Учим математике-9

Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Под редакцией А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова

Издательство МЦНМО
Москва, 2020

УДК 51(07)
ББК 22.1я721
У92

У92 **Учим математике-9.** Материалы открытой школы-семинара учителей математики / Под ред. А. Д. Блинкова и П. В. Чулкова. — М.: МЦНМО, 2020. — 128 с.

ISBN 978-5-4439-1480-0

В этом сборнике представлены избранные материалы девятой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики. Он прошел в г. Майкопе с 30 апреля по 7 мая 2019 года. Сборник содержит расширенные тексты докладов участников семинара по проблемам школьного преподавания, внеурочной и олимпиадной деятельности.

Брошюра адресована учителям математики, методистам и всем тем, кто интересуется проблемами математического образования школьников.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

УЧИМ МАТЕМАТИКЕ-9
Материалы открытой школы-семинара учителей математики

Технический редактор *Т. Струков*
Рисунки *Е. Шапарин*

Подписано в печать 31.03.2020 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 8 печ. л. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

6+

ISBN 978-5-4439-1480-0

Введение

В этом сборнике представлены избранные материалы ***девятой открытой школы-семинара для преподавателей математики и информатики***. Он прошел в г. Майкопе с 30 апреля по 7 мая 2019 года. Организаторами семинара являлись Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Республиканская естественно-математическая школы (р. Адыгея), ГАОУ ДПО «Центр Педагогического Мастерства» г. Москвы, Московский Центр Непрерывного Математического Образования и Российская ассоциация учителей математики.

Материалы восьми предыдущих школ-семинаров были опубликованы в сборниках «Учим математике» с соответствующими номерами — М.: МЦНМО, 2007, 2009, 2013, 2014, 2015, 2017, 2018 и 2019 гг.

На семинар приглашались все желающие преподаватели. В итоге, в нем приняло участие около ста человек, представлявших разные уголки России.

Большинство участников семинара — творческие учителя, которые, помимо уроков, ведут активную внеклассную работу, занимаются проектной и исследовательской деятельностью со школьниками, участвуют в проведении математических олимпиад. Многие из них являлись победителями или призерами творческих конкурсов учителей математики. Среди участников были также профессиональные математики и преподаватели вузов, которые занимаются математическими олимпиадами и ведут разнообразную работу со школьниками. Приятно отметить, что есть участники, не пропустившие ни одного из прошедших выездных творческих семинаров!

Проведение семинара дало прекрасную возможность провести большое количество мастер-классов со школьниками Адыгеи, которые проводили как преподаватели РЕМШ, так и приглашенные преподаватели из других городов России. Проведенные занятия со школьниками «по горячим следам» обсуждались с участниками семинара.

Лекции, семинары и практические занятия проводили наиболее опытные преподаватели-участники семинара. Помимо этого, с участниками семинара обсуждались различные вопросы, связанные с обучением школьников. Уделялось время как разнообразным методическим вопросам, так и «чисто математическим». По традиции, каждый участник семинара имел возможность выступить со своим докладом или кратким сообщением. По итогам школы-семинара все участники получили специальный сертификат от ГАОУ ЦПМ.

Успешное проведение школы-семинара обеспечили представительные научный и программный комитеты.

Программный комитет семинара:

- Ященко И. В. (директор ЦПМ, исполнительный директор МЦНМО, учитель математики ЦО «Пятьдесят седьмая школа» г. Москвы, к. ф-м. н.) — председатель;
- Блинков А. Д. (методист ЦПМ, сотрудник МЦНМО, Заслуженный учитель РФ) — заместитель председателя;
- Мамий Д. К. (директор Республиканской естественно-математической школы, заместитель руководителя Кавказского математического центра АГУ, Заслуженный работник образования Республики Адыгея) — заместитель председателя;
- Андреев Н. Н. (заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В. А. Стеклова РАН, лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года в области науки и инноваций для молодых учёных, создатель проекта «Математические этюды», член Координационного Совета Кавказской математической олимпиады, лауреат Золотой медали РАН за пропаганду научных знаний, кандидат физико-математических наук);
- Кожевников П. А. (Председатель Задачного комитета Кавказской математической олимпиады, кандидат физико-

математических наук, доцент МФТИ, старший научный сотрудник лаборатории популяризации и пропаганды математики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, член тренерского совета национальной команды России на международной математической олимпиаде, заместитель главного редактора по математике журнала «Квант», член Центральной предметной методической комиссии Всероссийской олимпиады школьников по математике, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по математике, золотой медалист международной математической олимпиады 1992 г.)
- Столбов К. М. (зам. директора и учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга, Почетный работник общего образования РФ);
- Чулков П. В. (доцент кафедры элементарной математики МПГУ, зам. директора ФМШ №2007 г. Москвы, Заслуженный учитель РФ).

Организационный комитет семинара:

- Блинков А. Д. (методист ЦПМ, сотрудник МЦНМО, Заслуженный учитель РФ) — председатель;
- Мамий Д. К. (директор Республиканской естественно-математической школы, заместитель руководителя Кавказского математического центра АГУ, декан факультета математики и компьютерных наук АГУ, Заслуженный работник образования Республики Адыгея) — заместитель председателя;
- Юров А. В. (руководитель отдела сопровождения проектов Кавказского математического центра АГУ);
- Наконечный Н. А. (сотрудник ЦПМ) — координатор и секретарь семинара;
- Эдлин Ю.М (учитель математики лицея «Физико-техническая школа» г. Санкт-Петербурга) — координатор семинара;
- Зубарева С. И. (учитель математики школы №218 г. Москвы, сотрудник МПГУ) — секретарь семинара;
- Малхожева О. Н. (заместитель декана факультета математики и компьютерных наук АГУ);

- Панеш А. А. (заместитель декана факультета математики и компьютерных наук АГУ);
- Мамышев Ю. Т. (заместитель директора Республиканской естественно-математической школы).

Помимо учебных занятий, участники семинара имели возможность совершить увлекательную экскурсию в предгорья Кавказа. Кроме того, была возможность для спортивных занятий. За рамками официальной программы остались многие часы неформального общения учителей, которые в значительной степени были посвящены обмену педагогическим опытом.

Участие в работе школы-семинара, по мнению большинства его участников, в значительной степени способствовало их профессиональному росту.

К сожалению, далеко не все докладчики и преподаватели мастер-классов предоставили свои материалы для публикации, поэтому о содержании их выступлений можно судить только из названий докладов и тем занятий. Организаторы благодарны всем преподавателям и докладчикам, но особенно тем, кто нашел силы и время подготовить статьи для этого сборника.

Все материалы сборника представлены в авторских редакциях, при этом названия статей иногда несколько отличаются от названий докладов.

Программа девятой открытой школы-семинара

1 мая **Адыгейский государственный университет**	
Время	Докладчики и содержание
9.00–10.00	Регистрация участников
10.00–10.30	Открытие и оргвопросы
10.30–12.00	**Д.К. Мамий** Очарование хаоса
12.30–14.00	**Н.Н. Андреев** Математическая составляющая: новые сюжеты
15.30–17.00	**И.В. Ященко**

2 мая **Адыгейский государственный университет**	
Время	Докладчики и содержание
9.30–11.00	**А.С. Штерн** Calculus или математический анализ (по материалам занятий для 9–10 классов)
11.30–13.00	**И.Б. Писаренко** Различные стили обучения математике
13.15–14.00	**К.М. Столбов** Обучение математике с интересом
15.30–17.00	**А.В. Савватеев** 100 уроков как золотая середина между лучшими матклассами и обычной школой

3 мая **Адыгейский государственный университет**	
Время	Мастер-классы
9.30–11.00	**Д.Э. Шноль** Числовые последовательности
9.30–11.00	**Н.А. Наконечный** Операции с остатками
9.30–11.00	**Е.А. Труфанова** Окружность Эйлера и не только
9.30–11.00	**Г.И. Вольфсон** Дополнительные построения в планиметрии
9.30–11.00	**А.С. Штерн** Множества и операции
Время	Докладчики и содержание
11.30–13.00	**В.А. Рыжик** Обучение геометрии по учебникам А.Д. Александрова и др.
13.15–14.00	**П.В. Чулков** Окрестность алгебраической задачи
Время	Круглый стол
15.30–17.00	**Д.Э. Шноль, Н.Н. Андреев** Учителя математики: основы подготовки новых, способы поддержки работающих

4 мая **Адыгейский государственный университет**	
Время	Мастер-классы
9.30–11.00	**А.Д. Блинков** Расстояния на прямой и не только
9.30–11.00	**К.М. Столбов** Комбинаторные задачи
9.30–11.00	**П.В. Чулков** Алгебраические системы
9.30–11.00	**А.Г. Зарембо** Решение задач с помощью движений на плоскости
9.30–11.00	**А.С. Штерн** Множества и операции (продолжение)
Время	Докладчики и содержание
11.30–13.00	**Н.Н. Куприенко** Некоторые приемы решения стереометрических задач
13.15–14.00	**Г.И. Вольфсон** Как найти ошибку в своем решении
15.30–17.00	**В.А. Труфанова** Уроки математики для физиков

6 мая **Гимназия №22**	
Время	Мастер-классы
9.45–11.20	**Ю.М. Эдлин** Числовые и логические игры-головоломки
9.45–11.20	**А.Д. Блинков** Четвертый признак равенства треугольников
9.45–11.20	**Н.А. Наконечный** Треугольник Паскаля
9.45–11.20	**Д.Г. Мухин** Отрезки касательных
9.45–11.20	**В.Б. Некрасов** Задачи с параметрами
9.45–11.20	**И.Б. Писаренко** Математический анализ: вид «сверху»

6 мая **Адыгейский государственный университет**	
Время	Докладчики и содержание
12.00–13.30	**А.М. Райгородский** Открытые задачи комбинаторики и привлечение школьников к науке
15.00–16.30	**В.А. Лецко** Руководство исследовательской работой старшеклассников
16.45–17.30	**А.Г. Зарембо** Задачи на вычисление углов и расстояний в пространстве

7 мая **Гимназия №22**	
Время	Мастер-классы
9.45–11.20	**Н.А. Наконечный** Треугольник Паскаля (продолжение)
9.45–11.20	**Г.И. Вольфсон** Решение уравнений в целых числах
9.45–11.20	**А.Г. Зарембо** Вычисление и использование площадей в задачах
9.45–11.20	**В.А. Лецко** Исследовательские задачи
9.45–11.20	**Ю.М. Эдлин** Решение задач на отношения отрезков с помощью векторов
9.45–11.20	**Е.А. Труфанова** Посмотрим на задачу с другой стороны (алгебра)

7 мая **Адыгейский государственный университет**	
Время	Докладчики и содержание
12.00–13.30	**В.Б. Некрасов** Применение векторов для решения задач
15.00–15.45	**Д.Г. Мухин** Школьные задачи на круглые тела
16.00–17.00	Закрытие семинара

МБОУ «Лицей 39 им. Б. Астемирова». Интеллектуальные игры: «Завоевание» и «Махачкалинские скачки через дагестанские горки»

З.М. Абдурахманова,
город Махачкала, Республика Дагестан
zumrud0905@mail.ru

Когда я, объездивший множество стран,
Усталый, с дороги домой воротился,
Склонясь надо мною, спросил Дагестан:
«Не край ли далекий тебе полюбился?»
На гору взошел я и с той высоты,
Всей грудью вздохнув, Дагестану ответил:
«Немало краев повидал я, но ты
По-прежнему самый любимый на свете.

Расул Гамзатов




Дагестан. Какие ассоциации возникают у людей, когда они слышат название моей республики? Конечно, это гостеприимный народ, суровая, но прекрасная природа, Расул Гамзатов, государственный ансамбль танца «Лезгинка», кизлярский коньяк, а в последнее время и Хабиб Нурмагомедов — российский боец смешанных боевых искусств. Мне бы очень хотелось, чтобы и номер, и название моей школы зазвучали, среди лучших школ страны.

Историческая справка

Общеобразовательное учреждение «Школа №39» было основано в 1968 году.

В 1990 году при школе были открыты три профильных направления — гуманитарное, физико-математическое и химико-биологическое.

В 2002 году педагогический коллектив проходит аттестацию и ОУ обретает статус лицея.

В 2004 году лицей вошел в 30 лучших школ России по результатам Всероссийского конкурса «Лучшие школы России», где был награжден дипломом II степени в номинации «Школа профессиональной карьеры».

В этом же 2004 году образовательное учреждение награждено дипломом «Знак качества образования» за многолетние успехи в общеобразовательной деятельности.

В 2005–2006 году награждается дипломом I степени Министерства образования и науки РФ за качественную подготовку учащихся.

В 2006, 2008 годах лицей дважды награждался грантом Президента РФ в 1 млн. рублей.

В 2017 году по итогам независимого анализа образовательных результатов образовательная организация включена в списки: 100 лучших образовательных организаций.

Рейтинг

№	Наименование ОО	*	**
1	РМЛИ ДОД	69	1
2	Лицей №39, Махачкала	67	2
3	СОШ №15, Дербент	45	3
4	СОШ №19, Дербент	44	4
5	Республиканский ЦОД	43	5
6	Гимназия №13, Махачкала	40	6
7	НОУ "Тулливер", Махачкала	31	7
8	Хебдинская СОШ, Шамильский р-он	26	8
9	Гимназия культуры мира, Дербент	25	9
10	СОШ №1, Избербаш	24	10

Рейтинг вклада школ Республики Дагестан в развитие таланта обучающихся

* -число участников регионального этапа

** - место в рейтинге школ республик


МЦНМО

СЕРТИФИКАТ

учительская

Московский центр непрерывного математического образования
при информационной поддержке «Социального навигатора» МИА «Россия сегодня» и Учительской газеты

Рейтинг общеобразовательных организаций

обеспечивающих качественное общее образование
и высокие возможности развития способностей школьников по итогам 2016–2017 учебного года

МБОУ «Многопрофильный лицей №39 им. Б. Астемирова»

г. Махачкала

По итогам независимого анализа образовательных результатов образовательная организация включена в списки:
100 лучших образовательных организаций по химико-биологическому профилю

г. Москва, 04 октября 2017 года

Директор МЦНМО И.В.Ященко

Игра — высшая форма исследования.
Альберт Эйнштейн

С 2016–2017 учебного года в своём лицее я начала проводить серии игр «Завоевание» среди учащихся 5 классов. Далее это мероприятие переросло в общегородское, а в 2018–2019 учебном году и в республиканское мероприятие.

Игра «Завоевание»

Правила игры.

На доске нарисована карта.

У каждой команды изначально есть столица (область, из которой она начинает).

Каждая команда получает список олимпиадных задач. Задачи можно решать в любом порядке. По каждой задаче есть только одна попытка (нужен только ответ).

Если сдан верный ответ, команда занимает какую-нибудь свободную область, соприкасающуюся с имеющимися у неё на данный момент областями (команда сама выбирает, какую) и закрашивает её своим цветом.

Если команда хочет завоевать какую-то из соседних областей, принадлежащую другой команде, она должна сдать комплект из двух верных ответов, и если хотя бы один из них неверен — сгорают оба.

Для завоевания чужой столицы нужно сдать комплект из трёх верных ответов (если это удалось, у команды появляется ещё одна столица, и государство превращается в империю).

Также можно за двойную цену (две сданные задачи) высаживать десант, т.е. занимать свободную область, не имеющую общих границ с занятой командой на данный момент территорией.

Игра заканчивается, когда команды сдали все задачи.

Побеждает команда, занявшая большую (по количеству областей) территорию.

Команда, набравшая максимальное количество баллов (обычная занятая командой область дает 1 балл, столица — 2 балла) получает поощрительный приз.


Диплом
награждается команда
за победу в математической игре "Завоевание"
состав команды
Жюри:

Задачи

Задача 1. Однажды в январе было 4 вторника и 4 субботы. Какой день недели был 1 января?

Задача 2. Разрезать квадрат на три части так, чтобы из них можно было сложить тупоугольный треугольник.

Задача 3. Решить уравнение $28x+30y+31z=365$ в натуральных числах.

Задача 4. Известно, что $\frac{4b+a}{5a-7b}=2$. Чему равно

$$\frac{3a^2-2ab+b^2}{5a^2+2b^2}?$$

Задача 5. Длина одной из сторон прямоугольника увеличилась на 25%. На сколько процентов (и как) надо изменить длину другой стороны так, чтобы площадь его не изменилась?

Задача 6. Если дробь $\frac{1}{7}$ перевести в десятичную, то какая цифра стоит на сотом месте после запятой?

Задача 7. Расположите на плоскости 10 точек на пяти отрезках так, чтобы на каждом отрезке было ровно по 4 точки.

Задача 8. В 7Е классе все любят бегать, прыгать и плавать. 60% детей любят бегать, 50% детей любят прыгать, 40% любят плавать. Причём, детей, обожающих только один вид деятельности — 60%. Сколько процентов детей любят и бегать, и прыгать, и плавать?

Задача 9. Найти наименьшее чётное натуральное число, сумма цифр которого равна 2018.

Задача 10. Решить в натуральных числах уравнение:

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{11}{3}.$$

Задача 11. Известно, что:

$$a-b-c=1,\ b-c-a=2,\ c-a-b=3.$$

Найти a, b, c.

Задача 12. Найти наибольшее пятизначное число, все цифры которого различны, первая цифра меньше второй, вторая меньше четвёртой, а сумма третьей и пятой не больше первой.

Задача 13. Найдите две несократимые дроби, каждая из которых больше $\frac{1}{2000}$, но меньше $\frac{1}{1999}$.

Задача 14. Назовем натуральное число «странным», если в его десятичной записи отсутствует цифра 0, и сумма его цифр равна их произведению. Сколько существует трёхзначных чётных «странных» чисел?

Задача 15. Расшифруйте ребус

$$\text{КОШКА}+\text{КОШКА}+\text{КОШКА}=\text{СОБАКА}.$$

Таблица сдачи задач

Задачи	**1/8**	**2/9**	**3/10**	**4/11**	**5/12**	**6/13**	**7/14**	**15**	**∑**

В 2018–2019 учебном году прошел турнир «Махачкалинские скачки через дагестанские горки». Это новая интеллектуальная игра по математике. Презентация игры была проведена в школах города Махачкалы. Проведено три отборочные игры по 9 команд-участниц, и финал.

Игра «Махачкалинские скачки через дагестанские горки»

Правила игры

Игра продолжается ровно 1 час (12 задач).

Каждая команда сразу получает весь набор из 12 задач.

Решив отвечать, команда посылает к жюри своего представителя, который записывает ответ на специальном бланке, находящемся у жюри.

На каждую задачу команда может дать ответ не более двух раз.

Ответы на задачи команды должны сдавать по возрастанию номеров задач. Другими словами, сдав ответ на задачу, команда не может отвечать на задачи с меньшими номерами.

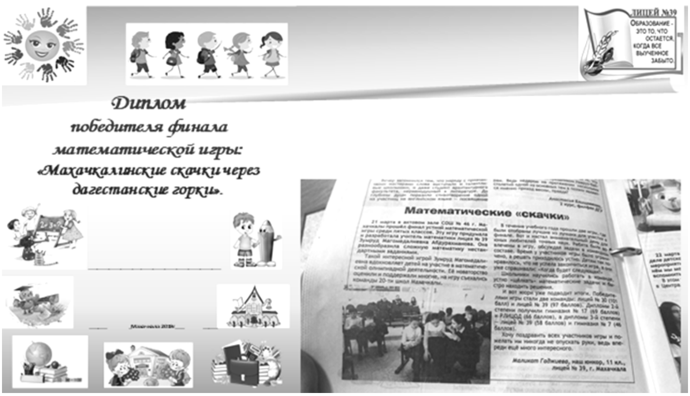
Каждые 10 минут снимаются по две задачи, т.е. ответы на них больше не принимаются. Это значит, что через 10 минут после начала игры уже нельзя сдавать первые 2 задачи, еще через 10 минут уже нельзя сдавать и следующие две задачи и т.д. Как только прозвучал таймер рубежа, жюри спрашивает желающих ответить по снимаемым задачам, после этого задачи снимаются.

В течение игры ровно по одной задаче можно отложить. Такая задача помечается буквой «о» в левой части соответствующей клетки. Ее временной рубеж начинается в конце игры.

За каждый неверный ответ в соответствующую клетку добавляется минус. За правильный ответ добавляется плюс и еще индекс, равный количеству плюсов к этому времени у других команд по этой задаче. Если время закончилось, а задача не решалась, то автоматически за эту задачу ставится «–». В конце игры за каждый минус команда получает -3 балла, за каждый плюс $+10$ баллов, за каждый индекс вычитается его номинал.

Таблица на доске

Задачи	10 минут		10 минут		10 минут		10 минут		10 минут		10 минут	
Команды	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A												
B												
C												
D												
E												
F												
G												



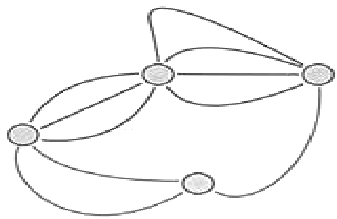
Задачи

Задача 1. В ящике лежат шары: 6 красных, 8 синих и 1 зелёный. Сколько шаров надо вынуть, чтобы достать два шара одного цвета?

Задача 2. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на школьном дворе?

Задача 3. На пиратском рынке бочка рома стоит 800 дублонов, или 100 пиастров, а пистолет стоит 100 дублонов, или 250 дукатов. Сколько пиастров нужно заплатить за попугая, если за него просят 100 дукатов?

Задача 4. От дачного поселка проложили две дороги до деревни Филимоново и одну дорогу до Оладушкино. Сколько существует путей от Филимоново до Оладушкино?



Задача 5. В магазине «Всё для чая» есть 6 видов чашек, 4 вида блюдец и 2 вида ложек. Сколькими способами в этом магазине можно купить набор из чашки, блюдца и ложки?

Задача 6. Решите уравнение $(x:2-3):2-1=3$.

Задача 7. Ученики одного класса съели 95 конфет, причем каждый мальчик съел 3 конфеты, а каждая девочка — 5 конфет. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек, если всего в классе 25 человек?

Задача 8. Упаковка чая на 50 копеек дороже пакета кофе. Вася купил 7 упаковок чая и 6 пакетов кофе, потратив 68 рублей 50 копеек. Сколько стоит пакет кофе?

Задача 9. Молодой человек согласился работать с условием, что в конце года он получит автомобиль «Запорожец» и 2600$. Но по истечении 8 месяцев уволился и при расчёте получил «Запорожец» и 1000$. Сколько стоил «Запорожец»?

Задача 10. На полке в один ряд стоят книги. Энциклопедия стоит шестой слева и двадцатой справа. Сколько книг на полке?

Задача 11. Упрямый Винни-Пух решил дойти пешком до Северного полюса. В 12 часов его нагнал Кристофер Робин на велосипеде и подвёз до того места, откуда до Северного полюса оставалось столько же, сколько Винни уже прошёл пешком. На Северном полюсе Винни-Пух был в 14 часов. Сколько времени потребуется Винни-Пуху на обратный путь пешком, если известно, что на велосипеде его везли со скоростью вдвое большей, чем он ходит пешком?

Задача 12. В магазине продается шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы имеют одинаковую цену, а разные — разную. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово ELEVEN стоит \$16. Сколько стоит слово TWELVE?

В своей педагогической деятельности и дальше буду проводить турниры математических игр.

Их цель:

— Формировать интерес к математике, любознательность и желание пополнять свои знания;

— Развивать логическое мышление учащихся, умение применять свои знания в нестандартных ситуациях;

— Воспитывать дух здорового соперничества и чувства солидарности.

Четвертый признак равенства треугольников

А.Д. Блинков,
г. Москва
adblinkov@yandex.ru

Впервые опубликовано в журнале «Квантик», №1/2020.

Во всех школьных учебниках геометрии сформулированы три признака равенства треугольников. Но иногда встречается ситуация, когда у двух треугольников соответственно равны две стороны и угол, лежащий напротив одной из них. Равны ли треугольники в этом случае? Не обязательно! Это можно показать на простом примере.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC. На его основании AC отметим точку D, отличную от его середины (см. рис. 1). Тогда в треугольниках ABD и CBD: $AB = CB$, BD — общая сторона, $\angle BAD = \angle BCD$, но эти треугольники не равны, так как $AD \neq CD$.

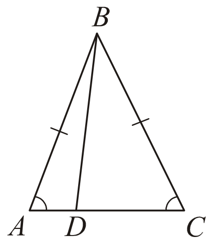


Рис. 1

Тем не менее, в некоторых случаях треугольники могут оказаться равными, а в случаях, когда они не равны, между ними существует связь. Для того, чтобы выявить эти случаи, удобно рассмотреть задачу на построение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему напротив одной из них.

Пусть надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha < 90°$. Тогда, построив угол A, равный α, и отложив на одной из его сторон отрезок AB длины c, проводим окружность с центром B и радиусом a. Далее возможны различные случаи в зависимости от соотношения между a и расстоянием от точки B до другой стороны угла A. Рассмотрим их по мере постепенного увеличения a.

1) Если a меньше, чем указанное расстояние, то окружность не пересечет эту сторону и тогда задача решений не имеет. Этот случай нам неинтересен.

2) Если указанное расстояние равно a, то окружность будет касаться стороны угла, тогда задача имеет одно решение. Но этот случай также неинтересен, так как искомый треугольник — прямоугольный, а признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу хорошо известен.

3) Если же a больше, чем расстояние от точки B до другой стороны угла A, то окружность пересечет прямую, содержащую сторону угла, в двух точках (см. рис. 2 а, б).

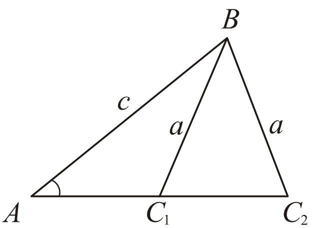


Рис. 2а

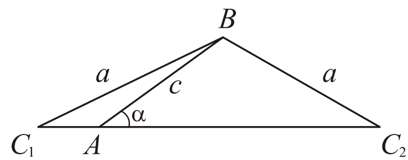


Рис. 2б

В случае, показанном на рис. 2а, мы получим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи: ABC_1 и ABC_2, то есть в этом случае треугольники с указанными данными не равны. Но имеет смысл заметить, что в этих треугольниках сумма углов C_1 и C_2 равна $180°$, так как углы AC_1B и C_2C_1B смежные, а угол C_2C_1B равен углу C_1C_2B.

В случае, показанном на рис. 2б, задача имеет единственное решение: условию удовлетворяет только треугольник ABC_2, то есть в этом случае треугольники с указанными данными равны.

Таким образом, можно сформулировать общее утверждение: *если две стороны одного треугольника соответственно равны сторонам другого треугольника и равны углы, противолежащие одной паре равных сторон, то эти треугольники либо равны, либо сумма углов, противолежащих другой паре равных сторон равна* $180°$.

Для того, чтобы различить эти два случая, заметим, что на рис. 2а: $a < c$, а на рис. 2б: $a > c$. Теперь можно сформулировать четвертый признак равенства треугольников: *если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника и равны углы, лежащие напротив больших из этих сторон, то такие треугольники равны.*

Упражнение 1. а) Объясните, почему можно не рассматривать случай $a = c$.

б) Рассмотрите случай, когда $\alpha \geq 90°$.

Упражнение 2. Угол BAC треугольника ABC равен $15°$. Можно ли однозначно определить сторону AC, если а) $AB = 3$, $BC = 4$; б) $AB = 4$, $BC = 3$? Обоснуйте.

Сформулированные выше утверждения позволяют решать задачи как на построение контрпримеров к некоторым утверждениям, так и на применение четвертого признака для доказательства. Рассмотрим примеры.

Пример 1. *Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, и равны высоты, проведенные к одной паре равных сторон. Обязательно ли эти треугольники равны?*

Понять ответ и построить контрпример помогает уже рассмотренная ситуация: наличие общей высоты у остроугольного и тупоугольного треугольников с общей стороной.

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его высоту BH. На продолжении стороны AC за вершину A отметим точку D так, что $AD = AC$ (см. рис. 3). Тогда в треугольниках ABC и ABD: общая сторона AB, $AC = AD$ и к этим сторонам проведена общая высота. Но эти треугольники не равны, так как ABD — тупоугольный треугольник.

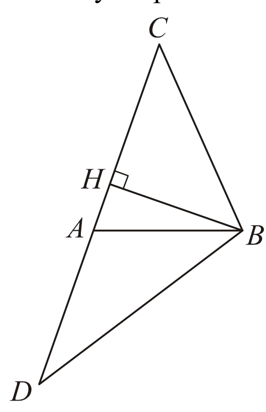


Рис. 3

Упражнение 3. Изменится ли ответ, если равные высоты проведены к третьим сторонам?

Пример 2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \angle C$ и $AB = CD$. Обязательно ли $ABCD$ — параллелограмм?

И в этом случае помогает уже рассмотренная ситуация.

Ответ: не обязательно.

Решение. Рассмотрим рис. 1, на котором «отрежем» треугольник BCD и приставим его к стороне BD в «перевернутом» виде (см. рис. 4). Более строго: построим треугольник DC_1B, симметричный треугольнику BCD относительно серединного перпендикуляра к отрезку BD. Тогда в четырехугольнике ABC_1D: $\angle A = \angle C_1$ и $AB = C_1D$, но параллелограммом он не является, так как $BC_1 \neq AD$.

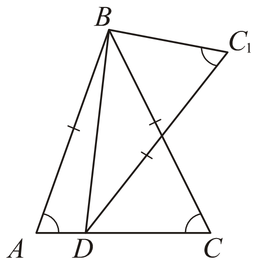


Рис. 4

Пример 3. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечена точка K так, что $\angle AKB = \angle BKC$. Докажите, что прямая BK проходит через середину стороны AC.

Решение. Так как BK — общая сторона треугольников AKB и CKB, то из условия задачи следует, что либо эти треугольники равны, либо $\angle KAB + \angle KCB = 180°$ (см. рис. 5). Но второй случай противоречит теореме о сумме углов треугольника.

Из равенства треугольников AKB и CKB следует, что луч BK — биссектриса угла ABC, тогда прямая BK содержит медиану треугольника ABC, то есть пересекает сторону AC в ее середине.

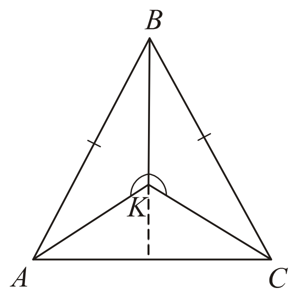


Рис. 5

Пример 4 (Т. Казицына, ММО_2003, 8.4). В треугольнике ABC на сторонах AC и BC отмечены такие точки X и Y, что $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: три угла по $60°$.

Решение. Так как углы BXC и AYB являются внешними для треугольников ABX и CAY соответственно, то

$$\angle BAX = \angle BXC - \angle ABX = \angle AYB - \angle YAC = \angle YCA$$

(см. рис. 6). Следовательно, треугольник ABC является равнобедренным: $AB = BC$.

В треугольниках XBC и YAB: $XC = YB$, $BC = AB$ и $\angle BXC = \angle AYB$. Кроме того, $YB < BC = AB$, значит, $XC < BC$. Так как равные углы лежат напротив больших из рассматриваемых сторон, то эти треугольники равны (по четвертому признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle BCX = \angle ABY$, тогда $AB = AC$. Таким образом, треугольник ABC — равносторонний, значит, каждый его угол равен $60°$.

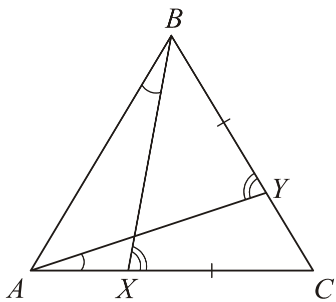


Рис. 6

Обосновать, что из полученных равенств следует именно равенство треугольников, а не случай, когда $\angle XBC + \angle YAB = 180°$ можно иначе:

$$\angle XBC + \angle YAB < \angle ABC + \angle CAB = 180° - \angle ACB < 180°.$$

Для самостоятельного решения предлагаются задачи, часть из которых можно решить, не используя фактов и приемов, рассмотренных выше. Но если их использовать, то решения будут наиболее короткими.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $AD = CE$. Обязательно ли равны отрезки AE и CD?

Задача 2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle C + \angle C_1 = 180°$. Верно ли, что $\angle A = \angle A_1$?

Задача 3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P так, что $AP = AB$. На стороне AB отмечена точка Q так, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.

Задача 4. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AC за точку C — точка N, причем $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

Задача 5 (Е. Бакаев, ММО_2019, 8.5). Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.

Ответы, решения, комментарии

Упражнение 1. В обоих пунктах треугольник определяется однозначно, так как:

а) для равенства равнобедренных треугольников достаточно равенства боковых сторон и любой пары соответствующих углов;

б) угол, равный α, заведомо лежит напротив большей стороны треугольника.

Упражнение 2. Ответ: а) да; б) нет.

а) Все треугольники со сторонами 3 и 4 и углом $15°$, лежащим напротив большей из данных сторон, между собой равны. Следовательно, сторона AC однозначно определяется;

б) заданный угол лежит напротив меньшей из данных сторон, поэтому существуют два неравных треугольника, удовлетворяющих условию. Следовательно, сторона AC однозначно не определяется.

Упражнение 3. Ответ не изменится: треугольники могут быть неравными. Для обоснования достаточно на рис. 2а провести из вершины B общую высоту треугольников ABC_1 и ABC_2.

Задача 1. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим, например, равносторонний треугольник ABC и проведем его высоты AK и CL (см. рис. 7). На отрезках BL и CK отметим точки E и D соответственно так, что $EL = DK$. Тогда прямоугольные треугольники AKD и CLE равны (по двум катетам), поэтому $AD = CE$. Но AE больше половины стороны треугольника, а CD — меньше, то есть $AE > CD$.

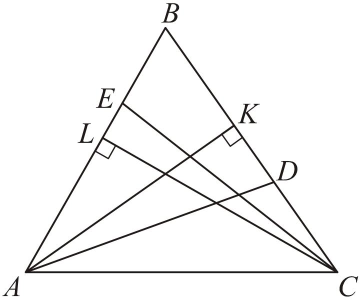


Рис. 7

Из условия задачи следует, что в треугольниках CAD и ACE: общая сторона AC, равны стороны AD и CE, и равны углы DCA и EAC, лежащие напротив этих сторон. Поэтому, если $AC > AD = CE$, то эти треугольники не равны. Это условие является достаточным для построения контрпримера.

Задача 2. Ответ: верно.

Приложим данные треугольники друг к другу так, чтобы совпали вершины B и B_1, C и C_1, а вершины A и A_1 оказались в разных полуплоскостях относительно прямой BC (см. рис. 8). Так как $\angle C + \angle C_1 = 180°$, то точки A, C и A_1 лежат на одной прямой. Следовательно, образовался равнобедренный треугольник ABA_1, в котором углы A и A_1 при основании равны.

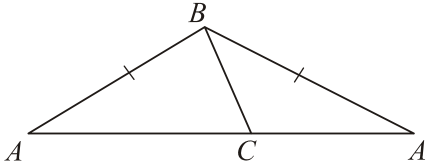


Рис. 8

Доказанное утверждение является в каком-то смысле обратным к общему утверждению, сформулированному в статье.

Задача 3. Из условия задачи следует, что $BC = AB = AP$ и $\angle BCA = \angle BAC$ (см. рис. 9). Докажем равенство треугольников AQP и CPB, из которого и будет следовать, что $AQ = CP$. В этих треугольниках $AP = BC$ и $QP = PB$. Так как $\angle QAP = \angle PCB$, то либо треугольники AQP и CPB равны, либо $\angle AQP + \angle CPB = 180°$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, $\angle AQP > 90°$, так как является внешним углом при основании BQ равнобедренного треугольника BPQ, а $\angle CPB > 90°$, так как является внешним углом при основании BP равнобедренного треугольника BAP. Таким образом, $\Delta AQP = \Delta CPB$, значит, $AQ = CP$.

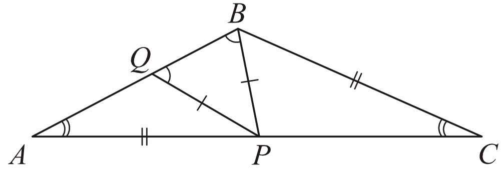


Рис. 9

Другой способ решения, использующий счет углов, приводит к применению первого признака равенства треугольников.

Задача 4. Через точку M проведем прямую, параллельную AC, которая пересечет AB в точке K (см. рис. 10). Тогда каждый угол треугольника BMK равен $60°$, то есть этот треугольник — равносторонний. Следовательно, $\angle AKM = 120° = \angle MCN$. Кроме того, $AM = MN$ и $AK = AB - BK = AC - BM = MC$. Так как углы AKM и MCN — тупые, то их сумма не равна $180°$, значит треугольники AKM и MCN равны. Следовательно, $BM = CN$.

Отметим, что другие дополнительные построения позволяют использовать как первый, так и второй признаки равенства треугольников.

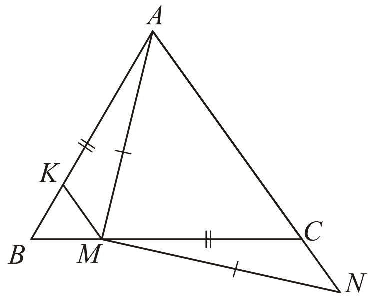


Рис. 10

Задача 5. Ответ: $150°$.

Пусть BM — высота и медиана треугольника ABC, которая пересекает прямую AK в точке O (см. рис. 11). Тогда треугольник AOC — также равнобедренный, поэтому $\angle MOC = \angle MOA = 60°$. Значит, $\angle BOC = 120° = \angle KOC$. Следовательно, треугольники

BOC и KOC равны (по четвертому признаку равенства треугольников). Значит, $OB = OK$, тогда $\angle OKB = \angle OBK = 30°$, то есть $\angle AKB = 150°$.

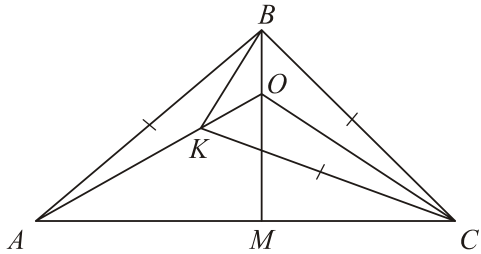


Рис. 11

Отметим, что точка K обязана лежать между точками A и O. Действительно, в противном случае угол CKB оказался бы тупым, а это угол при основании равнобедренного треугольника.

О новой версии библиотеки «Математическое образование» и перспективах развития проекта

В.М. Бусев,
г. Москва
mail@mathedu.ru

В настоящей статье будет рассказано об особенностях новой версии электронной библиотеки «Математическое образование» (https://www.mathedu.ru/), которая была открыта в декабре 2019 года. Данный текст можно рассматривать как продолжение предыдущих статей о библиотеке[1].

Необходимость разработки новой версии возникла из-за несовершенства прежнего варианта сайта, невозможности развивать его на базе имевшейся на тот момент программной платформы.

При создании новой версии имелись в виду следующие задачи:

1) совершенствование пользовательских функциональных возможностей,

2) облегчение для исполнителей работы по подготовке контента,

3) реализация механизмов обратной связи с пользователями,

4) обеспечение возможностей развития проекта без последующей переработки сайта.

Охарактеризуем кратко результаты, которые удалось получить в рамках решения этих задач.

Основными инструментами при работе с материалами библиотеки по-прежнему являются каталог изданий, указатели и поиск по текстам.

---

[1] Бусев В. М. Поиск информации по вопросам преподавания математики и электронная библиотека «Математическое образование» // Учим математике-7: материалы открытой школы-семинара. — М. : МЦНМО, 2018. — С. 36–40;
Борисов И. Ю., Бусев В. М. Электронная библиотека «Математическое образование»: опыт, идеи, перспективы // Математика. — 2019. — № 1. — С. 60–62.

По сравнению с прежней версией *каталог* подвергся структурным изменениям. Теперь он включает разделы «Математика» (научно-популярные книги и пособия), «Методика», «История», «Учебники», «Сборники», «Диафильмы» и «Авторефераты». Разделы делятся на рубрики, которые в ряде случаев имеют подрубрики. Раздел «Сборники» содержит периодические и непериодические издания. Внутри каталога возможен поиск изданий по фамилии автора или части заглавия. В рубриках каталога издания можно сортировать по алфавиту, году публикации или по дате поступления в библиотеку.

Претерпели изменения и *указатели*. Существовавшие в прежней версии указатели авторов и персон сведены в один: удобнее видеть труды персоны и литературу о ней на одной странице. От указателя ключевых слов решено отказаться ввиду сложности его ведения. Альтернативой ему является указатель заглавий, в который входят названия всех произведений (в том числе, статей), причем доступен поиск по этим названиям, аналогичный реализованному в каталоге. Указатель материалов по хронологии сохранен, но модернизирован (введен фильтр по видам публикаций, есть возможность поиска).

В указателе авторов на странице персоны предусмотрено деление материалов на группы: авторские труды; составление, редактирование, переводы; литература о персоне и ее трудах. Реализована возможность сортировки по алфавиту или году публикации. Если публикаций много, добавляется возможность поиска по их названиям. Страница персоны может сопровождаться биографической справкой.

В дополнение к указателям на сайте создан *сервис памятных дат*, в котором персоны сгруппированы в зависимости от даты рождения, и можно просмотреть юбиляров на текущий год и четыре последующих (то есть персоны разбиты на классы вычетов по модулю 5). Юбиляры ближайших дней и месяцев автоматически выводятся в небольшой блок на главной странице.

Важным новшеством является *личный кабинет* пользователя, который дает читателям возможность формировать собственные подборки материалов, отбирая публикации через каталог, указатели или находясь внутри открытого издания. Администрация же библиотеки может собирать статистику использования материалов, а также информировать пользователей о новых поступлениях путем рассылок по почте.

Стал более гибким и удобным *поиск по текстам изданий*, а поисковые запросы сохраняются в личном кабинете. Вскоре появится возможность искать только по определенным областям внутри изданий: в оглавлениях, в библиографии, в условиях задач и их решениях.

Подробнее о пользовательских возможностях можно прочесть на сайте библиотеки в разделе «О проекте» и в кратком руководстве пользователя (также доступно на сайте).

Параллельно с созданием новой версии и доработкой ранее оцифрованных материалов под новые требования продолжалась и текущая работа по наполнению библиотеки в объеме примерно 1200 страниц в неделю. С весны 2018 года в библиотеке размещаются *диссертации* по методике преподавания математики и истории образования. Помимо самого исследования обычно они содержат обзор литературы по теме и библиографию вопроса — весьма полезные материалы для авторов новых работ в той же области.

Скажем несколько слов о *технологической* стороне дела. Основной упор при пополнении библиотеки делается, естественно, на подготовке контента, и от того, как организован процесс оцифровки материалов, зависит скорость роста ресурса в количественном отношении. В ходе создания новой версии в технологии обработки многое удалось усовершенствовать, а также улучшить качество оцифровки. Теперь в распознаваемых текстах без чрезмерных затрат времени восстанавливаются несложные формулы, большинство математических символов и буквы греческого алфавита (автоматическое распознавание здесь, к сожалению, невозможно). Заметим, что с точки зрения поиска нет разницы, будут ли эти элементы восстановлены или оставлены в виде «мусора», однако этот вопрос важен при копировании (например, условий задач или цитат). Кроме того, текст без «мусора» не создает помех при чтении и не требует постоянного переключения между режимами просмотра сканов и символьного текста.

В настоящее время технология подготовки информации в целом отработана, и на первый план стали выходить *организационно-психологические вопросы*: работа с авторами размещаемых в библиотеке материалов и пользователями ресурса. Можно создать хорошую систему, наполненную качественно оцифрованным контентом, но усилия окажутся напрасными, если к этой системе будут мало обращаться.

Поэтому возникают вопросы: как сделать проект широко востребованным? Какие задачи он должен решать? Должен ли проект влиять на математическое образование?

Не входя здесь в подробные рассуждения по этим вопросам[2], отметим следующие положения, которые представляются на данный момент соответствующими реальности.

1. Наличие электронной библиотеки не является достаточным условием для того, чтобы люди, занятые в сфере математического образования, начали активно читать литературу по специальности. Требуются дополнительные усилия по привлечению аудитории к чтению и формированию у нее потребности регулярно работать с информацией.

2. Решать задачу продвижения информации к потенциальным читателям следует, в том числе, путем вовлечения их в развитие проекта. Например, пользователи могут предоставлять свои труды для библиотеки, участвовать в составлении планов ее пополнения, рекомендовать материалы библиотеки коллегам и учащимся, поддерживать ресурс материально и др.

3. Для вовлечения людей в проект он должен мыслиться и развиваться как большая информационная система, включающая наряду с библиотекой различные не библиотечные модули и сервисы (в том числе, элементы социальных сетей); библиотека при этом является главным модулем такой системы. Пользователь может

---

[2] Частично их можно найти в статье: Бусев В. М. Электронная библиотека «Математическое образование» как проект сообщества // Материалы XXXVIII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. — Самара, 2019. — С. 120–124.

обращаться к системе не за книгами, однако в процессе работы может выходить на них из других модулей (возможно, конечно, и движение в обратном направлении). Таким образом, различные части системы должны поддерживать друг друга. Одним из не библиотечных модулей вскоре станет электронный журнал «Вестник математического образования». Привлекательной кажется идея организации на базе библиотеки лектория для педагогов.

4. Цели так понимаемого проекта шире, чем просто библиотеки, и могут быть сформулированы следующим образом: «На базе накопленных знаний менять мир к лучшему». Таким образом, ответ на вопрос «должен ли проект влиять на математическое образование?» утвердительный, причем влияние не сводится только к изменениям в локальной практике работы отдельного преподавателя.

5. Одна из важнейших задач проекта — организация коллективной деятельности людей в области математического образования. Эта деятельность необходима как для самого ресурса, так и для образования в целом, многие проблемы которого может (и должно) решать профессиональное сообщество[3].

6. Для устойчивого развития проекта в долгосрочной перспективе необходимо обеспечить его независимость от конкретных личностей и постоянное финансирование, мало подверженное изменениям внешней среды. Единственная подходящая для такого финансирования модель — регулярные пожертвования пользователей.

7. Проект никогда не должен стать государственным и стараться не иметь никаких отношений (особенно финансовых) с современным российским государством. Проект также не может стать и коммерческим, поскольку это не будет содействовать достижению его целей.

С учетом этих положений предполагается развивать проект в ближайшие годы.

---

[3] Это утверждение — не оценочное мнение автора, а вывод из наблюдений над способами взаимодействия государства и общества в странах, близких современной России по ряду существенных характеристик (включая и такую страну, как Российская империя конца XIX — начала XX вв.).

Одна задача, семь решений

Т.А. Гуев,
г. Москва
timyr-guev@yandex.ru

Задачи с параметром играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры, однако их решение вызывает значительные затруднения у учеников. Это связано в первую очередь с тем, что каждая задача с параметром уникальна и нет общего алгоритма их решения.

При подготовке к экзаменам ученики боятся даже браться за эти задачи, думая, что у них всё равно ничего не получится. Вместе с тем часто для решения задачи с параметром нужно просто использовать свой здравый смысл, и решение окажется простым и понятным.

Кроме того, найдя один способ решения, ученики редко пытаются отыскать другие. Такая практика, однако, оказывается очень полезной: во-первых, так можно подтвердить правильность ответа, во-вторых, найденные методы можно распространять на решение других задач.

Одной из задач предложенных ученикам на ЕГЭ была следующая:

Задача. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$ имеет ровно два различных корня*?*

Как оказалось, она имеет много решений. Рассмотрим некоторые из них.

Анализ условия задачи. Заметим, что при $a<0$ правая часть уравнения отрицательна и уравнение решений не имеет. При $a=0$ уравнение принимает вид $\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$ и имеет единственное решение $x=0$. Итак, искомые значения параметра a будем искать среди $a>0$, при этом $x\in[0;2a]$.

Способ 1. *Аналитическое решение.* После двойного возведения обеих частей уравнения в квадрат получим равносильную систему:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x \le 2a, \\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{2a - x}\right)^2 = a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x \le 2a, \\ 2\sqrt{2ax - x^2} = a^2 - 2a; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x \le 2a, \\ a^2 - 2a \ge 0, \\ 4\left(2ax - x^2\right) = \left(a^2 - 2a\right)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2, \\ 0 \le x \le 2a, \\ 4x^2 - 8ax + \left(a^2 - 2a\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $4x^2 - 8ax + (a^2 - 2a)^2 = 0$ имеет дискриминант $D = 64a^3 - 16a^4 = 16a^3(4 - a)$, который положителен при $0 < a < 4$. Корни уравнения равны:

$$x_1 = a\left(1 - \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right), \quad x_2 = a\left(1 + \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right).$$

Так как $a^2 - 4a + 4 \ge 0$, то $\frac{4a - a^2}{4} \le 1$, то есть $\frac{\sqrt{4a - a^2}}{2} \le 1$, а значит, $x_1, x_2 \in [0; 2a]$. Итак, искомые значения параметра a являются решением системы

$$\begin{cases} a \ge 2 \\ 0 < a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [2; 4).$$

Анализ решения. С помощью несложных оценок нам удалось обойти решение двух двойных иррациональных неравенств:

$$0 \le a\left(1 - \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right) \le 2a \text{ и } 0 \le a\left(1 + \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2}\right) \le 2a,$$

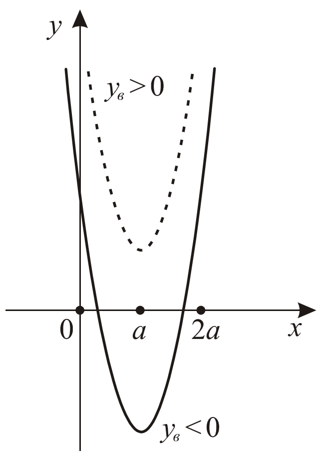
которые ввиду условия $a > 0$ не слишком сложны, но все-таки могут послужить источником арифметической ошибки.

Способ 2. *Аналитическое решение с элементами графического исследования расположения корней квадратичной функции.* Как и в предыдущем решении, имеем равносильную исходному уравнению систему:

$$\begin{cases} a \geq 2, \\ 0 \leq x \leq 2a, \\ 4x^2 - 8ax + \left(a^2 - 2a\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 4x^2 - 8ax + (a^2 - 2a)^2$. Графиком такой функции является парабола с вершиной в точке $M(a; a^3(a-4))$, ветви которой направлены вверх. Так как $f(0) = f(2a) = (a^2 - 2a)^2 \geq 0$ и $x_\text{в} = a \in [0; 2a]$, то оба нуля функции, если они существуют, принадлежат отрезку $[0; 2a]$. Для существования двух нулей необходимо и достаточно выполнения неравенства $a^3(a-4) < 0$, что равносильно условию $0 < a < 4$.

С учетом условия $a \geq 2$ получаем $a \in [2; 4)$.



Анализ решения. При решении задачи мы использовали условие существования двух нулей квадратичной функций $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ принадлежащих промежутку $[\alpha; \beta]$. Условие записывается в виде системы:

$$\begin{cases} y(\alpha) \ge 0, \\ y(\beta) \ge 0, \\ \alpha < x_в < \beta, \\ y_в < 0. \end{cases}$$

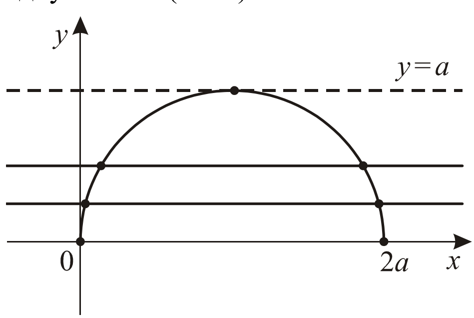
В нашем случае первые три неравенства уже выполняются, поэтому необходимо потребовать выполнения лишь четвертого неравенства системы.

Способ 3. *Графическое решение: полуокружность и семейство горизонтальных прямых.* Возведем обе части уравнения в квадрат, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x \le 2a, \\ (\sqrt{x} + \sqrt{2a - x})^2 = a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x \le 2a, \\ \sqrt{2ax - x^2} = \dfrac{a^2 - 2a}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ 0 \le x \le 2a, \\ \sqrt{a^2 - (x - a)^2} = \dfrac{a^2 - 2a}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{a^2 - (x - a)^2}$. Графиком такой функции является верхняя полуокружность окружности с центром в точке $(a; 0)$ и радиуса $R = a (a > 0)$.



Функция $y = \dfrac{a^2 - 2a}{2}$ задает семейство горизонтальных параллельных прямых.

Уравнение имеет ровно два решения при

$$\begin{cases} a > 0, \\ \dfrac{a^2 - 2a}{2} \geq 0, \\ \dfrac{a^2 - 2a}{2} < a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a(a-2) \geq 0 \Leftrightarrow a \in [2;4), \\ a(a-4) < 0. \end{cases}$$

Анализ решения. При решении задачи использовался метод сечений. Исходное уравнение приводится к виду $f(x) = g(x, a)$. Далее в системе координат xOy строится график левой части и определяется количество точек его пересечения семейством графиков функций $y_a(x) = g(x, a)$ в зависимости от значений параметра a. В нашем случае функция $f(x)$ также зависит от параметра.

Наиболее часто встречающиеся семейства функций:

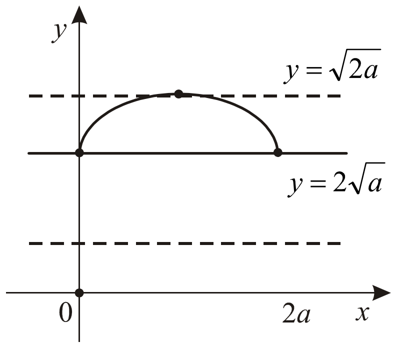
1. $y = a$ — семейство параллельных горизонтальных прямых;
2. $y = a(x - x_0) + y_0$ — семейство прямых («пучок»), проходящих через точку $(x_0; y_0)$;
3. $y = x + a$ — семейство прямых, совпадающих с прямой $y = x$ либо параллельных ей;
4. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ — семейство концентрических окружностей с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиуса $|a|$;
5. $y = a|x - x_0| + y_0$ — семейство «уголков» с вершиной в точке $(x_0; y_0)$.

Способ 4. *Графическое решение: применение производной для исследования функции.* Исследуем функцию $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2a - x}$ на отрезке $[0; 2a]$ с помощью производной и построим ее схематический график. Имеем:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{2a-x}}=\frac{\sqrt{2a-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2a-x}}.$$

Производная функции обращается в ноль в единственной точке $x=a\in[0;2a]$. При $0<x<a$ имеем $f'(x)>0$ и функция возрастает, при $a<x<2a$ имеем $f'(x)<0$ и функция убывает. Имеем:

$$f(0)=f(2a)=\sqrt{2a},\ f(a)=2\sqrt{a}.$$

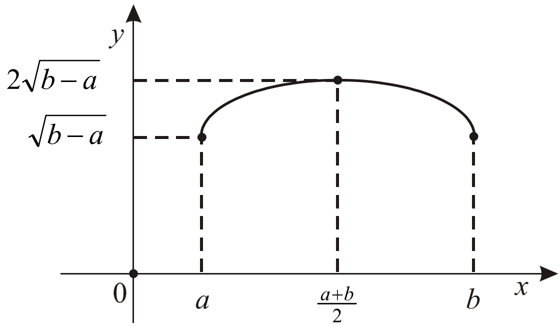


Уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$ имеет ровно два решения при

$$\begin{cases} a>0, \\ a\geq\sqrt{2a}, \\ a<2\sqrt{a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a\geq 2 \Leftrightarrow a\in[2;4), \\ a<4. \end{cases}$$

Анализ решения. В данном решении также использован метод сечений. Заметим, что исследование функции с помощью производной оказывается весьма полезным при решении многих задач с параметром.

Функция $f(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x},\ a<b$ имеет центр симметрии $x_0=\dfrac{a+b}{2}$. Возрастает при $x\in[a;x_0)$, убывает при $x\in(x_0;b]$ и достигает своего наибольшего значения, равного $\sqrt{2(b-a)}$, в точке x_0.



Способ 5. *Графическое решение: сведение уравнения к системе уравнений.* Обозначим $\sqrt{x}=u, \sqrt{2a-x}=v$. С учетом $x\in\left|0;2a\right|$ получаем $u,v\in\left|0;\sqrt{2a}\right|$. Тогда

$$\begin{cases}\sqrt{x}=u\\ \sqrt{2a-x}=v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=u^2\\ 2a-x=v^2\end{cases}\Rightarrow v^2+u^2=2a.$$

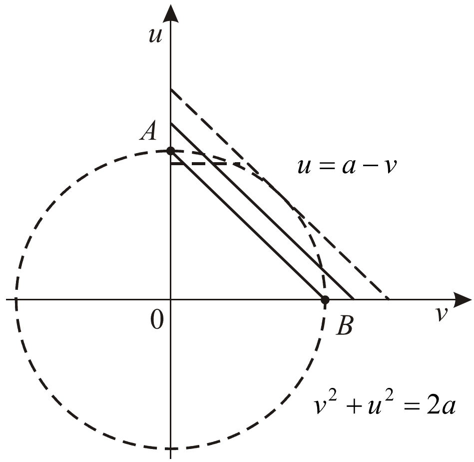
Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}u+v=a\\ v^2+u^2=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=a-v\\ v^2+u^2=2a\end{cases},$$

которая должна иметь ровно два решения, удовлетворяющих условию $u,v\in\left|0;\sqrt{2a}\right|$.

Введем плоскость uOv. Уравнение $u=a-v$ задает семейство прямых, параллельных биссектрисе $u=a-v$. Уравнение $u^2+v^2=2a$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $R=\sqrt{2a}$.

Прямая $u=a-v$ проходит через точки $A(0;\sqrt{2a})$ и $B(\sqrt{2a};0)$ при $a=\sqrt{2a}$, то есть при $a=2(a>0)$. Для нахождения значения параметра a, при котором прямая касается окружности, потребуем, чтобы уравнение $v^2+(a-v)^2=2a$ имело одно решение. Уравнение приводится к виду $2v^2-2av+a^2-2a=0$ и имеет один корень, если $D=4a^2-8(a^2-2a)=0$. Учитывая, что $a>0$, находим $a=4$. Итак, $a\in[2;4)$.

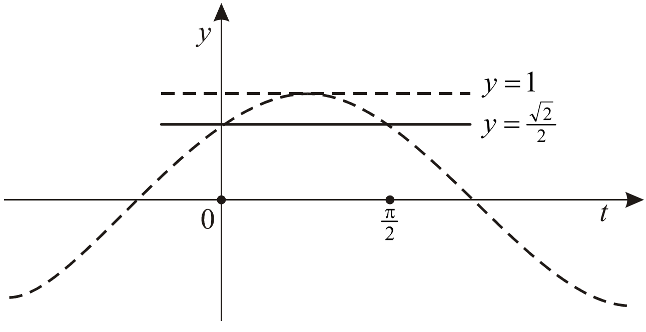


Анализ решения. Мы рассматривали только первую четверть координатной плоскости, так как $u, v \in \left|0; \sqrt{2a}\right|$. Достаточно часто при решении задачи с параметром требуется определить значения параметра, при которых прямая касается окружности. В нашем решении мы использовали условие $D = 0$, иногда бывает более удобно применить геометрические рассуждения.

Способ 6. *Графическое решение: тригонометрическая подстановка.* Обозначим $x = 2a\sin^2 t$. Так как $x \in [0; 2a]$, то $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Уравнение примет вид

$$\sqrt{2a\sin^2 t} + \sqrt{2a(1-\sin^2 t} = a \Leftrightarrow \sqrt{2a}(\sin t + \cos t) = a \Leftrightarrow \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}$$



Рассмотрим синусоиду $y=\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$, график которой получается из графика $y=\sin t$ сдвигом на $\frac{\pi}{4}$ влево вдоль оси Ot, и семейство параллельных горизонтальных прямых $y=\frac{\sqrt{a}}{2}$.

Уравнение имеет ровно два различных решения на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ при

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{a}}{2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \frac{\sqrt{a}}{2}<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\geq 2,\\ a<4;\end{cases} \Leftrightarrow a\in[2;4).$$

Анализ решения. При нашей замене было достаточно важно определить границы изменения новой переменной. Так как основной период T функции $y=\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$ равен π, то при $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ имеем $\sin^2 t\in[0;1]$, значит, $x\in[0;2a]$.

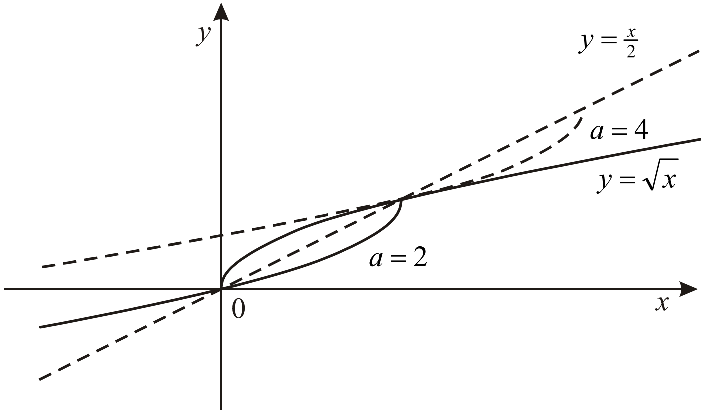
Способ 7. *Графическое решение: исследование графиков корней.* Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x}=a-\sqrt{2a-x}$$

и рассмотрим функции $y=\sqrt{x}$ и $y=a-\sqrt{2a-x}$. Графиком функции $y=\sqrt{x}$ является ветвь параболы. Графиком второй функции является убывающая ветвь параболы с вершиной в точке $(2a;a)$, которая лежит на прямой $y=\frac{x}{2}$.

При $a=2$ график функции $y=a-\sqrt{2a-x}$ проходит через начало координат и уравнение имеет два корня: $x=0, x=4$.

При $a=4$ график функции $y=a-\sqrt{2a-x}$ касается графика функии $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=4$ и уравнение имеет ровно один корень.



Таким образом, условию задачи удовлеворяют все значения $a \in [2;4)$.

Анализ решения. В данном решении было важно понять, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = a - \sqrt{2a - x}$ при $a = 4$ касаются. Определить, почему это так, предоставляется читателю.

Лучшая подготовка к задачам с параметром — использование разных подходов к решению. Это не только позволит проверить правильность найденного ответа, но и поможет научиться решать более широкий спектр задач.

Экономические задачи на ЕГЭ

Т.А. Гуев,
г. Москва
timyr-guev@yandex.ru

Экономическая задача, она же задача №17, появилась в ЕГЭ по математике в 2015 году. Задача относится к заданию высокого уровня сложности и оценивается в 3 первичных балла. Как показывает практика, ученики с удовольствием берутся за это задание и при должной подготовке решают его на максимальный балл.

За 5 лет проведения экзамена было представленно большое количество разнообразных задач: задачи на вклады, кредиты, пенсионные фонды, а так же задачи оптимального выбора. В этой статье будут описаны теоретические основы, необходимые для успешного решения задачи, а так же рассмотрены все прототипы этого задания за все 5 лет.

Задачи на вклады

Вкладом называется денежная сумма, которую человек отдает в банк на определенных условиях, подразумевающих начисление процентов за определенный период на вложенную сумму. Если в банк была положена сумма S под $p\%$ на некоторый срок, то по истечении этого срока, сумма увеличится на $p\%$ от числа S, то есть станет равной

$$S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Для удобного начисления процентов, стоит помнить о замене

$$m = 1 + \frac{p}{100},$$

тогда начисление $p\%$, равнозначно увеличению в m раз, то есть умножению на m.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. *Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.*

Решение. Пусть первоначальный вклад равен S млн рублей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на 10%, то есть в $m=1+\frac{10}{100}=\frac{11}{10}=1{,}1$ раз. Согласно условию задачи имеем:

Размер вклада в конце 1-го года: Sm,

Размер вклада в конце 2-го года: Sm^2,

Размер вклада в конце 3-го года: $(Sm^2+1)m=Sm^3+m$,

Размер вклада в конце 4-го года: $(Sm^3+m+1)m=Sm^4+m^2+m$.

Так как вклад должен быть больше 10 млн рублей, то имеем:

$$Sm^4+m^2+m>10 \Rightarrow S>\frac{10-m^2-m}{m^4}=\frac{76900}{14641}=5\frac{3695}{14641}.$$

Так как $S\in Z$, то $S=6$ млн рублей.

Ответ: 6 млн рублей.

Пример 2. *По вкладу* A *банк в конце каждого года планирует увеличивать на* 8% *сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу* B *— увеличивает эту сумму на* 10% *в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу* B*, при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад* A.

Решение. Пусть первоначальный размер вкладов A и B равен S рублей.

Размер вклада A после трех лет будет равен

$$S\left(1+\frac{8}{100}\right)^3.$$

Пусть в третий год по вкладу B начисляется $p\%$. Тогда размер вклада B после трех лет будет равен

$$S\left(1+\frac{10}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

По условию имеем неравенство

$$S\left(1+\frac{10}{100}\right)^2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)<S\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 \Leftarrow \frac{11^2}{10^2}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)<\frac{108^3}{100^3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{p}{100}<\frac{108^3}{100^3}\cdot\frac{10^2}{11^2}\Leftrightarrow 1+\frac{p}{100}<\frac{1259712}{1210000}\Leftrightarrow \frac{p}{100}<\frac{49712}{1210000}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p<\frac{49712}{12100}=4\frac{1312}{12100}.$$

Так как $p\in N$, то наибольшее натуральное значение $p=4\%$.

Ответ: 4%.

Задачи на кредиты

Среди задач о банковских кредитах чаще всего встречаются задачи на дифференцированные и аннуитетные платежи.

Дифференцированный платеж

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференцированным платежам.

Задача 1. *Клиент в банке взял кредит на срок n лет (месяцев). В конце каждого года (месяца) общая сумма оставшегося долга увеличивается на $p\%$, а затем уменьшается на сумму, уплаченную клиентом. Суммы, выплачиваемые в конце каждого года (месяца), подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый год (месяц) уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину.*

При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух частей:

$$\text{Платёж} = \frac{S}{n} + p\% \ \text{ от долга},$$

где S — сумма кредита, n — количество выплат, p — процентная ставка.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — n платежей. Тогда

$$X_1 = \frac{S}{n} + \frac{p}{100} \cdot S, \qquad \text{Долг} = S - \frac{S}{n} = \frac{S(n-1)}{n};$$

$$X_2 = \frac{S}{n} + \frac{p}{100} \cdot \frac{S(n-1)}{n}, \qquad \text{Долг} = \frac{S(n-2)}{n};$$

$$X_3 = \frac{S}{n} + \frac{p}{100} \cdot \frac{S(n-2)}{n}, \qquad \text{Долг} = \frac{S(n-3)}{n};$$

$$\dots$$

$$X_n = \frac{S}{n} + \frac{p}{100} \cdot \frac{S}{n}, \qquad \text{Долг} = 0.$$

Таким образом, равномерность уменьшения долга клиента обусловлена только лишь равномерным уменьшением размера процентной ставки в зависимости от также равномерно уменьшаемого долга клиента из года в год.

Суммарные выплаты по кредиту составляют

$$S_{\text{конеч}} = X_1 + X_2 + \dots + X_n =$$

$$= \left(\frac{S}{n} + \frac{S}{n} + \dots + \frac{S}{n}\right) + \left(\frac{p \cdot S}{100} + \frac{p \cdot S(n-1)}{100n} + \dots + \frac{p \cdot S}{100n}\right) =$$

$$= S + \frac{p \cdot S}{100}\left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = S + \frac{p \cdot S}{100}\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2}\right) \cdot n =$$

$$= S\left(1 + \frac{p(n+1)}{200}\right).$$

Мы получили расчётную формулу, которая связывает сумму кредита S, процентную ставку p, срок кредитования n и сумму, выплаченную банку клиентом за весь период кредитования:

$$S_{\text{конеч}} = S\left(1+\frac{p(n+1)}{200}\right).$$

Основные характеристики дифференцированного платежа:

• Долг уменьшается равномерно (убывающая арифметическая прогресиия);

• Платежи уменьшаются равномерно (убывающая арифметическая прогресиия);

• Первый платеж самый большой;

• Последний платеж самый маленький.

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 3. *В июле планируется взять кредит в банке на сумму 18 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 27 млн рублей?

Решение. Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. Суммарные выплаты по кредиту составляют

$$S_{\text{конеч}} = S\left(1+\frac{p(n+1)}{200}\right).$$

Так как по условию задачи $S = 18,\ S_{\text{конеч}} = 27,\ p = 10$, то имеем уравнение

$$27 = 18\left(1+\frac{n+1}{20}\right) \Rightarrow n = 9.$$

Ответ: 9 лет.

Замечание. Вывод формулы является обязательным для получения максимального балла за задачу.

Пример 4. *В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 3,6 млн. рублей?

Решение. Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

$$\text{Платёж} = \frac{S}{n} + p\% \text{ от долга},$$

где S — сумма кредита, n — количество выплат, p — процентная ставка.

Наибольшим платежом является первый. Имеем:

$$\frac{9}{n} + \frac{20 \cdot 9}{100} = 3{,}6 \Leftrightarrow n = 5.$$

Таким образом, кредит был взят на пять лет. Согласно формуле для дифференцированных платежей, суммарные выплаты по кредиту составляют:

$$S_{\text{конеч}} = S\left(1 + \frac{p(n+1)}{200}\right) = 9\left(1 + \frac{20 \cdot 6}{200}\right) = 14{,}4.$$

Ответ: $14{,}4$ млн рублей.

Пример 5. *В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн. рублей на пятнадцать лет. Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти p, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн. рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн. рублей.

Решение. Так как в задаче долг уменьшается равномерно, то речь идет о дифференцированных платежах. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

$$\text{Платёж} = \frac{S}{n} + p\% \ \text{ от долга},$$

где S — сумма кредита, n — количество выплат, p — процентная ставка.

Наибольшим платежом является первый, наименьшим — последний. Имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{n} + \dfrac{p \cdot S}{100} \leq 1{,}9, \\ \dfrac{S}{n} + \dfrac{p \cdot S}{100n} \geq 0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{15} + \dfrac{6p}{100} \leq 1{,}9, \\ \dfrac{6}{15} + \dfrac{6p}{1500} \geq 0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6p}{100} \leq \dfrac{15}{10}, \\ \dfrac{6p}{1500} \geq \dfrac{1}{10}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \leq 25, \\ p \geq 25; \end{cases} \Leftrightarrow p = 25\%.$$

Ответ: $p = 25\%$.

Аннуитетный платеж

Рассмотрим задачу, которая приводит к аннуитетным платежам (равные платежи).

Задача 2. *Клиент в банке взял кредит на срок n лет (месяцев). В конце каждого года (месяца) общая сумма оставшегося долга увеличивается на $p\%$, а затем уменьшается на сумму X, уплаченную клиентом. Какой должна быть сумма X, чтобы клиент выплатил долг n равными платежами?*

Рассчитаем аннуитетный платеж для суммы S тремя равными платежами с процентной ставкой $p\%$.

Обозначим $m = 1 + \frac{p}{100}$. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: $S \cdot m - X$,

Долг после 2-й выплаты: $(Sm - X) \cdot m - X = Sm^2 - Xm - X$,

Долг после 3-й выплаты:

$(Sm^2 - Xm - X) \cdot m - X = Sm^3 - Xm^2 - Xm - X$.

Так как всего было 3 платежа, то долг после 3-й выплаты равен нулю. Имеем

$$Sm^3 - Xm^2 - Xm - X = 0 \Rightarrow X = \frac{Sm^3}{1 + m + m^2}.$$

Легко обобщить данную формулу для n равных платежей:

$$X = \frac{Sm^n}{1 + m + m^2 + \ldots + m^{n-1}} = \frac{Sm^n(m-1)}{m^n - 1}.$$

Конечная сумма выплат равна

$$S_{\text{конеч}} = n \cdot X.$$

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 6. *В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:*

— в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, какую сумму взяли в кредит, если известно, что кредит был выплачен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма выплат составила 311040 рублей.

Решение. Так как в задаче все четыре платежа равны между собой, то речь идет о аннуитетных платежах.

Пусть ежегодный платеж по кредиту равен X млн рублей. Тогда каждый год долг увеличивается на 20%, то есть в $m = 1 + \frac{20}{200} = 1{,}2$ раз, и уменьшается на X млн рублей.

Обозначим начальную сумму S. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: $S \cdot m - X$,

Долг после 2-й выплаты: $Sm^2 - Xm - X$,

Долг после 3-й выплаты: $Sm^3 - Xm^2 - Xm - X$,

Долг после 4-й выплаты: $Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X$.

Так как кредит был погашен за четыре года, то

$$Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X = 0 \Rightarrow X = \frac{Sm^4}{1 + m + m^2 + m^3} = \frac{Sm^4}{(1+m)(1+m^2)}.$$

Общая сумма выплат равна

$$S_{\text{конеч}} = 4X = \frac{4Sm^4}{(1+m)(1+m^2)} = 311040.$$

Отсюда

$$S = \frac{311040 \cdot (1+m)(1+m^2)}{4m^4} = 201300.$$

Ответ: 201300 рублей.

Пример 7. *В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за четыре года равными платежами по 58564 рублей или за два года равными платежами по 106964 рублей. Найдите r.

Решение. Обозначим сумму кредита S, $m = 1 + \frac{r}{100}$. По условию задачи долг на июль в каждом году меняется как

$$S,\ Sm - X,\ Sm^2 - Xm - X,\ Sm^3 - Xm^2 - Xm - X,$$

$$Sm^4 - Xm^3 - Xm^2 - Xm - X.$$

Если долг выплачен двумя равными платежами X_2, то

$$Sm^2 - X_2 m - X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{Sm^2}{1+m} = 106964.$$

Если долг выплачен четырьмя равными платежами X_4, то

$$Sm^4 - X_4 m^3 - X_4 m^2 - X_4 m - X_4 = 0 \Rightarrow X_4 = \frac{Sm^4}{1+m+m^2+m^3} = 58564.$$

Поделив X_2 на X_4, получим:

$$\frac{X_2}{X_4} = \frac{Sm^2(1+m+m^2+m^3)}{Sm^4(1+m)} = \frac{(1+m)(1+m^2)}{(1+m)m^2} = \frac{106964}{58564} \Rightarrow m = 1{,}1.$$

Итак, $1 + \frac{r}{100} = 1{,}1$, а значит, $r = 10\%$.

Ответ: 10%.

В отличии от аннуитетных платежей существует вид платажей которые равны между собой, за исключением последнего платежа. Рассмотрим пример.

Пример 8. *В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

Решение. Количество лет будет минимальным, если платежи будут максимальными, то есть равны 350000. Обозначим $m = 1 + \frac{10}{100} = \frac{11}{10}$. Имеем:

Долг после 1-й выплаты: $1300000 \cdot m - 350000 = 1080000$,

Долг после 2-й выплаты: $1080000 \cdot m - 350000 = 838000$,

Долг после 3-й выплаты: $838000 \cdot m - 350000 = 571800$,

Долг после 4-й выплаты: $571800 \cdot m - 350000 = 278980$,

Долг после 5-й выплаты: $278980 \cdot m - 306878 = 0$.

Таким образом, если первые 4 платежа равны 350000, а последний — 306878, то кредит будет погашен за 5 лет.

Ответ: 5 лет.

Задачи на таблицы

Пример 9. *В июле* 2026 *года планируется взять кредит в банке на три года в размере* S *млн рублей, где* S *— целое число. Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг увеличивается на 20% *по сравнению с концом предыдущего года;*

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн. рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S*, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн рублей.*

Решение. Обозначим первый, второй и третий платеж X_1, X_2 и X_3 соответственно. В конце каждого года размер вклада увеличивается на 20%, то есть в $m = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$ раз. Тогда согласно таблице имеем:

Июль 2027: $S \cdot 1{,}2 - X_1 = 0{,}8S \Rightarrow X_1 = 0{,}4S$,

Июль 2028: $0.8S \cdot 1{,}2 - X_2 = 0{,}4S \Rightarrow X_2 = 0{,}56S$,

Июль 2029: $0.4S \cdot 1{,}2 - X_3 = 0 \Rightarrow X_3 = 0{,}48S$.

Так как каждый платеж должен быть менее 5 млн рублей, то имеем систему:

$$\begin{cases} 0{,}4S < 5, \\ 0{,}56S < 5, \\ 0{,}48S < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S < 12\frac{1}{2}, \\ S < 8\frac{52}{56}, \\ S < 10\frac{20}{48}; \end{cases} \xrightarrow{S \in Z} S = 8.$$

Ответ: 8 млн рублей.

Пример 10. *15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:*

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее $1{,}2$ млн. рублей.

Решение. Обозначим $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ шесть платежей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на $r\%$, то есть в $m = 1 + \frac{r}{100}$ раз.

Согласно условию задачи имеем:

$15.02 : 1 \cdot m - X_1 = 0{,}6 \Rightarrow X_1 = m - 0{,}6$,

$15.03 : 0{,}6 \cdot m - X_2 = 0{,}4 \Rightarrow X_2 = 0{,}6m - 0{,}4$,

$15.04 : 0{,}4 \cdot m - X_3 = 0{,}3 \Rightarrow X_3 = 0{,}4m - 0{,}3$,

$15.05 : 0{,}3 \cdot m - X_4 = 0{,}2 \Rightarrow X_4 = 0{,}3m - 0{,}2$,

$15.06 : 0{,}2 \cdot m - X_5 = 0{,}1 \Rightarrow X_5 = 0{,}2m - 0{,}1$,

$15.07 : 0{,}1 \cdot m - X_6 = 0 \quad \Rightarrow X_6 = 0{,}1m$.

Итоговые выплаты по кредиту составляют

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 2{,}6m - 1{,}6$$

и должны быть менее 1,2 млн рублей, значит, $2{,}6m - 1{,}6 < 1{,}2$, откуда $m < \frac{14}{13}$.

Итак,

$$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13} \Rightarrow r < 7\frac{9}{13}.$$

Так как $r \in \mathrm{Z}$, то максимальное значение, удовлетворяющее условию задачи, $r = 7\%$.

Ответ: $r = 7\%$.

Разные платежи

Пример 11. *В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн рублей;

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общая сумма выплат составила 6,1 млн рублей.

Решение. Обозначим $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 (X_4 = X_5)$ пять платежей. В конце каждого года размер вклада увеличивается на $r\%$, то есть в $m = 1 + \frac{r}{100}$ раз.

Согласно условию задачи имеем:

2017 год: $4{,}2m - X_1 = 4{,}2 \Rightarrow X_1 = 4{,}2(m-1)$,

2018 год: $4{,}2m - X_2 = 4{,}2 \Rightarrow X_2 = 4{,}2(m-1)$,

2019 год: $4{,}2m - X_3 = 4{,}2 \Rightarrow X_3 = 4{,}2(m-1)$,

2020 год: $4{,}2m - X_4$,

2021 год: $(4{,}2m - X_4)m - X_5$.

Так как кредит был полностью выплачен за пять лет и $X_4 = X_5$, то $(4{,}2m - X_4)m - X_4 = 0$, откуда

$$X_4 = X_5 = \frac{4{,}2m^2}{m+1}.$$

Итоговые выплаты по кредиту составляют

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 3X_1 + 2X_4 = 3 \cdot 4{,}2(m-1) + 2 \cdot \frac{4{,}2m^2}{m+1} = 6{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 21m^2 - 6{,}1m - 18{,}7 = 0 \Rightarrow m = 1{,}1.$$

Итак, $m = 1 + \frac{r}{100} = 1{,}1$, а значит, $r = 10\%$.

Ответ: 10%.

Пример 12. *В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200000 рублей. Условия его возврата таковы:*

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 130000 рублей, а во второй год — 150000 рублей.

Решение.

Пусть $S = 200000, m = 1 + \frac{r}{100}, X_1 = 130000, X_2 = 150000$. Тогда согласно условию задачи имеем:

Долг после 1-ой выплаты: $S \cdot m - X_1$,

Долг после 2-ой выплаты: $(S \cdot m - X_1) \cdot m - X_2$.

По условию кредит погашен двумя платежами, значит,

$$(S \cdot m - X_1) \cdot m - X_2 = 0 \Leftrightarrow Sm^2 - X_1 m - X_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20m^2 - 13m - 15 = 0 \overset{m>0}{\Rightarrow} m = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{100} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow r = 25\%.$$

Ответ: 25%.

Пример 13. *15 декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:*

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% *по сравнению с концом предыдущего месяца;*

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?

Решение. По условию задачи $n = 21$, конечная сумма $S_{\text{конеч}} = 1604$ тыс., процентная ставка равна $p = 3\%$. Пусть $m = 1 + \frac{p}{100} = \frac{103}{100}$. Обозначим платежи $X_1, X_2, \ldots, X_{20}, X_{21}$. Согласно условию задачи имеем:

$$Sm - X_1 = S - 30 \Rightarrow X_1 = S(m-1) + 30(1 - 0 \cdot m),$$

$$(S-30)m - X_2 = S - 60 \Rightarrow X_2 = S(m-1) + 30(2 - m),$$

$$(S-60)m - X_3 = S - 90 \Rightarrow X_3 = S(m-1) + 30(3 - 2m),$$

$$(S-90)m - X_4 = S - 120 \Rightarrow X_4 = S(m-1) + 30(4 - 3m),$$

$$\ldots$$

$$(S-570)m - X_{20} = S-600 \Rightarrow X_{20} = S(m-1)+30(20-19m),$$

$$(S-600)m - X_{21} = 0 \Rightarrow X_{21} = (S-600)m.$$

Таким образом,

$$S_{\text{конеч}} = X_1 + \ldots X_{20} + X_{21} =$$

$$= 20S(m-1) + 30\left(\frac{1+20}{2}\cdot 20 - m\cdot\frac{0+19}{2}\cdot 20\right) + (S-600)m =$$

$$= 20S(m-1) + 30(210-190m) + (S-600)m = \frac{163S-18900}{100}.$$

По условию $S_{\text{конеч}} = 1604$ тыс., откуда находим $S = 1100$ тыс.

Ответ: 1100 тыс.

Задачи оптимального выбора

Пример 14. *Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.*

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 рублей. Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе рабочие трудятся суммарно x^2 часов, а на втором заводе — y^2 часов. Тогда на первом заводе производят x единиц товара, на втором — y единиц товара, а суммарно производят $x+y$ единиц товара.

Согласно условиям задачи, затраты на оплату труда рабочих составляют $500x^2 + 300y^2 = 1200000$. Имеем задачу оптимального выбора:

$$\begin{cases} x + y \to max, \\ 5x^2 + 3y^2 = 12000, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Выразим y через x из второго уравнения системы

$$y^2 = 4000 - \frac{5}{3}x^2 \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}.$$

Требуется на отрезке $\left[0; 20\sqrt{6}\right]$ найти наибольшее значение функции $f(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}$.

Для этого найдем производную:

$$f'(x) = 1 - \frac{5x}{3\sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}}.$$

Решим уравнение

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5x}{3\sqrt{4000 - \frac{5}{3}x^2}} = 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 900 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 30.$$

Так как $f'(x) < 0$ при $0 < x < 30$ и $f'(x) > 0$ при $x > 30$, то $x = 30$ — единственная точка максимума, принадлежащая отрезку $\left[0; 20\sqrt{6}\right]$. Значит, $f_{max}(x) = f(30) = 80$.

Итак, наибольшее количество единиц товара равно 80, при этом на первом заводе производят 30 единиц товара, а на втором — 50.

Ответ: 80 единиц товара.

Пример 15. *Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство* x *тыс. единиц продукции на таком заводе равны* $0{,}5x^2 + 2x + 6$ *млн. рублей в год. Если продукцию завода продать по цене* p *тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит* $px - (0{,}5x^2 + 2x + 6)$. *Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в та-*

ком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p *строительство завода окупится не более чем за три года?*

Решение. Очевидно, значение p будет наименьшим, если количество лет будет наибольшим, то есть равно 3. Запишем прибыль завода в виде

$$f(x) = -0{,}5x^2 + (p-2)x - 6.$$

Наибольшая прибыль будет достигаться в точке максимума параболы, то есть

$$x_{\hat{a}} = -\frac{b}{2a} = p-2,\ f_{max} = f(x_{\hat{a}}) = \frac{(p-2)^2}{2} - 6.$$

За три года прибыль завода составит $3\cdot\left(\dfrac{(p-2)^2}{2} - 6\right)$. Итак, строительство завода окупится за 3 года при

$$3\cdot\left(\frac{(p-2)^2}{2} - 6\right) \geq 78 \Leftrightarrow (p+6)(p-10)0 \overset{p\geq 0}{\Rightarrow} p \geq 10.$$

Минимальное значение, удовлетворяющее условию задачи, $p = 10\%$.

Ответ: $p = 10\%$.

Пример 16. *Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят* t^2 *тыс. рублей в конце года* $t(t = 1; 2; \ldots)$. *В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на* 25%. *В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?*

Решение. Если пенсионный фонд продаст ценные бумаги в конце n года, то в конце двадцатого года на его счёте будет

$$n^2\left(1+\frac{25}{100}\right)^{20-n} = n^2 \cdot 1.25^{20-n} \text{ тыс. рублей}.$$

Рассмотрим функцию натурального аргумента $f(n) = n^2 \cdot 1.25^{20-n}, n \in [1;20]$ и найдем её наибольшее значение. Составим разность

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 \cdot 1.25^{20-(n+1)} - n^2 \cdot 1.25^n =$$

$$= 1.25^{20-n}\left(\frac{4}{5}(n+1)^2 - n^2\right) = \frac{1.25^{20-n}}{5} \cdot (4(n+1)^2 - 5n^2) =$$

$$= \frac{1.25^{20-n}}{5}(-n^2 + 8n + 4) = \frac{1.25^{20-n}}{5}(20 - (n-4)^2).$$

Разность $f(n+1) - f(n)$ положительна при $n \in [1;8]$ и отрицательна при $n \in [9; 20]$, поэтому имеем цепочку неравенств:

$$f(9) > f(8) > f(7) > \ldots > f(2) > f(1) \text{ и}$$

$$f(9) > f(10) > f(11) > \ldots > f(20).$$

Итак, наибольшим значением является число $f(9)$, значит продать ценные бумаги нужно в конце 9 года.

Ответ: В конце 9 года.

Пример 17. *Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продать строго в конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?*

Решение. Стоимость ценных бумаг после каждого года равна

$$1^2 \xrightarrow{\frac{4}{1}} 2^2 \xrightarrow{\frac{9}{4}} 3^2 \xrightarrow{\frac{16}{9}} 4^2 \to \ldots \to 21^2 \xrightarrow{\frac{484}{441}} 22^2 \xrightarrow{\frac{529}{484}}$$

$$\xrightarrow{\frac{529}{484}} 23^2 \xrightarrow{\frac{576}{529}} 24^2 \xrightarrow{\frac{625}{576}} 25^2.$$

За год t стоимость ценных бумаг увеличивается в цене в

$$\frac{t^2}{(t-1)^2} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^2 = 1 + \frac{2}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \text{ раз.}$$

Очевидно, увеличение стоимости бумаг замедляется с ростом года (сумма убывающих функций убывает). Продать ценные бумаги и положить их в банк имеет смысл, когда в банке прирост за год станет больше ежегодного прироста стоимости ценных бумаг.

Так как продавать ценные бумаги надо строго в конце двадцать первого года, то за двадцать первый год прирост стоимости ценных бумаг еще больше банковского прироста, а в двадцать втором году — уже меньше.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{21^2}{20^2} > 1 + r, \\ \dfrac{22^2}{21^2} < 1 + r; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{484}{441} < 1 + r < \frac{441}{400} \Leftrightarrow \frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}.$$

Ответ: $\dfrac{43}{441} < r < \dfrac{41}{400}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Ответ: 7 млн рублей.

Задача 2. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивает вклад на

10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вкладчик ежегодно пополняет вклад на x млн рублей, где x — целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Ответ: 8 млн рублей.

Задача 3. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 24,5 млн рублей?

Ответ: 5 лет.

Задача 4. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:

— 1-го числа k-го месяца долг возрастёт на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число k-го месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа k-го месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 19 месяцев.

Задача 5. 15 января планируется взять кредит в банке на девять месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: $r = 5\%$.

Задача 6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на срок 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наименьшую возможную ставку r, если известно, что последний платёж будет не менее 0,92 млн рублей.

Ответ: $r = 15\%$.

Задача 7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший — не менее 0,6 млн рублей.

Ответ: $r = 20\%$.

Задача 8. 15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что восьмая выплата составила 99,2 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Ответ: 1488 тыс. рублей.

Задача 9. 15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1–го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2–го по 14–е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 958,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

Ответ: 1066,5 тыс. рублей.

Задача 10. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Ответ: 4,55 млн. рублей.

Задача 11. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58564 рублей, то кредит будет полностью погашен за четыре года, а если ежегодно выплачивать по 106964 рублей, то кредит будет полностью погашен за два года. Найдите r.

Ответ: $r = 10\%$.

Задача 12. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 900000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 400000 рублей?

Ответ: 4 года.

Задача 13. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн. рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн. рублей.

Ответ: 13 млн. рублей.

Задача 14. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн. рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год и месяц	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн. рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн. рублей.

Ответ: 36 млн. рублей.

Задача 15. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,25 млн рублей.

Ответ: $r = 9\%$.

Задача 17. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика меньше 8 млн.

Ответ: 5млн. рублей.

Задача 18. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 330000 рублей, а во второй год — 121000 рублей.

Ответ: $r = 10\%$.

Задача 19. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 13 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 12-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 13-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 804 тысячи рублей?

Ответ: 700 тысяч рублей.

Задача 20. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 500 единиц товара.

Задача 21. Строительство нового завода стоит 75 млн. рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн. рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

Ответ: $p = 9\%$.

Задача 22. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года $t(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счёте была наибольшей?

Ответ: В конце 5 года.

Задача 23. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года $t(t=1;2;\ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце девятого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Ответ: $1981 < r < 1764$.

Исследовательские задачи о многогранниках

В.А. Лецко,
г. Волгоград
val-etc@yandex.ru

О требованиях к математическим исследованиям школьников

В настоящей работе мы остановимся лишь на некоторых, но, на наш взгляд, во многом ключевых сторонах многогранной проблемы организации исследовательской деятельности старшеклассников в области математики.

Значимым моментом в организации исследовательской деятельности школьников является оценка их работ. Признание является важнейшей составляющей мотивации юного (как, впрочем, и зрелого) исследователя. Достижению такого признания (наряду с выявлением талантливых школьников) служат всевозможные смотры, конкурсы и конференции, на которых школьники представляют свои работы.

Как правило, на таких мероприятиях есть научное жюри, которое определяет лучшие работы. А какими критериями руководствуется жюри?

Чаще всего эти критерии почти дословно дублируют требования, предъявляемые к научным работам взрослых исследователей. Логика такого подхода ясна: пусть школьники с самых первых шагов привыкают к тем требованиям, которые предъявляются к работам в большой науке. А это, конечно же, актуальность темы исследования, научная новизна, практическая и теоретическая значимость решаемой проблемы. И даже внедрение, с которым нередко бывают проблемы даже у признанных авторов больших научных открытий.

Конечно, члены жюри понимают, что соответствие школьной работы всем перечисленным выше критериям, мягко говоря, маловероятно. Поэтому на часть требований жюри «закрывает глаза». Довольно часто первым отброшенным критерием является новизна работы. Аргументация здесь примерно такова: познакомиться с методами научного исследования, понять и усвоить важные идеи, разобраться в применяемом математическом аппарате гораздо легче на примере уже сделанного исследования. А уже потом, набравшись опыта, школьник, возможно, «дозреет» до новых задач.

Что же мы имеем в результате такого подхода?

В лучшем случае, школьник добросовестно разберется в решении поставленной задачи, освоив новый, выходящий за рамки школьной программы, материал. Это, безусловно, полезно для учащегося. Но даже в этом случае его работу нельзя назвать исследовательской.

К сожалению, нередко встречается и более упрощенный подход: школьник (часто по совету и не без помощи научного руководителя) скачивает из Интернета (списывает из книги или журнала) какие-то материалы, оформляет и, худо-бедно зазубрив ответы на типичные вопросы, представляет работу на конкурс.

Еще циничнее вариант, при котором сознательно выбирается не слишком известный (по мнению ученика и его руководителя) результат и выдается за свой. Новизны по-прежнему нет, но есть ее имитация. Такой «старт в науку» практически гарантированно приведет к известной схеме:

Реферат — откуда скачать?

Курсовая работа — у кого списать?

Диплом — где приобрести?

Диссертация — кому заказать?

Нам представляется, что гораздо разумнее сохранить требование новизны. Но тогда придется отказаться от актуальности и теоретической значимости результатов школьного исследования. Будет реалистами: ситуация, когда школьник самостоятельно (или даже под компетентным руководством) решает актуальную, важную для развития теории научную проблему, как минимум, редка. Примеры выдающихся открытий, совершенных в юном возрасте, в истории науки описаны, но единичны.

Что касается практической значимости результатов, то она вполне возможна в рамках школьного исследования, например, по биологии, географии или химии. Школьники могут брать пробы воды и воздуха, определять численность и отслеживать миграцию животных или птиц и т.д. в тех регионах, до которых у серьезных ученых элементарно «не дошли руки».

В математике ситуация иная. Математические объекты идеальны и не имеют региональных особенностей. Поэтому в области чистой математики приходится жертвовать и этим требованием, ставя во главу угла исключительно новизну темы и результатов исследования. Разумеется, при этом тема должна быть содержательной. Это, в частности, означает, что решение поставленных задач должно прививать учащимся навыки исследовательской работы, которые могут впоследствии оказаться востребованы при решении актуальных проблем, стоящих перед математической наукой.

Сразу же оговоримся, что речь, конечно, не идет о том, что каждый учащийся должен решать новые исследовательские задачи. Для кого-то и исследование возможности поставить шкаф $240 \times 240 \times 60$ см, собранный в лежачем положении в комнате с высотой потолка 2,5 метра, будет достижением и поможет выявить практическую значимость теоремы Пифагора. Но в данной статье мы говорим об исследовательской работе заинтересованных и сильных учащихся.

Требование научной новизны исследования позволяет оценить научный потенциал школьника, его способности, стремление к самостоятельной исследовательской деятельности. Кроме того, ощущение того, что он является «первопроходцем», окрыляет школьника, позволяет ему преодолевать трудности, прививает вкус к процессу познания.

Пусть результат, полученный школьником, не станет существенным вкладом в развитие науки и не принесет очевидных дивидендов на практике. Но ведь у работы, проделанной школьником, есть и другой результат — приобщение школьника к самостоятельной исследовательской деятельности. И именно в этом заключается подлинная актуальность школьных исследований, обладающих новизной.

Вопрос о важности требования новизны для исследовательских работ старшеклассников в области математики мы поднимали неоднократно (см., например, [1], [2]). При обсуждении на различных конференциях эта точка зрения, как правило, не встречает серьезных возражений. Но при этом ситуация почти не меняется: среди тем школьных математических «научно-исследовательских» работ по-прежнему преобладают не новые. Это легко объяснимо. Не имеющий ни времени, ни желания, ни опыта самостоятельной исследовательской работы учитель вряд ли сумеет предложить старшекласснику что-то иное. Но, подталкиваемый обстоятельствами (администрацией, необходимостью формально соответствовать категории и т.п.), какую-то тему все же предложит. И, конечно же, это будут очередные фракталы, золотые сечения или замечательные точки в треугольнике. К счастью, не все учителя воспринимают руководство школьными исследованиями как обузу. Но и для творчески работающих учителей разработка темы школьного исследования, в котором ставятся новые, ранее не изученные вопросы, является непростой задачей. Особенно с учетом естественных требований содержательности и одновременной посильности для подготовленного старшеклассника.

Откуда же брать новые проблемы, которые могли бы стать основой школьного исследования в области математики?

Ответ на этот вопрос проще находят те руководители школьных кружков и факультативов, которые одновременно являются действующими учеными. Как правило, тематика школьных исследований, выполненных под их руководством, недалека от сферы научных интересов руководителя.

Но для школьного учителя такой подход не годится. Поэтому в поиске тем учителя обращаются Интернету, научно-популярным журналам и т.п. Мы не утверждаем, что место для поиска выбрано неудачно. Проблема в другом. Цель поиска — именно готовая тема исследования. Но в таком случае эта тема заведомо не будет новой. На наш взгляд следует искать не готовые темы, а зацепки, из которых может вырасти тема. Такой зацепкой может послужить видоизменение готовой задачи, ее обобщение или наоборот частный случай, комбинация нескольких задач… Главное — это нацеленность на поиск новых вопросов.

Но, конечно же, не всякий такой вопрос обязательно перерастет в тему исследования. Возникновение вопроса — это только первый шаг.

Во-первых, вопрос, показавшийся новым, с большой долей вероятности мог быть уже поставлен и изучен ранее. И эта вероятность тем больше, чем содержательнее и интереснее вопрос. Поэтому важно проверить новизну возникшей задачи, что само по себе не так просто даже в наш век Интернета. Впрочем, заметим, что для наших целей важна субъективная новизна задачи.

Во-вторых, новая проблема может оказаться «пустышкой». Не исключено, что ответы на поставленные вопросы тривиальны и их нахождение не приведет к настоящему исследованию.

В-третьих, существует опасность, прямо противоположная описанной в предыдущем абзаце. Тема вполне может оказаться непосильной для школьника (а возможно, и не только для школьника). Поэтому руководителю надо не только поставить задачу, но, по сути, и найти или хотя бы наметить решение.

В общем, рядовому учителю совсем не просто придумать новую, содержательную и, в то же время, посильную исследовательскую задачу. Тем более, что литература по исследовательским задачам для школьников весьма скудна. Замечательная книжка А. И. Сгибнева ([3]) — это лишь капля в море литературы посвященной: углубленному изучению школьного курса; знакомству старшеклассников с теми или иными разделами математики, выходящими за рамки школьного курса; разбору олимпиадных задач; занимательной математике.

Но «не просто» не означает «невозможно». В подтверждение этого тезиса приведем две исследовательские задачи о многогранниках. Автору нередко приходилось слышать от учителей математики реплики примерно такого содержания: «Это у Вас получается ставить перед учениками исследовательские задачи, а нам это не под силу». Однако, постановка задач каждого из описанных ниже исследований была предложена не автором настоящей статьи.

Формулировка первой задачи — результат коллективных усилий участников факультатива для десятиклассников, проводившегося автором в 2014 году на базе Волгоградского лицея № 5.

Способ разрезания многогранников, лежащий в основе второго исследования, предложил (на тот момент) студент второго курса магистратуры Дмитрий Солодский в рамках изучения дисциплины «Руководство исследовательской работой обучающихся».

Еще целый ряд исследовательских задач (в том числе, относящихся к многогранникам) можно найти на сайте «Математического марафона» ([4]), который на протяжении многих лет служит автору экспериментальной площадкой, на которой обкатываются возможные темы будущих школьных исследований.

О существовании многогранников с заданными характеристиками

Зададимся вопросом, существует ли выпуклый многогранник, у которого равны: количество ребер; количество диагоналей; суммарное количество диагоналей граней.

Для получения ответа нам придется вспомнить (узнать, вывести) некоторые классические соотношения, связывающие основные характеристики многогранников. Как известно, для любого выпуклого многогранника выполнено соотношение Эйлера

$$v + f - 2 = e \qquad (1)$$

где v, f, e — количества вершин, граней и ребер соответственно.

Кроме того, поскольку каждая грань окружена не менее чем тремя ребрами и из каждой вершины исходит не менее трех ребер, имеют место неравенства

$$2e \geq 3f \text{ и } 2e \geq 3v \tag{2}$$

(множитель 2 появился, поскольку каждое ребро соединяет ровно две вершины и принадлежит ровно двум граням).

Учитывая, что каждый отрезок, соединяющий две вершины многогранника, является либо ребром, либо диагональю грани, либо диагональю многогранника, приходим к выводу, что в искомом многограннике должно выполняться соотношение

$$e = v(v-1)/6 \tag{3}$$

Из (3) и второго из неравенств (2) сразу же получаем, что $v \geq 10$.

С другой стороны, выражая f из (1) и подставляя в первое из неравенств (2) получаем оценку $e \leq 3v-6$. Подставив в (3), получим неравенство $v(v-1) \leq 18v-36$, откуда $v \leq 16$.

Наконец, учитывая, что $v(v-1)/6$ должно быть целым, получим, что $v \in \{10,12,13,15,16\}$.

Для каждого из возможных значений v найдем соответствующие значения e и f занесем в таблицу:

Таблица 1

v	10	12	13	15	16
e	15	22	26	35	40
f	7	12	15	22	26

Поскольку из каждой вершины выпуклого n-угольника исходит ровно $n-3$ диагонали, а каждая диагональ соединяет 2 вершины, у выпуклого n-угольника в точности $n(n-3)/2$ диагоналей. Обозначим через g_k количество k-угольных граней искомого многогранника.

Теперь для каждого значения v из таблицы 1 мы можем составить систему неравенств. Каждую из таких систем легко решить небольшим (ручным) перебором.

Для $v=10$ грани не могут быть более чем шестиугольны. Поэтому соответствующая система примет вид:

$$\begin{cases} g_3+g_4+g_5+g_6=7, \\ 2g_4+5g_5+9g_6=15, \\ 3g_3+4g_4+5g_5+6g_6=30. \end{cases}$$

Если $g_6=1$, то с учетом 1-го и 2-го уравнений $g_5=0$, $g_4=3$, $g_3=3$, но эти значения не подходят в 3-е уравнение (и вообще, количество граней с нечетным числом сторон не может быть нечетным).

Пусть $g_6=0$. Тогда из 2-го уравнения следует, что g_5 — нечетно. Но $g_5=3$ вновь приводит к нечетному числу граней с нечетным числом сторон. А если $g_5=1$, то из 1-го и 2-го уравнений следует, что $g_3=1$. Но эти значения не удовлетворяют 3-му уравнению. Таким образом, v не может равняться 10.

Рассмотрим случай $v=12$. Тогда у каждой грани не более 8 сторон. Имеем:

$$\begin{cases} g_3+g_4+g_5+g_6+g_7+g_8=12, \\ 2g_4+5g_5+9g_6+14g_7+20g_8=22, \\ 3g_3+4g_4+5g_5+6g_6+7g_7+8g_8=44. \end{cases}$$

Вновь начинаем с анализа сначала 2-го, а затем 3-го уравнений.

Если $g_8=1$, то $g_7=g_6=g_5=0$, $g_4=1$, $g_3=10$, что не подходит в 3-е уравнение.

Итак, $g_8=0$. Пусть $g_7=1$. Тогда то $g_6=g_5=0$, $g_4=4$, $g_3=7$. Легко видеть, что этот набор удовлетворяет 3-му уравнению. Соответствующий многогранник не сложно сконструировать, отталкиваясь от простейших. На рисунке 1 представлен образец, полученный отрезанием трех тетраэдров от усеченной четырехугольной пирамиды и последующим наращиванием верхнего основания низкой четырехугольной пирамидой.

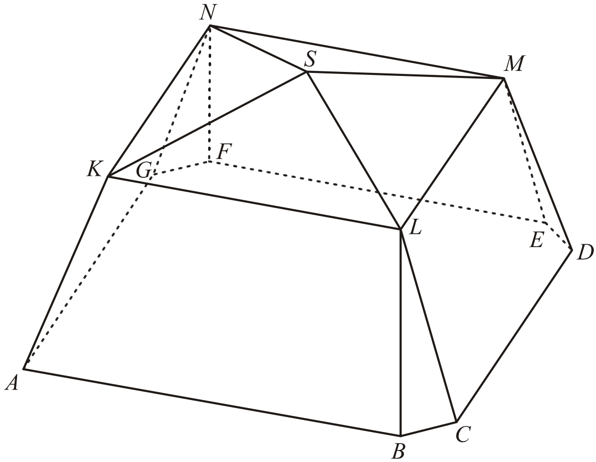


Рис. 1

Пусть теперь $g_7 = 0$. Если $g_6 = 2$, то $g_5 = 0$, $g_4 = 2$, $g_3 = 8$. Этот набор значений реализуется, например, в многограннике, который проще всего получить из шестиугольной призмы (см. рис. 2).

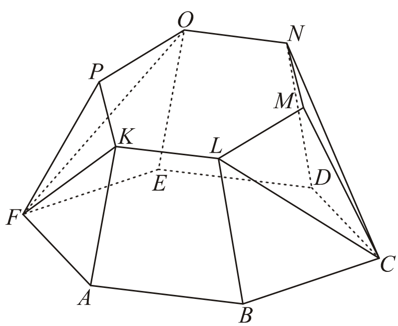


Рис. 2

Предположение $g_6 = 1$ приводит к нечетному числу граней с нечетным числом сторон. При $g_6 = 0$ такое же противоречие возникает, если $g_5 = 4$, $g_4 = 1$ и $g_5 = 0$, $g_4 = 11$. А случай $g_5 = 2$, $g_4 = 6$, $g_3 = 4$ не удовлетворяет третьему уравнению системы.

Для $v = 13$ соответствующая система имеет вид:

$$\begin{cases} g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 = 15, \\ 2g_4 + 5g_5 + 9g_6 + 14g_7 + 20g_8 = 26, \\ 3g_3 + 4g_4 + 5g_5 + 6g_6 + 7g_7 + 8g_8 = 52. \end{cases}$$

Для $v = 15$ имеем:

$$\begin{cases} g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} = 22, \\ 2g_4 + 5g_5 + 9g_6 + 14g_7 + 20g_8 + 27g_9 + 35g_{10} = 35, \\ 3g_3 + 4g_4 + 5g_5 + 6g_6 + 7g_7 + 8g_8 + 9g_9 + 10g_{10} = 70. \end{cases}$$

Наконец, при $v = 16$ соответствующая система примет вид:

$$\begin{cases} g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} = 26, \\ 2g_4 + 5g_5 + 9g_6 + 14g_7 + 20g_8 + 27g_9 + 35g_{10} = 40, \\ 3g_3 + 4g_4 + 5g_5 + 6g_6 + 7g_7 + 8g_8 + 9g_9 + 10g_{10} = 80. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как раньше, не сложно убедиться, что последние три системы решений в целых неотрицательных числах не имеют.

Таким образам, существует ровно два типа многогранников, у которых равны количества ребер, диагоналей и диагоналей граней (мы считаем многогранники однотипными, если у них поровну треугольных граней, четырехугольных граней и т.д.).

На сколько тетраэдров можно разрезать куб?

Странный вопрос — подумает читатель. После недолгих раздумий легко понять, что на 5 тетраэдров разрезать куб можно (под «тетраэдром» мы будем понимать произвольную треугольную пирамиду), а менее чем на 5 — не получится. Ну а далее — все очевидно: поскольку любой тетраэдр можно разрезать на два, достижимо любое количество тетраэдров, начиная с 5.

Это верно, но мы будем рассматривать лишь специальные разрезания, являющиеся естественным обобщением триангуляции многоугольника непересекающимися диагоналями. Во-первых, будут разрешены лишь сечения куба и возникающих многогранников плоскостью, проходящей, не менее чем через три вершины многогранника, не лежащие в одной грани. Во-вторых, каждый многогранник, возникший после таких разрезаний, мы будем рассматривать отдельно. Ясно, что тетраэдр разрезать по этим правилам нельзя. Поэтому, если после нескольких разрезаний не останется многогранников, отличных от тетраэдров, процесс остановится.

При таких правилах ответ на поставленный в заголовке вопрос уже не столь очевиден. Однако, обо всем по порядку. Сначала покажем, что пять тетраэдров действительно минимальное достижимое количество.

Рассмотрим две противоположные грани куба, например, верхнюю и нижнюю. Поскольку все грани тетраэдра — треугольники, исходные квадратные грани куба должны быть разрезаны, как минимум, на два треугольника каждая. Даже если сечение, содержащее одну треугольную грань в нижнем основании «дотянется» до верхнего основания, объем отсекаемого тетраэдра составит не более $\frac{1}{6}$ от объема исходного куба. Две треугольные грани из верхнего и нижнего оснований не могут одновременно входить в один тетраэдр. Поэтому четыре тетраэдра, имеющие грани в верхнем (нижнем) основании куба не могут заполнить весь исходный куб. С другой стороны, отсекая от куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3) тетраэдры $AA_1B_1D_1$, $CB_1C_1D_1$, $ABCB_1$ и $ACDD_1$, получим разбиение исходного куба на 5 тетраэдров (пятым будет ACB_1D_1).

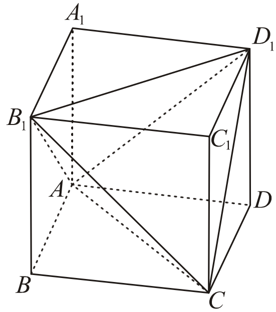


Рис. 3

Если же сначала разрезать куб сечением, проходящим через параллельные диагонали противоположных граней (например, AC и A_1C_1), получим две треугольные призмы, каждая из которых, при нашем способе разрезания может быть будет рассечена ровно на три тетраэдра (на рис. 4 указано рассечение одной из них). Таким образом, из исходного куба получится уже не 5, а 6 тетраэдров.

Куб обладает массой симметрий, поэтому существует всего лишь два принципиально различных способа выбрать три вершины, не лежащие в одной грани: взять три вершины, смежные одной; взять три вершины, две из которых будут принадлежать какой-то диагонали куба. Последовательно используя сечения первого вида, получим на выходе 5 тетраэдров. Если же стартовать с сечения второго вида, получим 6 тетраэдров.

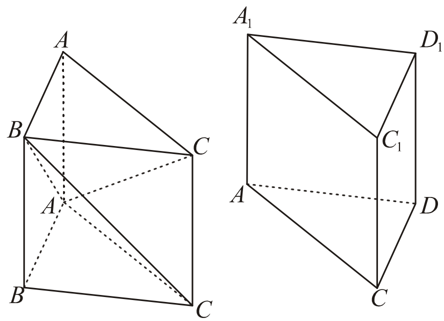


Рис. 4

В первый момент автору показалось, что числами 5 и 6 исчерпываются все возможные количества тетраэдров, на которые можно разрезать куб нашим способом. Второй подход действительно не может привести к другому (отличному от 6) количеству тетраэдров. Но с первым дело обстоит хитрее. Допустим, мы уже отсекли от куба тетраэдр с вершиной C_1. Если мы продолжим отсекать тетраэдры с вершинами A_1, B и D, то мы придем к уже описанному рассечению на 5 тетраэдров. Но у нас есть еще одна возможность (доставшаяся нам в наследство от второго способа) — провести сечение через вершины C, A и A_1. В этом случае, в дополнение к отрезанному ранее тетраэдру, мы получим два равных (но по-разному ориентированных) многогранника (рис. 5). Каждый из них будет иметь по 6 вершин, 6 граней и 10 ребер. Такой многогранник называется тетрагональный антиклин.

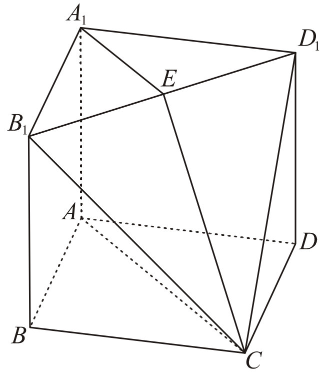


Рис. 5

Дабы ничего не пропустить займемся полным перебором всех возможных сечений тетрагонального антиклина $ABCA_1B_1E$. Всего можно выбрать $\binom{6}{3}=20$ троек вершин. Но 12 из них (по четыре тройки на каждую из двух четырехугольных граней и по одной троке на каждую из четырех треугольных граней) не приведут к требуемым сечениям. Таким образом, нам остается рассмотреть всего 8 случаев, которые естественным образом разобьются на 4 пары.

Сечение AB_1C (рис. 6) разбивает антиклин на тетраэдр $ABCB_1$ и четырехугольную пирамиду B_1ACEA_1, которая, в свою очередь, очевидно делится на два тетраэдра. Это дает 3 тетраэдра. С учетом ранее отрезанного тетраэдра $C_1B_1CD_1$ получаем $1+3+3=7$ тетраэдров. Так что, числами 5 и 6 все возможные количества тетраэдров не исчерпываются. Сечение A_1B_1C также приводит к разбиению исходного тетрагонального антиклина на треугольную и четырехугольную пирамиду и, конечном итоге на 3 тетраэдра.

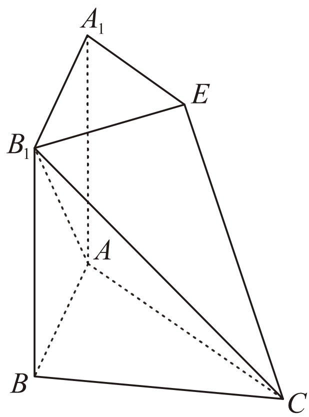


Рис. 6

Сечение AB_1E (рис. 7) разбивает исходный антиклин на тетраэдр AA_1B_1E и треугольную бипирамиду $BEAB_1C$. Треугольная бипирамида, очевидно, может быть разрезана на два тетраэдра, если сечение совпадает с общим основанием составляющих ее тетраэдров (в нашем случае это AB_1C). Однако, если провести сечение через вершины бипирамиды и одну из вершин общего основания (например, B_1), бипирамида распадется на две четырехугольные пирамиды (дополнительная вершина образуется на ребре AC). Следовательно, в этом случае тетрагональный антиклин разбивается на 3 или на 5 тетраэдров. Учитывая, второй антиклин и отрезанный ранее тетраэдр, придем к разбиению куба на 7, 9 или 11 тетраэдров.

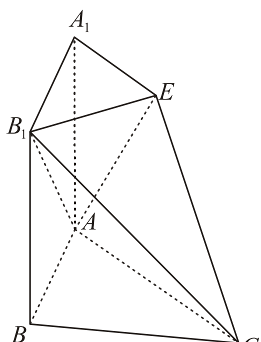


Рис. 7

Аналогичное разбиение тетрагонального антиклина получается, если стартовать с сечения A_1BC.

Третий возможный вариант разрезания тетрагонального антиклина — сечение BB_1E (рис. 8). Полученная треугольная призма $ABFA_1B_1E$ разрезается далее на 3 тетраэдра, а четырехугольная пирамида CBB_1EF — на 2. В результате получается 5 тетраэдров, что не приводит к получению новых значений.

К аналогичным результатам приводит сечение исходного антиклина, проходящее через вершины B, C и E. Правда, в этом случае вместо призмы возникает усеченная треугольная пирамида (нижнее основание — ABC, вершины верхнего — A_1, E и середина A_1B_1). Но, она точно также, как и призма, разрезается по нашим правилам ровно на 3 тетраэдра.

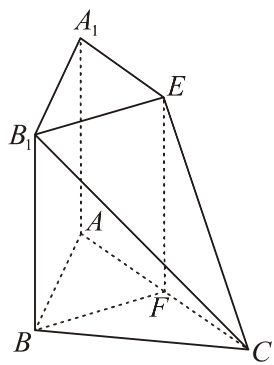


Рис. 8

Осталось рассмотреть две тройки вершин, приводящие к сечениям: A_1, B, E и A, B, E.

Первое сечение представлено на рисунке 9. На нем легко различима четырехугольная пирамида B_1A_1BGE. Менее очевидно, что представляет второй многогранник. Но, приглядевшись, мы поймем, что это … тетрагональный антиклин. К аналогичному разбиению на четырехугольную пирамиду и тетрагональный антиклин приводит и сечение, проходящее через вершины A, B, E.

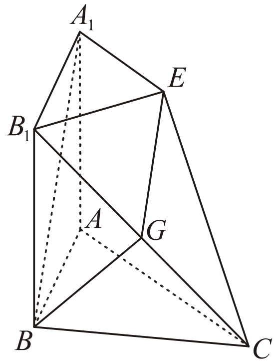


Рис. 9

Остается заметить, что рассмотренные нами возможные сечения характерны для любого тетрагонального анктиклина, а не только для антиклина специального вида (полученного из куба). Так, наиболее интересное рассечение на четырехугольную пирамиду и новый тетрагональный антиклин получается всякий раз, когда сечения проходит через три вершины степени 3, в частности, к разбиению антиклина AA_1BCEG (рис. 9) на четырехугольную пирамиду и новый антиклин приведут сечения, проходящие через тройки вершин третьей степени A, E, G и A, A_1, G (остальные две тройки не приводят к сечениям).

Таким образом, тетрагональный антиклин можно разрезать нашим способом на любое нечетное количество тетраэдров, начиная с 3. Следовательно, мы уже умеем разрезать куб на 6 тетраэдров и любое нечетное количество тетраэдров начиная с 5.

Но все ли возможности исчерпаны? Многогранник на рисунке 5 имеет 7 вершин. Выбрать 3 вершины можно 35 способами. Не исключено, что некоторые из них приведут в итоге к другим количествам тетраэдров. Проверим, так ли это.

16 троек (по одной для четырех треугольных граней и по четыре для трех четырехугольных граней) не приведут к сечениям.

Многогранник на рисунке 5 содержит три пары противоположных ребер исходного куба (BB_1, DD_1; BC, A_1D_1; CD, A_1B_1). Поэтому еще 12 троек приведут к сечениям, проходящим через 4 вершины многогранника. А каждое из таких сечений, в конечном итоге, приводит к разбиению исходного куба на 6 тетраэдров.

Сечения, проходящие через тройки вершин A, B, D_1 и A, D, B_1 приводят к рассмотренному выше разбиению на два тетрагональных антиклина.

Рассмотрим сечение AB_1D_1 (сечения ACB_1 и ACD_1 приводят к аналогичным разбиениям). В результате многогранник с рис. 5 разобьется на тетраэдр и многогранник, представленный на рис. 10. Для этого многогранника возможны сечения трех типов.

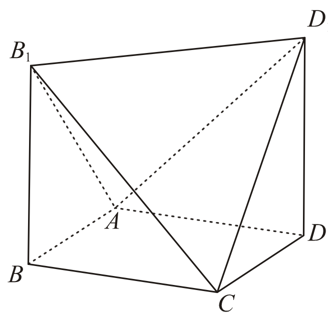


Рис. 10

Сечение BDD_1B_1 приводит к уже известному нам разрезанию исходного куба на 6 тетраэдров.

Сечение ACB_1 (ACD_1) дает тетраэдр и треугольную бипирамиду, которую, как мы знаем, можно разрезать на 2 или 4 тетраэдра. Для исходного куба это дает уже известные 5 или 7 тетраэдров.

Наиболее содержателен случай сечения, проходящего через вершины C, D, B_1 (рис. 11) и аналогичные ему. Один из двух образовавшихся многогранников — четырехугольная пирамида D_1CDHB_1. Другой — тетрагональный антиклин $ADHBCB_1$. С учетом двух ранее отрезанных тетраэдров получаем, что сечение $CDHB_1$ приводит к разрезанию исходного куба на любое нечетное количество тетраэдров, начиная с 7.

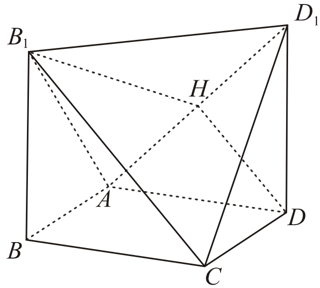


Рис. 11

Нам осталось рассмотреть последнее сечение многогранника, изображенного на рис. 3 — BDA_1. В результате получим тетраэдр и многогранник, изображенный на рис. 12. Он представляет собой треугольную антипризму. Основаниями антипризмы служат правильные треугольники BDA_1 и CB_1D_1, а боковыми гранями — 6 равнобедренных треугольников. Эту антипризму можно рассматривать и как октаэдр с оговоркой, что под «октаэдром» чаще всего понимают правильный октаэдр, а многогранник на рис. 12 правильным, конечно, не является. Но для нас важно другое: так же, как и в случае правильного октаэдра, любое сечение нашего многогранника, содержащее, по крайней мере, три его вершины, содержит и четвертую, разбивая его на две четырехугольные пирамиды. С учетом двух отсеченных ранее тетраэдров это дает рассечение исходного куба на 6 тетраэдров.

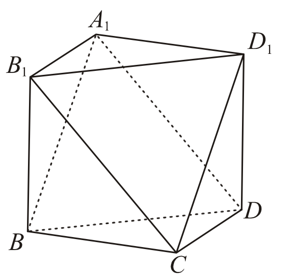


Рис. 12

Окончательно получаем: **действуя описанным выше способом куб можно разрезать на 6 тетраэдров, а также на любое нечетное количество тетраэдров, начиная с 5**.

Конечно, на кубе свет клином (и антиклином) не сошелся. Поставленный в заголовке раздела вопрос допускает естественное обобщение.

Пусть P — некоторый многогранник. Обозначим через $S(P)$ множество количеств тетраэдров, на которые может быть разрезан многогранник P, при условии, что:

- разрешены лишь сечения исходного и возникающих многогранников, проходящие через, по крайней мере, 3 вершины;
- возникающие в результате сечений многогранники рассматриваются по отдельности.

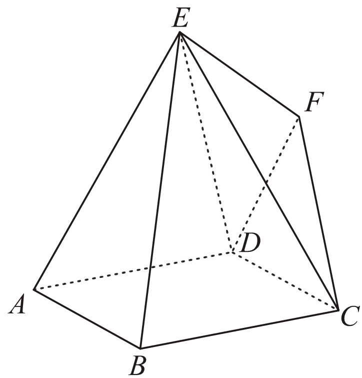


Рис. 13

Приведем несколько результатов для выпуклых многогранников.

Класс многогранников, для которых $S(P)$ одноэлементно весьма узок. В него входят только пирамиды, треугольные призмы (треугольные усеченные пирамиды), и четырехугольные бипирамиды специального вида (после удаления любых двух несмежных вершин оставшиеся четыре лежат в одной плоскости). Для треугольных бипирамид и, по-видимому, только для них $S(P)$ состоит ровно из двух чисел (2 и 4).

Гораздо шире класс многогранников, для которых $S(P)$ бесконечно. Из приведенных выше рассуждений видно, что в этот класс попадают и куб (параллелепипед, усеченная четырехугольная пирамида), и тетрагональный антиклин, и многогранники, изображенные на рисунках 5 и 10. Однако, для всех этих многогранников дополнение $S(P)$ до множества натуральных чисел тоже бесконечно. Разумеется, так бывает не всегда. Например, многогранник на рис. 13 можно разрезать нашим способом на любое количество тетраэдров, отличное от 1, 2, 4 и 6.

Автору неизвестно, существуют ли многогранники, которые нельзя разрезать указанным способом на конечное число тетраэдров.

Литература

1. Лецко В. А., Садыкова А. А. К вопросу о критериях оценивания исследовательских работ старшеклассников в области математики // Сб. трудов Всероссийской молодежной научной конференции «Информационные технологии в образовании XXI века» — Москва, НИЯУ МИФИ, 2011
2. Лецко В. А. О некоторых подходах к формированию тематики исследовательских работ школьников в области математики // Сб. науч. Статей «Исследовательская работа и креативный потенциал учительско-ученических сообществ» — Москва, «Планета», 2014
3. Сгибнев А. И. Исследовательские задачи для начинающих. Исследовательские задачи для начинающих. 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2015. — 136 с
4. Математический марафон [раздел интернет-портала факультета математики, информатики и физики Волгоградского государственного социально-педагогического университета], URL: http://www-old.fizmat.vspu.ru/doku.php?id=marathon:about (дата обращения: 24.051.2019)

Параметры (10 класс)

В.Б. Некрасов,
г. Санкт-Петербург
vbnekrasov@mail.ru

Задача 1. Выясните, при каких значениях параметра a:

а) уравнение $ax^2-6x+a+8=0$ имеет два различных положительных корня;

б) уравнение $(a^2-1)x^2-(a^2-3a+2)x+a^2-a=0$ имеет более двух корней.

Ответ: а) $0<a<1$; б) $a=-1$.

Задача 2. Выясните, при каких значениях параметра a:

а) уравнение $(a+1)x^2-3ax+4a=0$ имеет два действительных корня, один из которых меньше 1, а другой больше 1;

б) уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ имеет два действительных корня, один из которых меньше 2, а другой больше 3?

Ответ: а) $-1<a<-0{,}5$; б) $2<a<5$.

Задача 3а. Найдите все значения a, при которых сумма $\log_a(\sin x+2)$ и $\log_a(\sin x+3)$ равна единице хотя бы при одном значении x.

Ответ: $2\le a\le 12$.

Задача 3б. Найдите все значения a, при которых сумма $\log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ больше единицы при всех значениях x?

Ответ: $1<a\le 8$.

Задача 3в. При каких значениях a выражение $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ больше выражения $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_7 a}$ при всех допустимых значениях x?

Ответ: $0<a\le 1$.

Задача 4. Найдите все такие значения a, при которых уравнение $\sqrt{x+2a-1}+\sqrt{x-a}=1$ имеет решения.

Ответ: $a\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$.

Задача 5. Найдите все такие значения a, при которых уравнение $\sqrt{a-\sqrt{x+2a}}=x-a$ имеет решения.

Ответ: $\{0\}\cup[3;+\infty]$.

Задача 6. Найдите все такие значения параметра a, при которых имеет решения система

$$\begin{cases} y+a\geq 2|x-a|, \\ x+|y-a|=a+1. \end{cases}$$

Ответ: $a\geq-\frac{1}{2}$.

Задача 7. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x^2+6x+8}=\sqrt{a-3x}$ имеет ровно одно отрицательное решение.

Ответ: $a\in\{-12{,}25\}\cup(-12;-6)\cup[8;+\infty)$.

Задача 8. Найдите все такие значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3)\geq 0, \\ ax\geq 4 \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $-2<a\leq 0$.

Задача 9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=a^2-3a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a=2$, $a=6$.

Задача 10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + ax = (2-a)y, \\ y^2 + (2-a)x = ay \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

Ответ: $a \le 1$ или $a \ge 3$.

Задача 11. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 1$.

Задача 12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = 4$.

Задача 13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3{,}5x - 2{,}5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

Ответ: $-8{,}5 \le a \le -3{,}5$.

Задача 14. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2 + ax + 12} + 1\right)\log_5(x^2 + ax + 13) + \log_a 3 = 0$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = 4\sqrt{2}$.

Задача 15. Найдите все такие значения a, при которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)=z, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x, \\ (x+y+a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy)+1)=0. \end{cases}$$

Ответ: $a=1$.

Задача 16. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2\cdot 4^{\lg x}+5\cdot 25^{\lg x}=ax$ имеет решения.

Ответ: $a\ge 2\sqrt{10}$.

Задача 17. Найдите все такие значения параметра p, при которых неравенства $x(x+2)\le 3p$ и $x(x-4)+p\le 0$ имеют единственное общее решение.

Ответ: $p=0$, $p=4$.

Задача 18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решения неравенства $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\le\sqrt{2}$ образуют промежуток, длина которого равна $0{,}25$.

Ответ: $a=0{,}5$.

Применение векторов для решения задач

В.Б. Некрасов,
г. Санкт-Петербург
vbnekrasov@mail.ru

§1. Центроид системы точек

Определение. Точка M называется центроидом системы точек $A_1, A_2, \dots A_n$, если выполняется условие

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

Равенство (1) с помощью формулы разности двух векторов можно переписать следующим образом:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}\right) + \left(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}\right) \text{ [1]} \qquad (2)$$

Теорема. Если точка M_1 — центроид системы k точек $A_1, A_{2,} \dots A_k$, а точка M_2 — центроид системы l точек $B_1, B_2, \dots B_l$, и эти системы не имеют общих точек, то центроид системы $k + l$ точек $A_1, A_2, \dots A_k, B_1, B_2, \dots B_l$ — точка M, принадлежащая отрезку M_1M_2 и делящая его в отношении $M_1M : MM_2 = l : k$.

Доказательство. Пусть точка $M \in [M_1M_2]$ и $M_1M : MM_2 = l : k$. Тогда

$$kM_1M = lMM_2 \Leftrightarrow k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}\right) = l\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{k+l}\overrightarrow{OM_1} + \frac{l}{k+l}\overrightarrow{OM_2} \qquad (3)$$

---

[1] Здесь точка O — произвольная точка пространства.

Согласно формуле (2):

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_k}\right),\ \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{l}\left(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots + \overrightarrow{OB_l}\right).$$

Подставляя эти выражения для $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ в формулу (3), получаем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+l}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \ldots + \overrightarrow{OB_l}\right).$$

Это и означает, что точка M — центроид системы $k+l$ точек $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l$.

Задача 1. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра.

Задача 2. Середина каждой стороны основания четырехугольной пирамиды соединена отрезком с точкой пересечения медиан противоположной боковой грани. Докажите:

а) эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 3:2, считая от стороны основания;

б) середины этих отрезков являются вершинами параллелограмма. Найдите отношение площади этого параллелограмма к площади основания пирамиды.

Ответ: б) 1:72.

Решение.

1) Пусть точки K_1, K_2, K_3, K_4 — середины сторон основания AB, BC, CD, DA пирамиды $PABCD$, точки M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения медиан граней CDP, ADP, ABP, BCP, а точки O_1, O_2, O_3, O_4 делят отрезки K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4 в отношении

$$K_1O_1 : O_1M_1 = K_2O_2 : O_2M_2 = K_3O_3 : O_3M_3 = K_4O_4 : O_4M_4 = 3:2\ .$$

Тогда имеем:

$$\overrightarrow{PO_1} = \frac{2}{5}\overrightarrow{PK_1} + \frac{3}{5}\overrightarrow{PM_1} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PP}\right) =$$

$$=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right).$$

Аналогично $\overrightarrow{PO_2}=\overrightarrow{PO_3}=\overrightarrow{PO_4}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$.

Таким образом, $\overrightarrow{PO_1}=\overrightarrow{PO_2}=\overrightarrow{PO_3}=\overrightarrow{PO_4}$. Это означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 совпадают, т.е. отрезки K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4 пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:2, считая от стороны основания.

2) Пусть теперь точки E, F, G, H — середины отрезков K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4 соответственно.

Тогда:

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PK_2}+\overrightarrow{PM_2}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PK_1}+\overrightarrow{PM_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PA}\right)=\frac{1}{12}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)=\frac{1}{12}\overrightarrow{BD}.$$

Аналогично: $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}=\frac{1}{12}\overrightarrow{BD}$.

Таким образом, точки E, F, G, H не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Следовательно, четырехугольник $EFGH$ — параллелограмм.

3) Сравним теперь площади параллелограмма $EFGH$ и четырехугольника $ABCD$.

Обозначим через φ угол между диагоналями AC и BD основания $ABCD$, через S_1 — площадь этого основания, а через S_2 — площадь параллелограмма $EFGH$.

Тогда $S_1=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi$.

Поскольку $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EH}=\frac{1}{12}\overrightarrow{BD}$, угол между сторонами EF и EH параллелограмма $EFGH$ равен φ или $\pi-\varphi$, а $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EH}=\frac{1}{12}\overrightarrow{BD}$, откуда получаем

$$S_2=EF\cdot EH\sin\varphi=\frac{1}{12}AC\cdot\frac{1}{12}BD\sin\varphi=\frac{1}{72}S_1.$$

Таким образом, $S_2:S_1=1:72$.

§2. Условия принадлежности трех точек одной прямой и четырех точек одной плоскости

Теорема 1. Пусть точка C лежит на прямой AB, точка O не лежит на этой прямой и имеет место равенство $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Тогда $\alpha+\beta=1$.

Доказательство.

$$C\in AB\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB} \tag{4}$$

Поскольку $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — неколлинеарные векторы, разложение (4) единственно и, значит, $\alpha=1-k$, $\beta=k$.

Таким образом $\alpha+\beta=1$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть точка D лежит в плоскости ABC, точка O не лежит в этой плоскости и имеет место равенство

$$\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}.$$

Тогда $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Доказательство. Так как векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, существуют такие числа m и n, что $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$, откуда получаем

$$\overrightarrow{OD}=(1-m-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC} \tag{5}$$

Поскольку $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ — некомпланарные векторы, разложение (5) единственно и, значит, $\alpha = 1 - m - n$, $\beta = m$, $\gamma = n$.

Следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, что и требовалось доказать.

Задача 3. *Точки K, L, M и N на сторонах треугольника ABC таковы, что $\frac{AK}{KC} = \frac{CL}{LB} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$, точка N — середина AC. Найдите отношение, в котором точка пересечения отрезков KL и MN делит отрезок KL.*

Ответ: $2:3$.

Решение. Обозначим через O точку пересечения отрезков KL и MN и через x — отношение $\frac{KO}{KL}$. Тогда $\overrightarrow{KO} = x\overrightarrow{KL}$. Так как точка L — середина MC и $KN = \frac{1}{4}KC$, то

$$\overrightarrow{KO} = x\overrightarrow{KL} = x \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KC}\right) = \frac{x}{2}\left(\overrightarrow{KM} + 4\overrightarrow{KN}\right) = \frac{x}{2}\overrightarrow{KM} + 2x\overrightarrow{KN}.$$

Поскольку точка O лежит на прямой MN, то $\frac{x}{2} + 2x = 1$, откуда $x = \frac{2}{5}$. Значит, $\frac{KO}{KL} = \frac{2}{5}$, следовательно, $\frac{KO}{OL} = \frac{2}{3}$.

Задача 4. *Основание четырехугольной пирамиды — параллелограмм $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1 на PA, PB, PC пирамиды таковы, что $\frac{AA_1}{A_1P} = 2$, $\frac{BB_1}{B_1P} = 5$, $\frac{CC_1}{C_1P} = 10$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит боковое ребро PD?*

Ответ: $1:7$.

Решение. Обозначим через D_1 точку пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с боковым ребром PD и через x — отношение $\frac{PD_1}{PD}$. Тогда $\overrightarrow{PD_1} = x\overrightarrow{PD}$. (*)

По условию $ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$, откуда $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$. Но $\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PB}=6\overrightarrow{PB_1}$, $\overrightarrow{PC}=11\overrightarrow{PC_1}$ и (*) принимает вид

$$\overrightarrow{PD_1}=3x\overrightarrow{PA_1}+11x\overrightarrow{PC_1}-6x\overrightarrow{PB_1}.$$

Точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости, следовательно, $3x+11x-6x=1$, откуда $x=\frac{1}{8}$. Таким образом, $\frac{PD_1}{PD}=\frac{1}{8}$, значит, $\frac{PD_1}{D_1D}=\frac{1}{7}$.

§3. Доказательство неравенств

Задача 5. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+9}+\sqrt{c^2+25}$, если известно, что $a+b+c=12$.

Ответ: 15.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{m}\{a;1\}$, $\vec{n}\{b;3\}$, $\vec{p}\{c;5\}$ и $\vec{q}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$. Вектор $\vec{q}$ имеет координаты $\vec{q}\{a+b+c;9\}$, откуда $\vec{q}\{12;9\}$.

Поскольку $|\vec{m}|+|\vec{n}|+|\vec{p}|\geq|\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}|$, имеем

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+9}+\sqrt{c^2+25}\geq\sqrt{144+81}=15.$$

Равенство достигается, если $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{p}$, откуда $b=3a$, $c=5a$. Учитывая $a+b+c=12$, получаем $a=\frac{4}{3}$, $b=4$, $c=\frac{20}{3}$.

Задача 6. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$, если a, b, c — длины сторон треугольника ABC, а R — радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решение. Согласно теореме синусов $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$. Тогда имеем

$$a^2+b^2+c^2 \le 9R^2 \Leftrightarrow 2R^2\left(2\sin^2 A+2\sin^2 B+2\sin^2 C\right) \le 9R^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3-\cos 2A-\cos 2B-\cos 2C \le 4{,}5 \Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \ge -1{,}5$$

Докажем, что $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \ge -1{,}5$. Пусть ABC — данный треугольник, точка O — центр описанной около него окружности. Тогда $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$, $\angle AOB = 2\angle C$. Далее имеем:

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R^2(1+1+1+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \ge -1{,}5$$

Задача 7. *Докажите, что, если* $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=2\sqrt{1+\alpha}$, *то* $x+y \ge 2\alpha$.

Доказательство. Положим $u=\sqrt{1+x}$, $v=\sqrt{1+y}$, $a=\sqrt{1+\alpha}$. Для u, v, a условием является равенство $u+v=2a$, где $u \ge 0$, $v \ge 0$, $a \ge 0$, а доказать надо, что $u^2+v^2 \ge 2a^2$.

Рассмотрим векторы $\vec{m}\{u;v\}$, $\vec{n}\{v;u\}$ и $\vec{q}\{2a;2a\}$. Так как $u+v=2a$, то $\vec{m}+\vec{n}=\vec{q}$.

Следовательно, $|\vec{m}|+|\vec{n}| \ge |\vec{q}|$, откуда $u^2+v^2 \ge 2a^2$.

Задача 8. Найдите множество значений функции
$$f(x)=x-1+\sqrt{6x-3x^2}.$$

Ответ: $[-1;2]$.

Решение. Область определения функции $f(x)$ — отрезок $[0;2]$. Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x)=x-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x-x^2}$ и рассмотрим векторы $\vec{a}\left\{1;\sqrt{3}\right\}$ и $\vec{b}\left\{x-1;\sqrt{2x-x^2}\right\}$. Их скалярное произведение равно $f(x)$, а длины равны соответственно $|\vec{a}|=2$ и

$\left|\vec{b}\right| = 1$. В силу известного неравенства $-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ получаем $-2 \le f(x) \le 2$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\frac{x-1}{1} = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{3}{2}$ и, так как число $\frac{3}{2} \in [0;2]$, наибольшее значение функции $f(x)$ равно $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| = 2$.

Так как координаты вектора $\vec{a}$ положительны, а одна из координат вектора $\vec{b}$ неотрицательна, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не могут быть противоположно направлены, но нетрудно заметить, что оба слагаемых ($x-1$ и $\sqrt{6x - 3x^2}$) принимают наименьшее значение на отрезке $[0;2]$ при $x = 0$. Таким образом, $f(0) = -1$ есть наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0;2]$.

Задача 9. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36. \end{cases}$$

Ответ: Система решений не имеет.

Решение. Выберем точку O в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости от точки O три единичных вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$, которые образуют друг с другом углы $120°$. Пусть x, y, z — решения данной системы. Обозначим соответственно через A, B и C концы векторов $x\vec{u}$, $y\vec{v}$ и $z\vec{w}$. Далее имеем:

$$AB^2 = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2 = \left(y\vec{v} - x\vec{u}\right)^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = x^2 + xy + y^2 = 4,$$

откуда $AB = 2$.

Аналогично, получаем: $AC = 3$, $BC = 6$.

Таким образом, $AB + AC < BC$, что невозможно.

Задача 10. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, M — точка пересечения прямых AB и CD, N — точка пересечения прямых BC и AD. Докажите, что

$$\cos\angle BAD + \cos\angle ABC + \cos\angle BCD +$$
$$+\cos\angle ADC + \cos\angle AMD + \cos\angle ANB < 2.$$

Доказательство. Выберем четыре единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{m}$ так, что $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\vec{k} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA}$ и воспользуемся свойством скалярного квадрата вектора

$$(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m})^2 \geq 0\,.$$

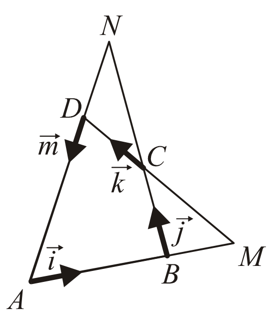
а) Если $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}=\vec{0}$, то $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, что противоречит условию.

б) Если $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\neq\vec{0}$, то имеем:

$$\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\right)^2 =$$
$$=\vec{i}^{\,2}+\vec{j}^{\,2}+\vec{k}^{\,2}+\vec{m}^{\,2}+2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{i}\cdot\vec{k}+2\cdot\vec{i}\cdot\vec{m}+2\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}+2\cdot\vec{j}\cdot m+2\cdot\vec{k}\cdot\vec{m}=$$
$$=4-\cos\angle ABC-2\cos\angle AMD-2\cos\angle BAD-$$
$$-2\cos\angle BCD-2\cos\angle ANB-2\cos\angle ADC>0,$$

откуда находим

$$\cos\angle BAD + \cos\angle ABC + \cos\angle BCD +$$
$$+\cos\angle ADC + \cos\angle AMD + \cos\angle ANB < 2.$$



Поучи учителя

Н.М. Нетрусова,
г. Москва
natnetint@gmail.com

В ноябре 2017 года в Москве внезапно появился проект «Математическая вертикаль». Про него рассказали директорам школ на селекторе и, видимо, рассказали так, что все сразу захотели в нем участвовать, хотя информации о проекте никакой еще не было. Информации и сейчас мало, а мифов уже много. Цель этой статьи — распространить информацию о проекте.

Исходное фото — Алексей Сгибнев, обработка нейросетью — Роман Жихаревич

Кратко

Берем шестиклассников, ведем кружок по математике, делаем отбор внутри школы — отбираем отдельный класс, который в 7–9 классе учим математике по более сильной программе. Школам-участницам — дополнительное финансирование.

Школы прикрепляются к ресурсным центрам (РЦ) — это сильные школы и вузы. Ресурсных центров сейчас в Москве — 24. Ресурсные центры помогают школам методически, кто как умеет. Действиями РЦ руководит центр педагогического мастерства.

Я руковожу ресурсным центром «Интеллектуал». Сайт РЦ «Интеллектуал»: vertical.sch-int.ru

Что должно происходить

Программы «Математической вертикали» включают темы, которые обычно в школе не проходят, а проходят в математических классах. Проект призван передать те материалы занятий, формы работы, методические разработки, культуру, которые накопились в матклассах, во все остальные школы.

В классах «Математической вертикали» нет специального учебника. Школа сама выбирает, по каким учебникам работать и дополняет их материалами для проекта, выложенными в МЭШ. МЭШ — Московская электронная школа — большой склад учебных материалов.

С классами «вертикали» работают те же учителя, что и до этого работали в школе. Учителя сдают тестирование, подтверждающее достаточную квалификацию, чтобы работать по углубленной программе. Ресурсные центры обучают учителей. В результате в проекте появляется важная часть: обучение учителей математики.

Что происходит на самом деле

На уровне школ

Я очень боюсь обидеть кого-либо словосочетаниями: «обычная школа», «дворовая школа», «массовая школа», «школа совсем не про математику», или наоборот: «топовая школа», «математическая школа», «сильная школа». Я уважаю своих коллег, в какой бы школе они не работали.

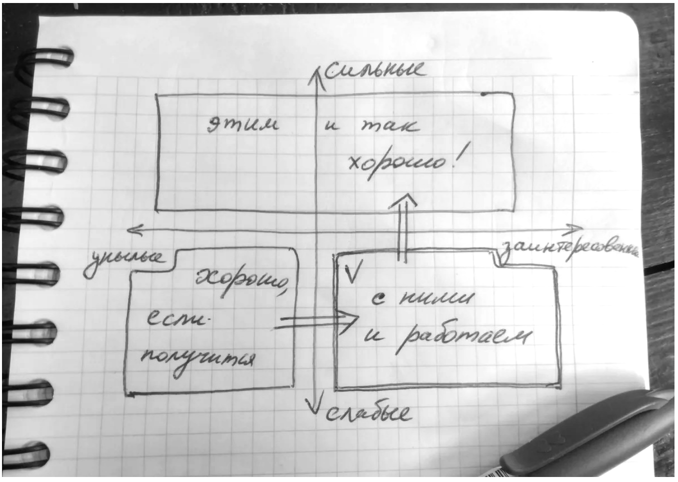
Есть два разных мира: «математических школ» и «обычных школ». Эти миры почти не знают друг про друга и не слышат друг друга. Ресурсные центры — из мира «математических школ», большинство школ-участниц проекта — из мира «обычных школ». Проект «Математическая вертикаль» сближает эти два мира и в то же время демонстрирует, как же они далеки.

На уровне учителей

Есть сильные учителя, которые прекрасно учат математике, им этот проект нужен ну разве что для дополнительного финансирования.

Есть не очень сильные учителя, но активные и заинтересованные. Им углубленная программа в новинку. Они изучают новое и учат своих учеников. К сожалению, одновременно.

Есть слабые и незаинтересованные учителя. Если кто-то из них заинтересуется — будет неплохо, но это не основная цель.



Так я представляю себе работу с учителями

На уровне уроков

Проект создается в ходе самого проекта. Иногда материалы в МЭШ появляются позже уроков по ним. Есть много накладок. Эдакий кот в мешке получается.

На уровне родителей

Случился огромный ажиотаж. Очень многие хотят, чтобы ребенок попал в такой класс. Иногда ребенку это совсем не нужно — ну зачем ему повышенная нагрузка по математике против его воли!

Что я делаю

У ресурсных центров, есть большая свобода, чем именно заниматься. Поэтому разные ресурсные центры делают разное. Часто мнение школы или родителей о проекте очень сильно зависит от работы ресурсного центра, хотя на первый взгляд РЦ не влияют не процесс.

Я считаю, что сначала надо научить учителей — они потом научат детей, так эффективнее. Мы проводим семинары для учителей математики, а каждое лето — летнюю школу для учителей, которая готовит к учебному году.

Я все время спрашиваю учителей, с которыми работаю, какие запросы есть у них. Так меня попросили показать уроки в нашей школе, и мы сделали все уроки математики в «Интеллектуале» открытыми для учителей других школ.

Самое важное, что я пытаюсь сделать — распространить культуру уважения к учителям: писать вежливые и понятные письма, не требовать данных, которые я могу добыть где-то еще, отвечать на все вопросы, которые у учителей появляются.

Также мне важно построить сообщество учителей математики. Я хочу, чтобы учитель, которого назначили работать в этом проекте (увы, часто учитель не выбирает), не чувствовал себя брошенным на передовую. Учителям школ нашего РЦ всегда есть к кому обратиться за помощью.

Семинары для учителей: vertical.sch-int.ru/kak-rabotat-v-proekte/seminars

Открытые уроки: vertical.sch-int.ru/otkrytye-uroki-2

Летняя школа: vertical.sch-int.ru/letnjaja-shkola-2019

И что собираюсь делать дальше

Школа «Интеллектуал» за широкое образование. Наш ресурсный центр постепенно добавляет разные активности для учителей и учеников по другим предметам.

Мне бы хотелось сотрудничать с региональными школами и центрами по работе с одаренными детьми. Я думаю, что те знания, которые мы накопили за полтора года работы ресурсного центра, надо распространять гораздо шире московских школ.

Новый способ введения экспоненты

С.Г. Слободник,
г. Москва
sam-slob@mail.ru

Каждому положительному числу a поставим в соответствие множество $E_a = \{x : x = (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k)$, где $a_1, a_2, ..., a_k > 0$ и $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a\}$.

Лемма 1. Из $0 < a < b$ следует, что для каждого элемента $x \in E_a$ найдется элемент $y \in E_b$ такой, что $y > x$.

Будем писать $A \le c$, если c — верхняя граница множества A. Аналогично, будем писать $A \ge c$, если c — нижняя граница множества A.

Лемма 2. Если $a_1, a_2, ..., a_k > 0$, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k) \ge 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k .$$

Для $k = 1$ утверждение очевидно: $1 + a_1 \ge 1 + a_1$.

Пусть $(1+a_1)\ldots(1+a_i) \ge 1 + a_1 + \ldots + a_i$ для $1 < i < k$.

Тогда

$$(1+a_1)\ldots(1+a_i)(1+a_{i+1}) \ge 1 + a_1 + \ldots + a_i + (1 + a_1 + \ldots + a_i)a_{i+1} \ge$$
$$\ge 1 + a_1 + \ldots + a_i + a_{i+1} .$$

В дальнейшем мы покажем, что каждое множество E_a ограничено. Из леммы 2 следует, что

$$\sup E_a \ge a \tag{1}$$

Лемма 3. Если $0 < a \le \frac{1}{2}$ и $a_1, \ldots, a_k > 0$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a$, то

$$(1+a_1)...(1+a_i) \le 1 + (1+2a)a_1 + (1+2a)a_2 + ... + (1+2a)a_i$$
$$i = 1,2,...,k.$$

Действительно, по индукции $1 + a_1 \le 1 + (1+2a)a_1$.

Пусть уже доказано, что

$$(1+a_1)...(1+a_i)\le 1+(1+2a)a_1+...+(1+2a)a_i\ .$$

Тогда

$$(1+a_1)...(1+a_i)(1+a_{i+1})\le$$
$$1+(1+2a)a_1+...+(1+2a)a_i+(1+(1+2a)a_1+...+(1+2a)a_i)a_{i+1}\le$$
$$\le 1+(1+2a)a_1+...+(1+2a)a_i+(1+2a_1+...+2a_i)a_{i+1}\le$$
$$\le 1+(1+2a)a_1+...+(1+2a)a_i+(1+2a)a_{i+1}.$$

Из леммы 3 следует

Лемма 4. Если $0<a\le\frac{1}{2}$ и $a_1,...,a_k>0$, $a_1+a_2+...+a_k=a$, то

$$(1+a_1)...(1+a_k)\le 1+a+2a^2.$$

Из лемм 3 и 4 следует важное неравенство: если $0<a\le\frac{1}{2}$, то

$$1+a\le E_a\le 1+a+2a^2 \qquad (2)$$

В частности если $a\le\frac{1}{2}$, то $E_a\le 2$. Заметим, что неравенство $1+a\le E_a$ верно для всех $a>0$.

Лемма 5. Для любого натурального n справедливо неравенство $E_n\le 2^{2n}$.

Пусть $a_1,...,a_k>0$, $a_1+...+a_k=n$.

Оценим произведение $(1+a_1)...(1+a_k)$. Из леммы 2 следует, что

$$(1+\frac{a_i}{2n})^{2n}\ge 1+a_i \quad \text{для } i=1,...,k.$$

Поэтому

$$(1+a_1)...(1+a_k)\le(1+\frac{a_1}{2n})^{2n}...(1+\frac{a_k}{2n})^{2n}=((1+\frac{a_1}{2n})...(1+\frac{a_k}{2n}))^{2n}.$$

Так как $\frac{a_1}{2n}+...+\frac{a_k}{2n}=\frac{1}{2}$, то применив лемму 4, получим $(1+\frac{a_1}{2n})...(1+\frac{a_k}{2n})\le 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=2$, т.е. $((1+\frac{a_1}{2n})...(1+\frac{a_k}{2n}))^{2n}\le 2^{2n}$.

Лемма 6. Пусть $A \subset B$ два непустых ограниченных подмножества множества действительных чисел R. Если для любого $b \in B$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $a \geq b$, то $\sup A = \sup B$.

Ясно, что $\sup A \leq \sup B$. Если предположить, что $\sup A < \sup B$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\sup A < \sup B - \varepsilon$. Значит для любого $a \in A$ верно неравенство $a < \sup B - \varepsilon$. Но в B найдется элемент $b > \sup B - \varepsilon$. Значит, каждое $a \in A$ меньше этого b. Что противоречит условию леммы.

Мы видим (см. лемму 1 и лемму 5), что для любого $a > 0$ множество E_a ограничено. Это позволяет определить функцию $f : R^+ \to R$, положив $f(a) = \sup E_a$ и $f(0) = 1$. Для любых непустых подмножеств A, B множества R положим

$$A \cdot B = \{x : x = a \cdot b, \text{ где } a \in A, b \in B\}.$$

Лемма 7. Если $A \geq 0, B \geq 0$ непустые ограниченные подмножества R, то

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Так как $A \cdot B \leq \sup A \cdot \sup B$, то $\sup(A \cdot B) \leq \sup A \cdot \sup B$. Если $\sup(A \cdot B) < \sup A \cdot \sup B$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\sup(A \cdot B) < \sup A \cdot \sup B - \varepsilon.$ Следовательно, для любых $a \in A$ и $b \in B$ верно

$$ab < \sup A(\sup B - \varepsilon) \tag{3}$$

Выберем последовательность $\{a_n\}$ элементов множества A, сходящуюся к $\sup A$ и последовательность $\{b_n\}$ элементов множества B, сходящуюся к $\sup B$. Но тогда $a_n b_n \to \sup A \cdot \sup B$, что противоречит (3).

Лемма 8. Для $a, b > 0$ справедливо равенство

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b).$$

Рассмотрим множества E_a, E_b и E_{a+b}. Включение $E_a \cdot E_b \subset E_{a+b}$ очевидно. Докажем, что для любого $z \in E_{a+b}$ найдутся $x \in E_a$ и $y \in E_b$ такие, что $xy \geq z$. Действительно, пусть

$$z = (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k),$$

где $a_1,...,a_k > 0$, $a_1 + ... + a_k = a + b$. Рассмотрим наборы положительных чисел $\{\frac{a}{a+b}a_1,...,\frac{a}{a+b}a_k\}$, $\{\frac{b}{a+b}a_1,...,\frac{b}{a+b}a_k\}$. Ясно, что

$$\frac{a}{a+b}a_1 + \frac{a}{a+b}a_2 + ... + \frac{a}{a+b}a_k = a,$$

$$\frac{b}{a+b}a_1 + \frac{b}{a+b}a_2 + ... + \frac{b}{a+b}a_k = b.$$

Положим

$$x = (1+\frac{a}{a+b}a_1)(1+\frac{a}{a+b}a_2)...(1+\frac{a}{a+b}a_k),$$

$$y = (1+\frac{b}{a+b}a_1)(1+\frac{b}{a+b}a_2)...(1+\frac{b}{a+b}a_k).$$

Ясно, что $x \in E_a$, $y \in E_b$ и

$$x \cdot y = (1+\frac{a}{a+b}a_1)(1+\frac{b}{a+b}a_1)(1+\frac{a}{a+b}a_2)(1+\frac{b}{a+b}a_2)...$$

$$...(1+\frac{a}{a+b}a_k)(1+\frac{b}{a+b}a_k) \geq (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k).$$

Итак $\sup(E_a \cdot E_b) = \sup E_{a+b}$. Но из леммы 7 следует, что $\sup(E_a \cdot E_b) = \sup E_a \cdot \sup E_b$.

Мы построили действительную функцию f, определенную на множестве положительных чисел, такую что $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. Доопределим ее, положив $f(0) = 1$ и $f(a) = f^{-1}(-a)$ для любого отрицательного числа a.

Итак, f определена на всей числовой прямой.

Лемма 9. Если $a + b = c$, то $f(a) \cdot f(b) = f(c)$.

Если одно из чисел a, b, c равно 0, то для них утверждение леммы верно.

Для случая когда $a, b, c > 0$ лемма следует из леммы 8.

Далее, если лемма верна для *a*, *b*, *c*, , то она верна и для $-a$, $-b$, $-c$. Действительно, так как $f(a) \cdot f(b) = f(c)$, то $\frac{1}{f(a)} \cdot \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)}$, т.е. $f(-a)\cdot f(-b)=f(-c)$. Значит, достаточно доказать лемму для случая $c>0$. Но тогда либо $a>0$, $b>0$, либо $a>0$, $b<0$, либо $a<0$, $b>0$. Случай $a>0$, $b>0$ уже разобран. Для определенности положим $a>0$, $b<0$. Итак, $a+b=c$, следовательно $a=c+(-b)$, где a,c и $-b>0$. Значит, $f(a)=f(c)f(-b)$ или $f(a)=\dfrac{f(c)}{f(b)}$, т.е. $f(a)\cdot f(b)=f(c)$.

Мы построили функцию f такую, что для любых точек $x,y\in R$ верно

$$f(x)>0, f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \tag{4}$$

Для $a>0$ из (2) следует

$$f(a)\geq 1+a \tag{5}$$

Если же $0<a\leq\dfrac{1}{2}$, то из (2) получим

$$f(a)\leq 1+a+2a^2 \tag{6}$$

Отметим, что т.к. $0<a\leq\dfrac{1}{2}$, то

$$a+2a^2=a(1+2a)\leq 2a \tag{7}$$

Окончательно из (5), (6),(7) получим

$$a\leq f(a)-1\leq a+2a^2\leq 2a \tag{8}$$

Ясно что

$$f(y)-f(x)=f(x+(y-x))-f(x)=$$
$$f(x)f(y-x)-f(x)=f(x)(f(y-x)-1).$$

Т.е.

$$f(y)-f(x)=f(x)(f(y-x)-1) \tag{9}$$

Оценим величину $f(y-x)-1$. Положив в неравенстве (8) $a=y-x$ получим для x,y таких, что $x<y$ и $y-x\leq\dfrac{1}{2}$

$$y-x\leq f(y-x)-1\leq (y-x)+2(y-x)^2\leq 2(y-x) \tag{10}$$

Используя (9) из (10) получим

$$f(x)(y-x) \le f(y)-f(x) \le$$

$$\le f(x)((y-x)+2(y-x)^2) \le 2f(x)(y-x) \qquad (11)$$

Так как $f(x)>0, (y-x)>0$, то из $y>x$ следует, что $f(y)>f(x)$, т.е. f возрастает на R. Далее,

$$0 < f(y)-f(x) \le 2f(x)(y-x),$$

поэтому для $z>y>x$ получим

$$|f(y)-f(x)| \le 2f(z)(y-x) \qquad (12)$$

Из (12) следует, что на множестве $(-\infty; z]$ функция f равномерно непрерывна. Значит f непрерывна всюду на R.

Теперь оценим величину производной функции f в произвольной точке $x \in R$.

Пусть $x_n < y_n$ и $x_n \to x$, $y_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\frac{f(x_n)(y_n-x_n)}{y_n-x_n} \le \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \le \frac{f(x_n)(y_n-x_n+2(y_n-x_n)^2)}{y_n-x_n},$$

$$\text{т.е., } f(x_n) \le \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \le f(x_n)(1+2(y_n-x_n)).$$

Так как

$$f(x_n) \to f(x) \text{ при } n \to \infty,$$

$$f(x_n)(1+2(y_n-x_n)) \to f(x) \text{ при } n \to \infty,$$

получаем

$$\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \to f(x).$$

Это значит, что f всюду дифференцируема на R и $f'(x)=f(x)$.

Несколько устных задач
(замена урока в 9 классе)

П.В. Чулков,
г. Москва
chulkov2007@yandex.ru

Предлагаю схему организации урока (пары уроков), которую удобно использовать при организации повторения в школе (классе) с углубленным изучением математики.

В основе — материал, подобранный на основе «устных задач» (из материалов вступительных экзаменов в МГУ, МФТИ, МИФИ и некоторых других)

Напомню, что когда-то (до введения ЕГЭ) большинство уважающих себя вузов проводили два экзамена по математике: письменный и устный. В свое время, под разговоры об объективности, устные экзамены отменили, но при этом был вычеркнут из жизни целый пласт задач.

Вопрос, что из себя представляли «устные задачи» (и как их можно использовать в преподавании) заслуживает серьезного обсуждения. Например, на их основе можно организовывать уроки повторения.

В основе урока (а лучше — пары уроков подряд) — листок, представляющий из себя набор «устных задач».

Например, такой.

Листок 02.02.2020 — (9 класс).

***Задача* 1.** Существует ли треугольник, для углов которого выполняется равенство: $\sin A + \sin B = \sin C$?

***Задача* 2.** Положительные числа a, b, c, x, y, z таковы, что $x^2 + xy + y^2 = a^2$, $y^2 + yz + z^2 = b^2$, $z^2 + zx + x^2 = c^2$. Выразите величину $xy + yz + zx$ через a, b, c.

***Задача* 3.** Найдите область значений функции $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$.

***Задача* 4.** Решите уравнение $6x^2+5y^2=74$ в целых числах;

***Задача* 5.** При каких значениях параметров a,b многочлен $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+ax+b$ делится на многочлен $g(x)=x^3-3x+2$ без остатка?

***Задача* 6.** Докажите, что не существует многочлена с целыми коэффициентами такого, что $p(7)=5$, $p(15)=9$.

***Задача* 7.** Функция f задана при всех x и удовлетворяет условию $\sqrt{3f(x)}-\sqrt{3f(x)-f(3x)}\geq 3$. Докажите, что $f(x)\geq 3$.

***Задача* 8.** Можно ли многочлен $2x^4+8x^3+12x^2+8x+1$ представить в виде квадрата некоторого многочлена с действительными коэффициентами?

***Задача* 9.** При каких значениях a система неравенств $x^2+y^2-4a^2\leq 8y-10x+4a-40$ и $x^2+y^2-a^2\leq 6x-4y-13$ имеет единственное решение?

***Задача* 10.** Сколько корней имеет уравнение

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0,$$

если числа a, b и c различны?

***Задача* 11.** Найдите все значения параметра, при которых система неравенств $x\geq(y-a)^2$, $y\geq(x-a)^2$ имеет только одно решение.

***Задача* 12.** Решите уравнение:

$$2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}\right)=x+y+z$$

***Задача* 13.** Решите систему уравнений:

$$(x+y)^3=z,\ (y+z)^3=x,\ (z+x)^3=y.$$

***Задача* 14.** Известно, что $x^2+xy+4y^2=3$. Найдите область значений выражения $x+3y$.

Схема занятия проста. Каждый учащийся получает листок с задачами (задач там с избытком, чтобы ученики могли выбирать) на определенное время, например, на 40 минут. Объявляется правило выставления оценки (по пятибалльной системе). Часто удобно, когда оценка не меньше количества решенных задач или совпадает с ним. Но можно и иначе — когда оценка на 1 или на 2 балла больше числа решенных задач. После того, как время вышло, начинается разбор задач.

Разбор может быть таким: «Все задачи, предложенные вашему вниманию — устные. Желательно сформулировать идею решения задачи кратко (одно-два предложения!) так, чтобы стало понятно, как она решается. Возможно, предварительно придется что-то преобразовать, записать по-другому или построить график, и дальше решение задачи становится тривиальным».

С чего начать разбор? Можно, например, спросить: «Как обеспечить себе хотя бы "тройку" ("четверку", "пятерку")? С какой задачи следует начать?» Или можно сформулировать иначе: «Какая задача самая простая»? (Если не давать простых задач, оценка будет хуже, удовольствия и пользы — намного меньше).

В 9 классе в качестве простой задачи школьники часто указывают на задачу 4.

4. Решите уравнение в целых числах: $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Идея: задачи про целые числа вероятнее всего предполагают организацию перебора, а здесь подходящих слагаемых явно немного.

Решение. Понятно, что

$$6x^2 \le 74, \; x^2 \le \frac{37}{3}, \; x^2 < 16, \; |x| \le 3.$$

Другая важная идея — симметрия: вместе с ответом $(a; b)$ обязательно присутствуют ответы вида $(\pm a; \pm b)$, поэтому достаточно искать сначала только положительные решения.

Решая перебором, получим, что значения $x = 1$ и $x = 2$ к ответу не приводят, а при $x = 3$, получим $5y^2 = 20$, $y^2 = 4$.

Осталось записать ответ: $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; 2)$, $(-3; -2)$.

Можно спрашивать и дальше: «Какие еще из этих задач простые?» Потом обсудить их и сказать: «Вот видите, на положительную оценку должно хватить».

А можно спросить иначе: «Какая задача здесь наиболее сложная?» В качестве ответа часто указывают на задачу 3.

3. Найдите область значений функции $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$.

Ключевая идея: задача на нахождение области значений функции может быть сведена к задаче с параметром.

Начнем: согласитесь, задача, скорее всего, на знакомый вам материал. А на что из изученного это выражение похоже больше всего? Рано или поздно получим ответ — это выражение выглядит как уравнение.

К какому типу уравнений оно сводится? К квадратному уравнению. То есть:

$$y(x-1)^2=4x,\ yx^2-2(y+2)x+y=0.$$

Получается, что нас интересуют те значения y, для которых найдутся соответствующие значения x, то есть те, при которых последнее уравнение имеет корни.

Чтобы их найти, достаточно исследовать дискриминант последнего уравнения (случаи $y=0$ и $x=1$ нужно будет рассмотреть отдельно). Ответ: $[-1;+\infty)$.

Вывод: найти область значений функции, значит найти те значения параметра y, при которых уравнение имеет корни.

Можно строить разговор иначе: предложить готовое решение задачи и попросить оценить его правильность. Рассмотрим, например, «решение» задачи 5.

5. При каких значениях параметров a, b многочлен

$$f(x)=x^4-3x^3+3x^2+ax+b$$

делится на многочлен $g(x)=x^3-3x+2$ без остатка?

Можно обсудить такое «решение» (предложенное учащимися). Ключевая идея: метод неопределенных коэффициентов.

Если многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ без остатка, то, $f(x)=g(x)\cdot p(x)$, где $p(x)$ — многочлен первой степени со старшим коэффициентом 1.

То есть: $x^4-3x^3+3x^2+ax+b=(x^3-3x+2)(x+t)$

Получили тождество. Можно подставлять произвольные числа. Подставим корни уравнения $x^3-3x+2=0$:

$$f(1)=1+a+b=0 \text{ и } f(-2)=52-2a+b=0.$$

Решив систему, получим ответ: $a=17$, $b=-18$.

Ответ неверный. В чем ошибка? Мы забыли про слово «если». И в этом всё дело. Мы не искали t, а подходящего значения t здесь не существует и «если» не реализуется. Можно ли это заметить быстрее? Да, можно.

Правильное решение: раскрыв скобки в правой части последнего тождества можно заметить, что коэффициент при x^2 не равен 3.

В листке могут быть задачи трудные для девятиклассников, но с яркими идеями. Такова, например, задача 11.

11. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $x\geq(y-a)^2$, $y\geq(x-a)^2$ имеет только одно решение.

Ключевые слова к решению: симметрия, проверка, график квадратичной функции, дискриминант.

Обсуждение: как связаны между собой неизвестные? Желательно, чтобы в результате обсуждения учащиеся сказали, что неизвестные входят в систему симметрично: если их поменять местами, то система уравнений останется прежней.

Решение. Система симметрична.

То есть, если некоторая пара чисел $(x;\, y)$ — решение данного неравенства, то пара $(y;\, x)$ также является решением данного неравенства.

Следовательно, если у исходного неравенства одно решение $(x;\, y)$, то $x=y$ и достаточно найти все значения параметра, при которых неравенство $x\geq(x-a)^2$ имеет только одно решение.

После преобразований, получим:

$$x^2-(2a+1)x+a^2\le 0.$$

Решаем графически. График — парабола. Решение одно, парабола («ветви» вверх) касается оси абсцисс.

Дискриминант $D=(2a+1)^2-4a^2=4a+1=0$.

Следовательно: $a=-0{,}25$.

Все? Нет не все. Вспомним фразу: «… если решение единственно, то $x=y$». Мы не знаем, бывает ли ситуация, когда решение единственно. А если не одно, а например, два или три? Или их совсем нет?

Проще всего сделать проверку, то есть убедиться, что система неравенств: $x\ge(y+0{,}25)^2$, $y\ge(x+0{,}25)^2$ имеет единственное решение. Для этого сложим неравенства и, после преобразований получим $(y-0{,}25)^2+(x-0{,}25)^2\le 0$ (неравенство-следствие).

Решение последнего неравенства $(0{,}25;\,0{,}25)$.

Легко убедиться, что это решение исходной системы и других решений система иметь не может.

Ответ: $-0{,}25$.

Указания, решения, комментарии.

1. Ответ: нет, не существует.

Можно попытаться (некоторые пытаются) решить задачу с помощью тригонометрических выкладок. Но можно и проще. Что мы знаем о синусах углов треугольника?

Первое, что приходит в голову — теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

(R — радиус описанной окружности)

Предположим равенство возможно. Тогда:

$2R\sin A+2R\sin B=2R\sin C$, откуда $a+b=c$, что противоречит неравенству треугольника.

2. Из некоторой точки O отложим три луча с углами между ними в $120°$ и отложим на них отрезки $OA=z$, $OB=x$, $OC=y$.

По теореме косинусов стороны треугольника ABC равны a, b, c. При этом

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OBC} + S_{OCA} = \frac{1}{2}(xy + yz + zx)\cdot \sin 120^\circ .$$

Получим: $xy + yz + zx = \frac{4}{\sqrt{3}} S_{ABC}$.

Следовательно, $xy + yz + zx = 4\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{3}}$.

6. Решение очень короткое.

Ключевая идея: если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и a, b — целые числа, то $f(a) - f(b)$ кратно $a - b$

Решение. Пусть $p(x)$ требуемый многочлен с целыми коэффициентами. Получим: $p(15) - p(7) = 4$ должно быть кратно 8.

Противоречие.

Следовательно, требуемого многочлена $p(x)$ не существует.

7. Требуется «убрать» корни. Как?

Понятно, что надо возвести в квадрат, но … не сразу.

Сначала, заметим, что

$$\sqrt{3f(x)} \geq \sqrt{3f(x) - f(3x)} + 3 \geq 3 \text{, то есть } \sqrt{3f(x)} \geq 3 ,$$

Ключевая идея: если, в сумме одно слагаемое сделать меньше, то сумма станет меньше.

Следовательно, $f(x) \geq 3$.

8. Можно решать методом неопределенных коэффициентов (как в задаче 5). А можно иначе. Главное свойство квадрата — неотрицательность. А если это не квадрат, то достаточно найти x при котором значение $f(x)$ отрицательно...

Подставим $x = -1$. $f(-1) = -1 < 0$.

Следовательно, $f(x)$ нельзя представить в виде квадрата многочлена.

9. Ответ: $a = 3$, $a = -3\frac{2}{3}$.

Идея: количество решений, как правило, можно узнать из графика.

Преобразуем систему неравенств так, чтобы получились знакомые уравнения (неравенства).

Получим систему из двух кругов:

$$(x-3)^2+(y+2)^2 \le a^2 \text{ и } (x+5)^2+(y-4)^2 \le (2a+1)^2 .$$

Решение единственно, когда круги касаются, то есть расстояние между центрами $(3;-2)$ и $(-5;4)$ равно сумме радиусов $|a|$ и $|2a+1|$, то есть $|a|+|2a+1|=10$.

10. Понятно, что уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x: $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$.

Что дальше? Можно посмотреть на дискриминант (решение 1):

$$D/4=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca).$$

$$D/4=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \ge 0 .$$

Последнее неравенство можно доказать несколькими способами. Самый простой — выделить квадраты:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Решение 2. Можно проще. Достаточно показать, что при каком-нибудь значении x, соответствующая точка графика расположена ниже оси абсцисс.

Обозначим: $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$.

$$f(a)=(a-b)(a-c),\ f(b)=(b-c)(b-a),\ f(c)=(c-a)(c-b).$$

Дальше можно по-разному. Можно организовать перебор и рассмотреть все шесть случаев взаимного расположения чисел a, b, c на координатной прямой. Например, в случае, когда $a>b>c$ значение $f(b)=(b-c)(b-a)$ отрицательно, так как первый множитель положителен, а второй отрицателен.

При этом важно обратить внимание учащихся, что рассматривать все шесть случаев необязательно ввиду симметрии относительно переменных a, b, c.

Можно совсем коротко: перемножить все три выражения:

$$f(a)f(b)f(c)=-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<0 .$$

Понятно, что раз произведение трех чисел отрицательно. то хотя бы один множитель отрицателен.

12. Обсуждение.

Не знаем что делать — будем хоть, что-нибудь делать.

Раскроем скобки:

$$x+y+z=2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}+2\sqrt{z-2}\,.$$

Сгруппируем похожие слагаемые:

$$x-2\sqrt{x}+y-2\sqrt{y-1}+z-2\sqrt{z-2}=0\,.$$

Первым двум слагаемым явно «не хватает» 1.

Добавим (и не забудем отнять):

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2-1+y-2\sqrt{y-1}+z-2\sqrt{z-2}=0\,.$$

Далее действуем аналогично:

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2-1+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2+1=0\,,$$

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{z-2}-1\right)^2=0\,.$$

Осталось решить систему:

$$\sqrt{x}-1=0\,,\ \sqrt{y+1}-1=0\,,\ \sqrt{z-2}-1=0$$

Ответ: $(1;\,0;\,3)$

13. Ответ: $(0;\,0;\,0)$, $(0{,}5;\,0{,}5;\,0{,}5)$, $(-0{,}5;\,-0{,}5;\,0{,}–5)$

Сначала докажем, что $x=y=z$.

Преобразуем систему уравнений:

$$x+y=\sqrt[3]{z}\,,\ y+z=\sqrt[3]{x}\,,\ z+x=\sqrt[3]{y}\,.$$

Заметим, что $x-z=\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{x}$, значит, $x=z$. Если предположить, например, что $x>z$, то правая часть уравнения положительна, а левая часть - отрицательна. Противоречие.

Остальное аналогично. Осталось решить $8x^3=x$.

14. Ответ: $\left[-2\sqrt{2};\,2\sqrt{2}\right]$.

Решение аналогично задаче 3.

Выясним при каких значениях параметра система уравнений $x^2+xy+4y^2=3$ и $x+3y=a$ имеет решения. Выразим x из второго уравнения и подставим в первое.

Получим: $x=a-3y$, $(a-3y)^2+(a-3y)y+4y^2=3$.

Второе уравнение равносильно: $10y^2-5ay+a^2-3=0$.

Оно имеет корни, если $D=25a^2-40a^2+120\geq 0$.

Иначе: $120-15a^2\geq 0$, $8-a^2\geq 0$, $2\sqrt{2}\geq |a|$.

Литература

1. *Галкин В.Я., Сычугов Д.Ю., Хорошилова Е.В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. — М.:, факультет ВМиК МГУ, 2002, — 180 с.*

2. *Игудисман О.С. Математика на устном экзамене. — М.: Рольф: Айрис-пресс, 1999, — 256 с.*

3. *Федотов М.В., Хайлов Е.Н. Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. Задачи устного экзамена по математике. — М.: факультет ВМиК МГУ, 2000, — 132 с.*

4. *Фалин Г.И., Фалин А.И.***,** Тригонометрия на вступительных экзаменах в МГУ. *— М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2007, — 327 с.*

5. *Фалин Г.И., Фалин А.И.***,** Алгебра на вступительных экзаменах в МГУ. *— М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2006, — 367 с.*

Содержание