Учим математике-8

Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2019

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

Учим математике-8. Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2019. — 148 с.

У92

ISBN 978-5-4439-2911-8

В предлагаемом сборнике представлены избранные материалы открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики, проходившей с 30 апреля по 6 мая 2018 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-8
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Технический редактор *Т. Струков*
Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 25.03.2019 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

12+

ISBN 978-5-4439-2911-8

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***восьмой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики***. Он прошел в г. Санкт-Петербурге с 30 апреля по 6 мая 2018 года и был посвящен 30-летнему юбилею лицея «Физико-техническая школа» Академического Университета г. Санкт-Петербурга. Помимо лицея ФТШ организаторами семинара являлись ГАОУ ДПО «Центр Педагогического Мастерства» г. Москвы, Московский Центр Непрерывного Математического Образования, Российская ассоциация учителей математики, Президентский физико-математический лицей №239 и Санкт-Петербургский губернаторский физико-математическим лицей №30.

Материалы семи предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017 и 2018 гг.

На семинар приглашались все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие более ста пятидесяти человек, представлявших разные уголки России.

Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение семинара на базе трех ведущих школ Санкт-Петербурга дало прекрасную возможность провести большое количество мастер-классов со школьниками, которые проводили как учителя этих школ, так и приглашенные преподаватели из других городов России. Эта работа была организована таким образом, чтобы каждый участник семинара смог в разные дни посетить каждую из школ. Проведенные занятия со школьниками «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия проводили наиболее опытные преподаватели — участники семинара, а также выдающиеся ученые-математики Санкт-Петербурга.

Помимо этого, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, каждый участник семинара имел возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением. По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от ГАОУ ЦПМ.

Успешное проведение школы-семинара обеспечил представительный научный и программный комитет:

Председатель — директор ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики школы №57 г. Москвы, к. ф.-м. н. И.В. Ященко.

Заместители председателя:

— старший методист и учитель математики ГБОУ «Школа №218» г. Москвы, сотрудник ЦПМ и МЦНМО, Заслуженный учитель РФ А.Д. Блинков;

— директор и учитель математики Президентского ФМЛ №239, Заслуженный учитель РФ М.Я. Пратусевич;

— зам. директора и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга, Почетный работник общего образования РФ К.М. Столбов;

— директор и учитель математики Губернаторского ФМЛ №30, Почетный работник общего образования РФ А.А. Третьяков.

Члены оргкомитета:

— учитель математики и методист Президентского ФМЛ №239, Почетный работник общего образования РФ Е.Я. Карачинский — методист и координатор семинара;

— зам. директора, учитель математики и методист ФМЛ №30 О.В. Ренев — методист и координатор семинара;

— зам. директора ФМЛ №30, учитель математики, Почетный работник общего образования РФ А.Н. Ильина — методист семинара;

— старший методист и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г.Санкт-Петербурга, Народный учитель РФ В.А. Рыжик — методист семинара;

— доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ГБОУ «Школа №2007 ФМШ» г. Москвы, Заслуженный учитель РФ П.В. Чулков — методист семинара;

— учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга Ю.М. Эдлин — координатор и секретарь семинара;

— сотрудник ЦПМ Н.А. Наконечный — координатор и секретарь семинара;

— учитель математики школы №218 г. Москвы, сотрудник МПГУ С.И. Зубарева — секретарь семинара.

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить различные экскурсионные поездки по городу. Были организованы экскурсия по Эрмитажу и посещение Театра Дождей, а также предоставлены возможности для занятия спортом. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем, кто нашел силы и время подготовить статьи для этого сборника.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

Программа восьмой открытой школы-семинара

30 апреля **ФТШ**	
Время	Докладчики и содержание
9.00–10.00	Регистрация участников
10.00–11.00	Открытие и оргвопросы
11.00–12.00	**М.Я. Пратусевич** О преодолении разрыва в математическом образовании
12.15–13.00	**М.И. Башмаков** Проектный метод обучения математике
13.15–14.00	**Г.И. Вольфсон** Нестандартные ходы на уроках математики
15.00–15.45	**Д.Д. Гущин** Преподавание математики в цифровую эпоху: учитель или искусственный интеллект?
16.00–16.45	**П.А. Кожевников** Счетчики и расстояния в графах

1 мая **ФТШ**	
Время	Докладчики и содержание
9.30–11.00	**В.Н. Дубровский** Компьютер как инструмент учителя математики
11.15–12.00	**М.И. Случ** О преподавании математики в 57 школе г. Москвы
12.15–13.45	**В.Б. Некрасов** Трехмерные аналоги некоторых теорем планиметрии
14.45–16.15	**Н.Н. Андреев** Математическая составляющая (новые сюжеты)

2 мая **ФТШ**	
Время	Докладчики и содержание
9.30–10.15	**О.А. Иванов** Об обучении математики в школе
10.30–11.15	**Д.Г. Мухин** Красивые решения, придуманные школьниками
11.30–12.15	**Ю.В. Матиясевич** «Я вам докажу»
12.15–13.00	**К.М. Столбов** Думать и рассуждать. Функции и последовательности
ПФМЛ 239	
14.45–16.15	**С.Е. Рукшин** О путях развития математического образования

3 мая **ФТШ**	
Время	Мастер-классы
9.00–10.30	**Н.Н. Андреев** Математика и музыка
10.45–12.15	**Д.Г. Мухин** Вероятность в задачах
10.45–12.15	**Ю.М. Эдлин** Вневписанная окружность
10.45–12.15	**А.Г. Зарембо** Решение задач с помощью геометрических преобразований
12.50–14.20	**Д.Э. Шноль** Квадратные и биквадратные уравнения на плоскости параметров
12.50–14.20	**Г.И. Вольфсон** Дополнительные построения
12.50–14.20	**Д.Г. Мухин** Вероятность в задачах
Время	Доклады участников
16.00–16.45	**С.М. Крачковский** Физические подходы к решению математических задач
17.00–17.45	**А.Н. Андреева** Математические миниатюры

3 мая **ПФМЛ 239**	
Время	Мастер-классы
10.10–11.55	**В.А. Александрова** Задачи с параметром. Графический метод
10.10–11.55	**А.Ю. Эвнин** Теорема Холла и задачи о фокусниках

10.10–11.55	**П.А. Кожевников** Связность в графах
12.10–14.10	**Е.К. Филатов** Вневписанные окружности
12.10–14.10	**И.В. Черняев** Поиск и использование соотношения отрезков (геометрия)
12.10–14.10	**П.А. Кожевников** Связность в графах
Время	Круглый стол
16.00–16.20	**Е.Я. Карачинский** О работе МО математиков в ПФМЛ 239
Время	Выступления участников
16.20–17.30	**М.И. Баишева/** **Л.И. Ефремова, Р.С. Пусев**

3 мая **Лицей №30**	
Время	Мастер-классы
10.25–12.15	**И.С. Гнедина** Построение графиков по монотонности и асимптотике
10.25–12.15	**И.Б. Писаренко** Комплексные числа 1
10.25–12.15	**В.А. Евстафьев** Теоремы Чевы и Менелая
12.35–14.20	**Н.Н. Андреев** Математика и музыка
Время	Лекция
16.00–17.30	**Е.И. Казакова** Математика как инструмент междисциплинарного педагогического подхода

4 мая **ФТШ**	
Время	Мастер-классы
10.45–12.15	**В.А. Рыжик** От описания к определению и тесты на уроках геометрии
10.45–12.15	**К.М. Столбов** Суммирования
10.45–12.15	**А.Ю. Иванов** О методе интервалов
12.50–14.20	**И.В. Селиванова** Стихи и числа
12.50–14.20	**Д.В. Прокопенко** Угол между хордами и другие конструкции в окружности
12.50–14.20	**Т.А. Логунова** Соответствие геометрических образов и алгебраических моделей на примере задач с параметром
Время	Доклады участников
16.00–16.45	**А.Е. Панкратьев** Количество информации в задачах
17.00–17.45	**А.Ю. Эвнин** Планарные и гамильтоновы графы. Теорема Гринберга

4 мая **ПФМЛ 239**	
Время	Мастер-классы
10.10–11.55	**Д.Э. Шноль** Задачи на плоскости параметров (k, b) для функций вида $y = kx + b$

10.10–11.55	**М.Я. Пратусевич** Графы
10.10–11.55	**А.С. Штерн** Целочисленные арифметические прогрессии
12.10–14.10	**Е.Я. Карачинский** Комплексные числа
12.10–14.10	**К.Н. Аксенов** Решение задач на многогранники
12.10–14.10	**Д.Э. Шноль** Групповые исследования
Время	Круглый стол
16.00–16.20	**В.Н. Соломин** Задачи на повторение в контексте изучения нового материала
Время	Выступления участников
16.20–17.30	**Д.А. Лебедев, В.Г. Григорьева, В.Г. Ликонцева, Л.М. Максимова, О.В. Дементьева**

4 мая **Лицей №30**	
Время	Мастер-классы
10.25–12.15	**О.Ю. Дмитриев** Задачи с параметрами
10.25–12.15	**Н.А. Наконечный** Методы решения комбинаторных задач
10.25–12.15	**Е.В. Житная** Касательная к графику функции: решение задач
12.35–14.20	**Т.Ю. Иванова** Применение производной в алгебраических задачах

12.35–14.20	**П.В. Чулков** Повторим тригонометрию
12.35–14.20	**Н.А. Наконечный** Методы решения комбинаторных задач
Время	Лекция
16.00–17.30	**И.Б. Писаренко** Из опыта преподавания математической индукции

5 мая **ФТШ**	
Время	Мастер-классы
10.45–12.15	**М.Э. Дворкин** Теория игр: выводим теорему Шпрага-Гранди
10.45–12.15	**А.Д. Блинков** Помогает геометрия
10.45–12.15	**В.Б. Некрасов** Задачи с парамером
12.50–14.20	**В.Б. Некрасов** Задачи с парамером
12.50–14.20	**Ю.А. Блинков** Степень точки и инцентр
12.50–14.20	**Д.Д. Гущин** Экономические задачи
Время	Доклады участников
16.00–16.45	**В.В. Жук** Об одной модификации транснеравенства
17.00–17.45	**Р.Р. Пименов** Эстетическая геометрия, компьютерные технологии и самостоятельная работа учеников

5 мая **ПФМЛ 239**	
Время	Мастер-классы
10.10–11.55	**В.И. Франк** Задачи с целыми неизвестными (подготовка к ЕГЭ, задача 19)
10.10–11.55	**А.И. Сгибнев** Строим подвижные чертежи
10.10–11.55	**А.С. Штерн** Целочисленные арифметические прогрессии
12.10–14.10	**В.Н. Соломин** Различные методы сравнения логарифмов
12.10–14.10	**А.И. Сгибнев** Строим подвижные чертежи
12.10–14.10	**И.Л. Савич** Системы линейных уравнений
Время	Круглый стол
16.00–16.20	**М.С. Житомирский** О некоторых проблемах школьного математического образования и об экзаменах
Время	Выступления участников
16.20–17.30	**О.А. Старунова/А.Б. Дронзик, Е.В. Осипова, В.Н. Шабанова, Т.М. Отрыванкина**

5 мая **Лицей №30**	
Время	Мастер-классы
10.25–12.15	**А.Н. Ильина** Геометрические преобразования плоскости

10.25–12.15	**Д.В. Прокопенко** Прямой вписанный угол
10.25–12.15	**М.В. Штильман** Комбинаторика
12.35–14.20	**А.А. Тимофеев** Организация повторения математики в формате Web Quest
12.35–14.20	**И.Б. Писаренко** Комплексные числа 2
12.35–14.20	**Д.В. Прокопенко** Вневписанные окружности
Время	Круглый стол «О разных олимпиадах»
16.00–17.00	**Т.Е. Савелова** «Кенгуру» в школе и дома
Время	Выступления участников семинара
17.00–17.45	**О.Ю. Дмитриев, Н.П. Степанова, А.А. Удот**

6 мая **ФТШ**	
Время	Докладчики и содержание
9.30–11.00	**А.И. Сгибнев** Зачем нужны буквы?
11.15–12.45	**В.А. Рыжик** Система задач в учебниках геометрии А.Д. Александрова
13.00–13.45	**П.В. Чулков** Олимпиадные задачи на уроке
14.45–15.45	**А.С. Штерн** Алгебраический и функциональный взгляд на многочлены

«Геометрия на пальцах» или применение моделей многогранников для решения стереометрических задач

К.Н. Аксенов,
г. Санкт-Петербург
aksenov239@gmail.com

I. Введение.

Всё новое — это хорошо забытое старое.

«Из мемуаров (1824) Розы Бертэн, личной портнихи французской королевы Марии-Антуанетты. Однажды она, слегка подновив старое платье Королёвы, предложила его королеве, и та с удовольствием его приняла. «Новое — это хорошо забытое старое», — прокомментировала этот случай портниха» (Энциклопедический словарь крылатых слов и выражений, Автор-составитель Вадим Серов).

О пользе моделей многогранников написано много статей и даже книг, поэтому об этом сейчас рассуждать не будем. Речь пойдет о решении стереометрических задач в 10 и 11 классах. О нахождении элементов многогранников, фигурирующих в задачах ЕГЭ.

Многие из нас ещё помнят деревянные модели многогранников, изготовленных в СССР. Затем были стеклянные. Их изготавливали на Украине. Далее, в период с 1991 по 2005, не было ничего, а затем появились антивандальные, стальные, сварные по рёбрам модели. В последнее время много китайского пластика и есть даже модели на магнитах. Но увы, у них всех есть свои недостатки. Не буду их перечислять, тем более, что у разных учителей могут быть различные подходы к использованию моделей. Поделюсь своими.

«Многогранники» для своих уроков я изготавливаю сам. Для этого потребовался клеевой пистолет с клеевыми стержнями, набор деревянных палочек для шашлыка, ватные палочки (для удлинения) и несколько листов А4 (опорная плоскость). Немного старания — и к третьей или четвертой фигуре Вы уже «мастер своего дела». (См. рис. 1.)

Где купить и как выбрать клеевой пистолет? Этот вопрос легко решить, посмотрев соответствующий ролик на YouTube.

Для организации урока-мастерской по решению задач понадобится изготовить несколько многогранников. Их количество зависит от числа групп. Задачи, а значит и многогранники могут повторяться (см. рис. 2—6).

Рис. 1.

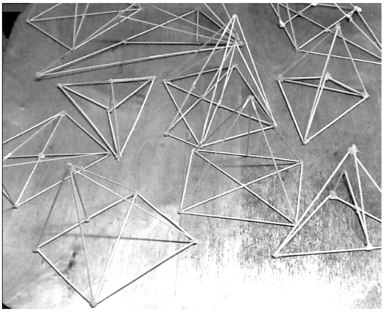


Рис. 2.

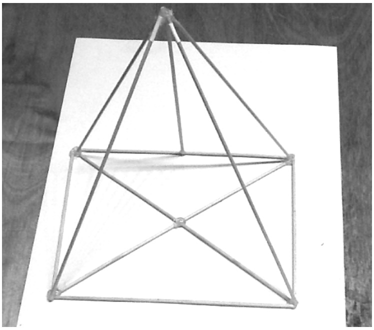


Рис. 3

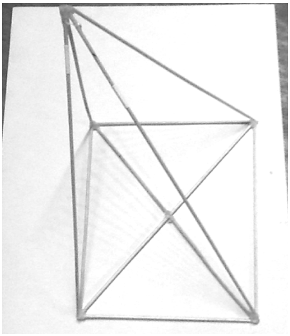


Рис. 4

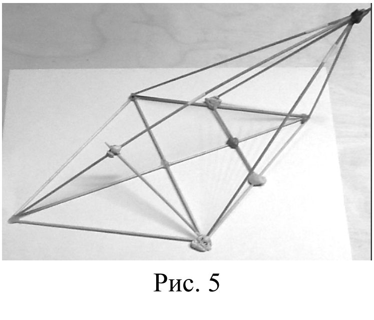


Рис. 5

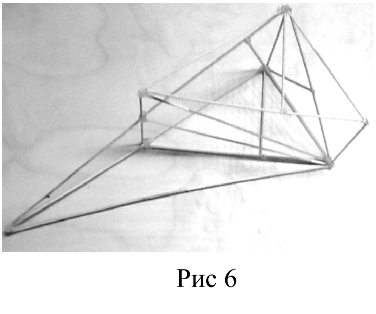


Рис 6

II. Задачи.

Задача 1. *В основании пирамиды $PABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 4, а $\angle BAD = 60°$. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей ромба O, а длина высоты равна 4. Найдите:*

1. Угол между прямыми PC и BD.

2. Угол между прямыми PC и AD.

3. Двугранный угол при ребре PC.

4. Угол между плоскостями APD и BPC.

5. Расстояние между прямыми PC и BD.

6. Расстояние от точки B до плоскости PCD.

7. Угол между прямой PB и плоскостью PCD.

8. Расстояние между прямыми PC и AB.

9. Расстояние между прямыми PM и BD, где M — середина стороны CD.

Задача 2. *В основании пирамиды $PABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 3$, $BC = 4$. Основанием высоты пирамиды является вершина C, а длина высоты равна 4. Найдите:*

1. Угол между прямыми PD и AC.

2. Двугранный угол при ребре AB.

3. Угол между плоскостями APB и CPD.

4. Двугранный угол при ребре PB.

5. Расстояние между прямыми PD и BC.

6. Расстояние между прямыми PD и AC.

7. Угол между прямой PB и плоскостью PCD.

8. Расстояние от точки C до плоскости PBD.

9. Расстояние от точки D до плоскости PAB.

10. Угол между прямой PA и плоскостью PBD.

Задача 3. *В основании пирамиды $PABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ $(AB = 3, BC = 4)$. Известно, что $(PBC) \perp (ABC)$ и $PA = PD = \sqrt{29}$.*

1. Найдите расстояние от P до (ABC).

2. Найдите угол между прямыми PB и AC.

3. Найдите расстояние между прямыми PB и AC.

4. Угол между плоскостями PBD и PAB.

5. Угол между плоскостями APC и APB.

6. Угол между плоскостями PBD и ABC.

7. Угол между прямой DP и плоскостью APB.

8. Расстояние между прямыми AP и DC.

9. Расстояние от точки C до плоскости BDP.

Задача 4. *В основании пирамиды $PABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 4, а $\angle BAD = 60^\circ$. Основанием высоты является точка D, а длина высоты равна 4. Найдите:*

1. Угол между прямыми PC и BD.

2. Угол между прямыми PC и AD.

3. Двугранный угол при ребре PC.

4. Угол между плоскостями APD и BPC.

5. Расстояние между прямыми PC и BD.

6. Расстояние от точки B до плоскости APC.

7. Угол между прямой PB и плоскостью APD.

8. Расстояние между прямыми PC и AB.

9. Расстояние между прямыми PM и BD, где M — середина стороны CD.

Задача 5. *В основании пирамиды $PABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 4, а $\angle BAD = 60^\circ$. Основанием высоты является точка C, а длина высоты равна 4. Найдите:*

1. Угол между прямыми PC и BD.

2. Угол между прямыми AP и BD.

3. Двугранный угол при ребре AP.

4. Угол между плоскостями APD и BPC.

5. Расстояние между прямыми PC и BD.

6. Расстояние от точки C до плоскости APB.

7. Угол между прямой PB и плоскостью APD.

8. Расстояние между прямыми PC и AB.

9. Расстояние между прямыми PM и BD, где M — середина стороны CD.

III. Организация урока.

1) Делим класс на группы. Комфортно — по 4 человека, но можно и по 6.

Сдвигаем парты парами, образуя «круглые столы».

2) На каждый стол выдаётся «опорная плоскость». Ею может служить кусок фанеры.

На неё стелим лист А4 и устанавливаем готовый многогранник. На листе можно подписывать вершины.

3) На каждый стол выдаём пластилин, деревянные палочки, ножницы и полые пластиковые палочки — для удлинения рёбер.

4) Раздаём условия задач.

5) Бланки оформления:

Задача №

Фамилия Имя: ____

____

Общий рисунок

Решение:

1) (ФИО кто решал)

Ответ:

6) Группы начинают работать.

Очень важное условие:

Прежде чем зарисовать и найти элемент, его надо построить на модели. Для этого и нужны пластилин и палочки.

Что в это время делает учитель?

Есть возможность обойти всех: подсказать, обсудить, опросить и вместе с учениками «подержаться» за тот или иной элемент. Вначале помогаем, дальше само пойдёт.

Следим за оформлением задач. В группе каждый участник должен внести свой вклад. Если есть сильный ученик, то пусть он объяснит слабому, и тот оформит свой пункт задачи.

При переходе к следующему пункту задачи предыдущие элементы лучше убрать.

7) Завершение работы.

Все группы сдают отчёт по задачам.

Наиболее сложные можно разобрать на доске. Для этого вызываем самых подготовленных учеников.

8) По итогам можно всем выставить оценки.

Примеры детского творчества на рис. $7-11$.

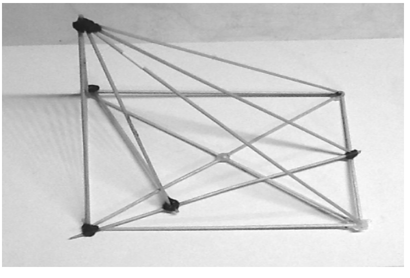


Рис. 7

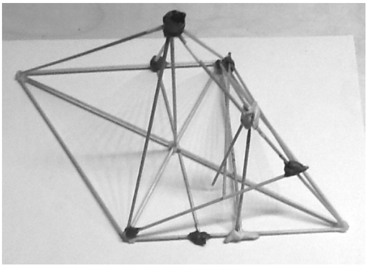


Рис. 8

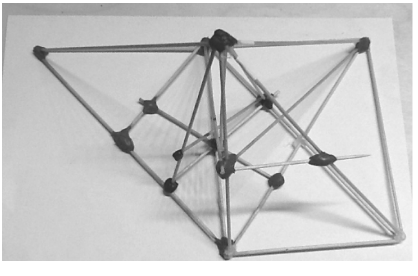


Рис. 9

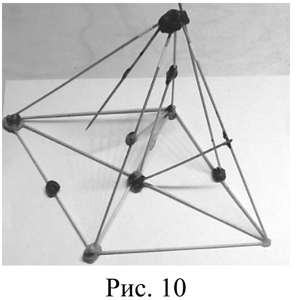


Рис. 10

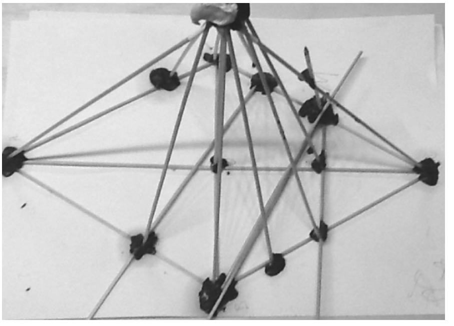


Рис. 11

IV. Выводы.

Всем было интересно, все работали. Наблюдения с модели переносили на бумагу.

Было и творчество, и логика.

Попробуйте. Всем понравится. Дети по-другому увидят геометрию. Они ощутят её на своих руках. На пальцах.

Об одном обобщении транснеравенства

В.В. Жук,
г. Алматы, Республика Казахстан
vladimir_zhuk@mail.ru

На математических олимпиадах различного уровня встречаются задания, в которых необходимо доказать какое-либо неравенство. На сегодняшний момент существует множество различных методов доказательства неравенств, которые могут применяться как по отдельнсти, так и в комбинации с другими. Одним из таких методов опирается на известное транснеравенство (или перестановочное неравенство).

Суть транснеравенства заключается в том, что скалярное произведение двух наборов чисел является максимальным возможным, если наборы одномонотонны (то есть оба одновременно неубывающие или одновременно невозрастающие), и минимально возможным, если наборы противоположной монотонности (то есть один неубывающий, другой невозрастающий). Транснеравенство имеет несколько обобщений, одному из которых посвящена эта статья.

Итак, напомним, как выглядит *транснеравенство*.

Пусть даны два набора чисел

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \text{ и } b_1 \le b_2 \le \ldots b_n .$$

Тогда для любой перестановки π чисел $\{1,2,\ldots,n\}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_{\pi(k)} \le \sum_{k=1}^{n} a_k b_k . \quad (1)$$

Далее докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть на интервале I заданы дифференцируемые функции f_1, f_2 такие, что $\forall x \in I \quad f_1'(x) \le f_2'(x)$.*

Тогда $\forall a_1, a_2 \in I : a_1 \le a_2$ *выполняется неравенство*

$$f_1(a_2) + f_2(a_1) \le f_1(a_1) + f_2(a_2).$$

Доказательство. Поскольку

$$\forall x \in I \quad f_1'(x) \le f_2'(x), \text{ то}$$

$$\int_{a_1}^{a_2} f_1'(x)dx \le \int_{a_1}^{a_2} f_2'(x)dx.$$

Отсюда получаем, что

$$f_1(a_2) - f_1(a_1) \le f_2(a_2) - f_2(a_1),$$

что равносильно доказывавему неравенству.

Пример 1. *Пусть* $a \le b$ *. Доказать, что*

$$(a+1)^2 + 2e^b > (b+1)^2 + 2e^a.$$

Доказательство. Пусть $f_1(x) = (x+1)^2$, $f_2(x) = 2e^x$. Заметим, что

$$f_1'(x) = 2(x+1) \le 2e^x = f_2'(x),$$

тогда по лемме 1

$$f_1(a) + f_2(b) \ge f_1(b) + f_2(a),$$

что в точности совпадает неравенством, которое требовалось доказать.

Справедлива следущая теорема.

Теорема 1. *Пусть на интервале* I *заданы дифференцируемые функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *такие, что* $\forall x \in I \quad f_1'(x) \le f_2'(x) \le \ldots \le f_n'(x)$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(a_{n-k+1}) \le \sum_{k=1}^{n} f_k(a_{\pi(k)}) \le \sum_{k=1}^{n} f_k(a_k). \quad (2)$$

Здесь $a_1, a_2, ..., a_n \in I$ такие, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$; π — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Обозначим

$$S=\sum_{k=1}^{n} f_k(a_{\pi(k)}).$$

Пусть для некоторых $i<j$ выполнено $\pi(i)>\pi(j)$.

Поменяем в перестановке π местами $\pi(i)$ и $\pi(j)$. После этой инверсии получим новую перестановку π^*, задаваемую формулой

$$\pi^*(k)=\begin{cases}\pi(j), \text{если}\, k=i,\\ \pi(i), \text{если}\, k=j,\\ \pi(k), \text{если}\, k\neq i, k\neq j.\end{cases}$$

Положим

$$S^*=\sum_{k=1}^{n} f_k(a_{\pi^*(k)}).$$

Докажем, что $S\le S^*$.

Действительно,

$$S^*-S=\left(f_i(a_{\pi(j)})+f_j(a_{\pi(i)})\right)-\left(f_i(a_{\pi(i)})+f_j(a_\pi(j))\right).$$

Так как

$$\pi(j)<\pi(i), \text{ и } \forall x\in I \ \ f_i'(x)\le f_j'(x),$$

то по лемме 1

$$f_i(a_{\pi(i)})+f_j(a_{\pi(j)})\le f_i(a_{\pi(j)})+f_j(a_{\pi(i)}).$$

Отсюда следует, что

$$S^*-S\ge 0 \Leftrightarrow S(x)\le S^*(x).$$

Таким образом, после нескольких таких инверсий из перестановки π можно получить тождественную перестановку $\pi_0(\pi_0(k)=k, k=1..n)$. При этом соответствующая сумма уменьшаться не будет. Из этого факта получаем правую часть неравенства (2).

Левая часть неравенства (2) доказывается аналогично.

Теорема 1 доказана.

Если в неравенство (2) положить $f_i(x)=b_i x$, то получим обычное транснеравенство. Поэтому неравенство (2) можно считать одним из обобщений транснеравества (1).

Следствие 1. *Пусть функция* $f: I^2 \to R$ *дважды дифференцируема на* I^2 *(*I *— заданный интервал), и для всех* $t, x \in I$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) \geq 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) \leq 0\right), \quad (3)$$

тогда для любого набора чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ($a_k \in I$, $k = 1..n$) и любой перестановки π чисел $1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k, a_{\pi(k)}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(a_k, a_k) \qquad (4)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k, a_{\pi(k)}) \geq \sum_{k=1}^{n} f(a_k, a_k)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим перестановку σ такую, что

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)}. \quad (5)$$

Обозначим

$$f_k(x) = f(a_{\sigma(a_k)}, x), \quad k = 1..n.$$

Из (3) и (5) получаем, что

$$f_1'(x) \leq f_2'(x) \leq \ldots \leq f_n'(x).$$

Тогда по теореме 1

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k, a_{\pi(k)}) = \sum_{k=1}^{n} f(a_{\sigma(k)}, a_{\sigma(\pi(k))}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(a_{\sigma(k)}), a_{\sigma(k)}) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k, a_k).$$

Следствие 1 доказано.

Пример 2. *Пусть* $a + b + c + d = 4$ $a, b, c > 0)$. *Доказать неравенство*

$$\sqrt{2 + a^2 + b^2} + \sqrt{2 + b^2 + c^2} + \sqrt{2 + c^2 + d^2} + \sqrt{2 + d^2 + c^2} \geq 8.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t, x) = \sqrt{2 + t^2 + x^2} \quad (t, x > 0).$$

Заметим, что $\forall t, x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) = -\frac{tx}{(2+t^2+x^2)\sqrt{2+t^2+x^2}} < 0.$$

значит, по следствию 1

$$\sqrt{2+a^2+b^2}+\sqrt{2+b^2+c^2}+\sqrt{2+c^2+d^2}+\sqrt{2+d^2+c^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{2+2a^2}+\sqrt{2+2b^2}+\sqrt{2+2c^2}+\sqrt{2+2d^2} =$$

$$\geq 2\left(\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+d^2}{2}}\right) \overset{AM-RMS}{\geq}$$

$$\geq 2\left(\frac{1+a}{2}+\frac{1+b}{2}+\frac{1+c}{2}+\frac{1+d}{2}\right) = 4+a+b+c+d = 8.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 3 (Romania, 1997). *Пусть даны положительные числа* a, b, c *такие, что* $abc = 1$. *Доказать, что*

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+c^6} \geq 2.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(t,x) = \frac{t^9+x^9}{t^6+t^3x^3+x^6}.$$

Далее, для всех $t, x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) = -\frac{108t^8x^8(t^3+x^3)}{(t^6+t^3x^3+x^6)^3} < 0.$$

Поэтому по следствию 1

$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+c^6} \geq$$

$$\geq \frac{2a^9}{3a^6}+\frac{2b^9}{3b^6}+\frac{2c^9}{3c^6} = \frac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right) \overset{AM-GM}{\geq} \frac{2}{3}\cdot 3abc = 2.$$

Пример 4 (Turkey, JBMO TST, 2013). *Пусть* a, b, c *такие положительные числа, что* $a+b+c=1$. *Докажите, что*

$$\frac{a^4+5b^4}{a(a+2b)}+\frac{b^4+5c^4}{b(b+2c)}+\frac{c^4+5a^4}{c(c+2a)}\geq 1-ab-bc-ca.$$

Доказательство. Рассмотрев функцию

$$f(t,x)=\frac{t^4+5x^4}{t(t+2x)} \quad (t,x>0),$$

получим, что всех $x,t>0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)=-\frac{2(t^5+6t^4x+20t^2x^3+45tx^4+30x^5)}{t^2(t+2x)^3}<0.$$

Таким образом, по следствию 1

$$\frac{a^4+5b^4}{a(a+2b)}+\frac{b^4+5c^4}{b(b+2c)}+\frac{c^4+5a^4}{c(c+2a)}\geq \frac{6a^4}{a\cdot 3a}+\frac{6b^4}{b\cdot 3b}+\frac{6c^4}{c\cdot 3c}=$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2=(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca\geq$$

$$\geq ab+bc+ca+1-2ab-2bc-2ca=1-ab-bc-ca.$$

Неравенство доказано.

Пример 5. *Пусть даны такие положительные числа* a, b, c, *что* $a^2+b^2+c^2=3$. *Доказать, что*

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}}+\frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}}+\frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}}\leq 12.$$

Доказательство. Возьмём

$$f(t,x)=\frac{(t+x)^3}{\sqrt[3]{2(t+x)(t^2+x^2)}}.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)=\frac{8\sqrt[3]{(t+x)^2}\,(3t^4-2t^3x+10t^2x^2-2tx^3+3x^4)}{9\sqrt[3]{(t+x)(t^2+x^2)^7}}.$$

Рассмотрим выражение

$$A = 3t^4 - 2t^3x + 10t^2x^2 - 2tx^3 + 3x^4 =$$
$$= t^2x^2\left(3\left(\frac{t^2}{x^2}+\frac{x^2}{t^2}\right) - 2\left(\frac{t}{x}+\frac{x}{t}\right)+10\right).$$

Положим $z = \frac{t}{x} + \frac{x}{t}$, тогда

$$A = t^2x^2\left(3(z^2-2) - 2z + 10\right) = t^2x^2(3z^2 - 8z + 10) = t^2x^2\left(3(z-43)^2 + \frac{14}{3}\right).$$

Таким образом для любых $t, x > 0$ выражение $A > 0$, а, значит,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) = \frac{8\sqrt[3]{(t+x)^2}\,A}{9\sqrt[3]{(t+x)(t^2+x^2)^7}} > 0.$$

Отсюда, по следствию 1

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}} + \frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}} + \frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}} \le$$
$$\le \frac{8a^3}{\sqrt[3]{8a^3}} + \frac{8b^3}{\sqrt[3]{8b^3}} + \frac{8c^3}{\sqrt[3]{8c^3}} = 4(a^2+b^2+c^2) = 12.$$

Что и требовалось доказать.

Определение 1. *Назовём два набора чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ***одинаково упорядоченными**, если существует такая перестановка* σ *чисел* $1, 2, \ldots, n$*, что*

$$a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le \ldots \le a_{\sigma(n)},$$
$$b_{\sigma(1)} \le b_{\sigma(2)} \le \ldots \le b_{\sigma(n)}.$$

Определение 2. *Назовём два набора чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ***противоположно упорядоченными**, если существует такая перестановка* σ *чисел* $1, 2, \ldots, n$*, что*

$$a_{\sigma(1)} \le a_{\sigma(2)} \le \ldots \le a_{\sigma(n)},$$
$$b_{\sigma(1)} \ge b_{\sigma(2)} \ge \ldots \ge b_{\sigma(n)}.$$

Примеры одинаково упорядоченных наборов:

- (a,b,c) и (a,b,c)
- (a,b,c) и $\left(\dfrac{1}{b+c},\dfrac{1}{c+a},\dfrac{1}{a+b}\right)$

Примеры противоположно упорядоченных наборов:

- (a,b,c) и $(b+c,c+a,a+b)$
- (a,b,c) и (bc,ca,ab)
- (a,b,c,d) и $(b+c+d,a+c+d,a+b+d,a+b+c)$
- (a,b,c,d) и (bcd,acd,abd,abc)

Следствие 2. *Пусть функция* $f:I^2\to R$ *дважды дифференцируема на* I^2 *(*I *— заданный интервал), и для всех* $t,x\in I$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)\geq 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)\leq 0\right),$$

тогда для любых двух *одинаково упорядоченных* наборов $a_1,a_2,...,a_n$ и $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ($a_k,b_k\in I$, $k=1..n$) выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_{\pi(k)})\leq\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_k) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_{\pi(k)})\geq\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_k)\right).$$

Следствие 3. *Пусть функция* $f:I^2\to R$ *дважды дифференцируема на* I^2 *(*I*— заданный интервал), и для всех* $t,x\in I$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)\geq 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)\leq 0\right),$$

тогда для любых двух *противоположно упорядоченных наборов* $a_1,a_2,...,a_n$ и $b_1,b_2,\ldots,b_n$ ($a_k,b_k\in I$, $k=1..n$) выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_{\pi(k)})\geq\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_k) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_{\pi(k)})\leq\sum_{k=1}^{n} f(a_k,b_k)\right).$$

Следствия 2, 3 доказываются аналогично следствию 1.

Пример 6. *Пусть* $a,b,c>0$, $n\in N$, $n\geq 2$. *Доказать, что*

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(t,x)=\frac{t^n}{x}\quad(t,x>0).$$

Заметим, что тройки чисел (a,b,c) и $(b+c,c+a,a+b)$ являются противоположно упорядоченными. С учётом того, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)=-\frac{nt^{n-1}}{x^2}<0\quad\forall t,x>0.$$

по следствию 3 получаем

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b}=f(a,b+c)+f(b,c+a)+f(c,a+b)\geq$$

$$\geq f(a,a+b)+f(b,b+c)+f(c,c+a)=\frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}.$$

Рассмотрим функцию $g(t,x)=\dfrac{t^n}{t+x}\quad(t,x>0)$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}\right)=-\frac{t^{n-1}((n-2)t+nx)}{(t+x)^3}<0\quad\forall t,x>0,$$

то по следствию 1

$$\frac{a^n}{a+b}+\frac{b^n}{b+c}+\frac{c^n}{c+a}=g(a,b)+g(b,c)+g(c,a)\geq$$

$$\geq g(a,a)+g(b,b)+g(c,c)=\frac{a^n}{2a}+\frac{b^n}{2b}+\frac{c^n}{2c}=\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

Пример 7 (IMO Short-listed, 1998). *Даны положительные числа* a,b,c *такие, что* $abc=1$. *Доказать, что*

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

Доказательство. Положим

$$f(t,x)=\frac{t^3}{x},\quad g(t,x)=\frac{t^3}{t+x}.$$

Заметим, что $\forall t,x>0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)=-\frac{3t^2}{x^2}<0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}\right)=-\frac{t^2(2t+3)}{(t+1)^2(x+1)^2}<0.$$

Поскольку наборы чисел

$$(a,b,c) \text{ и } \big((1+b)(1+c),(1+c)(1+a),(1+a)(1+b)\big)$$

противоположно упорядочены, то с учётом последних неравенств получаем

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geq$$

$$\geq\frac{a^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{b^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+c)(1+a)}\geq$$

$$\geq\frac{a^3}{(1+a)^2}+\frac{b^3}{(1+b)^2}+\frac{c^3}{(1+c)^2}\overset{\text{Йенсен}}{\geq}$$

$$\geq 3\cdot\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{\left(1+\frac{a+b+c}{3}\right)^2}\geq 3\cdot\frac{(\sqrt[3]{abc})^3}{\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^2}=\frac{3}{4}.$$

Последние два неравенства следуют из неравенств Йенсена, Коши и того факта, что функция $h(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$ возрастает и выпукла вниз на $(0,+\infty)$.

Пример 8 (Неудачный!!!). *Пусть* a, b, c *— положительные числа такие, что* $a+b+c=3$. *Доказать, что*

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\le\frac{3}{4}.$$

Попытка доказательства. Рассмотрев функцию

$$f(t,x)=\frac{1}{2+t^2+x^2},$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right)=\frac{8tx}{(2+t^2+x^2)^3}>0$$

Тогда

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\le\frac{1}{2+2a^2}+\frac{1}{2+2b^2}+\frac{1}{2+2c^2}$$

Однако, на самом деле имеет место следующий факт

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2}\le\frac{3}{4}\le$$

$$\le\frac{1}{2+2a^2}+\frac{1}{2+2b^2}+\frac{1}{2+2c^2}.$$

Доказать с помощью обобщённого транснеравенства не получится!!!

Литература

1. ru.wikipedia.org/wiki/Перестановочное_неравенство

2. www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2017-05/rearrangement _inequality.pdf

3. Lee H. Topics in Inequalities — Theorems and Techniques

Физические подходы к решению математических задач

С.М. Крачковский,
г. Москва
smath@mail.ru

«В.И. Арнольд говорит, что математика — это часть физики.
А я дополняю: физика — часть геометрии!»
И.Ф. Шарыгин

Широкие возможности применения математики для описания физических явлений в той или иной степени известны (по крайней мере, мы надеемся) всякому старшекласснику. Известные из математики понятия и свойства — векторов, производных, тригонометрических функций, площадей и объёмов, да и просто даже правила тождественных преобразований выражений находят применение при решении практически любой задачи по физике. Исторически же прослеживается скорее обратная связь — многие математические понятия и теоремы «вырастали» из физики, появлялись как обобщение накопленных эмпирически результатов и как удобное средство описания и строгого обоснования выявленных закономерностей. Однако в настоящее время эти же самые понятия и теоремы часто преподносятся учащимся в законченной, логически безупречной форме, со строгим доказательством, но без какого-либо обсуждения того, какие физические закономерности они выражают. Об этом чаще всего просто не заходит речь. При этом, с помощью тех или иных физических интерпретаций можно убедительно демонстрировать связи математических задач и фактов с реальными физическими процессами и законами. И, более того, на основе этого получать новые способы решения математических задач и обоснования теорем, которые сами при этом начинают восприниматься по-новому и обретают дополнительное содержание.

Начнём с краткого рассмотрения наиболее широко известного физического подхода — применения метода масс в геометрии. Будем считать известными из физики понятия массы и центра масс.

Метод масс. В его основе лежат следующие утверждения, которые мы также сейчас примем без обсуждения,

Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом единственный

Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки. При этом его положение на этом отрезке определяется «правилом рычага»: произведение массы каждой точки на её расстояние до центра масс постоянно, то есть $m_1d_1 = m_2d_2$ (рис. 1).

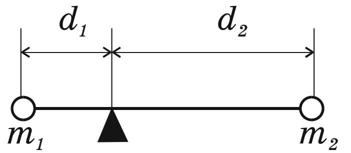


Рис. 1

Положение центра масс не изменится, если какую-то часть системы заменить одной точкой с массой, равной массе этой подсистемы, и находящейся в ее центре масс.

Задача 1. Доказать*, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении* $2:1$*, считая от вершины.*

Решение. Представим, что в вершинах A, B и C треугольника размещены равные массы m. Найдем центр тяжести M системы точек A, B, C. Центром тяжести отрезка AB является его середина — точка C_1,значит, положение точки M не изменится, если заменить точки A и B на одну точку C_1, приписав ей массу $2m$. Тогда центр тяжести всей системы точек A, B, C лежит на отрезке CC_1, причем, согласно правилу рычага, он находится в точке делящей в отношении $2:1$. Эти же рассуждения, проведенные для сторон BC и AC, приводят к требуемому заключению, поскольку центр тяжести у системы точек только один.

Заметим, что обычные геометрические доказательства этого факта, не дают, несмотря на свою логическую строгость, столь же ясного интуитивного понимания, почему рассматриваемое отношение должно быть равно именно $2:1$, а не $3:2$, например. Учащимся тогда остаётся просто запомнить этот факт, как и множество других. Например, применение метода масс делает также практически очевидным утверждение о том, что бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. С его помощью можно доказывать множество фактов аффинной геометрии, в частности теоремы Вариньона, Чевы, Менелая и др. Подробнее о методе масс можно прочитать, например, в $[1]$. Приведём ещё два примера задач, решаемых с его помощью.

Задача 2. *На сторонах* AB *и* AC *треугольника* ABC *взяты точки* K *и* M *соответственно, так что* $BM \cap CK = O$ *и* $BO:OM = 3:2$ *и* $CO:OK = 7:3$ *(рис. 2). Найдите* $AM:MC$ *и* $AK:KB$.

Решение. Разместим в точках A, B и C такие массы, чтобы точка O оказалась их центром масс. Для этого вначале поместим в точки B и M массы 2 и 3 соответственно, то есть $m(B)=2$ и $m(M)=3$. Тогда, по правилу рычага, O — центр масс этих точек (суммарная масса 5). Поместим в точки K и C массы, отношение которых равно $7:3$, а сумма равна 5, а именно $m(C)=\dfrac{3}{2}$ и $m(K)=\dfrac{7}{2}$. Тогда O — также центр масс точек C и K.

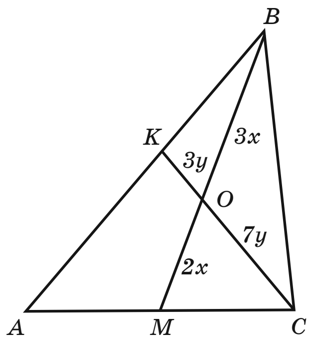


Рис. 2

Поместим теперь в точку A такую массу $m(A)$, чтобы $m(K)=m(A)+m(B)$, то есть $m(A)=m(K)-m(B)=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ (или, что то же самое, $m(A)=m(M)-m(C)=\dfrac{7}{2}-2=\dfrac{3}{2}$). Удалив теперь массы из точек M и K, мы достигнем желаемого. Тогда

$$\frac{AK}{KB}=\frac{m(B)}{m(A)}=\frac{2}{3/2}=\frac{4}{3} \text{ и } \frac{AM}{MC}=\frac{m(C)}{m(A)}=\frac{3/2}{3/2}=1.$$

Задача 3 (свойство биссектрисы треугольника). Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $AB=m$, $BC=n$ и биссектрисой BD. Докажем, что $\frac{AD}{CD}=\frac{m}{n}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $m \geq n$. Отметим на продолжении стороны BC за точку C такую точку E, что $BE=AB$ (то есть $CE=m-n$).

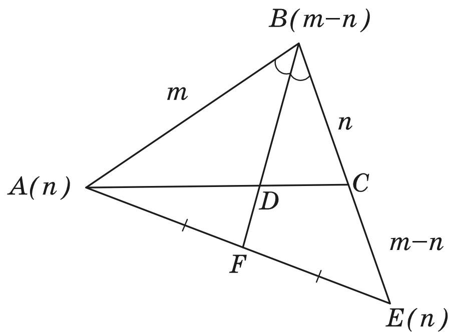


Рис. 3

Пусть F — точка пересечения прямых BD и AE. Тогда BF — биссектриса и медиана равнобедренного треугольника ABE, значит, F — середина AE (рис. 3).

Поместим в точки A, B и E массы n, $m-n$ и n соответственно. Тогда C — центр масс точек B и E, а F — центр тяжести точек A и E. Значит, D — центр масс системы из точек A, B, E. Заменив в ней точки B и E точкой C массой $(m-n)+n=m$ и применяя правило рычага (D — центр масс A и C), получаем равенство $n \cdot AD = m \cdot CD$, что и требовалось.

Метод приложения сил и поиска равнодействующей. Данный метод эффективен для доказательства коллинеарности точек или конкурентности прямых. При его использовании сейчас предполагаем известными из физики понятия силы, законы сложения сил, а также следующие факты:

1) точку приложения силы, действующей на абсолютно твёрдое тело, можно переносить вдоль ее направления, не нарушая равновесия тела.

2) (теорема о трёх силах) Если абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием плоской системы трех непараллельных сил, то линии их действия пересекаются в одной точке.

Рассмотрим в качестве первого примера теоремы о существовании замечательных точек треугольника.

Задача 4. *Докажите, что во всяком треугольнике:*

1) Три биссектрисы внутренних углов пересекаются в одной точке (инцентр);

2) Три медианы пересекаются в одной точке (центроид) (это уже было доказано выше методом масс);

3) Три высоты или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентр);

4) Три серединных перпендикуляра к сторонам пересекаются в одной точке (центр описанной окружности).

Решение. Идея доказательства во всех случаях будет одна и та же. Рассмотрим шесть сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}, \overrightarrow{F_5}, \overrightarrow{F_6}$, приложенных в вершинах треугольника и направленных вдоль его сторон, как показано на рис. 4.

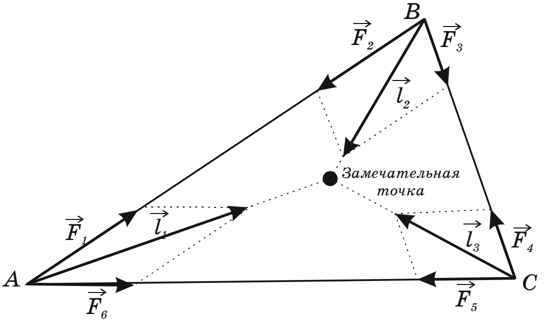


Рис. 4

Наша цель каждый раз будет в том, чтобы подобрать модули этих сил так, чтобы, с одной стороны, они взаимно уравновешивались, то есть $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}, \overrightarrow{F_5}, \overrightarrow{F_6} = \vec{0}$, а с другой, равнодействующие пар сил $\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_6}$, $\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$, $\overrightarrow{l_3} = \overrightarrow{F_4} + \overrightarrow{F_5}$ оказывались направлены вдоль нужных нам прямых l_1, l_2, l_3 (трёх биссектрис, трёх высот и т.д.). Тогда поскольку $\vec{l_1}+\vec{l_2}+\vec{l_3}=\vec{0}$, то прямые l_1, l_2, l_3 будут пересекаться в одной точке в соответствии с теоремой о трёх силах.

1) В случае с тремя биссектрисами силы $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}, \vec{F_5}, \vec{F_6}$ достаточно взять равными по модулю. Тогда, очевидно, условие $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}, \vec{F_5}, \vec{F_6}=\vec{0}$ выполнено, а $\vec{l_1}, \vec{l_2}, \vec{l_3}$ будут как раз направлены вдоль биссектрис внутренних углов треугольника.

Замечание. Заменив две силы $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ (соответственно $\vec{F_3}, \vec{F_4}$, $\vec{F_5}, \vec{F_6}$) на противоположно направленные им, но также равные по модулю всем остальным, совершенно аналогично доказываем, что биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке (центре вневписанной окружности).

2) В случае с медианами выбираем модули сил так: $\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\dfrac{AB}{2}$, $\left|\vec{F_3}\right|=\left|\vec{F_4}\right|=\dfrac{BC}{2}$, $\left|\vec{F_5}\right|=\left|\vec{F_6}\right|=\dfrac{AC}{2}$. Всё дальнейшее полностью аналогично.

3) Для доказательства теоремы о высотах выберем модули сил следующим образом: $\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=F\cos C$, $\left|\vec{F_3}\right|=\left|\vec{F_4}\right|=F\cos A$, $\left|\vec{F_5}\right|=\left|\vec{F_6}\right|=F\cos B$. Очевидно, условие $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}, \vec{F_5}, \vec{F_6}=\vec{0}$ выполнено.

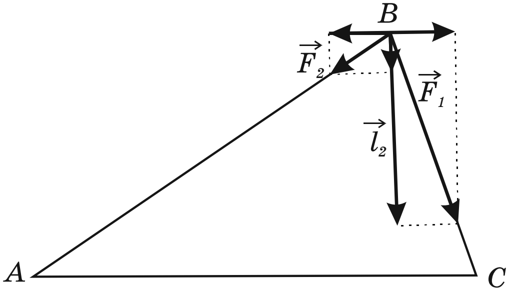


Рис. 5

Определим теперь направление векторов l_1, l_2, l_3. Рассмотрим для примера силу $\vec{l_2}=\vec{F_2}+\vec{F_3}$. Разложим каждую из сил $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$

на две составляющие — параллельную стороне AC и перпендикулярную ей. Составляющие, параллельные AC будут противоположно направлены и равны $F_2 \cos A = F \cos C \cos A$ и $F_3 \cos C = = F \cos A \cos C$ (у векторов $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_3}$ соответственно).

Значит, они взаимно компенсируются. Тогда сила $\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$ будет направлена вдоль перпендикулярной составляющей векторов $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_3}$, то есть по высоте треугольника, проведённой из вершины B. Аналогично показываем, что $\overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ направлены вдоль двух других высот. Затем требуемое заключение о пересечении прямых, содержащих высоты треугольника, в одной точке делаем уже стандартным образом.

4) Здесь уже просто воспользуемся тем фактом, что серединные перпендикуляры к сторонам данного треугольника содержат высоты треугольника, образованного серединами сторон данного. Поэтому, по доказанному выше они также пересекаются в одной точке. Далее будет приведено ещё одно доказательство этого факта.

Задача 5 (4 коллинеарные точки в трапеции). *Докажите, что у любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой (рис. 6).*

Решение. 1-й способ (метод масс). Обозначим длины оснований: пусть $AD = a$, $BC = b$. В силу подобия треугольников AOD и COB, а также ASD и BSC с коэффициентом $\frac{a}{b}$, можем обозначить: $AO = ax$, $CO = bx$, $DO = ay$, $BO = by$, $SD = am$, $SC = bm$, $SA = an$, $SB = bn$.

Поместим сначала в точки A, B, C и D массы b, a, a и b соответственно. Тогда M — центр масс B и C, а K — центр масс A и D. Заменив точки $_{в}$ и C на точку M, а A и D – на K, получаем, что центр масс всей системы находится на прямой MK. Но этим центром масс является как раз точка O, поскольку в соответствии с правилом рычага O центр масс как пары точек B и D, так и пары A и C. Таким образом, M, O и K лежат на одной прямой.

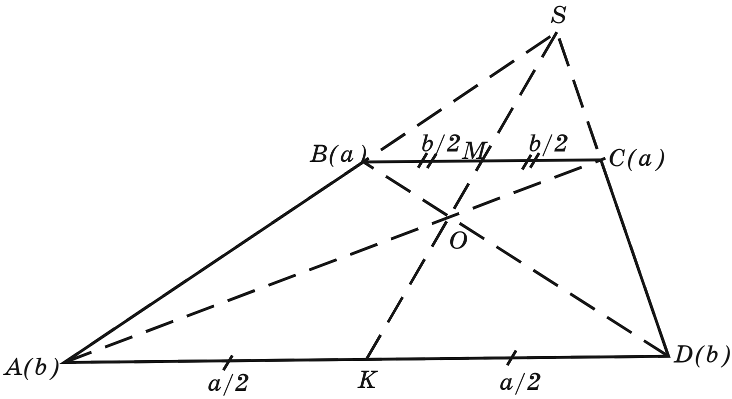


Рис. 6

Теперь поместим в точки A, S и D массы b, $a-b$ и b соответственно. Тогда центр масс всей системы лежит на медиане SK треугольника ABC. Заменяя точки S и D на точку C (сумма масс a), получаем, что центр масс лежит на прямой AC. Аналогично, заменяя точки S и A на точку B (сумма масс a), получаем, что центр масс лежит на прямой BD. Значит центр масс данной системы есть точка O пересечения прямых AC и BD. То есть, O лежит на SK.

Таким образом, все четыре точки S, M, O, K лежат на одной прямой.

2-й способ (приложение сил). Рассмотрим силы $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{F_5}=\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{F_6}=\overrightarrow{ND}$ (равенство $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{AB}$ означает в данном случае, что сила $\overrightarrow{F_1}$ прикладывается в точке A и равна по модулю длине отрезка AB и т. д.). Найдём равнодействующую всех сил разными способами (рис. 7).

Поскольку силы $\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}, \overrightarrow{F_5}, \overrightarrow{F_6}$ взаимно компенсируются, то равнодействующая всех сил будет направлена вдоль некоторой прямой, проходящей через точку S пересечения прямых AB и CD.

Теперь скомпенсируем только силы $\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$. Тогда, поскольку $\overrightarrow{F_5}+\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{NB}$ и $\overrightarrow{F_6}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{NC}$, то равнодействующая всех сил будет направлена вдоль прямой, проходящей через точку N.

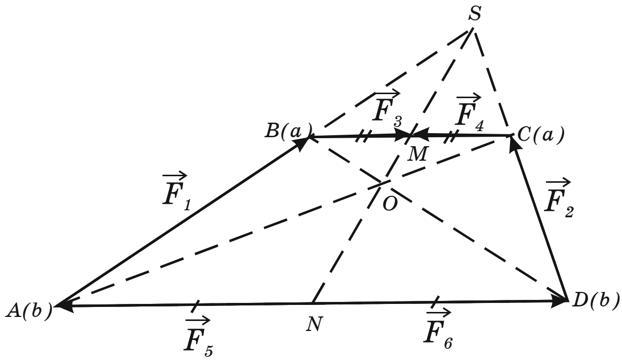


Рис. 7

Далее скомпенсируем только силы $\vec{F}_5, \vec{F}_6$. Тогда, поскольку $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \overrightarrow{DM}$, то равнодействующая всех сил будет направлена вдоль прямой, проходящей через точку M.

Удвоим теперь силы $\vec{F}_5, \vec{F}_6$, что, очевидно, не изменит равнодействующую. Скомпенсируем силы $\vec{F}_3, \vec{F}_4$. Тогда, поскольку $2\vec{F}_5 + \vec{F}_1 = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ и $2\vec{F}_6 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$, то равнодействующая всех сил будет направлена вдоль прямой, проходящей через точку O пересечения прямых DB и AC.

Таким образом, при сложении сил в разном порядке их равнодействующая оказывалась поочерёдно направлена вдоль некоторой прямой, проходящей через точки S, M, O, K. Что и означает, что они лежат на одной прямой, поскольку сама равнодействующая определяется однозначно и действует вдоль одной прямой.

Момент силы и состояние покоя. Момент силы характеризует вращающее действие силы. Напомним основные необходимые определения и факты, связанные с этим понятием.

1) Если сила приложена к рычагу перпендикулярно ему, момент силы относительно оси вращения рычага определяется как произведение величины этой силы на расстояние до оси (плечо силы). Моментом силы относительно точки называется произведение величины силы на длину перпендикуляра (плечо силы), опущенного из этой точки на линию действия силы. Для определения момента

силы относительно оси нужно силу спроектировать на плоскость, перпендикулярную оси и найти момент проекции относительно точки пересечения оси с этой плоскостью.

2) Если линия действия силы проходит через данную точку, то её момент относительно этой точки равен нулю, так как в этом случае плечо равно нулю $d = 0$.

3) Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любой точки равняется сумме моментов сил системы относительно этой же точки.

4) Правило моментов: тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси, находится в равновесии, если равны моменты сил вращающих его по и против часовой стрелки.

Общая идея доказательства геометрических утверждений с помощью понятия момента силы такова. Представим себе сосуд в виде прямой призмы, заполненный газом, на который не действуют никакие внешние силы. Тогда в инерциальной системе отсчёта он будет сохранять состояние покоя (или равномерного прямолинейного движения). В противном случае сосуд представлял бы собой вечный двигатель. Значит, силы действия газа на стенки сосуда скомпенсированы. Поскольку основания призмы равны, силы действия газа на них также взаимно скомпенсированы. Тогда должны быть скомпенсированы и силы, действующие на боковую поверхность. То есть момент равнодействующей этих сил относительно какой-либо прямой перпендикулярной основаниям призмы, будет равен нулю. Теперь спроецируем призму на произвольную плоскость, параллельную основаниям, найдём момент равнодействующей проекций сил относительно точки пересечения указанных прямой и плоскости и приравняем этот момент нулю. Такое проецирование позволяет в планиметрических задачах сразу работать в плоскости, где расположены фигуры, не «выходя в пространство», то есть не рассматривая вспомогательный объект — призму. Заметим ещё, что сила, действующая со стороны газа на некоторый участок боковой поверхности призмы (от нижнего до верхнего основания) прямо пропорциональна площади этого участка, а на плоскости проекция этой силы прямо пропорциональна длине проекции этого участка.

Продемонстрируем сказанное на нескольких примерах. Рассмотрим произвольный треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и, например, точку A как центр вращения.

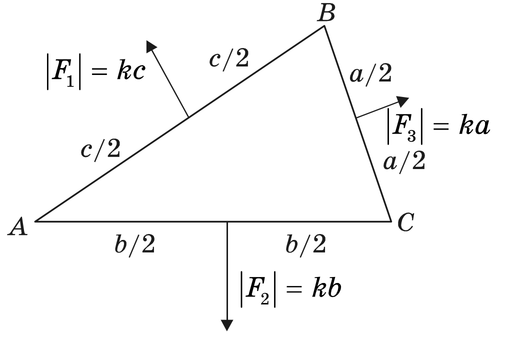


Рис. 8

Вращающие силы, действующие на стороны треугольника, приложены в серединах сторон, перпендикулярны им и пропорциональны их длинам: $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = kc$, $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = ka$, $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = kb$, где k — коэффициент пропорциональности .

Так как равнодействующая сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ в соответствии со сказанным выше равна нулю, то по уже известной нам теореме о трёх силах, линии их действия, то есть серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке. Мы получили новое доказательство этого важного факта.

Далее, если угол C — прямой, то плечи сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ относительно точки A равны соответственно $c/2$, $a/2$ и $b/2$. Правило моментов запишется в виде $ka \cdot \dfrac{a}{2} + kb \cdot \dfrac{b}{2} = kc \cdot \dfrac{c}{2}$ или $a^2 + b^2 = c^2$ и мы получаем теорему Пифагора.

Пусть теперь угол C равен γ (рис. 9). При этом предыдущие рассуждения остаются в силе, изменилось только плечо силы $\overrightarrow{F_2}$. Найдём его.

Из подобия треугольников MAK и NCK получаем:

$$\frac{AM}{CN}=\frac{AK}{CK}\Leftrightarrow\frac{x}{a/2}=\frac{b-\dfrac{a/2}{\cos\gamma}}{\dfrac{a/2}{\cos\gamma}},$$

откуда $x=b\cos\gamma-\dfrac{a}{2}$.

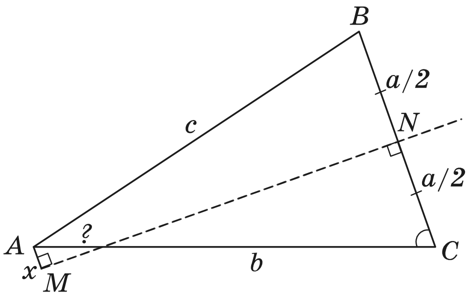


Рис. 9

Правило моментов с учётом направлений вращения запишется теперь в виде $kb\cdot\dfrac{b}{2}=kc\cdot\dfrac{c}{2}+ka\cdot\left(b\cos\gamma-\dfrac{a}{2}\right)$ или, преобразуя, $a^2+b^2-2ab\cos\gamma=c^2$. И мы получаем теорему косинусов.

Существует целый ряд и других соображений физического характера, позволяющих иллюстрировать и/или обосновывать геометрические факты. К ним относятся, например, принцип минимума потенциальной энергии и экстремальное свойство световых лучей. На их основе доказываются факты связанные с поиском кратчайших маршрутов и расстояний между некоторыми точками: задачи Герона, Фаньяно, свойства касательной к эллипсу и окружности, существование и свойства точки Торричелли и др. Мы же поговорим в заключение о некоторых фактах и задачах, физическое осмысление которых не представляет собой отдельного нового способа их решения, но помогает лучше понять их сущность, связать с определёнными процессами в реальном мире.

Физические ассоциации в математических задачах

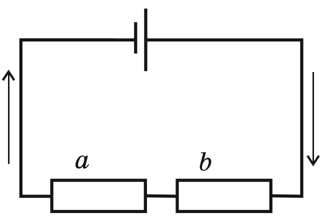
Композиции преобразований плоскости и относительность движения в уравнениях с параметрами. Нередко встречаются уравнения, в которых параметр присутствует несколько раз. Геометрически это, вообще говоря, определяет композицию нескольких преобразований графиков. Рассмотрим, к примеру, уравнение с параметром $\sqrt{x+a-8}=-ax-a^2+3a+2$. Что представляют собой графики его левой и правой частей? В левой части параметр определяет параллельный перенос полупараболы вдоль оси абсцисс или, как говорят, семейство полупарабол с вершиной на оси Ox. В правой — одновременное вращение прямой (угловой коэффициент равен $-a$) и её параллельный перенос вдоль оси ординат на величину $-a^2+3a+2$. Разбираться во всём этом в таком виде неудобно. Сделаем замену $t=x+a$, после чего уравнение перепишется в виде $\sqrt{t-8}=-at+3a+2$. Данная замена соответствует переходу в новую систему координат, относительно которой полупарабола уже неподвижна, а параметр определяет только некоторое динамическое преобразование прямой из правой части уравнения. При этом мы наблюдаем проявление физического принципа относительности движения. Но у нового семейства прямых по-прежнему от параметра а зависят как угловой коэффициент, так и свободный член. При таком взгляде всякое изменение значения параметра a вызывает одновременно поворот прямой (относительно начала координат) и ее параллельный перенос вдоль оси ординат на величину $3a+2$. Такое представление в виде композиции преобразований по-прежнему неудобно с практической точки зрения для исследования уравнения. Переписав же уравнение в виде $\sqrt{x-8}=-a(x-3)+2$, легко понять, что на деле речь можно вести об одном преобразовании графика — вращении прямой вокруг точки $(3;2)$. Это полностью согласуется с известным из геометрии фактом о том, что композиция поворота и параллельного переноса есть поворот на тот же угол около нового центра. Далее уравнение исследуется стандартным образом.

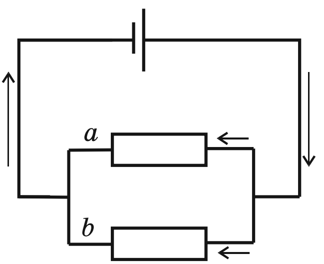
Неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим для двух неотрицательных чисел a и b:

$$\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a+b}{2}.$$

«Наглядно-физическая иллюстрация»: если тело половину всего времени двигалось со скоростью a, а вторую половину времени — со скоростью b, то средняя скорость равна $\frac{a+b}{2}$. Если же тело половину всего пути двигалось со скоростью a, а вторую половину — со скоростью b (например, перемещалось из одной точки в другую и обратно), то средняя скорость равна $\frac{2ab}{a+b}$. Ясно, что в первом случае с большей из двух скоростей тело двигалось большую часть времени, чем во втором. Поэтому средняя скорость в первом случае окажется больше во всех случаях, кроме крайнего, когда скорости a и b равны, а значит равны и обе средние скорости.

«Физическая иллюстрация» (рис. 10): при последовательном соединении резисторов с сопротивлениями a и b полное сопротивление данного участка цепи равно $a+b$. Оно не изменится если заменить данные резисторы на два одинаковых с сопротивлением $\frac{a+b}{2}$.





При параллельном же их соединении полное сопротивление участка цепи равно $\frac{2ab}{a+b}$ и при этом оно не превосходит меньшего из сопротивлений ветвей. То есть, если без ограничения общности считать, что $b \le a$, то получаем $\frac{2ab}{a+b} \le b \le \frac{a+b}{2}$.

Литература

1. Балк, М.Б., Болтянский, В. Г. Геометрия масс // М.: Наука, — 1987. — 160 с.

2. Коган, Б.Ю. Приложение механики к геометрии // М.: Наука, — 1965. — 56 с.

3. Курант, Р., Роббинс, Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / пер. с англ. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004. — 568 с.

4. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения/ пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1975. — 464 с.

5. Успенский, В. А. Некоторые приложения механики к математике // М.: Наука, — 1958. — 50 с.

О сравнении обыкновенных дробей

Д. А. Лебедев,
г. Москва
sch896.inform@gmail.com

Тема «Сравнение обыкновенных дробей» для школьников 5-6 класса — это практически первое с решением неравенств. Решение неравенств наиболее интересный раздел школьной математики, который развивает у школьников аналитические навыки, способствует проявлению творческих способностей. Школьники 5-6 классов привыкли к получению точных значений и им трудно привыкнуть к мысли, что в математике это нужно не всегда. В статье не рассматриваются методы «приведения к общему знаменателю или числителю». Предлагаемые способы алгоритмичны, могут быть выполнены на обычных счётах и основаны на сложении, вычитании и «рационализации» сравнений. Иногда школьники сложение дробей проводят по схеме $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$. Мой «вредный совет»: научить школьников такому сложению; объяснить смысл такой операции; упростить решение многих задач с помощью приобретенного знания.

Постановка задачи.

В статье рассматриваются только натуральные числа.

Имеются две обыкновенные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Требуется определить, в каком из отношений $\left(\frac{a}{b}>\frac{c}{d};\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\right)$ они находятся.

1. «Вертикальное вычитание» или сравнение с единицей

Составим таблицу 1.:

	$c > d$	$c = d$	$c < d$
$a > b$	$\boxed{?_1}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
$a = b$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
$a < b$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\boxed{?_2}$

В таблице 1 представлено правило «сравнение с 1».

При возникновении случая $\boxed{?_1}$ сравнение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ заменим сравнением дробей $\frac{a-b}{b}$ и $\frac{c-d}{d}$ (постепенно выделяем целую часть).

При возникновении случая $\boxed{?_2}$ сравнение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ заменим сравнением дробей $\frac{a}{b-a}$ и $\frac{c}{d-c}$ (постепенно выделяем целую часть у обратных дробей).

Практически сравнение дробей сведено к поэтапному сравнению их разложения в цепные дроби [1]. Чтобы показать, что такое цепная дробь, рассмотрим пример из книги В.И. Аронольда [2]:

Возьмём дробь $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$ $\left(\frac{3}{7} < 1\right)$.

«Перевернём» дробь:

$$\frac{3}{7} : \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{7/3}, \text{ но}$$

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{10}{7} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}},$$

это и есть представление числа $\frac{10}{7}$ в виде цепной дроби.

Отметим, что при уменьшении знаменателя происходит «рационализация» сравнения, расстояние между дробями увеличивается.

Пример 1. *Сравним* $\frac{41}{29}$ *и* $\frac{71}{50}$.

$$\frac{41}{29} и \frac{71}{50} \xrightarrow[?_1]{} \frac{12}{29} и \frac{21}{50} \xrightarrow[?_2]{} \frac{12}{17} и \frac{21}{29} \xrightarrow[?_2]{} \frac{12}{5} и \frac{21}{8} \xrightarrow[?_1]{}$$

$$\xrightarrow[?_1]{} \frac{7}{5} и \frac{13}{8} \xrightarrow[?_1]{} \frac{2}{5} и \frac{5}{8} \xrightarrow[?_2]{} \frac{2}{3} и \frac{5}{3} \xrightarrow[Табл.1]{} \frac{41}{29} < \frac{71}{50}.$$

Отметим, что расстояние между дробями увеличилось с 0,01 до 1.

При вертикальном вычитании сравниваемые дроби могут быть записаны в различных системах счисления.

2. «Горизонтальное вычитание»

Составим таблицу 2.:

	$b > d$	$b = d$	$b < d$
$a > c$	$\boxed{?_3}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
$a = c$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
$a < c$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\boxed{?_4}$

В таблице 2 представлено правило «больше большего».

При возникновении случая $\boxed{?_3}$ сравнение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ заменим на сравнение дробей $\frac{a-c}{b-d}$ и $\frac{c}{d}$.

При возникновении случая $\boxed{?_4}$ сравнение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ заменим на сравнение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c-a}{d-b}$.

Оба случая можно объединить в следующее правило:

Если числитель и знаменатель одной из сравниваемых дробей соответственно больше числителя и знаменателя другой дроби, то числитель и знаменатель этой дроби можно соответственно уменьшить на числитель и знаменатель другой дроби.

Пример 2. *Сравним* $\frac{41}{29}$ *и* $\frac{71}{50}$.

$$\frac{41}{29}\textit{и}\frac{71}{50}\xrightarrow[?_4]{}\frac{41}{29}\textit{и}\frac{30}{21}\xrightarrow[?_3]{}\frac{11}{8}\textit{и}\frac{30}{21}\xrightarrow[?_4]{}\frac{11}{8}\textit{и}\frac{19}{13}\xrightarrow[?_4]{}$$

$$\xrightarrow[?_4]{}\frac{11}{8}\textit{и}\frac{8}{5}\xrightarrow[?_3]{}\frac{3}{3}\textit{и}\frac{5}{8}\xrightarrow[\textit{Табл.2}]{}\frac{41}{29}<\frac{71}{50}.$$

Расстояние между дробями увеличивалось на каждом шаге.

Для пояснения происходящего обратимся к понятию медианты двух дробей, введенному А.Я. Хинчиным при исследовании цепных дробей [1].

Определение 1. Медиантой двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется дробь, числитель которой равен сумме числителей, а знаменатель — сумме знаменателей двух данных дробей:

$$\frac{a+c}{b+d}=mt\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right).$$

Поясним понятие медианты на следующей задаче:

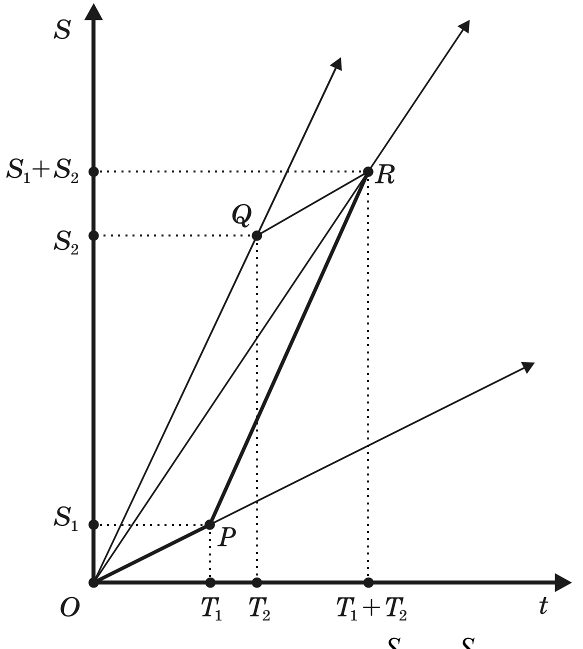
Задача 1. *Первый участок пути длиной* S_1 *км автомобиль проехал за* T_1 *часов, а второй участок пути длиной* S_2 *км автомобиль проехал за* T_2 *часов. Определить значение средней скорости автомобиля на всем пути?*

Решение:

$$\begin{cases} V_1=\dfrac{S_1}{T_1} \\ V_2=\dfrac{S_2}{T_2} \end{cases} \Rightarrow V_{cp}=mt(V_1;V_2)=\frac{S_1+S_2}{T_1+T_2}$$

Рассмотрим геометрическую модель:

Отметим на горизонтальной оси координатной плоскости точки $T_1, T_2, T_1 + T_2$, а на вертикальной оси точки $S_1, S_2, S_1 + S_2$. На координатной плоскости (с началом координат в точке O) точки P, Q и R с координатами (T_1, S_1), (T_2, S_2) и $(T_1 + T_2, S_1 + S_2)$ соответственно. Тогда: луч $\overrightarrow{OP}$ — луч дроби V_1; луч $\overrightarrow{OQ}$ — луч дроби V_2; луч $\overrightarrow{OR}$ — луч дроби V_{cp} и $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$.



Таким образом, медиант двух дробей $\dfrac{S_1}{T_1}$ и $\dfrac{S_2}{T_2}$ — это некоторое «взвешенное среднее» чисел V_1 и V_2, значение которого находится между этими числами. Отметим, что значение медианты сильно зависит от формы представления чисел и может принимать любые значения между ними. Если знаменатели в представлении чисел одинаковые, то медиант совпадет со средним значением.

Теорема 1. Медиант двух чисел разбивает отрезок между этими числами в отношении, обратно пропорциональном отношению знаменателей этих чисел.

Пусть $A = \frac{a_n}{a_d}$; $B = \frac{b_n}{b_d}$ и $A < B$.

$M = \frac{a_n + b_n}{a_d + b_d}$ — медиант чисел A и B. Тогда: $\frac{M - A}{B - M} = \frac{b_d}{a_d}$.

Доказательство:

$$M - A = \frac{a_n + b_n}{a_d + b_d} - \frac{a_n}{a_d} = \frac{a_d \cdot b_n - a_n \cdot b_d}{(a_d + b_d) \cdot a_d} = \frac{b_d \cdot \left(\frac{b_n}{b_d} - \frac{a_n}{a_d}\right)}{(a_d + b_d)} = \frac{b_d \cdot (B - A)}{(a_d + b_d)}$$

$$B - M = \frac{b_n}{b_d} - \frac{a_n + b_n}{a_d + b_d} = \frac{a_d \cdot b_n - a_n \cdot b_d}{(a_d + b_d) \cdot b_d} = \frac{a_d \cdot \left(\frac{b_n}{b_d} - \frac{a_n}{a_d}\right)}{(a_d + b_a)} = \frac{a_d \cdot (B - A)}{(a_d + b_d)}$$

$\Rightarrow \frac{M - A}{B - M} = \frac{b_d}{a_d}$. Теорема доказана.

Отметим «статистические» свойства медианты:

Пусть дан ряд чисел $n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots$. Определим $S_1 = \frac{n_1}{1}$. Для $k > 1$ положим $S_k = mt\left(S_{k-1}; \frac{n_k}{1}\right)$. Все S_k — это медианты (записанные в виде дробей), значение которых есть среднее значение набора $\{n_1, \cdots, n_k\}$. Легко видеть, что $S_{k+1} = mt(S_k; S_l)$.

Запишем условие задачи 1 о средней скорости с помощью доказанной теоремы: $\frac{V_{cp} - V_1}{V_2 - V_{cp}} = \frac{T_2}{T_1}$. Сформулируем задачу на движение, в которой данная формула поможет быстро найти решение.

Задача 2. *На первом участке пути автомобиль ехал со скоростью, на 10% меньше запланированной. На втором участке пути* *автомобиль увеличил скорость на 20% и прибыл в пункт назначения в точно назначенное время. Сколько времени автомобиль был в пути, если на прохождение второго участка он затратил на t минут больше, чем на прохождение первого?*

Решение. Обозначим через $V_1, V_2, V_{ср}$ скорости на первом и втором участках, плановую скорость. Через T_1, T_2 время прохождения первого и второго участка. Тогда:

$$V_1 = 0{,}9 \cdot V_{ср};\ V_2 = 1{,}2 \cdot V_1 = 1{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot V_{ср} = 1{,}08 \cdot V_{ср}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_{ср} - V_1}{V_2 - V_{ср}} = \frac{0{,}1 \cdot V_{ср}}{0{,}08 \cdot V_{ср}} = \frac{5}{4} \Rightarrow T_2 = \frac{5}{4} \cdot T_1$$

$$t = T_2 - T_1 = \frac{T_1}{4} \Rightarrow T_1 = 4 \cdot t \Rightarrow T_1 + T_2 = \frac{9}{4} \cdot T_1 = 9 \cdot t$$

Ответ: $9 \cdot t$ минут.

Вернемся к сравнению дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Построим на координатной плоскости геометрическую модель сравнения. На горизонтальной оси будет откладывать знаменатели дробей (Denominator), а на вертикальной оси — числители дробей (Numerator). Дроби $\frac{n}{d}$ будет соответствовать точка P с координатами (d, n), луч $\overrightarrow{OP}$ задает все значения пар (знаменатель, числитель) данной дроби. Сравнение дробей можно свести к сравнению «крутизны» лучей дробей: больше будет та дробь, луч которой образует с горизонтальной осью больший угол.

Отметим на координатной плоскости точку P с координатами (b, a). Точка P разобьём плоскость на несколько областей (рис. 2).

Пусть точка Q имеет координаты (d, c).

Если Q будет лежать в области I, то вектор $\overrightarrow{OQ}$ будет «круче» вектора $\overrightarrow{OP}$. Точка Q попадет в эту область только, если $\begin{cases} a < c \\ b > d \end{cases} \xrightarrow{\text{Табл.2}} \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

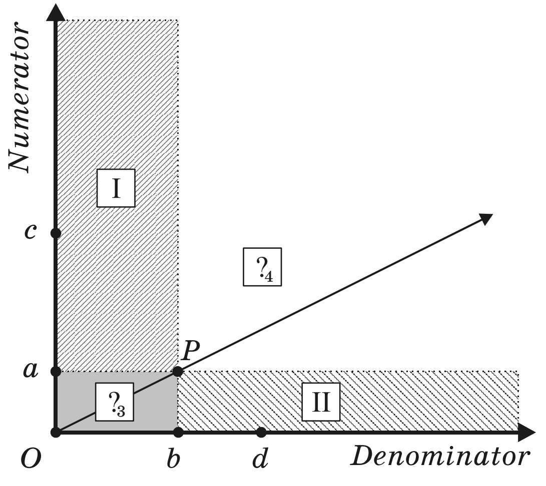


Рис. 2

Если Q будет лежать в области II, то уже вектор $\overrightarrow{OP}$ будет «круче» вектора $\overrightarrow{OQ}$. Точка Q попадет в эту область только, если $\begin{cases} a > c \\ b < d \end{cases} \xrightarrow{\text{Табл.2}} \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Если точка Q попадает в области $\boxed{?_3}$ или $\boxed{?_4}$, то сравнить «крутизну» векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ однозначно нельзя.

Предположим, что точка Q попала в область $\boxed{?_4}$. Тогда выполнено $\begin{cases} a < c \\ b < d \end{cases}$.

Вектора $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{PQ}$ лежат по одну сторону от луча $\overrightarrow{OP}$ (рис. 3), то есть они имеют одинаковое отношение «крутизны» относительно луча $\overrightarrow{OP}$. Таким образом, можно заменить вектор $\overrightarrow{OQ}$ на вектор

$\overrightarrow{PQ}$, составляющий с $\overrightarrow{OP}$ угол, больший чем $\angle POQ$. Вектор $\overrightarrow{PQ}$ имеет координаты $(d-b, c-a)$ и соответствует дроби $\dfrac{c-a}{d-b}$. Так можно пояснить смысл «рационализации», происходящей при «горизонтальном вычитании». Такой метод сравнения дробей можно назвать «методом медианты». Для повышения эффективности процесса сравнения дробей можно менять представление дробей, например, умножение числителя и знаменателя на удобное число $(10^k, 5)$.

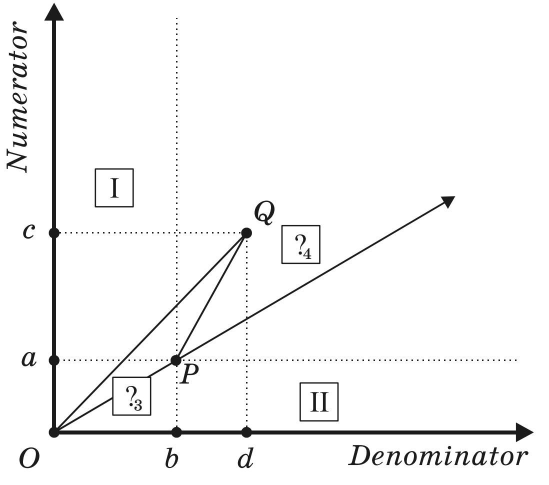


Рис. 3

Пример 3. *Сравним* $\dfrac{22}{7}$ *и* $\dfrac{355}{113}$.

$$\frac{22}{7}=\frac{220}{70}\,и\,\frac{355}{113}\to\frac{22}{7}=\frac{110}{35}\,и\,\frac{135}{43}\to\frac{22}{7}\,и\,\frac{25}{8}\to\frac{22}{7}\,и\,\frac{3}{1}\Rightarrow\frac{22}{7}>\frac{355}{113}$$

Возможен и другой путь:

$$\frac{22}{7}\,и\,\frac{355}{113}\xrightarrow[зн.*3]{}\frac{22}{21}\,и\,\frac{355}{339}\xrightarrow[ч-з]{}\frac{1}{21}\,и\,\frac{16}{339}\xrightarrow[з-ч]{}\frac{1}{20}=\frac{16}{320}\,и\,\frac{16}{323}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{22}{7}>\frac{355}{113}$$

Использование представленной методики превращает сравнение дробей в интересный творческий процесс, содержащий соревновательный элемент. Простые интуитивные действия «из большего вычитай меньшее» хорошо согласуются с алгоритмом Евклида по нахождению НОД.

На практике сравнение дробей можно применять для сравнения произведений чисел, хотя чаще дроби сравнивают вычислением соответствующих произведений.

Пусть надо сравнить $a \cdot d$ и $b \cdot c$. Это равносильно сравнению пар дробей $\left(\frac{a}{b} u \frac{c}{d}\right)$ или $\left(\frac{a}{c} u \frac{b}{d}\right)$ или $\left(\frac{d}{c} u \frac{b}{a}\right)$ или $\left(\frac{d}{b} u \frac{c}{d}\right)$. Если хотя бы одна пара состоит из правильной и неправильной дроби, то сравнение дробей, а значит и произведений, закончено. Если такой пары нет, то найдется пара, в которой обе дроби неправильные. Вычитаем в этой паре из каждой дроби по 1. Продолжаем алгоритм до завершения. Этот алгоритм показывает взаимосвязь всех изложенных методов.

Использование медианты и её свойств позволяет производить оценку значений, определять области значений функций, «красиво решить» многие задачи простыми методами.

Задача 3. *Доказать, что если* $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$, *то верно неравенство* $\frac{p}{q} < \frac{p+m}{q+n}$.

Решение: $\frac{p+m}{q+n} = mt\left(\frac{p}{q}; \frac{m}{n}\right) \Rightarrow \frac{p+m}{q+n} > \min\left(\frac{p}{q}; \frac{m}{n}\right) = \frac{p}{q}$.

Пример 4. *Оценить значение* $\frac{431}{481}$.

$$\frac{431}{481} = \frac{862}{962} = u\frac{431}{481} > \frac{430}{480} > \frac{425}{475} = \frac{17}{19} = \frac{34}{38} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{431}{481} > mt\left(\frac{862}{962}; \frac{34}{38}\right) = \frac{896}{1000} = 0{,}896\,.$$

$$\frac{431}{481} < \frac{435}{485} = \frac{87}{97} < \frac{87}{96} = \frac{29}{32} < \frac{35}{38}\frac{431}{481} < mt\left(\frac{862}{962}; \frac{35}{38}\right) = \frac{897}{1000} = 0{,}897\,.$$

Задача 4. *Найдите множество значений выражения* $h(x,y)=\dfrac{3x^2+4y^2}{6x^2+5y^2}$.

Решение: $h(x,y)=mt\left(\dfrac{3x^2}{6x^2};\dfrac{4y^2}{5y^2}\right)\Rightarrow h(x,y)\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{4}{5}\right)$.

Задача 5. *(фрагмент типовой задачи №19 для подготовки к ЕГЭ [3]). Известно, что* a,b,c,d *— попарно различные положительные двузначные числа. Может ли дробь* $\dfrac{a+c}{b+d}$ *быть в 11 раз меньше, чем сумма* $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$ *?*

Решение: Пусть $X=\dfrac{a}{b}; Y=\dfrac{c}{d}; M=\dfrac{a+c}{b+d}$. Будем считать, что $X\le Y$.

M — медиант дробей, следовательно $\dfrac{M-X}{Y-M}=\dfrac{d}{b}$.

Так как $\dfrac{b}{d}>\dfrac{10}{100}$ получаем, что

$$\frac{M-X}{Y-M}>\frac{1}{10}\Rightarrow 10\cdot(M-X)>Y-M\Rightarrow 11\cdot M>Y+10\cdot X>X+Y.$$

Ответ: Не может.

Школьникам младших классов важно дать понимание о том, что самыми простыми методами можно решать сложные задачи. Введение понятия медианты расширит математический кругозор школьника, даст ему новые инструменты для исследования и решения задач, а учитель получит возможность ставить перед учениками более интересные и сложные задачи.

Литература

[1] А.Я.Хинчин. Цепные дроби. — М.:Наука, 1978.

[2] В.И.Арнольд. Цепные дроби. — М.:МЦНМО, 2001.

[3] https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=508977.

С какой планеты наши Дети

Е.В. Осипова,
г. Санкт-Петербург
evonescence@gmail.com

О преподавании школьной математики написано достаточно большое количество учебников, задачников, различных методических пособий. И они действительно развернуто и в высшей степени профессионально описывают разнообразные способы, приемы и методы решения задач, а также разносторонне подают теорию.

Поэтому хотелось бы поговорить о другом аспекте школьного математического образования, без которого, как и без качественной математико-методической составляющей, хорошее образование вряд ли возможно. А именно, о том, Кого же мы учим.

Время идет, мир меняется и, несмотря на то, что истинные Ценности остаются нестираемыми, каждое поколение приходит со своим характером, требованиями и специфическими особенностями. Представляется, что сама по себе идея противостояния «отцов и детей», «учителя и ученика» несколько надуманна и проистекает от нежелания вдумчивого, осознанного и в высшей степени сердечного отношения друг к другу. Что она является обоснованием вечной спешки, поверхностного взгляда, патологической усталости, неуверенности, страхов и следующей отсюда кажущейся агрессии, которой зачастую на самом деле вовсе нет. А есть захлопнувшиеся дверцы детских сердец и раздосадованное нетерпение взрослых: «Ты снова тупишь?» Причем, казалось бы, на ровном месте.

Поэтому сначала хочется присмотреться к тем особенностям, с которыми сталкивается учитель современных детей. И поскольку статья написана на основе личного опыта автора и опыта работы коллег-единомышленников, речь в ней пойдет, прежде всего, о петербургских школьниках с 8 по 11 класс, поступающих в так называемые школы «городского набора» и впоследствии более или менее успешно учащихся в них. Школы, одной из которых в Петербурге является Академическая гимназия СПбГУ. Автор статьи обращается также к родительскому опыту, наблюдениям за своим тремя детьми и их сверстниками-старшеклассниками, учащимися в школах различного профиля.

По замыслу, данная статья предваряет цикл очерков, посвященных математическому образованию подростков с нестандартным мышлением, непростыми характерами, сложными диагнозами и рядом других специфических особенностей. При этом она представляет собой самостоятельное исследование, насколько удалось структурно описывающее современное поколение подростков, без которого не так органично воспринимаются последующие соображения по работе с этими талантливыми, но необычными и непривычными ребятами.

Идея написания цикла возникла после безуспешных попыток найти в педагогической и методической литературе ответы на волнующие вопросы и обнаружения того факта, что существует довольно много исследований и рекомендаций по обучению математике младших школьников, обладающих разнообразными специфическими способностями и нюансами. Школьники же старших классов в поле зрения психологов и педагогов-теоретиков попадают редко, а педагогам-практикам объективно не хватает времени на написание статей, они заняты непрерывной и нелегкой работой с подростками.

Поэтому здесь предпринята попытка в очень сжатой форме представить систематизацию опыта многолетнего общения с самым чудесным народом нашей планеты — Детьми. И если этот опыт окажется практически или духовно полезным глубокоуважаемым коллегам, будет прекрасно, потому что идет он от Сердца.

С чем же приходится работать учителю современных старшеклассников, детей двадцать первого века.

1. Невнимательность в прочтении условия.

Эту особенность можно назвать, пожалуй, самой трагикомичной. Какие только чудеса ни вычитывают дети в задачах. Неважно, что в условии решения системы неравенств написано про середину промежутка, мы бодро выписываем в ответ весь отрезок. Ни на секунду не усомнившись в том, что слова «не более одного корня» являются излишними, решаем параметрическое уравнение с поиском «ровно одного решения». Одной из любимых шуток-советов на уроках звучит напоминание «Друзья мои, не забудьте прочитать вопрос задачи!» И чем более замысловато или хотя бы просто развернуто она сформулирована, тем больше шансов, что добрая половина смысла будет потеряна.

2. Неаккуратность вычислений.

По собранию казусных ошибок не уступает первому пункту. Причем, если верить исследованиям еще советских нейрофизиологов РАН, самой сложной арифметической операцией для мозга из четырех — сложение, вычитание, умножение, деление — является вычитание. Об этом и методах минимизации ошибок, связанных с этой особенностью, будет сказано в продолжении этой статьи. Пока же хочется отметить фееричную способность детей делать ошибки во всех арифметических операциях, причем в самых неожиданных местах. Так, $3 \cdot 2 = 9$, $45 : 5 = 8$, $12 + 14 = 28$ и так далее. А 119 — вообще простое число, вот так. Потому как $17 \cdot 7 = 117$.

3. Неспособность быстрого счета.

Сложно сказать, что более влияет на возникновение и закрепление этой неприятности: тотальная информатизация общества, что само по себе, в общем-то, не хорошо и не плохо, или та же самая банальная невнимательность. Как бы то ни было, контрольные работы по геометрии, например, удаются не всегда не потому, что нет умения решать геометрические задачи, а потому что «посчитать не успели». При этом, если договориться с детьми об отказе от калькулятора, то за пару лет навык более или менее нарабатывается.

4. Неспособность быстро и верно решить тест.

Эта особенность отчасти связана с предыдущей, но не только. Интересно, что в последние годы появляется все больше ребят, теряющихся и чувствующих дискомфорт при выполнении тестов, особенно в ситуации ограничения времени, но при этом хорошо пишущих работы, содержащие открытые вопросы. Примерно то же касается математических диктантов на скорость. При наблюдениях за детьми и общении с ними обнаруживается, что в целом они довольно похоже описывают проблему. Многие начинают паниковать уже при одном упоминании о большом количестве вопросов теста и времени их выполнения, некоторые дополнительно к этому начинают со всех сторон обдумывать формулировку каждого вопроса. А кто-то дополнительно просто пугается необходимости выдерживать особый формат заполнения или подсознательно внутренне протестует против него. Ведь неверно поставленная запятая вместо точки или изображение единицы палочкой с «носиком» может полностью аннулировать задачу. И можно сколько угодно всерьез ругать детей за невнимательность, толку это вряд ли прибавит, потому что и так математические тесты для многих из них, вольно или невольно, все чаще превращаются в психологические.

5. Неумение выразить/оформить свои идеи.

Наверное, в каждом классе найдется большее или меньшее количество ребят, быстро решающих непростые задачи, особенно с нестандартными формулировками, при этом желающих выкрикнуть ответ с места, что может иметь мало общего с дисциплинарной неопрятностью. Или напротив, быстренько уловить идею и молчать, как партизаны. Не умеющих структурно записать или оформить свое решение, а также объяснить другим, как ими получен такой ответ. Дело даже не в особенностях почерка «кура лапой», как раз почерк может быть вполне читаем. Дело в особенностях мировосприятия ребенка. В его специфических, только ему самому понятных рассуждениях, либо в катастрофической неуверенности в себе, зудящей ему в ушки о том, что «вот сейчас его снова не поймут, и он будет выглядеть дурачком». Зачастую в его ранимости и тревожности, что у талантливых творческих людей встречается не столь уж редко.

6. «Странные» ошибки на контрольных работах.

Несколько лет назад в 11 физико-математическом классе *АГ* учился удивительный паренек. Он с готовностью отвечал на вопросы по теории и задачам, выходил к доске с объяснениями и был в них весьма успешен. Однако при чтении написанных им самостоятельных и контрольных работ любой, проверяющий их, приходил в ужас, причем было от чего. Поскольку даже сам автор опусов, получив свой труд на руки, приходил в ужас не менее, схватившись за голову и искренне вопрошая: «Ну как я мог такое соорудить?!» А действительно, как? Самое интересное, что такие чудеса случаются нередко. Наверняка они встречаются в практике каждого из нас. Сами ребята трактуют это по-разному, но чаще всего их объяснения сводятся к тому, что они слишком волновались из-за важности работы. Или боялись потерпеть неудачу, потому что работа значимая. На вопрос «а зачем именно ты боишься?» чаще всего мгновенного ответа не следует, но, если задавать его регулярно, терпеливо, мягко и при этом настойчиво, ребята будто начинают оттаивать, и странных ошибок на контрольных становится меньше.

7. Сложность восприятия текстового условия.

Чаще всего эта особенность восприятия учебного материала сказывается при решении собственно текстовых, а также геометрических задач. То есть задач, при решении которых возникает необходимость построения модели. Порой оказывается очень непросто перевести с языка текста на язык символов или графики. Часто дети приходят в 8 класс *АГ* с твёрдым убеждением, что для решения текстовых задач обязательно составлять именно таблицу. Хотя, с одной стороны, задача задаче рознь, с другой — табличное представление данных приносит пользу прежде всего людям, склонным к логическому мышлению, тогда как интуитам может больше подходить рисунок, картинка или схема, живое и красочное описание происходящих в задаче событий. Сложно воспринимаются текстовые условия и в тех случаях, когда надо, например, распутать задачу с параметром или не просто решить уравнение, а провести его исследование.

8. «Клиповое», или модульное, сознание.

Судя по всему, эта черта является следствием отсутствия у детей привычки чтения хорошей литературы, заменяемой просматриванием комиксов, беглым пролистыванием страничек планшетов и компьютерными играми. Ускорение темпа жизни и тотальную информатизацию общества обвинять в этом странно, видимо, надо стараться нивелировать отрицательные последствия и извлекать возможную пользу. По мнению учителей литературы, эта особенность часто проявляется в том, что ребенок «додумывает» буквы в словах, а слова в предложениях. То есть, вместо того, чтобы внимательно прочитать весь текст, он, видя его начало, достраивает остальное, зачастую довольно бездумно. В математике это может проявляться в подобном же додумывании текстового условия, о чем уже было сказано выше, а также в переносе известного метода решения задачи на внешне похожую, но принципиально иную по сути. Ситуация усугубляется стилистикой некоторых учебников, содержащих в каждом разделе *n*-ное количество подряд идущих однотипных задач.

9. При этом довольно высокая степень дивергентности мышления.

Казалось бы, есть некоторое противоречие, так как этот тип мышления настроен на поиск неординарных идей, использование нестандартных форм деятельности и на формирование исследовательского интереса. Модульность, клиповость и невнимательность, на первый взгляд, плохо вяжутся с изобретательностью и аналитикой. Однако это кажущееся противоречие снимается, если посмотреть на многих исследователей-гениев, совершенно неприспособленных в быту, а порой плохо социализируемых. Дивергентность же позволяет человеку лучше анализировать и сопоставлять факты, строить гипотезы и выдвигать догадки, даже если они немного чудаковаты и непривычны остальным. Многие современные дети — маленькие звездочки, рискующие быть непонятыми. Но их прекрасно понимают учителя с тонким, гибким и неординарным мышлением. Более того, при таком общении Учитель—Ученик происходит взаимообогащение: не только дети учатся у нас, но и мы у детей.

10. Панический страх выступления перед аудиторией.

В условиях ускорения энергоинформационной жизни общества все меньше времени остается на то, чтобы медленно и плавно рассказывать у доски теорию, читать доклады или всесторонне обсуждать методы решения необычных задач. И все же, даже в условиях дефицита времени, находить его для этой деятельности крайне необходимо, хотя бы иногда, потому что только так можно поддерживать творческий процесс в образовании. Равно как важно включать в этот процесс, по возможности, каждого ребенка индивидуально. Но делать это мягко и деликатно, с учетом желаний и психических возможностей детей. Многие из них боятся публичного выступления. По разным причинам, будь то страх перед учителем, стеснение, неуверенность в себе, боязнь насмешки одноклассников или что-либо еще. Такие дети особенно нуждаются в тактичной поддержке и одобрении. Часто от учителя зависит и то, как будут реагировать на выступления таких детей их одноклассники.

11. Нежелание конкуренции.

В последнее время в школы все чаще начинает внедряться так называемая балльно-рейтинговая система, при которой дети прямо или косвенно вынуждены конкурировать друг с другом. Однако конкурентная среда гармонична далеко не для всех. И если в некоторых коллективах эта система вполне успешно работает, то в других она вызывает только отторжение. Причем чем выше степень дивергентности мышления детей, тем вероятнее, что подобная система у них не приживется. В Академической гимназии предпринимались попытки ввода этого метода оценивания, однако дети отнеслись к нему не слишком позитивно. Чаще всего он вызывал у школьников недоумение из-за непонимания, что именно отражает тот или иной рейтинг. Но не меньшее значение имел отказ от любых амбиций в условиях конкуренции.

12. «Специфическая», непонятная мотивация обучения.

Очень интересный феномен, плохо поддающийся формализации. У каждого поколения можно найти свои внешние и внутренние мотивы, побуждающие детей учиться. При этом у некоторых поколений больше мотивов внешних, у других — внутренних, которые тоже могут сильно различаться. Так, например, в советское время довольно сильным был мотив «потому что так сказано на уровне государства» или «иначе меня не примут в комсомол», и это реально работало. Однако работала и обратная сторона медали: «круто не учиться, потому что против системы». В девяностые годы и в начале нынешнего века имел силу мотив «будешь хорошо учиться — дам тебе: конфетку, пять рублей, телефон…». Не вдаваясь в морально-нравственную составляющую того или иного обоснования необходимости получить образование, примем их как факт действенный. У современных подростков такие явные и привычные мотивы странным образом отсутствуют. Видимо, это является, с одной стороны, следствием ослабления родительского давления, внешней мотивационной составляющей. По наблюдениям автора статьи и ее коллег, все реже родительские амбиции переносятся на детей жестко и категорично. Хочется надеяться, что вместе с современными детьми действительно приходит новое поколение мам и пап, готовых слышать своих детишек и помогать им развиваться по собственному пути, и происходит это, как обычно бывает в таких случаях, в противовес негативным процессам в обществе: усилению потребительской парадигмы, системному оболваниванию и превращению процесса образования, обучения из искусства в сферу услуг. С другой стороны — одним из доминирующих внутренних детских мотивов стала выступать взаимоподдержка и готовность объяснить непонятый материал однокласснику. А вместе с готовностью стало значимым и непрерывное желание помочь, вместе с внутренней не наигранной толерантностью. Они ближе к природе и более хрупкие, причем во всех смыслах.

13. Стандартные методы обучения и воспитания не работают. В частности, «не действуют» двойки.

Для таких детей действительно вдруг перестают работать стандартные, пришедшие из авторитарной педагогики методы обучения. Отсутствие выраженного мотива, привычного нам, взрослым, порой сбивает с толку учителей, не давая им понятного инструмента воздействия. Наверняка многие сталкивались с тем, что ребенка можно ругать или хвалить, но если в его системе ценностей предмет эмоционирования учителя не выражен, то, скорее всего, воспитанный школьник вежливо выслушает тираду и пойдет думать над очередной интересующей его темой, расценив внушение, как информационный шум. Причем без претензий и с уважением — это тоже многократно отмеченная характерная черта современных детей. У них, при их ранимости, трепетности, чувственности, чуткости, тревожности и неуверенности, есть своеобразный внутренний стержень, который более является не опорой жесткости, а неким сгустком внутренних знаний о Мире, добре и любви. Они чутко ощущают ложь и неискренность и теряются от изменения правил игры во время игры. Поэтому авторитарные заявления «делайте так, потому что я сказал», «а не сделаешь — двойку поставлю» часто не приводят ни к какому результату. Ни к плохому, ни к хорошему. Угроза «только попробуй не сделать», как правило, работает ожидаемо: не сделает. Не из вредности, от недоумения и с перепугу.

14. Все чаще дети решают задачи с основной целью не столько получения ответа, сколько нарабатывания новых знаний.

Это одновременно и радует, и огорчает. Отрицательный аспект — та самая невнимательность в понимании вопроса задачи, отчасти следующая из того, что на первый план выходит сама модель, описание ситуации, интрига происходящего в условии. Иногда доходит до того, что ребенок, увлекшись распутыванием детективной истории условия, напрочь забывает подвести итог или сделать результирующий вывод. Однако при этом имеет место быть пока до конца не понятое, но, судя по всему, бесценно важное смещение акцентов с сиюминутного получения результата, зачастую довольно бездумного и механического, на перспективную компоненту. Что, при органичном закреплении такого подхода, может способствовать дальнейшему становлению критического и стратегического мышления. А также тому, что эти дети, как собственно и заложено в правильной системе образования, хотят учиться не для того, чтобы «сдать экзамен», а для истинного получения

Знаний! Этот подход исторически применялся в Ленинграде — Петербурге как раз в школах городского набора. Наверняка многие задавались вопросом, каким образом при том, что всю страну носит слева направо и от одного берега к другому, этим школам удается держаться более или менее в одном русле качественного и гуманного образования. Дело в реализации именно такого подхода. И, что главное, — в реализации естественным образом, не насаждаемой сверху. Впрочем, нестандартность мышления и способность творить приказом не утвердишь, поскольку они предполагают осознанность и не сиюминутность, а значит — не заформализованность. Традиционно и, снова подчеркну, естественно, эти школы развивались на том, что работать учителями в них приходили прежде всего бывшие выпускники, и неважно, именно этой школы или родственной. Стиль и Дух, по большому счету, в них един. Выражается он в том, что учителя просто Любят детей, им нравится и хочется передавать своим ученикам знания и любовь не только к предмету, но и суть к самому процессу познания. И главное — дети со-настроены с ними. Они просто любят узнавать новое, потому что это здорово и красиво. В этом смысле дети XXI века — самые что ни на есть благодарные участники процесса, главное для нас — быть «на одной волне» с ними.

А это не так легко в силу разницы в характерах поколений и в силу того, что у этой разницы, помимо прочих, есть две очень непростые объективные причины, о которых пишут и говорят многие, но корни которых до конца не изучены. Первая — среди современных детей становится все больше левшей, а это люди с «правополушарным мышлением», интуиты. По мнению академика РАО Марьяны Михайловны Безруких, процент левшей в последние годы прогрессивно нарастает. Если раньше речь шла о 10% таких детей, то сегодня можно говорить уже о 25%. Специфика четвертой части детей, мыслящих и чувствующих иначе, нежели заложено привычной системой образования, построенной на логике и отработке заданий, вряд ли может быть проигнорирована.

К этим ребятам добавляются дети с диагнозом ММД — минимальная мозговая дисфункция — так не любимым в признании врачами и родителями. Это комплекс относительно легких нарушений и заболеваний центральной нервной системы, которые могут проявляться в форме девиантного поведения, речевых расстройств, синдрома дефицита внимания, гиперактивности, замедленного психомоторного развития и прочего. В России наука и практика выделяют такие возможные формы проявления, как дислексия и дисграфия. Как отмечают многие специалисты, непосредственно работающие в образовании, в том числе известный российский ученый в области теории сознания Татьяна Владимировна Черниговская, в настоящее время среди способных ребят довольно большой процент детей с ММД. Сложность и специфичность их обучения усугубляется непростой диагностикой, страхом и непониманием со стороны родителей, отсутствием правдивой информации и психологическим неприятием социума.

Завершить эту и одновременно предварить следующую статью хочется словами Я.А. Коменского: «Сначала любить — потом учить».

Метод Математической Индукции

И.Б. Писаренко,
г. Москва
gbpltcm@gmail.com

Статью по индукции, которую написал И.С. Рубанов, я считаю одной из лучших на сегодняшний день для первоначального знакомства с предметом. Очень интересные мысли об индукции в своих статьях, книгах, выступлениях высказывает А.В. Шаповалов.

В учебниках знакомство с методом математической индукции начинается с доказательства тождеств и происходит это примерно так:

Опр. (Принцип математической индукции) Если свойство, зависящее от натурального n, во-первых верно при $n=1$, и, во-вторых, из предположения, что оно верно при $n=k$ следует, что оно верно при $n=k+1$, то считают, что это свойство верно для любого натурального n.

(Не очень понятно. Но, наверное, примеры нам сейчас все прояснят!)

Например: *Доказать, что* $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство: Рассмотрим $n=1$ получаем : $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ — верно.

Пусть это верно для $n=k$, т.е. $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Рассмотрим $n=k+1$.

$$1+2+3+4+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$

$$=\left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ч.т.д. М.М.И.

Это рассуждение вызывает у новичка ряд вопросов. Для применения ММИ нужен ряд утверждений, а у нас всего одна формула. Не все понимают, как при подстановке $n=1$, у нас вместо суммы $1+2+\cdots+n$ получается просто 1. Далее, по ходу доказательства $n=1$ и $n=k$, значит $k=1$? А если посмотреть еще дальше, то $n=k$ и $n=k+1$, вообще получается $k=k+1$, т.е. очень странно. Ну и последнее:

Чтобы доказать, что $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ мы берем $n=k$, получаем $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Предполагаем, что это равенство верно, потом что-то с ним делаем. Зачем это делать если верно равенство $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ и так как $n=k$, то верно и равенство $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Какой-то замкнутый круг. Непонятно...

Мы видим, что при изучении ММИ учащийся сталкивается с рядом трудностей.

Какая же из них самая большая? Выявим ее, сравнив ММИ с другими методами доказательств. Отличие очевидно — ММИ единственный метод, который применяется для доказательства бесконечного ряда утверждений. В этом состоит основная психологическая трудность метода. Поэтому мы будем доказывать с помощью ММИ конечное число утверждений. Мы перейдем от задач на луче, к задачам на отрезке, что позволит оставить только одну переменную в рассуждениях вместо двух. Бесконечность будет присутствовать в наших задачах, но лишь неявно, на заднем плане, пока учащийся не привыкнет к методу. Кроме того, суть метода математической индукции не в бесконечной серии задач, а в связи одной задачи с другой. В большинстве реальных задач на математическую индукцию есть большое натуральное число, и мы опираясь на связи между задачами должны построить конечную цепочку к нему ведущую.

Первое знакомство с методом ММИ.

Вот поезд мчится сквозь туннель, в туннеле дым и чад.
В купе четыре мудреца задумчиво сидят.
Влетела копоть сквозь окно и вот в конце концов
Она попала на лицо двоих из мудрецов.

Сидели хмуро мудрецы глаза уставив в пол,
Но вот открылась дверь купе и проводник вошел.
Сказал он среди Вас друзья есть грязные увы,
На остановках есть вода, идите мыться Вы.

И вот один из грязных двух в раздумья погружен,
Не знает как определить чист или грязен он.
Не хочет ни за что напрасно мыться, вот чудак
Но на соседа он глядит и рассуждает так.

Допустим чист я но тогда бы понял мой сосед,
Что грязен он, ведь видно что, тут больше грязных нет.
Но умываться не идет сосед мой вот беда,
Выходит грязен я, ну что ж, умоюсь я тогда.

Вот мыться грязные идут, и вот чисты опять,
А тех, кто слушал наш рассказ мы просим написать.
Что было б если трое было грязных мудрецов,
Пошли бы мыться или нет они в конце концов?

Задача 1. *В поезде едут 2 мудреца. Внезапно поезд въезжает в тоннель и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лицо его коллеги испачкано в саже, влетевшей в окна вагона. Они начинают смеяться друг над другом, однако внезапно, самый умный догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как он догадался?*

Дети удивляются, когда я даю эту задачку. Ответ им очевиден.

Задача 2. *В поезде едут 3 мудреца. Внезапно поезд въезжает в тоннель и после того, как загорается свет, каждый из мудрецов видит, что лица его коллег испачканы в саже, влетевшей в окна вагона. Они начинают смеяться друг над другом, однако внезапно, самый сообразительный мудрец догадывается, что его лицо тоже испачкано. Как ему это удалось?*

Тут моментально решить задачу уже не получается. Тогда я даю указание: сведите эту задачу к задаче с двумя мудрецами. После некоторого числа подсказок мы с группой выходим на такое решение: как рассуждал самый умный из мудрецов? Если у меня чистый лоб, то мои оставшиеся двое коллег смеются друг над другом. То есть задача сводится к двум мудрецам. Но тогда они долго смеяться не стали бы. Значит лоб у меня грязный.

Далее я прошу решить задачу про 5 мудрецов, группа уже понимает, что надо сводить одну задачу к другой, но попытка свести задачу к трем мудрецам заканчивается провалом. Некоторые, самые сообразительные догадываются, что надо вставить промежуточное звено, то есть вставить звено про четырех мудрецов.

Как решается задача про 4-ех мудрецов? Если в поезде 4 мудреца, то самый умный из них думает, что если лоб у него чистый, то задача тогда сводится к 3-ем мудрецам с грязными лбами, а мы знаем, что они долго смеяться не будут. А далее, второй этап, задача с пятью мудрецами сводится к задаче с четырьмя мудрецами. Я подчеркиваю, что мы не могли перескочить через одного мудреца, то есть от 2 мы можем перейти к 3, от 3 к 4, от 4 к 5. А от 3 к 5 или от 2 к 4 нет. Я спрашиваю: а дальше? Дети отвечают, что да, тоже нет проблем, от 5 к 6 и так далее. Я спрашиваю: «А если бы задачка звучала про 100 мудрецов, как бы мы делали? Дети говорят, что мы бы сказали "и так далее", пока не дойдем до 100». Но математиков слово «и так далее» не устраивает, а сто раз повторять одно и тоже невозможно, слишком длинный текст получится.

Чтобы закодировать очень много однотипных переходов мы вводим переменную. Предполагаем, что доказали для K мудрецов, добавляем еще одного, то есть получается $K+1$. Значит, соответственно, пусть K мудрецов смеяться не будут долго над собой, тогда рассмотрим $K+1$ мудреца. Самый умный из них рассуждает так: если у меня чистый лоб, то тогда мои коллеги смеются друг над другом, и меня не существует для них как повод для смеха. Тогда задача сводится к K мудрецам, а мы знаем, что они долго смеяться друг над другом не будут. То есть у меня лоб грязный.

Схема рассуждений для 100 мудрецов такая: Сначала мы доказали что 2 мудреца не будут долго смеяться друг над другом. А дальше мы доказываем, если K смеяться не будут, то и $K+1$ смеяться тоже не будут. А раз так, то мы можем от 2 добраться до 100.

Заметим, что мы доказали не только для 100-го. От 100-го мы можем перейти к 101 и так далее. С помощью перехода мы всегда можем сделать следующий шаг. То есть, мы решили задачу не для одного, не для двух и не для ста, а для любого количества мудрецов. Этот способ доказательства называется методом математической индукции. Он используется, когда нам надо доказать длинный ряд утверждений.

Вообще доказательство по методу математической индукции напоминает игру в домино. Когда выстраиваются кости домино одна за другой и толкается первая кость, она сбивает вторую, вторая третью и идет такая цепочка падений, пока не упадет последняя.

Я использую такую метафору, пусть за забором в ряд стоит сто кирпичей, и мы должны свалить последний сотый кирпич, но из-за забора с помощью палки можем дотянуться только до первого. Что делать? Ответ очевиден: надо уронить палкой первый, и если кирпичи стоят достаточно близко, волна падений дойдет до последнего.

Итак, доказательство методом математической индукции длинного ряда утверждений (или последнего утверждения ряда) Утв 1, Утв 2,……., Утв 100 состоит из двух этапов:

(Базовая задача). На этом этапе мы доказываем начальное утверждение.

(Типичный переход). На этом этапе мы предполагая доказанным утверждение K , доказываем следующее утверждение $K+1$.

После этого все утверждения в ряду, начиная с первого, доказаны.

Давайте посмотрим, как работает метод математической индукции на примере следующей задачи:

Задача 3. *Торт разрезали тринадцатью прямолинейными разрезами на куски. Оказалась, что одна сторона у ножа была отравлена. Докажите что именинник может первым выбрать себе съедобный кусок.*

Решение Методом Математической Индукции (ММИ).

(Базовая) Пусть проведен только один разрез. Значит, какая-то из частей будет съедобной.

(Переход) Предполагаем, что после проведения K разрезов есть съедобный кусок. Проводим еще одну разрез. Если он не задевает съедобный кусок, то все нормально. Если он пересекает съедобный кусок, то один из получившихся кусочков тоже съедобен. Значит для $K+1$ разрезов мы тоже доказали. И следовательно, мы доказали, что после тринадцати разрезов остается съедобный кусок.

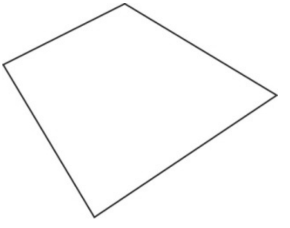
Чтд. ММИ.

Задача 4. *Строители строят многоэтажный дом из бетонных плит, окрашенных с одной стороны в синий цвет, а другой в желтый. Сначала возводятся наружные стены, а затем по одной ставятся перегородки так, что каждая новая перегородка закрепляется концами к уже существующим стенам или перегородкам. Докажите, что если снаружи дом желтый (даже с крыши и из подвала), то в нем есть хотя бы одна полностью синяя комната.*

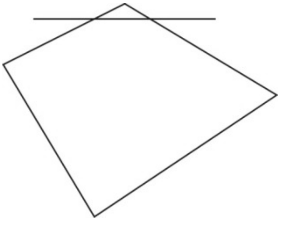
Замечание: Когда ученики решают эту задачу, они стараются решить её просто на словах. Я прошу оформить её решение по схеме метода математической индукции, что бы было четко понятно, где Базовая задача и где Типичный переход, что бы структура выделялась.

Задача 5. *Докажите что найдется выпуклый 2018-угольник имеющий ровно 3 острых угла.*

Давайте начнем с анализа: Самый простой из выпуклых многоугольников это четырехугольник. Давайте подумаем, есть ли четырехугольник, у которого ровно 3 острых угла? Да, надо сделать один угол тупым.



Теперь возникает задачка, как пользуясь этим четырехугольником ровно с тремя острыми углами построить пятиугольник ровно с тремя острыми углами? Возможны два подхода. Надо либо пристроить угол, либо отрезать. Только надо понять, что отрезать необходимо тупой угол. Так как при отрезании тупого угла, мы получим два новых тупых угла.



Можем теперь переходить к оформлению задачи по методу математической индукции. Мы начинаем с утверждения для четырехугольника.

(Базовая) Мы просто предъявляем четырехугольник с тремя острыми углами и одним тупым.

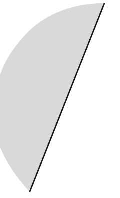
(Переход) Пусть мы построили K угольник ровно с тремя острыми углами. Теперь надо построить $K+1$ угольник. Для этого отрезаем тупой угол, у нашего K угольника и получаем $K+1$ угольник, у которого ровно три острых угла. Так, отрезая по одному тупому углу мы из четырехугольника получим нужный нам 2017-угольник. Ч.т.д. ММИ.

Замечание: Мы не обязаны останавливаться, мы можем резать дальше.

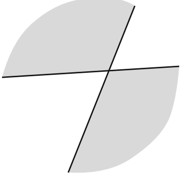
Задача 6. *Плоскость поделена на области 100 прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, что бы любые две соседние области были окрашены в различные цвета. Соседние области, это области имеющие общий участок границы.*

Если области имеют только одну общую точку, то эти области не соседние.

Анализ:



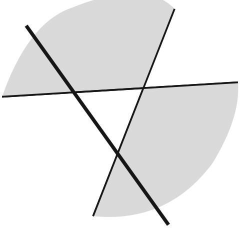
Понятно, что если мы проведем только одну прямую, то одна сторона будет белая, а другая черная. Тут проблем нет. А если мы проведем еще одну прямую, как сделать разноцветную окраску? Поменять белый на черный и черный на белый в одной из полуплоскостей.

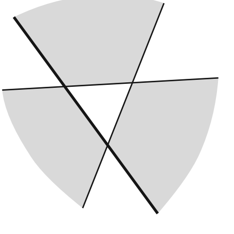


Мы выяснили, что после того как прямая делит плоскость на 2 части, в одной части надо поменять цвета. Давайте оформим нашу идею в виде доказательства по методу математической индукции.

(Базовая) Одна прямая, проблем с раскраской нет.

(Переход) Пусть есть шахматная раскраска для K прямых. Проводим еще одну прямую.





Она разбивает плоскость на 2 полуплоскости. В одной полуплоскости меняем цвета.

Давайте поймем, почему все будет нормально. У нас до этого все было согласованно, если мы одновременно поменяем цвета, то старые границы конфликтовать не будут. Значит, возможен конфликт только вдоль новой границы, но вдоль новой границы соседние области сначала были одинакового цвета, а потом мы их поменяли. Поэтому вдоль новой прямой все тоже будет нормально, и свойство шахматной раскраски будет сохраняться. То есть мы доказали переход. Чтд. ММИ

Задача 7. *Девять разбойников добыли мешок золотого песка. Они хотят поделить его так, что бы каждый был уверен, что он получил не меньше* $1/9$ *золота. Никаких приборов для измерения у них нет. Однако каждый на глаз умеет оценивать величину золота. Мнения разбойников на величину куч могут расходиться. Как им поделить добычу?*

Анализ: Начнем с одного разбойника. Делить нечего, он все берет себе. Подходит второй разбойник, первый делит свое золото на две кучки, а вот выбор кучки должен делать второй, чтобы все были довольны. Два разбойника сидят со своими кучками, подходит третий. Если каждый поделит свою кучу пополам, то третьему достанется не менее половины от всего золота, поэтому каждый из первых двух должен делить свое золото не на две, а на три кучки. Третий выбирает по кучке у первого и второго, и все счастливы. Оформим решение.

Базовая: Первый разбойник все золото берет себе.

Переход: Пусть K разбойников золото поделили и довольные сидят возле своих куч. Когда подходит еще один разбойник, каждый из старичков делит свою кучу на $K+1$ часть. Новый разбойник выбирает по одной части у каждого старичка. Старички довольны, они сами делили на равноценные части свое золото. Новичок доволен, он мог выбрать любую из кучек старичков. Задача решена.

Упражнения

1: *В квадрате* 8×8 *вырезали одну клетку, докажите что остаток можно разрезать на уголки из трех клеток.*

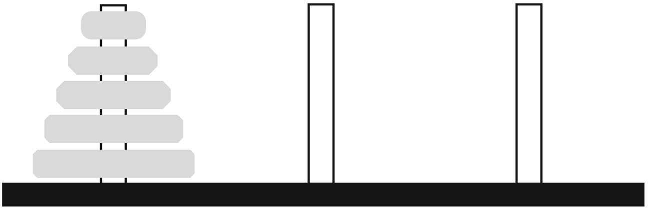
2: *Укажите все денежные суммы до миллиона рублей, которые во времена СССР можно было заплатить двумя способами: в виде четного и виде нечетного числа купюр (в обращении были купюры 1, 3, 5, 10, 25, 50, 100 рублей).*

3: *Найти такую систему из десяти отрезков, что из любых трёх отрезков нельзя составить треугольник.*

4: *Придумайте 10 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.*

5: *Докажите, что число состоящее из восьмидесяти одной единицы делится на 81.*

6: *Имеется пирамида с пятью кольцами возрастающих размеров (внизу — самое большое кольцо) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней.*



7: *Представить число 1 в виде 10 различных дробей с числителем 1.*

8: Доказать, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\ldots\ldots\ldots}}}}}<3$ (100 корней квадратных)

Задачи для домашнего задания

1. *Десять мудрецов усадили в ряд так, что первый видит всех, второй всех кроме первого, третий всех, кроме первых двух, десятый не видит никого. Затем им показали 19 колпаков, десять красных и 9 белых. Завязали глаза и надели каждому на голову красный колпак. После этого им развязали глаза и спросили, могут ли они определить цвет своего колпака. После того, как первые 9 ответили отрицательно, последний ответил какого цвета на нем колпак. Как он рассуждал?*

2. *На плоскости проведено несколько окружностей, доказать что эту плоскость можно раскрасить так, что бы была шахматная раскраска.*

3. *На доске написаны числа 2, 0, 1, 7. Каждую минуту вместо каждого из чисел записывают сумму трех других чисел. Может ли в некоторый момент первое число стать четным?*

4. *Маленькому Коле подарили ножницы. Он отрезал от занавески треугольный кусок, после чего принялся резать его на части. Коля выбирает какой-нибудь из уже имеющихся кусочков занавески, после чего разрезает его прямолинейным разрезом на две части. Докажите, что сколько бы Коля так не работал, среди получившихся кусочков занавески всегда можно будет найти треугольник.*

5. *У многоугольника во внешнюю сторону растут волосы. Такой многоугольник будем называть волосатым. Его пересекают прямые, на которых с одной стороны тоже растут волосы. Докажите что хотя бы одна из получившихся частей окажется волосатой снаружи.*

6. *По кругу стоят 25 машин с одинаковым расходом бензина. Суммарного количества бензина хватает на 1 круг. Если машины рядом. Разрешается переливать бензин из одной машины в другую. Докажите, что можно выбрать одну из машин и проехать на ней полный круг.*

7. *В некоторой стране каждый из тысячи городов соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.*

В учебниках знакомство с методом математической индукции начинается с доказательства тождеств, неравенств и делимости.

Доказать, что:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}\quad 1+2=\frac{2(2+1)}{2}\quad 1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$$

$$1+2+3+4=\frac{4(4+1)}{2} \text{ и т.д. до 100.}$$

Так никто не записывает, записывают в свернутом виде с помощью переменной.

Задача 8. *Доказать, что* $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $n=1,2,3,\ldots\ldots 100$.

Док-во (ММИ):

(Базовая) Проверим первое равенство. Это сделать легко $1=\dfrac{1(1+1)}{2}$ верно.

(Переход) Пусть верно равенство K : $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Для того, чтобы перейти к следующему равенству, добавим к обеим частям равенства K слагаемое $(k+1)$:

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1).$$

Равенство $K+1$ будет доказано, если мы докажем, что

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Разделив последнее на $k+1$ получим $\dfrac{k}{2}+1=\dfrac{(k+1)+1}{2}$.

Домножив на 2, получим, $k+2=(k+1)+1$.

Последнее равенство верно, значит верны и предыдущие (так как мы совершали равносильные преобразования).

Получили

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Ч.т.д. ММИ.

Замечание. Для лучшего понимания ММИ изобразим волну доказательств графически (волна уже дошла до утверждения с номером K):

$У_1 : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (Да!)

$У_2 : 1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ (Да!)

$У_3 : 1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2}$ (Да!)

....(Да!)

$У_k : 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (Да!)

$У_{k+1} : 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ (?)

....(?)

$У_{100} : 1+2+3+\ldots\ldots+99+100 = \frac{(100)(100+1)}{2}$ (?)

Задача 9. *Доказать, что* $1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $n = 1,2,3,\ldots\ldots100$.

Новичкам бывает трудно записать первое равенство, давайте сначала запишем второе и третье:

$$1^2+2^2 = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} \quad 1^2+2^2+3^2 = \frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6}.$$

Теперь нетрудно по аналогии записать первое

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$

Док-во (ММИ):

(Опорная) Проверим первое равенство $1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ — верно.

(Переход) Пусть доказано равенство K:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Для того, чтобы перейти к следующему равенству, добавим к обеим частям равенства K слагаемое $(k+1)^2$, в результате получим:

$$1^2+2^2+3^3+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2.$$

Равенство $K+1$ будет доказано, если мы докажем, что

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}.$$

Сократив обе части проверяемого равенства на $k+1$ и умножив на 6 получим $k(2k+1)+6(k+1)=(k+2)(2k+3)$.

Раскрыв скобки получим $2k^2+k+6k+6=2k^2+4k+3k+6$.

Последнее равенство верно, значит верны и предыдущие (так как мы совершали равносильные преобразования). Чтд. ММИ.

Задача 10. *Дано:* $a_1=3$, $a_{n+1}=7a_n+3$. *Доказать*

$$a_n=0{,}5*7^n-0{,}5.$$

(Опорная) Проверим первое равенство

$$a_1=0{,}5*7^1-0{,}5=3{,}5-0{,}5=3.$$

(Шаг) Пусть верно равенство K: $a_K=0{,}5*7^K-0{,}5$.

Проверим следующее:

$$a_{K+1}=7a_K+3=7\left(0{,}5*7^n-0{,}5\right)+3=0{,}5*7^{n+1}-3{,}5+3=0{,}5*7^{n+1}-0{,}5.$$

Чтд. ММИ.

Задача 11. *Доказать, что* $2^n\ge n+1$, *для* $n=1,2,3,\ldots,K,\ldots\ldots$

(Начало) Проверим первое неравенство $2^1\ge 1+1$ (Верно).

(Шаг) Пусть верно неравенство K: $2^k\ge k+1$ домножим его на 2, получим $2^{k+1}\ge 2k+2=k+2+k\ge k+2$. Чтд. ММИ.

Другие схемы доказательств методом математической индукции.

Задача 12. *Нам дано:* $x+\frac{1}{x}$ *— целое, необходимо доказать, что* $x^{1000}+\frac{1}{x^{1000}}$ *тоже целое.*

Будем доказывать методом математической индукции.

(Начало) у нас дано $У_1 : x+\frac{1}{x}$ — целое.

(Шаг) $У_k : x^k+\frac{1}{x^k}$ — целое. (!)

Рассмотрим $У_{k+1} : x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ — целое (?).

Давайте подумаем, как из $x^k+\frac{1}{x^k}$ получить $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$. Надо умножить на $x+\frac{1}{x}$.

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k-1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k+1}}$$

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$$

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$ — целое. Т.е. получается, что для того что бы доказать, что $k+1$ строчка целая, нам надо использовать не только k строчку, но и $k-1$ строчку.

Если рассуждать на доминошках, то для того что бы упала следующая доминошка, должны упасть не одна, а ровно две предыдущие.

Наверное, и вначале должна упасть не одна доминошка, а две.

Поэтому Начало надо дополнить:

(Начало) $У_2 : x^2+\frac{1}{x^2}$ — целое (?).

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ — целое (!) А раз так, то чтд. ММИ.

Но нам необходимо обосновать этот метод.

Теперь у нас такая схема: падают первая и вторая доминошки:

(Начало) $Д_1$ и $Д_2$ — упали.

(Шаг) Если падает $Д_k$ и $Д_{k+1}$, то падает и $Д_{k+2}$.

Давайте убедимся, что при такой схеме у нас все доминошки упадут.

Пусть какая-то доминошка у нас устояла, тогда из двух перед ней какая то тоже должна устоять, потому что если бы 2 перед ней упали, то наша бы тоже упала. Будем опираться на ту доминошку, которая устояла, и снова повторим наши рассуждения. Так рано или поздно мы дойдем до начала и у нас получится, что одна из двух первых доминошек должна была устоять, а мы знаем, что они обе упали. Поэтому стоящих доминошек нет.

Упражнение: Докажите, что если падают 3 первые доминошки, и всегда, когда падают 3 предыдущие, падает и следующая, то все доминошки упадут.

Задача 13. *Докажите, что любую сумму от 8 рублей, можно разменять купюрами в 3 и 5 рубля.*

Доказательство: Поскольку мы не знаем, сколько нам надо будет рассмотреть первых случаев, давайте начнем с Шага.

(Шаг) Пусть мы разменяли k рублей. Какую следующую сумму мы можем разменять?

Понятно, что от k мы можем перейти либо к $k+3$ либо к $k+5$, добавив к нашей сумме трешку или пятерку.

$k+3$ более мелкое и нам более удобное. Становится понятным, что нам надо рассмотреть три начальных случая.

То есть:

$У_8 : 8 = 5+3$;

$У_9 : 9 = 3+3+3$;

$У_{10} : 10 = 5+5$.

Следовательно, чтд. ММИ.

Замечание: Если обобщать по этому направлению, то можно сформулировать принцип обобщенной индукции.

(Начало) Падает первая доминошка.

(Шаг) Если падают все предыдущие, то падает и следующая.

Задача 14. *Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую степень).*

Доказательство:

(Начало) $У_1 : 1 = 2^0$.

(Шаг) Пусть для всех чисел меньших A мы уже все доказали. Пусть 2^k — наибольшая степень двойки, не превосходящая A. Если $A = 2^k$ то ч.т.д., иначе рассмотрим число $B = A - 2^k$. Оно строго меньше A и поэтому должно по предположению индукции раскладываться в сумму разных степеней двойки. Кроме того, по построению, *B* меньше чем 2^k. Поэтому $A = B + 2^k$ тоже раскладывается в сумму разных степеней двойки. Чтд. ММИ.

Метод математической индукции — парадоксы.

Задача 15. *Докажем методом математической индукции, что любые n чисел равны.*

(Начало) Если число только одно, оно равно самому себе, $a_1 = a_1$.

(Шаг) Пусть у мы доказали, что любые k чисел равны.

Рассмотрим произвольные числа $a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1}$.

Отбросив последнее число, получим набор из к чисел, по предположению индукции они равны: $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$.

Теперь отбросим первое число, снова получим набор из *k* чисел, поэтому $a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. Отсюда заключаем $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a_{k+1}$. Ч.т.д. ММИ.

В чем ошибка? Давайте разберемся: С базой не поспоришь, но надо отследить Шаг. Давайте посмотрим Шаг от одного числа к двум. Из того что $a_1 = a_1$ и $a_2 = a_2$ не следует, что $a_1 = a_2$. Поэтому надо внимательнее следить за Шагами. Давайте еще рассмотрим задачи и попытаемся обнаружить, в чем ошибка.

Задача 16. *Утверждается, что если у нас есть какое-то количество джентльменов, сколько бы бутербродов мы перед ними не положили, они скорее умрут с голода все, если они истинные джентльмены, чем кто-то из них возьмет бутерброд.*

Давайте доказывать индукцией по числу бутербродов.

(Начало) Когда у нас есть один бутерброд, понятно, что каждый джентльмен думает так: если я возьму и съем этот бутерброд, я остальных поставлю в неловкое положение. А настоящий джентльмен не ставит всех остальных в неловкое положение. Поэтому тут проблем не возникает.

(Шаг) Теперь мы предполагаем, что k бутербродов они тоже не съедят.

Рассмотрим теперь ситуацию с $k+1$ бутербродом. Каждый из них рассуждает следующим образом: если я возьму 1 бутерброд, то я сведу ситуацию к предыдущей, где никто ничего брать не может, значит, я поставлю всех в неловкое положение, поэтому я его брать не буду. Т.е. Шаг от k к $k+1$ завершен, а раз так, что можно утверждать, что для любого числа бутербродов джентльмены умрут с голоду, но трогать их не будут. Ч.т.д. ММИ

Объяснение: С базой не поспоришь. Но ошибка заключается в том, что когда мы переходим от k к $k+1$ рассуждение не верно, потому что если джентльмен берет бутерброд, то он им насыщается и джентльменов претендующих на бутерброд становится меньше на 1. Поэтому задача не сводится к задаче с числом бутербродов меньшим на 1. Потому что там все были голодные, а здесь один уже сытый.

Задача 17. *Докажем методом математической индукции, что все люди лысые.*

Индукция по числу волос.

(Начало) Если у человека всего одна волосинка растет на голове, понятно, что он лысый.

(Шаг) Пусть у нас теперь есть лысый с некоторым числом волосинок на голове. Понятно, что если мы ему добавим один волос, он лысым и останется. Добавление одного волоса лысого не превратит в волосатого. А раз так, то методом математической индукции получается, что, сколько бы у человека не было волос, он все равно лысый. А раз так, то все люди лысые.

Объяснение: Здесь ошибка более тонкая. Дело в том, что понятие «лысый» не является точным понятием. То есть по поводу одного и того же человека могут быть разные мнения: одни считают его лысым, а другие — нет. Точно определить это понятие невозможно. А значит, определенно сказать лысый этот человек или нет не представляется возможным. Этот парадокс показывает, что к неточно определяемым понятиям, метод математической индукции применять нельзя, потому что он будет приводить к противоречиям.

Упражнения

1. *Дано:* $a+b=x+y$, $a^2+b^2=x^2+y^2$. *Доказать:*

$$a^{100}+b^{100}=x^{100}+y^{100}.$$

2. *В Вишкинландии имеются в обращении банкноты 7 и 11 рублей. Докажите, что ими можно уплатить без сдачи любую сумму начиная с 60 рублей.*

3. *Кусок бумаги разрешается рвать на пять или на восемь частей. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число частей. Начиная с 21.*

4. *Дано* $b_n+2=5b_{n+1}-6b_n$, $b_1=1$, $b_2=5$. *Доказать что:* $b_n=3^n-2^n$.

5. *На доминошках обоснуйте схему обобщенной индукции.*

6. *Докажите что любое натуральное число, большее единицы можно разложить на простые множители.*

7. *Найдите ошибку в следующем рассуждении:*

Докажем методом математической индукции, что через любое число точек на плоскости можно провести прямую.

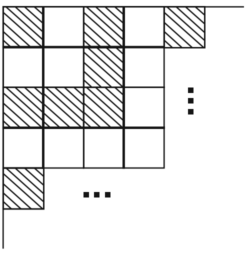
(Начало) Через одну или две точки на плоскости можно провести прямую.

(Шаг) Пусть мы доказали, что через любые к точек на плоскости можно провести прямую. Добавим еще одну точку. Проведем через точки $1,2\ldots k-1,k$ и $1,2\ldots k-1,k+1$ прямые (по предположению индукции это можно сделать). Так как эти прямые имеют две общие точки (1 и 2) то они совпадают. Значит через точки $1,2\ldots k-1,k,k+1$ можно провести общую прямую. Ч.т.д. ММИ.

Обычно в школьной алгебре метод математической индукции используют для вывода формулы n-го члена геометрической и арифметической прогрессий и вывода формулы суммы n членов арифметической и геометрической прогрессии. Использовать для этих целей ММИ, это все равно, что стрелять из пушек по воробьям. Мало того, что абсолютно очевидные вещи доказываются с помощью совершенно не очевидных преобразований, непонятных ребенку. Так еще и сложность этого доказательства достаточно высока. Хотя в этих случаях прекрасно можно обойтись без метода математической индукции.

Если у преподавателя нет времени вдумчиво и серьезно поработать с методом математической индукции, то тогда желательно либо избегать его применения при обучении, либо использовать при его применении слово и.т.д. В задачах на делимость мы всегда можем перейти к остаткам, тем самым избежать индукционных доказательств.

Большинство задач имеет неплохие неиндукционные решения. Приведем пример геометрического решения задачи о сумме нечетных чисел:



Поэтому, если у Вас не времени на вдумчивую работу с методом математической индукции, лучше давать детям неиндукционные доказательства.

Зачем нужны буквы[1]

А.И. Сгибнев,
г. Москва
a.i.sgibnev@gmail.com

Преподавая математику, полезно выделять общие идеи и приёмы, которые помогают решать разнообразные задачи. Один из самых мощных общих приёмов ввёл Рене Декарт (1596 — 1650). В работе «Правила для руководства ума» он сформулировал такие тезисы (приводим их в изложении Д. Пойа):

1) задача любого вида (часто) сводится к математической,

2) математическая задача (часто) сводится к алгебраической,

3) алгебраическая задача (часто) сводится к решению уравнения.

А значит, хорошенько научив школьников пользоваться буквами, мы научим их решать значительную часть задач алгебры и некоторую часть задач геометрии.

Введение букв: мотивировка

В конце 6 и начале 7 класса в школьном курсе математике вводятся буквы и правила их преобразования (приведение подобных, раскрытие скобок и т.д.). Этот материал является основой алгебры, поэтому важно, чтобы школьники хорошо его усвоили. При этом уровень абстракции повышается скачком — ведь до этого речь шла о действиях с конкретными числами и о текстовых задачах с наглядным содержанием. В результате многие школьники выучивают материал формально, не вникая в происходящее и впоследствии делают разнообразные ошибки ($2a+3=5a$ или $b^2 \cdot b^3 = b^6$).[2]

Как улучшить понимание? Мы видим две возможности мотивировать школьников:

---

[1] Статья представляет собой расширенную версию публикации: А. Сгибнев, А. Штерн. Зачем нужны буквы. // Математика, 2018, № 3. С. 13-16.

[2] При ошибочных действиях со степенями лучше всего возвращаться к определению степени и расписывать примеры по нему: $b^2 \cdot b^3 = bb \cdot bbb = bbbbb = b^5$.

— доказывать с помощью буквенных преобразований интересные математические факты,

— решать с помощью буквенных преобразований интересные задачи, которые без них решить трудно.

Приведем примеры.

Пример 1. *Числовой фокус. Каждый ученик загадывает натуральное число от 1 до 20. Учитель диктует преобразование: «Загадайте число. Прибавьте к нему 2. Умножьте результат на 4. Вычтите из результата 6. Поделите результат на 2. Вычтите из результата исходное число. Еще раз вычтите из результата исходное число. У вас получилось 1!»*

(Если у кого-то получилось другое число, можно вместе проверить и найти ошибку.)

Школьники заинтересованы. Перед нами математическая закономерность, но как проверить, что она работает для всех чисел? Мы же не сможем перебрать их все. И вот учитель (а лучше кто-то из школьников) предлагает: «А давайте запишем вместо загаданного числа букву». Получается выражение: $((n+2)\cdot 4-6):2-n-n$. Это выражение можно упростить! Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем, что n сокращается и остаётся 1. Фокус объяснен!

Замечание. В действительности тут даже более тонкий эффект. Взрослый математик говорит, что мы доказали в общем виде (с помощью букв) закономерность, которую заметили на отдельных примерах. Но для шестиклассников эти отдельные примеры пока что убедительнее, чем манипуляции с буквами и скобочками, поэтому для них психологически скорее всё наоборот — решая эту задачу, школьники начинают верить, что и с помощью букв можно что-то понять и доказать. Если после их спросить, сработает ли этот фокус при загадывании дробного или отрицательного числа, найдутся те, кто скажет: «Надо проверить на примере». Это значит, что для них «легитимизация» букв еще не произошла, им требуется еще некоторое количество примеров, чтобы закончить этот небыстрый процесс.

Пример 2. *Числовой фокус. Загадайте целое число. Умножьте его на 2. К результату прибавьте 5. Результат умножьте на 3. Из результата вычтите 9. У вас получилось число, кратное 6.*

Пример 3. *Числовой фокус. Загадайте число. Прибавьте к нему 2. Умножьте результат на исходное число. Из результата вычтите удвоенное исходное число. У вас получился неотрицательный результат!*

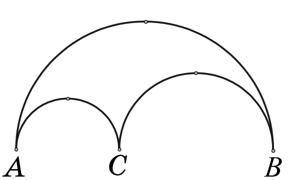
После этого можно на дом задать придумать свой фокус, а потом самые интересные прорешать с классом (пусть авторы продиктуют преобразования сами).

Пример 4. *Вася на «отлично» закончил четверть, и в поощрение мама и папа всю следующую четверть отдают ему 5% от своих доходов. Можно ли узнать, какую часть доходов родителей получает Вася, если доходы неизвестны?*

Решение. Это непростая задача для шестиклассника. Сначала ее можно решить на числовых примерах. Пусть у мамы и папы доходы равные, тогда получается 5%. Пусть теперь мама получает 100 единиц, а папа 120. Опять получим 5%. Теперь можно каждому ученику взять свои числа и посчитать долю дохода — получится по-прежнему 5%. Как доказать для общего случая? Введем буквы! Обозначим доходы соответственно M и $П$. Тогда общий доход равен $M + П$, а доход Васи равен $0{,}05M + 0{,}05П = 0{,}05(M + П)$.

Замечание. На дом можно дать аналогичную задачу с тремя величинами. В 7 классе аналогичное рассуждение решает задачу об угле между биссектрисами смежных углов (ср. также пример 24).

Пример 5. *а) Вася поехал на велосипеде из A в B по большой полуокружности, а Петя по двум маленьким. Кто проехал большее расстояние и во сколько раз большее, если $AC = 20$ м, $BC = 30$ м? б) Та же задача, если $AC = 10$ м, $BC = 40$ м.*



Решение. Трудолюбивые школьники честно посчитают и получат одинаковые расстояния во всех случаях. А умные школьники заметят, что задачу можно решить в общем виде. Длина большой полуокружности равна $\pi\cdot\frac{AB}{2}$. А сумма длин маленьких равна $\pi\cdot\frac{AC}{2}+\pi\cdot\frac{CB}{2}=\pi\cdot\frac{AC+CB}{2}=\pi\cdot\frac{AB}{2}$ — независимо от положения точки C на отрезке AB (инвариант).

Пример 6. *Закономерность. Продолжите цепочку равенств:* $1\cdot 3+1=4$*;* $2\cdot 4+1=9$*;* $3\cdot 5+1=16$*; объясните ее.*

Указание. Произведение двух натуральных чисел, отличающихся на 2, на 1 меньше квадрата среднего числа. Доказательство: $(n-1)(n+1)+1=n^2$.

Замечание. Полезно обсудить со школьниками, сохранится ли закономерность, если вместо натуральных чисел подставить дробные, например 0,5 и 2,5?

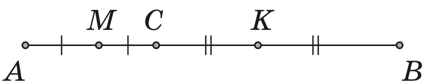
Итак, после нескольких задач школьники усвоили идею: «в задачах полезно вводить буквы и преобразовывать выражения в буквенном виде». Что делать дальше?

Во-первых, к этой идее надо регулярно возвращаться (см. Запас задач).

Во-вторых, надо постепенно наращивать сложность введения букв и выделять общие схемы. Сейчас мы этим займёмся, причём схемы будем вводить не вначале, а после решения новой задачи, в качестве осмысления того, что мы проделали.

Несколько схем решения задач с помощью букв

Пример 7. *На отрезке* AB *взята точка* C*, отмечены* M *и* K *— середины отрезков* AC *и* CB. *Известно, что* $MK=7$ *см. а) Найдите* AB. *б) Можно ли найти* AC*?*



Решение.

а) $AB=AC+CB=2MC+2CK=2(MC+CK)=2MK=14$ см.

б) Нельзя. На AC накладывается единственное условие: $AC+CB=AB=14$ см. Мы можем взять $AC=CB=7$ см или

$AC = 5$ см, $CB = 9$ см — в обоих случаях условие будет соблюдено, а ответы получатся разные.

Замечание. В паре к этой задаче полезно дать аналогичную задачу: Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

Вопрос «Можно ли из условий задачи найти величину X ?» непривычен для школьников. Полезно задавать его уже в простых задачах вроде примера 8.

Как доказать, что величину X нельзя найти из условий?
Приведите два примера, которые подходят под условие, но дают разные значения X !

Пример 8.

а) На доске в ряд записаны сто чисел: $3,7,\ldots,$ *и каждое число начиная со второго равно сумме двух соседних. Найдите сотое число.*

б) На доске в ряд записаны сто чисел: $3,\ldots,$ *и каждое число начиная со второго равно сумме двух соседних. Найдите сотое число.*

в) На доске записаны в ряд сто чисел, отличных от 0. Известно, что каждое из них, кроме первого и последнего, является произведением двух чисел, соседних с ним. Первое число равно 7. Какое число записано последним?

Решения.

а) Выпишем первые несколько чисел: $3, 7, 4, -3, -7, -4, 3, 7, \ldots$ Посмотрим на них внимательно и увидим повторяющийся блок из шести чисел.

$3, 7, 4, -3, -7, -4, 3, 7, \ldots$. Заметим, что каждое число, начиная с третьего, равно разности предыдущего и предпредыдущего, то есть однозначно определяется двумя предыдущими. Поэтому этот блок действительно будет повторяться. Какой номер в блоке имеет сотое число? $100 = 6 \cdot 16 + 4$, значит, это четвертое число в блоке, т.е. -3.

Ответ: -3.

б) Есть подозрение, что ответ не зависит от второго числа (можно проверить на примере 3, 5 или любом другом). Докажем это:

обозначим второе число k и выпишем первые несколько чисел: $3, k, k-3, -3, -k, -k+3, 3, k$ Видим, что есть период из шести чисел $3, k, k-3, -3, -k, -k+3$, аналогично а) доказываем периодичность последовательности.

Ответ: -3.

в) *Указание*. Обозначим второе число через k и выразим через него несколько следующих чисел.

Замечание. Такие задачи полезно решать уже в $6-7$ классах, не дожидаясь 9 класса и формального введения последовательностей. См. А.Д. Блинков «Последовательности», М., МЦНМО, 2018.

Схема A
Заподозрили (заметили на нескольких примерах), что результат не зависит от входных данных $\to$ обозначим их буквами и докажем!

Схема А — это тот же приём, с помощью которого мы объясняли примеры $1-3$. То, что было фокусом, после неоднократного применения становится методом!

Пример 9. *Написали два числа — первое и второе. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвертое. К третьему прибавили четвертое и получили пятое, равное 7. К четвертому прибавили пятое и получили шестое. Найдите сумму всех полученных чисел.*

Указание. Введем сразу две буквы: пусть первые числа a и b, тогда получаем цепочку:

$$a, b \to a+b \to a+2b \to 2a+3b=7 \to 3a+5b.$$

Сумма равна $8a+12b=4(2a+3b)=4\cdot 7=28$.

Пример 10. *Петя гулял 5 часов — сначала по горизонтальной дороге, затем поднялся в гору, затем тем же путем вернулся в исходный пункт. Скорость Пети была 4 км/ч на горизонтальном участке пути, 3 км/ч — при подъеме в гору и 6 км/ч — при спуске с горы.*

а) Можно ли найти пройденное Петей расстояние?

б) Можно ли найти длину горизонтального участка пути?

Решение. Сначала кажется, что данных не хватает, ведь мы не знаем, сколько продолжался подъем, спуск и ходьба по ровной дороге. Но не будем торопиться и введем буквы. Обозначим протяженность ровного участка a, а протяженность подъема (она же протяженность спуска) b. Тогда нам надо найти $2a+2b$. При этом общее время движения равно $2a/4+b/3+b/6=5$. Отсюда $a/2+b/2=5$. Тем самым $2a+2b=20$. Отдельно a найти нельзя.

Замечание. Скорости специально подобраны так, что данных для пункта а) хватает. Взяв, например, 4, 3 и 5 км/ч соответственно, мы уже не сможем найти $a+b$.

Схема *Б*		
Дано	? ? ?	Найти
Введем параметры, через которые выразим и данное, и искомое!		

Пример 11. *Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/ч, под гору: дедушка — 8 км/ч, внук — 20 км/ч; в гору: дедушка — 6 км/ч, внук — 4 км/ч. Оба проехали по одному и тому же маршруту. Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, — если первым вернулся: а) внук, б) дедушка?*

Решение. Пусть протяжённость спусков a км, протяжённость подъёмов b км. Тогда время движения дедушки по подъёмам и спускам: $a/8+b/6$.

Время движения внука по подъёмам и спускам: $a/20+b/4$.

а) Первым вернулся внук:

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{6}>\frac{a}{20}+\frac{b}{4}\Leftrightarrow\frac{3a}{40}>\frac{b}{12}\Leftrightarrow 9a>10b.$$

б) Первым вернулся дедушка:

$$\frac{a}{8}+\frac{b}{6}<\frac{a}{20}+\frac{b}{4}\Leftrightarrow\frac{3a}{40}<\frac{b}{12}\Leftrightarrow 9a<10b.$$

В первом случае ясно, что $a > b$ и протяжённость спусков больше. Во втором случае сравнить величины a и b мы не можем.

Ответ: а) протяжённость спусков больше; б) неизвестно.

По схеме *Б* можно решить большинство задач на прогрессии. В качестве параметров удобно брать первый член и разность (знаменатель) — ведь через них по стандартным формулам можно выразить и n-й член и сумму.

Пример 12 (первая попавшаяся задача на прогрессии). *Известно, что (a_n) — арифметическая прогрессия, (S_n) — последовательность сумм первых n её членов. Докажите, что если для любого натурального n верно: $a_n = 2n - 3$, то $S_n = n^2 - 2n$.*

Решение. Выразим всё через a^1 и d!

(*) $a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$,

(**) $S_n = (2a_1 + (n-1)d)n/2 = (d/2)n^2 + ((2a_1 - d)/2)n$,

Из (*) $d = 2$, $a_1 = -1$. Подставляя в (**), получаем нужное.

Пример 13. *В арифметической прогрессии (S_n) — последовательность сумм первых n её членов. Известно, что при некоторых натуральных $n \neq p$ верно равенство $S_n = S_p$. Докажите, что $S_{n+p} = 0$.*

Указание. Выразим S_n, S_p и S_{n+p} через a_1 и d. Из равенства $S_n = S_p$ выведем равенство $S_{n+p} = 0$.

Замечание. У этой задачи есть красивая графическая интерпретация. Чтобы найти её, надо построить график зависимости S_k от k и заметить, что это парабола с ветвями, направленными вниз, проходящая через точку $(0; 0)$.

Расширение границ нашего метода.

Мы видим, что метод введения букв помогает решать далеко не только задачи, сводимые к уравнениям. Продолжим примеры.

Пример 14 (геометрическая задача на доказательство). *Из точки проведены четыре луча, делящие плоскость на четыре угла,* *которые пронумерованы по часовой стрелке. Докажите, что если первый и третий углы равны, то биссектрисы второго и четвертого лежат на одной прямой.*

Решение. Обозначим первый и третий углы через α, второй — β, четвертый — δ. Тогда угол между биссектрисами второго и четвертого угла равен

$$\beta/2+\alpha+\delta/2=(\beta+2\alpha+\delta)/2=360^\circ/2=180^\circ.$$

Пример 15 (на доказательство неравенств). *В прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c проведена высота к гипотенузе h.*

Докажите, что $a+b<c+h$.

Решение. Воспользуемся схемой *Б* и выразим правую часть неравенства через a и b.

По теореме Пифагора $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Поскольку площадь треугольника равна $ab/2=ch/2$, то $h=ab/c=ab/\sqrt{a^2+b^2}$. Неравенство приобретает вид $a+b<\sqrt{a^2+b^2}+ab/\sqrt{a^2+b^2}$. Возведём обе части в квадрат, получим:

$$a^2+b^2=2ab<a^2+b^2+2ab+a^2b^2/(a^2+b^2).$$

Так как все слагаемые положительны, то последнее неравенство верно.

Пример 16 (на доказательство тождеств).

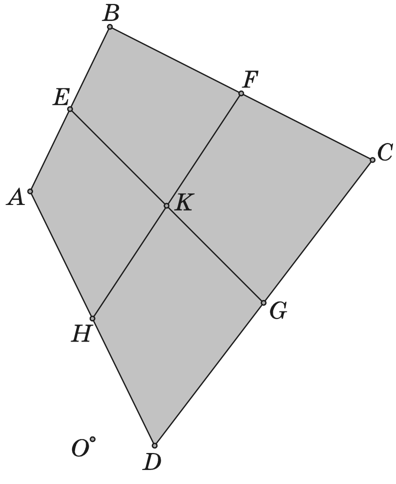
а) Докажите, что отрезки, соединяющие середины сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, пересекаются в общей середине S.

б) Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, делится точкой S пополам.

в) Важна ли выпуклость $ABCD$?

Указание. а) Введем в плоскости $ABCD$ произвольную точку O. Будем выражать искомые точки через радиус-векторы вершин четырехугольника. Радиус-вектор середины отрезка EG задается выражением $1/2(OA+OB)+1/2(OC+OD)$, а радиус-вектор середины отрезка FH — выражением $1/2(OA+OD)+1/2(OB+OC)$.

Поскольку выражения тождественно равны, то и середины отрезков совпадают.



в) Выпуклость не важна. Мы использовали только формулу, выражающую радиус-вектор середины отрезка через радиус-векторы его концов, а эта формула не зависит от выпуклости четырехугольника.

Замечание. Векторный метод (как и координатный метод) позволяет «алгебраизировать» многие геометрические задачи.

Пример 17. *Докажите правило, позволяющее находить квадрат числа, кончающегося на 5: «отбросьте последнюю цифру 5, останется число* n *; умножьте* n *на* $n+1$ *и к полученному числу допишите справа 25».*

Указание. Пусть было число $n \cdot 10 + 5$. Правило дает нам равенство: $(n \cdot 10 + 5)2 = n \cdot (n+1) \cdot 100 + 25$. Проверим тождество, раскрывая скобки.

Пример 18. *Докажите метод получения прямоугольных треугольников*[3]*:*

Пифагор выбрал нечётное число в качестве меньшего из катетов. Затем он возвёл его в квадрат, вычел единицу и половину этой разницы использовал как второй катет. Наконец, он добавил единицу к этому катету и получил гипотенузу.

---

[3] Приведен у Прокла в комментариях к «Началам» Евклида.

Указание. Обозначим первый катет $2n-1$. Тогда второй катет равен $\left[(2n-1)^2-1\right]/2$, а гипотенуза

$$\left[(2n-1)^2-1\right]/2+1=\left[(2n-1)^2+1\right]/2.$$

Проверяем тождество:

$$(2n-1)^2+\left[(2n-1)^2-1\right]^2/4=\left[(2n-1)^2+1\right]^2/4.$$

Позволим себе уточнить идеи Пойа и Декарта, с которых мы начали статью. Метод введения букв позволяет решать ещё более широкие классы задач, если учесть сведéние задач не только к уравнениям, но и к неравенствам (примеры 11, 15), тождествам (примеры 13, $16-18$), функциям и т.д. При этом техника сведéния одна и та же!

Схема B: как решить (почти любую) задачу
Вводим буквы
Составляем выражения
По выражениям составляем:
— уравнение (задача на нахождение)
— неравенство
— тождество (задача на доказательство)
— функцию (задача на оптимизацию)
…
Решаем уравнение/неравенство (доказываем тождество, исследуем функцию)
Даём ответ в терминах исходной задачи.

Отсюда видно, что умение вводить буквы и составлять из них выражения ещё важнее, чем мы думали вначале. Ведь это первый этап решения большинства задач. Работать с уравнениями, неравенствами, тождествами и функциями в курсе алгебры мы учим много. А вот этап сведения задачи к уравнению, неравенству и т.д. часто западает.

«Большую трудность представляют необходимость составлять выражения по условиям задачи и приравнивать эти выражения – составлять уравнения. Специально этому детей учат только очень умелые педагоги. Ни в одном учебнике этим двум умениям не посвящено специальных параграфов.» Это пишет Г.Г. Левитас в замечательной книжке «Математика $5-8$. Опережающее обучение». Илекса, 2013. В этой книге он посвящает специальную главу составлению выражений и уравнений в первом полугодии 6 класса (15 заданий на выражения и 15 — на уравнения).

Приведем пример на отработку составления выражений для шестиклассников.

Пример 19. *Есть треугольники и четырехугольники, вместе их сто. Обозначим число треугольников через* x.

а) Сколько четырехугольников?

б) Сколько углов у всех треугольников?

в) Сколько углов у всех четырехугольников?

г) Сколько всего углов вместе?

д) Известно, что углов всего 380. Найдите число треугольников.

е) Известно, что углов меньше 380. Что можно сказать о числе треугольников?

В пунктах а)—г) требуется составить выражения, содержащие x и числа и не содержащие других букв, причём последующие выражения используют предыдущие. В пунктах д) и е) надо составить и решить соответственно уравнение и неравенство, полученные с помощью выражения из пункта д).

При знакомстве с методом нужно несколько раз давать подобные развёрнутые задания. Когда школьники освоят подробную схему, можно постепенно сокращать задания до $3-2-1$ пунктов, соответственно интериоризации (сворачиванию) процесса записи выражений. Учитель легко составит подобные упражнения в нужном количестве.

Запас задач.

Всегда полезно иметь запас задач, ярко демонстрирующих преимущества того или иного метода.

Пример 20. *Найдите все двузначные числа, равные удвоенной сумме своих цифр.*

Пример: $18 = 2\cdot(1+8)$.

Решение. Десятичная запись двузначного числа: $ab = 10a + b$. Требуемое соотношение: $10a + b = 2\cdot(a+b) \Leftrightarrow b = 8a$. Значит, $a = 1$, $b = 8$.

Пример 21. *Найдите все трёхзначные числа, которые в 11 раз больше сумме своих цифр. Пример:* $198 = 11\cdot(1+9+8)$.

Решение. Десятичная запись трёхзначного числа: $abc = 100a + 10b + c$. Требуемое соотношение:

$$100a + 10b + c = 11(a+b+c) \Leftrightarrow b + 10c = 89a \Leftrightarrow b + 10c = 89.$$

Значит, $c = 8$, $b = 9$.

Пример 22. *Есть мешок, где больше 10 орехов. Каждую минуту к нему подъезжает робот. Если в мешке четное число орехов, робот половину забирает. А если нечетное, то добавляет столько, сколько есть, плюс ещё два ореха. Может ли оказаться так, что через три минуты в мешке будет больше орехов, чем было вначале?*

Решение. 1-й случай: изначально в мешке было нечётное число орехов: $2a + 1 \to 4a + 4 \to 2a + 2 \to a + 1$.

2-й случай: изначально в мешке было чётное число орехов

$$\begin{tikzcd}
2a \arrow[r] & a \arrow[r] \arrow[d] & a/2 \arrow[r] \arrow[d] & a/4 \\
 & 2a+2 \arrow[d] & a+2 & \\
 & a+1 & &
\end{tikzcd}$$

Прошли по три шага, нужного случая не нашли.

Пример 23. *Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько?*

Указание. Как может сумма квадратов не измениться, если числа увеличиваются? Очень просто: увеличиваем число $-1/2$ на 1. Получается число $1/2$, а квадрат при этом остаётся равен $1/4$. Можно взять и сто раз по $-1/2$.

Ответ: увеличится на 200.

Геометрия

Есть немало задач по геометрии, для решения которых нужны минимальные геометрические знания (определения биссектрисы и середины, величина развернутого угла, сумма углов треугольника, целое равно сумме частей) плюс обсуждаемое здесь искусство работы с буквами. Вот несколько примеров из 7 — начала 8 класса.

Пример 24. Внутри угла AOB проведен луч OC (не биссектриса), а вне угла проведены лучи OD и OE так, что OA — биссектриса угла COD, а OB — биссектриса угла COE. Найдите угол DOE, если $\angle AOB = 75°$.

Решение.

$$\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = 2\angle AOC + 2\angle COB = 2\angle AOB = 150°.$$

Пример 25. *В треугольнике ABC угол C равен $80°$. Найдите угол а) между биссектрисами углов A и B, б) между высотами, проведенными к сторонам AC и BC.*

Указание. Введя величины углов A и B, выразите через них искомое и выразите их через известные данные.

Ответ. а) $130°$, б) $100°$.

Пример 26. *В выпуклом четырёхугольнике проведены биссектрисы внутренних углов. Докажите, что у полученного при их пересечении четырёхугольника суммы двух противоположных углов составляют $180°$.*

Указание. Обозначим углы четырехугольника по часовой стрелке через α, β, χ и δ. Выразите через них два противоположных угла нового четырехугольника, найдите сумму этих двух углов и упростите выражение.

Подведём итоги.

Ключевыми умениями для решения математических задач являются следующие:

— вводить буквы,

— составлять из букв выражения,

— комбинировать из выражений уравнения, неравенства, тождества, функции.

Каждое из этих умений нужно ввести, отдельно отработать, мотивировать интересными задачами и поддерживать на протяжении всего курса математики, выделяя общие схемы решения задач.

Поиск и использование соотношений отрезков

И.В. Черняев,
г. Санкт-Петербург
igor.cherniaev@gmail.com

В школьном курсе геометрии, особенно в седьмом и восьмом классе все движется поступательно: мы вместе с учениками открываем для себя новые разделы и соотношения, тем самым обогощая свой инструментарий и, чаще всего, немедленно начинаем его применять на специально подобранных задачах. В неплохом случае, в дальнейшем, мы вплетаем эти приемы в качестве промежуточных шагов в наши геометрические скитания, в худшем же эти приемы и наблюдения оказываются обособленными внутри соответствующей темы.

Более того, периодически то, насколько мало мы знаем, определяет искуственное сужение методов, которые мы можем применить (например, задачи, в дальнейшем решаемые с помощью теоремы Менелая, в 8 классе мы решаем с помощью дополнительного построения и подобия, а может быть теоремы Фалеса, поскольку, скажем, теорему Менелая отложили на 9 класс).

Однако, в конце 9 класса картина кардинально меняется: формально (ну, или, как мы надеемся, реально) мы изучили уже все возможные и невозможные (в рамках школьного курса, конечно же) соотношения, познакомились с впечатляющим количеством подходов к задачам, и потихоньку начинаем шалеть от мнимого всемогущества. Например, рассмотрим следующую задачу.

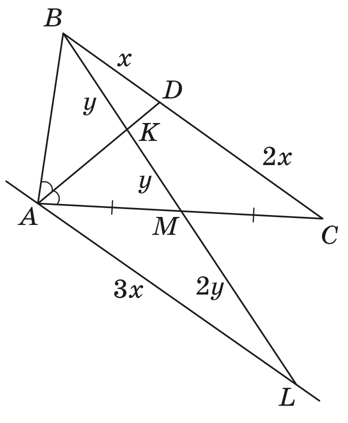
1. *В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $|BD|:|DC| = 1:2$. В каком отношении эта биссектриса делит медиану BM ?*

В зависимости от того, когда появилась теорема Фалеса, можно воспринять эту задачу и как упражнение на неё: проведем через точку M прямую параллельную AD, она пересечет отрезок DC

посередине (по теореме Фалеса) и тогда, так как $|BD|$ также составляет половину $|DC|$, то K — середина BM .

Легко заметить, что не смотря на то, что для общего случая теорема Фалеса явно подходит лучше, при данных соотношениях средняя линия треугольника нам вполне помогает, а значит, если дать эту задачу в конце первой четверти 8 класса, то задача решится вероятнее всего именно так, хотя сложность её при таких обстоятельствах существенно повысится.

Где-то в конце третьей четверти восьмого класса мы бы решали её так: проведем прямую параллельную BC через точку A, продлим BM до пересечения с этой прямой и рассмотрим две пары подобных треугольников ($\Delta AML \overset{1}{\sim} \Delta BMC$, тогда $|AL| = |BC| = 3|BD|$, и $\Delta AKL \overset{\frac{3}{1}}{\sim} \Delta DKB$). После чего из того, что $|ML| = |MB|$, и при этом $|KL| = 3|BK|$, следует, что $|BK| = |KM|$.



Чудесная история из жизни подобных треугольников.

С другой стороны, пройдя теорему о биссектрисе, можно смело утверждать, что $|AB|:|AC| = 1:2$, то есть $|AB| = |AM|$. А тогда треугольник ABM равнобедренный, и AK — не только биссектриса, но и медиана.

После этого, когда в начале девятого класса мы встречаемся с теоремой Менелая, то немедленно оказывается, что задачу можно рассмотреть и под этим углом, пременив её, например, для треугольника BMC и точек A, K, D.

Если же при этом обсуждается ещё и геометрия масс, то вполне может быть что школьник просто введет систему материальных точек mA, mC, $2mB$ и немедленно придет к тому же самому выводу, о том, что K — середина BM.

Ну а ещё в какой-то момент в мир школьников приходит теорема о пересекающихся чевианах, которая дает нам представление о том, что $\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KM}} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\left(\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} + 1\right)$, откуда опять же немедленно получаем, что $|BK|:|KM| = 1:1$.

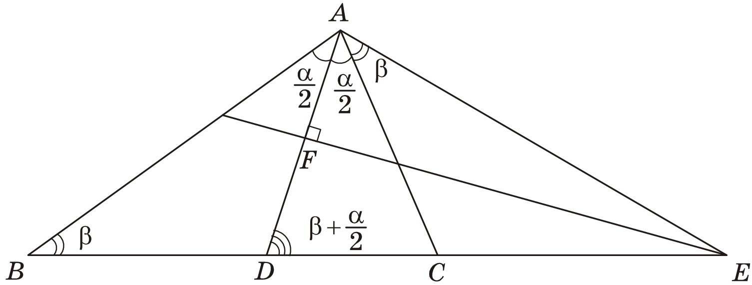
Полезным бывает обсудить это с классом в конце девятого класса, порадоваться богатству методов и знаний которые у нас появились, и повосхищаться всемогуществом.

Однако, к сожалению, это вносит некоторые сложности в повторение в конце девятого класса: если до этого, в названии контрольной (условно) указывалась подсказка на метод решения задач (именно поэтому, в зависимости от того, когда давать эту задачу, более естественным для участников окажется именно обсужденный в рамках данной темы метод), то теперь при отсутствии данной подсказки, поиск продуктивного метода может занять довольно значительное время даже в достаточно не страшных по формулировке заданиях. Например:

2. *Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E, $|AB| = c$, $|AC| = b$. Найдите отношение $|BE|:|CE|$.*

Рассмотрим случай, когда $\angle C > \angle B$. Тогда мы получим, что точка пересечения серединного перпендикуляра и прямой BC лежит на луче BD. Пусть она лежит за точкой C, как показано на рисунке. Заметим, что если $\angle B = \beta$, $\angle A = \alpha$, то

$\angle BAD = \angle DAC = \dfrac{\alpha}{2}$, так как AD — биссектриса, и тогда $\angle ADC = \beta + \dfrac{\alpha}{2}$, как внешний угол треугольника ADB.



Но тогда $\angle DAE$ также равно $\beta + \dfrac{\alpha}{2}$, поскольку ΔADE равнобедренный (точка E равноудалена от точек A и D, как точка серединного перпендикуляра). В этот момент, кстати, становится понятно, что на отрезке DC точка E быть не может, ибо тогда $\beta + \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\alpha}{2}$, что невозможно.

Авторское решение (В.В. Прасолова), состоит в следующем: применим теорему синусов для каждого из треугольников AEB и CEA. Получим $\dfrac{|BE|}{|AB|} = \dfrac{\sin\angle BAE}{\sin\angle AEB}$, $\dfrac{|AC|}{|CE|} = \dfrac{\sin\angle AEC}{\sin\angle CAE}$, откуда $|BE| = \dfrac{c\sin\angle BAE}{\sin\angle AEB}$, $|CE| = \dfrac{b\sin\angle CAE}{\sin\angle AEC}$.

Таким образом искомое отношение

$$\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{c\sin\angle BAE}{b\sin\angle CAE} = \frac{c\sin(\alpha+\beta)}{b\sin\beta} = \frac{c\sin\angle C}{b\sin\beta}.$$

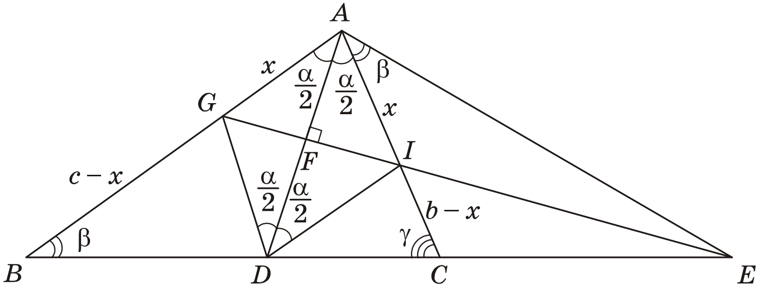
Применив ещё раз теорему синусов для треугольника ABC получим $\dfrac{c^2}{b^2}$.

Данное решение, безусловно, является остроумным с точки зрения творческого применения теоремы синусов, однако для большинства учащихся кажется не слишком естественным.

Более естественным использованием равенства данных углов кажется подобие: треугольники AEB и CEA подобны по двум углам, и тогда $\frac{|BE|}{|AE|}=\frac{|AE|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{c}{b}$. Чтобы перейти к искомой величине, давайте рассмотрим выражение $\frac{|BE|}{|AE|}\cdot\frac{|AE|}{|CE|}$, очевидно равное $\frac{|BE|}{|CE|}$ с одной стороны, и $\frac{c^2}{b^2}$ с другой.

Но можно пойти и вовсе другим путем, если идея дополнительного построения нас не пугает: пусть серединный перпендикуляр пересекает отрезок AB в точке G, а отрезок AC в точке I. Так как точки G и I — точки серединного перпендикуляра, то треугольники GAD и IAD равнобедренные и,

$$\angle GAD=\angle GDA=\angle IAD=\angle IDA=\frac{\alpha}{2}.$$



Так как мы уже выяснили, что $\angle ADC=\beta+\frac{\alpha}{2}$, то становится очевидным, что $\angle IDC=\beta$. Аналогично, если $\angle ACB=\gamma$, то $\angle GDB=\gamma$. Тогда $AIDG$ параллелограмм, и более того, ромб. Обозначим его сторону за x. Тогда $|GB|=c-x$, $|IC|=b-x$.

Из подобия (по обратной теореме Фалеса) треугольников CID и CAB следует, что $\frac{b-x}{b}=\frac{x}{c}\Leftrightarrow\frac{b-x}{x}=\frac{b}{c}$.

Аналогично рассмотрев пару треугольников BGD и BAC получаем $\frac{c-x}{x}=\frac{c}{b}$.

Теперь применим теорему Менелая для треугольника ABC и точек G, I, E: $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CI}}{\overrightarrow{IA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}}=-1$, что немедленно дает нам то, что $\frac{|BE|}{|CE|}=\frac{x}{b-x}\cdot\frac{c-x}{x}=\frac{c^2}{b^2}$.

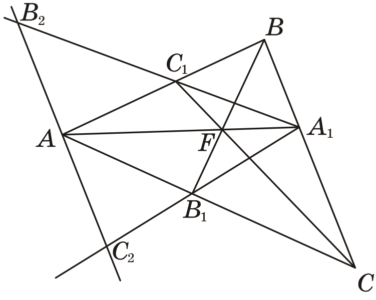
Опять же, возможно стоит обсудить с классом, что при довольно обыденных методах решения данная задача представляет сложность именно в смысле поиск приемлемого метода решения, в случае если он не подсказан, а отнюдь не знание теоретических красот. Более того, в большинстве случаев без этих красот вполне удается обойтись...

С другой стороны, опять же можно заметить, что задача, тривиальная при рассмотрении в каком-либо сюжете, может быть совершенно зубодробительной в отдельности.

3. *Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.*

После задачи 2 — давайте применим теорему Менелая и всё получится. А без этого — по меньшей мере не тривиально.

4. *На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $|AB_2|=|AC_2|$.*



Заметим, что пара пересекающихся секущих образуют вместе с прямыми, которые им параллельны, подобные треугольники.

Так как $\Delta AC_1B_2 : \Delta BC_1A_1$, то $|AB_2| = \dfrac{|AC_1| \cdot |BA_1|}{|C_1B|}$.

Так как $\Delta AB_1C_2 : \Delta CB_1A_1$, то $|AC_2| = \dfrac{|A_1C| \cdot |B_1A|}{|CB_1|}$.

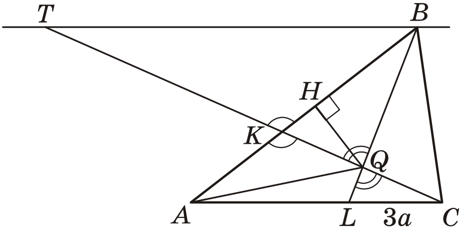
Но тогда получается, что $\dfrac{|AB_2|}{|AC_2|} = 1$ по теореме Чевы.

Этот подход может свободно применяться в задачах, где изначально никаких параллельных прямых не было (эта идея прекрасно ложится в головы учащихся в восьмом классе, в теме подобные тругольники, и достаточно тяжело извлекается оттуда на свет в случае отстуствия намеков).

5. *В треугольнике* ABC*, площадь которого равна 6, на стороне* AB *взята точка* K*, делящая эту сторону в отношении* $|AK|:|BK| = 2:3$*, а на стороне* AC *взята точка* L*, делящая* AC *в отношении* $|AL|:|LC| = 5:3$*. Точка* Q *пересечения прямых* CK *и* BL *отстоит от прямой* AB *на расстояние 1,5. Найдите* $|AB|$*.*

Через точку B проведём прямую, параллельную AC и продолжим отрезок CK до пересечения с этой прямой в точке T. Пусть $|AL| = 5a$, $|LC| = 3a$, а значит $|AC| = 8a$.

Так как $\Delta BKT : \Delta AKC$, то $|BT| = \dfrac{|BK|}{|AK|} \cdot |AC| = \dfrac{3}{2} \cdot 8a = 12a$.

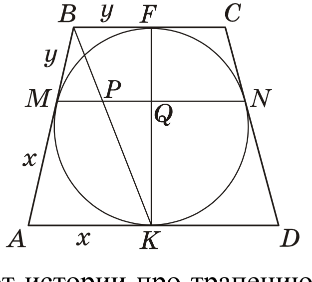


Так как $\Delta BQT : \Delta LQC$, то $\dfrac{|BQ|}{|LQ|} = \dfrac{12a}{4a} = \dfrac{3}{1}$.

У треугольников ABL и ABC одна и та же высота, проведённая из вершины B, значит, отношение их площадей равно отношению оснований, и тогда $S(ABL) = \dfrac{5}{8} S(ABC)$.

Аналогично, $S(ABQ) = \dfrac{4}{5} S(ABL) = 3$, а тогда, зная площадь и высоту треугольника ABQ находим, что основание AB имеет длину 4.

6. *Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N, K — середина AD. В каком отношении прямая BK делит отрезок MN?*



Никогда не устареют истории про трапецию: сколько бы мы не решали подобных задач в восьмом классе, в конце девятого класса уверенно об этом вспоминают не все. Например, если спросить, почему же точками касания оснований будут середины, точный и аккуратный ответ можно услышать далеко не от каждого...

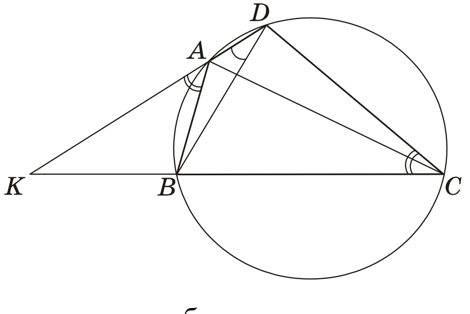
Введем обозначения, как показано на рисунке. Самым важным шагом опять же является дополнительное построение... Дело в том, что очень-очень хочется сказать что-то про подобные трапеции. Но что это такое — мы не понимаем и понимать не хотим. Зато мы знаем, что такое подобные треугольники. Значит, давайте их создадим...

В этот момент, возможно, стоит обращать внимание учеников на то, что когда мы отправляемся в свободное плавание, важнее оказывается не знание конкретных теорем (хотя, безусловно, это очень важно, но отнюдь не достаточно!), а ощущение взаимосвязей между фигурами, позволяющее делать гипотезы, и их либо опровергать (после чего немедленно совершенствовать!), либо доказывать, превращая в самое настоящее решение, или его элемент.

В общем, проведем отрезок BK. Поскольку MN параллельно основаниям трапеции, треугольник BMP подобен треугольнику BAK, а треугольник KPQ подобен треугольнику KBF, то: $\frac{|PM|}{x}=\frac{y}{x+y}$, $\frac{|PQ|}{y}=\frac{x}{x+y}$, а тогда $|PM|=|PQ|$ и $|PM|=\frac{1}{4}|MN|$.

Таким образом $|PM|:|PN|=1:3$.

7. *Во вписанном четырёхугольнике* $ABCD$ *известны отношения* $|AB|:|DC|=1:2$ *и* $|BD|:|AC|=2:3$. *Найдите* $|DA|:|BC|$.



Неожиданно неприятными бывают и всевозможные идеи, связанные с окружностями, ибо у учеников разбегаются глаза: тут и степень точки, и всевозможные углы и взаимосвязь между ними, и влияние их на четырехугольники... Единственное что спасает, пройдена тема не так давно, в 9 классе. Однако, в 11 классе это спасает мало...

Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке K (они не могут быть параллельными, так как $|AB| \neq |CD|$).

У треугольников KAC и KBD общий угол K и равные углы KDB и KCA (так как это вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Тогда $\dfrac{|KC|}{|KD|} = \dfrac{|AC|}{|BD|} = \dfrac{3}{2}$.

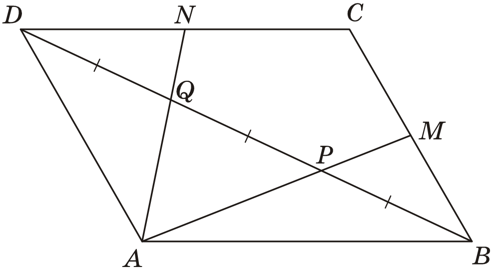
У треугольников KAB и KCD общий угол K и равные углы KAB и KCD (так как четырехугольник вписанный, то сумма мер его противоположных углов $180°$, ровно как и сумма смежных углов. А тогда $\angle BAD + \angle KAB = \angle BAD + \angle KCD$). Тогда

$$\frac{|KB|}{|KD|} = \frac{|KA|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $|KD| = 4x$, тогда $|KC| = 6x$, $|KB| = 2x$, $|KA| = 3x$, $|BC| = 4x$, $|AD| = x$.

Таким образом $|AD| : |BC| = 1 : 4$.

8. *На диагонали* BD *параллелограмма* $ABCD$ *отмечены точки* P *и* Q, *причём* $|BP| = |PQ| = |QD|$. M *— точка пересечения прямых* AP *и* BC, N *— точка пересечения прямых* AQ *и* DC. *Найдите отношение площади пятиугольника* $CMPQN$ *к площади параллелограмма* $ABCD$.



Заметим, что для нахождения отношения площадей нам необходимо знать, в каком отношении N делит DC, а M делит BC. В этом нам может помочь либо тот факт, что $\Delta DQN \overset{\frac{1}{2}}{:} \Delta BQA$ (вновь но как треугольники, образованные пересекающимися секущими и параллельными прямыми), а значит N — середина DC.

Аналогично, M — середина CB.

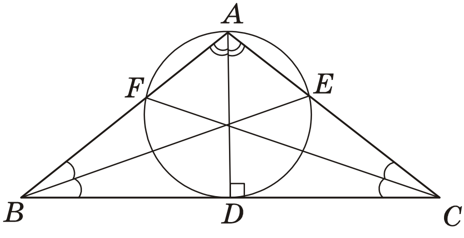
Тот же результат можно получить, проведя вторую диагональ и рассмотрев AN и AM как чевианы, проходящие через центроид треугольника.

Тогда: $S(DCB)=\frac{1}{2}S(ABCD)$ (как площадь одного из двух равных треугольников, на которые параллелограмм разделен диагональю)

$$S(DQN)=S(BPM)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S(BCD)=\frac{1}{6}S(BCD)$$

по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы. А тогда $S(CMPQN)=\frac{1}{3}S(ABCD)$.

9. *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|AC|$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите $|BC|$, если известно, что $|AC|=1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E и F.*



Снова окружность, но в данном случае выстреливают соображения, связанные, например со стрепенью точки C относительно данной окружности:

$$|CD|^2=|CE|\cdot|AC|.$$

Так как треугольник равнобедренный, то если $|BC|=x$, то по свойству биссектрисы $|CE|=\frac{x}{x+1}$.

Кроме этого $|CD| = \dfrac{x}{2}$ (так как треугольник ABC равнобедренный, то AD — биссектриса, являющаяся и медианой).

Таким образом имеем уравнение $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x}{x+1}$, откуда, в силу неотрицательности длины, $x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Олимпиадные задачи на уроке
(тезисы выступления)

П.В. Чулков,
г. Москва
chulkov2007@yandex.ru

Большую часть жизни работаю в массовой школе в самых обычных районах города Москвы. Как у нас раньше говорили в «ЗИЛовских» районах, где обучались самые обычные дети.

Сейчас работаю в математической школе №2007.

Эта школа отличается от всех прочих математических школ тем, что она массовая. И те дети, которые здесь учатся, как правило, не из семей потомственных математиков или физиков. У нас обычный спальный район, обычные дети. Учим мы их с пятого класса и работаем в обычных условиях: мы имеем те же деньги, что и массовая школа, но делим класс на группы, поэтому наши учителя получают несколько меньше, чем учителя любой соседней школы.

Конкурс сравнительно небольшой (до 1,5 человек на место), но определённые олимпиадные результаты у нас достигаются: 68 дипломов на московской математической олимпиаде — результат обычный (в 2018 году). На Всероссийской олимпиаде в этом же году по математике дипломов всего три. В других школах, например 2, 57, 179 призеров значительно больше.

Немного о математических олимпиадах.

Каждый учитель наверное думал: «Для чего нужны математические олимпиады? И не просто для чего они нужны, а для чего они нужны мне, рядовому учителю математики? Что я вижу? Вижу, что по результатам олимпиад моих лучших учеников забирают в математические школы». Возможно учитель не может так хорошо научить, как в матшколе, но сам факт этот не очень нравится. Тогда зачем учителю олимпиады?

Мой ответ примерно такой.

Что я умею делать? Умею решать как-то математические задачи, участвую в проверке олимпиад и хочу в этом совершенствоваться.

Учебник математики, как правило, содержит стандартные задачи. Например по теме «производная», учат как считать производную, находить уравнение касательной, максимум, минимум, экстремум. Что-то ещё изучается. А потом решают упражнения по этой теме.

Так или иначе, то что мы решаем на уроке —упражнения, интересных задач не много. При этом не имею в виду, что задачи должны быть трудными, они могут быть лёгкими. Но они должны решаться не по схеме или стандарту, а должны требовать хоть какого-то размышления. Понятно, что в этой связи олимпиадные задачи — золотое дно. Среди них много таких, которые можно использовать на уроках и эти задачи помогают по-новому взглянуть на курс.

Необходимо вставлять олимпиадные задачи в канву урока. Обучающийся усвоил тему, не тогда, когда он может воспроизвести то, чему его учили, а когда он может применять это знание при решении какой-то задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. *Докажите, что на графике функции* $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ *найдется точка, которая является центром симметрии графика.*

Тема: повторение свойств функций: возрастание, убывание, чётность и нечётность и т.п. (март, 10 класс). Разговор строим примерно так: «В чем требование задачи? Требуется найти точку — центр симметрии графика. Где у нас, вообще, шла речь про график, симметричный в точке?».

Если Вы чему-то такому учили, они в конце концов вспомнят про нечётные функции. «Давайте посмотрим, эта функция чётная или нечётная? Нет? Но график симметричен, может быть можно свести к нечётной функции? Наверно можно, если перенести начало координат в центр симметрии».

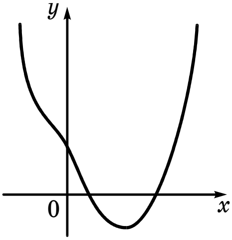
После этого уже все понятно, коэффициенты так хорошо подобраны, что $y = (x+1)^3 - 4$, график функции такой же как у нечетной функции $y = x^3$, и получается из него параллельным переносом. Центр симметрии есть и его можно найти.

Откуда задача? Она была на одной из окружных, или как сейчас говорят, муниципальных олимпиад, довольно давно. Это хорошая олимпиадная задача на школьном материале.

Задача 2. *При каких значениях параметров* a, b *и* c *график функции* $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ *имеет центр симметрии*?

Через какое-то время, возникает понимание того, что, вообще говоря, график кубической функции всегда симметричен относительно какой-нибудь точки. Надо найти просто хороший параллельный перенос, чтобы это доказать.

Для начала требуется убрать коэффициент при x^2, так как он «мешает» симметрии... Отсюда вытекает и объяснение вывода формулы корней кубического уравнения.



Задача 3. На рисунке изображен график функции $f(x) = x^4 - x^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов b и c.

Эта задача взята из зонального этапа Всероссийской олимпиады. Довольно давнишней, правда. Мы её успели и на регате дать. Потому что решение устное: 1) Понятно, что $f(0) = c > 0$ и, 2) возьмем производную, коэффициент c «пропадёт», а знак производной $f'(0) = b$ выясним по характеру монотонности функции f.

Задача 4. *Существуют ли такие значения* a *и* b, *при которых уравнение* $x^4 - 4x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ *имеет четыре различных корня?*

Спрашиваем: «Как можно узнать количество корней?» — «Из графика». — «Как нарисовать график?» — «Поступим как в первой задаче!»

После замены: $(x-1)^4 = kx + t$ (справа — линейная функция). Прямая с графиком $y = (x-1)^4$ имеет не более двух точек пересечения, внешний вид «параболы» $y = (x-1)^4$ отличается от обычной параболы только крутизной.

Задача 5. *Уравнения* $x^2+bx+c=0$, $x^2+ax+d=0$ *не имеют корней. Верно ли, что не имеет корней уравнение* $x^2+\frac{a+b}{2}x+\frac{c+d}{2}=0$*?*

Конечно, все бросаются считать дискриминант. Что тут обсуждать?

Но лучше по-другому. Если уравнение не имеет корней, то график либо выше оси, либо ниже. Если сложим уравнения, то сумма будет больше нуля. Если разделим на 2, то получим, что выражение $x^2+\frac{a+b}{2}x+\frac{c+d}{2}$ больше нуля, и корней нет. В 9-м классе так рассуждать хорошо, графики мы изучаем весь год.

Надо сначала дать школьникам возможность решить с дискриминантом, немного помучиться. Иначе не оценят.

Задача 6. *Известно, что при некоторых значениях переменных* $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8\le 0$. *Докажите, что* $x\ge -\frac{1}{6}$.

Тут уместно добавить пару слов. Что такое олимпиадная задача по определению? По мне, — это задача с биографией. То есть она может быть совсем такая же внешне, как и все прочие, только она с биографией. Сказано, что эта задача с олимпиады ВШЭ. Все думают: «О, это же задача с олимпиады ВШЭ!» И это добавляет рвения при решении задачи.

Но что на самом деле? На самом деле это обычный квадратный трёхчлен относительно y.

И поскольку старший коэффициент у него, за исключением нулевого случая, который рассматривается отдельно, положительный, ветви вверх, значит, парабола должна пересекать ось *Ox*.

Следовательно, дискриминант должен быть не меньше нуля. А как только мы напишем дискриминант, получим, что $x\ge \frac{1}{6}$.

Опять-таки, всё знакомо, всё легко. Если такие задачи «с биографией» обсуждать на уроках, то и успехи на олимпиадах будут.

Задача 7. *Докажите неравенство, если* $a,b,c \ge 0$ *:*

$$3\sqrt[3]{abc} + |a-b| + |b-c| + |c-a| \ge a+b+c\ .$$

Задача с модулем. Школьники пытаются раскрыть модуль.

Спрашиваю: «Как Вы думаете, какое общее свойство используется при решении этой задачи?»

Если дети сразу не отвечают, то надо подсказать, например так: «Это слово часто встречается в геометрии. Начинается на букву "с". Вторая буква "и". — Синус? — Нет. — Симметрия!»

При симметрии можно упорядочить: $a \ge b \ge c$.

Дальше — модули раскрыты и всё стало легко.

Задача 8. *Сумма положительных чисел* a,b,c *равна 1. Докажите, что* $\dfrac{a^2}{a+b} + \dfrac{b^2}{b+c} + \dfrac{c^2}{c+a} \ge \dfrac{1}{2}$.

Самое «трудное» что бывает на олимпиадах, — неравенства. В восьмом классе начинаем, в девятом — их повторяем, но...

Как обсуждать? Говорим: всем хорошо это неравенство только симметрии в нём маловато. Как добиться симметрии?

В числителе первой дроби a^2, а если бы добавить b^2 симметрии станет больше (со второй и третьей дробью аналогично)

Интересно, что если произвести такую замену: вместо a^2 написать b^2, вместо b^2 написать c^2 , вместо c^2 написать a^2, будет то же самое, то есть:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$$

Как доказать? Рассмотрим разность. Всё «сократится» и будет ноль. Приём: симметрии мало — добавим.

Тогда у нас получится следующее. Достаточно доказать:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \ge 1$$

Но $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b}{2}$ и так далее...

Задача 9. *Существуют ли такие действительные числа* a, b *и* c, *что неравенство* $|x+a|+|x+y+b|+|y+c|>|x|+|x+y|+|y|$ *верно при всех действительных значениях* x, y *и* z *?*

Эта задача — финал ВСОШ. Рассказываю: «Знаете что? Вот Вы там говорите "окружная олимпиада", "регион". А вот задача с финала. И она устная. А почему можно сказать, что она устная? Ну не будем же мы модуль раскрывать. А тогда как? А так: значение переменной x может быть очень большим, настолько большим, что все модули раскроются с плюсом, после чего все иксы сократятся. Получится $a+b+c>0$. Но значение переменной x может быть и отрицательным числом, причем настолько большим по модулю, что все модули раскроются с минусом. И тогда мы получаем $a+b+c<0$. Противоречие. Значит, ответ: нет.

Если умному человеку показать достаточно много таких задач, он начинает чувствовать себя увереннее. И потом когда на уроках, или на кружке школьникам кажется, что они сами придумали решения, тогда и на олимпиадах они начинают думать.

Необходимо упомянуть, что в массовых школах к 10–11 классу ученики зачастую доходят до ощущения своей никчемности. Они не способны ничего делать сами. Шаг в сторону, любой шаг в сторону — почти «побег», и никаких идей они не высказывают.

Задача 10. *Найдите наибольшее значение выражения*

$$a+b+c-ab-bc-cd \text{, где } 0 \le a,b,c \le 1$$

Понятно, если считать, что здесь дана линейная функция относительно a, определенная на отрезке. И, значит, экстремумы у ней на концах отрезка. Следовательно, если и есть наибольшее значение, то только при $a=0$ или $a=1$. Аналогично для b,c и далее простой перебор нулей и единиц.

Задача 11. *Найдите наибольшее значение выражения* x^2y-xy^2, *если* $0 \le x,y \le 1$.

Перенос предыдущей идеи на квадратичную функцию. Квадратичная функция, «ветви» вверх (крайние случаи рассматриваются отдельно, само собой). Наибольшие значения достигаются на краях отрезка или в вершине параболы.

Можно немного модифицировать. Понятно, если x^2, заменить на x, то выражение не уменьшится, а скорее увеличится. А дальше, x выносим за скобки, получим:

$x^2(y-y^2) \le xy - xy^2$, наибольшее значение $y-y^2$ достигается в вершине при $y=\dfrac{1}{2}$ («ветви» вверх).

Задача 12. *Докажите неравенство*

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-2xyz(x+y+z)\le 3,\ \textit{где}\ 0\le x,y,z\le 1.$$

(Ленинградский отбор на ВСОШ) Идеи те же самые. Один в один. То есть мы рассматриваем сначала $f(0)$, $f(1)$ относительно x. Постепенно «докручиваем» до одной переменной, а там кроме параболы ничего нет.

Задача 13. *Известно, что* $\sin ax+\sin bx=\sin cx+\sin dx$ *при всех* x *и* $a,b,c,d>0$. *Докажите, что* $a=c$ *или* $a=d$.

Ещё интереснее. Вот изучаем производные, изучаем. Потом говорим: «Вот задача». А как она решается? Ну, раз это равенство верно для всех x, возьмём производную.

Равенство будет верно для всех x. Получим:

$$a\cos ax+b\cos bx=c\cos cx+d\cos dx.$$

При $x=0$ получим $a+b=c+d$

Ещё два раза возьмём производную, подставим $x=0$ получим $a^3+b^3=c^3+d^3$. Применим теорему Виета и всё.

Дети видят, что производную изучили, и какое-то счастье наступило — задачку с «региона» можно обсуждать.

Задача 14. *Сколько корней имеет уравнение*

$$\arcsin^2 x+\arccos^2 x=1\,?$$

На Московской математической олимпиаде её решило почему-то мало народу. А, казалось бы, что здесь решать?

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

Дальше замена. Получаем систему, которая сводится к квадратному уравнению. Дальше решим уравнение. Оно громоздко выглядит, поэтому скорее всего какой будет ответ? Нет решений.

Задача 15. *Решите уравнение* $\frac{1}{\sin^{18} x}+\frac{1}{\cos^{20} x}=1000$.

А как это делать? Заменим $\cos^{20} x$ на $\cos^{18} x$, и при этом выражение не увеличится.

Применим неравенство Коши.

$$\frac{1}{\sin^{18} x}+\frac{1}{\cos^{18} x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin^{18} x\cdot\cos^{18} x}}=\frac{2^{10}}{\left|\sin^{9} 2x\right|}>1000$$

Задача 16. *Изобразите на координатной плоскости фигуру, точки которой удовлетворяют системе:* $y\leq\sqrt{1-x^2}$, $x\leq\sqrt{1-y^2}$ *и найдите ее площадь*.

Её удобно предлагать, когда проходим темы площадь, интегралы и прочее. Начинаются попытки вычислить через интеграл, что вполне получается (иногда). А на самом деле, картинка эта представляет из себя что? Три четверти круга и приделанный внизу квадратик. Вот и всё. Хорошая задача. Её когда-то А.К. Ковальджи предложил для окружной олимпиады.

Задача 17. *Найдите все положительные решения системы уравнений:*

$$2x^3+1=3xz,\ 2z^3+1=3zy,\ 2y^3+1=3yx.$$

Когда спрашиваешь, а требование положительных чисел, это зачем? Они должны сказать, что это либо геометрия, либо что-то про неравенства. А что может быть про неравенства? Например, $2x^3+1\geq 3x^2=3xz$, если применить неравенство Коши для трёх слагаемых. Можно сократить на x. Получается $x\geq z$. И аналогично получаем $z\geq y$, $y\geq x$ и, следовательно, $x=y=z$. Осталось решить уравнение $2x^3+1=3x^2$. Разложили на множители. Решили.

Задача 18. *Пусть* h_a, h_b, h_c *— длины высот, проведенные к сторонам* a, b, c *соответственно;* r *— радиус вписанной окружности. Докажите, что* $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

Ну, конечно, эта задача выглядит как геометрическая, но, наверно, это не геометрия, а что-то другое. Понятно, что надо через площадь и сторону выразить высоту. Даже неважно, что a, b, c стороны треугольника. Радиус тоже выразим через площадь и сумму, и получится неравенство: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Бонус: повторили формулы площади.

Задача 19. *Докажите неравенство*

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt[3]{a^3+b^3} + \sqrt[4]{a^4+b^4} \leq 3a+b, \text{ если } a \geq b \geq 0.$$

Почему это трудная задача? Потому что она не очень симметричная какая-то. Конечно её можно решать как-то культурно, но можно решать и грубой оценкой, например, вспомнив для начала слово на букву «о»: однородность. Разделим на a. И под каждый корень внесём это самое a.

Получим: $\sqrt{1+t^2} + \sqrt[3]{1+t^3} + \sqrt[4]{1+t^4} \leq 3+t$, $t \leq 1$.

Оценим каждое слагаемое левой части.

$\sqrt{1+t^2} \leq 1 + \frac{1}{2}t$. Вопрос: «Как догадаться?».

Можно, отвечать подробно, используя производную, через неравенство Бернулли или как-то еще, есть о чем поговорить. А можно и так: «Прикинул (подобрал), потом доказал».

Оценки $\sqrt[3]{1+t^3} \leq 1 + 0{,}3t$, $\sqrt[4]{1+t^4} \leq 1 + 0{,}2t$ получаем аналогично (подбором), затем докажем.

Задача 20. *По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили «Ауди» и «БМВ». Оказалось, что как в 17.00, так и в 18.00 «БМВ» находился в два раза дальше от перекрестка, чем «Ауди». В какое время «Ауди» мог проехать перекресток*? (Н.Х. Агаханов)

Эта задача очень интересна. Решим ее устно. Вот смотрите. По двум пересекающимся дорогам с равными постоянными скоростями движутся автомобили *А* и *Б*. Первый вопрос: важно ли под каким углом эти пересекающиеся дороги расположены? Это влияет на что-то, на ваш взгляд, или нет? Ответ: неважно.

Но тогда можно считать, что они движутся по одной дороге и в одну сторону. Согласны? Много случаев убрано!

Второй вопрос: Можно ли считать, что у нас автомобили стоят, а движется перекрёсток? Ответ: можно. Тогда нам нужно найти всего лишь две точки, где выполняется условие задачи про расстояние.

И дальше ответ получается устно — 17:15, 17:45.

После того как детям рассказал такую задачу, они довольны. «Физика» в том, чтобы правильно выбрать систему отсчёта.

Много раз повторяю разными словами своё убеждение и не знаю, убедил кого-нибудь или нет. (см, например,7-9). Попробую ещё раз.

На уроках надо решать нестандартные задачи. Начинать надо как можно раньше. Что показывает опыт?

Первое. Нестандартные задачи могут быть просты, но метод их решения не должен быть заранее известен ученику. Пусть этот метод не сложный, но он должен его придумать. Если регулярно решать нестандартные задачи в 5-6 классе, то в каждом (!) классе кто-то может рассчитывать на призовое место на Матпразднике.

Второе. Олимпиадные задачи — задачи с биографией. Из-за этого дети решают их более охотно. (Раньше почётом у старшеклассников пользовались задачи с мехмата. Сейчас уже мало кто помнит, что такое был вступительный экзамен на мехмат).

Нестандартные (олимпиадные) задачи надо вводить как можно раньше. В Москве открыты классы «Математической вертикали». На мой взгляд, они должны отличаться от обычных введением нестандартных задач. Больше ничего не надо. Тогда будет результат.

Литература

1. Всероссийская олимпиада школьников по математике. 1993-2009: Заключительные этапы / Н.Х. Агаханов и др. Под ред. Н.Х. Агаханова — 2 изд. испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.

2. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2010.

3. Петербургские математические олимпиады, 1961-1993: Учебное пособие. 2-е изд. доп. / Под ред. Д.В. Фомина, К.П. Кохася. — СПб.: Издательство «Лань», 2007.

4. Петербургские математические олимпиады, 1961-1993: Учебное пособие. 2-е изд. доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2003.

5. Иванов О.А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. — М.: МЦНМО, 2009.

6. Пойа Дж. Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1959.

7. Чулков П.В. Решение нестандартных задач как средство выявления и развития способностей детей (из опыта работа) / Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», Дубна, сентябрь 2000. — М.: МЦНМО, 2000.

8. Чулков П.В. Олимпиады и «обычная» математика. Сборник докладов III региональной научно-практической конференции «Профессиональная ориентация и методика преподавания в системе школа-вуз» (26 марта 2002 года). Том. 2. — М.: МИРЭА, 2002.

9. Чулков П.В. Математическая олимпиада в школе // Народное образование, №1, 2006.

Использование «уроков-судов» для формирования познавательного интереса у учащихся при изучении математики

В.Н. Шабанова,
kirasvera@yandex.ru

Введение.

Среди правителей наилучший тот,
Чьё существование люди едва замечают;
Не столь хорош тот, кого они слушают и превозносят;
Хуже всех правитель, которого презирают.
«Люди не уважают того,
Кто не уважает людей».
Мудрый правитель, добившись своей цели,
Не славит свои труды,
И люди скажут: «Мы сделали это сами».

Lao Tzu, 1962

«Наши государственные школы — это острова в океане безразличия. Классы — всего лишь вереница комнат…в школу приходит всё больше детей, лишённых учебной мотивации, а у учителей нет возможностей удовлетворить растущие потребности учащихся. Те же дети, которые приходят в школу действительно с желанием учиться, быстро утрачивают его, погружаясь в мир бесчисленных правил, тестов, соревнований и прочей школьной рутины…

Некоторые учителя избегают групповых форм учебной работы, потому что «детям придётся разговаривать, и тогда будет очень шумно»…И если присмотреться на школьную жизнь глазами ученика, ежедневно отсиживающего положенное время в классе…».[1] Именно поэтому я выбрала этот эпиграф, чтобы показать какой должна быть истинная роль учителя на уроке. Но, помимо этого, возникают и другие вопросы, например, как сделать так, что бы

[1] Роджерс К./Свобода учиться.-М.:Смысл,2002.стр167

детям было интересно учиться, что бы дети стремились узнавать новое?

Каким бы взрослым не считал себя ребёнок, он всё равно остаётся ребёнком. Основой познания для малыша является игра. С помощью игры человек учится правильно воспринимать, правильно вести себя в современном мире. Именно поэтому так важно применять игровые (дискуссионные) технологии в процессе обучения.

Данная форма проведения уроков в основном предназначена для гуманитарных школ, так как именно детям-гуманитариям труднее всего привить любовь к математике и желание заниматься этим предметом. Ещё труднее сформировать познавательный интерес к изучаемой теме.

Познавательный интерес — всмотримся глубже в значение этих объединённых слов. Термин «познавательный» восходит к глаголу «познавать», что весьма схоже по специфике с другими глаголами «изучать», «внедряться», «углубляться». Таким образом, термин — определение «познавательный» предполагает самостоятельное изучение детьми какой-либо информации. Понятие «интерес» следует связать с детской психологией. Интерес возникает у детей к тому, что им нравится, что их захватывает. Вряд ли интерес появится на базе слова «надо». Таким образом, слиянием этих слов хочется показать способ совмещения несовместимого, другими словами показать как, используя «изучение», «внедрение» сформировать «интерес». Подсказкой в решении этой задачи и служат дискуссионные и игровые технологии.

Но, говоря о дискуссионных технологиях, нельзя не вспомнить что такое дискуссия и правила её ведения.

«Дискуссия — это обмен мнениями, обсуждение, спор, столкновение точек зрения, позиций, подходов.»[2]

В методическом пособии «Как сделать уроки физики интереснее» предложены следующие правила ведения дискуссии:

1. Необходимо обеспечить самостоятельность учащихся.

[2] Ланина И.Я. /Урок физики: как сделать его современным и интересным/Спб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена,2000.—стр.204

2. Недопустимо давление учителя на ту или иную точку зрения.

3. Каждое высказывание должно быть обосновано фактами.

4. Каждый участник дискуссии имеет право высказаться.

5. Нельзя переходить на личности.

6. Выступления должны быть организованными, т.е. можно выступать только с разрешения ведущего.

7. Соблюдение культуры дискуссии.

8. Недопустимость предметных ошибок. Обратить на них внимание обязанность учителя.

9. Создание атмосферы доброжелательности к каждому.

Можно предложить следующие формы проведения уроков, используя дискуссионные технологии:

Круглый стол (обсуждение и обмен мнениями между участниками стола по поставленной теме).

Форум (решение поставленной проблемы вначале в нескольких малых группах, а затем в коллективе).

Симпозиум (обсуждение докладов учащихся по выбранной теме).

Судебное заседание.

Различные сочетания дискуссионных технологий с игровыми элементами.

В своей работе я расскажу об уроке математики, проведённом в форме судебного заседания. Но, прежде чем говорить о проведённом уроке, необходимо сказать, что такое суд и, в частности, об уроках-судах.

«Суд — это творческий урок, на котором все действия ученика определяются той ролью, которую он выполняет»[3].

Большие возможности этот урок даёт для обращения к истории математики: выступление подсудимого может представлять биографию учёного или историю доказательства теоремы, если суд проходит над теоремой.

По правилам выступление на суде является не правом, а обязанностью её участников (отчётом о выполнении домашнего задания).

---

[3] Ланина И.Я. /Урок физики: как сделать его современным и интересным/Спб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена,2000.—стр.222

Если цель домашней работы была правильно объяснена учащимся, и они с желанием включились в игру, то эта игра в большей степени, чем любой опрос, будет стимулировать творческую активность учащихся. Для того чтобы сделать урок продуктивным, учитель при распределении поручений среди учащихся должен обязательно учесть не только их способности, но и психологические особенности каждого, и их интересы к тому или иному виду деятельности.

Необходимо, вместе с тем, отметить, что при реализации данной игровой ситуации следует особенно учитывать уровень сложности не только предметного содержания игры, но и процессуальной стороны обучения в зависимости от возраста учащихся. Так, в 8 классе ведущей целью организации суда на уроке должно быть овладение интеллектуальным инструментарием (умением размышлять, анализировать, сравнивать, обобщать).

В 9 классе главная цель суда — использование этого инструментария для доказательства своей точки зрения и проявления своей мировоззренческой позиции.

В 10, 11 классах урок-суд переходит в урок-дискуссию, так как игру, в этом возрасте ученики могут принять как «покушение на их взрослость».

Дидактической же целью уроков-судов является обобщение и систематизация знаний учащихся, но эти уроки в любом классе превращаются в развлечение, если учитель не учтёт психологические особенности возраста учащихся.

Своей работой я хочу не только показать, как сделать уроки математики интереснее, но и рассказать «…как вспыхивают глаза ученика при каждом новом открытии, новом знании, наполняющем и освещающем его жизнь…»[4]

Модель игры «Суд над Франсуа Виетом».

В 4/8 «б» классе Академии Русского Балета им. А.Я. Вагановой, из-за теоремы Ф. Виета несколько учащихся получили двойки за самостоятельную работу. В связи с этим, перед кон-

[4] Роджерс К./Свобода учиться.-М.:Смысл,2002.стр.87

трольной работой, было организовано расследование, вопросами которого и выяснением истиной картины затруднения учащихся, занялись следователь 4/8 «б» класса с помощником. После тщательного анализа ошибок и заявлений дело передано в суд.

При помощи современной техники нам удалось перенести Виета в наше время.

В зале работают: главный судья, секретарь, судебные заседатели, обвинитель и потерпевшие, а также адвокат подсудимого и свидетели.

Подготовка к игре.

Учитель сам распределяет роли среди учащихся класса, учитывая их психологические особенности. У каждого ученика должна быть своя роль. После чего, за неделю до этого урока, учитель рассказывает учащимся о каждой роли.

Главный судья: ведёт заседание, следит за порядком в зале.

Следователь: рассказывает, как шло расследование, какие улики были найдены.

Помощник следователя: помогает в рассказе следователю (даётся при недостаточности ролей).

Адвокат защиты: защищает подсудимого, вызывает нужного свидетеля, проводит с ним беседу, может предъявлять документы (тетради с правильно решёнными заданиями), доказывающие невиновность подсудимого.

Обвиняемый: рассказывает свою биографию, может попытаться снять с себя обвинение, а так же взять последнее слово.

Секретарь: фиксирует основные моменты суда.

Свидетели: доказывают точку зрения той стороны, которую они отстаивают.

Обвинение: занимает позицию, противоположную защите, пытаются доказать несостоятельность теоремы Виета.

Присяжные заседатели: задают вопросы по рассматриваемому делу. Помогают судье принять правильное решение.

Потерпевшие: это ученики, получившие двойки за самостоятельную работу. Их роль состоит в том, чтобы понять свои ошибки и написать заявления следователю.

Далее, когда роли распределены, ученики начинают самостоятельную подготовку к каждой роли (придумывают соответствующие слова, которые будет говорить их персонаж, свидетели готовят примеры, в зависимости от той стороны, которую они будут поддерживать).

Роль Виета требует исторической подготовки ученика, исполняющего эту роль. Учитель может помочь этому ученику, посоветовав посмотреть конкретные источники литературы, в которой он сможет найти историческую справку о жизни Виета.

Особой подготовки требует и роль следователя, так как ему нужно к заседанию собрать улики, на основании которых будет возбуждено дело (это могут быть письменные заявления учащихся класса с требованием запретить пользоваться теоремой Виета, а так же тетради с неудовлетворительно написанными самостоятельными работами учеников).

Необходимо так же перед этим уроком выяснить основные пункты, по которым будет проходить процесс. Они могут быть сформулированы в виде следующих тезисов:

Теорема Виета позволяет легко находить корни квадратного уравнения.

Теорема Виета позволяет находить знаки корней квадратного уравнения, не решая его.

Теорема Виета позволяет упрощать выражения, в уме находя корни уравнения и раскладывать квадратное уравнение на множители.

Теорема Виета помогает решать системы уравнений вида

$$X + Y = a\ ,$$

$$XY = в\ .$$

Теорема Виета позволяет упрощать сложные выражения, где дано квадратное уравнение и в котором встречаются выражения: xy, $x + y$.

По этим тезисам будет очень легко подготовиться свидетелям, придумывая или подбирая по учебнику задания, доказывающие или опровергающие каждый из пунктов. По совместному желанию учителя и детей, количество пунктов может быть увеличено.

Также, непосредственно перед самим уроком, можно расставить парты соответствующим образом.

Сценарий урока «Суд над Франсуа Виетом»

Цели урока:

Разобрать ошибки, допущенные при написании самостоятельной работы.

Подготовиться к контрольной работе.

Показать значимость изучаемого материала.

Ход урока.

Судья. Прошу ввести подсудимого.

Следователь: Слушается дело по обвинению Франсуа Виета, по прозвищу «гальский Аполлоний» в том, что теорему, которую он доказал не нужно учить в школе и вообще она не нужна. У следствия есть заявления потерпевших (нескольких учащихся 4/8 «б» класса), которые, из-за этой теоремы написали самостоятельную работу на «2».

Судья. Подсудимый! Ваше имя, фамилия, дата рождения, род занятий.

Виет: Я родился в 1540 году, в Фонтене-ле-Конт, в семье прокурора. Получил юридическое образование, работал в должности тайного советника при короле Генриха IV. С детства увлекался математикой, благодаря этому и вывел эту теорему.

Обвинитель: господин Виет! Вам предъявляется обвинение в ненужности, выведенной вами теоремы. Ваша вина будет доказываться по следующим тезисам:

Теорема Виета позволяет легко находить корни квадратного уравнения.

Теорема Виета позволяет находить знаки корней квадратного уравнения, не решая его.

Теорема Виета позволяет упрощать выражения, в уме находя корни уравнения и раскладывать квадратное уравнение на множители.

Теорема Виета помогает решать системы уравнений вида

$$X + Y = a,$$

$$XY = в.$$

Теорема Виета позволяет упрощать сложные выражения, где дано квадратное уравнение и в котором встречаются выражения: xy, $x + y$.

Хотите ли Вы, Франсуа Виет, сказать нам что-нибудь по этому делу?

Виет: я считаю, себя полностью не виновным и уверен, что моя теорема помогает учащимся решать уравнения и различные другие задания гораздо проще, нежели с помощью поиска дискриминанта.

Судья: приступаем к обсуждению первого тезиса, по которому обвиняется Виет. Теорема Виета позволяет легко находить корни квадратного уравнения. Есть ли что сказать защите по этому вопросу?

Адвокат: да, Ваша честь, прошу вызвать первого свидетеля защиты, ученицу $4/8$ «б» класса Вавилину Лизу, которая представит пример, подтверждающий справедливость этого тезиса.

Вавилина Лиза: примером уравнения, корни которого легко найти по теореме Виета может быть уравнение: $x^2 + 4x - 5 = 0$, корни которого будут $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Судья: Есть ли что на это противопоставить обвинению?

Обвинитель: обвинение вызывает свидетеля обвинения — ученицу $4/8$ «б» класса, Ильину Екатерину.

Ильина Екатерина: если рассмотреть другое уравнение, например $8x^2 + 4x + 5 = 0$, то, сколько не пытайся найти решения квадратного уравнения по теореме Виета, это уравнение вообще не имеет действительных корней.

Судья: прошу секретаря зафиксировать показания свидетелей, и, если нет других свидетелей с той или другой стороны, тогда приступаем к следующему тезису обвинения.

Обвинитель: других свидетелей нет, можно переходить к следующему тезису.

Адвокат: других свидетелей нет.

Судья: приступаем к обсуждению второго тезиса, по которому обвиняется Виет. Теорема Виета позволяет находить знаки корней квадратного уравнения, не решая его. Слово предоставляется защите.

Адвокат: защита вызывает свидетеля Парийского Иоанна, учащегося $4/8$ «б» класса.

Парийский Иоанн: пусть, например, требуется найти знаки корней уравнения $x^2+x-6=0$, тогда сумма корней равна –1, а произведение –6. Из этого видно, что отрицательное число в произведении можно получить, перемножая числа с разными знаками, таким образом, один из корней будет положительный, а другой отрицательный.

Судья: Есть ли что на это противопоставить обвинению?

Обвинитель: у нас нет свидетеля, который сможет опровергнуть это утверждение.

Присяжный заседатель: у нас возник такой вопрос к Защите: что делать, если уравнение не имеет корней вообще, тогда о каких знаках корней может идти речь?

Франсуа Виет: Если мы в ответе пишем, что уравнение не имеет корней, то мы имеем в виду, что уравнение не имеет действительных корней, тогда мы определяем знаки комплексных.

Судья: прошу секретаря зафиксировать показания свидетелей, и, если больше нет других свидетелей с той или другой стороны, тогда приступаем к следующему тезису обвинения.

Обвинитель: других свидетелей нет, можно переходить к следующему тезису.

Адвокат: других свидетелей нет.

Присяжный заседатель: у нас пока нет вопросов.

Судья: приступаем к обсуждению третьего тезиса, по которому обвиняется Виет. Теорема Виета позволяет упрощать выражения, в уме находя корни уравнения и раскладывать квадратное уравнение на множители.

Адвокат: защита вызывает свидетеля Назарова Никиту, ученика $4/8$ «б» класса.

Назаров Никита: я приведу пример, в котором с помощью теоремы Виета легко упростится выражение.

$$\left(x^2+6x-7\right):\left(x^2-7x+6\right)=(x+7)(x-1):(x-1)(x-6)=(x+7):(x-6).$$

Судья: Есть ли что на это противопоставить обвинению?

Обвинитель: мы просим вызвать свидетеля Царёву Дарью.

Царёва Дарья: мне хотелось бы сказать, что простота решения, а так же упрощение сложных выражений зависят от уравнения и от возможности нахождения корней уравнения.

Судья: прошу секретаря зафиксировать показания свидетелей, и, если больше нет других свидетелей с той или другой стороны, тогда приступаем к следующему тезису обвинения.

Обвинитель: других свидетелей нет, можно переходить к следующему тезису.

Адвокат: других свидетелей нет.

Судья: приступаем к обсуждению четвёртого тезиса, по которому обвиняется Виет. Теорема Виета позволяет решать системы уравнений вида

$$X+Y=a\ ,$$

$$XY=в\ .$$

Есть ли у защиты свидетели по этому пункту?

Адвокат: защита вызывает свидетеля Азарнова Ивана.

Азарнов Иван: Приведу пример, в котором легко найти корни системы уравнений, используя теорему Виета.

$$X+Y=5\ ,$$

$$XY=6\ .$$

Легко понять, что по теореме, обратной теореме Виета, мы можем записать уравнение $x^2-5x+6=0$ и, решая это уравнение, получаем решения $X=3$, $Y=2$. (Решение этой системы можно найти и подбором).

Судья: Есть ли что на это противопоставить обвинению?

Обвинитель: Обвинение вызывает свидетеля Кабатову Юлю.

Кабатова Юля: В предыдущем примере всё было бы хорошо, если бы, при записи квадратного уравнения, вы не пользовались формулой нахождения корней квадратного уравнения, используя формулу дискриминанта. Таким образом, не во всех случаях можно воспользоваться теоремой Виета, то есть найти корни побором.

Судья: Итак, если у сторон нечего больше сказать суду, тогда мы переходим к последнему тезису нашего заседания. Теорема Виета позволяет упрощать сложные выражения, где дано квадратное уравнение и в котором встречаются выражения: xy, $x+y$. И первому слово предоставляется свидетелю со стороны защиты, Рыжову Ярославу.

Рыжов Ярослав: пример такого задания, я сейчас приведу.

Не вычисляя корней квадратного уравнения $3x^2-8x-15=0$, найти $x_1^2+x_2^2$.

Рассмотрим выражение: $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, из этого равенства мы можем выразить

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(8/3)^2+215/3\,.$$

Таким образом, понятно, что для любого уравнения мы сможем посчитать значение этого выражения, так как для этого нам необходимо знать только коэффициенты квадратного уравнения.

Судья: Есть ли что на это противопоставить обвинению?

Обвинитель: у нас нет свидетеля по этому пункту.

Присяжные заседатели: мы выслушали всех свидетелей. Так как не все пункты обвинения были опровергнуты или доказаны, то мы приняли решение частично оправдать Франсуа Виета по трём из пяти пунктов обвинения.

Судья: далее последнее слово предоставляется Виету.

Франсуа Виета: я вывел свою теорему не для того, чтобы ею пользоваться везде, она полезна только там, где ей пользоваться удобнее или если других способов решения, помимо моей теоремы нет.

Судья: суд принял решение оправдать Виета по следующим пунктам:

Теорема Виета позволяет находить знаки корней квадратного уравнения, не решая его.

Теорема Виета позволяет упрощать сложные выражения, где дано квадратное уравнение и в котором встречаются выражения: xy , $x+y$.

Теорема Виета помогает решать системы уравнений вида

$$X+Y=a\ ,$$

$$XY=в\ .$$

По следующим двум пунктам ограничить использование этой теоремы и использовать её только в удобных случаях:

Теорема Виета позволяет легко находить корни квадратного уравнения.

Теорема Виета позволяет упрощать выражения, в уме находя корни уравнения и раскладывать квадратное уравнение на множители.

На этом сегодняшнее заседание считаю закрытым!!!

Заключение.

Помимо позитивного настроя учащихся могут возникнуть трудности, при проведении таких уроков:

Первая и самая главная проблема это установление дисциплины на уроке, так как учитель играет на этом уроке второстепенную роль, то есть роль помощника. Эта проблема решается путём правильного выбора ученика на роль судьи, которого должность обязывает следить за порядком.

Как уже говорилось вначале, необходимо, что бы у каждого бала роль.

Необходимо, чтобы действия учителя на этом уроке были минимальны, т.е. учащиеся максимально самостоятельно должны вести судебное разбирательство.

Могут возникнуть проблемы по подбору материалов при подготовке учащихся к уроку. Всю необходимую помощь учитель может осуществить при обращении к нему учащихся до начала этого урока.

После окончания суда, либо на этом уроке, если останется время, либо на следующем, если нет, необходимо провести обсуждение его основных моментов с учащимися (это так же можно провести в форме домашнего сочинения-отзыва или анализа).

Все действия учащихся должны быть оценены.

Это не единственный способ развить познавательный интерес у учащихся, так как дискуссионные технологии позволяют нам придумывать новые виды работы с детьми и модернизировать уже имеющиеся. Этот урок лишь крупица на пути поиска методов, для того чтобы сделать уроки математики интересными и познавательными, привить учащимся любовь к науке. «…Современного ученика надо избавить от превратного представления о науке как о чём-то абсолютном, завершённом и застывшем.

С этой целью учитель создаёт условия для исследовательской направленности, ставя проблемы, формируя поощряющую среду и оказывая ученикам помощь в исследовательских действиях…».

Литература

1. Алимов А.Ш. /Алгебра/Учебник для 8 класса/М.: Просвещение,2004. — 255с.

2. Зив Б.Г./Дидактические материалы по алгебре для8 класса./С-Пб.: «ЧеРо-на-Неве», 2004. — 128с.

3. Колягин Ю.М./Рабочая тетрадь является частью учебного комплекта по алгебре/М.:Просвещение, 2004. — 143.

4. Ланина И.Я. /Урок физики: как сделать его современным и интересным/С-Пб.: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2000. — 260с.

5. Роджерс К./Свобода учиться. / М.:Смысл, 2002. — 527с.

Теория вероятностей в школе: что мешает и как помочь?

А.С. Штерн,
г. Москва
ashtern@yandex.ru

Теория вероятностей постепенно становится полноправным разделом школьного курса алгебры. В используемых учебниках основам этой науки посвящены отдельные главы. Выходят весьма содержательные книги по теории вероятностей для школьников. Медленно, но всё же идёт процесс продвижения задач по теории вероятностей в олимпиадную практику. Казалось бы, задача внедрения «тервера» в школьную программу решается вполне благополучно. Однако опыт общения с учителями, достаточны квалифицированными и, порой, очень заметными в российском образовательном пространстве, говорит о существенных трудностях на этом пути. Довольно часто учитель старается отдать часы, посвящённые согласно учебному плану теории вероятностей, на изучение других разделов. Бывает и так, что теория вероятностей предлагается школьнику для самостоятельного изучения. Но даже и в тех случаях, когда соответствующие часы используются учителем по назначению, увидеть глубокий интерес педагога к преподаванию этой науки удаётся крайне редко. Размышляя над этой ситуацией, автор пришёл к некоторому её объяснению. На наш взгляд, учителя сдерживает отсутствие видения внутрипредметных связей между теорией вероятностей и традиционными разделами школьной программы. Единственный раздел, который в сознании учителя и школьника сросся с теорией вероятности «намертво», — комбинаторика. Но ведь и комбинаторика далеко не всеми учителями воспринимается как полноправная и желательная часть школьного курса алгебры. Кроме того, на наш взгляд такая жёсткая зависимость скорее мешает изложению «тервера», как самостоятельного раздела школьной программы с присущей ему собственной логикой. Для первых шагов в этом направлении нужен лишь самый минимум знаний по комбинаторике: достаточно понимать правило произведения и правильно считать количество двухэлементных подмножеств, то есть величину C_n^2.

В данной работе автор приводит несколько задач по теории вероятностей, самым непосредственным образом связанным с другими разделами школьной программы и, соответственно, помогающих пониманию этих разделов. Эти задачи не являются новыми, все можно найти в изданиях [1]-[3] либо на сайте problems.ru. Главное для нас — обратить внимание читателя на имеющиеся здесь внутрипредметные связи. Хочется надеться на то, что обнаружение таких связей стимулирует интерес учителя к изучению и преподаванию этой дисциплины.

Необходимо также заметить, что речь идёт о проблеме интеграции теории вероятностей в углублённый курс алгебры. Для решения этого вопроса в рамках базовых курсов нужны, вероятно, совсем иные подходы, ориентированные, в первую очередь, на то, что сейчас в образовании принято называть real life.

Теория вероятностей и плоские множества

Имеются в виду задачи на вычисление площадей плоских фигур, заданных системой неравенств на координатной площади. Это вполне устоявшийся в рамках школьного курса раздел, которому посвящена даже глава из книги [4], до недавних времён остававшейся библией абитуриента. Изучение теории вероятностей даёт хорошую возможность поупражняться в задачах такого типа. Классический пример — задача о составлении треугольника из трёх случайных отрезков.

Найдите вероятность того, что при случайном бросании двух точек на отрезок он разделится на три отрезка, из которых можно составить треугольник.

Эта задача слишком хорошо известна и входит во все пособия по теории вероятностей для школьников. Поэтому имеет смысл более подробно остановиться на следующей, менее популярной, задаче.

Петя и Вася договорились встретиться в метро между 12-00 и 13-00. Каждый из них приходит, ждёт 10 минут и уходит. А, если наступает 13-00, то уходит сразу. Найдите вероятность их встречи.

Схема решения.

А) Элементарное событие (итог) — пара точек на отрезке [0;1]. Соответственно, пространство элементарных событий – квадрат на координатной плоскости со стороной 1 и левым нижним углом в начале координат.

Б) «Условия благоприятности»:

$$|y-x| \le \frac{1}{6} \Leftrightarrow x-\frac{1}{6} \le y \le x+\frac{1}{6}.$$

В) Нахождение площади множества благоприятных точек: из квадраты вырезаются два лишних прямоугольных треугольника с катетами $\frac{5}{6}$. Площадь оставшейся фигуры $\frac{11}{36}$.

Г) Ответ $p=\frac{11}{36}$. Вероятность «невстречи» намного меньше вероятности встречи!

Теория вероятностей и диофантовы уравнения

Постановка вопроса вполне естественная: на начальном этапе изучения теории вероятностей решаются дискретные задачи, что и приводит к соотношениям между параметрами с целыми значениями. Диофантовы уравнения — важный раздел как с точки зрения олимпиадной практики школьников, так и (что, конечно, гораздо важнее) с точки зрения формирования математической культуры. В школьной программе они освещаются крайне слабо, и каждая возможность столкнуться с ними ещё раз очень важна.

В ящике 2018 синих и красных шаров. Из ящика наудачу вынимается два шара. Может ли быть так, что следующие события *равновероятны: А) вынуты два шара одного цвета; Б) вынуты два шара разного цвета?*

Схема решения.

Будем решать более общую задачу: при каком общем числе шаров эти события могут быть равновероятными? Пусть в ящике s носков синего света и $m-s$ шаров красного света. Тогда $p_B = \dfrac{2s(m-s)}{m\cdot(m-1)}$ и равенство $p_B = p_A = \dfrac{1}{2}$ приводит к соотношению $m=(m-2s)^2$. Теперь ответ очевиден: общее число шаров должно быть точным квадратом.

Теория вероятностей и математическая индукция

Серьёзное освоение «тервера» без уверенного владения индукцией и рекурсией, конечно, невозможно. Но и на начальном этапе изучения такие задачи возникают довольно естественно. Вот — одна из наиболее известных задач «элементарной» теории вероятностей.

Задача о сумасшедшей старушке. *При посадке в самолет выстроилась очередь из n пассажиров, у каждого из которых имеется билет на одно из n мест. Первой в очереди стоит сумасшедшая старушка. Она вбегает в салон и садится на случайное место (возможно, и на свое). Далее пассажиры по очереди занимают свои места, а в случае, если свое место уже занято, садятся случайным образом на одно из свободных мест. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?*

Схема обсуждения.

А) Случай $n=2$ очевиден. При $n=3$ естественно выделяются три существенно разных случая: старушка занимает своё место, старушка занимает место последнего, старушка занимает место второго в очереди. Относительную сложность представляет только нахождение условной вероятности в последнем случае. Там всё зависит от поведения второго из стоящих в очереди, который может с равными вероятностями сесть на место старушки или на место последнего пассажира. Таким образом, по формуле полной вероятности находим: $p=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Б) Разобранные случаи наводят на два соображения:

при любом n ответ равен $1/2$;

доказывать это нужно методом математической индукции.

При входе в самолёт старушки снова существенны три варианта: старушка занимает своё место, старушка занимает место последнего, старушка занимает какое-то иное место. Это придает искомой формуле вид: $p=\frac{1}{n}\cdot 1+\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-2}{n}\cdot x$. В третьем случае проследим за пассажиром с билетом на то место, которое заняла старушка. Если он вошёл сразу за старушкой, то существенно лишь одно: сядет ли он на место старушки или на какое-то другое. Это означает, что он оказывается в положении старушки, только «разумным» теперь оказывается выбор того места, которое было предназначено для старушки, поскольку он гарантирует последнему сохранение его места. В этом месте некоторые из участников дискуссии непременно произносят «сакральную» фразу «Теперь он становится сумасшедшей старушкой». Так или иначе, мы свели решение к разбору ситуации с $n-1$ пассажиром, что позволяет сослаться на предположение индукции и написать $p=\frac{1}{n}\cdot 1+\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Ну а что делать, если обиженный бабушкой пассажир войдёт не сразу вслед за ней, а позже? Но и в этом случае он берёт на себе роль старушки. Только число пассажиров не $n-1$, а меньше. И можно снова ссылаться на индуктивное предположение.

Комментарий к решению. Чем вызвано такое подробное обсуждение этой задачи? Во-первых, огромным объёмом дискуссий по её поводу на всякого рода форумах. Эти обсуждения содержат массу эвристически разумных рассуждений, которые автора искренне считают полными решениями, и совсем редко содержат чёткие объяснения. И более существенный аргумент в пользу этой задачи: здесь используется не стандартная схема индукции, а так называемая «индукция от всех меньших значений». В арсенале учителя таких задач немного. Например, в классическом задачнике [5], можно найти только одну задачу (про сумму двух взаимно обратных величин). В такой ситуации каждая содержательная задача на эту тему оказывается находкой. Одну из таких находок, как выясняется, можно обнаружить при изучении теории вероятностей.

Вероятностные стратегии

Задачи на построение стратегии, позволяющий добиться того или иного результата вне зависимости от действий партнёра, пытающегося этому помешать, в школьную программу не входят. В то же время каждый педагог, хоть как-то желающий подготовить ученика к успешному выступлению на олимпиадах, мимо таких задач пройти не может. В этой ситуации очень важно разнообразить круг таких задач, привнося в него новые идеи и постановки. Интересны задачи, в которых предлагается построить алгоритм, не гарантирующий такого результата, а позволяющий добиться его с достаточно большой вероятностью. Таких задач в арсенале преподавателя пока немного. Вот замечательная задача, предлагавшаяся в 2017 году на Заочной олимпиаде по теории вероятностей и статистике для школьников.

В одном пакетике два пирожка с капустой, в другом два с вишней, в третьем — один с капустой и один с вишней. Выглядят и весят пирожки одинаково. Внуку нужно дать один пирожок. Бабушка хочет дать пирожок с вишней, но определить начинку может, только надломив пирожок. Надломленный пирожок внук брать не хочет. Как должна действовать бабушка, чтобы внук с вероятностью $2/3$ *получил целый пирожок с вишней? С вероятностью, большей чем* $2/3$*?*

Решение. Для обнаружения целого пирожка с вишней с вероятностью $2/3$ нужно поступить самым непосредственным образом: разломить один случайно взятый пирожок. Если он окажется пирожком с вишней, то внуку надо дать пирожок из того же пакета, а если с капустой, то из другого. В самом деле, чтобы внуку достался пирожок с капустой, предварительно должны произойти следующие события. Либо бабушка достаёт пирожок с капустой из «смешанного пакетика, либо пирожок с вишней из смешанного пакетика, либо пирожок из капустного пакетика. Значит, вероятность получения внуком пирожка с капустой находится по формуле $p=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$. Соответственно, вероятность получения внуком пирожка с вишней равна $2/3$.

Чтобы найти целый пирожок с вишней с вероятностью, большей $2/3$, придётся проделать три действия, т.е. разломать по одному пирожку из каждого пакета. При этом с вероятностями $1/2$ могут возникнуть следующие ситуации: $К-К-В$ (капуста-капуста-вишня) и $К-В-В$. В первом случае, конечно, нужно отдать внуку целый пирожок из третьего пакета, а во втором любой пирожок из второго или третьего пакета. Тогда вероятность получения внуком целого пирожка с вишней будет равна $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$.

Теория вероятностей и доказательство неравенств

Умение доказывать неравенства стало (возможно, не вполне обоснованно) одним из главных навыков в олимпиадной практике школьников. Без этого умения сложно рассчитывать на безболезненное усвоение математического анализа, той же теории вероятностей и других математических дисциплин. Оказывается, в школьный курс теории вероятностей вполне можно включать задачи, способствующие освоению этого весьма замысловатого искусства.

Петя и Вася играют в дартс на необычной мишени — секторы на ней неравные, так что вероятности попасть в разные секторы не одинаковы. Однажды Петя и Вася поочерёдно бросили дротики и попали в мишень. Что более вероятно: что оба попали в один сектор или в соседние по часовой стрелке (сперва Петя, а потом Вася)?

Решение. Пусть вероятности попадания дротиков в различные сектора равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда вероятность попадания в один сектор равна $p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2$, а вероятность попадания в соседние сектора есть $p_1 p_2 + p_2 p_3 + \ldots + p_n p_1$. Неравенство

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 \geq p_1 p_2 + p_2 p_3 + \ldots + p_n p_1$$

хорошо известно и сводится к следующему неравенству

$$(p_1 - p_2)^2 + (p_2 - p_3)^2 + \ldots + (p_n - p_1)^2 \geq 0\,.$$

Таким образом, вероятность попадания в одинаковые секторы выше.

Занятия по теории вероятностей проводились автором на уроках алгебры в 9-м классе школы №57 г. Москвы, в группе 7 класса на летних сборах московских школьников в пансионате «Команда» и курсах повышения квалификации учителей математики Образовательного центра «Сириус». Автор благодарит И.В. Ященко, А.А. Пономарёва и Л.М. Самойлова, предоставивших ему такую возможность.

Литература

1. Высоцкий И.Р., Ященко И.В. «Задачи заочных интернет-олимпиад по теории вероятностей и статистике»; М. МЦНМО, 2017.

2. Высоцкий И.Р. «Задачи заочных интернет-олимпиад по теории вероятностей и статистике»; М. МЦНМО, 2017.

3. Шень А.Х. «Вероятность: примеры и задачи». М. МЦНМО, 2012.

4. Ткачук В.В. «Математика абитуриенту». М. МЦНМО, 2017.

5. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И «Сборник задач по алгебре, 8-9 класс». М. Просвещение, 2018.

Содержание