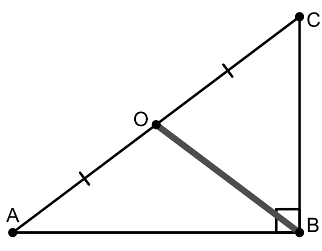


Рис. 1а

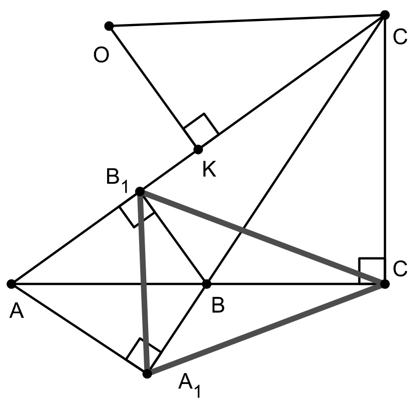


Рис. 1б

2. Из условия задачи следует, что треугольники CDL и CBL равны (см. рис. 2). Проведем высоту CH треугольника ABC, тогда $\angle DCO = \angle BCH$. Так как $CH \perp BL$, то $CO \perp DL$.

3. Из условия задачи следует, что $\angle BAC = \angle DAO$ (см. рис. 3). Тогда высота треугольника ABD, проведенная из точки A, лежит, на прямой AC, то есть $AC \perp BD$.

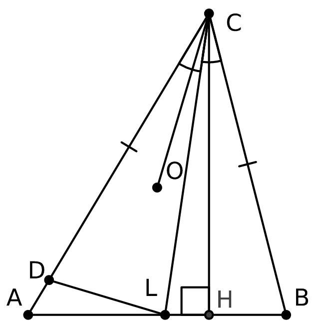


Рис. 2

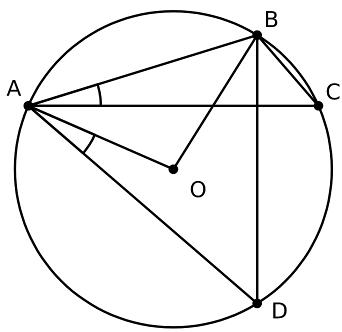


Рис. 3

4. Пусть

$$\angle BAC = \angle BCA = \angle BWA = \alpha$$

(см. рис. 4). По теореме «трилистника» $WB = WI$, значит, центр Q описанной окружности треугольника IBW лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BI. Угол QIB между радиусом и стороной равен $90^\circ - \alpha$, то есть, равен углу IBQ, значит, точка Q лежит на BC.

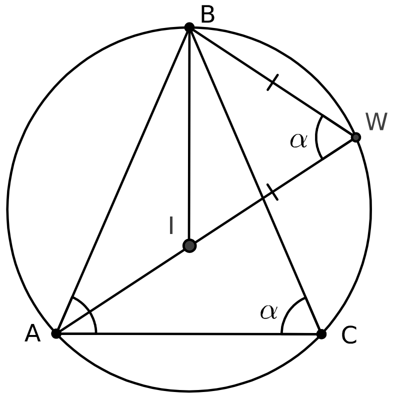


Рис. 4

5. Так как точки O_A и O_C лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BH, то $O_AO_C \parallel AC$ (см. рис. 5). Докажем, что $O_AA \parallel O_CC$. Действительно,

$$\angle O_AAB = \angle CAH = 90^\circ - \angle C,$$

$$\angle O_CCB = \angle ACH = 90^\circ - \angle A,$$

$$\angle BAH = \angle BCH = 90^\circ - \angle B.$$

Тогда $\angle O_AAC + \angle O_CCA = 540^\circ - 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 180^\circ$. Таким образом, O_AO_CCA — параллелограмм, значит, $O_AO_C = AC$.

6. Из условия задачи следует, что биссектриса BD и высота BH треугольника ABC является также биссектрисой и высотой соответственно каждого из треугольников KBL (см. рис. 6). Пусть Q — центр описанной окружности треугольника KBL, тогда для всех таких треугольников $\angle QBK = \angle DBH = \dfrac{|\angle C - \angle A|}{2}$.

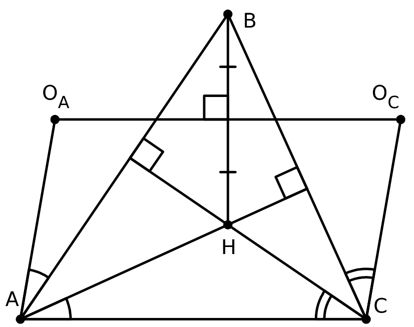


Рис. 5

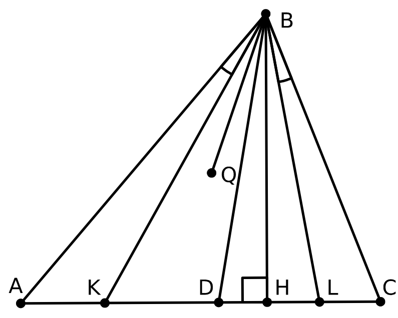


Рис. 6

7. а) Заметим, что, независимо от положения точки M, $\angle BMA = \angle ACB = \gamma$, тогда $\angle KAO_A = 90^\circ - \gamma$ (см. рис. 7). Следовательно, все точки O_A лежат на луче AD, который расположен вне данного треугольника и $\angle DAC = 90^\circ - \gamma$.

б) Пусть O_AK пересекает BC в точке N (см. рис. 7). Так как $\angle NKC = \angle AKO_A = \angle KAO_A = 90^\circ - \gamma$, то $\angle KNC = 90^\circ$, что и требовалось.

в) Пусть прямые AO_A и CO_C пересекаются в точке D (см. рис. 7) Рассуждая аналогично пункту а), получим, что $\angle KCO_C = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle ADC = \alpha + \gamma = 180^\circ - \angle ABC$, значит, точка D лежит на окружности, описанной около ABC. Учитывая, что $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$, а $\angle DAC = 90^\circ - \gamma$, получим, что $BD \perp AC$, то есть высота треугольника ABC лежит на прямой BD.

8. Проведем высоты BK и CN треугольника ABC, тогда, так как $AO \perp NK$, то утверждение задачи равносильно тому, что $DM \perp NK$ (см. рис. 8). Заметим, что $DE \parallel CN$ и $DF \parallel BK$, значит, точки E и F — середины отрезков BN и CK соответственно. Пусть T — середина NK, тогда $DETF$ — параллелограмм, поэтому точка M лежит на его диагонали DT. Кроме того, $DN = \dfrac{1}{2} BC = DK$, то есть треугольник NDK — равнобедренный. Следовательно, его медиана DT является высотой. Тем самым, $DM \perp NK$, что и требовалось.

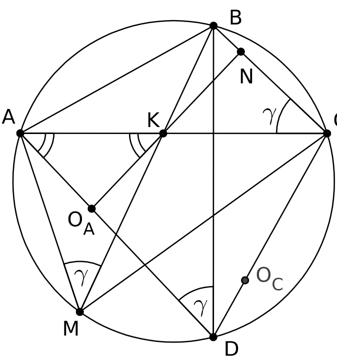


Рис. 7

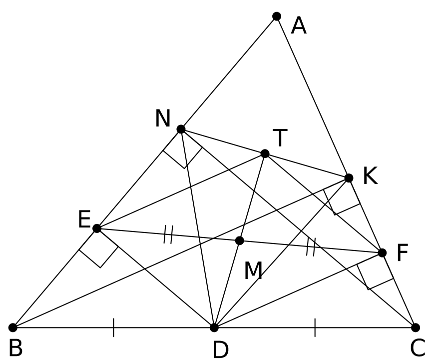


Рис. 8

9. Проведем $ID \perp AC$ и докажем, что точки O, I и D лежат на одной прямой (см. рис. 9). Действительно, угол OII_C между радиусом и стороной равен $90^\circ - \angle I_C I_A I$. С другой стороны, $\angle CID = 90° - \angle ICD$. Так как биссектрисы внутреннего и внешнего угла треугольника перпендикулярны, то точки A, C, I_A и I_C лежат на одной окружности, значит, $\angle I_C I_A I = \angle ICD$. Следовательно, $\angle OII_C = \angle CID$. Так как точки I_c, I и C лежат на одной прямой, то O, I и D также — на одной прямой, то есть $OI \perp AC$. Существуют и другие решения. *В частности, можно доказать, что эта задача эквивалентна следующему утверждению: «В остроугольном треугольнике ABC: H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1, O — центр описанной окружности, O — центр окружности, описанной около треугольника AHC. Тогда $OH \perp A_1C_1$». Эта эквивалентность следует из того, что H — центр вписанной окружности ортотреугольника $A_1B_1C_1$, а точки A, B и C — центры его вневписанных окружностей.*

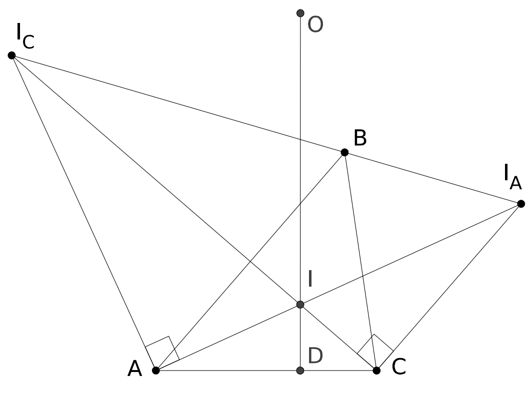


Рис. 9

10. Пусть α, β и γ — углы треугольника ABC. Из условия задачи следует, что $\angle ABD = 180^\circ - \beta$, $\angle ACD = 180^\circ - \gamma$, поэтому углы, смежные с углами ABD и ACD равны β и γ соответственно (см. рис.). Тогда перпендикуляры к прямым AB и AC, восставленные соответственно в точ-

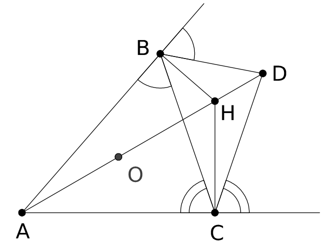


Рис. 10

ках B и C, являются биссектрисами треугольника BCD. Пусть H — их точка пересечения, тогда DH — биссектриса угла BDC.

Так как $\angle ABH = \angle ACH = 90^\circ$, то точка H лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, значит, $\angle BAH = \angle BCH = 90^\circ - \gamma = \angle BAO$, так как BAO — это угол между радиусом и стороной. Следовательно, точка O лежит на отрезке AH. Так как $\angle CBD = 180^\circ - 2\beta$, $\angle CBD = 180^\circ - 2\gamma$, то $\angle BDC = 180^\circ - 2\alpha$. Тогда

$$\angle BAH + \angle ABD + \angle BDH = 90^\circ - \gamma + 180^\circ - \beta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ,$$

поэтому точка H лежит на отрезке AD. Таким образом, точка O лежит на отрезке AD, что и требовалось. *Отметим, что треугольник BCD подобен ортотреугольнику треугольника ABC, что также можно было использовать при решении задачи.*

Поиск информации по вопросам преподавания математики и электронная библиотека «Математическое образование»

В.М. Бусев,
г.Москва
vbusev@yandex.ru

За последние примерно 15 лет в русскоязычном интернете появилось достаточно много сайтов, на которых размещены электронные версии печатных изданий, связанных с преподаванием математики. Часть из этих сайтов является профильными (math.ru, mathesis.ru, kvant.ras.ru, vofem.ru и др.), часть включает литературу и по другим отраслям знаний (publ.lib.ru, nehudlit.ru и др.). В совокупности эти сайты содержат значительное количество книг и журналов по элементарной и высшей математике, по методике преподавания и истории математики — несколько тысяч изданий.

Как пользователь может найти эти издания? Если он знает автора или заглавие, то может запросить одну из поисковых систем (Яндекс, Google) и получить в ответ набор ссылок, которые приведут его к искомому изданию.

Однако потребности пользователя часто не ограничиваются поиском конкретных изданий. Ведь на самом деле люди ищут не книги, а *информацию*; и когда пользователь ищет некую книгу, то это означает лишь то, что ему заранее известен факт наличия искомой информации именно в данной книге.

Как быть, если пользователь не знает, в каких изданиях есть то, что он ищет? Универсальные поисковые системы в этом случае помочь практически не могут, ведь они ищут по сайтам в целом, в том числе, по тем, где книг вообще нет. В ответ на запросы типа «комплексные числа» они выдают ссылки на различные онлайн-учебники, конспекты, шпаргалки — но не на книги и их части, не на журналы и не на статьи. Понятно, что поисковики не помогут ответить и на многие другие вопросы, например: «Что опубликовано в СССР по проблеме ошибок учащихся по алгебре?»

Очевидно, что на подобные вопросы должны отвечать не универсальные поисковые системы, а поисковые системы сайтов — электронных библиотек. Однако на практике это наблюдается редко: системы поиска и навигации большинства таких сайтов развиты слабо; пожалуй, наиболее мощная система поиска реализована на сайте журнала «Квант» (указать авторов и тематический рубрикатор статей по математике). На других же сайтах возможности обычно ограничиваются поиском издания по автору и заглавию.

Отсутствие удобных поисковых систем для поиска публикаций неудивительно: ведь эффективность поиска тесно связана с характером оцифровки изданий и ее качеством, а это в свою очередь прямо влияет на стоимость подготовки информации. (Немаловажно и то, что далеко не все владельцы сайтов понимают, что нужна какая-то специальная поисковая система.)

Для целей поиска недостаточно лишь отсканировать издание и разместить сканы на сайте, снабдив их простейшими атрибутами вроде автора, заглавия и года издания. Необходимо представлять в символьном виде структуры книг (для навигации внутри издания и поиска); нужна специальная работа по формированию структур периодических зданий и предметному индексированию публикаций; наконец, желательно иметь распознанные и хотя бы бегло вычитанные тексты (в том числе, для изданий в старой орфографии), чтобы реализовать полнотекстовый поиск. Добавим сюда потребность в специальном программном обеспечении для функционирования сайта (существующие типовые решения, конечно, не могут учесть электронно-библиотечной специфики) и наличие технологии подготовки информации.

Таким образом, повышение эффективности поиска информации предполагает решение ряда достаточно сложных технических, технологических и содержательных вопросов, а также ведет к значительному удорожанию подготовки информации (оцифровка становится примерно в 7 раз дороже сканирования с минимальной обработкой изображений). Поэтому в интернете отсканировано и размещено довольно много разных материалов, но поиск в этих массивах затруднен, особенно для неподготовленного пользователя (который не знает, где примерно искать).

Это обстоятельство делает актуальной создание специальной информационной системы — электронной библиотеки, которая не только накапливала бы электронные версии изданий по математическому образованию, но и предоставляла пользователю достаточно широкие возможности для поиска.

Такая библиотека была разработана под руководством автора настоящей статьи и открыта в ноябре 2017 года (http://www.mathedu.ru/). Охарактеризуем ее кратко.

Целевая аудитория библиотеки: учителя математики; преподаватели, студенты и аспиранты педвузов; родители и учащиеся; историки науки и образования.

Задачи библиотеки:

- сохранение и актуализация методического наследия и лучших образцов популяризации математики;
- предоставление свободного доступа к информации, необходимой для учебы, преподавания, научной работы;
- подготовка материалов для изданий историко-методического характера (собраний сочинений, сводных указателей, энциклопедий, библиографий).

Особенности библиотеки:

- ориентация на достаточно широкую аудиторию;
- разнообразие видов материалов и тематики;
- продуманный отбор информации;
- наличие системы разделов и указателей (авторов и др.);
- представление наряду с изображениями страниц изданий распознанных и вычитанных текстов и поиск по ним;
- удобный просмотрщик для работы с изданиями;
- высокое качество подготовки информации;
- регулярное пополнение;

- системная работа с современными авторами с целью размещения их трудов в электронной библиотеке;
- наличие сопутствующих разделов справочно-информационного характера (биографии педагогов, новости математики и образования).

Остановимся на некоторых пунктах подробнее.

Разделы. Издания в библиотеке распределены по 4 основным разделам: «Книги», «Периодика», «Диафильмы» и «Авторефераты» (пополнения отражаются в разделе «Поступления»). Деление материалов по разделам позволяет осуществить «грубый» поиск изданий: например, быстро найти все школьные учебники геометрии.

Указатели. Для более тонкого поиска публикаций реализованы указатели «Авторы», «Ключевые слова», «Персоны» и «Хронология. Указатели авторов и хронологический формируются автоматически по формальным признакам публикаций, другие два указателя требуют предварительной работы по ручному индексированию материалов. Отметим, что индексируются не только издания целиком, но и их сравнительно большие поименованные фрагменты — главы и параграфы, а также, разумеется, статьи.

Полнотекстовый поиск. В библиотеке реализован стандартный поиск Яндекса (site.yandex.ru) с возможностью ограничения поиска по видам изданий (т. е. можно искать отдельно в журналах, учебниках, диафильмах и т. п.). Также имеется возможность искать только по спискам литературы — прикнижным библиографиям и отдельным библиографическим указателям.

Просмотр изданий осуществляется с помощью специального интерфейса, который позволяет: а) перемещаться по структуре издания, б) переходить от изображений страниц (сканов) к символьному тексту страницы и обратно, в) масштабировать страницы, поворачивать их, переходить в двухстраничный режим просмотра (разворотами), г) проводить поиск в тексте издания с навигацией по результатам поиска.

Справочники. Этот раздел сайта не относится к электронной библиотеке, но связан с ней гиперссылками. Каждый справочник представляет собой набор справок об объектах одной природы (например, о персонах). В настоящее время доступен справочник «Педагоги-математики», включающий около 250 персоналий. Впоследствии предполагается создать справочники организаций, интернет-ресурсов, понятий из области математического образования.

Кроме электронной библиотеки и справочников сайт содержит ленту новостей из мира математики и математического образования (отражаются преимущественно события общероссийского и мирового масштаба).

На данный момент в электронной библиотеке размещено более 500 различных видов материалов общим объемом более 40 тыс. страниц. Сайт пополняется еженедельно.

Подробнее о библиотеке можно прочесть на сайте, а также в статье «Образовательные электронные библиотеки по математике: история, состояние, перспективы развития», опубликованной в 14-м сборнике «Архимед» (М., 2018).

Экстремальные задачи
(по материалам олимпиад НИЯУ МИФИ)

А.В. Иванищук,
Университетский лицей 1511
предуниверситария НИЯУ
МИФИ, г.Москва
ivanishuk@mail.ru

Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, … и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.

П.Л. Чебышев

НИЯУ МИФИ проводит физико-математические олимпиады памяти И.В. Савельева, И.В. Курчатова, которые являются отборочными турами к отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», входящей в Перечень олимпиад школьников. Основная цель олимпиады «Росатом» — выявление одаренных школьников, которые интересуются инженерно-физическими специальностями, способны к техническому творчеству. Этой цели, как нельзя лучше, удовлетворяют экстремальные задачи, широко представленные во многих разновидностях тем заданий олимпиад и спектре сложности. В этих задачах, как правило, требуется построить математическую модель процесса, задать характеристическую функцию и исследовать ее либо методами математического анализа, либо с помощью классических неравенств, либо геометрическими методами. Поскольку олимпиады, в основном, проводятся в старших классах и пишутся абитуриентами, то часто задачи «оснащаются» дополнительными вводными вопросами, позволяющими узнать уровень знаний в смежных областях. Ниже приведены избранные задачи последних 5–7 лет проведения олимпиад НИЯУ МИФИ.

1. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=(x-7\pi)^2+\dfrac{1}{3}$ на множестве решений уравнения $\cos x=\sqrt{1-\dfrac{\sin x}{2}}$. Найдите решение, на котором оно достигается.

Решение. Уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ \cos^2 x=1-\dfrac{\sin x}{2},\end{cases}$ которая дает решения $\left[\begin{array}{l} x=2\pi n,\, n\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\, k\in Z.\end{array}\right.$ Графиком квадратичной функции $f(x)=(x-7\pi)^2+\dfrac{1}{3}$ является парабола с ветвями, направленными вверх и точкой минимума $x=7\pi$. Наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве решений заданного уравнения будет на том решении, которое ближе всего находится к числу 7π. Это $x=6\pi+\dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $f_{\min}=\dfrac{25\pi^2+12}{36}$ при $x=\dfrac{37}{6}\pi$.

2. Величина $\dfrac{1-4x}{x}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x>0$. Найдите наименьшее возможное при этом условии, значение первого члена прогрессии.

Решение. Обозначим через $b_1(x)$ первый член рассматриваемой геометрической прогрессии. При этом согласно условию задачи, ее знаменатель x положителен и меньше 1. Из формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии находим, что $b_1(x)=\dfrac{(4x-1)(x-1)}{x}$. $b_1'(x)=\dfrac{4x^2-1}{x^2}=\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$. Очевидно, что в области $0<x<1$ производная $b_1'(x)$ вначале отрицательна, при $x=\frac{1}{2}$ равна 0, затем принимает положительные значения.

Значит, при $x=\frac{1}{2}$ функция $b_1(x)$ принимает наименьшее значение. Это значение $b_1\left(\frac{1}{2}\right)=-1$.

Ответ: минимальное значение $b_1(x)$ достигается при $x=\frac{1}{2}$ и равно -1.

3. К графику функции $f(x)=\sin x$ в точках с абсциссами $x=t$ и $x=t+\frac{\pi}{2}$ проведены касательные. Найдите наибольшую и наименьшую величину угла между этими касательными.

Решение. В уравнениях касательных коэффициенты при *x* будут $\cos t$ и $-\sin t$. По известной формуле $\operatorname{tg}(l_1, l_2)(t)=\left|\frac{\cos t+\sin t}{1-\cos t\sin t}\right|$. Можно считать производную подмодульного выражения непосредственно, но можно и ввести переменную

$$z=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),$$

выражение через которую

$$\operatorname{tg}(l_1, l_2)(t)=\operatorname{tg}(l_1, l_2)(z)=\left|\frac{z}{1-\frac{z^2-1}{2}}\right|=\left|\frac{2z}{3-z^2}\right|,$$

где $z\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Функция $\varphi(z)=\frac{2z}{3-z^2}$ является нечетной и имеет положительную производную $\varphi'(z)=\frac{2(z^2+3)}{(3-z^2)^2}$. Наименьшее значение угла равно 0, а наибольшее — $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$.

Ответ: Наименьшее значение угла равно 0, а наибольшее — $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

4. Основанием конуса высоты h является круг радиуса 2, а вершина конуса проектируется на плоскость основания в точку, отстоящую от центра этого круга на расстоянии, равном 12. Найдите максимальную величину площади сечения конуса плоскостью, проходящей через самую короткую образующую конуса. Решите задачу, если 1) $h=9$, 2) $h=11$.

Решение. Пусть $x \in [0;4]$ — длина хорды пересечения основания конуса секущей плоскостью. Тогда площадь сечения $S(x)=\frac{1}{4}x\sqrt{4h^2+400-25x^2}$. Производная $S'(x)=\frac{h^2+100-12{,}5x^2}{\sqrt{4h^2+100-25x^2}}$ обращается в ноль на неотрицательной полуоси при $x=\sqrt{\frac{2(h^2+100)}{25}}$. При 1) $h=9$ это значение меньше 4 и является точкой минимума функции; при 2) $h=11$ это значение больше 4. Производная сохраняет на отрезке $[0;4]$ положительный знак. Площадь сечения будет принимать наибольшее значение при $x=4$.

Ответ: 1) при $h=9$ $S_{\max}=18{,}1$; 2) при $h=11$ $S_{\max}=22$.

5. Найдите наименьший возможный диаметр круга на плоскости, которому принадлежат все точки M с координатами $(x;y)$ — решениями системы уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ 2x^2-4xy+3y^2=17. \end{cases}$

Решение. Система является однородной второго порядка. Чтобы совпали правые части, домножим первое уравнение на 17, второе — на 16. Приравняв левые части, получим уравнение-следствие $15x^2-64xy+65y^2=0$. Отсюда 1) $3x=5y$; 2) $5x=13y$. Объединяя каждое из этих соотношений, например, с первым уравнением системы, уже подстановкой находим: $x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=-5$, $y_2=-3$; $x_3=\frac{13}{3}$, $y_3=\frac{5}{3}$; $x_4=-\frac{13}{3}$, $y_4=-\frac{5}{3}$. Найдем наименьший радиус круга на плоскости, содержащего точки $M_1(5;3)$, $M_2(-5;-3)$, $M_3\left(\frac{13}{3};\frac{5}{3}\right)$, $M_4\left(-\frac{13}{3};-\frac{5}{3}\right)$. Заметим, что фигура $M_1M_3M_2M_4$ имеет диагонали M_1M_2 и M_3M_4, делящиеся пополам началом координат, то есть $M_1M_3M_2M_4$ — параллелограмм, у которого диагональ $M_1M_2 = 2\sqrt{34}$ больше диагонали $M_3M_4 = \frac{2\sqrt{194}}{3}$. Значит, M_1M_2 является диаметром искомого круга.

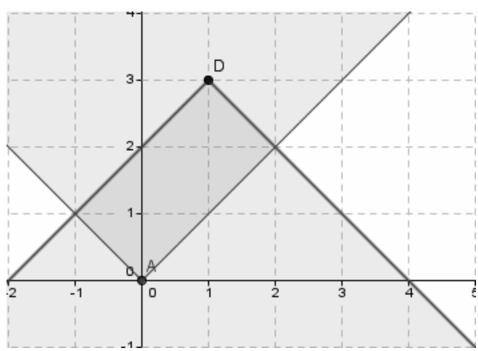
Ответ: наименьший возможный диаметр круга равен $2\sqrt{34}$.

6. Решения $(x;y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} y \geq |x|, \\ y - 4 - \sin\varphi \leq |x - 1 - \cos\varphi| \end{cases}$$

являются координатами точек множества $D(\varphi)$ на плоскости. Докажите, что это множество прямоугольник. При каком значении φ прямоугольник $D(\varphi)$ является квадратом? При каком значении φ диагональ $D(\varphi)$ имеет максимально возможную длину?

Решение. Границами областей, заданных неравенствами, будут прямые с коэффициентами ± 1, поэтому они будут перпендикулярны между собой. Вершина D имеет координаты $(1+\cos\varphi; 4+\sin\varphi)$.

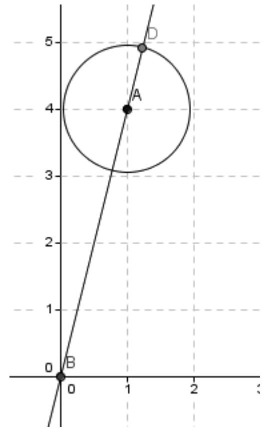


При любых значениях φ $x_D \in [0;2]$, $y_D \in [3;5]$. Значит, точка D лежит выше графика $y = |x|$, и область $D(\varphi)$ является прямоугольником. (Нахождение значения φ, при котором этот прямоугольник является квадратом не входит в тему статьи.) Квадрат его диагонали

$$d^2(\varphi) = (1+\cos\varphi)^2 + (4+\sin\varphi)^2 = 18 + 2(\cos\varphi + 4\sin\varphi) =$$

$$= 18 + 2\sqrt{17}\cos(x - \operatorname{arctg} 4).$$

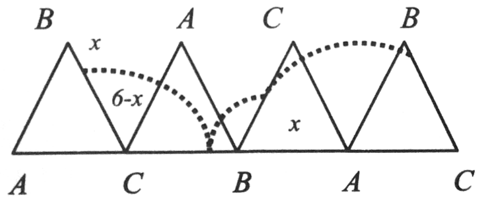
Максимально возможное значение длины диагонали достигается при $\varphi = \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n,\ n \in Z$.



Нахождение этого значения возможно и без вычисления длины диагонали. Заметим, что точка D имеет координаты, удовлетворяющие уравнению $(x-1)^2+(y-4)^2=1$, то есть она лежит на единичной окружности с центром $A(1;4)$. Наиболее удаленная от начала координат точка лежит на прямой, проходящей через начало координат и центр окружности. Эта прямая наклонена к положительному направлению оси абсцисс под углом $\operatorname{arctg} 4$.

Ответ: диагональ $D(\varphi)$ имеет максимально возможную длину при $\varphi = \operatorname{arctg} 4 + 2\pi n,\ n \in Z$.

7. «Колесо» имеет форму правильного треугольника ABC со стороной 6, центр колеса совпадает с центром треугольника. Колесо «катится» по горизонтальной поверхности без скольжения. В начальный момент колесо «лежит» на стороне AC. На внешней стороне колеса, в точке M отрезка BC сидит муха. Колесо совершает полный оборот. Какой наименьший при этих условиях путь может проделать муха?



Решение. Пусть $BM = x \in [0; 6]$. Тогда

$$S(x)=\frac{2\pi}{3}\left((6-x)+x+\sqrt{x^2-6x+36}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(6+\sqrt{x^2-6x+36}\right).$$

Наименьшее значение достигается при $x=3$.

Ответ: $S_{\min} = S(3) = 2\pi(2+\sqrt{3})$.

8. (8 класс) Лист бумаги имеет форму равностороннего треугольника со стороной 6. (Еще варианты: Равнобедренный треугольник с площадью 16, прямоугольник со сторонами 4 и 5.) Лист перегибают по прямой и разглаживают на столе. Найдите наименьшее возможное значение площади полученной фигуры. Ответ обоснуйте.

Решение. Наименьшая площадь фигуры получится в случае, когда треугольник перегибают по оси симметрии (по высоте треугольника). В результате получится треугольник, площадь которого в два раза меньше площади первоначального. Если перегибать треугольник по прямой другого вида, то эта прямая разделит треугольник либо 1) на две части неравной площади, то есть площадь какой-либо части будет больше половины площади исходного треугольника, и, поэтому площадь полученной фигуры будет не меньше площади большей части; либо 2) площади обеих частей равны, но перегиб не является осью симметрии, поэтому объединение частей будет иметь площадь больше половины площади исходного треугольника.

Ответ: $4{,}5\sqrt{3}$.

9. Общий призовой фонд турнира по волейболу не менее 37 тыс. руб. Из него выплачиваются командам деньги купюрами по 1 тыс. руб. по следующему правилу. Команда, занявшая 1 место, получает половину фонда и еще 0,5 тыс. руб.; вторая команда — половину оставшихся денег и еще 0,5 тыс. руб.; третья — половину остатка и еще 0,5 тыс. руб. и т.д. Известно, что после выдачи денег в кассе осталось не более 4 тыс. руб. Какое минимальное число команд могло участвовать в турнире по этим правилам? Сколько при этом было денег в фонде, и сколько получила каждая команда, если известно, что купюры не разменивались?

Решение. Пусть призовой фонд $x \geq 37$ тыс. руб. Тогда выплаты командам купюрами по 1 тыс. руб. составят:

За 1 место	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ тыс. руб.

За 2 место	$\frac{1}{2}\left(x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ тыс. руб.
За 3 место	$\frac{1}{2}\left(x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$ тыс. руб.
…	…

Пусть все выплаты турнира составят B тыс. руб., а N — число команд, участвовавших в турнире (по условию их количество минимально).

По условию $x-B\le 4$,

$$x-x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)\le 4,$$

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)\le 4,$$

$$2x-(x+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)\le 8,$$

$$2x-(x+1)\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}}\right)\le 8,$$

$x+1\le 10\cdot 2^{N-1}$, учитывая $x\ge 37$, $38\le x+1\le 10\cdot 2^{N-1}$.

Поскольку N минимально, то первое значение, удовлетворяющее неравенству $38\le 10\cdot 2^{N-1}$ будет $N=3$, тогда $38\le x+1\le 40$, а выплаты B составили:

$$B=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}(x+1)\le 40.$$

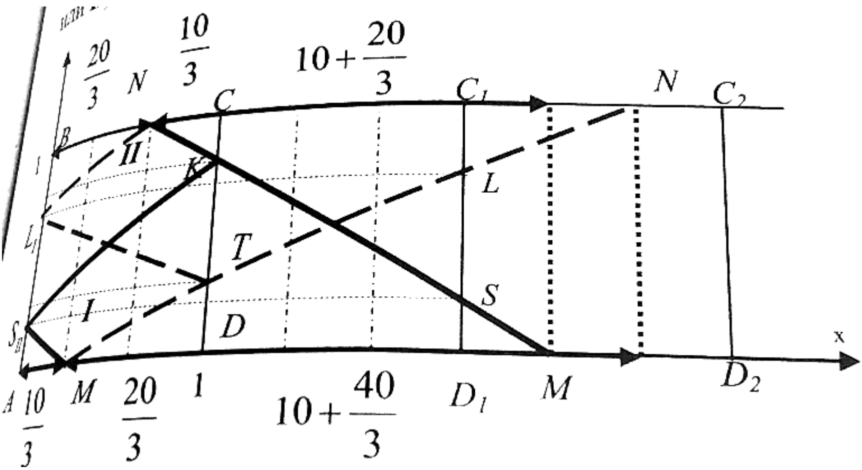
При выплатах использовались только купюры по 1 тыс. руб., значит, выражение $(x+1)\le\frac{40\cdot 8}{7}$ должно быть кратно 8.

Если $x+1=40$, то $x=39$, а все призовые выплаты $B=\frac{7}{8}(x+1)=35$, значит, $x-B\le 4$, то есть все условия выполнены.

Ответ: 3 команды, 39 тыс. руб. было в призовом фонде. Команды получили 20, 10 и 5 тыс. руб.

10. Поле имеет форму квадрата *ABCD* со стороной 10. Точки *M* и *N* расположены на сторонах *AD* и *BC* так, что $AM:MD=1:2$ и $BN:NC=2:1$. Проложите маршрут по полю так, чтобы 1) его начало находилось в точке *M*, а конец в точке *N*; 2) на маршруте есть точки, принадлежащие сторонам *AB* и *CD*; 3) его длина была минимально возможной. Найдите длину такого маршрута.

Решение. Длина маршрута *MN* (по полю) будет минимально возможной, если на «развертке» этот путь будет представлять собой отрезок *MN* (см. рис. путь I или II).



Длина MN ($T, C\in MN$) — путь I, по теореме Пифагора

$$MN_I=\sqrt{\left(\frac{70}{3}\right)^2+10^2}=\frac{10\sqrt{58}}{3}.$$

Длина MN ($S, K\in MN$) — путь II, по теореме Пифагора

$$MN_{II}=\sqrt{\left(\frac{50}{3}\right)^2+10^2}=\frac{10\sqrt{34}}{3}.$$

Значит, искомый путь — ломаная *MSKN*, где $AS = 2$, $CK = 2$.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{34}}{3}$**.**

Ниже приводятся несколько задач для самостоятельного решения.

1. Количество электроэнергии, потребляемой электровозом, пропорционально квадрату его скорости. При скорости 70 км/час он потребляет 1000 квт. за один час. Обслуживание электропоезда, без учета затрат на электроэнергию, составляет 1000 рублей за час пути. Стоимость 1 квт. составляет 4 рубля. Электровоз совершает перегон с постоянной скоростью. С какой скоростью должен двигаться электровоз, чтобы затраты на километр пути были минимальными?

2. Точки *M* и *P* — концы отрезка *MP* длины 2 — принадлежат кубу с ребром 3, включая поверхность. Найдите минимально возможное расстояние между серединой отрезка *MP* и вершинами куба.

3. Найдите наименьшее значение величины $a^2 + b^2 + c^2$, где $a \neq 0$, b и c — целые числа, для которых уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + 7 = 0$ имеет ровно два целых решения.

4. В основании пирамиды *SABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 4. Высота пирамиды $SO = 6$. Точка *O* принадлежит квадрату *ABCD*, включая границу. Найдите наибольший и наименьший возможный радиус описанного около пирамиды шара.

5. В основании треугольной пирамиды *SABC* расположен правильный треугольник *ABC* со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро *SA* перпендикулярно основанию и имеет длину $\sqrt{3}$. Точки *M* и *N* расположены на ребрах *AS* и *BC* так, что $AM : MS = 1 : 2$, $BN : NC = 1 : 3$. Найдите 1) расстояние между точками *M* и *N*, 2) наименьшую длину ломаной, лежащей на поверхности (полной) пирамиды, соединяющей точки *M* и *N*.

Актуальные задачи с суммой радикалов

В.Ю. Лупашевская,
Школа №218, г.Москва
vasilisa.lupashevskaya@gmail.com

Новые идеи, не опирающиеся на дополнительные теоретические сведения, следует вводить через задачи по схеме: задача — самостоятельный поиск решения — разбор её решения — выделение идеи.

И.Ф. Шарыгин

Актуальность темы

Так получилось, что в тот момент, когда появилось информационное сообщение о седьмой открытой школе-семинаре, я разбиралась вот с этими двумя задачами:

1.Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x+9)^2+y^2}$$

при условии, что $|x|+3|y|=6$. (Олимпиада «ПВГ», 2016).

2. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65+\log_a^2\cos ax-\log_a\cos^8 ax}+\sqrt{10+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^2 ax}+$$

$$+\sqrt{125+\log_a^2 \mathrm{tg} ax-\log_a \mathrm{tg}^{10} ax}$$

и все пары $(a;x)$, при которых оно достигается. (ДВИ МГУ, 2016).

Это и определило выбор темы доклада. После этого в книгах, журналах и в интернете начались поиски и отбор интересных задач с суммами радикалов.

То, что тема очень актуальна, подтвердилось 5 марта, когда состоялся очный тур олимпиады «Ломоносов-2017»:

3. Вычислите $\sqrt{n+508}+\sqrt{n}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное. («Ломоносов», 2017).

Введём обозначение $k=\sqrt{n+508}+\sqrt{n}$. По условию k — рациональное число. Покажем, что это число — натуральное. Так как $k(\sqrt{n+508}-\sqrt{n})=508$, число $\sqrt{n+508}-\sqrt{n}$ тоже рациональное. Но тогда рациональными числами являются и $\sqrt{n+508}$, и $\sqrt{n}$. А так как известно, что корень из натурального числа это либо иррациональное число, либо натуральное (он не может быть несократимой дробью), оба эти числа — натуральные.

Так как $508=2^2\cdot 127$, а 127 — простое число, то вариантов немного. Учитывая, что $k=\sqrt{n+508}+\sqrt{n}>\sqrt{508}+1$, вариантов всего три: $k=127$, $k=254$ и $k=508$. Перебрав их, убеждаемся, что ответ единственный: $k=254$; $n=126^2$.

Ответ: 254.

4.Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}=2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}+2.$$

(«Ломоносов», 2017).

В задачах с радикалами нередко используется тождество $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$.

В нашем случае можно действовать, например, так: умножив обе части уравнения на $\sqrt{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}=z$, получим квадратное уравнение $z^2=8+2z$. Умножив обе части уравнения на $\sqrt{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+4}}=t$, получим квадратное уравнение $2\sqrt{2}=2\sqrt{2}t^2+2t$.

А можно, используя то, что $2\sqrt{2}=zt$, записать исходное уравнение в виде $z=zt^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}zt$. Решая любое из этих трёх уравнений, мы найдём, что $z=4$, или то, что $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, а затем найдём $x=\dfrac{1025}{16}$.

Ответ: $\dfrac{1025}{16}$.

Полезные наблюдения за радикалами.

5. Решить уравнение

$$\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{4x-x^2-3}$$

(Химфак МГУ, 2001).

Выделяя полные квадраты в подкоренных выражениях, получим уравнение $\sqrt{4-(x-3)^2}+\sqrt{1-(x-3)^2}=3+\sqrt{1-(x-2)^2}$.

Левая часть уравнения $\sqrt{4-(x-3)^2}+\sqrt{1-(x-3)^2}\le 3$, а правая часть $3+\sqrt{1-(x-2)^2}\ge 3$. Единственный корень $x=3$.

Ответ: 3.

6. Решить уравнение

$$\sqrt{9x^2-24y-7}+\sqrt{9y^2-6x+23}=\sqrt{25+\sqrt{4-(x-y)^2-\frac{1}{x-y}-\frac{2}{\sqrt{x-y}}}}$$

(МИРЭА, 2007).

Полные квадраты в левой части уравнения выделить (пока) не получается. Обратим всё внимание на правую часть. Если $x-y=1$, она равна 5. Убедимся, что это действительно так. Обозначив $\sqrt{x-y}=t>0$, рассмотрим функцию $f(t)=t^4+\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}$. Конечно, можно исследовать её с помощью производной, но можно иначе, применив два раза известное неравенство:

$$f(t)=\left(t^4+\frac{1}{t^2}\right)+\frac{2}{t}\ge 2t+\frac{2}{t}\ge 4.$$

Равенство $f(t)=4$ возможно только при $t=\sqrt{x-y}=1$. Следовательно, $x-y=1$. Используя это соотношение, преобразуем исходное уравнение к виду $\sqrt{9x^2-24x+17}+\sqrt{9y^2-6y+17}=5$, а после выделения полных квадратов всё становится ясно:

$\sqrt{(3x-4)^2+1}+\sqrt{(3y-1)^2+16}=5$.

Ответ: $x=\frac{4}{3}$; $y=\frac{1}{3}$.

Монотонность

7. Сколько корней может иметь уравнение (относительно x) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+4}=\sqrt{3x+10}$? (Мехмат МГУ, 2001, устный экзамен).

Если $a<4$, то на области определения левая часть данного уравнения отрицательна, а правая — неотрицательна, корней в этом случае нет.

При $a=4$ получаем уравнение $0\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{3x+10}$, оно имеет единственный корень $x=-\dfrac{10}{3}$. Если же $a>4$, то умножив обе части уравнения на положительную величину $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+4}$, получим уравнение $a-4=\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+4}\right)\sqrt{3x+10}$, равносильное исходному. Функция $f(x)=\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+4}\right)\sqrt{3x+10}$ непрерывна и возрастает на своей области определения $x\geq-\dfrac{10}{3}$, причём $f\left(-\dfrac{10}{3}\right)=0<a-4$, а при достаточно больших значениях x — значения, большие, чем $a-4$. Следовательно, в этом случае корень ровно один.

Ответ: 0 или 1.

8. Решить уравнение $\sqrt{1+5x^2-2x^3}+\sqrt{2+3x^2+3x^3}=9\sqrt{x^3}$. (МИРЭА, 2006).

Убедившись, что $x=0$ не является решение данного уравнения, разделим обе части уравнения на $\sqrt{x^3}$. Получим уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x}-2}+\sqrt{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x}+3}=9$. Монотонная функция

$$f(t)=\sqrt{t^3+5t-2}+\sqrt{2t^3+3t+3}$$

только при $t=2$ принимает значение 9. Следовательно, единственный корень исходного уравнения, это $x=\dfrac{1}{2}$.

Начинаем искать экстремумы

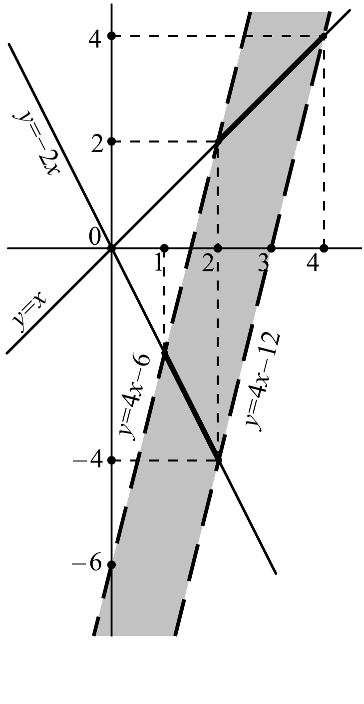
9. Определите, какое наименьшее значение может принимать выражение $|y-4x+6|+|4x-12-y|+\sqrt{y^2+xy-2x^2}$, и найдите суммарную длину линий, состоящих из всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, в которых это значение достигается. (Ф-т почвоведения МГУ, 2008).

Учитывая то, что $|a|\geq \pm a$, получаем оценку снизу:

$$|y-4x+6|+|4x-12-y|+\sqrt{y^2+xy-2x^2}\geq$$
$$\geq -(y-4x+6)-(4x-12-y)+0=6.$$

Этот минимум достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -6+4x-y\geq 0, \\ 12-4x+y\geq 0, \\ y^2+xy-2x^2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\leq 4x-y\leq 12, \\ (y-x)(y+2x)=0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x, \\ 2\leq x<4, \end{cases} \\ \begin{cases} y=-2x, \\ 1\leq x\leq 2. \end{cases} \end{array}\right.$$



Длина первого отрезка равна $2\sqrt{2}$, а второго — $\sqrt{5}$.

Ответ: 6; $2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sqrt{21-x^2+4x}-\sqrt{8-x^2+2x}.$$

(Черноморский филиал МГУ, 2002).

Здесь напрашивается выделение полных квадратов: $y=\sqrt{25-(x-2)^2}-\sqrt{9-(x-1)^2}$. Но что делать дальше, не ясно. Развить «успех» не получается, а то, что квадраты так хорошо выделяются, свидетельствует здесь лишь о том, что подкоренные выражения обращаются в нуль в целочисленных точках! Просто получаем, что $y=\sqrt{(7-x)(x+3)}-\sqrt{(4-x)(x+2)}$.

И.М. Гельфанд вспоминал, что в детстве, если у него не получалась какая-нибудь задача, он заглядывал в ответ, а уже зная ответ и по постановке задачи восстанавливал методы её решения. Может здесь это получится у вас?

Вот он, спасательный круг: $y_{\min}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$!

Но как этим ответом воспользоваться, совершенно не ясно!

Нам не остаётся ничего другого, как разобраться в авторском подходе к решению подобной задачи из параллельного варианта и применить его здесь!

Найдём область определения $y=\sqrt{(7-x)(x+3)}-\sqrt{(4-x)(x+2)}$:

$$\begin{cases}(7-x)(x+3)\ge 0,\\ (4-x)(x+2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 4\,.$$

На области определения $y(x)$ разность подкоренных выражений положительна:

$(21-x^2+4x)-(8-x^2+2x)=13+2x>0$, следовательно, $y>0$.

$$y^2=\left(\sqrt{(7-)(x+3)}-\sqrt{(4-x)(x+2)}\right)^2=$$

$$=-2x^2+6x-29-2\sqrt{(7-x)(x+3)}\cdot\sqrt{(4-x)(x+2)}\,.$$

Вот тут происходит неожиданное:

Так как на области определения

$$\sqrt{(7-x)(x+3)}\cdot\sqrt{(4-x)(x+2}=\sqrt{(7-x)(x+2)}\cdot\sqrt{(4-x)(x+3)}\,,$$

выражение, полученное для y^2 преобразуется к виду

$$y^2=\left(\sqrt{(7-x)(x+2)}-\sqrt{(4-x)(x+3)}\right)^2+3\,.$$

Теперь всё стало понятно!

$$y^2=\left(\sqrt{(7-x)(x+2)}-\sqrt{(4-x)(x+3)}\right)^2+3\geq 3\,.$$

Если $\sqrt{(7-x)(x+2)}=\sqrt{(4-x)(x+3)}$, то $y^2=3$. Единственный корень этого уравнения $x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y_{\min}=\sqrt{3}$.

Ответ: $y_{\min}=\sqrt{3}$.

Помогают неравенства

11. Решите уравнение $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}=3$.

Здесь нам поможет неравенство $ab\leq\dfrac{a^2+b^2}{2}$, справедливое при любых a и b:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{2-z^2}+z\sqrt{3-x^2}\leq$$

$$\leq\frac{x^2+(1-y^2)}{2}+\frac{y^2+(2-z^2)}{2}+\frac{z^2+(3-x^2)}{2}=3$$

Равенство возможно лишь при $x=\sqrt{1-y^2}$, $y=\sqrt{2-z^2}$, $z=\sqrt{3-x^2}$. Отсюда находим ответ: $x=1$, $y=0$, $z=\sqrt{2}$.

12. Числа x, y, z и t лежат в интервале $(0;1)$. Докажите неравенство

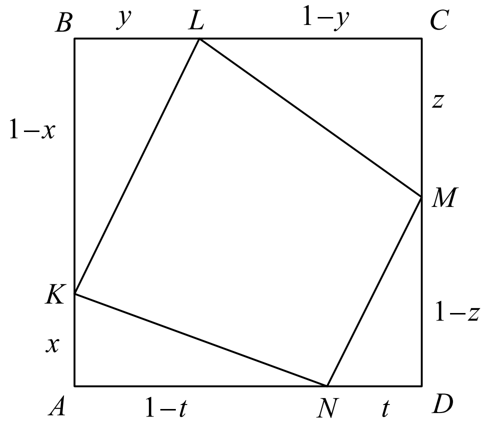
$$\sqrt{x^2+(1-t)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}+\sqrt{z^2+(1-y)^2}+\sqrt{t^2+(1-z)^2}<4\,.$$

Воспользуемся тем, что при $a>0$, $b>0$ выполняется неравенство $\sqrt{a^2+b^2}<a+b$.

Тогда $\sqrt{x^2+(1-t)^2}<x+1-t$, $\sqrt{y^2+(1-x)^2}<y+1-x$, $\sqrt{z^2+(1-y)^2}<z+1-y$, $\sqrt{t^2+(1-z)^2}<t+1-z$. Сложив эти четыре неравенства, получим требуемое соотношение.

Геометрические мотивы

Интересно геометрическое доказательство задачи **12**:



Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной 1. На его сторонах AB, BC, CD и DA отложим соответственно отрезки $AK=x$, $BL=y$, $CM=z$ и $DN=t$.

Тогда требуемое неравенство примет вид: $NK+KL+LM+MN<4$. По неравенству треугольника $NK<AK+AN$, $KL<BK+BL$, $LM<CL+CM$ и $MN<DM+DN$.

Сложив эти неравенства, получим, что

$$NK+KL+LM+MN<AB+BC+CD+DA=4.$$

Ломаная линия и отрезок

13.Решить систему уравнений

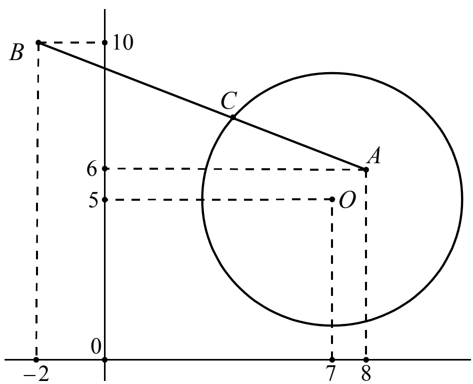
$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29}. \end{cases}$$

(ВМК МГУ, 1996).

Выделив полные квадраты, получим

$$\begin{cases}(x-7)^2+(y-5)^2=16,\\ \sqrt{(x-8)+(y-6)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2}=2\sqrt{29}.\end{cases}$$

Первое уравнение системы, это уравнение окружности с центром в точке $O(7;5)$ и радиусом, равным 4. А каков геометрический смысл выражения, стоящего в левой части второго уравнения? Задавая такой вопрос ученикам, нередко слышишь в ответ: «Уравнение окружности». Это не так, хотя и уже «тепло». Рассмотрим на плоскости три точки: $A(8;6)$, $B(-2;10)$ и $C(x;y)$. Расстояния между ними соответственно равны: $AB=2\sqrt{29}$, $AC=\sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}$ и $BC=\sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2}$. Получается, что $AB=AC+CB=2\sqrt{29}$, это возможно лишь в том случае, когда точка $C(x;y)$ принадлежит отрезку AB, иначе нарушается неравенство треугольника. Следовательно, решением второго уравнения является любая точка отрезка AB и нам остаётся найти координаты точки пересечения отрезка AB и окружности, заданной первым уравнением системы.



Подставив в первое уравнение системы уравнение отрезка AB: $y=10-\dfrac{2}{5}(x+2)$, где $-2\le x\le 8$, найдём ответ.

Ответ: $x=\dfrac{217-5\sqrt{415}}{29}$, $y=\dfrac{180+2\sqrt{415}}{29}$.

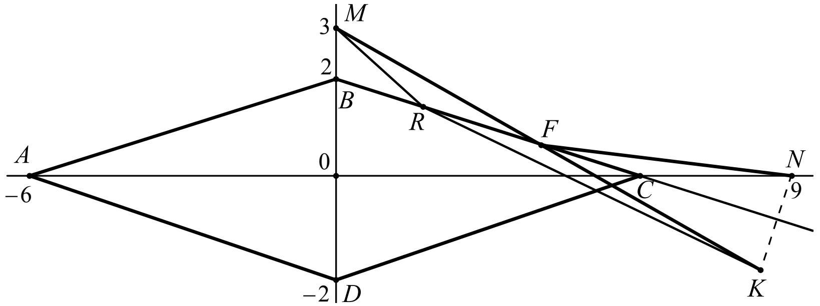
Наверняка, идея задачи **13** встречалась и раньше. Но именно после неё буквально хлынул поток подобных задач!

А. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-9)^2+y^2}$ при условии, что $|x|+3|y|=6$. (Олимпиада «ПВГ», 2016).

Уравнение $|x|+3|y|=6$ задаёт ромб $ABCD$, сторонам которого принадлежит точка $R(x;y)$.

$$\sqrt{x^2+(y-3)^3}+\sqrt{(x-9)^2+y^2}=MR+RN,$$

где $M(0;3)$ и $N(9;0)$, а точка F принадлежит отрезку BC и равноудалена от точек $M(0;3)$ и $N(9;0)$.



На рисунке показано, что

$$MR + RN = MR + RK \geq MF + FK = MF + FN .$$

Проделав не очень сложную техническую работу, вы найдёте координаты точки $F\left(\frac{21}{5}; \frac{3}{5}\right)$ и наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-9)^2 + y^2} = MF + FN = \sqrt{\frac{117}{5}} .$$

Б. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{65 + \log_a^2 \cos ax - \log_a \cos^8 ax} + \sqrt{10 + \log_a^2 \sin ax + \log_a \sin^2 ax} +$$

$$+ \sqrt{125 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax - \log_a \operatorname{tg}^{10} ax} .$$

и все пары $(a; x)$, при которых оно достигается. (ДВИ МГУ, 2016).

Должны выполняться ограничения $\begin{cases} \sin ax > 0, \\ \cos ax > 0. \end{cases}$ В этом случае $\operatorname{tg} ax > 0$ также определён. Обозначим $\log_a \sin ax = z$, $\log_a \cos ax = t$, тогда $\log_a \operatorname{tg} ax = z - t$.

В этих переменных исследуемое выражение приобретает менее пугающий вид

$$f(z,t) = \sqrt{65 + t^2 - 8t} + \sqrt{10 + z^2 + 2z} + \sqrt{125 + (x-t)^2 - 10(z-t)} .$$

Выделяя полные квадраты, получаем

$$f(z,t) = \sqrt{(t-4)^2 + 7^2} + \sqrt{(z+1)^2 + 3^2} + \sqrt{(z-t-5)^2 + 10^2} .$$

Наименьшее значение подобных выражений мы уже находили не раз. Переставив слагаемые, получим

$$f(z,t)=\sqrt{(t-4)^2+7^2}+\sqrt{(z-t-5)^2+10^2}+\sqrt{(z+1)^2+3^2}\ .$$

Рассмотрим на координатной плоскости четыре точки: $A(0;0)$, $B(t-4;7)$, $C(z-9;17)$ и $D(-10;20)$. Функция $f(z,t)$ — это длина ломанной *ABCD*, причём

$$AB=\sqrt{(t-4)^2+7^2}\ ,\ BC=\sqrt{(z-t-5)^2+10^2}\ ,\ CD=\sqrt{(z+1)^2+3^2}\ .$$

Так как $AB+BC+CD\geq AD=10\sqrt{5}$, наименьшее значение функции $f(z,t)=10\sqrt{5}$ будет достигнуто, если точки $B(t-4;7)$ и $C(z-9;17)$ будут принадлежать отрезку *AD*, причем точка *B* будет располагаться между точками *A* и *C*. Это выполнится, если

$$\begin{cases}\dfrac{t-4}{-10}=\dfrac{7}{20}\\ \dfrac{z-9}{10}=\dfrac{17}{20}\end{cases}\Leftrightarrow t=z=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos ax=\sin ax=\sqrt{a}\ .$$

Следовательно, $a=\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $10\sqrt{5}$, $a=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}+4\pi n,\ n\in Z$.

14. Найдите все значения параметра *p*, при которых имеет единственное решение неравенство

$$\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{x^2+p^2-24x-4\sqrt{3}p+156}+$$
$$+\sqrt{x^2+p^2-18x-22p+202}\leq 5\sqrt{3}+11$$

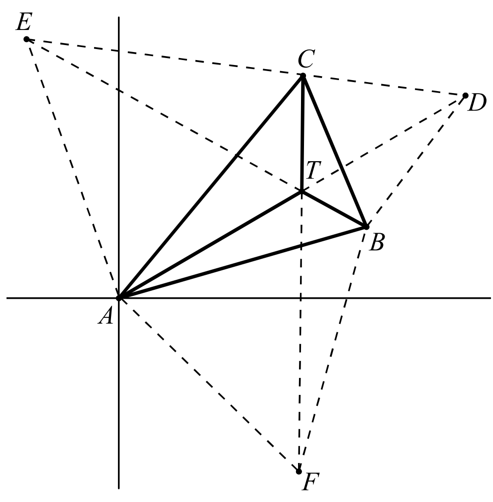
(ВШЭ, 2006).

Выделив полные квадраты, получим неравенство, левая часть которого напомнит нам задачи **1, 2** и **13**:

$$\sqrt{x^2+p^2}+\sqrt{(x-12)^2+(p-2\sqrt{3})^2}+\sqrt{(x-9)^2+(p-11)^2}\leq 5\sqrt{3}+11.$$

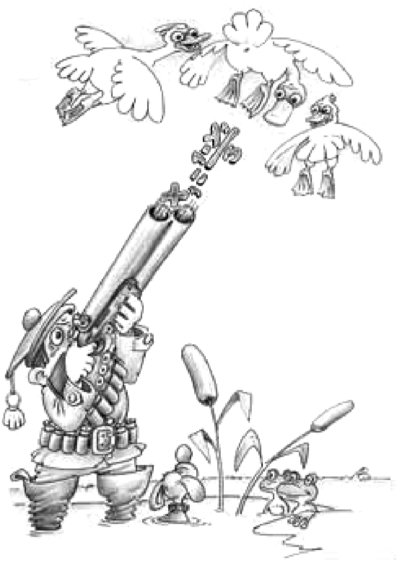
Но это совсем другая задача! Рассмотрим треугольник ABC, вершины которого имеют следующие координаты: $A(0;0)$, $B(12;2\sqrt{3})$, и $C(9;11)$.

Можно убедиться, что этот треугольник — остроугольный. Найдём координаты такой точки $T(x;\, p)$, чтобы сумма расстояний $TA+TB+TC$ была минимальна. Внутри треугольника, все углы которого меньше $120°$, существует единственная точка, из которой все стороны треугольника видны под углом $120°$. Это — точка Торричелли. Именно для неё сумма расстояний $TA+TB+TC$ минимальна. Можно с большой долей уверенности предполагать, что для нашего треугольника эта минимальная сумма как раз и будет равна $5\sqrt{3}+11$. Но как найти координаты точки $T(x;\, p)$?

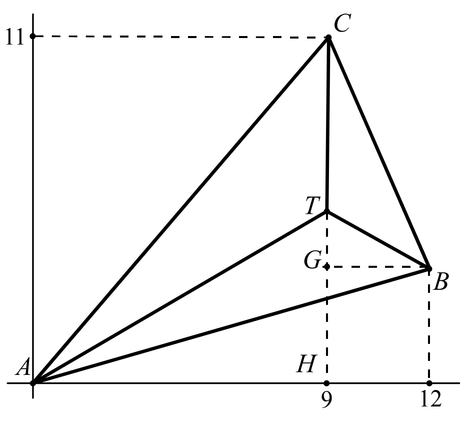


Если построить равносторонние треугольники ACE, BCD и ABF так, как показано на рисунке, то отрезки AD, BE и CF пересекутся как раз в точке Торричелли! Её координаты при необходимости можно бы и вычислить…

Но мы попробуем координаты точки $T(x;\,p)$ угадать. Всё же задачу составляли люди!



Зачем-то же они выбрали «неудобные» координаты для точки $B(12;\,2\sqrt{3})$?!



Попробуем искать точку T на перпендикуляре CH, опущенном из точки C на ось абсцисс. Пусть для неё, как для точки Торричелли $\angle ATC = 120°$. Тогда $\angle ATH = 60°$, а так как $AH = 9$, то $TH = 3\sqrt{3}$. Итак, выбранная нами точка имеет координаты $T(9; 3\sqrt{3})$.

Если сейчас окажется, что и $\angle ATB = 120°$, то это будет означать, что мы «попали» прямо в точку Торричелли!

Уже было отмечено, что $\angle ATH = 60°$. Убедимся, что и $\angle HTB = 60°$.

Опустим перпендикуляр BG на CH. Так как $BG = 3$, $TG = \sqrt{3}$, то $\operatorname{tg}\angle GTB = \sqrt{3}$. Следовательно, $\angle HTB = \angle GTB = 60°$. Точка Торричелли найдена! Её координаты $x = 9$, $p = 3\sqrt{3}$. Убеждаемся прямым вычислением, что $TA + TB + TC = 5\sqrt{3} + 11$.

Ответ: $x = 9$, $p = 3\sqrt{3}$,.

В докладе (05.05.2017) и в этой статье (с разрешения редакции журнала для старшеклассников и учителей «Потенциал») использовались рисунки замечательного художника Александра Васильевича Обухова.

(1950 – 2011)

Задача разделения секрета в криптографии и в олимпиадах по математике и криптографии для школьников

Т.М. Отрыванкина,
Лицей №8, г.Оренбург
Оренбургский государственный университет
otm.74@mail.ru

Применение методов криптографического преобразования данных является одним из эффективных средств обеспечения конфиденциальности, целостности и подлинности информации в процессе ее хранения, обработки и передачи по каналам связи. Поэтому в последние десятилетия во всем мире, в том числе и в России, криптография получила интенсивное развитие не только как прикладная, но и как фундаментальная наука. Всестороннее развитие криптографии на основе тесного взаимодействия со смежными областями науки и техники требует постоянного притока талантливой молодежи, проявляющей интерес к точным наукам и имеющей хорошие знания в математике, физике, информатике. [1]

Стало традицией ежегодное проведение в России Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии. Ее организаторами являются Академия ФСБ России, Академия криптографии Российской Федерации, Учебно-методическое объединение высших учебных заведений России по образованию в области информационной безопасности (УМО ИБ) при участии входящих в состав УМО ИБ вузов. Координацию организационного обеспечения проведения Олимпиады осуществляет Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России. Председатель оргкомитета Олимпиады — вице-президент Академии криптографии Российской Федерации В.Н. Сачков. Председатель методической комиссии олимпиады – вице-президент РАН В.В. Козлов. Олимпиада проводится для школьников 8–11 классов учреждений общего среднего образования и соответствующих категорий обучающихся начального и среднего профессионального образования на основе общеобразовательных программ соответствующих ступеней обучения. Олимпиада проходит в два тура — отборочный (в дистанционной форме) и заключительный (в очной форме). [2]

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии входит в Перечень олимпиад школьников, и успешное участие в ней дает льготы победителям и призерам при поступлении в государственные и муниципальные учреждения высшего профессионального образования. С одной стороны, в задачах олимпиады большая доля математических заданий, что содержательно роднит ее с математическими олимпиадами, с другой стороны — постановка задач специфическая, поэтому их нужно обсуждать с учащимися, чтобы учить видеть в новой формулировке «старую» и знакомую. Олимпиада важна и в другом качестве: она оказывает влияние на формирование регионального кадрового потенциала в сфере информационной безопасности. В частности, об этом шла речь на XV Всероссийском Симпозиуме по прикладной и промышленной математике. [3]

Задача разделения секрета очень подходит для знакомства с криптографией, для понимания значимости математики в решении фундаментальных проблем защиты информации. При этом она встречается в материалах олимпиад по криптографии для школьников [5, 6], что подчеркивает необходимость знакомства с ней. Постараемся это продемонстрировать в нашей статье.

В чем состоит задача разделения секрета (или ключа)? Почему ей уделяется такое внимание?

Распределение ключей — одна из фундаментальных задач криптографии с закрытым ключом. Проблема распределения состоит в том, что обе стороны защищенного обмена информацией должны располагать общим секретным значением. Как его передать, защитив от утечки?

Существует несколько путей решения указанной проблемы. Один из них — использование специальных протоколов распределения ключей, их рассмотрение не является предметом дальнейшего изложения. Другой — разделение ключа на фрагменты и передача их по разным каналам. [4]

У проблемы распределения есть и другой аспект: с ростом числа пользователей количество необходимых ключей возрастает квадратично. Действительно, при обслуживании n пользователей, обменивающихся закрытой информацией друг с другом, необходимо $\frac{n(n-1)}{2}$ разных секретных ключей. С ростом n возникает проблема генерации, хранения и управления огромным числом ключей. Например, для школы с 1000 учащихся нужно около пятисот тысяч секретных ключей.

Эта часть проблемы решается введением в систему коммуникации центра доверия (третьего лица, посредника, администратора). Тогда система с n пользователями требует только n ключей, которые необходимы для обращений к центру.

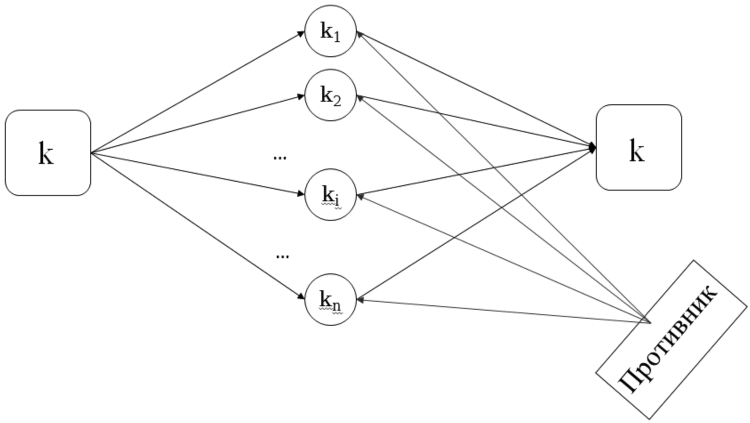
Теперь собственно о разделении секрета. Оно заключается в предоставлении секретной информации в виде набора равнозначных фрагментов, распределяемых среди участников. При этом полный набор фрагментов должен однозначно определять исходную информацию, а любое неполное их подмножество не должно давать возможности восстановить секрет.

Самый простой вариант состоит в расщеплении ключа на несколько частей с помощью операции сложения по модулю 2:

$$k = k_1 \oplus k_2 \oplus \ldots \oplus k_i \ldots$$

Каждая часть передается по своему каналу. Целесообразность этого решения бросается в глаза: для определения ключа нападающий должен суметь подключиться ко всем каналам сразу.

С другой стороны, если противнику удалось проникнуть в один из каналов, передающих части ключа, он может воспрепятствовать его законному восстановлению.



Более сложный метод, лишенный последнего недостатка, состоит в использовании одной из форм схемы порогового разделения секрета. Ключ, как и прежде, разделяется на несколько частей, например, N. Легальный пользователь сможет восстановить ключ полностью, получив некоторое количество этих частей, превышающее определенное пороговое значение T. Однако противник, выведав только ($T-1$) часть, не сможет вскрыть ключ.

Схема Шамира разделения секрета является классическим примером пороговой схемы. Предположим, что ключ k разделяется на N частей таким образом, что по T из них, собранных вместе, ключ однозначно восстанавливается. Схема с такими значениями называется (N, T) -пороговой схемой. Как она реализуется?

Берем простое число p, большее, чем $N+1$. Ключ k — элемент поля F_p (чтобы не использовать термин «поле», можно сказать про множество остатков по простому модулю p). Доверенное лицо выбирает значения $X_i \in F_p$, $i=1,...,N$ по одному для каждой части ключа. Каждый участник разделения секрета получает свое значение X_i, которое будет известно и всем остальным участникам. Для разделения ключа k между пользователями ответственное лицо выбирает $T-1$ элементов поля $a_1,...,a_{T-1}$ и строит многочлен

$$F(X)=k+\sum_{j=1}^{T-1} a_j X^j .$$

После этого вычисляются значения $y_i = F(X_i)$ при $1 \le i \le N$, и раздаются участникам разделения ключа (эти значения держатся в секрете).

Чтобы восстановить ключ, пользователи применяют процедуру интерполяции многочлена. Предположим, что L хранителей секрета собрались вместе и обменялись значениями y_i ($i = 1,...,L$). В этом случае они могут попытаться решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = k + a_1 X_1 + \ldots a_{T-1} X_1^{T-1}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ y_L = k + a_1 X_L + \ldots a_{T-1} X_L^{T-1}. \end{cases}$$

Если $L \ge T$, то система будет иметь единственное решение, которое позволит восстановить $F(X)$, а значит и ключ. Если же $L < T$, то система получится неопределенной и никак не поможет восстановить нужный многочлен. Таким образом, никакой информации о ключе k извлечь не удастся.

На практике применяется другой способ поиска k с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{u=1}^{k} f(i_u) \prod_{l=1,\, l \ne u}^{k} \frac{x - i_l}{i_u - i_l}.$$

Искомое значение ключа k —это $f(0)$, вычисляются коэффициенты $B_j = \prod_{1 \le \alpha \le T,\, \alpha \ne j} \dfrac{x_\alpha}{x_\alpha - x_j}$, и по ним восстанавливается ключ: $k = \sum_{j=1}^{T} B_j y_j$.

Таким образом, моделирование задачи и ее решение требуют следующих алгебраических знаний:

— понятие многочлена;

— понятие системы линейных алгебраических уравнений;

— вычисление значения многочлена в точке;

— восстановление многочлена по точкам;

— методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

В объеме школьной программы учащиеся владеют такими знаниями. Важно и полезно показать им, как данные математические сведения работают в решении криптографических проблем.

Приведем пример решения задачи по теме «*Пороговая схема Шамира*».

Пусть количество участников деления $N = 5$, порог $T = N - 1 = 4$, ключ $k = 7$, простое число $p = 11$. Составим многочлен 3-й степени, имеющий вид $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $d = k$, $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$ — случайно выбранные коэффициенты, не превышающие $p - 1 = 10$.

Итак, $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 7$. Найдем доли секрета:

$x_1 = 1$	$y_1 = 3 + 6 + 9 + 7 = 25 \ (\bmod 11) = 3$	$k_1 = (1, 3)$
$x_2 = 2$	$y_2 = 24 + 24 + 18 + 7 = 3 \ (\bmod 11) = -4$	$k_2 = (2, -4)$
$x_3 = 3$	$y_3 = 81 + 54 + 27 + 7 = 169 \ (\bmod 11) = 4$	$k_3 = (3, 4)$
$x_4 = 4$	$y_4 = 192 + 96 + 36 + 7 = 331 \ (\bmod 11) = 1$	$k_4 = (4, 1)$
$x_5 = 5$	$y_5 = 375 + 150 + 45 + 7 = 577 \ (\bmod 11) = 5$	$k_5 = (5, 5)$

В общем случае искать значения многочлена нужно по схеме Горнера.

Для определения ключа k нам достаточно любых четырех значений k_i. Возьмем первые четыре из пяти полученных нами значений и поочередно подставим значения x и y в многочлен вида $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3 = a + c + b + d, \\ -4 = 8a + 4b + 2c + d, \\ 4 = 5a + 9b + 3c + d, \\ 1 = -2a + 5b + 4c + d. \end{cases}$$

Решать ее можно традиционно — подстановкой или сложением. Можно — в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & -4 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 3 & 7 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right).$$

Так как задачу решаем по модулю 11, то $9d = 11t - 3$, откуда $t = 6$ $d = 7$.

Мы получили ключ $k = 7$, равный исходному значению.

Теперь решим эту задачу, используя интерполяционный многочлен Лагранжа. Считая, что ключ восстанавливается по первым четырем из пяти фрагментов, получим:

$$B_1 = \frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot\frac{4}{4-1} = 4, \quad B_2 = \frac{1}{1-2}\cdot\frac{3}{3-2}\cdot\frac{4}{4-2} = -6,$$

$$B_3 = \frac{1}{1-3}\cdot\frac{2}{2-3}\cdot\frac{4}{4-3} = 4, \quad B_4 = \frac{1}{1-4}\cdot\frac{2}{2-4}\cdot\frac{3}{3-4} = -1,$$

$$k = 4\cdot 3 + (-6)\cdot(-4) + 4\cdot 4 + (-1)\cdot 1 \,(\mathrm{mod}\, 11) = 7.$$

Мы получили ключ $k = 7$.

Прежде, чем привести примеры олимпиадных задач по указанной тематике, отметим, что существуют различные схемы разделения секрета. Схема Асмуса-Блума, схема Карнина-Грина-Хеллмана, разделение секрета с лгунами, разделение секрета без посторонней помощи, разделение секрета без раскрытия частей, подтверждаемое разделение секрета, схема разделения секрета с мерами предупреждения, разделение секрета с вычеркиванием из списка, векторная схема, визуальная схема и др. Все они интересны для изучения, анализа, сравнения. Возможно, кто-то займется этими вопросами в будущем на студенческой скамье. А может, кто-то еще в школе выполнит некую проектную работу, например, по схеме с лгунами или по визуальному разделению секрета.

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии не только имеет многолетнюю историю, по ее материалам выпущена книга [5].

Задача 1 (XX Олимпиада по математике и криптографии).

Для открытия подземелья в Волшебной стране надо правильно назвать три целых числа *a, b, c,* служащих коэффициентами квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Представителям четырех рас были переданы следующие значения функции: троллям — значение $f(21)$, эльфам — $f(24)$, гномам — $f(25)$, оркам — $f(28)$. Когда представители рас встретились, чтобы найти *a, b, c* и открыть подземелье, один из представителей, чтобы сорвать мероприятие, предъявил неверное значение. Выясните, кто это был, если известно, что тролли предъявили число 273, эльфы — 357, гномы — 391, орки — 497.

Так важная, но не слишком увлекательная задача восстановления квадратичной функции по точкам дает возможность обсудить схемы разделения, в том числе с лгунами. А обнаружение мошенника осуществляется с помощью условия $(f(x_1) - f(x_2)) \vdots (x_1 - x_2)$, если x_1 и x_2 — целые числа.

Задача 2 (XXVI Олимпиада по математике и криптографии, отборочный тур, 9 класс)

Абоненты A, B и C используют следующую схему разделения секрета: общий секретный ключ — коэффициенты (a, b, c) $a, b, c \in Z$. Каждый абонент знает координаты ровно одной точки, принадлежащей параболе $y = ax^2 + bx + c$. Абонент A — точку $(-5, 12)$, абонент B — $(2, 5)$. Абоненты A и B вступили в сговор и решили восстановить общий секретный ключ. Причем им известно, что абсцисса вершины параболы — наименьшее по модулю ненулевое целое число при заданных точках абонентов *A* и *B*. Найдите секретный ключ. В ответе запишите число $a+b+c$.

Саратовский университет организовал собственную заочную олимпиаду по криптографии, которая состоялась уже в 15-ый раз. Ее проводит кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии СГУ. Задачи тематически связаны как непосредственно с шифрами, так и с широко применяемыми в современной криптографии разделами алгебры, теории чисел, дискретной математики и лингвистики. [6]

Задача 3 (Четвертая заочная олимпиада по криптографии, четвертая серия задач).

Каждый из трех хранителей Печати *A*, *B*, *C* имеет свой секретный ключ — некоторое только ему известное число, соответственно *a*, *b*, *c*. Чтобы открыть сейф, где находится Печать, необходимо найти значение $f(a,b,c)$, где f — специально назначаемая для каждой такой акции функция. Сегодня наступил один из редких торжественных дней, и утром было сообщено, что $f(x,y,z)=xyz$. Составьте протокол (пошаговую последовательность действий участников), после выполнения которого *A*, *B*, *C* смогут открыть сейф, сохраняя в тайне свои личные ключи.

Следует сказать, что в некоторых регионах России проведение олимпиад в области информационной безопасности имеет уже давнюю историю. Лидерами по подготовке школьников к олимпиадам по математике и криптографии выступают не только школы Москвы и Санкт-Петербурга. Судя по списку призеров XXVI Олимпиады по математике и криптографии, опубликованному на сайте (http://cryptolymp.ru/cryptolymp/news/96988/), география участников очень широка.

В Оренбурге систематическая работа по подготовке школьников к подобным соревнованиям начата относительно недавно. Сама Олимпиада не была на слуху у педагогов школ и преподавателей вузов. Только некоторые школьники знали о ней из интернет-источников. В 2014 году Оренбургский государственный университет стал региональной площадкой Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии. Появление ОГУ среди ВУЗов-участников позволило активно приглашать учеников для участия в отборочном туре олимпиады. В 2015 и 2016 годах на базе университета были проведены консультации для учащихся перед отборочным и заключительным турами, в том числе с привлечением студентов специальности «Компьютерная безопасность». Количество участников существенно выросло, как и количество допущенных к заключительным турам.

Автор статьи в 2015–2016 учебном году организовала в МОБУ «Лицей №8» г. Оренбурга работу кружка по криптографии для учеников 7–9 классов. На нем обсуждались исторические шифры, решались задачи шифрования-дешифрования и простейшего криптоанализа. Предметом обсуждения становились и задачи Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии. [7]

Список литературы

1. Сачков, В. Спрос на таланты в математике и криптографии будет только расти [Электронный ресурс]// «BIS Journal» № 3(14)/2014. — Режим доступа: http://journal.ib-bank.ru/pub/314 — 22.10.2014.

2. Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.cryptolymp.ru — 13.06.2017

3. Коротышев, П. Путь в повелители чисел [Электронный ресурс]// — Режим доступа: http://www.journal.ib-bank.ru/pub/330 — 22.12.2014.

4. Смарт, Н. Криптография / Н. Смарт. — М.: Техносфера, 2006. — 528 с.

5. Зубов, А.Ю. Олимпиады по криптографии и математике для школьников/ А.Ю. Зубов, А.В. Зязин, Н.В. Никонов, С.М. Рамоданов, А.А. Фролов. — М.: МЦНМО, 2013.

6. Олимпиады по криптографии. [Электронный ресурс]. — Режим доступа http://www.sgu.ru/structure/computersciences/theorcompsafe/olimpiady-po-kriptografii — 13.06.2017.

7. Отрыванкина, Т.М. Подготовка учащихся средней школы к решению криптографических задач// «Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры». Материалы Всероссийской научно-методической конференции (с международным участием); Оренбургский гос. ун-т. — Оренбург: ОГУ, 2015. [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://conference.osu.ru/archive/publications.html?detailed=11 — 13.06.2017.

Рефераты по геометрии

Д.В. Прокопенко,
ФМШ 2007, г.Москва
prokop.dm@mail.ru

Статья представляет собой фрагмент из будущей книги, посвященной описанию технологии написания рефератов по геометрии школьников 8–11 классов.

Автор, будучи школьником 11 класса 218 школы г. Москвы, в 1990 году вместо экзамена по геометрии написал реферат под руководством своего учителя А.Д. Блинкова.

Что такое реферат и как его можно использовать в школе и будет предметом обсуждения данной статьи.

Опыт первых лет работы автора с рефератами в период с 1990 по 1998 годы отражен в статьях, написанных совместно с А.Д. Блинковым в [4] и [5].

Время вносит свои коррективы, поэтому интересно понять, изменился ли процесс написания и темы рефератов за последние 25 лет.

Цели и задачи

Успешное преодоление всех этапов написания и защиты реферата должно привести к повышению общей математической (и не только) культуры школьников. Некоторым ученикам не хватает времени на олимпиадах, где надо за 3–4 часа решить несколько задач. Реферат дает шанс таким детям, ведь над задачей можно думать неделю, месяц. Первый раз в жизни они пишут математический текст, который они сами вместе с учителем редактируют, исправляют ошибки, пытаются сделать свои мысли понятными другим. На олимпиаде на это просто нет времени.

Сложность написания реферата в том, что кроме решения задач, от ученика требуется еще очень много. Надо уметь изложить свои мысли на бумаге; понимать основы типографики; выполнять чертежи в интерактивной программе типа GeoGebra. Для презентации важно отличать главное от второстепенного; структурировать информацию; понимать основы дизайна презентаций.

К сожалению, для некоторых школьников трудности, связанные именно с русским языком, являются серьезным препятствием. Однажды, ученик в первой версии реферата в одной фразе четыре раза написал слово «значит». Потом, для выполнения однотипных вычислений, он скопировал эту фразу еще три раза и заменил некоторые переменные. Его совершенно не смущало, что на трех строчках одно слово повторилось около 10 раз. Мы подбирали синонимы, заменяли повторяющиеся слова, расставляли запятые.

В некоторых случаях, ученики получали для изучения статьи на английском языке, что требовало дополнительной языковой подготовки.

Для учителя реферат тоже может быть полезен. Например, для того, чтобы записать решения задач кружков, на что часто не хватает времени. В результате обсуждения идей реферата со школьниками учитель начинает лучше разбираться в теме (пример ниже). Иногда школьники находят более простые решения известных олимпиадных задач, теорем, такой материал можно использовать в работе на кружке или уроке.

О тематике рефератов

Приведем несколько примеров.

1. Первый пример — реферат «Задачи на построение треугольника». План работы над рефератом был примерно следующим.

На первом этапе ученице было предложено решить базовые задачи (из книги [6]).

На втором этапе (и это предполагалось, как основная часть реферата) — решить задачи из дополнительного списка («со звездочкой») из той же книги. Но задачи не очень решались и мы их на время отложили.

Вместо этого пришлось изучить статью Г.Б. Филипповского, посвященную прямой Эйлера (см. [7]).

Это не очень сложная и вполне доступная статья, в которой известная конструкция (прямая Эйлера, ортоцентр и его свойства) изучается под непривычным углом. Вообще на эту тему очень мало «посильных задач повышенной сложности» (термин И.А. Кушнира) и такая статья — настоящий подарок для учителя.

Ученица разобрала примеры из статьи, самостоятельно проделала упражнения. И только после этого смогла решить некоторые задачи из книги Блинковых (см. [6]).

Это подтверждает еще раз, что хорошо подобранные, несложные, но идейные задачи хорошо использовать как фундамент, который позволит в будущем решать сложные (в том числе и олимпиадные) задачи.

2. Другой пример — реферат «Прямые пересекаются в одной точке». Предполагалось, что это будет обзорный реферат. Тема слишком широкая, и для достаточно полного ее освещения требуется написать объемную книгу, то план был такой:

1. Высоты пересекаются в одной точке.
2. Биссектрисы пересекаются в одной точке.
3. Серединные перпендикуляры.
4. Теорема Карно. Теорема Штейнера.
5. Ортопол. Ортологичные треугольники.
6. Счет углов.
7. Изогональное сопряжение.

Для каждой главы были подобраны базовые задачи.

Первые четыре главы — это материал 8 класса, остальные — 9 класса.

В процессе написания план реферата изменился. После того, как были решены задачи из глав 1, 4 и 5, неожиданно выяснилось, что некоторые задачи из первой главы можно решить с помощью теоремы из главы 5 об ортологичных треугольниках. В результате центральным стержнем реферата стала именно эта глава.

Автор статьи видел подборку задач по этой теме, которую давали для подготовки сборной Москвы ко Всероссийской олимпиаде. Это довольно сложные задачи.

Обычному школьнику, (не олимпиаднику-профессионалу) невозможно просто дать такой листок для самостоятельного решения. Результат будет отрицательный. Статей на эту тему автор тоже не встречал, поэтому никогда не занимался этой темой, считая ее своего рода экзотикой.

Вместе с учеником нам удалось разобраться с новыми, сложными и непривычными понятиями: ортопол треугольника относительно прямой и ортологичные треугольники.

Оказалось, что такие треугольники мы хорошо знаем, просто не знали, что они так называются.

Прежде всего, мы вместе подобрали 7-8 привычных примеров. Треугольник и треугольник с вершинами 1) в серединах сторон; 2) в основаниях высот. Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями дает еще несколько ортологичных пар. Из этих примеров, стало видно как можно строить новые пары ортологичных треугольников.

После этого вернулись к главе 1 «Высоты пересекаются в одной точке» и решили некоторые задачи заново с учетом разобранных примеров и теории Главы 5.

Потом мы доказали равносильность изогонального сопряжения и теоремы Штейнера. Нам удалось связать в одну конструкцию несколько олимпиадных задач.

Автор статьи даже испытал радость открытия. В ходе совместной работы показалось даже, что удалось придумать новую простую по формулировке задачу. В таких случаях бывает полезно посмотреть книгу А. Акопяна «Геометрия в картинках» и В.В. Прасолова «Задачи по геометрии». В первой из них дня через три автор и обнаружил свою «новую» задачу. Она предлагалась в 1982 году на международную олимпиаду от СССР. Но в основной список не вошла.

3. Еще пример — вольный «перевод» главы «Точка пересечения симедиан» из книги известного канадского математика Росса Хонсбергера (см. [8]).

Книга была издана в 1995 году и до сих пор не переведена на русский язык. В целом, содержание этой главы известно специалистам. Но есть почти неизвестные широкому кругу любителей геометрии теоремы, например, окружности Дроз-Фарни (частный случай этой теоремы был предложен в качестве задачи на международной олимпиаде по математике).

На наш взгляд польза от написания такого реферата огромная. Вообще, неадаптированная литература у большинства школьников вызывает ужас, но читать математические тексты в итоге проще, чем художественную литературу. Поэтому такой реферат — первый шаг, чтобы снять или хотя бы уменьшить этот барьер.

К тому же (чуть ли не в первый раз) ученику принесло пользу знание английского языка.

Процесс написания, оформление

Ученик получает готовый список задач или статью, книгу для изучения. Ученик и руководитель встречаются, обсуждают задачи. Этот этап занимает от 2 до 5 месяцев.

Когда решено около половины задач, наступает этап записи решений. Школьники получают в электронном виде файлы:

— Примерная структура реферата:

1. Титульный лист.
2. Содержание (оглавление).
3. Введение.
4. Основной текст.
5. Заключение.
6. Список использованной литературы.

— Общие требования к оформлению рефератов.

— Грамотно написанные примеры «Введения», «Заключения».

— Примеры аккуратно выполненных чертежей.

Отметим, что в «Заключении» необходимо указать список задач, который автор реферата решил самостоятельно.

Последний месяц перед защитой — довольно трудное время. Наступает процесс окончательной вычитки и оформления реферата.

Подготовка презентации и доклада

Завершающий этап работы над рефератом — подготовка презентации и доклада.

Презентация состоит из 15–16 слайдов и рассчитана на 12–13 минут рассказа. Для нее надо отобрать несколько наиболее интересных и важных задач по теме. Еще надо выбрать 1–2 теоремы или задачи для подробного доказательства. Школьники получают пример презентации в электронном виде.

На каждом слайде обычно есть формулировка задачи и чертеж. Основная трудность — научиться объяснить кратко и понятно условие задачи, и что, собственно, надо доказать. Обычно школьники начинают жонглировать буквами с огромной скоростью, уследить за которыми просто невозможно.

Первая презентация — всегда неудачная. Первый пробный доклад обычно длится раза в два дольше положенного. Поэтому лучше прослушать выступление не менее трех раз.

Защита реферата

На защите присутствует экзаменационная комиссия из учителей школы. Защита является открытой, на ней присутствуют все желающие (в том числе учащиеся и выпускники).

Перед экзаменом все экзаменационные рефераты лежат на столе комиссии в виде брошюр формата А5.

В процессе защиты докладчик использует подготовленную заранее презентацию. И в этот момент в первый раз проявляются преимущества презентации на большом экране перед обычной доской.

Сначала докладчик объясняет постановку задачи, потом по слайду «Оглавление» кратко рассказывает содержание реферата; для этого удобно использовать текст «Введения».

После демонстрации результатов, ученик должен 1–2 задачи рассказать подробно.

Примерно 3–5 минут отводится для ответов на вопросы. Если докладчик не может сразу ответить на вопрос, то его лучше отсадить, и он может использовать время следующего доклада.

Отличие рефератов от работ — участников «научных» конференций

Сейчас стало модным проводить «научные» и исследовательские конференции школьников. Мы считаем, что термин «научные» только вводит в заблуждение.

К этим школьным работам предъявляются стандартные требования к научной работе: исследовательский характер работы; новизна исследования, актуальность работы; практическая и/или теоретическая значимость и т.д.

Сколько школьных работ по математике (и не только) в Москве могут соответствовать этим критериям, 20–30?

Цели и задачи написания рефератов, (проектов), должны (на наш взгляд) быть совсем другие. Главное, чтобы конкретный ученик стал лучше решать геометрические задачи, чтобы математика открылась ему с новой (для него) стороны, чтобы он самостоятельно начал читать статьи и журналы, книги.

Поэтому написание рефератов можно сделать массовым явлением в математических классах (в отличие от «научных» конференций школьников).

Фрагменты рефератов (примеры)

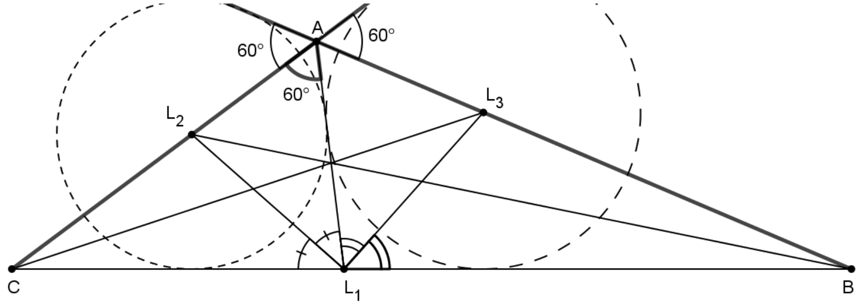
Приведем в качестве примера небольшой фрагмент из реферата по теме «Биссектрисы, вписанные и вневписанные окружности», 2012 года.

Задача 1 — это известная классическая задача.

Задача 2 — из Регионального тура Всероссийской олимпиады 2010 года.

Последняя задача оказалась довольно сложной. Неожиданно простое решение можно получить с помощью классической конструкции из задачи 1.

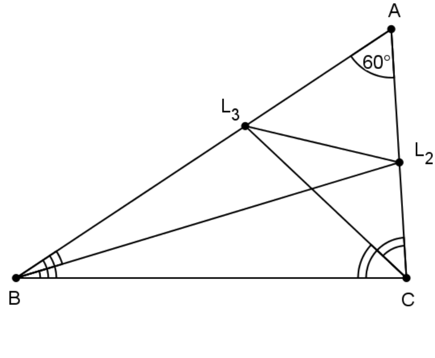
Задача 1. В треугольнике ABC угол A равен 120°. L_1, L_2 и L_3 — основания биссектрис AL_1, BL_2 и CL_3. Докажите, что $\angle L_1L_2L_3 = 90°$.



Решение: Проведём прямую BA и заметим, что точка L_2 является точкой пересечения внутренней биссектрисы BL_2 и внешней биссектрисы AL_2 треугольника ABL_1, значит, точка L_2 — центр вневписанной окружности этого треугольника (см. рис.). Следовательно, прямая L_1L_2 также является внешней биссектрисой треугольника ABL_1.

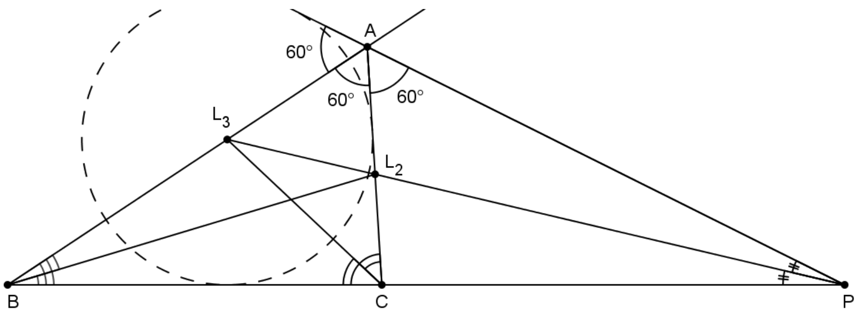
Аналогично, L_1L_3 — биссектриса угла AL_1B. Значит, $\angle L_1L_2L_3 = 90°$ как угол между биссектрисами смежных углов. Доказано.

Задача 2. В треугольнике ABC угол A равен 60°. L_2 и L_3 — основания биссектрис BL_2 и CL_3. Точка P симметрична точке A относительно прямой L_2L_3. Докажите, что точка P лежит на прямой BC.



Решение. Отложим угол 60° к прямой AC. Пусть вторая сторона этого угла пересекает сторону BC в точке P. Тогда: по условию точка L_2 лежит на биссектрисе угла ABC. Также L_2 лежит на биссектрисе угла BAP. Следовательно, PL_2 — биссектриса угла APB.

Заметим, что в точке L_3 пересекаются биссектрисы внешних углов при вершинах A и C треугольника PAC. Следовательно, точка L_3 — центр вневписанной окружности треугольника PAC, значит, она лежит на биссектрисе внутреннего угла при вершине P. Тогда PL_3 — биссектриса угла APB.



Получили, что точки L_2 и L_3 лежат на биссектрисе угла APB. Точка A отражается относительно прямой L_2L_3, которая является биссектрисой угла APB, следовательно, она попадает на другую сторону этого угла — прямую BC. Доказано.

Заключение

Основой рефератов могут также служить статьи журналов («Квант», «Математика в школе», см. также [9-20]), если в них есть некоторая теория, разобраны примеры, и есть задачи для самостоятельного решения.

Приложение

Приведем небольшой обзор книг и статей, вышедших в последние годы, которые можно рекомендовать для написания рефератов.

Некоторые из перечисленных статей можно найти по ссылкам ниже.

Полезные источники

1. Статьи на сайте geometry.ru

2. Подборка статей на сайте Григория Борисовича Филипповского http://filippovsky.com/. Скачать книги можно с сайта http://zadacha.uanet.biz/home/druzja-i-ikh-raboty/filippovskij-g/matematika/.

3. Почти все номера журнала Квант, кроме самых последних, доступны на сайте http://kvant.ras.ru/

Литература

4. А.Д. Блинков, Д.В. Прокопенко «Защита реферата как форма проведения устного экзамена», — М.: газета «Математика», — 1998, №16.

5. А.Д. Блинков, Д.В. Прокопенко «О проведении школьных выпускных экзаменов в форме защиты рефератов», — М. : журнал «Завуч», — 1998, №5.

6. А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков «Геометрические задачи на построение», — М. : МЦНМО, — 2010.

7. Г.Б. Филипповский «Прямая Эйлера и две точки вне прямой: коллекция задач на построение» — М. : Математика в школе. — 2010, № 5.

8. R. Honsberger «Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry» — USA : The Mathematical Association of America, — 1995.

9. В. Ю. Протасов «О велосипедистах и вишневой косточке» — М.: «Квант», — 2008, №3.

10. Н. Белухов, П. Кожевников «Описанные четырехугольники и ломаные» — М.: «Квант», — 2010, №1.

11. А.Д. Блинков и Ю.А. Блинков «Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике …» — М.: «Квант», — 2012, №2.

12. Ю.А. Блинков «Ортоцентр, середина стороны и …еще одна точка» — М.: «Квант», — 2014, №1.

13. Ю.А. Блинков, А.Д. Блинкова «Угол в квадрате» — М.: «Квант», — 2014, №4.

14. Ю.А. Блинков «Симедиана» — М.: «Квант», — 2015, №4.

15. А.Д. Блинков и Ю.А. Блинков «Геометрические задачи на построение» — М.: МЦНМО, — 2012.

16. А.Д. Блинков «Классические средние в алгебре и геометрии» — М.: МЦНМО, — 2012.

17. Г.Б. Филипповский «Лемма о трех хордах и ее применение» К. : «У світі математики», — 2010, № 4.

18. Г.Б. Филипповский «Досье на окружность Аполлония» — М.: «Квант», — 2004, №4.

19. Г.Б. Филипповский «Прямая Эйлера и две точки вне прямой: коллекция задач на построение» » — М.: «Математика в школе», — 2010, №5.

20. В.В. Произволов «Задачи на вырост», — М.: МИРОС, — 1995.

Олимпиадная тригонометрия
(без формул)

П.В. Чулков,
ФМШ 2007, г.Москва
chulkov2007@yandex.ru

Для решения олимпиадных задач по тригонометрии иногда не требуется знать тригонометрических формул. Нередко достаточно сведений из курса геометрии 8–9 классов: формулы приведения, теоремы синусов, косинусов и формул площади и т.д.

В подборке представлены олимпиадные задачи, не использующие тригонометрических формул, взятые из известных сборников олимпиадных задач.

Подборка предназначена для использования на уроках и дополнительных занятиях.

Приведем несколько примеров.

В первой задаче достаточно знать формулы приведения и понимать, что косинус острого угла убывает (то есть, с ростом величины угла косинус острого угла становится меньше). Это проходят уже в 8-ом классе.

Задача 1. Известно, что углы A, B, C некоторого треугольника удовлетворяют неравенству: $\sin A > \cos B$, $\sin B > \cos C$, $\sin C > \cos A$. Докажите, что треугольник остроугольный.

Решение. Предположим противное: $C \geq \frac{\pi}{2}$.

Тогда, $A + B \leq \frac{\pi}{2}$, откуда $A \leq \frac{\pi}{2} - B$, $\cos A \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$.

Получили: $\cos A \leq \sin B$, что противоречит условию задачи

В следующей задаче кроме формул приведения нам потребуется теорема синусов и неравенство треугольника

Задача 2. Сумма трех положительных углов равна $\frac{\pi}{2}$. Может ли сумма косинусов двух из них равняться косинусу третьего?

Решение. Предположим противное.

Пусть $\cos A + \cos B = \cos C$, тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right).$$

Заметим, что существует треугольник с углами A_1, B_1, C_1 (так как их сумма углов равна π), то есть в некотором треугольнике синусы углов связаны соотношением:

$$\sin A_1 + \sin B_1 = \sin C_1 .$$

Домножим на диаметр описанной окружности:

$$2R\sin A_1 + 2R\sin B_1 = 2R\sin C_1 .$$

то есть $a + b = c$, где a, b, c — стороны треугольника, что противоречит неравенству треугольника.

В следующей задаче используем тригонометрический круг (материал 10 класса, но для углов до 180° фактически изучается в 8 классе...)

Задача 3. В треугольнике выполнены неравенства

$$\sin A < \sin 2B ,\ \sin B < \sin 2C ,\ \sin C < \sin 2A .$$

Может ли этот треугольник быть остроугольным?

Ответ: нет.

Решение. Предположим такой треугольник существует и C — наибольший угол этого треугольника.

Неравенство $\sin B < \sin 2C$ выполняется, если точка, соответствующая углу B расположена на тригонометрическом круге ниже, чем точка соответствующая $2C$. Но $C \geq \frac{\pi}{3}$, то есть из неравенства $B + 2C < \pi$ следует $A + B + C < \pi$, что противоречит тому, что A, B, C — углы треугольника.

Следующие задачи основаны на программном материале 10 класса.

Задача 4. Докажите неравенство $x\cos x \le \frac{\pi^2}{16}$, если $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Из неравенства $\sin x \le x$, (которое можно «увидеть» на тригонометрическом круге) следует, что:

$$x\cos x = x\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \le x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \le \frac{\pi^2}{16}.$$

При решении следующей задачи используем свойства производной.

Задача 5. Известно, что $a, b, c, d > 0$ и

$$\sin ax + \sin bx = \sin cx + \sin dx.$$

Докажите, что $a = c$ или $a = d$.

1) Из условия следует равенство производных левой и правой части: $a\cos ax + b\cos bx = c\cos cx + d\cos dx$.

При $x = 0$ получаем равенство $a + b = c + d$.

2) Продифференцировав еще дважды, получим:

$$a^3\cos ax + b^3\cos bx = c^3\cos cx + d^3\cos dx.$$

При $x = 0$ получаем равенство $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

Тригонометрия закончилась, осталось воспользоваться теоремой Виета (см. комментарии).

Задачи и упражнения

Задача 6. Сумма положительных углов A, B, C равна $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что $\cos A + \cos B + \cos C > \sin A + \sin B + \sin C$.

Задача 7. Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$, если $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 8. Найдите все пары $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.

Задача 9. Известно, что $0 < x < \frac{\pi}{3}$. Докажите, что

$$\sin 2x + \cos x > 1.$$

Задача 10. Существует ли функция $f(x)$, определенная на множестве всех действительных чисел такая, что для любых x, y выполнено неравенство: $|f(x+y)+\sin x+\sin y|<2$.

Задача 11. Верно ли, что для любой $f(x)$, определенной на множестве всех действительных чисел существуют функции $h(x), g(x)$ такие, что для любого x выполнено равенство:

$$f(x)=h(x)\sin x+g(x)\cos x.$$

Задача 12. Расположите числа a, b, c из промежутка $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ в порядке возрастания, если известно, что они удовлетворяют равенствам $a=\cos a$, $b=\sin\cos b$, $c=\cos\sin c$.

Задача 13. Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство:

$$|\cos x+\cos ax|>\sin x+\sin ax.$$

Задача 14. Решите неравенство

$$|\sin x-\sin y|+\sin x\cdot\sin y\le 0.$$

Задача 15. Решите уравнение

$$\cos\cos\cos\cos x=\sin\sin\sin\sin x.$$

Задача 16. Решите уравнение $\cos 17x=20\cos x$.

Задача 17. Докажите, что сумма принимает как положительные, так и отрицательные значения:

$$\cos_{32} x+a_{31}\cos 31x+\ldots+a_2\cos 2x+a_1\cos x.$$

Указания, решения, комментарии.

1. (11 класс, 2009-20010, региональный, 3 этап, ВсОШ).

2. (Турнир Ломоносова, 2005).

4. (11 класс, 2008-2009, региональный, 3 этап, ВсОШ).

Другое решение следует из неравенства Коши и признака возрастания функции (через производную), но не содержит ни одной тригонометрической формулы.

Докажем, что $\sqrt{x\cos x} \le \frac{\pi}{4}$.

Так как $\sqrt{x\cos x} \le \frac{x+\cos x}{2}$ достаточно доказать, что $\frac{x+\cos x}{2} \le \frac{\pi}{4}$.

Но $f(x) = x + \cos x$ неубывающая функция, следовательно,

$$x + \cos x \le \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. (11 класс, 2003–2004, заключительный, 5 этап, ВсОШ).

Из системы уравнений: $a+b=c+d$, $a^3+b^3=c^3+d^3$ можно получить систему $a+b=c+d$, $ab=cd$.

Последнее означает, что пары (a,b) и (c,d) составляют (каждая в отдельности) множество корней некоторого квадратного уравнения. Следовательно они совпадают с точностью до перестановки. То есть $a=c$ или $a=d$, что и требовалось доказать.

6. (10 класс, 2003–2004, окружной, 4 этап, ВсОШ). Из равенства $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ следует, что $A+B<\frac{\pi}{2}$.

Тогда $A<\frac{\pi}{2}-B$, откуда $\cos A > \cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$.

То есть $\cos A > \sin B$. Аналогично получаем, что $\cos B > \sin C$, $\cos C > \sin A$. Осталось сложить полученные неравенства.

7. (11 класс, 2006–2007, заключительный, 5 этап, ВсОШ).

Разобьем область определения на части:

1) $x>1$, тогда $1<\sqrt{x}<x<\frac{\pi}{2}$. Из возрастания функции синус следует, что $\sin\sqrt{x} < \sin x < \sqrt{\sin x}$.

2) $0<x\le 1$. Выполним замену $\sqrt{x}=t$. Требуется доказать, что $\sin t < \sqrt{\sin t^2}$, $(\sin t)^2 < \sin t^2$

8. (11 класс, 2004–2005, окружной, 4 этап, ВсОШ).

Ответ: таких нет.

Рассмотрим случаи:

1) если $x \le 1$, то $\sin(xy) \le \sin y < \sin x + \sin y$; то же самое получается, если $y \le 1$;

2) если $x, y > 1$, то $\sin x > \sin 1 > \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, аналогично $\sin y > \frac{1}{2}$, то есть $\sin x + \sin y > 1 \ge \sin(xy)$.

9. (11 класс, 1993–1994, окружной, 4 этап, ВсОШ).

Указание. Функция $f(x) = \sin 2x + \cos x$ выпукла на $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ то есть расположена выше чем отрезок, соединяющий точки $A(0;1)$, $B\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Возможно рассуждение использующее линейную оценку.

10. (11 класс, 1999–2000, окружной, 4 этап, ВсОШ).

Ответ: не существует. Предположим противное. Тогда:

1) при $x = y = \frac{\pi}{2}$ получим: $|f(\pi)+2| < 2$, $-2 < f(\pi)+2 < 2$, то есть $f(\pi) < 0$;

2) при $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$: $|f(\pi)-2| < 2$, $-2 < f(\pi)-2 < 2$, то есть $f(\pi) > 0$.

Противоречие.

11. Ответ: да. Например, $f(x)\sin x$ и $g(x)\cos x$.

12. (11 класс, 1981–1982, заключительный этап, СССР)

Ответ: $c > a > b$.

1) Докажем, что $a > b$. Предположим противное: пусть $a \le b$, тогда в силу убывания функции косинус в первой четверти и неравенства $\sin x < x$ получим:

$b = \sin\cos b < \cos b \le \cos a = a$. Противоречие.

1) Докажем, что $c > a$. Предположим противное: пусть $c \le a$, тогда в силу убывания функции косинус в первой четверти и так как $0 < \sin c < c \le a < \frac{\pi}{2}$ получим:

$$c = \cos\sin b > \cos c \geq \cos a = a\,.$$

Противоречие.

13. (11 класс, 2004–2005, заключительный, 5 этап, ВсОШ).

Ответ: нет.

1) $0 < a \leq 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, то $\left|\cos\dfrac{a\pi}{2}\right| > 1 + \sin\dfrac{a\pi}{2}$, что неверно.

2) $a > 1$, замена $ax = t$, $b = \dfrac{1}{a}$ приводит к неравенству

$$\left|\cos x + \cos bx\right| > \sin x + \sin bx\,,$$

при $0 < b \leq 1$, что разобрано в первом случае.

14. (11 класс, 1984–1985, заключительный этап, СССР)

Ответ: $x = \pi n$, $y = \pi k$, $n, k \in Z$.

Так как $\left|\sin x - \sin y\right| \leq -\sin x \cdot \sin y$, то знаки $\sin x$ и $\sin y$ не совпадают и $\left|\sin x - \sin y\right| = \left|\sin x\right| + \left|\sin y\right|$.

Следовательно, $\left|\sin x\right| + \left|\sin y\right| \leq \left|\sin x\right| \cdot \left|\sin y\right|$, откуда

$$(1 - |\sin x|)(1 - |\sin y|) = 0\,,$$

то есть $\cos x = 0$, $\cos y = 0$.

15. (11 класс, 1994–1995, заключительный, 5 этап, ВсОШ).

Ответ: нет корней.

Достаточно доказать, что $\cos\cos\cos\cos x > \sin\sin\sin\sin x$ на одном периоде, например $[0; 2\pi]$.

1) на $[\pi; 2\pi]$, то $\cos\cos\cos\cos x > 0$, а $c\sin\sin\sin\sin x < 0$.

2) пусть $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, тогда $0 < \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} < \dfrac{\pi}{2}$, откуда

$$0 \leq \cos x < \frac{\pi}{2} - \sin x\,.$$

Следовательно (в силу убывания функции косинус в первой координатной четверти)

$$\cos\cos x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \sin\sin x\,,$$

а (в силу возрастания функции синус в первой четверти):

$$\sin\cos x < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) = \cos\sin x .$$

Следовательно, $\cos\cos\cos x < \cos\sin\sin x$, откуда

$$\cos\cos\cos x + \sin\sin\sin x < \cos\sin\sin x + \sin\sin\sin x < \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\cos\cos x < \frac{\pi}{2} - \sin\sin\sin x .$$

Окончательно (в силу убывания функции косинус в первой координатной четверти):

$$\cos\cos\cos\cos x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin\sin\sin x\right) = \sin\sin\sin\sin x .$$

3) если же $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, тогда обозначим $y = x - \frac{\pi}{2}$, тогда $y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\cos\cos\sin y > \sin\sin\cos\sin y$, но $\sin\sin\cos\sin y > \sin\sin\sin\cos y$, откуда следует доказываемое неравенство.

16. (старшая лига, 2008, математическое многоборье).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Замена: $y = \frac{\pi}{2} - x$. Получим уравнение: $\sin 17y = 20\sin y$. Воспользуемся неравенством: $|\sin nx| \le n|\sin x|$.

$$|\sin 17y| \le 17|\sin y| = 20|\sin y| ,$$

откуда $\sin y = 0$.

17. (10 класс, Московская математическая олимпиада, 1952).

От противного: пусть сумма всегда положительна.

Тогда она положительна, если вместо x подставить $x + \pi$. Получим:

$$\cos 32x - a_{31}\cos 31x + \ldots + a_2\cos 2x - a_1\cos x > 0 .$$

Сложим выражение с исходным. Разделим на 2. Получим:

$$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_2\cos 2x > 0$$

при всех x.

Вместо x подставим $x+\frac{\pi}{2}$, сложим, разделим на 2. Получим:

$$\cos 32x + a_{28}\cos 28x + \ldots + a_4\cos 4x > 0$$

при всех x.

Проделаем аналогичные рассуждения для $x+\frac{\pi}{8}$ и $x+\frac{\pi}{16}$.

В результате получим, что $\cos 32x > 0$ при всех x, что неверно.

Литература

1. Математические олимпиады школьников: Кн. для учащихся общеобразоват. учреждений / Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко, С.В. Резниченко, А.М. Слинько. М.: Просвещение, 1999.

2. Московские математические олимпиады 1935–1957 / В.В. Прасолов и др. — М.: МЦНМО, 2010.

3. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы / Н.Х. Агаханов и др. Под ред. Н.Х. Агаханова. — 2 изд. испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2010.

4. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып.3. / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов. — М.: Просвещение, 2011.

5. Командно-личный турнир школьников «Математическое многоборье» 2008–2010 / Сост. Под ред. Ю.В. Тихонов, В.З. Шарич. –– М.: МЦНМО, 2012.

Текстовые задачи на неравенства для 9 класса

А.В. Шевкин,
г. Москва
avshevkin@mail.ru

Рассмотрим сначала несколько способов решения задачи для шестиклассников.

Задача 1. *От пола комнаты одновременно вертикально вверх по стене поползли две мухи. Поднявшись до потолка, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась вдвое быстрее первой, но зато спускалась вдвое медленнее. Какая из мух раньше приползёт обратно?*

Решение. I способ.

Пусть расстояние от пола до потолка s м, скорость первой мухи v м/мин. Тогда скорость второй мухи $2v$ м/мин на подъёме и $\frac{v}{2}$ м/мин на спуске.

Время движения первой мухи в оба конца равно $\frac{2s}{v}$ мин, а время движения второй мухи равно

$$\frac{2s}{v} + \frac{s}{2v} = 2{,}5 \cdot \frac{s}{v} \text{ (мин).}$$

Так как на двух участках пути время движения первой мухи меньше, чем время движения второй мухи, то первая муха финиширует первой.

II способ. Примем за единицу время движения первой мухи от пола до потолка. В оба конца первая муха затратила 2 единицы времени. А вторая на быстрый подъем и медленный спуск потратила $0{,}5$ единицы и 2 единицы соответственно, а всего $2{,}5$ единицы. Так как $2 < 2{,}5$ то первая муха придёт к финишу первой.

III способ. Переформулируем условия задачи так, чтобы ответ не изменился. Пусть вторая муха сначала поднималась вдвое медленнее первой, а потом спускалась вдвое быстрее. Общее время движения второй мухи от этой переформулировки не изменится. Тогда пока вторая муха медленно поднимется до потолка, первая муха проделает путь туда и обратно, то есть финиширует первой.

Ответ: первая муха финиширует первой.

Далее интересно проверить, изменится ли ответ в задаче, если взять другое отношение скоростей, то есть заменить условие «вдвое быстрее» на условие «в 3 раза быстрее» или условие «в 1,5 раза быстрее»… Ответ от этих изменений не меняется.

Давайте выясним, почему.

Задача 2. *От пола комнаты одновременно вертикально вверх по стене поползли две мухи. Поднявшись до потолка, они поползли обратно. Первая муха ползла в оба конца с одной и той же скоростью, а вторая хотя и поднималась в n раз быстрее первой, но зато спускалась в n раз медленнее. Можно ли подобрать число* $n > 1$*, такое, чтобы вторая муха финишировала первой?*

Решение. I способ.

Пусть расстояние от пола до потолка s м, скорость первой мухи v м/мин. Тогда скорость второй мухи nv м/мин на подъёме и $\frac{v}{n}$ м/мин на спуске.

Время движения первой мухи в оба конца равно $\frac{2s}{v}$ мин, а время движения второй мухи равно

$$\frac{ns}{v} + \frac{s}{nv} = \frac{s}{v} \cdot \left(n + \frac{1}{n}\right) \text{ (мин).}$$

Так как для всех $n > 1$ справедливо неравенство $n + \frac{1}{n} > 2$, то при любом значении $n > 1$ время движения второй мухи будет больше времени движения первой.

II способ. Примем за 1 промежуток времени, за который первая муха преодолевает расстояние от потолка до пола, на путь туда и обратно она затратит 2 такие единицы.

Вторая муха путь до потолка преодолевает со скоростью, в n раз большей, чем скорость первой мухи, поэтому затратит времени в n раз меньше — $\frac{1}{n}$ единицы.

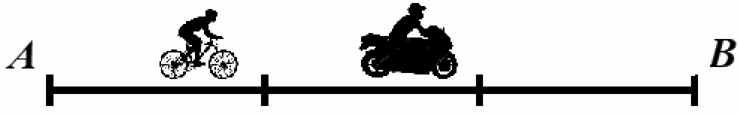
Обратный путь вторая муха преодолевает со скоростью, в n раз меньшей, чем скорость первой мухи, поэтому затратит времени в n раз больше — n единиц, а всего $n+\frac{1}{n}$ единиц.

Так как для любых $n>1$ справедливо неравенство $n+\frac{1}{n}>2$, то при любом значении $n>1$ время движения второй мухи будет больше времени движения первой.

Следовательно, подобрать требуемое значение n нельзя.

Ответ: нельзя.

Задача 3. *Велосипедист и мотоциклист отправились одновременно из пункта A в пункт B. Велосипедист весь путь преодолел с постоянной скоростью. Мотоциклист* $\frac{2}{3}$ *расстояния от A до B проехал со скоростью, в n раз большей скорости велосипедиста, и проколол колесо. Остаток пути он вёл мотоцикл со скоростью, в n раз меньшей скорости велосипедиста. Определите все значения n, при каждом из которых велосипедист приедет в пункт B: а) позже мотоциклиста; б) раньше мотоциклиста.*



Решение. Примем за 1 промежуток времени, за который велосипедист проезжает $\frac{1}{3}$ расстояния от A до B, тогда на расстояние от A до B велосипедист затратит 3 единицы времени.

Мотоциклист проедет $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B со скоростью, в n раз большей, чем скорость велосипедиста, поэтому затратит в n раз меньше времени, то есть $\frac{2}{n}$ единицы.

Остаток пути мотоциклист будет двигаться со скоростью, в n раз меньшей, чем скорость велосипедиста, поэтому затратит времени в n раз больше, чем велосипедист, то есть n единиц, а всего $n+\frac{2}{n}$ единиц (рис. 1).

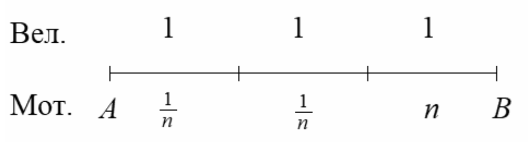


Рис. 1

Велосипедист приедет в пункт B позже мотоциклиста, если выполнено неравенство $n+\frac{2}{n}<3$, что равносильно $(n-1)(n-2)<0$ или $1<n<2$.

Так как $n>1$, то полученное неравенство справедливо при $1<n<2$.

Велосипедист приедет в пункт B раньше мотоциклиста, если выполнено неравенство:

$n+\frac{2}{n}>3$, что равносильно $(n-1)(n-2)>0$ или $n>2$.

Ответ: а) $1<n<2$; б) $n>2$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что одновременно в пункт B велосипедист и мотоциклист прибудут при $n=2$.

Следующую задачу решите самостоятельно.

Задача 4. *Велосипедист и мотоциклист отправились одновременно из пункта A в пункт B. Велосипедист весь путь преодолел с постоянной скоростью. Мотоциклист проехал* $\frac{3}{4}$ *расстояния от*

А до В со скоростью в n раз большей скорости велосипедиста, и проколол колесо. Остаток пути он вёл мотоцикл со скоростью в n раз меньшей скорости велосипедиста. Определите все значения n, при каждом из которых велосипедист приедет в пункт В:

а) позже мотоциклиста; б) раньше велосипедиста.

Ответ: а) $1 < n < 3$; б) $n > 3$.

Задача 5. *Первая бригада может выполнить задание на 2 дня раньше второй и на 8 дней раньше третьей. Но если вторая и третья бригады будут работать вместе, то выполнят задание не позже первой бригады. За какое наименьшее время первая бригада может выполнить задание?*

Решение. Пусть первая бригада выполнит задание за x дней, тогда за день она выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания.

Вторая бригада выполнит задание за $(x+2)$ дня, тогда за день она выполняет $\frac{1}{x+2}$ часть задания.

Третья бригада выполнит задание за $(x+8)$ дней, тогда за день она выполняет $\frac{1}{x+8}$ часть задания.

Вторая и третья бригады вместе выполнят задание не позже первой бригады, значит, в день они выполняют часть задания, не меньшую, чем первая бригада.

Составим неравенство $\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{x}$, что равносильно

$$\frac{(x-4)(x+4)}{x(x+2)(x+8)} \geq 0.$$

Так как $x > 0$, то наименьшим решением исходного неравенства является число 4. Следовательно, 4 дня — наименьшее время, за которое первая бригада может выполнить задание.

Ответ: за 4 дня.

Задача 6. *Первая труба наполняет бассейн на 4 ч быстрее второй и на 9 ч быстрее третьей. Даже если наполнять* *бассейн через вторую и третью трубы одновременно, то бассейн заполняется не быстрее, чем через первую трубу. За какое наибольшее время первая труба может заполнить бассейн*?

Решение. Пусть первая труба заполняет бассейн за x ч, значит, за 1 ч она заполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна.

Вторая труба заполняет бассейн за $(x+4)$ ч, значит, за 1 ч она заполняет $\frac{1}{x+4}$ бассейна.

Вторая труба заполняет бассейн за $(x+9)$ ч, значит, за 1 ч она заполняет $\frac{1}{x+9}$ бассейна.

Через вторую и третью трубы одновременно бассейн заполняется не быстрее, чем через первую трубу, значит, за 1 ч первая труба заполняет часть бассейна, не меньшую, чем вторая и третья вместе. Составим неравенство $\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+4}\geq\frac{1}{x}$, что равносильно

$$\frac{(x-6)(x+6)}{x(x+4)(x+9)}\leq 0$$

Так как $x>0$, то наибольшим решением исходного неравенства является число 6. Следовательно, 6 ч — наибольшее время, за которое первая бригада может выполнить задание.

Ответ: за 6 ч.

Задача 7. *Из пункта A выехал велосипедист и прибыл в пункт B через 3 ч. Одновременно с ним из B в A выехал мотоциклист и вышел пешеход. Скорость мотоциклиста на 12 км/ч больше скорости велосипедиста, а скорость пешехода на 6 км/ч меньше скорости велосипедиста. Найдите наибольшую скорость велосипедиста, если известно, что между встречами велосипедиста с мотоциклистом и пешеходом прошло не менее 1 ч.*

Решение. Пусть скорость велосипедиста v км/ч $(v>6)$, тогда расстояние $AB=3v$ км, скорость пешехода равна $(v-6)$ км/ч, а скорость мотоциклиста равна $(v+12)$ км/ч. По условию задачи между встречами велосипедиста с мотоциклистом и пешеходом прошло не менее 1 ч.

Перепишем неравенство (1) в виде $\frac{3v}{v+v-6}-\frac{3v}{v+v+12}\geq 1$, что равносильно $\frac{(v+1{,}5)(v-12)}{(v-3)(v+6)}\leq 0$.

Так как $v>6$, то наибольшим решением исходного неравенства является число 12. Следовательно, 12 км/ч — наибольшая скорость велосипедиста.

Ответ: 12 км/ч.

Содержание

Введение 3

Я.И. Абрамсон. *Профильная математика в начальной школе* 8

А.Д. Блинков. *Вневписанная окружность* 16

А.Д. Блинков. *Угол между радиусом описанной окружности и стороной треугольника* 28

В.М. Бусев. *Поиск информации по вопросам преподавания математики и электронная библиотека «Математическое образование»* 36

А.В. Иванищук. *Экстремальные задачи (по материалам олимпиад НИЯУ МИФИ)* 41

В.Ю. Лупашевская. *Актуальные задачи с суммой радикалов*...51

Т.М. Отрыванкина. *Задача разделения секрета в криптографии и в олимпиадах по математике и криптографии для школьников* 67

Д.В. Прокопенко. *Рефераты по геометрии* 78

П.В. Чулков. *Олимпиадная тригонометрия (без формул)* 89

А.В. Шевкин. *Текстовые задачи на неравенства для 9 класса* 98