ТРУДЫ ПО *не*математике

КНИГА

2

Владимир Андреевич Успенский

ТРУДЫ ПО *не*МАТЕМАТИКЕ

Второе издание,
исправленное и дополненное

В пяти книгах

МОСКВА

ОБЪЕДИНЁННОЕ ГУМАНИТАРНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФОНД «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ»

Владимир Андреевич Успенский

ТРУДЫ ПО *не*МАТЕМАТИКЕ

Книга вторая

ФИЛОСОФИЯ

с приложением трёх писем Н. Л. Трауберг к автору

МОСКВА

ОБЪЕДИНЁННОЕ ГУМАНИТАРНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФОНД «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ»

2014

УДК 80
ББК 72.3
У77

Успенский В. А.

У77 Труды по нематематике / В. А. Успенский. — 2-е изд., испр. и доп. : В 5 кн. — М. : ОГИ : Фонд «Математические этюды», 2012— .

ISBN 978-5-94282-674-1

Кн. 2 : Философия (с приложением трёх писем Н. Л. Трауберг к автору). — 2014. — 566 с.

ISBN 978-5-94282-676-5

«Труды по нематематике» в пяти книгах содержат нематематические сочинения профессора математики В. А. Успенского, заведующего кафедрой математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета Московского университета.

Во вторую книгу «Философия» включены философские сочинения автора при достаточно широком понимании термина «философия». Читатель найдёт здесь статьи, затрагивающие как логику Аристотеля и семантику Фреге, так и философию математики (включая философию её преподавания), и этику, и социологию, и кибернетику. В качестве приложений помещены написанная специально для этой книги статья А. Х. Шеня о философии и три письма Н. Л. Трауберг к автору.

УДК 80
ББК 72.3

ISBN 978-5-94282-674-1
ISBN 978-5-94282-676-5 (кн. 2)

© В. А. Успенский, 2014
© ОГИ, 2014
© Фонд «Математические этюды», 2014

Cognosco ergo sum[1].

Наука умеет много ги́тик.

Ключ к карточному фокусу.

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий. *Козьма Прутков.*

Усвоение преподанного зависит от привычек слушателя; какие у нас сложились привычки, такого изложения мы и требуем, и то, что говорят против обыкновения, кажется неподходящим, а из-за непривычности — более непонятным и чуждым, ибо привычное более понятно. А какую силу имеет привычное, показывают законы, в которых то, что выражено в форме мифов и по-детски просто, благодаря привычке имеет большую силу, нежели знание самих законов. Одни не воспринимают преподанного, если излагают математически, другие — если не приводят примеров, третьи требуют, чтобы приводилось свидетельство поэта. И одни хотят, чтобы всё излагалось точно, а других точность тяготит или потому, что они не в состоянии связать [одно с другим], или потому, что считают точность мелочностью. В самом деле, есть у точности что-то такое, из-за чего она как в делах, так и в рассуждениях некоторым кажется низменной. Поэтому надо приучиться к тому, как воспринимать каждый предмет, ибо нелепо в одно и то же время искать и знание, и способ его усвоения. Между тем нелегко достигнуть даже и одного из них.

А математической точности нужно требовать не для всех предметов, а лишь для нематериальных. Вот почему этот способ не подходит для рассуждающего о природе, ибо вся природа, можно сказать, материальна.

Аристотель. Метафизика, книга 2, глава 3.

---

[1] Познаю́, следовательно существую (лат.).

Оглавление

Предисловие к книге 2 «Философия» 15

Из предуведомления от автора [к первому изданию «Трудов по НЕматематике»] 19

I. Как возникло это издание 19
II. Почему у этого издания такое название 21
III. Что входит в состав этого издания 22
IV. Как устроено это издание 24

Гуманитарное и математическое: преодоление барьера . . . 25

Публикуется с изменением названия и с небольшой редактурой по тексту брошюры: Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. — 48 с. Первая, журнальная публикация: Математическое и гуманитарное: преодоление барьера // Знамя. — 2007. — № 12. — С. 165—173.

I	25	VII	39	XIII	50
II	26	VIII	42	XIV	55
III	29	IX	42	XV	56
IV	31	X	43	XVI	57
V	34	XI	46	Эпилог . .	59
VI	37	XII	48	Приложение	61

Из брошюры «Простейшие примеры математических доказательств» 65

Простейшие примеры математических доказательств. — (Библиотека «Математическое просвещение»; Вып. 34). — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. — 56 с.

Математика и доказательства 65
Индукция 70

Доказательства методом математической индукции (70). Полная индукция и неполная индукция (73).

Два аксиоматических метода — неформальный и формальный 75

Неформальный аксиоматический метод (75). Формальный аксиоматический метод (78).

Теорема Гёделя 80

Что такое доказательство? 82

Начальный параграф статьи: Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней // Математическое просвещение. — Третья серия. — Вып. 15. — М.: МЦНМО, 2011. — С. 35—39.

Математика в системе наук 88

Интервью взято 2 марта 2009 года. Интервьюер — Л. Ф. Борусяк. Опубликовано на сайте «Полит.ру» http://polit.ru/article/2009/08/06/videon_lb_uspensky/print/.

Параллельные прямые в мифологии, в реальности и в математике 109

Журнальная публикация: Новый мир. — 2007. — № 12. — С. 131—139 (в качестве гл. 8 статьи автора «Апология математики, или О математике как части духовной культуры»). Полная публикация в книге: *В. А. Успенский*. Апология математики: Сборник статей. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 137—164 (в качестве гл. 8 статьи «Апология математики»).

Массовые задачи и алгоритмы 129

Журнальная публикация: Новый мир. — 2007. — № 11. — С. 146—149 (в качестве гл. 6 статьи «Апология математики, или О математике как части духовной культуры»). Полная публикация в книге: *В. А. Успенский*. Апология математики: Сборник статей. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 109—115 (в качестве гл. 6 статьи «Апология математики»).

Ватсон против Холмса 135

Журнальная публикация: Новый мир. — 2007. — № 11. — С. 127—131 (в качестве гл. 1 статьи «Апология математики, или О математике, как о части духовной культуры»). Полная публикация в книге: *В. А. Успенский*. Апология математики: Сборник статей. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 42—52 (в качестве гл. 1 статьи «Апология математики»).

Примечания 142

Из статьи «Закон исключённого третьего и закон двойного отрицания» 146

Полностью статья опубликована в качестве комментария к циклу работ А. Н. Колмогорова по интуиционистской логике в книге: *А. Н. Колмогоров*. Избранные труды: В 6 т. — Т. 1: Математика и механика / Сост. В. М. Тихомиров; Отв. ред. А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 2005. — С. 445—454. (Соавтор: Валерий Егорович Плиско.)

I. Колмогоров и конструктивизм 146
II. Общая логика суждений 149

III. Частная логика суждений 151
IV. Аксиома двойного отрицания как диагностическая формула 152
V. Границы применимости закона исключённого третьего 154
Литература 155

Разговор о книге Е. Ф. Сабурова «Власть отвратительна» . 157

Разговор состоялся 30 июля 2002 года. Собеседники: В. Н. Некрасов, В. А. Успенский, М. Б. Ходорковский. Опубликовано в интернет-проекте «Русский журнал» http://old.russ.ru/ist_sovr/20021017_stol.html. А также в книге *Е. Ф. Сабуров*. Власть отвратительна. — М.: ГУ ВШЭ, 2003. — С. 136—158.

Предисловие автора настоящей книги 157
Примечания 174

Из книги «Что такое аксиоматический метод?» 179

В. А. Успенский. Что такое аксиоматический метод?. — 2-е изд., испр. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 95 с.

§ 1. Что такое аксиомы 179
§ 2. Аксиомы Евклида 182
§ 3. Современный подход к аксиоматизации геометрии: аксиоматика Гильберта 186
§ 15. Аксиомы метрики и аксиомы меры 190
Заключительные замечания 195
Добавление от декабря 2013 года 196

Колмогоров 199

Опубликовано в книге: Новая философская энциклопедия: В 4 т. — Т. 2. — М.: Мысль, 2001. — С. 272—274.

Сочинения Колмогорова, имеющие философскую составляющую 203

Витгенштейн и основания математики 206

Опубликовано в журнале: Вопросы философии. — 1998. — № 5. — С. 85—97.

1 206
2 206
3 208
4 208
5 209
6 210
7 211
8 212
9 213
10 215
11 216
12 218
13 219
14 221
15 223
16 224
Примечания 225
Литература 226

On respecting the "otherness" of others 227

Без названия (но с указанием автора: Vladimir A. Uspensky) опубликовано в сборнике: Education for Global Citizenship in the 21st Century: Explorations by the USSR and the USA: Proceedings of a Soviet/American Conference on Education (October 31—November 2, 1989) organized by the College of Education, Mankato State University, Mankato, Minnesota / Edited by Elaine M. Lilly. — Mankato, Minnesota: Mankato State University, 1990. — P. 30—34.

Примечания 230

Семь размышлений на темы философии математики 231

Опубликовано в книге: Закономерности развития современной математики: методологические аспекты / Отв. ред. М. И. Панов. — М.: Наука, 1987. — С. 106—155.

1. Действительно ли в математике всё определяется и доказывается? 231
2. Можно ли определить понятие натурального числа? . 235
3. Можно ли определить Натуральный Ряд (с прописной буквы)? 237
4. Можно ли аксиоматически определить понятие натурального ряда (со строчной буквы)? 241
5. «Можно ли доказать, что Великую теорему Ферма нельзя ни доказать, ни опровергнуть?» 256
6. Что такое доказательство? 265
7. Можно ли сделать математику понятной? 281

Литература 284

Математическое приложение. Проблема континуума и языки второго порядка 287

Математическая логика в вычислительных науках и вычислительной практике 290

Опубликовано в журнале: Вестник Академии наук СССР. — 1986. — № 7. — С. 93—103. (Соавтор: Алексей Львович Семёнов.)

Общие концепции, понятия, теоремы 292
Языки 299
Конкретные алгоритмы и теоремы 301
Перспективы 304

Отзыв о докторской диссертации Зураба Николаевича Микеладзе 306

Защита диссертации «Логическое учение Аристотеля с точки зрения современной формальной логики» состоялась 4 марта 1985 года в Институте философии Академии наук СССР (точнее — в Специализированном совете Д 002.29.03 при этом Институте). Учёная степень доктора философских наук присуждена З. Н. Микеладзе 13 декабря 1985 года Высшей аттестационной комиссией при Совете министров СССР.

Нестандартный анализ 318

Опубликовано в журнале: Наука и жизнь. — 1984. — № 1. — С. 45—50.

Что такое бесконечно малая величина? 318
Как построить гипердействительное число? 321
Несколько слов об эквивалентности 323
Что такое число? 324
Что такое гипердействительное число? 326
История и перспективы нестандартного анализа . . . 329

Добавление от февраля 2001 года 331

Два параграфа из книги: *В. А. Успенский*. Что такое нестандартный анализ?. — М.: Физматлит, 1997. — 128 с.

§ 1. Несколько примеров 331
§ 14. Существуют ли гипердействительные числа «на самом деле»? 331

Что такое парадокс? 337

Опубликовано в книге: Finitis duodecim lustris: Сборник статей к 60-летию проф. Ю. М. Лотмана. — Таллин: Ээсти раамат, 1982. — С. 152—162.

1. Тезис 337
2. Антитезис 339
3. Синтез 340

Примечания 341

К публикации статьи Г. Фреге «Смысл и денотат» 342

Под названием «От редакции» опубликовано в продолжающемся сборнике: Семиотика и информатика. — Вып. 8. — М.: ВИНИТИ, 1977. — С. 179—180. Повторная публикация: Семиотика и информатика. — Вып. 35. — М.: Русские словари, 1997. — С. 351—352.

Послесловие от февраля 2001 года 344

Предисловие к книге Е. Я. Гика «Математика на шахматной доске» 345

Опубликовано в книге: *Е. Я. Гик.* Математика на шахматной доске. — М.: Наука, 1976. — С. 3—8.

Примечания 350

Предисловие к сборнику переводов «Математика в современном мире» 351

Опубликовано в книге: Математика в современном мире / Пер. с английского Н. Г. Рычковой. — М.: Мир, 1967. — С. 5—11.

К преподаванию математики в начальной школе 360

Опубликовано в журнале: Математика в школе. — 1966. — № 2. — С. 36—39.

Примечания 367

Что значит решить задачу? 368

Статья представляет собою первые два параграфа брошюры: *В. А. Успенский*. Треугольник Паскаля. — М.: Физматлит, 1966. — (Популярные лекции по математике; Вып. 43).

§ 1. Задача из VIII олимпиады 368
§ 2. Что значит решить задачу 371

Интуиционистская логика в трудах А. Н. Колмогорова . . . 375

Под названием «Интуиционистская логика» опубликовано в качестве комментария к циклу работ А. Н. Колмогорова по интуиционистской логике в книге: *А. Н. Колмогоров*. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1965. — С. 394—404. Повторная публикация в книге: *А. Н. Колмогоров*. Избранные труды: В 6 т. — Т. 1. — М.: Наука, 2005. — С. 435—444. (Соавтор: Валерий Егорович Плиско.)

Предварение 375 | III . . . . 381 | V 387
I . . . . . 377 | IV . . . . 383 | Литература 388
II 379

Предисловие к книге Ю. А. Шихановича «Введение в современную математику» 391

Опубликовано в книге: *Ю. А. Шиханович*. Введение в современную математику (начальные понятия). — М.: Физматлит, 1965. — С. 5—12. Перепечатано в книге: *В. А. Успенский*. Апология математики. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 283—298.

I . . 391 | II . . 392 | III . . 395 | IV . . 396

О понятиях 'множество', 'кортеж', 'соответствие', 'функция', 'отношение' 398

Опубликовано в книге: *Ю. А. Шиханович*. Введение в современную математику. — М.: Физматлит, 1965. — С. 12—24.

Множество 398
Кортеж 400
Соответствие 401
Функция 403
Отношение 408

К проблематике теории научной информации 410

Опубликовано в журнале: Научно-техническая информация. — 1963. — № 3. — С. 17—20. (Соавтор: Юлий Анатольевич Шрейдер.)

Абстракция актуальной бесконечности 419

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 16.

Гёдель 421

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 338. (Соавтор: Софья Александровна Яновская.)

Гомоморфизм 423

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 387.

От редактора перевода книги А. Чёрча «Введение в математическую логику» 425

Опубликовано в книге: *А. Чёрч.* Введение в математическую логику. — Т. 1. — М.: ИЛ, 1960. — С. 5—11.

I . . 425 | II . . 427 | III . . 428 | IV . . 430

Алгоритм 433

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 38—42.

Значение алгоритмов 433
Примеры алгоритмов 435
Основные черты алгоритмов 437
Основные абстракции теории алгоритмов 438
Основные понятия теории алгоритмов 441
Связь теории алгоритмов с логикой 443
Проблемы разрешения 447
Неразрешимые массовые проблемы 447
Сводимость 448
Уточнения понятия алгоритма и сопутствующих понятий 449
Литература 451

К проблеме построения машинного языка для информационной машины 454

Опубликовано в продолжающемся сборнике: Проблемы кибернетики / Под ред. А. А. Ляпунова. — Вып. 2. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 39—50. А также под названием «Логико-математические проблемы создания информационного языка для информационной машины» в издании: Сообщения лаборатории электромоделирования. — 1960. — № 1. — С. 5—28.

§ 1 . . . . 454 | § 4 . . . . 465 | Примечания 470
§ 2 . . . . 458 | § 5 . . . . 468 | Литература 471
§ 3 . . . . 463 | § 6 469

Винер 473

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 59. (Соавторы: Вячеслав Всеволодович Ива́нов, Михаил Константинович Поливанов.)

Метатеория 475

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 198. (Соавтор: Владимир Соломонович Чернявский.)

Семантика (в логике) 478

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 266—267. (Соавторы: Делир Гасемович Лахути, Виктор Константинович Финн.)

Синтаксис (в логике) 483

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 269—270. (Соавторы: Делир Гасемович Лахути, Виктор Константинович Финн, Владимир Соломонович Чернявский, Юрий Александрович Шиханович.)

Тезисы о кибернетике с комментариями 487

Написано в январе 1957 года. Опубликовано в книге: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 137—142. (Соавторы: Вячеслав Всеволодович Ива́нов, Михаил Константинович Поливанов.)

1. Определение кибернетики 487
2. Управление 488
3. Связь 488
4. Информация 489
5. Организованные системы 490
6. Место кибернетики в системе наук 490
7. История кибернетики 491
8. Роль кибернетики в убывании энтропии 492

Послесловие от февраля 2001 года 493

Примечания 494

Приложение 1. *А. Н. Колмогоров*. Тезисы о кибернетике 495

Опубликовано в книге: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 142—145.

Приложение 2. *А. Н. Колмогоров*. Автоматы и жизнь . 501

Опубликовано в бюллетене: Машинный перевод и прикладная лингвистика. — 1961. — № 6. — С. 3—8.

Приложение 3. Письмо Колмогорова автору настоящей книги, написанное им от руки 506

Опубликовано в книге: Колмогоров в воспоминаниях учеников. — М.: МЦНМО, 2006. — С. 302—303.

Экспансия математики **508**

Опубликовано в журнале: Вокруг света. — 2011. — № 7 (2850), июль. — С. 128—132. Интервью дано 2 декабря 2010 года. Беседовала А. Д. Нарышкина.

Приложение 1 к книге 2 «Философия».
***А. Х. Шень.* О непостижимой (не)эффективности философии** **514**

Марксизм-ленинизм в СССР 514
Загадка «Материализма и эмпириокритицизма» 517
Философы о науке 519
Гегель (519). Другие философы (523).
Загадка философии 526
Примечания (В. А. Успенского) 531

Приложение 2 к книге 2 «Философия».
Три письма Натальи Леонидовны Трауберг автору настоящей книги **533**

Предуведомление 533

[Первое] письмо В. А. Успенскому (от 25.08.1998) 536

Опубликовано в журнале: Неприкосновенный запас. — 1999. — № 1 (3). — С. 40—41. Перепечатано в книге: *Наталья Трауберг*. Невидимая кошка: Сборник статей. — М.; СПб.: Летний сад, 2006. — С. 31—35.

От публикатора 536
Примечания 539

Второе письмо В. А. Успенскому (от 24.10.1998) 542

Под названием «Ещё одно письмо В. А. Успенскому» опубликовано в журнале: Неприкосновенный запас. — 1999. — № 3 (5). Перепечатано в книге: *Наталья Трауберг*. Невидимая кошка: Сборник статей. — М.; СПб.: Летний сад, 2006. — С. 16—20.

Послесловие публикатора 544

Третье письмо В. А. Успенскому (от 23.10.1999) 546

Опубликовано в журнале: Неприкосновенный запас. — 2000. — № 2 (10). — С. 86—89. Перепечатано в книге: *Наталья Трауберг*. Невидимая кошка: Сборник статей. — М.; СПб.: Летний сад, 2006. — С. 36—42.

Указатель имён **551**

Предисловие к книге 2 «Философия»

Первое издание «Трудов по НЕматематике», осуществлённое издательством ОГИ и подписанное к печати 17 июня 2002 года, материализовалось в виде тысячи экземпляров двухтомника, появившихся в конце августа 2002 года. Появилось оно и в Интернете: ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/uspbook/; http://www.mccme.ru/free-books/usp.htm; http://www.math.ru/lib/book/pdf/shen/usp/usp-all.pdf.

Несмотря на совершенную нереальность, довольно быстро возникла мечта о втором издании. Для второго издания наличествовали по крайней мере три причины. Во-первых, сразу стали поступать сигналы о присутствии в тексте не только опечаток, но и неточностей и даже ошибок. Во-вторых, у меня стали появляться новые публикации, по своей тематике могущие быть включёнными в названные «Труды». Наконец, в-третьих, отчасти на бумаге, отчасти в компьютерной памяти, начали накапливаться записи, в которых я пытался фиксировать некоторые соображения о том, какими новыми фразами, абзацами, а то и параграфами мог бы быть пополнен текст первого издания. И в компьютере, и тем более на разрозненных клочках бумаги эти записи хранились в большом беспорядке, что делало мечту о новом издании практически неосуществимой.

Положение казалось полностью безнадёжным, пока его не переломил Виталий Дмитриевич Арнольд, заместитель директора Московского центра непрерывного математического образования. Летом 2010 года он дал импульс тому, «чтоб сказку сделать былью». Его инициативу подхватил, а весной 2011 года окончательно взял дело в свои руки Николай Николаевич Андреев, заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института имени В. А. Стеклова РАН и лауреат премии Президента Российской Федерации 2010 года для молодых учёных, присуждённой ему, в частности, за высокие результаты в популяризации и распространении научных знаний. Он привлёк к работе Никиту Михайловича Панюнина, своего друга и коллегу по лаборатории, и Михаила Юрьевича Панова, глубокого знатока тонкостей компьютерной вёрстки и типографского дела. Оба работали самоотверженно, и мне приятно поблагодарить их за усердие и трудолюбие.

В результате обсуждений было решено изменить композицию издания. Первое издание, хотя и состояло из двух томов, имело единую пагинацию, т.е. нумерацию страниц; разбиение на томы было вызвано причинами чисто техническими. Тематически же издание состояло из шести частей и одного Приложения. Во втором издании одна из частей, а именно «Избранные предисловия», ликвидирована, а составлявшие её статьи разбросаны по другим частям; Приложение, каковое составляли «Семиотические послания» А. Н. Колмогорова, отнесено теперь, по его тематической принадлежности, в книгу 4 «Филология».

Второе издание должно состоять из пяти книг, соответствующих оставшимся пяти частям двухтомника, и каждая книга будет иметь собственную пагинацию. Книги предполагается выпускать в свет не в порядке их номеров, а по мере готовности. Первыми вышли книга 4 «Филология», в которую вошла одна из статей части «Языкознание», и книга 3 «Языкознание», в которую вошла одна из статей части «Воспоминания и наблюдения»; третьей выходит настоящая книга 2 «Философия». Всевозможные добавки к тексту первого издания подразделяются на два типа. К первому относятся те фрагменты, которые могли бы присутствовать и в первом издании; внесение таковых в текст никак не помечается. Второй тип образуют фрагменты, составленные под влиянием более поздних событий и потому в первом издании невозможные; эти фрагменты заключаются между двумя семафорами: открывающим «●●▶» и закрывающим «◀●●» (однако статьи, целиком появившиеся после первого издания и включённые во второе, семафорами не помечаются). Значение семафоров «●▶» и «◀●» разъясняется в разделе III Предуведомления, помещённого сразу вслед за настоящим Предисловием. Встречающиеся в тексте белые цифры внутри чёрных квадратов означают ссылки на затекстовые примечания к данной статье. И затекстовые примечания, и список литературы помещаются в конце каждой статьи.

Обратный хронологический порядок, в котором располагаются статьи настоящей книги, объясняется тем, что некоторые ранние статьи (такие, как «К проблеме построения машинного языка...» 1957 года или «К проблематике теории научной информации» 1963 года) если и представляют какой-то интерес, то, пожалуй, лишь для исследователей соответствующего периода истории науки в СССР.

В настоящую книгу 2 включены сочинения автора, имеющие прямое или косвенное отношение к философии. К имеющим прямое отношение можно, с той или иной долей условности, отнести статьи по философии математики и статьи по логике (при попытке соблюсти зыбкую грань отделяющую логику как часть философии от

математической логики как части математики). Конечно, сочинителю и самому хотелось бы иметь в своём портфеле что-нибудь более возвышенное, что-нибудь такое, в чём звучала бы *музы́ка сфер*, но такового, увы, не имеется. Разве что в статье про Витгенштейна её предмет слегка звучит (или нам кажется, что звучит) такой музыкой. К философии у автора сложное отношение.

С одной стороны, в его студенческие годы в Московском университете, пришедшиеся на последнее пятилетие сталинизма (1947—1952), Философский факультет МГУ являл собою центр мракобесия. Да и вся советская философия была, в духе ленинской риторики (чтобы не сказать — демагогии), нацелена на разоблачения. Разоблачались квантовая физика и теория относительности, теория резонанса в химии, кибернетика и молекулярная генетика. Всюду виделся идеализм, а то и *сползание к фидеизму и поповщине*. Замечательно, что идеалистами, в частности, были заклеймены те, кто отстаивал ген как материальный носитель наследственности.

С другой стороны, всегда было ясно, что есть и другая, отличная от марксистско-ленинской, философия. И действительно, в молодости я с интересом читал Канта, с наслаждением Платона и с восторгом Спенсера.

С третьей стороны, тексты некоторых философов, признаваемых великими или даже величайшими, оказывались недоступны моему пониманию. Так, я честно пытался пробиться сквозь тексты Гегеля, Хайдеггера и Шпета[1], но так и не смог их понять; они казались написанными на каком-то неизвестном мне загадочном языке.

С четвёртой стороны, я всегда был и есть противник самого́ существования в Университете Философского факультета для обучения на нём выпускников средней школы. Как-то, очень давно, когда Философский факультет ещё не переехал на Воробьёвы горы и находился на Моховой, меня пригласили выступить на его Учёном совете. Это было время философской растерянности, когда вдруг в естественных науках разрешили почти всё и разоблачать стало нечего; конечно, остались ещё, в качестве жертвы, науки гуманитарные, но там так не развернёшься, поскольку не работает библия разоблачения: ленинский «Материализм и эмпириокритицизм». Вот в рамках этой растерянности пригласили и меня. Уж не помню, что

[1] Читать Шпета я считал себя морально обязанным, так как с некоторыми из шпетидов был хорошо знаком. А когда я пытался читать Гегеля, я ещё не знал, что это он, с его разоблачением законов механики, в частности небесной механики (см. с. 519—522), был предшественником и учителем Ленина по части разоблачительства.

я там говорил — наверное, какие-нибудь банальности, но одну вещь я помню. Я сказал, что если бы мне дали власть, я закрыл бы Философский факультет, оставив лишь аспирантуру по философии; в эту аспирантуру могли бы поступать те, кто окончил другие факультеты Университета — причём окончил достаточно хорошо: желательно с отличием и уж во всяком случае без троек. Тогда меня никто не поддержал, полагаю, что и сегодня из членов Учёного совета Философского факультета не поддержал бы никто. Хотя проблема осталась актуальной. Несколько лет назад, когда Философский факультет уже переехал в кампус на Воробьёвых горах и разместился там на 11-м этаже Первого гуманитарного корпуса, но ещё не совершил второго переезда на так называемые «Новые территории» по Ломоносовскому проспекту, я ехал в лифте на 9-й этаж названного корпуса. В том же лифте на свой родной 11-й этаж ехали две девицы. Они говорили, сильно растягивая гласные (их речь доставила бы удовольствие профессору фонетики Генри Хиггинсу). «То-о-нь, — спросила одна из них ленивым голосом, — ты на а-антологию пойдё-ёшь?». Оставим читателя гадать об ответе второй девицы на этот вопрос.

Поскольку нам нечего сказать о *музы́ке сфер*, поговорим о близкой к ней по смыслу (а то и имеющей прямо противоположный смысл) *разноголосице миров*. Разноголосица в нашем мире проявляется, в том числе, в том, что «Орфоэпический словарь русского языка»[2] разрешает оба произношения: *околе́сица* и *околёсица*. Имея в виду указанное разрешение, закончим предисловие девятистишием:

И правдой входит в наш мирок
Миров разноголосица.
Борис Пастернак

Что есть миров разноголосица?
Решать тебе. Ответов — два:
Бессвязных звуков околёсица
И откровенье божества.

Себя не мысля без оков,
К альтернативе не готов,
Ум возмущается и бесится:
Признать не хочет околесицу,
Понять не может речь богов.

16 мая 2014 года.

[2] Орфоэпический словарь русского языка: Произношение, ударение, грамматические формы / С. Н. Борунова, В. Л. Воронцова, Н. А. Еськова; Под ред. Р. И. Аванесова. — 2-е изд., стереотип. — М.: Русский Язык, 1985.

Из предуведомления от автора [к первому изданию «Трудов по НЕматематике»]

Настоящее предуведомление имеет целью ответить на четыре вопроса:

- как возникла эта книга?
- почему у неё такое название?
- что входит в её состав?
- каково её устройство?

Ответам на эти вопросы и посвящены четыре соответственных раздела предуведомления.

I. Как возникла эта книга

Настоящее издание придумала Катя (Екатерина Владимировна) Рахилина, и если бы не она, его бы не было. Данное заявление следует рассматривать как недостойную попытку снять с себя если не всю ответственность, то хотя бы основную её часть.

Я никогда не осмелился бы выпускать собрание собственных сочинений, да у меня и в мыслях такого не было. Однако Катя пришла ко мне весной 2000 года и заговорила об этом как о деле, для неё очевидном и решённом. Я сперва сильно удивился, а потом сопротивлялся, но уже не так сильно. Не знаю, должен ли я благодарить её за эту идею, в правильности каковой у меня и сейчас нет уверенности. Но за что я ей благодарен бесконечно, это за то, что она взяла на себя все хлопоты по организации издания.

Именно Катя (Екатерина Владимировна) Рахилина написала и подписала своим именем заявку в Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ) на получение издательского гранта. Таким образом, она стала руководителем проекта (в котором я не являюсь даже участником, так что от меня потребовалось только определить состав издания и предоставить необходимые материалы: рукописи, книги, журналы, оттиски, ксерокопии); она же взяла на себя все переговоры. Не менее важно и то, что Катя оказывала мне необходимую моральную поддержку, в которой я временами остро нуждался, и не позволяла сомневаться в правильности затеянного.

Всякий проект нуждается в организационном центре. Для данного проекта таким центром согласился стать Научный совет Российской академии наук по комплексной проблеме «Кибернетика», а основную ответственность и всю реальную работу взял на себя заместитель председателя Научного совета Валерий Арамович Варданян.

В середине сентября 2000 года обширная папка с рукописями, оттисками и ксерокопиями была готова и сдана в РФФИ. А 22 декабря 2000 года мне были вручены, в качестве сюрприза, два держателя для бумаг, расписанных Катиной дочерью Надей Плунгян и содержащие в общей сложности 1027 страниц компьютерной распечатки. Эти страницы, изготовленные из того разношёрстного материала, что был сложен в указанную папку, образовывали предварительную версию оригинал-макета издания. Я не мог поверить своим глазам: ведь для получения оригинал-макета надо было многое отсканировать, затем свести всё воедино, набрать и отпечатать.

Выяснилось, что Катя поделилась своим замыслом с Сашей (Александром Ханевичем) Шенем, который не только поддержал её проект, но и согласился принять на себя ответственность за всю техническую часть операции. Он, в свою очередь, привлёк к работе Аню (Анну Юрьевну) Зарубину, которая под его руководством осуществила — и притом в очень сжатые сроки — сканирование и латеховский набор и изготовила упомянутую выше предварительную версию оригинал-макета.

Со второй половины января 2001 года я начал редактировать подаренные мне 1027 страниц, внося изменения и дополнения, иногда довольно значительные. С мая того же года эти изменения и дополнения стали поступать к Максиму (Максиму Александровичу) Ушакову и Вите (Виктору Валерьевичу) Шувалову, которые вносили их в текст. С октября эту работу продолжил Саша Шень. Их усилиями к марту 2002 года был создан чистовой оригинал-макет.

Оказалось, что количество упоминаемых в книге имён превышает две тысячи; было решено, что в этих условиях необходим именной указатель. Труд по его созданию взяла на себя Аня (Анна Владимировна) Шипунова. В процессе её работы над указателем обнаружилось много таких опечаток, выявить которые на предыдущих этапах было практически невозможно. Аня взяла на себя ответственность не только за их устранение, но и за потребовавшиеся в связи с этим изменения в чистовом макете ⟨и, тем самым, за возможные новые ошибки — *А. Шипунова*⟩.

Созданию доброжелательной атмосферы, в которой проходили заключительные фазы работы над книгой, немало способствовал главный редактор Объединённого гуманитарного издательства (ОГИ)

Евгений Владимирович Пермяков, чьи редкие человеческие и деловые качества я имел возможность оценить ещё в 1994 году, во время работы над Первым Лотмановским сборником.

II. Почему у этой книги такое название

Название «Труды по нематематике» придумал Владимир Александрович Плунгян. И в самом деле, здесь собраны нематематические сочинения автора. Но ведь эти сочинения также неастрономические и неботанические; так почему же книга не называется «Труды по неастрономии» или «Труды по неботанике»?

Объяснение таково. Провозглашение отрицания чего-нибудь всегда намекает на выделенную возможность существования отрицаемого. В данном случае название книги намекает на то, что её автор связан с математикой. Действительно, он получил математическое образование (окончил в 1952 году Московский университет по специальности «математика»), исполняет «математическую» должность (с 1993 года заведует кафедрой математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета того же Университета), и основные его сочинения принадлежат математике.

В предыдущей фразе не сказано, что автор — математик. И это не случайно. «Математик» — так, без каких-либо званий, написано на могиле глубочайшего, быть может, мыслителя из встреченных мною в жизни, — Петра Сергеевича Новикова. В применении к академику и лауреату, каким он был, это может звучать скромно. Но может и горделиво, как звучит для меня. Быть математиком трудно, и мне не кажется, что я справился с этой трудностью.

Я выбрал математическую профессию по двум причинам. Во-первых, математика влекла меня со школьных лет — с восьмого класса (с осени 1945 года) я посещал школьный математический кружок при Московском университете и участвовал в организованных Университетом математических олимпиадах. Во-вторых, окончив школу летом 1947 года, в сталинское время, я не видел для себя иной судьбы, кроме поступления на Механико-математический факультет Университета. Окажись я в ином времени или в ином месте, я скорее всего поступил бы на Юридический факультет и сделался бы юристом по конституционному или каноническому праву.

Но мне в моей «математической карьере» повезло и притом неслыханно повезло: один из трёх (наряду с Ломоносовым и Менделеевым) великих учёных России, Андрей Николаевич Колмогоров, принял меня в число своих учеников.

III. Что входит в состав этой книги

В 50-х годах прошлого века, по возвращении с индийских научных конференций, мои московские математические коллеги с изумлением рассказывали мне, что в Индии математику — при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные — относят к наукам гуманитарным. Хотя такое местоуказание математики, на мой взгляд, совершенно справедливо, я всё же буду придерживаться традиционного для отечественной культуры противопоставления. Такая отчасти беспринципная позиция позволяет так сформулировать критерии, по которым происходил отбор материала для данной книги: в книге собраны те сочинения её автора, которые он квалифицирует не как математические, а как гуманитарные («Гуманитарные очерки» — таков был первый, рабочий вариант названия). Сюда относятся очерки мемуарного и мемориального характера, избранные предисловия, статьи по философии, по языкознанию, по филологии. Как известно, термин «филология» может употребляться в двух смыслах: в широком, включающем в себя языкознание (как, скажем, в словосочетании «филологический факультет»), и в более узком, языкознание не включающем, а покрывающем собою литературоведение, текстологию и, вообще, исследование (в том числе интерпретацию) текстов. Не отдавая преимущества какому-либо из этих двух смыслов, здесь — по прагматическим соображениям — мы предпочитаем пользоваться смыслом более узким.

За тремя исключениями, все помещённые в книге сочинения автора были ранее опубликованы. Исключение составляют три текста: отзывы на диссертации А. А. Зализняка и З. Н. Микеладзе (из частей «Языкознание» и «Философия») и статья «Химико-филологический конфликт» (из части «Воспоминания и наблюдения») — но и они в своё время отчасти приобрели самостоятельное существование: первые два в 1965 году и в 1985 году соответственно поступили в диссертационные советы и далее в Высшую аттестационную комиссию, а документы, образующие основу третьего, были в 1963 году направлены надлежащим адресатам.

Для каждой статьи указан источник её первоначальной публикации; указание даётся на первой странице статьи, внизу. Однако слова «ранее опубликованы» и «источник первоначальной публикации» не следует понимать слишком буквально. Как уже отмечалось, при подготовке этой книги в составляющие её публикации автором внесены изменения, в том числе добавки в первоначальный текст. Одни из этих изменений оговариваются в тексте, другие — нет.

Положение вещей здесь таково.

Некоторые изменения следовало бы сделать ещё перед представлением той или иной статьи для первоначальной публикации; они хотя и не были своевременно сделаны (как правило, из-за нехватки времени), но могли быть тогда сделаны. Такого рода улучшающие изменения сделаны сейчас, они никак в тексте не выделены. Таким образом, ссылка на источник первоначальной публикации той или иной помещённой в книгу статьи (а она приводится, как уже говорилось, в подстрочном примечании на первой странице статьи) относится, вообще говоря, не к публикуемому в данном издании окончательному варианту статьи, а к её первоначальной редакции.

Совершенно другой род изменений составляют такие добавки в текст, которые и не могли быть сделаны при его первоначальной публикации — не могли потому, что они используют сведения, возникшие уже после этой публикации, или потому, что были при первоначальной публикации неуместны. Все такие добавки отмечены специальными семафорами: семафор «●▶» открывает позднейшую добавку, т. е. непосредственно ей предшествует, семафор «◀●» добавку закрывает, т. е. непосредственно за нею следует. Исключением из общего порядка служат позиции, добавленные в библиографические списки. Как правило, они никак не отмечены. Ведь и так ясно, что если для какой-то позиции из подобного списка указан год выхода в свет более поздний, нежели год первоначальной публикации той статьи данной книги, к которой этот список относится, то это значит, что эта позиция добавлена в список уже после указанной публикации.

К некоторым статьям сделаны приложения, добавления, послесловия; все они указаны в Оглавлении.

Раскрыв книгу, читатель может увидеть математический термин и даже символ и счесть себя обманутым. Изъяснимся поэтому несколько подробнее.

Прежде всего, некоторые понятия и термины, зародившиеся внутри математики, давно уже переросли её рамки и вошли в состав фундамента науки вообще. В частности, к ним принадлежат понятия и термины, перечисленные в заглавии очерка «О понятиях ‘множество’, ‘кортеж’, ‘соответствие’, ‘функция’, ‘отношение’», помещённого на с. 398—409[1].

Таким образом, не всякий текст, в котором встречаются математические термины и символы, есть математика. Так, философия

[1] В качестве иллюстрации к сказанному можно упомянуть, что пересказ одного из разделов названного очерка составляет содержание пункта 2 статьи известного лингвиста А. А. Холодовича «Залог. I: Определение. Исчисление».

математики образует один из разделов философии, поэтому статьи по философии математики, неизбежно содержащие такие термины и символы, следует относить не к математике, а к философии и, тем самым, к «нематематике». Дополнительным аргументом служит место первоначальной публикации. Если статья была опубликована в философском издании, это означает, во-первых, что она писалась в расчёте на достаточно широкую аудиторию и, во-вторых, что она была адекватно воспринята философской редколлегией. Поэтому, скажем, в книгу вошла статья «Витгенштейн и основания математики» (с. 206—226) и не вошла статья «Kolmogorov and mathematical logic»: первая, излагающая доклад, сделанный на культурологической конференции, была опубликована в философском журнале; вторая, излагающая доклад на математической конференции, писалась для математиков и была опубликована в журнале математическом. По сходной причине в книгу включена статья «Алгоритм» из «Философской энциклопедии» (с. 433—453), написанная с вниманием к философскому аспекту темы, и не включена статья с тем же названием из «Математической энциклопедии». К философии же (а именно, к той её области, которая называется философией образования) принадлежат и рассуждения о начальном преподавании математики дошкольникам и младшим школьникам.

IV. Как устроена эта книга

К некоторым статьям сделаны приложения, добавления, послесловия; все они указаны в Оглавлении.

●●➤ Устройство настоящего издания разъясняется выше на с. 16. ➤●●

15 мая 2002 года.

Гуманитарное и математическое: преодоление барьера

Поверх барьеров.

Борис Пастернак.

Уточняйте значения слов. Тогда человечество избавится от большей части своих заблуждений.

Рене Декарт.

«Да, мой голубчик, — ухо вянет:
Такую, право, порешь чушь!».
И в глазках крошечных проглянет
Математическая сушь.

Андрей Белый. Первое свидание.

Чем дальше, тем Белому становилось яснее, <...> что искусство и философия требуют примирения с точными знаниями — «иначе и жить нельзя». <...>. Недаром прежде, чем поступить на филологический факультет, он окончил математический.

Владислав Ходасевич.

I

Никто не знает, сохранят ли грядущие века и тысячелетия сегодняшнее деление наук на естественные и гуманитарные. Но даже и сегодня безоговорочное отнесение математики к естественным наукам вызывает серьёзные возражения. Естественнонаучная, прежде всего физическая, составляющая математики очевидна, и нередко приходится слышать, что математика — это часть физики, поскольку она, математика, описывает свойства внешнего, физического мира. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления и, тем самым, должны проходить по ведомству психологии. Не менее очевидна и логическая, приближающаяся к философской, составляющая математики. Скажем, знаменитую теорему Гёделя о неполноте, гласящую, что, какие бы способы доказывания ни установить, всегда найдётся истинное, но не доказуемое утверждение — причём даже среди утверждений о таких, казалось бы, простых объектах, как натуральные числа, — эту теорему с полным основанием можно считать теоремой теории познания.

Публикуется с изменением названия и с небольшой редактурой по тексту брошюры: Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. — 48 с. Первая, журнальная публикация: Математическое и гуманитарное: преодоление барьера // Знамя. — 2007. — № 12. — С. 165—173.

В 1950-х годах, по возвращении с индийских научных конференций, мои московские математические коллеги с изумлением рассказывали, что в Индии математику — при стандартном разделении наук на естественные и гуманитарные — относят к наукам гуманитарным. И на этих конференциях им приходилось сидеть не рядом с физиками, как они привыкли, а с искусствоведами. К великому сожалению, у людей гуманитарно-ориентированных математика нередко вызывает отторжение, а то и отвращение. Неуклюжее (и по содержанию, и по форме) преподавание математики в средней школе немало тому способствует.

Лет сорок назад было модно подчёркивать разницу между так называемыми *физиками* (к коим относили и математиков) и так называемыми *лириками* (к коим относили всех гуманитариев). Терминология эта вошла тогда в моду с лёгкой руки поэта Бориса Слуцкого провозгласившего в 1959 году в культовом стихотворении «Физики и лирики»:

Что-то физики в почёте,
Что-то лирики в загоне.
Дело не в сухом расчёте,
Дело в мировом законе.

Однако само противопоставление условных *физиков* условным *лирикам* вовсе не было вечным. По преданию, на воротах знаменитой Академии Платона была надпись: «Негеометр ⟨т. е. нематематик — *В. У.*⟩ да не войдёт сюда!». С другой стороны, самоё математику можно называть младшей сестрой гуманитарной дисциплины, а именно юриспруденции: ведь именно в юридической практике Древней Греции, в дебатах в народных собраниях впервые возникло и далее шлифовалось понятие доказательства.

II

Можно ли уничтожить и нужно ли уничтожать ставшие, увы, традиционными (хотя, как видим, и не столь древние!) границы между гуманитарными, естественными и математическими науками — об этом я не берусь судить. Но вот разрушить барьеры между представителями этих наук, между *лириками* и *физиками*, между гуманитариями и математиками — это представляется и привлекательным, и осуществимым. Особенно благородная цель — уничтожить этот барьер внутри отдельно взятой личности, т. е. превратить гуманитария отчасти в математика, а математика — отчасти в гуманитария.

Обсуждая эту цель, полезно вспомнить некоторые факты из истории российской науки. Эти факты связаны — в обратном хронологическом порядке — с именами Колмогорова, Барсова и Ададурова (в другом написании — Адодурова).

Первой научной работой великого математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) была работа отнюдь не по математике, а по истории. В начале 20-х годов XX века, будучи семнадцатилетним студентом математического отделения Московского университета, он доложил свою работу на семинаре известного московского историка Сергея Владимировича Бахрушина. Она была опубликована посмертно[1] и чрезвычайно высоко оценена специалистами — в частности, руководителем Новгородской археологической экспедиции Валентином Лаврентьевичем Яниным. Выступая на вечере памяти Колмогорова, состоявшемся в Московском доме учёных 15 декабря 1989 года, он так охарактеризовал историческое исследование Колмогорова: «Эта юношеская работа в русле исторической науки занимает место, до которого её [исторической науки] развитие ещё не докатилось. Будучи опубликованной, она окажется впереди всей исторической науки». А в предисловии к вышеназванному посмертному изданию исторических рукописей Колмогорова В.Л.Янин писал: «Некоторые наблюдения А. Н. Колмогорова способны пролить свет на источники, обнаруженные много десятилетий спустя после того, как он вёл своё юношеское исследование». И там же:

> Андрей Николаевич сам неоднократно рассказывал своим ученикам о конце своей «карьеры историка». Когда работа была доложена им в семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как «в исторической науке каждый вывод должен быть снабжён несколькими доказательствами»[2]. Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика приобрела его.

---

1 *А. Н. Колмогоров*. Новгородское землевладение XV века; *Л. А. Бассалыго*. Комментарий к писцовым книгам Шелонской пятины. — М.: Физматлит, 1994.

2 Замечание Бахрушина не лишено оснований. Ведь — в отличие от математических истин, верных в абсолютном смысле, — гуманитарные истины верны лишь с определённым процентом правдоподобия, и каждое новое доказательство повышает такой процент. — *В. У.*

26 апреля (по старому стилю, а по новому стилю тогда было 7 мая) 1755 года состоялось торжественное открытие Московского университета. После молебна были произнесены четыре речи. Первая из них — и притом единственная, сказанная на русском языке, — называлась «О пользе учреждения Московского университета». Говорил её Антон Алексеевич Барсов (1730—1791). Неудивительно, что в 1761 году он был назначен профессором (в современных терминах — заведующим кафедрой) на кафедру красноречия; вступление в эту должность ознаменовалось его публичной лекцией «О употреблении красноречия в Российской империи», произнесённой 31 января (11 февраля) 1761 года. Чем же занимался Барсов до того? Преподавал математику — именно с Барсова, в феврале 1755 года специально для этой цели переведённого из Петербурга в Москву, и началось преподавание математики в Московском университете! Впоследствии Барсов прославился трудами по русской грамматике; ему же принадлежит и ряд предложений по русской орфографии, тогда отвергнутых и принятых лишь в XX веке.

Ещё раньше, в 1727 году, знаменитый математик Даниил Бернулли, работавший в то время в Петербургской академии наук, обратил внимание на студента этой академии Василия Евдокимовича Ададурова (1709—1780). В письме к известному математику Христиану Гольдбаху от 28 мая 1728 года Бернулли отмечает математические способности Ададурова и сообщает о сделанном Ададуровым открытии[3]: сумма кубов последовательных натуральных чисел равна квадрату суммы их первых степеней: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Математические заслуги Ададурова засвидетельствованы его включением (с портретом в виде силуэта) в биографический раздел однотомного «Математического энциклопедического словаря» (М.: Советская энциклопедия, 1988). А из статьи «Ададуров» в первом томе другого словаря, «Нового энциклопедического словаря» Брокгауза и Ефрона, мы узнаём, что Ададуровым написано несколько сочинений по русскому языку и, более того, что «в 1744 году ему было поручено преподавать русский язык принцессе Софии, т. е. будущей императрице Екатерине II». Последующие изыскания (они были проведены братом автора этих строк Борисом Андреевичем

[3] Указанное письмо Бернулли можно прочесть на с. 261 второго тома двухтомника «Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-éme siècle», изданного в 1843 году в Санкт-Петербурге Паулем (он же Павел Николаевич) Фуссом (Paul Heinrich von Fuss); кстати, Ададуров был сделан адъюнктом кафедры математики в Академии наук по инициативе именно Даниила Бернулли.

Успенским) показали, что Ададуров является автором первой русской грамматики на русском же языке, составление каковой следует рассматривать как большое событие. Ведь важнейшим этапом в языковом сознании носителей какого бы то ни было языка является появление первой грамматики этого языка на том же самом языке; этот этап сравним с осознанием того, что кажущаяся пустота вокруг нас заполнена воздухом. Прибавим ещё, что с 1762 года по 1778 год Ададуров был куратором Московского университета — вторым после основавшего университет И. И. Шувалова.

Итак, даже если согласиться с традиционной классификацией наук, отсюда ещё не следует с неизбежностью аналогичная классификация учёных или учащихся. Приведённые факты показывают, что математик и гуманитарий способны уживаться в одном лице.

Здесь предвидятся два возражения. Прежде всего, нам справедливо укажут, что Ададуров, Барсов, Колмогоров были выдающимися личностями, в то время как любые рекомендации должны быть рассчитаны на массового потребителя. На это мы ответим, что образцом для подражания — даже массового подражания — как раз и должны быть выдающиеся личности и что примеры Ададурова, Барсова, Колмогорова призваны вдохновлять. Далее нам укажут, опять-таки справедливо, что отнюдь не всем гуманитариям и отнюдь не всем математикам суждено заниматься научной работой, это и невозможно, и недолжно. Ну что ж, ответим мы, примеры из жизни больших учёных выбраны просто потому, что история нам их сохранила; возможность же и цель сочетания в одном лице математического и гуманитарного подхода к окружающему миру сохраняют привлекательность не только для научных работников, но и для тех гуманитариев и математиков, кто не собирается посвятить себя высокой науке.

III

По всеобщему признанию, литература и искусство являются частью человеческой культуры. Ценность же математики, как правило, видят в её практических приложениях. Но наличие практических приложений не должно препятствовать тому, чтобы и математика рассматривалась как часть человеческой культуры. Да и сами эти приложения, если брать древнейшие из них — такие как, скажем, использование египетского треугольника (т. е. треугольника со сторонами 3, 4, 5) для построения прямого угла — также принадлежат общекультурной сокровищнице человечества. (Кому, чьей

сокровищнице принадлежит шестигранная форма пчелиных сот, обеспечивающая максимальную вместимость камеры при минимальном расходе воска на строительство её стен, — этот вопрос мы оставляем читателю для размышления.) В Древнем Египте, чтобы получить прямой угол, столь необходимый при строительстве пирамид и храмов, поступали следующим образом. Верёвку делили на 12 равных частей, точки деления, служащие границами между частями, помечали, а концы верёвки связывали. Затем за верёвку брались три человека, удерживая её в трёх точках, отстоящих друг от друга на 3, 4 и 5 частей деления. Далее верёвку натягивали до предела — так, чтобы получился треугольник. По теореме, обратной к теореме Пифагора, треугольник оказывался прямоугольным, причём тот человек, который стоял между частью длины 3 и частью длины 4, оказывался в вершине прямого угла этого треугольника.

Раздел математики, сейчас называемый «математический анализ», в старые годы был известен под названием «дифференциальное и интегральное исчисление». Отнюдь не всем обязательно знать точное определение таких основных понятий этого раздела, как *производная* и *интеграл*. Однако каждому образованному человеку желательно иметь представление о *производном числе* как о мгновенной скорости (а также как об угловом коэффициенте касательной) и об *определённом интеграле* как о площади (а также как о величине пройденного пути). Поучительно знать и о знаменитых математических проблемах (разумеется, тех из них, которые имеют общедоступные формулировки) — решённых (таких как проблема Ферма[4] и проблема четырёх красок[5]), ждущих решения (таких, как проблема близнецов[6]) и тех, у которых решения заведомо отсутствуют (из числа задач на геометрическое построение и простейших задач на отыскание алгоритмов). Ясное понимание несуществования чего-то — чисел ли с

[4] *Проблема Ферма* заключается в требовании доказать следующий факт: не существует такой четвёрки положительных целых чисел a, b, c, n, для которых выполнялось бы неравенство $n > 2$ и равенство $a^n + b^n = c^n$. (Как демонстрирует египетский треугольник, при $n = 2$ такая четвёрка существует.)

[5] *Проблема четырёх красок* заключается в требовании доказать следующий факт: любую мыслимую карту можно так раскрасить в четыре цвета, чтобы страны, имеющие общую границу, всегда были окрашены в разные цвета. Проблема ждала решения более ста лет.

[6] *Близнецами* называются такие два простых числа, разность между которыми равна двум, например 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. Неизвестно, конечным или бесконечным является количество близнецовых пар; в требовании дать ответ на этот вопрос и состоит *проблема близнецов*. (Напомним, что простым называется такое большее единицы целое число, которое делится без остатка только на само себя и на единицу.)

заданными свойствами, или способов построения, или алгоритмов — создаёт особый дискурс, который можно было бы назвать *культурой невозможного*. И культура невозможного, и предпринимаемые математикой попытки познания бесконечного значительно расширяют горизонты мышления.

Всё это, ломая традиционный стереотип математики как сухой цифири, создаёт её образ как живой области знания, причём *живой* в двух смыслах: во-первых, связанной с жизнью, во-вторых развивающейся, т. е. продолжающей активно жить. Всякому любознательному человеку такая область знания должна быть интересна. Вообще, образованность предполагает ведь знакомство не только с тем, что непосредственно используется в профессиональной деятельности, но и с человеческой культурой как таковой, чьей неотъемлемой частью — повторим это ещё раз — является математика.

Здесь возможен следующий упрёк. Хотя в названии настоящего очерка политкорректно говорится о *преодолении барьера*, изложение явно уклоняется в сторону пропаганды «математического». Автор болезненно относится к такому упрёку и спешит оправдаться. Дело в том, что гуманитарная культура не нуждается в пропаганде, она не только повсеместно признана непременной частью культуры вообще, но часто отождествляется с последней. Отличать ямб от хорея, понимать значение выражения «всевышней волею Зевеса», а заодно и знать, кто такой Зевес, — все (или, по крайней мере, большинство) согласны в том, что подобные знания и умения входят в общеобязательный культурный багаж. Включение же в этот багаж чего-то математического в качестве обязательной составной части многим может показаться непривычным и потому нуждается в лоббировании.

IV

Однако образование состоит не только в расширении круга знаний. Не в меньшей степени оно состоит в расширении навыков мышления. Математик и гуманитарий обладают различными стилями мышления, и ознакомление с иным стилем обогащает и того, и другого. Скажем, изучение широко распространённого в математике аксиоматического метода, при котором в рассуждениях дозволяется использовать только ту информацию, которая явно записана в аксиомах, прививает привычку к строгому мышлению. А знакомство со свойствами бесконечных множеств развивает воображение. Потребуются ли когда-нибудь, скажем, историку аксиоматический метод или

бесконечные множества? Более чем сомнительно. Но вот строгость мышления и воображение не помешают и ему. С другой стороны, и математику есть чему поучиться у гуманитария. Последний более толерантен к чужому мнению, чем математик, и это говорится здесь в пользу гуманитария (разумеется, имеются в виду некоторые усреднённые — а то и воображённые автором этих строк — гуманитарий и математик). Математические понятия резко очерчены, тогда как гуманитарные расплывчаты; и как раз эта расплывчивость делает их *более адекватными для описания окружающего нас расплывчатого мира*, поскольку его явления (или надо сказать «его феномены»?) сами расплывчаты. Математик ведь привык иметь дело с такими утверждениями, каждое из которых либо истинно, либо ложно, и эта привычка поневоле заставляет его видеть мир в чёрно-белом цвете. Его мышление настроено на более высокую контрастность или резкость (не знаю, какое слово здесь правильнее). Ему, в отличие от гуманитария, чужда или непонятна мысль, что истина, может быть, и одна, но вот правда у каждого своя.

Поучительно сравнить между собой методы рассуждений, применяемые в математических и в гуманитарных науках. На самом деле речь идёт здесь о двух типах мышления, и человеку полезно быть знакомым с каждым из них. Автор не берётся (потому что не умеет) описать эти типы, но попытается проиллюстрировать на двух примерах своё ви́дение их различия. Пример первый. Все знают, что такое вода, — это вещество с формулой H_2O. Но тогда то́, что мы все пьём — это не вода. Разумеется, в повседневной речи и математик, и гуманитарий и то́, и то́ называет водою, но в своих теоретических рассуждениях первый как бы тяготеет к тому, чтобы называть водою лишь H_2O, а второй — всё, что имеет вид воды.

Потому что математик изучает идеальные объекты, имеющие такой же статус, как, скажем, круги и треугольники, которых ведь нет в реальной природе; гуманитарий же изучает предметы более реалистические. Боюсь, впрочем, что этот пример слишком умозрителен и способен отчасти запутать читателя. Вот другой, уже не умозрительный, а взятый из жизни пример. Имеется строгое (кстати, в наиболее отчётливой форме сформулированное Колмогоровым) определение того, что такое ямб. Мы имеем здесь в виду не *ямбическую стопу* **та-тА**, понимание которой не вызывает вопросов, а *ямбическую строку*, которая может состоять отнюдь не из одних только ямбических стоп (как иногда ошибочно думают): любая ямбическая стопа может быть всегда заменена пиррихием **та-та** (здесь оба слога безударны), а в особых случаях, впервые чётко указанных

Тредиаковским, и спондеем **тА-тА** (здесь оба слога ударны). Если в стихотворении встречается отклонение от законов, которым обязана подчиняться ямбическая строка, то с точки зрения математика это уже не ямб. Однако для многих филологов стихотворение, содержащее не слишком много нарушений, не перестаёт быть ямбическим — в то время как математик назовёт его всего лишь похожим на ямб, ямбоподобным.

По-видимому, математики, которых специально обучают обращению с абстракциями, начинают мыслить отчасти по-особому. Некоторые из них перестают это замечать и начинают думать, что так мыслят все. Другие же математики достаточно реалистически осознают ограниченность применения своих представлений к реальным ситуациям и с удовольствием рассказывают анекдоты, высмеивающие тех математиков, которые эту ограниченность не замечают (или не желают замечать). Вот три примера таких анекдотов.

Жена говорит мужу-математику: «Купи батон, а если будут яйца, купи десяток». Муж приносит десять батонов. (Действительно, сказанное женой имеет — на формальном уровне — два смысла, и муж воспользовался тем из них, который аналогичен смыслу фразы: «Купи батон, а если хватит денег, купи десяток».)

Летящие на воздушном шаре заблудились в критической для них ситуации, и им жизненно необходимо знать, где они находятся. Завидев человека внизу, они крикнули ему: «Где мы?». Человек внизу оказался математиком, и его ответом было: «Вы на воздушном шаре». (Более длинный вариант анекдота таков. Спрошенный, прежде чем ответить, подумал, и тогда один из унесённых ветром воздухоплавателей сказал: «Ясно, что этот человек — математик. Во-первых, он подумал, прежде чем дать ответ. Во-вторых, его ответ был совершенно точен и совершенно бессмыслен».)

Пассажиры поезда наблюдают в окно нескончаемые стада белых овец. И вдруг замечают чёрную овцу, повернувшуюся к мчащемуся поезду боком. «О, здесь бывают и чёрные овцы!» — восклицает один из пассажиров. «По меньшей мере одна овца с по меньшей мере одним чёрным боком», — поправляет его другой, математик.

«Сказка ложь, да в ней намёк! Добрым молодцам урок». Эти анекдоты весьма поучительны: в них в наглядной и сжатой форме выражена идея о том, что чрезмерная точность может быть вредной, может мешать адекватному восприятию текста. Здесь — основа для уважительного диалога между гуманитарием и математиком, диалога, полезного для обеих сторон. В этом диалоге математик обучает гуманитария... — нет, не так, не обучает, а делится с собеседником

своими представлениями о важности точности, причём не только точности слов, о которой говорил ещё Декарт, процитированный нами в эпиграфе, но и точности синтаксических конструкций. Математик в этом диалоге пытается передать гуманитарию свою способность увидеть логический каркас текста. Гуманитарий же делится с математиком своими соображениями о важности неточности, он объясняет математику, что и «плоть» текста, натянутая на его логический каркас, и контекст, в котором возникает текст, не менее существенны, чем упомянутый каркас. Окружающий мир, говорит гуманитарий, аморфен и расплывчат, и потому неточные, расплывчатые тексты и образы более приспособлены для адекватного его отражения, нежели тексты и образы математически точные.

V

Ряд положений языкознания может быть изложен с математической точностью. (А, скажем, для литературоведения подобный тезис справедлив разве что в применении к стиховедению.) В то же время именно на уроках математики учащиеся могли бы приучаться правильно выражать свои мысли на своём родном языке. Уроки языка и уроки литературы на родном языке проводятся, как правило, одним и тем же учителем. На наш взгляд, было бы полезнее несколько отделить лингвистику от литературоведения. И уже совсем крамольная идея — объединить, хотя бы в порядке эксперимента, язык и математику, с тем, чтобы один и тот же учитель преподавал и математику, и родной язык. Некоторые уважаемые коллеги автора этих строк нашли эту фантастическую идею ужасающей. Поэтому спешу объясниться.

Прежде всего, идея эта не столько крамольная, сколько утопическая и относится к некоторому идеальному будущему. Будущее, как известно, подразделяется на обозримое и необозримое. В обозримом будущем объединение уроков языка и уроков математики нереально хотя бы потому, что преподавателей, способных осуществить такое объединение, на сегодняшний день не существует. Если же говорить о будущем необозримом, то можно предполагать, что сама технология обучения в этом будущем кардинально изменится и окажется мало похожей на сегодняшнюю. Так что высказанное предложение обозначает всего лишь вектор движения, и притом не движения реальной организации образования, а движения мысли. Это как показ изделий высокой моды или выставки и конкурсы бумажной архитектуры, которые хотя и не предполагают реализации образцов одежды или

архитектурных проектов, но ценятся дизайнерами реальной одежды и реальной архитектуры.

Что до «движения мысли», то здесь надлежит сказать следующее.

Среди многочисленных функций языка можно выделить две: передавать информацию и передавать эмоции. Разумеется, в реальном использовании языка названные функции переплетены. Тем не менее, при всей их нераздельности наличествует и некая неслиянность, и можно попытаться разделить их как в обучении языку, так и в его преподавании. Функция передачи эмоций сближает язык с литературой (думается, что, когда говорят о «великом и могучем», имеют в виду именно эту функцию). Действительно, вся стилистика, всевозможные художественные средства языка, и, в частности, такие локальные средства, как тропы (метафоры, метонимии, гиперболы и т. п.), — всё это относится столько же к ведомству лингвистики, сколько к ведомству литературоведения. Поэтому названные темы могут изучаться на лингвистико-литературоведческих уроках. Нас же будет интересовать функция бесстрастной передачи информации; она воплощается в таких текстах, которые один из основоположников отечественного программирования Андрей Петрович Ершов называл *деловой прозой*. К деловой прозе относятся, в частности, естественнонаучные тексты[7] (и прежде всего математические), юридические тексты, тексты делопроизводства, инструкции. Деловая проза занимает всё большее место в нашей жизни и потому должна быть предметом, которому учат в школах. Соответствующее преподавание могло бы происходить на уроках родного языка или же на специальных уроках, посвящённых чистой, т. е. не несущей эмоции, информации.

Обучение деловой прозе заключается в обучении правильно ею пользоваться, т. е. правильно составлять и правильно понимать, иначе говоря, правильно выражать мысль посредством слов и правильно находить в словах выраженную ими мысль. Это особенно важно для правильного понимания инструкций. Их понимание может вызывать проблемы.

Приведём одну из таких проблем, случившихся на практике[8].

Чтобы стать членом некоего общества гуманитарной направленности, надо пройти процедуру голосования на имеющиеся вакансии.

---

[7] Было бы хорошо, если бы и некоторые гуманитарные тексты, в частности все тексты исторической науки, писались с такой же безоценочной бесстрастностью.

[8] А именно, в 2008 году при избрании в члены-корреспонденты одного из гуманитарных отделений Российской академии наук. Эпизод этот излагается нами в нарочито абстрактном виде.

Правом голоса обладают все члены общества, голосование проводится турами. Положение о выборах было написано математиками. Оно гласит:

> Для избрания членом общества необходимо получить не менее 2/3 голосов лиц, принявших участие в голосовании, и не менее половины от списочного состава общества. Кандидат считается избранным в данном туре голосования, если в этом туре он получил необходимое для избрания число голосов и число всех кандидатов, получивших в этом туре такое же или большее число голосов, не превышает числа вакансий по данной специальности, оставшихся незаполненными в предыдущих турах (в первом туре — числа всех имеющихся вакансий). Если в первом туре голосования число избранных кандидатов по данной специальности оказалось меньше, чем число вакансий по этой специальности, то проводится второй тур голосования. Если по результатам первого и второго туров остались незаполненные вакансии по данной специальности, то проводится третий тур голосования.

Случилось так, что при выборах на единственную вакансию каждый из кандидатов X и Y получил во втором туре не менее 2/3 голосов лиц, принявших участие в голосовании, и не менее половины списочного состава. При этом Y получил больше голосов, чем X. Два вопроса: избран ли кто-нибудь в этом туре, и если избран, то кто? надо ли проводить третий тур? Эксперимент показал, что математики отвечают на этот вопрос, как правило, верно, тогда как гуманитарии, как правило, неверно. Верные ответы состоят в том, что X не избран, избран Y и что третий тур проводить не надо. Это обосновывается следующим рассуждением. Имеются два условия избрания. Первое условие — получить необходимое количество голосов: не менее 2/3 голосов участвующих в голосовании и не менее половины от списочного состава. Второе условие — количество N всех кандидатов, получивших в этом туре такое же или большее число голосов, не превышает числа P вакансий. В нашем примере первое условие выполнено для обоих кандидатов. Посмотрим, что происходит со вторым условием. В нашем примере число вакансий P равно 1. Для X второе условие не выполнено, поскольку для этого кандидата $N = 2$ и тем самым N превышает P. Для Y второе условие выполнено, поскольку для этого кандидата $N = 1$ и тем самым N не превышает P. В реальности же был проведён третий тур, в котором избранным оказался X.

Напомним, что электорат состоял из гуманитариев. Мораль этой истории такова: текст положения о выборах, логически и лингвистически безупречный, всё же обладает тем недостатком, что реальный гуманитарный электорат понимает его (по крайней мере, отдельные его фрагменты) с трудом, или вовсе не понимает, или понимает неправильно. По-видимому, текст стоило бы переписать с учётом этого обстоятельства. Так что упрёк можно предъявить не только гуманитариям, не понявшим инструкцию, но и математикам, её составлявшим. Хотя текст инструкции безупречен с логической точки зрения и смысл его однозначен, он, этот текст, был составлен без учёта возможных психологических трудностей его восприятия.

В понимании деловой прозы главное — это понимание синтаксических конструкций. Вот пример на сравнительное понимание таких конструкций студентами-математиками и студентами-гуманитариями. Рассмотрим два утверждения: «каждый из присутствующих знает хотя бы один из следующих двух языков — баскского и чукотского» и «среди присутствующих есть некто, кто не знает ни баскского, ни чукотского». Абсолютное большинство студентов-математиков не испытывают никаких затруднений в понимании того, что каждое из этих утверждений равносильно отрицанию другого. Большое число студентов-гуманитариев испытывают такие затруднения.

Следует, однако, подчеркнуть, что реальная фраза на естественном языке состоит не только из её логического каркаса. Каркас этот облачён в мягкую (а то и пульсирующую студенистую) плоть, каковая плоть весьма существенна для адекватного восприятия фразы. Что и было продемонстрировано приведёнными выше анекдотами о математиках.

VI

В последние годы получило заметное распространение преподавание математики студентам гуманитарных специальностей. Если иметь в виду интересы такого преподавания, то понимание математиком способов мышления гуманитариев становится важно не только в общефилософском, но и в совершенно практическом аспекте. Чтобы преподавание было успешным, преподаватель-математик должен понимать, как предмет воспринимается его учениками-гуманитариями. Вот простой пример. Отношение называют *рефлексивным*, коль скоро всякий предмет, для которого данное отношение осмысленно, находится в этом отношении к самому себе. Пример рефлексивного отношения: 'жить в том же городе' — каждый живёт

в том же городе, что он сам (не исключено, впрочем, что некоторые сочтут предложение «NN живёт в том же городе, что он сам» бессмысленным). Будет ли рефлексивным отношение ‘находиться неподалёку’? Опрошенные мною математики (притом отнюдь не математические логики) отвечали, что будет: каждый предмет находится неподалёку от самого себя. Гуманитарии же — да и просто обычные люди, нематематики, — в большинстве своём расценивают высказывание «нечто находится неподалёку от самого себя» либо как ложное, либо как бессмысленное. Причина такого расхождения, надо полагать, заключается в следующем. «Неподалёку» означает ‘на малом расстоянии’ (но смысл слова этим не ограничивается, о чём будет сказано ниже). Математики свободно оперируют расстоянием ноль, на каковом расстоянии любой предмет находится от самого себя. Для нематематика же, в том числе для гуманитария, нулевых расстояний не бывает. Беседуя как-то с дамой, мастером по маникюру и педикюру, я спросил её, находится ли предмет неподалёку от самого себя. Получив, к немалому своему удивлению, положительный ответ, я спросил о расстоянии между предметом и им самим и удивился ещё более: ответом был ноль. Тогда я задал вопрос об образовании моей собеседницы. Оказалось — высшее техническое по специальности «гидравлика», с достаточно большим курсом математики. Всё стало на свои места. Даже если её и не обучали в этих курсах расстоянию ноль, то даваемая в них общая система понятий и терминов не могла не выработать мысли о возможности такого расстояния.

Математики, в большинстве своём, не замечают, что слово «неподалёку» означает нечто большее, чем малость расстояния. Напомним, что отношение называется *симметричным*, коль скоро выполняется следующее условие: всякий раз, когда какой-то предмет находится в этом отношении к другому, то и этот второй предмет находится в том же отношении к первому; примеры симметричных отношений: ‘жить в том же городе’, ‘быть родственниками’. По наблюдению автора этих строк, для большинства математиков отношение ‘находиться неподалёку’ является симметричным. Но анализ естественного языка показывает, что значение словосочетания ‘находиться неподалёку’ отнюдь не симметрично. Соответствующее наблюдение сделал выдающийся американский лингвист Леонард Талми. Вот что пишет Талми по этому поводу[9]:

[9] *Leonard Talmy*. Toward a Cognitive Semantics. — V. 1. — The MIT Press, 2000. — P. 314. — [http://linguistics.buffalo.edu/people/faculty/talmy/talmyweb/Volume1/chap5.pdf].

Можно было бы ожидать, что такие два предложения, как

(a) *Велосипед находится неподалёку от дома*;

(b) *Дом находится неподалёку от велосипеда*[10].

будут синонимичны, на том основании, что они всего-навсего выражают две инверсные формы некоторого симметричного отношения. Отношение это выражает не что иное, как малость расстояния между двумя объектами. На самом же деле эти два предложения вовсе не означают одно и то же. Они *были бы* синонимичными, если бы они выражали *только* указанное симметричное отношение. Однако, в дополнение к этому, (a) содержит несимметричное указание, что один из объектов (а именно дом) имеет местоположение [set location] в пределах некоторой рамки [reference frame] (в качестве таковой здесь подразумевается данная окрестность, весь мир и т. п.), и используется в целях сообщения о местоположении другого объекта (а именно велосипеда). Соответственно, местоположение этого другого объекта есть переменная (для рассматриваемого примера это так и есть, поскольку в разных ситуациях велосипед окажется в разных местах), чьё частное значение и составляет предмет интереса.

Что касается предложения (b), то оно содержит противоположное указание. Это указание, однако, не вписывается в привычную картину мира, что́ и заставляет предложение (b) выглядеть странным и, тем самым, ясно демонстрирует его отличие от (a).

Из разбора Талми в действительности видно, что обычный человек (в том числе гуманитарий) полнее и глубже понимает смысл русского слова *неподалёку* (а именно, слышит во всей полноте заключённый в нём «семантический звук», а потому и отвергает фразу, где он прозвучать не может) — глубже, чем типичный математик. Типичный математик слышит в этом слове только те элементы, которые ему профессионально близки (да ещё зачастую учит гуманитария быть таким же полуглухим).

VII

Различие в понимании слов составляет существенную часть барьера, упомянутого в заголовке настоящего очерка. И следует признать, что подавляющая часть людей находится по ту же сторону барьера, что и гуманитарии. Честнее было бы сказать, что

[10] В оригинале: «The bike is near the house» и «The house is near the bike».

гуманитарии просто пользуются общенародными значениями слов. (Подозреваю, правда, что, когда в гуманитарном собрании звучат слова *дискурс*, *парадигма*, *экзистенциальный* и им подобные, затесавшийся на собрание математик получает редкую возможность насладиться своим единством с большинством человечества.) Можно выделить два фактора, вызывающие указанное различие.

Первый, очевидный фактор состоит в том, что математики пользуются точной терминологией, а в качестве терминов нередко используют слова обычного языка, придавая им совершенно новый смысл. Например, слова *кольцо* и *поле* обозначают в математике алгебраические структуры определённого вида, ничего общего не имеющие с обручальными кольцами и засеянными полями. Подобные явления следует квалифицировать как омонимию, а омонимия, как правило, легко устраняется контекстом, и потому правильное понимание того, какое значение слова имеется в виду, обычно не является проблемой[11]. Математики настолько привыкли к свободному заимствованию общеупотребительных слов для использования в качестве сугубо математических терминов, что бывают склонны искать особый, «математический» смысл в самых обычных словах. Вот иллюстрация к сказанному. Механико-математический факультет Московского университета, 1950-е годы. Идёт научный семинар, руководимый знаменитым математиком Сергеем Львовичем Соболевым (сейчас его имя носит Институт математики Сибирского отделения РАН). До слегка задремавшего Соболева доносятся слова докладчика: «А теперь я должен ввести целый ряд обозначений». Соболев просыпается и спрашивает: «Простите, какой ряд вы называете целым?». (Для тех читателей, которые незнакомы с математическим термином *ряд*, поясню, что в математике рядом называется последовательность из бесконечного числа членов, подлежащих суммированию.) В подобных случаях долг гуманитария — напомнить математику, что обычные слова имеют значения и за пределами математического жаргона.

Второй фактор наблюдается в тех случаях, когда математический смысл слова, заимствованного из естественного языка, близок к обычному смыслу этого слова, но не совпадает с этим обычным смыслом. Так, математическое понимание слова *угол* заимствовано

[11] Математикам, впрочем, иногда нравится обыгрывать указанную омонимию в каламбурах: *И до боли жаждет воли / Истомившийся от бега / По борелевскому полю / Измеримых по Лебегу*. Те множества, которые являются измеримыми по Лебегу, действительно образуют борелевское поле, но бежать по нему, разумеется, невозможно.

из обыденного понимания этого слова, однако эти понимания не совпадают даже в простейшем случае угла между двумя прямыми линиями (не говоря уже об угле комнаты): обыденное понимание вряд ли примирится с углом в ноль градусов. В подобных случаях установление правильного значения исходя из контекста может оказаться затруднительным. Этот фактор более глубок и заключается, по-видимому, в том, что занятия математикой и сопряжённое с ними систематическое использование точной терминологии приводят к изменениям психологии — по крайней мере, в части восприятия слов. Этот фактор и проявился в нашем примере со словом *неподалёку*.

Пожалуй, существует и третий фактор, не упомянутый нами по той причине, что он, возможно, проявляется лишь в одном (но очень важном) слове. Фактор этот заключается в том, что для обозначения одного важнейшего — и важнейшего не только для математики! — понятия в русском языке отсутствует нужное слово. В математике понятие, о котором идёт речь, обозначается словом *ложь*.

Слово *ложь* происходит от глагола *лгать*, каковой факт отражается в его определении в толковых словарях: «неправда, намеренное искажение истины». Подчеркнём здесь слово «намеренное». Знаменитый «Энциклопедический словарь» Брокгауза и Ефрона в одноимённой статье прямо указывает на аморальность лжи:

> **Ложь** — в отличие от заблуждения и ошибки — обозначает сознательное и потому нравственно предосудительное противоречие истине. Из прилагательных от этого слова безусловно дурное значение сохраняет лишь форма *лживый*, тогда как *ложный* употребляется также в смысле объективного несовпадения данного положения с истиною, хотя бы без намерения и вины субъекта; так, *лживый вывод* есть тот, который делается с намерением обмануть других, тогда как *ложным выводом* может быть и такой, который делается по ошибке, вводя в обман самого ошибающегося.

Мы видим, что в значение русского существительного *ложь* непременно входит субъект и его злонамеренность. Но субъект со своими намерениями чужд математике.

Вместе с тем в математике ощущается острая потребность в слове, обозначающем любое неистинное утверждение. В качестве такого слова и выбрано слово *ложь*. Таким образом, математики употребляют это слово, лишая его какой-либо нравственной оценки

и отрывая от слова *лгать*. Заметим, что английский язык располагает двумя словами для перевода русского слова *ложь*: это *lie* для обычного, общенародного, бытового его смысла, включающего сознательную злонамеренность, и *falsehood* для смысла математического. Заметим также, что в русском языке существует слово, обозначающее любое истинное утверждение, вне зависимости от намерений, с которыми это утверждение сделано, — это слово *истина*. Можно сказать «дважды два четыре — это истина» и при этом не иметь в виду никого, кто бы собирался нас просветить. Но в математике можно сказать и «дважды два пять — это ложь», не имея в виду никого, кто бы стремился нас обмануть. (Вот тема для любителей философии языка: истина в русском языке объективна, а ложь субъективна.)

VIII

Было бы замечательно, если бы математик был способен понимать точку зрения гуманитария, в значительной степени отражённую в языке гуманитария, а гуманитарий — точку зрения математика, в ещё большей степени отражённую в языке математика. И то, и другое трудно. Ещё труднее не требовать признания одной из точек зрения единственно правильной. Таким образом, и гуманитариев, и математиков следует призвать сделать шаги навстречу друг другу. И начинать надо с преподавания, руководствуясь следующими словами А. Н. Колмогорова:

> ...Учитель (для конкретности — преподаватель математики) находится в том же положении, как учёный, приходящий **со своей проблематикой** в уже существующий вычислительный центр с определённым набором вычислительных машин, запасом заготовленных (с другими целями!) программ, даже со штатом программистов. Задача его состоит в том, чтобы обучить этот сложный механизм выполнить новую работу, используя все свои уже заготовленные заранее механизмы, программы, навыки.

IX

Обсуждая вопрос о преподавании кому-либо чего-либо, полезно иметь представление о целях этого преподавания. Среди таких целей можно выделить две:

1) получение *образования*;
2) подготовка к *профессии*.

Следует заметить, что в ряде стран различие названных целей отчётливо отражено в организации образовательных учреждений. Так, в России разделение целей организационно оформлено на уровне среднего образования, во Франции — на уровне высшего. В современной России, как это было ещё в СССР, образование призваны давать средние школы; в СССР к профессии готовили техникумы, каковые в современной России переименованы, кажется, в колледжи (слава богу, что не в академии). Во Франции образование дают *Университеты*, профессии же — так называемые *Высшие школы* («Grandes Écoles»), среди которых наиболее известны Высшая нормальная школа (École normale supérieure) и Политехническая школа (École Polytechnique). В университеты берут без экзамена всякого, лишь бы он проживал в данном регионе и имел надлежащую справку о среднем образовании; в высшие школы — суровый конкурс, и по крайней мере в некоторых из них платят приличную стипендию.

X

Разумеется, грань между повышением общеобразовательного уровня и профессиональной подготовкой зачастую стирается. Скажем, знакомство с аксиоматическим методом значимо не только в плане общего образования.

Разъясним, прежде всего, как в рамках этого метода трактуется слово *аксиома*. В повседневном языке аксиома понимается, скорее всего, как утверждение настолько очевидное, что не требует доказательств. Однако авторитетный толковый словарь Ушакова вообще отрицает принадлежность слова *аксиома* повседневному языку, относя один из оттенков его значения к математике, а другой — к языку книжному[12]. Словари же иностранных слов — и словарь Крысина[13], и словарь трёх авторов[14] — если и впускают это слово в повседневный язык, то лишь в значении, квалифицируемом этими словарями как переносное: «Бесспорное, не требующее доказательств положение». Для основного же, даваемого первым значения слова *аксиома* эти словари дают близкие друг другу толкования:

[12] «Положение, принимаемое без доказательств (мат.). || Очевидная истина, утверждение, принимаемое на веру (книжн.)» (Толковый словарь русского языка / Под ред. Д. Н. Ушакова)

[13] *Л. П. Крысин*. Толковый словарь иноязычных слов. — 2-е изд., доп. — М.: Русский язык, 2000.

[14] *Е. Н. Захаренко, Л. Н. Комарова, И. В. Нечаева*. Новый словарь иностранных слов. — М.: Азбуковник, 2003.

«Исходное положение, принимаемое без доказательств и лежащее в основе доказательств истинности других положений» (словарь Крысина), «Отправное, исходное положение какой-либо теории, лежащее в основе доказательств других положений этой теории, в пределах которой оно принимается без доказательств» (словарь трёх авторов). Таким образом, в том своём значении, которое является основным для математиков, аксиомы функционируют не как положительные утверждения, а как формулировки предположений. В современной математике развитие какой-либо аксиоматической теории происходит так: предположим, что верно то, что записано в аксиомах, тогда окажется верным то-то и то-то.

Сущность аксиоматического метода останется непонятной без предъявления содержательных примеров. Сообщим поэтому, как выглядит фрагмент одной из аксиоматических систем для геометрии. Сперва объявляется, что существуют два типа объектов; объекты первого типа называются *точками*, объекты второго типа называются *прямыми*. Что это за объекты, как они «выглядят», намеренно не объясняется. Далее объявляется, что существует некоторое отношение, называемое *отношением инцидентности*, в которое могут вступать между собой отдельно взятая точка и отдельно взятая прямая. Что это за отношение, опять-таки не объясняется, сообщается лишь, что если даны точка и прямая, то они могут быть *инцидентны* друг другу, а могут быть и *не инцидентны*. Если точка инцидентна прямой, то говорят, что точка *лежит на* этой прямой, а прямая *проходит через* эту точку. Наконец, указываются свойства, соединяющие между собой вводимые сущности: в нашем случае — точки, прямые, отношение инцидентности. Формулировки таких свойств и называются в математике аксиомами — в нашем случае *аксиомами геометрии*. Приведём для примера три из аксиом геометрии. Первая: для любых двух точек существует прямая, проходящая через каждую из этих точек. Вторая: существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Третья: для любой прямой и любой не лежащей на ней точки существует не более одной прямой, проходящей через эту точку, но не проходящей ни через одну из точек, лежащих на исходной прямой (эта аксиома называется *аксиомой о параллельных*). Эти три аксиомы вкупе с другими аксиомами, говорящими о свойствах точек, прямых и отношения инцидентности, а также свойствах некоторых других объектов и отношений, позволяют развить науку, называемую геометрией. При этом никакими иными сведениями, кроме тех, которые записаны в аксиомах, пользоваться не разрешается. Предпринимались попытки создать аксиоматику и

для некоторых нематематических дисциплин, скажем, для фонологии. В качестве исходных понятий брались такие объекты, как *звук языка* и *фонема*. В качестве исходных отношений — *отношение равносмысленности*, в каковом отношении могли находиться две цепочки звуков языка и *отношение принадлежности*, в каковом отношении могли находиться звук языка и фонема. Одна из аксиом постулировала, что если при замене в какой-то цепочке звуков языка звука X звуком Y оказалось, что результирующая цепочка не равносмысленна исходной, то звуки X и Y не могут принадлежать одной и той же фонеме (эта аксиома называется *аксиомой минимальной пары*, поскольку пара цепочек, не являющихся равносмысленными и различающихся лишь тем, что в одной и той же позиции в них стоят разные звуки, называется *минимальной парой*). Другая аксиома постулировала, что если, напротив, в любой цепочке звуков такая замена приводит к равносмысленной цепочке, то звуки X и Y непременно принадлежат одной и той же фонеме (эта аксиома называется *аксиомой свободного варьирования*, поскольку про звуки X и Y, во всех случаях допускающие замену одного другим, так что результирующая цепочка оказывается равносмысленной исходной, говорят, что они находятся в *отношении свободного варьирования*).

И геометрический, и фонологический примеры демонстрируют главное, что характеризует аксиоматический метод. Это главное состоит в следующем. Природа вводимых в рассмотрение предметов и отношений намеренно не разъясняется, они остаются *неопределяемыми*. Единственное, что про них предполагается известным, — это те связи между ними, которые записаны в аксиомах. Вся дальнейшая информация выводится из аксиом путём логических умозаключений. Таким образом, человек, собирающийся развивать теорию на основе сформулированных аксиом, должен сделать над собой психологическое усилие и забыть всё, чему его учили в школе по геометрии и в вузе по фонологии. Другое дело, что он ни в коем случае не должен забывать этого на стадии составления списка аксиом, коль скоро он желает, чтобы эти аксиомы отражали реальность.

В обоих наших примерах невозможно было выделить из списка аксиом геометрии такие, которые характеризовали бы только точку, или только прямую, или только инцидентность. Аналогично среди аксиом фонологии невозможно выделить такие, которые характеризуют, скажем, только звук речи или только равносмысленность. Набор аксиом характеризует, как правило, исходные понятия не по отдельности, а в их совокупности — через объявление их связей между собой.

Аксиоматический метод может рассматриваться как один из способов введения новых понятий, наряду с широко известными демонстрационным и вербальным. *Демонстрационный* способ заключается в предъявлении достаточного числа примеров, не только положительных, но и отрицательных. Желая, например, ввести понятие 'кошка', нужно показать достаточное количество кошек, но также, скажем, собак и кроликов, объясняя, что эти собаки и кролики не суть кошки. *Вербальный* способ опирается на словесную дефиницию. Вот два примера вербального способа: 1) определение слова *хвоя* из толкового словаря Ушакова: «Узкий и упругий в виде иглы лист у некоторых пород деревьев»; 2) определение термина *простое число*: «Натуральное число называется простым, если оно, во-первых, больше единицы и, во-вторых, делится без остатка только на единицу и на само себя» (интересно, кстати, сколько чисел, как простых, так и простыми не являющихся, надо предъявить, чтобы понятие простого числа могло быть усвоено демонстрационным способом[15]). *Аксиоматический* способ определения, скажем, понятия 'точка' предполагает определение этого понятия одновременно с понятиями 'прямая' и 'инцидентно'. Все эти три понятия определяются не порознь, а совокупно, через ту информацию о них, которая записана в аксиомах. Хотя записанная в аксиомах информация, очевидно, вербальна, аксиоматический способ существенно отличается от вербального. Ведь при вербальном способе новое понятие определяется через старые, уже известные; при аксиоматическом способе несколько новых понятий определяются друг через друга на основе тех соотношений, кои связывают их в аксиомах.

XI

Сходным образом, изучение математических моделей реальных явлений позволяет осознать границы моделирования, задуматься над соотношением между моделью и моделируемой реальностью. Но помимо этой философской миссии, изучение математических моделей явлений экономики, психологии или лингвистики позволяет и лучше понять сами моделируемые явления. Можно согласиться с теми, кто не устаёт напоминать об ограниченности математических моделей. Действительно, когда говорят о точности такой модели, то подразумевают её точность как математического объекта, т. е. точность «внутри себя». Когда говорят о точности модели, речь не

[15] Задача для развлечения нематематика: продолжить последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

идёт о точности описания, т. е. о точном соответствии модели с описываемым фрагментом действительности. Под ограниченностью математических моделей как раз и понимается их неспособность охватить описываемое ими явление во всей его полноте. Однако нельзя согласиться с теми, кто в этой ограниченности видит их слабость. Скорее, в этом их сила. Математическая модель должна быть проста, а потому огрублена. Проиллюстрирую сказанное таким примером. Все знают, что Земля — шар. Те, кто получил некоторое образование, знают, что Земля — эллипсоид вращения, сдавленный у полюсов. Геодезисты знают, что Земля — геоид; геоид есть геометрическая фигура, поверхность которой совпадает с поверхностью Земли без учёта таких мелких деталей, как горы и т. п. (более точно — совпадает с той поверхностью, которую образовывал бы Мировой океан, если бы все материки и острова были бы залиты водой, или, ещё более точно, были бы срезаны по уровню Мирового океана). Мы имеем здесь три математические модели, с возрастающей точностью описывающий моделируемый ими объект — форму планеты Земля. Самая важная из этих моделей — самая первая, она же самая неточная. Хотя для прокладки авиамаршрутов нужна, возможно, и вторая, а для запуска баллистических ракет даже третья.

Полное понимание реального строения окружающей нас Вселенной вряд ли когда-либо будет достигнуто. Однако именно математические модели приближают нас к такому пониманию и — это главное — объясняют, каким это строение **может быть**. А ведь если вдуматься, то понимание некоторых сторон устройства пространственно-временного континуума (а может, вовсе и не континуума, а чего-то дискретного) существенно для выживания человечества — или, точнее, того, во что превратится человечество в далёком будущем.

Роль математической модели для представителя гуманитарной науки можно сравнить с ролью скелета для художника, рисующего человека. Художник не изображает скелет, скелет скрыт и от него, и от зрителя картины, но, чтобы грамотно изобразить человеческую фигуру, полезно представить её себе в виде скелетного каркаса, обросшего плотью. Так, гениальный математик Андрей Колмогоров очертил скелет понятия падежа, указав, в частности, основные исходные представления, необходимые для образования этого понятия (а именно, представления о синтаксически правильной фразе, о состоянии предмета, о выражении состояний предмета контекстами и т. п.). Гениальный лингвист Андрей Зализняк обрастил этот скелет лингвистической плотью в своём знаменитом трактате «Русское именное словоизменение».

Тут самое время заметить, что скелеты всё же представляют скорее интерес для анатомов. И при всей пользе, которые могут извлечь художники от рисования скелетов, на картинах всё-таки изображаются скелеты, обросшие плотью. В качестве поучительного отступления перескажу свой разговор с Ираклием Луарсабовичем Андрониковым. Я спросил его, как ему удаётся добиваться не только голосового, но и портретного сходства с имитируемыми людьми. Он объяснил, что главное в похожести лица — это не геометрическая форма, которой он, разумеется, достичь не может, а мимика.

XII

Из только что сказанного как бы напрашивается вывод, что главная цель обучения гуманитариев математике состоит в обучении их математическим моделям или хотя бы в создании фундамента для такого обучения. Однако это не так.

Главная цель обучения гуманитариев математике — психологическая. Эта цель состоит не столько в сообщении знаний и даже не столько в обучении методу, сколько в изменении — нет, не в изменении, а в *расширении* психологии обучающегося, в привитии ему строгой дисциплины мышления (слово «дисциплина» понимается здесь, разумеется, не в значении 'учебный предмет', а в смысле приверженности к порядку и способности следовать этому порядку). Как сказал Ломоносов, «математику уже за то любить стоит, что она ум в порядок приводит».

Помимо дисциплины мышления я бы назвал ещё три важнейших умения, выработке которых должны способствовать математические занятия. Перечисляю их в порядке возрастания важности: первое — это умение отличать истину от лжи (понимаемой в обсуждённом выше объективном математическом смысле, т. е. без ссылки на намерение обмануть); второе — это умение отличать смысл от бессмыслицы; третье — это умение отличать понятное от непонятного.

Вливание элементов математической психологии в сознание гуманитариев (недруги такого вливания назвали бы его индоктринизацией, а то и интоксикацией) может осуществляться как в *прямой* форме, путём обучения в классах и аудиториях, так и в форме *косвенной*, путём проведения совместных исследований, участия математиков в проводимых гуманитариями семинарах и т. п.; к косвенным формам влияния относятся даже вопросы, задаваемые математиками на лекциях на гуманитарные темы. Здесь на память приходит известный случай из истории психологии. В конце XIX века в одной

из больших аудиторий Московского университета была объявлена лекция на тему «Есть ли интеллект у животных?». Просветиться на такую интригующую тему собралось несколько десятков, а то и сотен слушателей. Председательствовал заслуженный ординарный профессор математики Московского университета Николай Васильевич Бугаев — президент Московского математического общества (с 1891 года по 1903 год) и отец Андрея Белого. Перед началом доклада он обратился к аудитории с вопросом, знает ли кто-либо, что такое интеллект. Ответ оказался отрицательным. Тогда Бугаев объявил, что, поскольку никто из присутствующих не знает, что такое интеллект, лекция о том, есть ли он у животных, состояться не может. Это типичный пример косвенного воздействия математического мышления на мышление гуманитарное. Подобные формы воздействия также являются одним из элементов математического образования.

За последние полвека произошло заметное уменьшение количества непонятных или бессмысленных утверждений в отечественной литературе по языкознанию; полагаю, что это произошло не без влияния — как прямого, так и главным образом косвенного — математики. Случается, впрочем, и языковедам поправлять математиков. Наиболее существенную из таких поправок осуществил в отношении математика Фоменко лингвист Зализняк[16].

Разумеется, математики не претендуют на то, чтобы ответить на проблемы, возникающие в гуманитарных науках (хотя именно математику Колмогорову принадлежит первое научное определение лингвистического понятия 'падеж'). Но они помогают гуманитариям лучше уяснить суть этих проблем и критически отнестись к попыткам их решения.

Роль математики в подготовке гуманитариев можно сравнить с ролью строевой подготовки в обучении воина. Все эти ружейные артику́лы, повороты, строевой шаг и иные движения, которым обучают молодого бойца, вряд ли находят применение в реальном бою. Но во всех армиях мира они рассматриваются как необходимая основа всякого военного обучения, поскольку приучают выполнять команды. (Кстати, оперирование с математическими алгоритмами также приучает выполнять команды. «Сначала я вам скажу, что я делаю, а [только] потом объясню зачем» — это программное заявление содержится в одной из книг по методике математики.)

[16] *А. А. Зализняк.* Лингвистика по А. Т. Фоменко // Успехи математических наук. — 2000. — Т. 55. — Вып. 2. — С. 162—188. И подробнее: *А. А. Зализняк.* Из заметок о любительской лингвистике. — М.: Русскій міръ, 2009. — 240 с.

Строевая подготовка тренирует дисциплину — только не дисциплину мышления, как это делает математика, а дисциплину действий.

Другая аналогия — тренировка моряков на парусных судах. Не знаю, как сейчас, но во времена моей молодости всякий, кто обучался в гражданских мореходных вузах, в обязательном порядке проходил плавание на парусниках — и это притом, что применять полученные парусные навыки впоследствии ему вроде бы не приходилось. Тем не менее, обучение этим навыкам считалось (а может быть, и считается до сих пор) необходимой частью морской подготовки, необходимым тренингом. Сходным тренингом — тренингом мышления, наведением порядка в мозговых извилинах — служит математика.

XIII

Спросите «человека с улицы», в чём состоит аксиома о параллельных прямых и в чём состоит открытие Лобачевского. Эксперимент показывает, что на первый вопрос ответ будет в большинстве случаев таким (причём и в России, и в Америке): аксиома состоит в том, что параллельные прямые не пересекаются. А на второй вопрос ответ будет, скорее всего, таким: Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются. При этом отвечающий, как правило, знает, что прямые **называются** параллельными, если они лежат в одной плоскости и **не пересекаются**. В значительном числе случаев ответившего можно убедить в ошибочности обоих ответов. В случае вопроса об аксиоме многие (но не все!) понимают, что коль скоро слово «параллельные» — это синонимичное название для непересекающихся прямых, то объявлять непересекаемость параллельных аксиомой довольно бессмысленно (это всё равно как объявить такую аксиому: «всякий красный предмет является красным»; впрочем, ощутимое количество людей не имеют ничего против такой аксиомы). Что до открытия Лобачевского, то, в чём бы оно ни состояло, ясно, что прямые линии, называемые параллельными, пересечься не могут.

Вопрос про аксиому о параллельных не является, разумеется, вопросом на испытание памяти. Точно так же вопрос об открытии Лобачевского не является вопросом на проверку эрудиции. Оба вопроса — на понимание смысла делаемых утверждений. Строго говоря, вся ситуация лежит здесь не в сфере математики, а в сфере упоминавшейся выше логики русского или иного естественного языка. И это довольно типично: значительная часть того,

что происходит на уроках математики для гуманитариев, как раз и должна, по нашему разумению, состоять в обсуждении этой логики, а отчасти и в обучении ей. Математики впитывают семантику неосознанно, поскольку занятия математикой невозможны без чётко сформулированных утверждений. Столь же неосознанно у гуманитариев семантика размывается — не без влияния расплывчатых текстов гуманитарных наук. (И для гуманитария такая размытость семантики зачастую необходима.)

Диалог математика с гуманитарием о параллельных прямых мы считали бы полезным и поучительным для обеих сторон. Вот ещё пример такого полезного и поучительного диалога.

Математик. Возьмём прямую линию и точку на ней. Существует ли на этой прямой точка, ближайшая к нашей точке и лежащая справа от неё?

Гуманитарий. Да, существует.

Математик. Вы не возражаете, если исходную точку мы обозначим буквой A, а ближайшую к ней справа буквой B?

Гуманитарий. Не возражаю.

Математик. Вы согласны с тем, что любые две различные точки можно соединить отрезком?

Гуманитарий. Согласен.

Математик. Значит, можно соединить точки A и B и получить отрезок AB. Правильно?

Гуманитарий. Правильно.

Математик. А согласны ли вы с тем, что всякий отрезок имеет середину?

Гуманитарий. Согласен.

Математик. Значит, и у отрезка AB есть середина. Но ведь эта середина явно ближе к точке A, чем точка B. Меж тем, точка B — ближайшая к A. Как быть?

Гуманитарий. (*Не знает, что сказать.*)

Математик. Я лишь хотел обратить ваше внимание, что не могут одновременно быть истинными все три утверждения о существованиях: «Для всякого отрезка существует его середина», «Любые две различные точки можно соединить отрезком» и «Для точки на прямой линии существует ближайшая к ней точка справа».

Надо признать, впрочем, что ответ «Да, существует» на вопрос о ближайшей точке встречается хотя и весьма часто, но всё же реже, чем приведённые выше ответы о сущности аксиомы о параллельных и открытия Лобачевского.

Результатом диалога о ближайшей точке должно стать отнюдь не только уяснение гуманитарием того, что для данной точки не существует ближайшей к ней точки справа; несуществование такой точки — это, в конце концов, всего лишь математический факт. Не менее, а скорее даже более важным является уяснение математиком тех деталей психологии гуманитария, которая заставляет его считать, что такая точка существует. Дело в том, что представление о 'ближайшем' формируется у гуманитария (как и у всякого человека) не на основе изучения такого сложного и к тому же абстрактного образования, как континуум точек на прямой, а на основе наблюдений материальных предметов окружающего мира. Наблюдение же, скажем, окон дома или кресел в театральном зале не оставляет сомнений в наличии ближайшего справа окна или кресла (предвидя ехидное возражение мелочного педанта, прибавим: если только исходное окно или кресло не является крайним). Из сказанного можно сделать такое заключение: наш пример с ближайшей точкой есть конкретное проявление некоей общей трудности, имеющей философский характер. Трудность состоит в следующем. Математика изучает идеальные сущности (такими сущностями являются, в частности, точки), но обращается с ними, как если бы они были реальными предметами физического мира (например, применяет к точкам понятие 'ближайший'). Но в таком случае математик обязан отдавать себе отчёт, что подобный квазиматериальный подход к абстракциям, если не сделать специальных оговорок, влечёт перенесение на эти абстракции шлейфа таких представлений, которые абстракциям не свойственны, а заимствуются из обращения с физическими предметами. Что до упомянутых «специальных оговорок», они не делаются явно, а подсознательно впитываются математиками в процессе их обучения. В случае точек на прямой указанный шлейф включает в себя представление о точках на прямой как о мельчайших бусинах, нанизанных на натянутую нить. Разумеется, в рамках такого представления естественно предполагать наличие ближайшей точки и даже быть уверенным в таком наличии. В отличие от бусин, порядок точек на прямой является, в математической терминологии, ***плотным порядком***; термин «плотный» означает, что для любых двух участвующих в этом упорядочении объектов, каковыми в данном случае служат точки прямой, найдётся объект (в данном случае точка) между ними. В окружающем нас материальном мире плотных порядков не встречается.

Вот другой пример на ту же тему. Одной из математических абстракций является пустое множество. Само понятие 'множество', подобно понятию 'натуральное число', является одним из первичных,

неопределяемых математических понятий, познаваемых из примеров. Синонимом математического термина *множество* является слово *совокупность*; объекты, входящие в какую-либо совокупность, она же множество, называются её (соответственно его) *элементами*. Слово «множество» может навести на мысль, что в множестве должно быть много элементов — тем более, что главное общеязыковое значение этого слова действительно выражает эту мысль, как, например, во фразе «Можно указать множество причин...». Эта ложная мысль разрушается уже заявлением, что «множество» (в математическом смысле) и «совокупность» суть синонимы: ведь количество элементов в совокупности может быть и малым. Заметим, кстати, что переводы термина «множество» на французский язык («ensemble») и на английский язык («set») не содержат идеи 'много'. Зададимся теперь вопросом, может ли совокупность состоять из одного элемента. Математик ответит категорическим «да». Для гуманитария же минимально возможное количество элементов совокупности — это два. Но математики свободно оперируют и *пустым множеством*, вовсе не содержащим элементов. На занятиях по математике гуманитарии быстро усваивают это понятие (в частности, соглашаются, что пустое множество единственно: пустое множество крокодилов и пустое множество планет — это одно и то же множество).

Для математика наименьшим числом, возможным при ответе на вопрос «Сколько?», является число ноль. Для нематематика же наименьшим числом, возможным при ответе на вопрос «Сколько?», является число один. Скажем, если в зоопарке всего лишь один слон, то слово «один» будет естественным ответом на вопрос «Сколько слонов в этом зоопарке?». Хотя нематематик поймёт ответ «ноль» на вопрос «Сколько в этом бассейне крокодилов?» и даже, возможно, сам в состоянии дать подобный ответ, но всё же он скорее ответит так: «Да нет тут никаких крокодилов!». И уж точно он не задаст вопрос «Сколько?», не спросив предварительно «Есть ли в этом бассейне крокодилы?», и только после положительного ответа спросит, сколько их.

Как в примере с точками, так и в примере с пустым множеством общение математика с гуманитарием здесь более поучительно для математика, нежели для гуманитария. Потому что заставляет математика осознать, что он, математик, даже в таких простых, казалось бы, вопросах, ушёл в мир абстрактных сущностей и тем самым удалился от общечеловеческого словоупотребления и образа мыслей.

Поэтому математику негоже с высокомерием относиться к высказываниям гуманитария. Напротив, ему полезно осознать, что это он приписывает своим абстракциям такие свойства, которые в жизни не

встречаются. Заметим, что именно неограниченное, а потому незаконное перенесение на математические абстракции слов и смыслов, заимствованных из реальной жизни, и приводит, в конце концов, к *математическим* парадоксам, а именно к так называемым *парадоксам теории множеств*. Эти парадоксы появляются там, где с чрезвычайно высокими абстракциями начинают обращаться так, как обращаются обычно с реальными предметами.

Заметим, что ту же, по существу, природу — природу незаконного перенесения — имеют и парадоксы, которые обычно называют *логическими*, хотя правильнее было бы называть их *лингвистическими*. Так мы и будем их называть. Как только что отмечалось, математические парадоксы возникают при попытке оперировать с математическими сущностями путём обычных словоупотреблений. Лингвистические парадоксы возникают, напротив, при попытке оперировать с обычными словоупотреблениями так, как если бы они выражали точные математические понятия. Обычные словоупотребления, как правило, имеют расплывчатый смысл, и попытка придания им точного смысла как раз и приводит к парадоксам. Приведём для ясности три известных лингвистических парадокса.

Парадокс кучи. Это один из самых известных и древних парадоксов. Ясно, что если из кучи песка удалить одну песчинку, то тó, что останется, всё ещё будет кучей. Но ведь производя удаление достаточное количество раз, мы дойдём до одной единственной песчинки, каковая кучу не образует. Где же граница между кучей и не кучей? Ответ очевиден: слово «куча» имеет расплывчатый смысл, и потому искать точные границы этого смысла бесполезно.

Парадокс наименьшего числа. Возьмём «наименьшее натуральное число, которое не допускает определения посредством фразы, содержащей менее ста слов». С одной стороны, это число не допускает определения посредством менее ста слов. С другой стороны, взятая в кавычки фраза является его определением, причём таким, которое содержит менее ста слов. Разгадка в том, что мы обращаемся с выражением «определять натуральное число» так, как если бы оно имело точный смысл, какового в действительности оно не имеет. Достаточно задаться вопросом, какие слова можно использовать в определении. Можно ли, например, использовать названия редких растений, известные лишь узкому кругу ботаников, или специальные математические термины, или собственные имена людей (притом, что каждое такое имя принадлежит, как правило, нескольким людям)? Наш парадокс как раз и показывает, что обсуждаемому выражению точный смысл придать невозможно.

Парадокс гетерологичности. Назовём прилагательное гомологическим, если оно обладает тем свойством, которое это прилагательное выражает; в противном случае назовём его гетерологическим. Примеры: прилагательное «многосложный» само многосложно, и потому оно является гомологическим; прилагательное «односложный» не односложно, и потому оно является гетерологическим. Гомологическим или гетерологическим является прилагательное «гетерологический»? Если оно гомологическое, то, значит, оно обладает тем свойством, которое оно выражает, а свойство это — 'гетерологичность'; значит, рассматриваемое прилагательное — гетерологическое. Если же оно гетерологическое, то, обладая выражаемым им свойством гетерологичности, оно должно квалифицироваться как гомологическое. Как же быть? Всё дело в том, что слова «гомологический» и «гетерологический» не обладают точным смыслом, в презумпции какового происходит рассуждение. Толкование этих слов опирается на толкование словосочетания «свойство, выражаемое прилагательным», а при толковании этого словосочетания возникают значительные трудности. Возьмём, для примера, прилагательное *простой*. Возможно ли недвусмысленно указать свойство, выражаемое этим прилагательным? Где граница между простыми и непростыми сущностями? И подпадают ли под это свойство простые дроби, простые числа, простые вещества, простые эфиры и василистник простой (являющийся растением семейства лютиковых)?

XIV

Вернёмся, однако, к тому, чем математика может быть полезна всем — в частности, гуманитариям.

К воспитываемой на уроках математики дисциплине мышления относится осознание отчётливого различия между истиной и ложью (в вышеуказанном математическом значении слова «ложь»), между доказанным и всего лишь гипотетическим: ведь нигде эти различия не проявляются с такой чёткостью, как в математике. Автору очень хочется сказать, что математика — единственная наука, где достигается абсолютная истина, но он всё же на это не решается, так как подозревает, что абсолютность истины не достигается нигде. Но в любом случае математические истины ближе к абсолютным, чем истины других наук. Поэтому математика — наилучший полигон для тренировки на истину. Истина — основной предмет математики.

Духовная культура состоит не столько в знаниях, сколько в нормах. Нормы проявляются прежде всего в противопоставлениях. Эстетика

учит нас противопоставлению между прекрасным и безобразным, высоким и низким. Этика — между должным и недолжным, между нравственным, моральным и безнравственным, аморальным. Юриспруденция — между законным, правовым и незаконным, неправовым. Логика — между истинным и ложным. Но логика сама по себе не создаёт истин. Её законы носят условный характер: если то-то и то-то истинно, то неизбежно истинно то-то и то-то. (Точно так же теория вероятностей ни для какого события не назначает и не может назначать вероятности этого события, а лишь указывает, как по одним вероятностям вычислять другие. Например, она не утверждает, что при бросании монеты выпадение двух орлов подряд имеет вероятность одна четвёртая; она утверждает лишь, что если при одном бросании монеты выпадение орла имеет вероятность одна вторая и если результаты бросаний не зависят друг от друга, то выпадение двух орлов подряд имеет вероятность одна четвёртая.) Знаменитый силлогизм про смертность бедного Кая не утверждает, что Кай смертен, а утверждает лишь, что если все люди смертны и если Кай — человек, то и он, Кай, смертен.

Истину же поставляют конкретные науки, в том числе математика. Кажется, что математика становится, тем самым, на одну доску с другими науками. Но нет, это не так: её и только её истины могут претендовать на приближение к абсолютности, и если они даже не абсолютны, то «почти» абсолютны.

Приходится, однако, признать — математику со вздохом, гуманитарию с удовлетворением, — что в этой приближённости математических истин к абсолютным состоит некоторая ограниченность математики. Потому что тот мир, который дан нам в ощущениях, более адекватно отображается скорее в истинах, достаточно удалённых от абсолютных. Даже казавшиеся незыблемыми законы Ньютона оказались пригодными лишь для сравнительно узкой полосы между микро- и макромирами, а вне этой полосы требующими замены законами теории относительности. Что уж говорить о так называемых прописных истинах гуманитарной сферы, будь то истины моральные или эстетические, которые с трудом поддаются, а то и вообще не поддаются оценке в терминах «верно» и «неверно».

XV

Казалось бы, что может быть важнее и первичнее, чем умение отличать истинные высказывания от высказываний ложных. Однако ещё более важным, ещё более первичным является умение отличать

осмысленные высказывания от бессмысленных. Вот характерный пример бессмысленного высказывания: «рассмотрим совокупность *всех* слов, имеющих хотя бы одну общую букву». Бессмысленность этого заявления вызвана тем, что такой совокупности не существует. В самом деле, «рот» и «сыр» имеют общую букву эр и потому должны принадлежать этой совокупности. Слово «око» должно принадлежать этой совокупности, поскольку имеет общую букву со словом «рот», и не должно ей принадлежать, поскольку не имеет общих букв со словом «сыр». Мы потому назвали пример характерным, что подобные псевдоконструкции, ничего на самом деле не конструирующие, были довольно типичны для литературы по языкознанию несколько десятилетий назад. Возникало даже парадоксальное удовлетворение, когда некоторое опубликованное утверждение можно было квалифицировать как всего лишь ложное, — чувство удовлетворения возникало потому, что ложность утверждения свидетельствовала о его осмысленности.

В диалоге преподавателя-математика со студентом-гуманитарием зачастую приходится просить студента вдуматься в то, что он только что сказал, и затем спросить его, понимает ли он то, что сам сказал. Не столь уж редко честные студенты после размышления в некоторой растерянности признаются, что не понимают.

Когда знаменитого педиатра доктора Спока спросили, с какого возраста следует воспитывать ребёнка, он, узнав, что ребёнку полтора месяца, ответил: «Вы уже опоздали на полтора месяца». Не следует ли способность отличать осмысленное от бессмысленного и истинное от ложного неназойливо прививать уже с начальных классов школы? И не является ли это главным в школьном преподавании?

Надо сказать, что для того, чтобы квалифицировать высказывание как ложное, бессмысленное или непонятное, надо, как правило, сделать некоторое усилие — иногда почти героическое: «как же так, уважаемый человек что-то говорит или пишет, а ты осмеливаешься его не понимать или, поняв, возражать». Не все и не всегда способны на такое усилие.

XVI

Способность к тому усилию, о котором только что говорилось, тренируется (во всяком случае, должна тренироваться) на уроках математики и при общении с математиками. Дело в том, что математика — наука по природе своей демократическая. На её уроках воспитывается — а при косвенном воздействии прививается —

демократизм. Внешние формы такого демократизма произвели большое впечатление на автора этих строк в его первые студенческие годы, когда в конце 1940-х годов он стал обучаться на знаменитом Мехмате — Механико-математическом факультете Московского университета. Если почтенный академик обнаруживал, что выступающий вслед за ним студент собирается стереть с доски им, академиком, написанное, он с извинениями вскакивал с места и стирал с доски сам. Для профессора Мехмата было естественно самому написать и вывесить объявление; для профессора гуманитарного факультета это не было столь естественно. Эти внешние проявления косвенно отражают глубинные различия. Ведь математическая истина не зависит от того, кто её произносит, академик или школьник; при этом академик может оказаться неправ, а школьник прав. Реакция Колмогорова на третьекурсника, опровергнувшего его на лекции, была такова: он пригласил студента к себе на дачу и там покатался с ним на лыжах, накормил обедом и взял себе в ученики. С горечью приходится признать, что подобный демократизм имеет свои издержки. Указывает Андрей Анатольевич Зализняк[17]:

> Мне хотелось бы высказаться в защиту двух простейших идей [. . .]:
>
> 1) Истина существует, и целью науки является её поиск.
>
> 2) В любом обсуждаемом вопросе профессионал (если он действительно профессионал, а не просто носитель казённых титулов) в нормальном случае более прав, чем дилетант.
>
> Им противостоят положения, ныне гораздо более модные:
>
> 1) Истины не существует, существует лишь множество мнений (или, говоря языком постмодернизма, множество текстов).
>
> 2) По любому вопросу ничьё мнение не весит больше, чем мнение кого-то иного. Девочка-пятиклассница имеет мнение, что Дарвин неправ, и хороший тон состоит в том, чтобы подавать этот факт как серьёзный вызов биологической науке.

Чем наука дальше от математики, чем она, так сказать, гуманитарнее, тем сильнее убедительность того или иного высказывания начинает зависеть от авторитета высказывающего лица. На гуманитарных факультетах подобная персонализация истины ещё недавно ощущалась довольно сильно. *Это верно, потому что сказано имяреком* или даже *Это верно, потому что сказано мною* — такие категорические заявления, высказанные в явной или, чаще, неявной

[17] В книге: Похвала филологии. — М.: Русский путь, 2007. — С. 79. А также в книге: *А. А. Зализняк*. Из заметок о любительской лингвистике. — М.: Русскій міръ, 2009. — С. 210.

форме, не столь уж редки в гуманитарных науках. (Как имярек в первой фразе, так и первое лицо во второй фразе обычно относились как раз к одному из тех «носителей казённых титулов», о которых говорит Зализняк.) В естественных науках и в математике подобные заявления невозможны. Впрочем, в тоталитарном обществе принцип приоритета того, кто на должность авторитета назначен властью, применялся, с печальными последствиями, и к естественным наукам — достаточно вспомнить лысенковщину. Проживи Сталин дольше, возможно, была бы заменена и таблица умножения. Попытки отменить, скажем, теорию относительности имели место в действительности.

Нет в математике и «царского пути». Здесь я ссылаюсь на известную историю, то ли подлинную, то ли вымышленную, которую одни рассказывают про великого математика Архимеда и сиракузского царя Гиерона, другие про великого математика Евклида и египетского царя Птолемея. Царь выразил желание изучить геометрию и обратился с этой целью к математику. Математик начал его обучать. Царь выразил недовольство тем, что его учат совершенно так же, в той же последовательности, как и всех других, не принимая во внимание его царский статус, каковой особый статус, по мнению царя, предполагал и особый способ обучения. На что математик, по преданию, ответил: **Нет царского пути в геометрии**.

Эпилог

Первоначальный, журнальный вариант этого очерка был напечатан в 2007 году в виде статьи в декабрьском номере журнала «Знамя». Даже самые доброжелательные критики не могли не предъявить тексту упрёка в односторонности. Хотя и чувствуется, говорили они, что автор желает примирить «физиков» и «лириков» на основе презумпции равенства сторон, но на деле этого подразумеваемого равенства не получилось. Каковы бы ни были самые добрые намерения автора, в статье декларируемое преодоление барьера реально осуществилось путём агрессии с математической стороны: математическое проламывает барьер и, вторгшись на территорию гуманитарного, начинает устанавливать там свои порядки. Автор вынужден был признать справедливость критики. Готовя текст для включения в книгу «Апология математики», выпущенную издательством «Амфора» в 2009 году, он пытался эту критику учесть. Но всё равно получалось, что математик выступает в роли поучателя для гуманитария. Такое положение вещей автору определённо не нравилось и, главное, не отвечало его

замыслу. Автор стал размышлять, почему так получилось. Результатами своих размышлений он и хотел бы поделиться с читателем в настоящем эпилоге.

Дело в том, что каждое из слов *математик* и *гуманитарий* употребляется в тексте в двух смыслах, или пониманиях. Эти смыслы не указаны явно, но могут, при желании, быть извлечены из контекста. Первое понимание подразумевает и математика, и гуманитария в их профессиональной сфере деятельности. Второе понимание подразумевает и того, и другого в быту. При этом втором понимании объёмы терминов *математик* и *гуманитарий* расширяются. Говоря о поведении в быту, к *математикам* мы относим не только профессиональных математиков, но и просто людей с математически ориентированными мозгами; к *гуманитариям* относим почти всех остальных представителей человеческого рода.

Каждое из этих пониманий приводит к своему направлению преодоления барьера. Иными словами, выбор того или иного понимания определяет, с какой стороны происходит или должно происходить это преодоление — математическое ли влияет на гуманитарное, его математизируя, или же, напротив, гуманитарное влияет на математическое, его гуманизируя.

Условный математик вряд ли поможет гуманитарию в его бытовом поведении, но вот в профессиональной деятельности может помочь. Термин *условный математик* не следует понимать в вульгарном смысле математика, который нависает над гуманитарием и подаёт ему непрошенные советы. Этим термином обозначается здесь абстрактная персонификация математического. Математическое же может проявляться в разных формах, в том числе и в виде реального лица, в пессимальном случае действительно, увы, «нависающего над», а в случае оптимальном — в виде доброжелательного критика, обращающего внимание гуманитарного исследователя на недостаток, скажем, ясности, логики или точности. Наиболее успешный результат математического влияния, к которому надлежит стремиться, состоит в усвоении гуманитарием той дисциплины мышления, о которой шла речь в настоящем очерке, т. е. в создании некоего небольшого условного математика в своём мозгу. (Теоретически усвоение дисциплины мышления должно происходить на уроках математики в школе, практически же этого не происходит, поскольку математика редко когда преподаётся интересно, да и вообще преподаётся не та математика, которой следовало бы обучать школьников.)

Гуманитарий же, напротив, вряд ли поможет математику в его профессиональной деятельности, но вот в бытовом поведении может

помочь. Он, прямо или косвенно, может привить математику общечеловеческие нормы использования языка. Среди них — те нормы восприятия синтаксических конструкций, которые требуют учёта контекста («предлагаемых обстоятельств», как сказал бы Станиславский) и тем предписывают купить не десять батонов (как математик из приведённого в разделе IV анекдота), а десять яиц. А также нормы, регулирующие употребление отдельных слов — например, слова *неподалёку*, обсуждавшегося в разделе VI. Возможно, слово «норма», даже с эпитетом «общечеловеческая», здесь слишком узко. Потому что, скажем, рекомендации по составлению инструкций вряд ли поддаются регламентации, предполагаемой термином «норма». Ведь одна из главных рекомендаций состоит в том, что текст инструкции должен быть лёгок для понимания, а именно этой лёгкости была лишена электоральная инструкция, приведённая в разделе V. Безупречная с точки зрения синтаксиса и семантики и, тем самым, полностью устраивающая *математиков* (в широком смысле слова), она была, как показала практика, трудна для понимания *гуманитариями* (опять-таки в широком смысле слова) и, тем самым, неудачна. Лингвист сказал бы, что текст инструкции неудовлетворителен с точки зрения прагматики.

И ещё одно немаловажное обстоятельство. Основная форма влияния математического на гуманитарное, при всей роли школы (не реальной, впрочем, роли, а той, которая должна быть) и прочих общественных институтов, — это всё-таки личное влияние математика-человека. Такое положение вещей не может не представить математика в незавидной роли высокомерного поучателя, каковым он, в целом, не является. Напротив, основная форма влияния гуманитарного на математическое деперсонализирована и не выглядит как личное влияние какого-то гуманитария. Влияние гуманитарного на математическое осуществляется путём мощного давления среды, при условии, что эта среда, в широком смысле преимущественно гуманитарная, сумеет победить желание математика от неё отгородиться.

Приложение

Окончательный текст настоящего очерка возник с учётом многочисленных дискуссий с Андреем Анатольевичем Зализняком. Ознакомившись с финальным вариантом, он прислал мне письмо, каковое, с любезного разрешения Андрея Анатольевича, и составляет содержание этого приложения.

Разрешите мне, раз уж я погружался в Ваш текст, порассуждать немного от себя на эти темы.

Об общеязыковом и математическом значении слов

Слова обычного языка с их значениями веками и тысячелетиями складывались на основе человеческой практики. Если в практической жизни человека какая-то шкала представлена только в определённых границах, то соответствующее слово получает значение, предполагающее эти границы (т. е. указание этих границ является одним из элементов этого значения).

Например, человек видит цвета только в определённом интервале длины волны. Аналогично со звуком.

И поэтому инфракрасное и ультрафиолетовое излучение обычный обиходный язык никак не может назвать цветом (каким-то ещё одним цветом). Или ультразвук — звуком.

А наука (физика, математика) достигает понимания того, что та или иная шкала в действительности шире, чем её практически известный людям интервал.

И вот возникает терминологическая проблема: как называть теперь в соответствующей науке всю шкалу и как называть её непрактические (нетрадиционные) части?

Возможные решения таковы:

1) ввести новые термины (либо специально изобретённые, либо взятые из числа уже существующих слов языка, но не тех, которые обозначают практическую часть данной шкалы);

2) использовать обычные общеязыковые обозначения шкалы и её элементов, объявив, что в науке им приписывается новое, более широкое значение;

3) то же, что 2, но без объявления о новом значении.

Физики, по-видимому, обычно идут по пути 1. Расширенная шкала цветов называется уже, если не ошибаюсь, шкалой длины волны и т. п. Ультрафиолет цветом называть не предлагается.

У математиков в деле счёта практически известный человечеству интервал составляет от единицы до несколько неопределённой границы, имеющей последние числительные (тысяча?, тьма? может быть, миллион, хотя скорее он уже из умозрительной сферы). Этому соответствуют слова *число*, *количество*, *сколько*.

Обсуждавшееся нами слово *совокупность* по своему объёму меньше указанных слов на единицу: его значение начинается с двух. Но это слово стоит не совсем в той же категории, что *число*, *количество*, *сколько*, — оно почти чуждо обычному обыденному языку, а принадлежит фактически уже либо официальному, либо научному (или полунаучному) узусу.

Математики в ходе истории совершили (уже в древности) такое же расширение практической шкалы, как в предшествующих примерах. В сторону увеличения количеств — с идеей бесконечности. И в сторону их уменьшения — с идеей сперва нуля, а затем отрицательных чисел.

Насколько я понимаю, они потом применяли такой же мыслительный ход — выявление общего принципа структуры некоторой цепочки элементов и его экстраполяцию (применение за рамками первоначального состава этой цепочки) — во многих других случаях. Например, в появлении отрицательных степеней, дробных степеней, мнимых чисел, новых измерений.

Но, в отличие от физиков, терминологическое решение у математиков обычно было типа 2 или даже 3. Например, и дробные, и отрицательные, и даже мнимые — все они называются *числа*.

Склонность к решению 3 в значительной мере коррелирована с представлением, что достигнутое наукой расширение значения некоторого понятия означает приближение к «более правильному» значению использованного для этого понятия общеязыкового слова. Например, что неправильно понимают слово *число* те, кто не знает, что числом является также и нуль и, скажем, минус единица. Соответственно, у математика легко может возникать представление, что он лучше простых носителей языка знает, что значат слова (если не все, то многие).

Всё это категорически не соответствует тому, что достигнуто лингвистикой, но имеет вполне прозрачную психологическую поддержку.

Проблема «ничего не сообщается»

Вы подчёркиваете, что при аксиоматическом методе «природа вводимых в рассмотрение предметов и отношений никак не разъясняется», о них ничего не сообщается.

Хочу обратить Ваше внимание на то, что гуманитарный читатель решительно не может воспринять эту Вашу фразу так, как Вы её замыслили.

Причина — в словах! Если бы у Вас вместо *точки* была *папагиглемма*, а вместо *прямой* — *сепулька*, то Ваше заявление было бы полностью психологически оправданно[18]. Но когда Вы что-то говорите о точках и прямых, никакими силами носитель языка — нематематик не может освободиться от подсознательного ощущения, что он всё основное о характере обсуждаемых предметов знает, сколько бы Вы ни приказывали ему считать, что он ничего не знает, кроме аксиом. Как это он может ничего не знать о том, что такое точка или что такое прямая?! Пользуясь Вашей любимой максимой, «знание скрыть невозможно».

Это — очень большая и очень глубокая трудность на пути Вашей пропаганды математичности. То, что математики узурпируют слова из общенародного фонда, сами обычно этого не осознавая (во всяком случае, не осознавая последствий этого), оборачивается одной из причин той самой их отгороженности, от которой Вы их приглашаете освободиться. Отгороженности, при которой пересечение барьера плохо даётся как одной стороне, так и другой.

[18] Андрей Анатольевич, конечно, совершенно прав. В моей статье «Апология математики», вошедшей в состав одноимённого сборника, так и сделано, только там, на с. 163, вместо слова *точка* использовано слово *куздра*, и слово *бокр* вместо слова *прямая*. — *В. У.*

Из брошюры «Простейшие примеры математических доказательств»

Математика и доказательства. — Индукция. — Два аксиоматических метода — неформальный и формальный. — Теорема Гёделя.

Математика и доказательства

Даже незнакомый с математикой человек, взяв в руки книгу по математике, может, как правило, сразу определить, что эта книга действительно по математике, а не по какому-нибудь другому предмету. И дело не только в том, что там обязательно будет много формул: формулы есть и в книгах по физике, по астрономии или по мостостроению. Дело в том, что в любой серьёзной книге по математике непременно присутствуют *доказательства*. Именно доказуемость математических утверждений, наличие в математических текстах доказательств — вот что нагляднее всего отличает математику от других областей знания.

Первую попытку охватить единым трактатом всю математику предпринял древнегреческий математик Евклид в III веке до н. э. В результате появились знаменитые «Начала» Евклида. А вторая попытка состоялась только в XX веке н. э., и принадлежит она французскому математику Николя́ Бурбаки́[1], начавшему в 1939 году

Простейшие примеры математических доказательств. — (Библиотека «Математическое просвещение»; Вып. 34). — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. — 56 с.

[1] На самом деле такого математика не существует. Николя́ Бурбаки́ — это коллективный псевдоним группы математиков, подобно тому как «Козьма Прутков» — коллективный псевдоним группы писателей (но только, в отличие от группы Бурбаки, группы постоянного состава). Сказанное не послужило препятствием ни тому, чтобы г-н Бурбаки имел свой почтовый ящик на Международном съезде математиков в Москве в 1966 году (причём почта из ящика исправно забиралась), ни тому, чтобы он получил гонорар, выписанный ему издательством «Мир» за осуществлённое в 1965 году издание русского перевода первого тома его трактата. Рассказывают, что когда Американское математическое общество выпустило справочник, в котором Бурбаки был назван псевдонимом группы математиков, возмездие последовало незамедлительно: в одной из публикаций Бурбаки президент Американского математического общества был назван точно так же.

издавать многотомный трактат «Начала математики». Вот какой фразой открывает Бурбаки свой трактат: «Со времён греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“». Таким образом, «математика» и «доказательство» — эти два слова объявляются почти синонимами.

Казалось бы, можно возразить, что доказательства встречаются и в других сферах — скажем, в юриспруденции. Например, в суде каждая из спорящих сторон предъявляет свои доказательства (причём доказательства одной стороны нередко противоречат доказательствам другой стороны). Однако все согласны, что математические доказательства гораздо убедительнее тех, которые произносятся в судах.

Доказательства, собственно, встречаются во всех науках, даже в науках гуманитарных. Приведу два примера: первый из исторической науки, второй — из филологии.

Первые шаги в науке великого российского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) были сделаны не в математике, а в истории[2] и относились к истории Новгородской земли XV века.

Колмогоровские разыскания содержали, в числе других достижений, ответ на вопрос, как брался налог с селений Новгородской земли — с селения в целом или же с каждого его двора. Опровергая господствующее мнение, Колмогоров доказал, что налог брался с селения в целом. Доказательство состояло в том, что в противном случае правило налогообложения должно было бы быть чересчур сложным. Проведённый Колмогоровым анализ новгородских писцовых книг, в которых наряду с другими сведениями записывались сведения о налогообложении, привёл к следующим результатам. Налог с больших селений всегда брался в целых единицах, к тому же в большинстве случаев — в круглых цифрах. Налог со средних селений брался, в основном, также в целых единицах. Налог с небольших селений мог составлять как целое, так и дробное число налоговых единиц, но это дробное число всегда имело вид целого

[2] Над рукописями своих исторических исследований Колмогоров начал работать, когда ему было семнадцать с половиной лет, а закончил их в 1922 году, когда ему ещё не было девятнадцати. В то время он был студентом Московского университета. Эти рукописи долгое время считались утерянными, они были найдены лишь после смерти Колмогорова и опубликованы в книге: *А. Н. Колмогоров*. Новгородское землевладение XV века; *Л. А. Бассалыго*. Комментарий к писцовым книгам Шелонской пятины. — М.: Физматлит, 1994. (Да, книга имеет такое сложное библиографическое описание. Она состоит из двух самостоятельных сочинений, имеющих каждое своего автора.) После опубликования колмогоровские рукописи по истории получили высокую оценку специалистов.

числа с половиной. Более того, во многих случаях, когда налог с небольших селений брался в целых единицах, дворов в селении оказывалось больше, чем число налоговых единиц, взымаемых с селения. Кажется невероятным, чтобы налог был подворным и его ставки были столь хитроумны, чтобы достигнуть таких числовых эффектов!

Теперь пример из филологии. Долгое время предметом ожесточённых спекуляций служил вопрос о подлинности «Слова о полку Игореве», т. е. вопрос о том, создано ли оно в XII—XIV веках, что и означает подлинность, или же является подделкой, относящейся, скорее всего, к XVIII веку. Великий российский лингвист Андрей Анатольевич Зализняк доказал подлинность «Слова». Доказательство опирается на анализ раскрытых Зализняком тончайших закономерностей древнерусского языка. Невероятно, чтобы мог существовать такой фальсификатор, который не только знал бы эти закономерности, иные из коих были обнаружены лишь недавно, но и скрыл своё знание от современников! (Это при том, что, как известно, незнание можно скрыть, знание скрыть невозможно.)

В обоих наших рассказах о доказательствах в гуманитарных науках мы употребили слово ***невероятно***, а не слово ***невозможно***. Дело в том, что в обоих случаях всё-таки остаётся некоторая, пусть ничтожно малая, вероятность того, что в действительности налог был подворным, а «Слово» — подделкой. Требуется ли ещё уменьшать эту вероятность? На мой взгляд, в приведённых примерах не требуется — но этот взгляд субъективен. И если кто-нибудь потребует сделать вероятность опровержения открытий, сделанных Колмогоровым и Зализняком, ещё ничтожнее, против этого будет трудно возразить. Вот, например, как реагировал на сообщение Колмогорова известный историк С. В. Бахрушин, когда работа была рассказана на занятиях его семинара в Московском университете. Пишет известный археолог, руководитель новгородской археологической экспедиции В. Л. Янин:

> Когда работа была доложена им [Колмогоровым] на семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как «в исторической науке каждый вывод должен быть обоснован несколькими доказательствами» (!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика навсегда приобрела его.

Думается, позиция Бахрушина имеет следующее объяснение. Он привык к тому, что обычно применяемые в исторической науке доказательства допускают, каждое в отдельности, ощутимую, но не ничтожно малую вероятность того, что доказанное утверждение не соответствует действительности; а посему, для уменьшения этой вероятности, требуется несколько доказательств. Возможно, он впервые услышал доказательство, уже в единственном числе делающее указанную вероятность пренебрежимо малой, — услышал, но не осознал.

Вернёмся, однако, к математике. Математические доказательства повсеместно признаются эталоном бесспорности. Выражения вроде «я тебе докажу математически», встречающиеся в русской классической литературе, призваны продемонстрировать доказательство, которое нельзя оспорить.

Но что же такое доказательство? Доказательство — это рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других *с помощью этого же рассуждения*. Так понимается доказательство всюду — и в истории, и в филологии, и в математике. Во избежание недоразумений и возможного возмущения просвещённых читателей (если таковые найдутся среди читателей этого текста) отметим, что есть и другое понимание того, что такое доказательство. По Бурбаки, например, доказательство — это цепочка символов, организованная по определённым правилам. Полагаем, однако, что наше понимание не является чем-то оригинальным, а отражает то стандартное употребление слова *доказательство*, которое имеет место и в средней, и в высшей школе. Те математические объекты, которые называет доказательствами Бурбаки, разумно называть *формальными доказательствами* — в отличие от содержательных, психологических доказательств, о которых мы здесь говорим. Формальные доказательства составляют предмет изучения математической логики. Заметим ещё, что, на наш взгляд, и Бурбаки не может избежать содержательных доказательств: ведь чтобы убедиться, что данная цепочка символов является формальным доказательством, требуется провести содержательное рассуждение, т. е. именно психологическое доказательство.

Отличие математического доказательства от доказательств в других науках состоит в том, что в математике порог убедительности значительно выше. Можно сказать, что математические и нематематические доказательства имеют разные амбиции. Нематематические доказательства претендуют на то, чтобы убедить в следующем: доказываемое утверждение имеет место с подавляющей вероятностью,

а предположение, что это не так, невероятно. Математические доказательства претендуют на то, чтобы убедить в следующем: доказываемое утверждение имеет место с необходимостью, а предположение, что это не так, невозможно. Так, уже отмечалось, что в приведённых выше примерах из истории и филологии оставалась возможность, пусть совершенно невероятная, что в действительности дело обстояло иным образом. И даже демонстрация нескольких доказательств, как того требовал Бахрушин, всего лишь повысила бы степень невероятности, но не превратила бы её в невозможность. В математических же доказательствах *невероятность* противоположного эффекта — т. е. допущения того, что доказанное утверждение неверно, — заменяется на *невозможность*. Поэтому в математических доказательствах убедительность должна быть абсолютной, не оставляющей никакой возможности для противоположного суждения.

Предвидим протест или, по меньшей мере, удивление некоторых читателей. Как же так, такое важное математическое понятие, как доказательство, а имеет такое нечёткое определение — да и вообще не определение, а описание, пояснение. На это у нас два возражения. Во-первых, даже и в математике всё определить невозможно: ведь одни понятия определяются через другие, другие через третьи, и т. д. Но этот процесс не может продолжаться бесконечно. Поэтому мы вынуждены где-то остановиться. Во-вторых, понятие доказательства не есть математическое понятие (подобное, скажем, понятию действительного числа или понятию многоугольника); по отношению к математике оно не *внутреннее*, а *внешнее* и принадлежит не математике, а психологии (и отчасти лингвистике). Однако невозможно представить себе современную математику без повсеместного использования этого понятия.

Можно ли предложить разумную классификацию всевозможных доказательств, т. е. убедительных рассуждений? Вряд ли. Тем более, что доказательство, как правило, состоит из нескольких (иногда очень многих) этапов, и на каждом этапе применяется свой способ убеждения. Можно, однако, среди схем доказательства выделить несколько часто повторяющихся; ниже некоторые из таких схем будут изложены. Чтобы не дезориентировать читателя, сделаем два предупреждения.

Предупреждение первое. Было бы глубоким заблуждением считать, что других методов доказательства не бывает! Да и само выделение схем достаточно условно. Ведь нередко случается, что одна схема «залезает» внутрь другой — скажем, внутри доказатель-

ства по индукции может встретиться доказательство от противного или наоборот.

Предупреждение второе. Все примеры, которые будут приведены ниже, содержат лишь очень простые и короткие доказательства. Многие доказательства, встречающиеся в математической науке, и гораздо сложнее, и гораздо длиннее: их длина может измеряться десятками, сотнями и даже тысячами страниц. Поясним, откуда могут взяться эти тысячи. Дело в том, что каждое доказательство опирается на какие-то факты, и если включить в него и полные доказательства всех этих фактов, то тут-то и могут потребоваться тысячи страниц.

Индукция

Доказательства методом математической индукции

Метод математической индукции применяется тогда, когда хотят доказать, что некоторое утверждение выполняется для всех натуральных чисел.

Пример 21. Продемонстрируем метод математической индукции на простом примере. Пусть, например, мы хотим доказать, что всегда $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Рассуждаем так. Во-первых, для $n=1$ это утверждение верно; действительно, $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Во-вторых, предположив, что наше утверждение верно для $n=k$, убеждаемся, что тогда оно верно и для $n=k+1$. Действительно,

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Значит, наше утверждение верно для всех значений n: действительно, оно верно для $n=1$ (это было наше «во-первых»), а тогда, в силу «во-вторых», оно верно для $n=2$, откуда, в силу того же «во-вторых», оно оказывается верным и для $n=3$, и т. д. □

Пример 22. *Равенство Ададурова* (названо по имени нашедшего его российского математика XVIII века Василия Евдокимовича Ададурова):

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

Доказываем по индукции. Для $n=1$ проверяем непосредственно.

Предположим, что равенство верно при $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и при $n = k + 1$ (при этом используем результат примера 21):

$$[1+2+3+\ldots+k+(k+1)]^2 =$$
$$= [1+2+3+\ldots+k]^2 + 2[1+2+3+\ldots+k](k+1) + (k+1)^2 =$$
$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + 2\left[\frac{k(k+1)}{2}\right](k+1) + (k+1)^2 =$$
$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 =$$
$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3.$$

Проведённое рассуждение показывает, что наше равенство верно не только при $n = 1$, но и при $n = 2$, $n = 3$, и т. д. — и тем самым при всех n. □

Изложенный метод рассуждения требует установления двух фактов:

(1) интересующее нас утверждение верно для единицы;

(2) если интересующее нас утверждение верно для какого-то числа k, то оно верно и для следующего за ним числа $k + 1$.

Если оба факта установлены, тогда, переходя от 1 к 2, от 2 к 3 и т.д., убеждаемся — подобно тому, как мы в этом убедились в только что приведённых примерах 21 и 22, — в том, что рассматриваемое утверждение верно для *всех* натуральных чисел.

Первый факт называется *базисом индукции*, второй — *индукционным переходом* или *шагом индукции*. Индукционный переход включает в себя *посылку*, или *предположение индукции*, или *индукционное предположение*, и *заключение*. Смысл посылки: рассматриваемое утверждение верно при $n = k$. Смысл заключения: рассматриваемое утверждение верно при $n = k + 1$. Сам же индукционный переход состоит в переходе от посылки к заключению, т. е. в заявлении, что заключение верно, коль скоро верна посылка. Весь в целом логический приём, позволяющий заключить, что рассматриваемое утверждение верно для всех натуральных чисел, коль скоро справедливы и базис, и переход, называется так: *принцип математической индукции*. Использование этого принципа и составляет *метод математической индукции*.

Таким образом, обстановка, позволяющая надеяться (всего лишь надеяться!) на успешное применение метода математической индукции, должна быть такова. Имеется некоторое утверждение **A**, зависящее от параметра, принимающего натуральные значения; требуется доказать, что **A** справедливо при всяком значении параметра. Так, в примере 21 утверждение **A** имело вид $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Сам параметр называется *параметром индукции*; говорят также, что происходит *индукция по данному параметру*.

Утверждение **A** при значении параметра, равном 1, принято обозначать через **A**(1), при значении параметра, равном 2, — через **A**(2) и т. д. В примере 21 **A**(10) есть $1+2+3+\ldots+10=\frac{10(10+1)}{2}$.

Утверждения **A**(1), **A**(2), **A**(3), ... называют *частными формулировками*, утверждение «для всякого n имеет место **A**(n)» называют *универсальной формулировкой*. Таким образом, в наших теперешних обозначениях *базис индукции* есть не что иное, как частная формулировка **A**(1). А *шаг индукции*, или *индукционный переход*, есть утверждение «каково бы ни было k, из истинности частной формулировки **A**(k) вытекает истинность частной формулировки **A**($k+1$)».

Применение метода начинается с того, что формулируются два утверждения: базис индукции и её шаг. Здесь проблем нет. Проблема состоит в том, чтобы доказать оба эти утверждения. Если это не удаётся, это означает, что наши надежды на применение метода математической индукции не оправдались. Зато если нам повезло, если нам удалось доказать и базис, и шаг, то доказательство универсальной формулировки получаем уже без всякого труда, применяя следующее *стандартное рассуждение*.

> Утверждение **A**(1) истинно, поскольку оно есть базис индукции. Применяя к нему индукционный переход, получаем, что истинно и утверждение **A**(2). Применяя к нему индукционный переход, получаем, что истинно и утверждение **A**(3). Применяя к нему индукционный переход, получаем, что истинно и утверждение **A**(4). Таким способом мы можем дойти до каждого значения n и убедиться, что **A**(n) истинно. Следовательно, для всякого n имеет место **A**(n), а это и есть та универсальная формулировка, которую требовалось доказать.

Принцип математической индукции заключается, по существу, в разрешении не проводить «стандартное рассуждение» в каждой отдельной ситуации. Действительно, стандартное рассуждение только что было обосновано в общем виде, и нет нужды повторять его каждый раз применительно к тому или иному конкретному выражению **A**(n). Поэтому *принцип математической индукции позволяет делать заключение об истинности универсальной формулировки сразу, как только установлены истинность базиса индукции и индукционного перехода.*

Полная индукция и неполная индукция

Метод *индукции*, в самом общем смысле, состоит в переходе от частных формулировок к формулировке универсальной. Различают *полную* и *неполную* индукцию. Метод математической индукции позволяет, применяя некоторое логическое рассуждение к произвольному натуральному числу, убедиться, что **A** истинно *для этого произвольного* числа, а тем самым — убедиться, что **A**(n) истинно для всех n. В этом смысле этот метод является методом *полной* индукции; слово *полная* означает, что мы лишь тогда считаем себя вправе объявить об истинности универсальной формулировки, когда мы убедились в её истинности для каждого отдельного значения n — во всей полноте этих значений, без исключения. Метод *неполной* индукции состоит в переходе к универсальной формулировке после проверки частных формулировок для отдельных, но не всех значений n.

Примеры неполной индукции встречаются на каждом шагу. Скажем, если не все, то многие знают, что Бенджамин Франклин был президентом Соединённых Штатов. «Президент Франклин» — такое можно услышать и от кассира в банке, и с экрана телевизора, причём от персонажей, которых трудно заподозрить в глубоком знании американской политической истории. А откуда же известно это качество Франклина? Дело в том, что на лицевой стороне долларовых банкнот помещены заключённые в овал портреты американских президентов — и это уже, можно сказать, знают все. И действительно, на однодолларовой купюре изображён первый президент Джордж Вашингтон, на двухдолларовой — третий президент Томас Джефферсон, на пятидолларовой — шестнадцатый президент Авраам Линкольн, на двадцатидолларовой — седьмой президент Эндрю Джэксон, на пятидесятидолларовой — восемнадцатый президент Улисс Грант. Однако попытка установить порядковый номер президентства Франклина встречает непреодолимые затруднения. Дело в том, что Франклин не был президентом США. (Как не был президентом США и Александр Гамильтон, чей портрет украшает десятидолларовую купюру.)

Только что был приведён наглядный пример провала метода неполной индукции. Тем не менее любой человек в своей повседневной жизни постоянно применяет и не может не применять этот метод. Вот, например, вы покупаете яблоки; вам предлагают попробовать; вы пробуете, яблоко вам нравится, и вы покупаете два кило, применив неполную индукцию, т. е. рассуждая так: «Если одно яблоко хорошее, то и все хороши». Однако ведь не исключено, что, в отли-

чие от выбранного вами на пробу образца, все купленные яблоки окажутся плохими. Да, не исключено, но надкусить *все* яблоки вам не дадут, потому что надкус выводит яблоко из категории товаров.

Если магазин, закупающий яблоки ящиками, серьёзно подходит к делу, он подвергнет дегустации не одно, а несколько яблок (но, конечно, не все яблоки) из каждого ящика. Если результат дегустации оказался положительным, магазин закупает все ящики целиком, т. е. на практическом уровне принимает решение «все яблоки хорошие» — таким образом, опять-таки применяет неполную индукцию. Сходная процедура применяется при контроле качества многих товаров. Чтобы полностью проверить, хорошо ли сделана, скажем, электрическая лампочка, нужно её разбить, т. е. уничтожить как товар. Поэтому, полный контроль партии в тысячу лампочек предполагает тотальное уничтожение всей партии. Разработана математическая теория, которая указывает, сколько яблок из ящика или лампочек из тысячи надо опробовать, чтобы при положительном результате их исследования можно было с большой вероятностью заключить об исправности всех яблок или всех лампочек партии.

Строго говоря, даже универсальные законы природы формулируются лишь на основе отдельных наблюдений — т. е. на основе метода неполной индукции. Поэтому и наши практические решения (типа решения о качестве яблок или лампочек), и наши теоретические суждения (типа законов природы), если они высказаны в виде универсальных формулировок, верны не в абсолютном смысле, а — в лучшем случае — лишь с высокой степенью правдоподобия. Иное дело математика, истины которой признаются незыблемыми. А потому и метод неполной индукции, действующий в естественных науках, в математике не действует.

В математике нередко случается, что частная формулировка $\mathbf{A}(n)$ оказывается верной для отдельных значений n, и вместе с тем не удаётся найти таких значений, для которых частная формулировка была бы неверна. Тогда есть основание выдвинуть *гипотезу* об истинности универсальной формулировки — но всего лишь гипотезу, потому что тó, чтó не удалось найти сегодня, будет, может быть, обнаружено завтра. Вот два замечательных примера, показывающих, что метод неполной индукции не работает в математике.

Пример 28. *Числа Ферма.* Великий французский математик XVII века Пьер Фермá изучал числа вида $2^{2^n}+1$; эти числа стали называть *числами Ферма.* Ферма полагал, что все эти числа суть числа простые. Для такого мнения, казалось бы, имелись основания:

ведь при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ числа Ферма и в самом деле являются простыми. Однако в XVIII веке великий швейцарский (да и российский тоже) математик Леонард Эйлер обнаружил, что число $2^{2^5} + 1$ есть произведение двух простых чисел 641 и 6 700 417. Более того, неизвестно, существуют ли простые числа Ферма помимо вышеуказанных пяти, открытых ещё самим Ферма. □

Пример 29. *Трёхчлен Эйлера.* Трёхчлен $x^2 + x + 41$, указанный Эйлером, принимает простые значения при $x = 0, 1, 2, \ldots, 39$. Однако при $x = 40$ его значением будет число составное, а именно 41^2. □

Два аксиоматических метода — неформальный и формальный

Неформальный аксиоматический метод

Поиски большей убедительности математических доказательств привели к появлению так называемого аксиоматического метода. Вкратце он состоит в следующем. Выбираются основные положения рассматриваемой математической теории, которые принимаются без доказательств, а из них уже все остальные положения выводят чисто логическими рассуждениями. Эти основные положения получили название *аксиом*, а те, которые из них выводятся, — *теорем*. Ясно, что всякая аксиома также выводится из списка аксиом, поэтому удобно аксиомы рассматривать как частный случай теорем (в противном случае слову «теорема» надо было бы дать такое длинное определение: теорема — это то, что выводится из списка аксиом, однако в этот список не входит).

Первая попытка создать систему аксиом для какой-нибудь теории была предпринята Евклидом в III веке до н. э. Система аксиом из его «Начал» оставалась единственной системой аксиом геометрии вплоть до конца XIX века, когда появились новые системы, отвечающие современным требованиям. Вот как Евклид определяет, что такое *точка* и что такое *прямая*: «точка есть то, что не имеет частей», «прямая линия есть та, которая равно расположена к точкам на ней». С современных позиций эти определения непонятны и не могут быть использованы в доказательствах.

А как же определяются точка и прямая в современных аксиоматических системах? Ответ может удивить неискушённого читателя (искушённого читателя ничто не может удивить). Эти понятия не определяются никак. Не определяется и значение слов «точка лежит

на прямой», «прямая проходит через точку». Если вдуматься, то чего-то подобного, т. е. предъявления основных понятий без определения, и следовало ожидать — ведь всё определить невозможно: одно определяется через другое, другое через третье, и где-то приходится остановиться. Уж лучше сделать такую остановку честно и открыто. Спрашивается, а как же в таком случае можно использовать эти понятия в доказательствах. Вот тут на помощь и приходят аксиомы.

В аксиомах вместо определений основных понятий формулируются их главные, исходные свойства. На эти свойства и опираются доказательства. Поясним сказанное на примере. Среди основных понятий геометрии присутствуют такие: «точка», «прямая», «лежать на», «лежать между». Что такое точки и прямые, не разъясняется, а говорится лишь, что бывают такие объекты, одни называются *точками*, другие — *прямыми*. А про *лежать на* говорится, что это некоторое отношение между точками и прямыми. Это означает следующее: если взять произвольную точку и произвольную прямую, то осмысленно спросить, лежит ли эта точка на этой прямой; точка либо *лежит на* прямой, либо нет. А вот спрашивать, скажем, лежит ли прямая на прямой, бессмысленно: отношение «лежать на» для пары прямых не определено — как не определено оно и для пары точек, и для пары ⟨прямая, точка⟩. *Лежать между* — это некоторое трёхместное отношение между точками; сказанное означает, что если даны три точки A, B, C, то точка B либо *лежит между* точками A и C, либо нет. Природа предметов «точка» и «прямая» и отношений «лежать на» и «лежать между» никак не раскрывается. Вместо этого в аксиомах формулируются основные свойства этих объектов и отношений и основные связи между ними.

Вот как выглядят некоторые из аксиом:

1. *На каждой прямой лежат по меньшей мере две точки.*

2. *Для двух различных точек не может существовать более одной такой прямой, что обе точки лежат на этой прямой.*

3. *Если три точки таковы, что одна из них лежит между двумя другими, то все эти три точки различны.*

4. *Если три точки таковы, что одна из них лежит между двумя другими, то все эти три точки лежат на одной прямой.*

5. *Для любых двух различных точек A и B существует такая точка C, что B лежит между A и C.*

Покажем на примере, как на основе аксиом проводят доказательства. Докажем, опираясь на выписанные пять аксиом, такую теорему:

На каждой прямой лежат по меньшей мере три точки.

Вот доказательство. Итак, пусть p — прямая. Надо обнаружить на ней три различные точки. По аксиоме 1 на ней лежат какие-то две различные точки; обозначим их A и B. По аксиоме 5 находим такую точку C, что B лежит между A и C. Согласно аксиоме 3 все они различны, а согласно аксиоме 4 все они лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую буквой q. Точки A и B лежат на прямой p и в то же время лежат на прямой q. Но в силу аксиомы 2 две различные точки не могут лежать на двух различных прямых; следовательно, q совпадает с p. Поскольку через q была обозначена та прямая, на которой лежат все три точки A, B и C, а q совпадает с p, то все эти точки лежат на p. Вот мы и нашли на p три различные точки.

Казалось бы, тем же способом можно далее доказать, что на p лежат четыре точки: надо применить аксиому 5 к точкам B и C и получить такую точку D на той же прямой, что C лежит между B и D. Действительно, все точки B, C и D будут различны; однако ведь может случиться, что точка D совпадает с точкой A, — из выписанных нами аксиом не вытекает, что такое невозможно! Для доказательства невозможности приходится привлекать другие аксиомы.

Ещё один пример. Дано множество N каких-то объектов. Задана операция, которая каждому объекту из N ставит в соответствие некоторый другой (а впрочем, может случиться, что и тот же самый) объект из того же N. Объект, ставящийся в соответствие объекту x, будем обозначать так: x'. Некоторый объект из N выделен особо, его будем обозначать так: 0. Всё это подчиняется двум аксиомам:

Аксиома I. *Если* $x' = y'$, *то* $x = y$.

Аксиома II. *Не существует такого* x, *что* $x' = 0$.

Требуется доказать утверждение

$$0'''' \neq 0''.$$

Доказываем от противного. Предположим, что

$$0'''' = 0''.$$

В силу первой аксиомы тогда

$$0''' = 0'.$$

В силу той же первой аксиомы получим

$$0'' = 0.$$

Но это противоречит второй аксиоме, потому что получается, что 0 есть результат применения операции $'$ к объекту $0'$. Точно так

же доказывается различие любых двух объектов вида $0''^{\cdots\prime}$, имеющих в своей записи различное количество штрихов. Поэтому выражения

$$0, \quad 0', \quad 0'', \quad \ldots$$

часто используются в качестве обозначений натуральных чисел (включая нуль). Если принять эти обозначения, то видно, что только что была доказана формула $4 \neq 2$.

Заметим, что доказательства в обоих примерах понимались в соответствии с разъяснениями, предложенными в начальном разделе данного очерка, — как убедительные рассуждения. Специфика состояла в том, что мы не знали, о каких сущностях идёт речь. Мы не знали, что такое точка, прямая, отношение «лежать на» и «лежать между» в первом примере. Во втором примере мы не знали ни какие объекты образуют множество N, ни который из них выделен, ни в чём состоит операция штрих ($'$), ставящая в соответствие каждому объекту x объект x'. Мы знали лишь те свойства этих таинственных сущностей, которые были перечислены в аксиомах, и именно на эти свойства и только на них опирались в рассуждениях, образующих доказательства. Таким образом, сами наши доказательства были неформальными, психологическими доказательствами. Поэтому тот вариант аксиоматического метода, который был проиллюстрирован на двух примерах, принято называть ***неформальным аксиоматическим методом***.

Формальный аксиоматический метод

Формальный аксиоматический метод отличается от неформального тем, что в нём совершенно чётко перечисляются не только исходные понятия, не только записанные в виде аксиом исходные положения, но и дозволенные способы рассуждения. Точно указываются те логические переходы, которые разрешается делать. Более того: и аксиомы, и разрешённые логические переходы должны быть оформлены таким образом, чтобы первые могли использоваться, а вторые делаться чисто механически, чтобы мы могли не вникать в их содержание, — так, чтобы и то, и другое было доступно исполнительному лаборанту или, как уместнее сказать в наше время, компьютеру. Для этого нужно уметь оперировать с участвующими в доказательствах утверждениями, опираясь только на их внешний вид, а не на содержание, непонятное ни лаборанту, ни компьютеру. Такое оперирование довольно затруднительно, если утверждения записаны на ***естественном языке***, т. е. на одном из тех языков,

которыми пользуются люди в повседневной жизни. Приходится записывать утверждения на специальном языке, отражающем структуру утверждений.

Скажем, тот факт, что из **A** следует **B**, на русском языке может быть записан многими разными способами: «из **A** следует **B**», «из **A** вытекает **B**», «если **A**, то **B**», «**B** верно при условии, что верно **A**», «**B** верно при условии, что справедливо **A**», «**B** справедливо при условии, что верно **A**» — и ещё многими другими, которые, без сомнения, сможет предложить любезный читатель. Заставить компьютер во всём этом разбираться было бы слишком накладно. А ведь помимо русского языка существуют ещё немало и других. В специальном, искусственном языке математической логики (точнее было бы сказать: в одном из орфографических вариантов такого языка) указанный факт записывается так:

$$(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}).$$

Аналогично вместо того, чтобы анализировать все способы, которыми в русском языке можно выразить тот факт, что утверждение **A** неверно, пишут просто $\neg\mathbf{A}$.

Вот здесь очень важное отличие формального аксиоматического метода от неформального. Для неформального метода несущественно, на каком языке — на древнегреческом, русском или китайском — записаны утверждения. Для формального метода утверждений вне способов записи как бы не существует. Поэтому грамотнее говорить, что формальный метод имеет дело не с утверждениями, а с *предложениями*.

Посмотрим, например, в каком виде рассуждение «от противного» выглядит в рамках формального метода. На содержательном уровне это рассуждение происходит по следующей схеме:

из двух утверждений, (1) и (2):
(1) **B**,
(2) из утверждения **не-A** (т. е. из отрицания утверждения **A**) следует утверждение **не-B** (т. е. отрицание утверждения **B**)
— вытекает утверждение **A**.

В формальном методе указанное содержательное рассуждение оформляется в виде такого правила: если доказано предложение **B** и доказано предложение $(\neg\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B})$, то считается доказанным и предложение **A**.

Подобные правила носят название *правил вывода*. Они должны быть перечислены исчерпывающим образом. Их соединение с акси-

омами приводит к тому, что некоторые предложения объявляются *доказуемыми*. Сперва доказуемыми объявляются все аксиомы, а затем провозглашается, что применение любого правила вывода к любым доказуемым предложениям даёт доказуемое предложение.

Теорема Гёделя

Словосочетание «теорема Гёделя» довольно популярно, и не только в математической среде. И это совершенно заслуженно. Ведь теорема Гёделя (точнее, *теорема Гёделя о неполноте*) — не только одна из самых замечательных и неожиданных теорем математической логики, да и всей математики, но, пожалуй, единственная на сегодняшний день теорема теории познания.

Если говорить совсем грубо, теорема Гёделя утверждает, что не всё можно доказать, если говорить чуть более точно — что существуют истинные утверждения, которые нельзя доказать, а подробнее — что такие утверждения найдутся даже среди утверждений о натуральных числах. Но эта формулировка заключает в себе некое противоречие. В самом деле, если мы обнаружили истинное утверждение, которое невозможно доказать, то откуда, спрашивается, мы знаем, что оно истинное? Ведь чтобы убеждённо заявлять о его истинности, мы должны эту истинность доказать. Но тогда как же можно говорить о его недоказуемости?

Разгадка в том, что в грубых, подобно приведённым, формулировках теоремы Гёделя смешиваются два понятия доказательства — содержательное (неформальное, психологическое) и формальное. Теорему Гёделя надлежит понимать в следующем смысле: существуют не имеющие формального доказательства утверждения, являющиеся тем не менее истинными, причём истинность их подтверждается содержательными доказательствами. Иными словами, эти утверждения доказуемы содержательно и недоказуемы формально. Отметим, что в применении к какому бы то ни было утверждению более корректно было бы говорить о формальных доказательствах не самого этого утверждения, а предложения, служащего записью этого утверждения в виде слова, составленного из букв подходящего алфавита. Однако мы этого делать не будем, чтобы не утяжелять изложения.

Указанный смысл нуждается в дальнейшем уточнении. Ведь понятие формального доказательства осмысленно лишь тогда, когда предъявлены аксиомы и правила вывода. Достаточно взять любое утверждение и включить его в число аксиом — и оно тут же сделается

доказуемым формально. Точная, хотя и требующая разъяснений, формулировка теоремы Гёделя такова: *если язык достаточно богат, то какой бы список аксиом и какой бы список правил вывода ни предъявить, в этом языке найдётся истинное утверждение о натуральных числах, не имеющее формального доказательства.*

Жанр данного очерка не позволяет дать предложенной «точной» формулировке исчерпывающих объяснений. Но некоторые намётки всё же сделаем.

Под *утверждениями о натуральных числах* понимаются такие утверждения, которые помимо общелогических понятий (таких как «и», «если . . ., то . . .», «существует», «равно» и т. п.) используют в своих формулировках лишь натуральные числа и операции сложения и умножения.

Под *достаточным богатством языка* понимается его способность выражать достаточно сложные утверждения о числах; а именно, требуется, чтобы для любого перечислимого множества натуральных чисел в языке имелась формула, выражающая принадлежность к этому множеству натурального числа. Дальнейшие объяснения потребовали бы изложения основ математической логики и теории алгоритмов, а потому здесь мы остановимся.

Что такое доказательство?

Теорема Гёделя о неполноте, пожалуй, — одна из двух (наряду с Теоремой Ферма) самых знаменитых теорем математики. Не самая главная (таковой — по моему мнению, с которым многие не согласятся, — является теорема о существовании фактор-множества для всякого отношения эквивалентности), не самая известная (таковой является Теорема Пифагора), но — самая знаменитая. И это вполне заслуженно: ведь её можно считать теоремой теории познания. Да и автор её — человек достаточно знаменитый. Когда известный американский журнал «Тайм» составлял список ста самых выдающихся деятелей уходящего XX века, на всю науку он отвёл десять мест, из них на математику — одно. Это место и занял Курт Гёдель (Kurt Friedrich Gödel, 28.04.1906—14.01.1978).

Хотя Теорема Ферма, по внематематическим (и отчасти скандальным) причинам, возможно, и знаменитее Теоремы Гёделя, думается, что какое-то представление о Теореме Гёделя имеет более широкий круг людей. В самом первом и самом грубом приближении Теорема Гёделя утверждает, что невозможно доказать все истины, иными словами, что *существуют недоказуемые истины*.

Такая формулировка, однако, содержит в себе очевидное противоречие. Вот оно. Раз Гёдель доказал существование утверждения, которое, хотя и недоказуемо, является истинным, то, значит, он доказал истинность этого утверждения. Но ведь доказать истинность некоторого утверждения — это и значит доказать это утверждение. Получается, что Гёдель доказал обсуждаемое утверждение, — но тогда оно не может быть недоказуемым. Как же быть?

Всё дело в том, что существуют два различных понятия доказательства и, следовательно, два различных понятия доказуемости. Первое из них хорошо известно всем из школы, да и из повседневной

Начальный параграф статьи: Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней // Математическое просвещение. — Третья серия. — Вып. 15. — М.: МЦНМО, 2011. — С. 35—39.

жизни тоже; мы будем называть его *содержательным*, или *психологическим*, доказательством. Второе принадлежит математической логике; мы будем называть его *формальным* доказательством.

Понятие психологического доказательства потому названо *психологическим*, что оно принадлежит не математике, а психологии и, отчасти, лингвистике. Психологическое доказательство — это *содержательное рассуждение*, убеждающее нас в истинности какого-либо утверждения настолько, что мы готовы убеждать других в истинности этого утверждения при помощи **этого же рассуждения**. Именно такие доказательства и фигурируют как в школьных, так и в вузовских курсах математики. Да и в курсах, читаемых на математических факультетах, используются именно они.

Психологическое доказательство имеет место и тогда, когда что-то доказывают, исходя из каких-то аксиом, — скажем, аксиом геометрии или аксиом кольца. Ведь использование аксиом при доказывании теорем не меняет сути дела: доказательство и в этом случае состоит в рассуждении, имеющим целью убедить, что если предположить аксиомы истинными, то окажется истинным и доказываемое утверждение. Приведём простой пример. Рассмотрим множество, в котором выделен элемент 0 и на котором задана одноместная операция $'$. Известные аксиомы Пеано содержат в своём составе две такие: $(x' = y') \Rightarrow (x = y)$ и $\neg\exists x\ (x' = 0)$. Исходя из этих аксиом, докажем неравенство $0'''' \neq 0''$. Доказываем от противного. Предположим, что $0'''' = 0''$. В силу первой аксиомы тогда $0''' = 0'$. В силу той же первой аксиомы тогда $0'' = 0$. Но это противоречит второй аксиоме, потому что получается, что 0 есть результат применения операции $'$ к элементу $0'$. Точно таким же р а с с у ж д е н и е м доказывается различие любых двух элементов вида $0''^{\cdots\prime}$, имеющих в своей записи различное количество штрихов. Поэтому выражения

$$0, \quad 0', \quad 0'', \quad \ldots$$

можно использовать в качестве обозначений, или имён, натуральных чисел.

Психологическое доказательство есть продукт социальной истории, и требования к убедительности меняются со временем. Не сомневаюсь, что в Древнем Египте написанный на папирусе исходящий из храма текст, содержащий рецепты, скажем, сложения дробей или вычисления площадей, считался не подлежащим оспариванию доказательством (независимо от того, верными или неверными оказывались указанные рецепты). В средневековой Индии доказательством служил чертёж, под которым было подписано «Смотри». Именно так,

например, доказывалась формула $S = lr/2$, связывающая площадь S произвольного круга радиуса r с длиной l его окружности. Сейчас нас вряд ли устроит подобное доказательство (хотя, надо признать, оно довольно убедительно — и уж во всяком случае очень наглядно). Но, вполне возможно, те доказательства, которые мы сейчас считаем строгими, не устроят наших потомков — такую возможность допускал великий математик Пуанкаре.

Психологические, содержательные доказательства часто называют также *неформальными*. Мы видим, что тó, что именуется просто *доказательством* в обычной математической (но не в математико-логической!) практике, и есть в точности тó, чтó мы только что назвали психологическим (неформальным, содержательным) доказательством.

В отличие от психологических доказательств, формальные доказательства являются математическими объектами, подобными, скажем, треугольникам или шарам. В реальном мире нет ни треугольников, ни шаров в точном смысле этих слов, но есть нечто, идеальными образами, математическими формализациями чего служат треугольники и шары. Аналогичным образом, понятие формального доказательства служит формализацией понятия психологического доказательства. Важно подчеркнуть, что понятие психологического доказательства допускает различные формализации, подчиняющееся неким общим для всех таких формализаций требованиям. Более точно понятие формального доказательства будет описано в § 2[1]. Пока же мы ограничимся заявлением, что формальное доказательство есть конечная последовательность знаков, определённым образом организованная.

Мы в состоянии теперь сформулировать Теорему Гёделя чуть-чуть более аккуратно: *какую бы формализацию понятия доказательства ни предъявить, всегда найдётся истинное утверждение, которое не имеет формального доказательства в рамках этой формализации*. Противоречие, о котором шла речь выше, устранено: истинность утверждения доказывается при помощи психологического доказательства, а его недоказуемость означает отсутствие для него формального доказательства.

Ясно, однако, что столь общая теорема не может быть верной без каких-то ограничений. Во-первых, если запас утверждений, истинность и доказуемость которых исследуется, очень беден, то

[1] Названный § 2, как и прочие параграфы статьи, а также дополнения к ней, не приводится в настоящем издании. — *Примеч. ред.*

можно предложить такую формализацию понятия доказательства, при котором все истинные утверждения из этого запаса окажутся доказуемыми. За примером ходить недалеко — именно так будет, скажем, в случае, когда все утверждения суть утверждения о равенстве или неравенстве арифметических выражений, изучаемых в начальной школе, т. е. выражений, составленных из натуральных чисел и операций сложения и умножения. Чтобы язык подпадал под действие Теоремы Гёделя, он должен быть богатым, т. е. обладать такими выразительными средствами, при помощи которых можно выразить действительно содержательные утверждения. Поэтому формулировку Теоремы Гёделя следует начать с ограничительной клаузулы «если язык достаточно богат». Точное определение термина *достаточно богатый язык* будет дано в конце § 4. Во-вторых, нетрудно ввести такое понятие формального доказательства, при котором решительно все утверждения языка, как истинные, так и ложные, будут обладать формальным доказательством. Для этого достаточно, например, объявить, что запись любого утверждения является его формальным доказательством. В советское время именно так обстояло дело со всеми утверждениями, содержащимися в сочинениях Ленина и Сталина: формальным доказательством истинности такого утверждения служило его предъявление в составе официального издания.

Ясно, что если не позаботиться об исключении подобных ситуаций, Теорема Гёделя окажется неверна. Исключение естественнее всего достигается требованием семантической непротиворечивости. Рассматриваемое понятие формального доказательства называется *семантически непротиворечивым*, коль скоро выполнено следующее требование: *никакое ложное утверждение не может обладать формальным доказательством*. Другая ограничительная клаузула, следовательно, должна иметь вид «если понятие формального доказательства семантически непротиворечиво».

Заметим ещё, что тот вариант Теоремы Гёделя, о котором говорилось до сих пор, есть так называемый *семантический* её вариант: он использует в своей формулировке представление об истинности подлежащих доказыванию утверждений. Известен и так называемый *синтаксический* вариант, не использующий указанного представления. Именно в синтаксическом варианте Гёдель и доказал в 1930 году свою знаменитую теорему; в самом первом и самом грубом приближении Гёдель доказал, что существуют утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. В более аккуратной формулировке, синтаксический вариант Теоремы Гёделя гласит, что какую бы фор-

мализацию понятия доказательства ни предъявить, всегда найдётся такое утверждение — причём даже в арифметике, т. е. среди утверждений о натуральных числах, — что ни его само, ни его отрицание невозможно доказать в рамках предъявленной формализации; другими словами, найдётся утверждение, для которого ни для него, ни для его отрицания нет формального доказательства (как математического объекта). Своих ограничений требует и синтаксический вариант. Требование семантической непротиворечивости заменяется в синтаксическом варианте требованием *синтаксической непротиворечивости*; последняя состоит в том, что отрицание утверждения, обладающего формальным доказательством, само не должно обладать таковым. Требование достаточного богатства языка заменяется предъявлением списка конкретных утверждений, относительно которых выдвигается требование, чтобы они обладали формальными доказательствами. Синтаксический вариант Теоремы Гёделя обсуждается в Дополнении к этому очерку.

Но вернёмся к семантическому варианту. Сформулируем его чуть более точно: какое бы строго определённое понятие формального доказательства ни предъявить, всегда найдётся истинное утверждение (причём даже в арифметике), которое невозможно доказать в рамках этого понятия.

Знаменитый многотомный трактат Николя Бурбакú «Начала математики» начинается со слов: «Со времён греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“». Древние греки тут не случайны. Именно они создали современную европейскую математику. Именно у них возникло и само понятие доказательства. Дело в том, что первые доказательства, т. е. убедительные рассуждения появились у греков в их народных собраниях и в судах — в прениях сторон. С этой точки зрения, математика — младшая сестра юриспруденции.

Математика, как известно, не отменяет, но уточняет содержательные, интуитивные представления. Так, математическое понятие действительного числа уточняет интуитивное, физическое представление о длине отрезка. Да и математическое понятие отрезка уточняет соответствующее физическое понятие. Ведь математических отрезков в реальном мире не бывает. Математическое уточнение того или иного неформального представления состоит в том, что математика предлагает некоторое строгое, точно очерченное абстрактное понятие, не совпадающее, конечно, с указанным неформальным представлением, но всё же схватывающее его существенные черты.

В качестве уточнения психологического представления о неформальном доказательстве математика и предлагает понятие формального доказательства. Именно о них, а не о содержательных доказательствах говорит Теорема Гёделя, точно так же, как теоремы геометрии — об идеальных математических точках, прямых, окружностях и треугольниках. (Вряд ли кто-нибудь сможет указать «физическую точку», лежащую на «физической прямой», да таких объектов и не бывает в реальности; однако несомненно, что математические точка и прямая отражают некоторые существенные черты реального мира.) Я потому так долго говорю на эти философские темы, что хочу убедить уважаемого читателя, что по своей логической природе понятие формального доказательства не отличается от других идеальных понятий математики.

Математика в системе наук

— Владимир Андреевич, в самом начале раздела книги[1], который называется «Философия», есть фраза о том, что в Индии математика относится к наукам гуманитарным, и, как Вы пишете, это вполне оправдано. Но если следовать этой логике, тогда совершенно правильно, что отделение лингвистики существует при Филфаке МГУ, а не при Механико-математическом факультете, хотя Вам это всегда не нравилось. Как Вы объясните это логическое противоречие?

— С утверждением «всегда не нравилось» я согласиться не могу. Другое дело, что не всегда нравилось. Не нравилось в те отдалённые, к счастью, времена, когда гуманитарные факультеты МГУ утопали в трясине идеологии и утягивали туда лингвистику.

Если считать лингвистику гуманитарной наукой, это не означает обязательности её нахождения при Филологическом факультете. Лингвистика могла бы быть и при Мехмате. Дело в том, что Мехмат состоит из двух частей: из отделения математики и отделения механики. Механика — негуманитарная наука, в значительной степени это наука экспериментальная, там есть лаборатории.

Сейчас, когда университет переехал в новое здание, Институт механики находится более чем в километре от Мехмата, это огромное отдельное здание. Раньше этот Институт располагался в подвале того же здания, что и Мехмат, и я туда иногда (хотя довольно редко) заходил. Это было неслыханно интересно, потому что там изучали гидродинамику, текли какие-то жидкости. Когда изучали газовую динамику, то запускали такой звук, что лопались барабанные перепонки, что-то такое чудовищное было. Было очень интересно.

А по отношению к математике существуют разные взгляды, и её считают не только естественнонаучной дисциплиной. Наш очень круп-

---

Интервью взято 2 марта 2009 года. Интервьюер — Л. Ф. Борусяк. Опубликовано на сайте «Полит.ру» http://polit.ru/article/2009/08/06/videon_lb_uspensky/print/. См. также http://polit.ru/news/2009/08/06/math/.

[1] Речь идёт о 1-м издании «Трудов по нематематике». — *В. У.*

ный математик, можно даже сказать — великий математик, Владимир Игоревич Арнольд, ученик Колмогорова считает, что математика это часть физики. Вот имеется физика, которая описывает реальный мир, как там всё устроено, и у неё есть такая часть, как математика, которая это всё описывает математически. И хотя Арнольд настолько превосходит меня по математическому рангу, что с ним даже спорить как-то неприлично, тем не менее, это не единственная возможная точка зрения.

— Вообще, идея о том, что математика — это часть физики, тоже весьма необычна.

— При существующем, очень грубом делении факультетов университета на гуманитарные и естественнонаучные, математика всегда будет естественнонаучной дисциплиной. В МГУ всегда были проректоры по естественным наукам и по гуманитарным. Если сделать более тщательное деление, то можно сказать, что бывают естественные науки, бывают гуманитарные, а бывают точные. Точные науки представлены математикой.

— А многие историки считают, что есть гуманитарные науки и есть история.

— Ну, вполне возможно. Математику с равным успехом можно считать и частью психологии, потому что математические понятия, как, впрочем, и физические, реально не существуют: не существует никаких твёрдых тел, есть только наши представления об этом в нашем уме. Это сложный философский вопрос, и я не берусь обо всём этом аккуратно говорить.

Математика в некоторых своих областях создаёт совершенно абстрактные концепции, чрезвычайно далеко уходящие от реального мира. Физика же, какой бы она ни была, всегда описывает какие-то явления реального мира, и положения физики, даже сложнейшие положения теории относительности, теоретически могут быть проверены. Другое дело, что не все из них могут быть сейчас экспериментально проверены просто потому, что для этого не хватает точности наших приборов. А что касается математики, то, например, дважды два четыре может быть проверено экспериментально.

— Можно положить палочки.

— Как совершенно правильно сказал Маяковский, которого с уважением цитирует Арнольд: «человек, который первым открыл, что дважды два четыре, был великий математик, хотя бы он открыл это, считая папиросные окурки». Абсолютно неважно, что́ он считал, но это совершенно правильно. Это описывает что-то реальное, но бывает, что математика в некоторых своих разделах уходит так

далеко, что уже совершенно отрывается от реальности. Правда, Арнольд говорит, что тогда это не математика, а философия или что-то вроде игры в бисер. Вообще, всякая классификация «что куда относится» — это очень непросто. С моей точки зрения, и я это очень ценю, в математике, безусловно, есть гуманитарная часть.

— Хотя бы потому, что математика смыкается с философией.

— Отчасти. Понимаете, это тоже очень сложный вопрос. Математическая логика, когда я ей начал заниматься ещё при жизни вождя всех народов и корифея всех наук товарища Сталина, была почти лженаукой. Не лженаукой, но почти, что-то такое непонятное, какой-то отрыв от действительности.

— Ну конечно, когда говорят «множества» и не говорят множества чего...

— Бесконечные множества. Вот говорят «теория бесконечных множеств»: такие разные соображения о разных бесконечностях. Они разные, но как их сравнивать? Понимаете, бесконечность же никто не видал. Есть даже такие математики, которые отрицают бесконечность, они говорят: «Ну, как так? Не бывает никаких бесконечностей. Бывает потенциальная возможность к любому числу прибавить ещё единицу и получить большее число. Это не значит, что есть бесконечный ансамбль всех чисел. Его нет. Есть только такой процесс, который позволяет двигаться неограниченно. Нет предела. Нет границы». Это, действительно, разные вещи.

Так вот, когда начинаешь заниматься бесконечностью, то встаёт вопрос: где эта бесконечность? Её не видно. Если считать целые числа, тут понятно — какое-то количество палочек. Но уже квадриллион в квадриллионной степени палочек — это представить себе нельзя.

— Гораздо меньшее число уже нельзя представить.

— И меньшее нельзя. Так вот, это больше, чем число всех элементарных частиц во Вселенной. Это невозможно представить и непонятно, в каком смысле это существует. Математика оперирует далеко идущими абстракциями и в этом смысле смыкается с философией, которая оперирует такими абстракциями, как «добро», «зло». Что это такое? Какие-то непонятные категории, но философы очень лихо ими оперируют.

— К одной из статей вы взяли эпиграф из Витгенштейна: «Большинство предложений и вопросов, трактуемых как философские, ложны и бессмысленны». К математике это в равной степени относится или нет?

— Как понимать бесконечно малую величину — это тоже вопрос. Есть такие математики, которые считают, что все рассуждения, связанные с бесконечно малым, бессмысленны.

— А осмысленно то, что можно представить?

— То, что можно представить. Существует набор абстракций, который все признают. Их как-то ещё можно представить. Они говорят, что если не ограничивать человечество в его физических возможностях, например, тем, что существует ограниченный запас времени или чернил, чтобы написать это число на бумаге, мела, чтобы написать на доске, доступного пространства — вообще всего, то квинтиллион в квинтиллионной степени существует. Хотя, наверное, есть и такие, кто считает, что его тоже не существует, но я о таких даже не буду говорить.

А наиболее разумные, в частности, первый заведующий нашей кафедрой — совершенно замечательный математик Андрей Андреевич Марков младший (его отец — Андрей Андреевич Марков старший был знаменитым математиком) — утверждал, что квинтиллион в квинтиллионной степени существует, потому что его можно себе представить, если отвлечься от физической ограниченности человека. Конструктивисты, каким был Марков младший, говорят, что точными математическими формулами, содержащими бесконечность, можно по некоторым правилам оперировать. Если рассматривать их не как последовательность смысла, а как некую последовательность закорючек, то они поддаются некоторым своим законам.

— Здесь интересно то, что математика ведь вообще работает с абстрактными вещами. Но, по мнению математиков этой школы, есть некий предел, некая граница, которая отделяет разумную абстракцию от неразумной.

— Что разумно, а что неразумно — по этому поводу у большинства математиков единая точка зрения. Конструктивисты (которые отрицают бесконечность) — это всё-таки безусловное меньшинство. Но дело в том, что если никак не ограничивать разумную абстракцию, то где-то там, в далёком горизонте или за ним, уже начинаются парадоксы и противоречия. Поэтому где-то нужно ограничивать. А где — никто не знает. Эти противоречия начинаются так далеко, что в реальной математике до них не доходят. Но если заниматься теорией множеств, возникают проблемы. Вот, скажем, великий **Кантор**, который её основал, последние двадцать лет своей жизни уже ничего не писал, а всё чаще и чаще поступал в нервную клинику... А свою жизнь он кончил в психическом расстройстве.

— Многие знают, что у математиков в этом смысле есть большой профессиональный риск. Видимо, действительно есть опасная граница.

— Опасная граница есть. Он прикоснулся к чему-то такому и не выдержал.

— И это неслучайно. Я читала работы психологов о математических способностях. Их исследованиями было установлено, что математическая одарённость — это совершенно особая область, и математические способности даже не коррелируют с общим интеллектом, с общими способностями.

— Вероятно, это как с шахматами. Кстати, то, что Вы сейчас рассказали, напомнило мне об одном случае. На моём любимом Мехмате состоял академик Павел Сергеевич Александров. Он был видный представитель старой интеллигенции и говорил, грассируя. Про него есть замечательная совершенно история. В Гёттингене он был однажды в бане, а там люди без знаков различия, без одежды, вообще без всего. И к нему было обращение — по-немецки я сказать не могу, потому что немецкого не знаю, но если перевести его на русский язык, то оно было такое: «Герр профессор, передайте, пожалуйста, шайку», т. е. по нему было совершенно очевидно, что он профессор.

Выступая на учёном совете Мехмата, посвящённом вопросам приёма (как проводить вступительные экзамены, кого брать, кого не брать), он сказал: «Все устные экзамены по математике совершенно бессмысленны, по определению. Потому что любой психиатр скажет вам, что за 20 минут, за 40 минут, и даже за 2 часа поставить точный диагноз психической болезни невозможно, необходимо более длительное наблюдение. А поскольку математический талант — вид психического расстройства...». Он сказал как-то более деликатно, не расстройство, может быть, психическое отклонение.

— А я это обычно называю «особенностью».

— Я думаю, он сказал «психическое отклонение от среднего».

— Но он ведь сам математик.

— Безусловно. Так вот, за 40 минут, которые отпускают нам на опрос абитуриента (и это самый максимум), нельзя ничего определить. Конечно, сейчас иначе, набирать стали больше на факультет. Когда я сам поступал, нас, включая астрономов, было человек 120 на курсе. Да и знания были другие, чем теперь.

— Владимир Андреевич, большой раздел Вашей книги — это философия, Вы анализируете серьёзные философские проблемы. Одна из этих проблем — всё-таки, для чего нужны многие

математические исследования? Многие знания в математике, кажутся абсолютной «вещью в себе». Они представляют собой некую ценность, которая не распространяется вовне. Зачем, например, три века пытались решить ту же теорему Ферма? Ведь не для практических же целей?

— Давайте спросим себя: а почему собственно знание должно иметь практическое применение? Для чего? Чтобы — что?

— Нас ещё в школе учили, что геометрия нужна была для того, чтобы мерить землю.

— А землю мерить для чего?

— Для нужд земледелия.

— А земледелие для чего?

— Для того, чтобы сажать хлеб, чтобы не голодать.

— А что, пока не мерили, голодали?

— Нет, ну, наверное, хуже выращивали.

— Неизвестно, понимаете. Если продолжать такую цепочку: это для чего?, а это для чего?..

— В результате бессмыслица получится?

— Понимаете, я (в отличие от Вас, Люба, наверное) в прогресс не верю. Я не верю, что с каждым веком человечество живёт лучше, чем раньше.

— Тут трудно спорить. Я бы никогда не смогла сказать, что современный человек умнее Аристотеля, скорее, сильно наоборот.

— Зато у него теперь есть компьютеры, телевизоры...

— Знаете, об этом хорошо сказал Жванецкий: «Купили цветной телевизор. Что, жить стали лучше? Нет, смотреть стали лучше».

— Смотреть стали лучше, да. Понимаете, это вопрос и сложный, и примитивный. Мне вот от телевизора только хуже. У меня его нет, и я этим очень доволен. Я говорю общеизвестные банальности. Человечество дошло до того, что создало такое средство, что может уничтожить само себя. Раньше такого не было. Причём разными способами: может взорвать атомную бомбу, а может пустить какую-нибудь бактерию.

— И не один раз уничтожить своё живое, словно одного мало.

— И не один раз. И бактерии может разные пустить, они все в лабораториях хранятся: какая-нибудь там сибирская язва, чума и пр. Так что вопрос, должны ли знания иметь практическую ценность, для меня не является аксиомой.

— Но я же на этом совершенно не настаиваю, разумеется. Не являюсь Вашим оппонентом.

— Знание должно доставлять удовольствие само по себе.

— Оно должно радовать того, кто его добывает?

— Да, радовать. Это первое. А второе — как раз про теорему Ферма. Пока что, действительно, она никакого практического применения не имеет — кроме того, что при её решении были созданы замечательные математические методы. Ведь решить её было очень сложно.

— Замечательные книги уже есть о том, как её решали, как ошибались, сколько жизней было посвящено решению этой математической проблемы.

— Да, книга Саймона Сингха «Последняя теорема Ферма» или «Великая теорема Ферма». По-английски называется «Last Fermat Theorem».

— В русском переводе — «Великая теорема Ферма». Безумно интересно читается.

— Безумно интересно. И действительно, математика от этого развилась. Казалось бы, зачем нам какие-то древние мореплаватели, плывшие на какой-нибудь никому не нужный остров? Зато они потом прокладывали новые пути. Это второстепенно, что развилась математика. Ещё есть третьестепенный ответ, вот какой: проблема Ферма — это проблема из теории чисел. Теория целых положительных (1, 2, 3, 4 — самых простых) чисел очень древняя. Она самая простая по первоначальным понятиям, но она очень сложная по результатам. Но теорема Ферма тоже простая.

— По формулировке она очень простая.

— Там есть проблемы очень сложные, но есть и очень простые по формулировке. Теория чисел как наука развивается с древнейших времён, и долгое время считалось, что это просто такая игра ума. Хотя повсюду были кафедры и отделы теории чисел, в университетах она преподавалась. Почтенная очень наука, но зачем она — никто не знал. Но внезапно оказалось, что она имеет огромное прикладное значение для криптографии и, вообще, всего того, что сейчас объединяется общим названием «защита информации». Не могу сказать, что все, но чрезвычайно многие криптографические системы основаны на тонких свойствах чисел.

— Простых, прежде всего.

— Именно простых чисел, да. В школе учат, но так плохо, что я не думаю, что кто-нибудь помнит, что такое простое число. Простое число — это число, которое, во-первых, больше единицы, а во-вторых, не делится ни на что, кроме единицы и самого себя.

— Неужели со школы это может кто-нибудь забыть?

— Конечно. То, что больше единицы, все забывают. Разложение на простые множители (то, что всякое число разлагается на простые множители, причём единственным образом) — этот факт является основой теории чисел. И вот, действительно, криптография, а также так называемая электронная подпись.

— Это огромная у нас проблема.

— Проблема, когда клиент общается с банком по электронной почте. Банк должен быть уверен, что это именно его клиент, а клиент должен быть уверен, что это именно его банк, что он перечисляет деньги туда, куда нужно. Очень непростой протокол происходит: они обмениваются некими сигналами, которые практически невозможно подделать.

— Идея в том, что перемножаются очень большие простые числа, и без ключа это происходит так долго, что подделать его невозможно.

— Казалось бы, все могут перемножить простые числа. Что-то такое интересное должно происходить. Я не знаю, насколько это реально применяется, может быть, и нет, но это очень эффектно — называется «открытый ключ». Я позволю себе это изложить в терминах Юстаса и Алекса. Представьте себе, что таких агентов, как Штирлиц, может быть у Алекса много во всём мире, и они пользуются каким-то единым тайным шифром для простоты. И представьте, что Алекс получил известие, что шифр взломан. Что он может сделать? Он может сообщить им новый шифр, но боится, что его перехватят.

— По дороге, конечно. Поэтому в открытом виде его нельзя передавать.

— Алекс в средствах массовой информации открыто публикует некоторое число и подробную инструкцию, как шифровать с помощью этого числа. Все могут шифровать, включая врага, но прочесть не могут. Вот они зашифровали, и своё-то могут прочесть, потому что знают, а рядом лежит зашифрованное Штирлицем послание. Им известно, как он его зашифровал — с помощью этого числа, по присланной инструкции, но инструкция необратима.

— И для этого нужна теория чисел?

— Для этого нужна теория чисел, очень несложная, кстати сказать. У меня даже есть статья по этому поводу. Так вот, если они перехватят такое сообщение, расшифровать его никто не может.

— Почему обратный процесс невозможен?

— Потому что так это устроено. Обратный процесс практически невозможен. Вы ведь не можете запихнуть пасту в тюбик обратно.

— Понятно. Или сахар растворить можно, а обратно — нет.

— В реальной жизни полно необратимых процессов: ребёнка родить обратно тоже нельзя. Так что очень много процессов, которые нельзя обратить.

— Владимир Андреевич, сейчас много споров идёт о том, почему математика так плохо сейчас преподаётся. Точнее, о том, почему она так плохо усваивается. Вы знаете, что по результатам ЕГЭ в прошлом году двойки по математике получили более 20% тех, кто писал.

— Это очень хороший результат.

— Он был бы хорошим, если бы не одно обстоятельство. У большей части остальных выпускников — еле-еле тройки. Как Вы считаете, может ли быть доступна математика школьного уровня, то хотя бы большинству людей?

— Нормальным людям — безусловно. В школе всё преподают плохо. У меня лично школа была очень хорошая, я считаю, но сейчас я скажу по поводу того, что дети выносят из школы. Есть такой Международный университет в Москве, одно время я вёл там какие-то занятия, много лет назад. Там в основном девочки были, хотя, в минимальном количестве, и какие-то мальчики тоже. И выяснилось, что никто не знает таблицу умножения.

— Таблицу умножения?

— Да, никто не знает.

— А какой же это факультет был?

— Филологический, наверное, не помню точно.

— И Вы им высшую математику читали?

— Нет, не высшую, но что-то такое. Должен сказать, что я не мог им объяснить, зачем нужна таблица умножения, и вот по какой причине. Они сказали: «Вам нужно что-то умножить?». Я говорю: «Конечно, давайте там умножьте 17 на 38». Они говорят: «Сейчас». Все вытащили калькуляторы и сказали: «Вот вам ответ. И зачем нам таблица умножения?». Надо сказать, что я несколько растерялся и продолжаю в этой растерянности находиться.

Это проблема социальная. Первый вопрос: может ли математика быть доступна нормальному человеку с нормальными способностями? Школьная математика — да, может. Теперь второй вопрос: почему этого не происходит? Здесь очень много разных причин, но главная — плохое преподавание. Я думаю, это не только у нас. В Америке преподают математику не лучше, что связано, как ни странно, с большей свободой. Это причина социальная, потому что государство

не может себе позволить не вводить всеобщего сперва 10-, потом 11-, а теперь даже поговаривают о 12-летнем образовании. Потому что нужно детей чем-то занять. Это никакого отношения к получению знания не имеет.

— Конечно. Сейчас опять заговорили, что кризис, куда им деваться — пусть лучше сидят и чему-нибудь учатся, чем влиться в ряды безработных. А так хоть при деле.

— Это очень важная социальная проблема. Я не хочу сказать, что государство себя неправильно ведёт, когда хочет ввести всеобщее 12-летнее образование. Но к обучению и получению знаний это никакого отношения не имеет. С моей точки зрения, обязательным должно быть четырёхклассное образование, может быть, пятиклассное, я не знаю. Начальное.

— То есть научиться себя обслуживать, рассчитаться в магазине...

— Уметь грамотно написать, прочитать, сосчитать, какие-то элементарные технические знания (чему, кстати, у нас в школе не учат). Понимаете, я считаю, что починить текущий кран должен уметь всякий. Я вот не умею, и очень от этого страдаю. Приходят некоторые мои друзья, и делают это за минуту. Прокладки всякие там заменить, починить выключатель.

— Это электричество, это страшно.

— Может быть. Хорошо, но, скажем, починить вилку от лампы выключенной — это не страшно, потому что она выключена. Ещё чему я считаю надо бы обязательно учить в школе, даже начиная с детского сада, — умению сидеть на корточках.

— Зачем?

— Как зачем? Сейчас объясню. Вы заметили, как восточные люди сидят?

— Они могут сидеть часами.

— А мы не можем. Потому что сидеть нужно так, чтобы ляжка, т. е. верхняя часть ноги, полностью лежала на нижней. А мы этого не умеем. Когда европейцы сидят на корточках, они сидят на цыпочках, пятка у них поднята от земли. Так долго просидеть невозможно.

— А для чего это нужно, зачем?

— Зачем? Очень просто. Вот вы идёте по улице, вы устали, хотите сесть. Сидеть на корточках — всё равно, что сидеть на стуле.

— Ну да: если не напряжены мышцы, ты не устаёшь. И они отдыхают при этом?

— Конечно. А есть другой способ восточного сидения: когда нижняя часть ноги, от колена и ниже, горизонтально лежит на земле. Так

японцы сидят, скажем. Нам это необязательно, потому что где мы так будем сидеть? У японцев — другое дело, у их вся жизнь на полу. А вот на корточках сидеть, с моей точки зрения, обязательно надо научиться. Для меня это очевидно, но все точно так же удивляются, как и Вы.

— Просто я не слышала никогда, что это полезная вещь. Мне всегда казалось, что это дико трудно, и нагрузка больше, чем в любом другом положении.

— Правильно. Если Вы посмотрите где-нибудь, как сидят на корточках, Вы увидите два совершенно разных способа. Вы смотри́те, пятка при этом поднята или стоит на земле. Если стоит на земле, так можно сидеть сколько угодно, как на стуле. А если она поднята — так не удержишься, стоя на цыпочках.

— В данном случае это уже касается физкультуры, т. е. умения владеть своим телом.

— Безусловно.

— Вы считаете, что этих навыков, интеллектуальных и физических, большинству людей достаточно. А всё остальное?

— А всё остальное — если захочет.

— И вот тут выясняется, что если в начальной школе что-то усваивается (читать и как-то там считать дети учатся), то дальше начинаются большие проблемы с освоением школьного материала. В каком объёме нужна математика обычному человеку, тому, кто не собирается связывать свою жизнь с математикой или с инженерным делом?

— В очень небольшом объёме.

— То есть то, что сейчас даёт или пытается дать школа, содержит много лишнего. Подростку это реально не нужно.

— Много лишнего, просто масса вещей. Нужно учить вот чему — пользоваться справочниками, пользоваться Интернетом. Формулы никакие учить, конечно, не надо. Зачем?

— Я помню школьную тригонометрию: формулы, формулы и формулы.

— Кошмар, кошмар. Тригонометрические формулы, тригонометрические уравнения учить точно не надо.

— Все учили, куда ж деваться. На самом деле их можно легко посмотреть.

— В справочнике посмотреть, в Интернете. Но этому надо специально учить, потому что это целое умение.

— Но смотреть ведь нужно уже после того, как ты понимаешь физический смысл того, что это такое. Потому что

в тригонометрии если ты не понимаешь, о чём речь, то и справочник не поможет.

— Тому, кто не будет связан ни с какой математикой, тригонометрия не нужна совсем.

— А мне, например, просто сам процесс решения тригонометрических задач нравился. Я получала от него удовольствие.

— Вы совершенно правильно говорите, с этим я полностью согласен, что математикой надо заниматься для удовольствия. Если кто хочет учиться дальше — пусть учится, ради бога. И надо, чтобы государство помогало в этом, обеспечивало, что называется, условия. Но если не хочет, если не нужно, то имеет право этого не делать. Если ребёнок маленький, то родители должны решать. Но сразу возникает социальная проблема — а куда его девать-то?

— Но учить чему-то всё равно надо.

— Это другой вопрос, не вопрос обучения. Куда его девать? Пусть учится в музыкальной школе или учится кройке и шитью.

— До восемнадцати лет?

— Куда девать — это другой вопрос, понимаете. Почему нужно обязательно учить? Например, учить тому, как устроены галактики. Надо долго думать, чему учить. Считать, что всё обучение в старших классах происходит только потому, что некуда девать — в этом есть даже что-то унизительное для человечества. Основной итог школы — это ненависть к тем предметам, которые там изучаются.

— Не у всех.

— Ну и слава богу! У меня тоже не было. Но мне очень многие люди говорили, что они даже Пушкина стали читать только через много лет после окончания школы, потому что его так вбивали. Моя идея в том, что литература в школе не должна превратиться в литературоведение. Нужно превратить школьные предмет «литература» в литературное чтение. Нужно, чтобы люди читали русскую классику. А разбирать какой-то образ или где здесь композиция, как изображена природа: «Дети, посмотрите, с каким тонким лиризмом изображена здесь природа» — это всё наводит тоску и вызывает ненависть. Нужно, чтобы просто читали!

— А разговаривать об этом не требуется?

— Ну, можно и поговорить.

— Мне кажется, что любое чтение, если книга вызывает интерес, всегда предполагает потом обсуждение. Обсуждение всегда интересно.

— Согласен. Об этом я не сказал, это моё упущение. Но отметки нужно ставить только за «прочёл/не прочёл», а это можно легко проверить.

— Проверить знание текста?

— Да. Не то, что он должен наизусть что-то там выучивать, но содержание знать должен.

— А впечатление неважно?

— Допустим, плохое впечатление. Это допустимо и не подлежит наказанию. Если уж вы так ссылаетесь на «Труды по нематематике» (где слово НЕ написано на обложке большими буквами), то там же есть результаты вступительных сочинений на Химический факультет бог знает в каком году. Я был в комиссии, которая изучала эти результаты.

— Это было в начале 1960-х годов.

— Да. Там кому-то снизили отметку за то, что Печорин ему, видите ли, не понравился. Или Онегин не нравится, и Татьяна не нравится, а нравится не знаю там кто.

— Грушницкий, например, а он плохой, нравиться не должен.

— А он плохой. Понимаете, это ведь право каждого. Вот в ЕГЭ включить бы такой вопрос: «На дуэли Онегина и Ленского кто был секундантом Онегина?». И четыре варианта. Если человек не читал...

— Ну, Владимир Андреевич, знаете, сколько возмущения общественности будет, что нашу молодёжь за полных идиотов считают, что это вещи несущественные... Что проверяется не память, а понимание и пр.

— Именно несущественные и надо спрашивать, потому что это доказательство, что человек прочёл. Понимаете, когда я слышу слово «духовность», я не хочу повторять слова преступников, но мне хочется за что-то схватиться...

— Тем не менее, оно, это выражение, очень активно используется. В частности, в том контексте, что русская литература — основа русского менталитета и русской духовности.

— Нет, я не понимаю, не знаю этого слова. «Духовное лицо» — понимаю. «Духовник» — понимаю такое слово. А что такое «духовность», я не понимаю. Помните, была такая песня: «Мы не пашем, не сеем, не строим — мы гордимся общественным строем»?

— Это из фильма Рязанова «Забытая мелодия для флейты».

— Да. Я считаю, что есть некоторые достижения России, которыми можно было бы гордиться. А вот когда гордятся духовностью,

ощущение, что это из-за отсутствия остального. Потому что тут не попрёшь: духовность... Значит, ничего другого не могут предъявить. Это мне не нравится.

Почему за школьные сочинения так все держатся? Разные есть мотивы. Мощная когорта гуманитариев хочет остаться при своих. Их тоже можно понять: они потеряют работу. Скажем, Иван Георгиевич Петровский — замечательный совершенно человек, прекрасный математик, выдающаяся личность. Когда он создал комиссию по изучению сочинений на Химическом факультете, то сам он упорно называл этот экзамен экзаменом по русскому языку.

— Там одна оценка ставилась и по литературе, и по русскому.

— Это вообще безобразие, потому что это совершенно разные вещи. Это как если человек пишет сочинение по ботанике, и ему за грамотность снижают оценку по ботанике. Но я хотел сказать о другом. Распространённое мнение, что человек должен писать грамотно. Против этого не попрёшь: человек действительно должен писать грамотно. Но вот что смесь из грамотности и образа помещика — это полная каша, этого никто не хочет понимать.

— А вообще возможны объективные критерии оценки?

— Чего? Грамотности?

— Нет, не грамотности, здесь понятно, содержания.

— Литературы? Конечно, нет. А вот объективная оценка знания текста может быть. Меня бы многие за эти предложения гильотинировали, я понимаю.

— За это? Запросто.

— Но с меня-то взятки гладки. Я же говорю безответственно, всё равно меня никто слушать не будет.

— Ваше отношение к школьным сочинениям — это одно из мест в Вашей книге, которые я бы, несомненно, отнесла к парадоксальным. А зачем быть грамотным?

— Грамотным, с моей точки зрения, быть необходимо, по крайней мере, по двум причинам.

— Главной и второстепенной?

— Нет, обе главные. Одна причина иррациональная. Она состоит в том, что надо быть грамотным, и всё тут.

— Понятно, это личная установка.

— Надо быть грамотным точно так же, как надо сморкаться в носовой платок, а не на пол.

— Или в занавеску.

— Или в занавеску. В конце концов, занавеску можно выстирать. Далее. В принципе можно писать фонетически. Сколькими способами можно написать слово «аспирант», чтобы звучало совершенно так же? Например, если написать «озперанд», прочтётся так же. Ну, и разные есть такие придумки. Но разные способы написания замедляют процесс чтения.

— В компьютере можно не только написать, но и проверить.

— Конечно, есть проверки — так называемые spelling checker'ы. Правда, если вы пишете от руки, никакой spelling checker вам не поможет.

— А сейчас не пишут от руки.

— Сейчас не пишут от руки, сейчас пишут на компьютере. Хорошо, я не возражаю. Отменяем письмо от руки.

— Другое дело, что сами вордовские правила проверки очень плохие.

— Вот! Во-первых, плохие. А главное, что они тоже заменяют некоторые вещи. Вот я сам себя считаю довольно грамотным, но, тем не менее, я пишу с огромным числом опечаток, и мне всё время красненьким подчёркивают и требуют менять. Я тут же меняю, в самых глупых местах (корова через ять, грубо говоря). Но это всякий раз занимает время. Короче говоря, вторая причина совершенно практическая: безграмотное писание сильно замедляет процесс и чтения, и писания.

— Ну, понятно. В нашем мире больших скоростей, когда люди торопятся... Но узнавание слов ведь всё равно будет происходить?

— Будет, но процесс узнавания сильно замедляется. Можно оставить неправильно написанное, можно отключить опцию проверки, как написал — так и написал. Но тогда узнавание ещё медленнее идёт.

— Узнавать тяжело будет, конечно.

— Такие эксперименты были.

— Какого рода?

— Сколько времени требуется. Очень давно, ещё spelling checker'ов не было. Просто для того, чтобы понять, зачем нужна грамотность.

— Грамотность, на самом деле, это, прежде всего, социальное позиционирование себя.

— Это первая причина, а вот вторая причина ставилась разумными практическими людьми — языковедами, лингвистами.

— Как Вам кажется, если сейчас нормы написания будут меняться, начнут ли они приближаться к фонетическим?

— Этого я не знаю. Это сложный вопрос, я отказываюсь отвечать на него.

— А требуется ли упрощать некоторые правила, которые всё равно в массовом порядке нарушаются? Мы должны народ притягивать к правилам или правила приближать к народу?

— Значит, так. В начале 1960-х годов была очень большая дискуссия об упрощении правил орфографии.

— Кстати, а почему (извините, что я вас перебила), меня это много лет удивляет, тогда решили «изысканный» и подобные слова писать через «ы»? Зачем менять эти «и» на «ы»? По-моему, это не очень логично.

— Некоторые правила мне казались там непонятными. Именно это «и» и «ы». Вот «огурци» через «и». Когда говорили, что «огурци» надо писать через «и», кто-то писал: «Я ваших огурцей есть не буду». Я понимал, что можно и так писать, но почему «огурци» через «и» лучше, чем через «ы», это мне было не очень понятно.

— А, например, «брошура» через «у» явно ничем не хуже.

— Я не понимал, но знал, чем это хуже на самом деле. Потому что орфография влияет на произношение, хотя лингвисты не хотят этого признавать. В основном новые правила, эти предложения по упрощению были очень разумными. В частности, писать «заЕц», а не «заЯц». Кстати, если вы помните, был очень смешной фильм «Тридцать три».

— Конечно. Про лишний зуб.

— Этот человек, у которого 33 зуба, такой национальный герой, летит на Марс. И когда он уже садится в ракету, по полю бежит профессор в шапочке и говорит: «Вот вы улетаете, и очень важно ваше мнение: как надо писать — „заЯц“ или „заЕц“?». Андрей Анатольевич Зализняк испытывает некоторую гордость, что он изображён в художественном фильме, потому что это его предложение, и это он изображён в виде этого профессора. Это действительно было разумное предложение, и много было других разумных предложений. Но члены той орфографической комиссии не понимали, что изменение орфографии — это не лингвистический вопрос, а социальный.

Они этого не поняли, не хотели понимать, и не в состоянии были понимать. Они считали: это же разумно, а если что неразумно, вы нам скажите, и мы это отменим, можно нас убедить. Но если это разумно, то так лучше: правила будут проще, и меньше будут

делать ошибок. Но это вопрос социальный — переход на новую орфографию.

— Мне кажется, убедить общество поменять орфографию невозможно.

— Невозможно. Когда в 1918 году отменялась старая орфография, в соответствующем декрете советская власть была толерантна: правильными признавались оба варианта. Писать надо вот так, но если кто написал по-старому, это тоже правильно, и не следует, скажем, ставить двойку в школе. А у нас, конечно, так не будет. Орфография может быть улучшена, потому что можно научно составить орфографию очень разумно, с меньшим количеством правил и меньшим количеством исключений.

— Но это слишком негативный резонанс вызывает. Вообще, проблемы такого рода всегда воспринимаются как поползновение на нашу культуру.

— Правильно.

— Как Вам кажется, Владимир Андреевич, массово готовить в школе грамотных людей — это вообще реально? Сейчас этого совсем не получается. Неужели русская орфография настолько сложная? Или это нежелание учиться и неумение учить?

— Люба, Вы меня спросили, можно ли обучать обычных средних людей математике, чтобы они её понимали? Отвечаю: можно. Реально ли это? Не знаю.

— Понятно. Теоретически можно, а практически вряд ли.

— А практически — нет. Потому что вот, скажем, совершенно гениальный математик, один из самых крупных математиков 20-го века, Колмогоров, мой учитель, попытался провести реформу математики в школе.

— Он вообще проявлял очень большой интерес к школьному образованию, создал знаменитый Колмогоровский интернат при МГУ, ныне СУНЦ[2].

— Реформа его была очень разумной, но, как это ни грустно, она провалилась. Провалилась, потому что он не понимал, по-видимому, что это социальный вопрос.

— Всё, что касается образования, это социальная проблематика, а не какая-то ещё.

— Проблема в том, что пришлось бы всех учителей переучивать, включая учителей какого-нибудь посёлка на Чукотке. Поэтому все были против. Тут я должен сказать (я впервые это публично говорю),

[2] СУНЦ — специализированный учебно-научный центр. — *В. У.*

что это был единственный случай, когда я в частной беседе с ним позволил себе не согласиться с самим Колмогоровым.

Я говорил ему: «Андрей Николаевич, это не ваше дело — писать учебники для школы, не ваше дело даже писать учебники для студентов пединститутов. Ваше дело — писать учебники для профессоров пединститутов. Вот для них напишите книгу о том, как в пединститутах учить студентов, чтобы они потом учили детей. Вот это ваше дело». Но он не согласился со мной. Я даже не могу сказать, что я был прав, а он нет, потому что Колмогоров по определению более прав, чем я. Но вот такое у меня было ощущение. Это я про социальное.

Специализированный учебно-научный центр имени Колмогорова, который вы упомянули, — это великая вещь. Все ему за это благодарны. Но всё же специализированное обучение тех мальчиков и девочек, которые хотят заниматься математикой — это одно, а общее образование — совсем-совсем другое. Кстати, я очень хорошо помню, кто-то при мне спросил Колмогорова: «Андрей Николаевич, как Вы считаете, дети из сельской глубинки менее способные?». Он твёрдо сказал, что сельские дети совершенно так же способны или не способны к математике, как дети из интеллигентнейших московских семей. Другое дело, как их там учили. Но собственно способности...

— А почему возник такой странный вопрос? Талант — это же «поцелуй бога», а он может поцеловать кого угодно.

— Вот так.

— И на Мехмате много ребят из разных городов и весей. Всегда так было, и сейчас не изменилось. Но вернусь к «загадкам» Ваших книг. Владимир Андреевич, так всё-таки дефис и апостроф — это буквы? Для непрофессионалов их отнесение к буквам кажется очень неожиданным.

— Одно из двух. Русское слово состоит из букв и только из букв, или оно состоит из букв и чего-то ещё. Есть текст, и там встречаются и знаки параграфов, и знаки препинания, и что-то ещё. А вот слово русское? Как считать? В зависимости от того, как вы скажете, я вам скажу, буква это или нет. Слово состоит только из букв, которых 33 в русском языке, и каждая ещё бывает большая и маленькая, или из букв и чего-то ещё? Как вы распорядитесь, тогда я вам отвечу, буква это или не буква.

— Понятно. Вы доказывали, что, в общем-то, это тоже буквы.

— Если считать, что всякое слово русского языка состоит из букв и ничего другого, то поскольку можно предъявить такие слова, в

которых внутри слова встречается апостроф, апостроф оказывается буквой.

— Например, Д'Артаньян.

— Например, Д'Артаньян. Апостроф в словах встречается, по-видимому, только в собственных именах. Я не знаю других слов, в которых встречается.

— По-видимому, да.

— А дефис встречается очень часто. И с моей точки зрения, это буква.

— А ноль — это часть натурального ряда? Опять-таки «проблема ноля» для нематематиков — это чистая игра в бисер, а математики не могут договориться уже очень долго.

— Это сложный вопрос.

— Я так понимаю, что вы сторонник включать ноль в натуральный ряд.

— Это вопрос — что считать натуральным рядом, натуральным числом. Дело в том, что есть числа количественные и считательные. Количественное число — это сколько чего-нибудь может быть. Вот сколько в этой комнате может быть рассыпанных по полу спичек? Я не знаю, очень может быть, что у меня под столом какие-то спички лежат, не выметенные оттуда. Их может быть 7, а может быть 0.

— Только отрицательного их числа не может быть точно.

— Да, наименьшее количественное число — это 0. Если считать, что натуральный ряд состоит из количественных чисел, то 0 — натуральное число. А бывают числа «считательные» — когда мы начинаем пересчитывать предметы...

— И ноль пересчитать нельзя.

— Вот мы считаем, сколько в этой комнате людей. Раз, два, три. Наименьшее считательное число — это единица. Разные понятия — считательное и количественное число. Это философский вопрос, чем считательное отличается от количественного.

— Нолём, собственно, и отличаются.

— Нет, это натуральные ряды отличаются этим. Но они возникают из разных процессов.

— То есть это символ веры: одни принадлежат к одной школе и присоединяют ноль...

— Нет.

— А как?

— Ну да, можно сказать, что это символ веры. А можно понять, что есть два подхода. Символ веры — это если бы я заявлял, что есть только количественные числа и ноль, а всех, кто счи-

тает, что натуральное число — это считательное, нужно сжигать на костре.

— Можно, конечно, с нами не соглашаться, только правы те, кто с нами согласен. Если мы так считаем, то этот подход более правильный. Обычно толерантность ограничивается таким допущением «правоты противников».

— Если Вам ещё не надоело меня слушать, я хочу рассказать ещё вот что.

— Наоборот, очень интересно.

— Когда Колмогоров занимался стиховедением, он очень уважительно относился к своим предшественникам — Томашевскому, Шенгели, Андрею Белому. Когда они анализировали одно и то же произведение, у них получались разные результаты. И все считали, что кто-то из них прав, а другие неправы. А он обнаружил, что они по-разному понимали, что такое, скажем, безударный и ударный слог. И потому нельзя сказать, кто из них более прав. Просто у них были разные понятия ударного и безударного слога. И всё. Поэтому получались разные результаты.

— Но математика, вообще-то не любит неоднозначностей. Математике, мне кажется, это имманентно не присуще, чуждо.

— Очень много неоднозначностей в математике, на самом деле. Она её, конечно, не любит, но если копнуть поглубже... Возьмём, скажем, такую простую вещь, как определение угла. Очень разные есть подходы к тому, что такое угол. В треугольнике понятно, что это такое. А что такое угол вообще? Я сейчас не хочу говорить подробно, но в математике масса терминов, о которых надо договариваться. Все они обозначены, они имеют несколько смыслов, и все они очень точные, эти смыслы.

Скажем, если угол — это два луча, имеющие общую точку, то что такое угол в 479 градусов — уже непонятно. Другое понимание, что угол — это мера поворота одного луча, а чтобы он перешёл в другой, нужно несколько раз прокрутить и т. д.

— И это математика, в которой как бы точно всё определено.

— Там всё определено, но иногда бывает, что один и тот же термин используется в разных смыслах, но каждый раз понятно, в каком.

— И логика тоже может быть многозначной в математике? Если так, Вы разобьёте мои последние иллюзии.

— Нет, логика однозначна.

— И именно это делает применение математики (я цитирую одну из Ваших статей) в какой-то науке свидетельством того, что данная наука достигла некоего уровня развития, а также о некотором её новом состоянии. Применение математики в гуманитарных науках, в свою очередь, это новый толчок для их дальнейшего развития.

— Между прочим, если посмотреть последние выборы в Академию наук, то последние три члена-корреспондента, которые были избраны по специальности «языкознание» все как-то связаны с математикой.

— Математизация науки в широком смысле — это процесс, который продолжается? Вам кажется, что за ним будущее?

— Не могу ничего сказать.

— Когда-то Вы уверенно писали, что развитие науки предполагает её математизацию. Сейчас уже не готовы так уверенно говорить?

— Понимаете, одно дело что-то просто написать. Ну, написал и написал. А если устно говорить, то нужно более подробно объяснить, почему. Это я сейчас не готов делать.

— Владимир Андреевич, я вновь с большим интересом Вас послушала. Может быть, Вы хотите что-нибудь интересное сказать нам на прощание?

— Хочу поприветствовать «Полит.ру», это очень хороший сайт. Это очень хорошее интернет-издание, я его ценю и хочу вас приветствовать.

— Спасибо большое.

Параллельные прямые в мифологии, в реальности и в математике

Насчёт параллельных линий
всё оказалось правдой и в кость оделось <...>.
Иосиф Бродский (1976).

Общественное сознание в значительной степени мифологизировано, и это давно не новость. Все знают, что во время Второй мировой войны, в период германской оккупации Дании, датский король надел жёлтую звезду. На самом деле этого не было. Всем известны слова Ленина, что искусство должно быть понятно массам, и сетования Пушкина на то, что он родился в России с умом и талантом. На самом деле Ленин (в беседе с Кларой Цеткин) говорил не «понятно массам», а «понято массами», а Пушкин (в письме к жене) писал не «с умом», а «с душою». Замена понятности на необходимость понимания и ума на душу в корне меняет смысл привычных формулировок. Если искажение слов Ленина можно списать на неправильный перевод с немецкого (а подлинник текста Цеткин был доступен в России единицам), то случай с Пушкиным требует более глубокого анализа. Объяснение состоит здесь, по-видимому, в том, что наше сознание готово допустить неуместность в России ума (которым, как известно, Россию не понять), но никак не души (это в России-то, заповеднике духовности и душевности!). Сила предубеждённости в этом вопросе поистине замечательна, ведь тираж изданий писем Пушкина исчисляется сотнями тысяч! Тем не менее ошибку в цитате делают даже филологи весьма известные. Вот ещё распространённый миф — формула «Клянусь говорить правду, только правду и ничего, кроме правды», якобы применяемая в американском судопроизводстве (и довольно странная, поскольку обороты «только правду» и «ничего, кроме правды» имеют один и тот же смысл). На самом деле в Америке говорят по-другому: «Клянусь говорить правду, всю правду и ничего, кроме правды, и да поможет мне Бог» (I swear to tell the truth, the whole truth, and nothing but the truth, so help me God).

Журнальная публикация: Новый мир. — 2007. — № 12. — С. 131—139 (в качестве гл. 8 статьи автора «Апология математики, или О математике как части духовной культуры»). Полная публикация в книге: *В. А. Успенский*. Апология математики: Сборник статей. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 137—164 (в качестве гл. 8 статьи «Апология математики»).

Математики могут чувствовать себя польщёнными тем, что среди деталей, в которых мифологическая картина мира отличается от картины реальной, есть и такие, которые относятся к их дисциплине. Например, большинство людей убеждено, что в математике все понятия определяются и все утверждения доказываются. Но ведь каждое понятие определяют через другие понятия, а каждое утверждение доказывают, опираясь на другие утверждения. Вспоминается риторический вопрос г-жи Простаковой: «Портной учился у другого, другой у третьего, да первоет[1] портной у кого же учился?». Автору этих строк приходилось слышать и такое определение площади поверхности шара: «Площадь поверхности шара есть предел площадей поверхностей правильных многогранников, вписанных в этот шар, — при неограниченном возрастании числа граней этих многогранников». Подобное представление о площади поверхности явно возникло по аналогии с тем фактом, что длина окружности действительно есть предел периметров правильных многоугольников, вписанных в эту окружность, — при неограниченном возрастании числа сторон этих многоугольников. Но всё дело в том, что в правильном многоугольнике может быть сколько угодно сторон, в правильном же многограннике количество граней может выражаться лишь одним из следующих пяти чисел: 4 (у тетраэдра), 6 (у куба, он же гексаэдр), 8 (у октаэдра), 12 (у додекаэдра) или 20 (у икосаэдра), так что ни о каком неограниченном возрастании числа граней не может быть речи.

Самое же замечательное — это то, как преломляется в мифологическом сознании учение о параллельных прямых.

Что такое параллельные прямые, знают практически все. Практически все слышали про аксиому о параллельных прямых, ведь её проходят в школе. Никто из так называемых людей с улицы, которых я спрашивал, в чём состоит аксиома о параллельных, не отговорился незнанием. Абсолютное большинство опрошенных отвечали так: аксиома о параллельных состоит в том, что параллельные прямые не пересекаются. Рекомендуем читателю самому произвести опрос и убедиться, что именно такая формулировка аксиомы о параллельных бытует в массовом сознании. Получив указанный выше ответ, следует немедленно задать следующий вопрос: а что такое параллельные прямые? Скорее всего, вам ответят, что параллельными называются такие прямые, которые не пересекаются. (Если даже клаузула «и лежат в одной плоскости» не будет про-

[1] Так в оригинале.

изнесена, этому не следует придавать значения: её необходимость понимают все.) Многие сразу же осознаю́т: тут что-то не так, ибо не может же аксиома заключаться в том, что непересекающиеся прямые не пересекаются. Многих из тех, кто не поймёт этого сразу сам, удастся в этом убедить. Останется незначительное меньшинство, считающее, что аксиома о непересекаемости непересекающихся прямых имеет право на существование. С представителями этого меньшинства договориться трудно: разговор происходит на разных языках. (Ведь параллельные прямые и в самом деле не пересекаются. «А как насчёт такой аксиомы: всякий зелёный предмет является зелёным?» — спрашивал я. «Аксиома как аксиома, — отвечали мне представители названного меньшинства. — Вот если б вы сказали, что всякий зелёный предмет является красным, тогда другое дело».)

Замечательно, что ложная формулировка аксиомы о параллельных (параллельные прямые не пересекаются) получила интернациональное распространение. В этом несколько неожиданном обстоятельстве автор убедился следующим образом. В марте 2006 году на симпозиуме в Пекине, посвящённом проблемам математического образования, я рассказал о своих наблюдениях относительно аксиомы о параллельных — наблюдениях, сделанных на русскоязычном материале. Среди присутствовавших был американский профессор математики Веллеман (Daniel J. Velleman) из довольно известного Амхерст-колледжа (Amherst College), что в штате Массачусетс. В тот же день он спросил свою жену Шелли (Shelley L. Velleman), бакалавра и магистра нескольких гуманитарных наук, приехавшую вместе с ним в Пекин, в чём состоит аксиома о параллельных прямых. И получил ответ: «В том, что параллельные прямые не пересекаются». Тогда он спросил, а что такое параллельные прямые. Ответом ему был хохот: супруга профессора сразу же поняла бессмысленность своего ответа. Итак, хотя бы в этой детали русская и американская мифологические картины мира оказались одинаковы.

Но сюжет с параллельными прямыми на этом не заканчивается. Респондента, осознавшего абсурдность его ответа, можно спросить, в чём же всё-таки состоит аксиома о параллельных. На этом этапе вы, скорее всего, получите такой ответ: «Через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести прямую, параллельную этой заданной прямой». Это уже значительно лучше, потому что такой ответ всего лишь неверен, но уже не абсурден. Неверен же ответ потому, что представляет собою не аксиому, а теорему. (Теорема эта доказывается чрезвычайно просто: надо сперва из точки опустить

перпендикуляр на заданную прямую, а затем из той же точки восставить перпендикуляр к опущенному перпендикуляру; тогда заданная прямая и восставленный перпендикуляр будут перпендикулярны к одной и той же прямой, а именно к опущенному перпендикуляру, и потому параллельны.) Подлинный же смысл аксиомы о параллельных не разрешительный, а запретительный: она утверждает не то, что нечто сделать можно, а то, что чего-то сделать нельзя, что чего-то не существует. Вот её правильная формулировка: *через точку, не лежащую на заданной прямой, нельзя провести более одной прямой, параллельной этой заданной прямой.* (Проницательный читатель усмотрит здесь аналогию с восемью из первых десяти поправок к американской конституции, известных в своей совокупности под названием «Билль о правах». В этих восьми поправках свободы формулируются в терминах запретов: «Конгресс не должен...» — в первой поправке, «ни один солдат не должен...» — во второй поправке и т. п.). Причина искажённого восприятия аксиомы о параллельных, на наш взгляд, заключается в следующем. В средней школе для простоты обычно вдалбливают формулировку «можно провести одну и только одну прямую», не заостряя внимания на том, что оборот «можно провести» выражает здесь теорему, а «можно провести одну и только одну» — аксиому. В результате в сознании остаётся более простая идея о возможности, а более сложная (и более глубокая) идея о единственности теряется.

Учение о параллельных — основа геометрии Лобачевского. Чем эта геометрия отличается от обычной, евклидовой, будет сказано несколькими абзацами ниже. А пока констатируем, что Лобачевский, возможно, единственный российский математик, присутствующий в общественном сознании (а если брать всех математиков, а не только российских, то, скорее всего, один из двух; другой — Пифагор). Его место закреплено в поэзии: «Пусть Лобачевского кривые / Украсят города / Дугою <...>», «И пусть пространство Лобачевского / Летит с знамён ночного Невского», — призывает Хлебников в поэме «Ладомир». Бродский в стихотворении «Конец прекрасной эпохи» не призывает, но констатирует:

Жить в эпоху свершений, имея возвышенный нрав,
К сожалению, трудно. Красавице платье задрав,
Видишь то, что искал, а не новые дивные дивы.
И не то чтобы здесь Лобачевского твёрдо блюдут,
Но раздвинутый мир должен где-то сужаться, и тут —
Тут конец перспективы.

Если спросить «человека с улицы», в чём состоит вклад Лобачевского в науку, в подавляющем большинстве случаев ответ будет таким: «Лобачевский доказал, что параллельные прямые пересекаются» (в более редком и изысканном варианте: «Лобачевский открыл, что параллельные прямые могут и пересечься»). Тогда надо немедленно задать второй вопрос: «А что такое параллельные прямые?» — и получить ответ «Параллельные — это такие прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются». После чего можно пытаться (с успехом или без оного) убедить собеседника в несовместимости двух его ответов. Намёк на схождение параллельных в точку содержится уже в приведённой цитате из Бродского о сужении мира до финального «конца перспективы». Более раннее свидетельство встречаем в романе В. А. Каверина «Скандалист, или Вечера на Васильевском острове»[2]. Открываем изданный в 1963 году первый том шеститомного собрания сочинений на с. 447—448. Герой романа Нагин[3] просматривает читанную ранее «книгу по логике», и вот «он внезапно наткнулся на вопросительный знак, который был поставлен на полях книги его рукою. Одна страница осталась непонятой при первом чтении курса. Вопросительный знак стоял над теорией Лобачевского о скрещении параллельных линий в пространстве». Нагин собирается писать рассказ на эту тему: «Он кусал себе ногти. „Параллели, параллели“, — написал он здесь и там на листе <...>. „Нужно заставить их встретиться“, — начертал он крупно <...>». Наконец, прямое указание находим в фольклоре (а ведь буквальное значение слова folklore — народная мудрость):

Однажды Лобачевский думал, кутаясь в пальто:
Как мир прямолинеен, видно, что-то здесь не то!
И он вгляделся пристальней в безоблачную высь,
И там все параллельные его пересеклись[4].

Имеются и более современные свидетельства. Каждое утро по будням, между 9 и 11 часами, на «Эхе Москвы» идёт интерактивная программа «Разворот». 15 февраля 2006 года в рамках этой программы слушателям предлагалось выразить своё отношение к идее провести в Москве парад геев. Ведущий Алексей Венедиктов, беседуя с очередным слушателем, призывал его к толерантности и

[2] Благодарю В. И. Беликова, подсказавшего мне это свидетельство.
[3] В восьмитомнике В. А. Каверина (1980) этот персонаж носит фамилию Ногин.
[4] Сообщено Н. М. Якубовой.

к признанию права каждого иметь свою собственную точку зрения. Происходил такой диалог (я записал его тогда со слуха):

Венедиктов. Вот Вы скажите, параллельные прямые пересекаются?

Слушатель. Нет.

Венедиктов. А вот у Лобачевского пересекаются, там другая система отсчёта.

В следующем, 2007 году на «Эхе Москвы» та же точка зрения была высказана ещё раз, теперь уже в рамках программы «Особое мнение», с каковым мнением 18 октября выступил Леонид Радзиховский. Он сказал: «Вот когда Лобачевский придумал свою неевклидову геометрию, что две параллельные прямые могут пересечься, это был действительно переворот в области геометрии и физики»[5].

Правда, как известно, у каждого своя, но истина одна. Истина состоит в том, что параллельные друг другу прямые не пересекаются даже у Лобачевского.

Природа мифологического представления об открытии Лобачевского понятна: все знают, что в его геометрии происходит что-то необычное с параллельными прямыми; а что может быть необычнее их пересечения?! Поражает всё же степень распространённости этого представления. Впрочем, апологет математики вправе испытать и чувство законного удовлетворения: хоть какие-то серьёзные математические представления, пусть даже ложные, в массовом сознании присутствуют!

Не в интересах правды, а в интересах истины сообщим, что же происходит в геометрии Лобачевского. Отличие геометрии Лобачевского от привычной, известной со школы евклидовой геометрии в следующем. В евклидовой геометрии через точку проходит только одна прямая, параллельная заранее указанной прямой, а в геометрии Лобачевского — много таких прямых. В аксиоме о параллельных, сформулированной выше, надо заменить слово «нельзя» на слово «можно», и аксиома о параллельных в версии Евклида превратится в аксиому о параллельных в версии Лобачевского: *через точку, не лежащую на заданной прямой, можно провести более одной прямой, параллельной этой заданной прямой.*

Особое положение аксиомы о параллельных вызвано тем, что она не столь очевидна, как другие аксиомы геометрии. Возьмём, напри-

[5] Списано с сайта «Эха Москвы». Этот пример указан мне Г. М. Полотовским.

мер, аксиому о том, что через две любые различные точки проходит одна и только одна прямая. Её можно проверить экспериментально. Надо выбрать плоский участок, вбить два колышка и туго натянуть между ними нить — вот вам наглядное подтверждение существования прямой, проходящей через две точки. Если же мы возьмём другую натянутую нить, соединяющую те же колышки, то обе нити сольются в одну линию — на глаз, конечно, но вся наша проверка и производится «на глаз»; так подтверждается единственность прямой, проходящей через две заданные точки. А вот убедиться столь же просто, что проходящая через точку параллельная к заданной прямой всегда только одна, невозможно. Представим себе, что мы провели параллельную и, кроме того, через ту же точку провели какую-то другую прямую под очень маленьким углом к этой параллельной. По евклидовой аксиоме эта другая прямая обязана пересечь ту исходную прямую, к которой и была проведена наша параллельная. Но где она, точка пересечения? Она ведь может оказаться не только вне выбранного участка, доступного нашему обозрению, но и астрономически далеко, вне нашей Галактики. И может не найтись иного способа убедиться в том, что такая точка существует, как просто поверить в евклидову аксиому о параллельных. Но такой, основанный на чистой вере, способ подтверждения того факта (а лучше сказать того предположения, той гипотезы), что аксиома о параллельных выполняется в реальном физическом пространстве, был не по душе математикам.

Поэтому в течение долгого времени предпринимались попытки доказать содержащееся в аксиоме о параллельных утверждение и, тем самым, как бы понизить её статус, переведя её из аксиом в теоремы. До нас дошли сведения о таких попытках, относящихся ко II веку н. э. Желание доказать аксиому о параллельных подогревалось, помимо всего прочего, громоздкостью её первоначальной формулировки, которая содержится в составленных в III веке до н. э. «Началах» Евклида. В «Началах» она значилась по одним манускриптам 11-й аксиомой, а по другим — 5-м постулатом. В качестве 5-го постулата она так изложена в последнем, наиболее авторитетном русском издании «Начал» 1948 года:

> И если прямая, падающая на [пересекающая] две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме] меньшие двух прямых [углов], то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где [в сумме] углы меньше двух прямых [углов].

Слова в квадратных скобках добавлены нами для ясности. При взгляде на список всех пяти постулатов Евклида бросаются в глаза отличия 5-го постулата от других. Во-первых, его не так легко понять при беглом чтении. А во-вторых, когда понимание наконец приходит, обнаруживается, что истинность этого постулата не столь очевидна, как других. Была ещё одна причина, побуждавшая доказывать 5-й постулат: выяснилось, что 4-й постулат, провозглашающий равенство всех прямых углов, можно доказать, а значит, изъять его из списка постулатов.

Однако все попытки доказать 5-й постулат неуклонно проваливались. Нельзя сказать, что эти попытки были бесполезны, они способствовали развитию геометрии. Тот общепринятый ныне, «школьный» вариант аксиомы о параллельных, который мы привели выше (*через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести лишь одну прямую, параллельную этой прямой*), принадлежит античному философу и математику V века Проклу Диадоху, руководителю Платоновой Академии. Прокл пришёл к этой современной формулировке, комментируя Евклида и пытаясь доказать 5-й постулат. Формулировка Прокла равносильна 5-му постулату (он же 11-я аксиома) Евклида.

Вообще, в каждое рассуждение, объявляемое доказательством аксиомы о параллельных, незаметно вкрадывалось какое-нибудь геометрическое утверждение, не вызывающее, казалось бы, никаких сомнений, но на самом деле равносильное этой аксиоме. Например, в «доказательстве» знаменитого французского математика XVIII—XIX веков Лежандра использовалось такое вроде бы невинное предложение: *через любую точку внутри угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла*. Оказалось, что это предложение равносильно аксиоме о параллельных: мало того что оно опирается на эту аксиому, её можно из этого предложения вывести.

Известно много других равносильных формулировок аксиомы о параллельных. Многие из них выглядят совершенно очевидными — гораздо более очевидными, чем те, что были предложены Евклидом и Проклом. Вот некоторые из них.

1. Существует хотя бы один прямоугольник, т. е. такой четырёхугольник, у которого все углы прямые.
2. Существуют подобные, но не равные[6] треугольники.
3. Любую фигуру можно пропорционально увеличить.
4. Существует треугольник сколь угодно большой площади.

[6] Мы предпочли бы сказать «не конгруэнтные».

5. Если две прямые в одну сторону расходятся, то в другую сближаются.
6. Сумма углов одинакова у всех треугольников.
7. Существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна двум прямым.
8. Существуют параллельные прямые, причём две прямые, параллельные третьей, параллельны и друг другу.
9. Существуют параллельные прямые, причём прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, непременно пересечёт и другую.
10. Через любые три точки можно провести либо прямую, либо окружность.
11. Справедлива теорема Пифагора.
12. Сближающиеся прямые рано или поздно пересекутся.
13. Если две прямые начали сближаться, то невозможно, чтобы они затем начали (в ту же сторону, без пересечения) расходиться.

Последние две формулировки принадлежат знаменитому персидскому математику и философу XI—XII веков Омару Хайяму, в России более известному в качестве поэта.

С большим трудом в сознание математиков проникало убеждение, что, скорее всего, утверждение, сформулированное в аксиоме о параллельных, вообще нельзя доказать. Осознать это было трудно ещё и потому, что вплоть до самого конца XIX века какой-либо чёткой системы аксиом геометрии вообще не существовало. Для аксиомы о параллельных решающим оказалось третье десятилетие XIX века. В этот период два великих геометра — российский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) и венгерский математик Янош Бóйаи[7] (Bolyai János, 1802—1860) совершенно независимо друг от друга построили геометрическую теорию, основанную на отрицании аксиомы о параллельных. Эту теорию за рубежом, как правило, называют *геометрией Лобачевского—Бойаи* (по-английски *Bolyai—Lobachevskian geometry*), а в России — *геометрией Лобачевского* (предполагаю, что в Венгрии она называется *геометрией Бойаи*). У неё есть и «обезличенное» название — *гиперболическая геометрия*.

Надо сказать, что гениальность Лобачевского и Бойаи была признана только после их смерти, после признания созданной ими неевклидовой геометрии, отрицающей ту общепринятую евклидову аксиому о параллельных, которая была сформулирована выше.

[7] По-русски эту фамилию часто пишут как Больяй, хотя наиболее близким к венгерскому произношению является написание Бояи.

Свершившись, это признание произвело переворот не только в математике, но и в философии. Во-первых, была признана возможность развития гиперболической геометрии в качестве теории столь же содержательной и непротиворечивой, как и геометрия Евклида; и это развитие уже произошло. Во-вторых, признали теоретическую возможность того, что гиперболическая геометрия реализуется в окружающем нас физическом пространстве.

Первые публикации по гиперболической геометрии принадлежат её авторам: в 1829—1830 годах обнародовал результаты своих изысканий Лобачевский, в 1832 году — Бойаи. Их предшественником можно считать немецкого юриста Швейкарта (Ferdinand Karl Schweikart, 1780—1857), который пришёл к идее неевклидовой геометрии в 1818 году, а также, может быть, его племянника Тауринуса[8]. В начале 1819 года принадлежащее Швейкарту описание новой «астральной» (звёздной) геометрии, уместившееся на одной странице, было переслано великому математику Гауссу одним из учеников последнего (кстати, астрономом). Гаусс ответил: «Почти всё списано с моей души». Дело в том, что «король математиков», как его называли, Гаусс (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855), пришёл к неевклидовой геометрии ещё раньше. В письме к Тауринусу от 8 ноября 1824 года Гаусс называл эту геометрию странной и сообщал: «Я настолько разработал [её], к моему полному удовлетворению, что могу решить в ней любую проблему». Однако Гаусс ничего на эту тему не публиковал, справедливо полагая, что научная общественность ещё не готова воспринять столь смелые мысли. Работы Гаусса по неевклидовой геометрии стали известны лишь после посмертной публикации его архива. Вот какое признание он сделал в 1829 году в частном письме: «Вероятно, я ещё не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев, который поднимется, если я выскажу свои воззрения целиком». А упомянутого ученика астронома, намеревающегося публично допустить ложность евклидовой аксиомы о параллельных, Гаусс в 1818 году предостерегает: «Я радуюсь, что вы имеет мужество высказаться так, как если бы признавали ложность нашей теории параллельных, а вместе с тем и всей нашей геометрии. Но осы, гнездо которых вы потревожите, полетят вам на голову».

[8] Юрист и математик Франц Адольф Тауринус (Franz Adolf Taurinus, 1794—1874) допускал под влиянием дяди возможность существования неевклидовой геометрии, но свою брошюру 1826 года, содержащую это допущение, сжёг. Труды Тауринуса были обнаружены только после его смерти.

Обоснованность опасений Гаусса вскоре была подтверждена реакцией современников на сочинения Лобачевского. Что касается единственной публикации Бойаи, то она, кажется, не привлекла особого внимании и оставила современников равнодушными — исключая Гаусса. Он высоко оценил заслуги обоих коллег. Получив в 1832 году от знакомого ему по Гёттингену Фаркаша Бойаи работу его сына Яноша, он написал отцу автора: «Всё содержание работы, путь, по которому твой сын пошёл, и результаты, к которым он пришёл, почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30—35 лет тому назад. Я действительно этим крайне поражён. Я имел намерение о своей собственной работе, кое-что из которой я теперь перенёс на бумагу, при жизни ничего не публиковать <...>. Я хотел <...>, чтобы эти мысли, по крайней мере, не погибли со мной. Я поэтому чрезвычайно поражён случившимся — оно освобождает меня от этой необходимости; и меня радует, что именно сын моего старого друга таким удивительным образом меня предвосхитил». А вот что сообщал Гаусс в письме к другому своему корреспонденту: «Я нашёл все мои собственные идеи и результаты, развитые с большим изяществом, хотя, вследствие сжатости изложения, в форме труднодоступной тому, кому чужда эта область <...> я считаю, что этот юный геометр Бойаи — гений первой величины».

Первое знакомство Гаусса с трудами Лобачевского состоялось в 1841 году, на следующий год после того, как в Берлине вышла небольшая (всего 61 страница) книжка Лобачевского «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien» (её первый русский перевод, опубликованный под названием «Геометрические изыскания о теории параллельных линий», появился лишь в 1868 году в российском математическом журнале[9]). В 1842 году Гаусс предложил избрать Лобачевского, как «одного из превосходнейших математиков Российского государства», в члены-корреспонденты Гёттингенского научного общества и лично известил его об избрании. Однако ни в этом письме, ни в представлении Гаусса, ни в выданном Лобачевскому дипломе не говорилось ни слова о том, что́ послужило поводом для лестного отличия. Янош Бойаи и вовсе не получил от Гаусса никакой поддержки.

[9] Другой русский перевод, озаглавленный «Геометрические исследования по теории параллельных линий», который выполнил, прокомментировал и снабдил вступительной статьёй Вениамин Фёдорович Каган (1869—1953), известный специалист в области оснований геометрии, вышел в 1945 году отдельным изданием, а позже и составе полного собрания сочинений Лобачевского.

Открытие неевклидовой геометрии не принесло прижизненной славы двум смельчакам, решившимся обнародовать своё открытие. Их исследования были выше понимания современников. И если для Лобачевского, который стал жертвой глумления, его открытие обернулось драмой, то Бойаи оно привело к трагедии — расстройству психики.

Труды Лобачевского не просто не были признаны современниками, но подверглись прямому поношению. Упомянутая выше первая публикация Лобачевского 1829—1830 годов называлась «О началах геометрии» и была напечатана в виде пяти статей в журнале «Казанский вестник, издаваемый при Императорском Казанском университете», в частях XXV, XXVII, XXVIII этого журнала. К заглавию публикации была сделана примечательная ссылка:

> Извлечено самим Сочинителем из рассуждения под названием: «Exposition des principles de la Géometrie etc.», читанного им в заседании Отделения физико-математических наук 11 февраля 1826 года[10].

В 1832 году совет Казанского университета представил эту работу в Академию наук. Академик Остроградский написал в своём отзыве: «Всё, что я понял в геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного. <...> Книга г-на ректора[11] Лобачевского опорочена ошибкой <...> она небрежно изложена и <...> следовательно, она не заслуживает внимания Академии». Михаил Васильевич Остроградский был математик хотя и несколько приземлённый, но знаменитый (и даже заслуженно знаменитый), и его мнение пользовалось высоким авторитетом. Провинциала же Лобачевского в столицах никто не знал. К отзыву Остроградского прислушались. И в 1834 году в журнале Ф. В. Булгарина «Сын отечества» появился издевательский пасквиль, подписанный двумя буквами С. С. Вот цитата из него:

> Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-нибудь серьёзной целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему школьному учителю! Если не учёность, то, по крайней мере, здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостаёт и сего последнего.

---

[10] Лобачевский, разумеется, указал дату по старому стилю, т. е. по юлианскому календарю, принятому тогда в России. По новому стилю, т. е. по григорианскому календарю, выступление Лобачевского состоялось 23 февраля 1826 года.

[11] Лобачевский был ректором Казанского университета с 1827 по 1846 год. Именно на его имя как ректора Лев Толстой писал прошение о приёме в число студентов.

Слава «Коперника геометрии» пришла к Лобачевскому посмертно, накануне столетнего юбилея. Уважение вызывает его преданность научной истине, бесстрашие в её отстаивании и стойкость в перенесении невзгод.

В июне 1981 года я посетил могилу Лобачевского на Церковной аллее Арского кладбища в Казани и обнаружил её в довольно запущенном состоянии. Поставленный в своё время крест был похищен или разрушен, от него сохранился только постамент, и на нём стоял стандартный дешёвый крест из металлических труб и прутьев, такие кресты и ныне можно видеть на наших кладбищах.

Николай Семёнович Лесков в «Левше» описал судьбу русского гения. Именно усилиями Лобачевского Казанский университет стал одним из лучших учебных заведений России. 20 ноября 1845 года Лобачевский был в шестой раз утверждён в должности ректора на новое четырёхлетие. Тем не менее летом 1846 года Лобачевского уволили с должности ректора, а весной 1847 года — с должности профессора. Он тяжело переживал этот страшный удар. Формально Лобачевский получил даже повышение — был назначен помощником попечителя учебного округа, однако жалованья ему не назначили. Наступили годы увядания. Вскоре Лобачевский разорён, имение его жены продано за долги. В 1852 году умер старший сын Лобачевского. Здоровье его самого подорвано, он сильно одряхлел, стал слепнуть и к концу жизни ослеп совершенно. Но и лишённый зрения, Лобачевский не переставал приходить на экзамены, на собрания и учёные диспуты и не прекращал заниматься наукой. За год до смерти он закончил свой последний труд «Пангеометрия», диктуя его ученикам. Разбитый жизнью и больной, он умер в феврале 1856 года, не дожив совсем немного до признания своей теории.

Толчок к признанию дала публикация дневников и писем Гаусса, последовавшая за его кончиной в 1855 году. Рассыпанные в них восторженные отзывы о Лобачевском всколыхнули математический мир. О Лобачевском заговорили, стали искать его работы. В Казань из университетов Европы полетели просьбы прислать его сочинения. Потребовалось срочное переиздание всех его геометрических трудов, а позже из журналов были извлечены статьи Лобачевского и по другим математическим темам. «...Чем Коперник был для Птолемея, тем был Лобачевский для Евклида. Между Коперником и Лобачевским существует поучительная параллель. Коперник и Лобачевский — оба славяне по происхождению. Каждый из них произвёл революцию в научных идеях. Величие каждой из этих революций настолько огромно, что оно может быть сравнено лишь с величием другой.

Причина чрезвычайной важности этих революций заключается в том, что они изменили наше понимание космоса», — писал знаменитый английский геометр и философ Уильям Клиффорд[12].

Что касается Бойаи, то открытие им неевклидовой геометрии привело его к повреждению в психике. Судя по всему, он был довольно амбициозен. Янош с детства был весьма одарён и рос вундеркиндом. В 13 лет он овладел дифференциальным и интегральным исчислением и аналитической механикой. Он играл на скрипке и знал девять иностранных языков, в том числе китайский и тибетский. Окончив в 1822 году обучение в венской Инженерной академии (пройдя за четыре года семилетний курс), он в сентябре 1823 года поступил в инженерные войска; на военной службе пробыл 11 лет и имел славу лучшего фехтовальщика и танцора во всей австро-венгерской армии. При этом он никогда не курил и не пил ничего крепкого, даже кофе. Ни одного достоверного портрета Яноша Бойаи до нас не дошло.

Создавать неевклидову геометрию Бойаи начал в 17 лет, а 3 ноября 1823 года написал отцу, что открыл удивительные вещи, сотворил другой, новый мир. Но лишь в 1832 году результаты исследований Бойаи были опубликованы — как тогда было принято, на латыни. Полное название единственного (!) опубликованного сочинения Бойаи таково: «Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica» [«Приложение. Содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности и ложности 11-й аксиомы Евклида[13] (что априори никогда решено быть не может); с прибавлением к случаю ложности геометрической квадратуры круга»]. «Математический энциклопедический словарь» (М., 1988, с. 669) отмечает, что изложение «отличается крайней сложностью и схематичностью, но по продуманности каждого слова и обозначения принадлежит к числу наиболее совершенных произведений математической литературы». Указанные сложность и схематичность, а также чрезвычайная сжатость (изложение занимало 24 страницы) явно не способствовали популяризации идей Бойаи: надо было быть Гауссом, чтобы их понять. Кроме того,

[12] Уильям Клиффорд (William Kingdon Clifford, 1845—1879) один из основоположников векторного исчисления, автор терминов «ротор» и «дивергенция», предвосхитивший Эйнштейна в предположении, что гравитация имеет геометрическую природу.

[13] Напомним, что в 11-й аксиоме (чаще называемой 5-м постулатом) Евклида говорится о свойстве параллельности в евклидовой геометрии.

трактат не вышел отдельным изданием, а был опубликован в качестве приложения к книге Бойаи-старшего (отсюда и общепринятое краткое название — «Appendix», т. е. «Приложение»). Не получив публичной поддержки Гаусса, да ещё и узнав о его заявлении, что сообщённое ему открытие он сделал раньше, младший Бойаи впал в полное отчаяние. Он заподозрил Гаусса в попытке украсть его результаты и присвоить приоритет. Но сильнейший удар ждал его впереди. В 1848 году Бойаи ознакомился с упомянутым выше сочинением Лобачевского «Geometrische Untersuchungen...», из первых же строк которого явствовало, что русский математик обнародовал неевклидову теорию раньше, в 1829 году. Это доконало Яноша. Он даже заподозрил, что Лобачевский — вымышленное лицо, выдумка хитроумного интригана Гаусса. Это уже был явный симптом психического нездоровья, на которое сдержанно намекает «Математический энциклопедический словарь»: «Открытия Бойаи при жизни признания не получили, что отразилось на его психике».

В геометрии Лобачевского—Бойаи много непривычного для нас, воспитанных на учении Евклида. Например, сумма углов своя у каждого треугольника, и притом она всегда меньше 180°. Достаточно взглянуть на утверждение, использованное Лежандром, и другие приведённые выше равносильные формулировки аксиомы о параллельных, чтобы осознать: ни одно из них не имеет места в гиперболической геометрии (хотя все другие аксиомы евклидовой геометрии выполняются). Вот какое суждение высказал Гаусс в упомянутом письме Тауринусу от 8 ноября 1824 года:

> Предположение, что сумма углов треугольника меньше чем 180°, приводит к странной геометрии, совершенно отличной от нашей, но совершенно непротиворечивой <...>. Три угла треугольника становятся сколь угодно малыми, если только стороны взять достаточно большими, хотя площадь треугольника никогда не может превзойти и даже достигнуть некоторого предела, сколько бы большими ни были стороны.

Кажется естественным вопрос, какая же из аксиом всё-таки истинна — Евклида или Лобачевского. Тот раздел труда Лобачевского «О началах геометрии», который был опубликован в 1830 году в части XVIII «Казанского вестника» (с. 251—283), начинается такими словами, в которых мы изменили лишь орфографию и пунктуацию:

> Изложенная нами теория параллельных предполагает линии с углами в такой зависимости, которая, как после увидим, находится

или нет в природе, доказать никто не в состоянии. По крайней мере, наблюдения астрономические убеждают в том, что все линии, которые подлежат нашему измерению, даже расстояния между небесными телами, столько малы, что в сравнении с линиею, принятою в данной теории за единицу, употребительные до сих пор уравнения прямолинейной Тригонометрии без чувствительной погрешности должны быть справедливы.

Здесь мы вынуждены обратиться к проблемам философским. Прежде всего, надо понять, что значит «истинна». Казалось бы, ясно: истинна — значит соответствует реальному положению вещей. Как там, в реальном мире, одна параллельная прямая или много? А никак, потому что в реальном мире вообще нет прямых, как нет и других объектов геометрии. Геометрических шаров, например, в природе не бывает, а бывают лишь предметы, приближающиеся по форме к геометрическому шару; при этом арбуз в меньшей степени шар, чем волейбольный мяч, а мяч — в меньшей степени, чем биллиардный шар или шарик подшипника. С прямыми дело обстоит ещё сложнее: ведь прямая бесконечна, а все примеры, которые мы можем предъявить, будь то линия, начерченная на песке либо на бумаге, или натянутая нить, или граница между стеной и потолком, — все они демонстрируют нам (опять-таки, разумеется, приблизительно) лишь ограниченные, конечные участки прямых линий, т. е. то, что на языке современной геометрии называется отрезками. Да и отрезков в точном геометрическом смысле в природе не существует: самая тонкая нить имеет толщину, самая гладкая поверхность лишь приближается к идеально ровной, а под электронным микроскопом выглядит как рябь. Луч света, и тот искривляется в реальном пространстве. Для формирования же представления о бесконечной прямой одного только наглядного способа недостаточно — требуется ещё и воображение. От зарождения геометрии прошли тысячелетия, пока люди осознали, что мы не можем непосредственно наблюдать точки, прямые, отрезки, плоскости, углы, шары и прочие геометрические объекты, и потому предметом геометрии служит не реальный мир, а мир воображаемый, населённый этими идеальными геометрическими объектами, всего лишь похожий на мир реальный (по терминологии некоторых философских школ, являющийся *отражением* реального мира).

«Поверхности, линии, точки, как их определяет Геометрия, существуют только в нашем воображении», — писал в 1835 году Лобачевский во вступлении к своему сочинению «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (впервые оно было опубликовано в

четырёх номерах «Учёных записок Казанского университета» за 1835, 1836, 1837 и 1838 годы). Аксиомы геометрии как раз и уточняют свойства этих существующих в нашем воображении понятий. Значит ли это, что мы можем сформулировать какие угодно аксиомы? Нет, если мы хотим, чтобы геометрические понятия отражали наши представления о реальном физическом пространстве. Потому что, хотя точки, прямые, поверхности не существуют реально, некие физические объекты и явления, приводящие к этим понятиям, безусловно, существуют (если вообще признавать как реальность существование окружающего нас мира). Поэтому вопрос надо ставить так: какая из аксиом, Евклида или Лобачевского, точнее описывает те представления о структуре реального физического пространства, которые отражаются в геометрических образах? Строгий ответ на это вопрос таков: неизвестно. Однако можно с уверенностью утверждать, что в доступных нашему наблюдению областях пространства евклидова геометрия соблюдается с высокой степенью точности. Так что, говоря о неизвестности, мы имеем в виду очень большие области пространства. Дело в том, что в геометрии Лобачевского отличие суммы углов треугольника от 180° тем больше, чем длиннее стороны этого треугольника; поэтому чем больше треугольник, тем больше надежды заметить данное отличие — и, тем самым, подтвердить на практике аксиому Лобачевского. Отсюда возникает мысль измерять треугольники с вершинами в звёздах (недаром упомянутый выше Швейкарт называл звёздной геометрию, впоследствии предложенную Лобачевским). Такими измерениями занимался сам казанский ректор («И он вгляделся пристальней в безоблачную высь...»), но точность измерительных приборов оказалась недостаточной, чтобы уловить отклонение суммы углов треугольника от суммы двух прямых углов, даже если таковое отклонение и существует.

Чтобы пояснить, как это может быть, что для меньших участков пространства действует одна геометрия, а для бóльших — другая, воспользуемся следующей аналогией. При составлении плана местности нет нужды учитывать шарообразность Земли — именно потому, что участок, план которого снимается, невелик. Поэтому, когда имеешь дело со сравнительно небольшими участками, разумно исходить из того, что Земля плоская, оттого это заблуждение так долго держалось. При составлении же карты России шарообразность Земли не брать в расчёт нельзя, а при тонких расчётах приходится иметь в виду, что Земля есть эллипсоид (а точнее, геоид). При ружейной стрельбе можно проследить на карте местности траекторию пули, приложив линейку к двум точкам, отмечающим положение стрелка

и положение цели. Но маршрут самолёта, совершающего дальний перелёт по кратчайшей линии, на плоской карте выглядит как дуга. Аналогично евклидова геометрия хорошо работает в малых масштабах, т. е. на доступных нам участках пространства. Мы не знаем, что происходит в масштабах очень больших. В рассказе Уэллса «История Платтнера» его герой Готфрид Платтнер проделывает некое фантастическое путешествие, после чего возвращается зеркально перевёрнутым. Уэллс объясняет это явление выходом в другой мир, в четвёртое измерение. Теоретические представления о возможной геометрической структуре Вселенной не исключают того, что путешествие, приводящее к зеркальному отражению путешественника, может быть совершено и без выхода из нашего трёхмерного мира.

Но что же представляют собой идеальные геометрические объекты: точки, прямые, углы, плоскости и т. п., отражающие наши представления о физической реальности? И в каком смысле они подчиняются аксиомам? Проще всего объяснить это с помощью хотя и искусственной, но поучительной аналогии. Выпишем следующие четыре утверждения:

(1) Для каждых двух бокров существует куздра, которая их будлает.
(2) Если два бокра различны, то не более одной куздры могут будлать и того, и другого.
(3) Существуют три бокра, для которых нет такой куздры, которая будлала бы их всех.
(4) Каждая куздра будлает не менее двух бокров.

Кто такие бокры, куздры, и что такое будлать, оставляется неразъяснённым. Оказывается, однако, что разъяснения и не требуются для выведения из этих утверждений определённых заключений, т. е. таких, которые непременно являются истинными при условии истинности всех четырёх исходных посылок. Убедимся, например, что (5) две различные куздры не могут будлать одновременно более чем одного бокра. В самом деле, если бы таких бокров было два, то их совместно будлали бы две наши куздры, что запрещено утверждением (2). Для собственного развлечения читатель может доказать, например, такой факт: (6) для каждых двух бокров найдётся такой третий бокр, что не существует куздры, будлающей всех этих трёх бокров.

Итак, что мы имеем? Мы имеем какие-то объекты (в данном случае — бокры и куздры) и отношения между ними (в данном случае — отношение будлания). Относительно этих объектов и отношений нам

не известно ничего, кроме некоторых их свойств, сформулированных в заявленных утверждениях, в данном случае — в утверждениях (1)—(4). Эти заявленные утверждения суть не что иное, как аксиомы (в данном случае — аксиомы куздрологии). Они используются для того, чтобы, принимая их в качестве истин, выводить из них теоремы, т. е. дальнейшие утверждения о наших объектах и отношениях (одну теорему куздрологии мы доказали, другую предложили доказать читателю). Так строится любая аксиоматическая теория, в частности геометрия.

Ограничимся для простоты планиметрией, т. е. геометрией плоскости, не выходя в трёхмерное пространство. Основные объекты планиметрии суть точки и прямые. Основных отношений четыре:

(1) отношение *инцидентности* между точками и прямыми — точка и прямая могут быть или не быть инцидентны друг другу; в школьной геометрии употребляется более приземлённая терминология: когда точка и прямая инцидентны, говорят, что «точка лежит на прямой» или же «прямая проходит через точку»;

(2) отношение '*между*', связывающее тройки точек, — из трёх точек, лежащих на одной прямой, одна, произвольно выбранная, может находиться или не находиться *между* двумя другими;

(3)—(4) отношение *конгруэнтности отрезков* и отношение *конгруэнтности углов* — два отрезка или два угла могут быть или не быть *конгруэнтны* друг другу.

Когда-то в наших школах не боялись слова «конгруэнтны»; сейчас, к сожалению, это слово велено заменить на «равны». Почему к сожалению? А потому, что в виду имеется не отношение между длинами отрезков или величинами углов (и те, и другие действительно равны, если соответствующие отрезки или углы конгруэнтны), а отношение между отрезками и между углами как геометрическими фигурами. А каждая сущность, геометрическая фигура в частности, может быть равна только самой себе.

Аксиоматическое построение геометрии не предполагает разъяснения того, что такое точки, прямые и названные отношения. Вместо этого формулируются аксиомы, в которых указывается, каким законам подчиняются точки, прямые, инцидентность, отношение 'между', конгруэнтность отрезков и конгруэнтность углов. Из этих аксиом и выводятся теоремы геометрии. Говоря формально, аксиомы могут быть какими угодно, лишь бы они не противоречили друг другу. Но ежели мы желаем, чтобы теория описывала реальность, то, как уже отмечалось, и аксиомы, связывающие идеальные объекты и отношения теории, должны отражать свойства тех сущностей реаль-

ного, физического, мира, отражением каковых служат указанные идеальные объекты и отношения, положенные в основу теории. В частности, отношение конгруэнтности геометрических фигур должно отражать возможность совмещения одной фигуры с другой посредством перемещения.

На примере бокров, куздр и будлания мы попытались вкратце изложить суть аксиоматического метода. Несколько заключительных замечаний относительно этого примера. Заменим в вышеприведённых аксиомах (1)—(4) слово «бокр» на «точка», слово «куздра» — на «прямая», слово «будлать» — на выражение «проходить через». Аксиома (4) превратится тогда в такое утверждение (4*): каждая прямая проходит по меньшей мере через две различные точки. С учётом пояснений, сделанных выше по поводу отношения инцидентности, утверждение (4*) можно высказать в более привычной форме: на каждой прямой лежать по меньшей мере две различные точки. Аналогично, аксиомы (1), (2) и (3) превратятся в утверждения (1*), (2*) и (3*), которые мы просим любезного читателя образовать самостоятельно. Утверждения (1*)—(4*) составляют в совокупности группу так называемых *аксиом связи* планиметрии, регулирующих то, как точки связаны с прямыми. Читатель может теперь перевести аксиому о параллельных на язык бокров и куздр: для бокра, не будлаемого заданной куздрой, существует не более одной куздры... (благоволите продолжить). И последнее: странные эти слова мы заимствовали у выдающегося отечественного языковеда Льва Владимировича Щербы, который в 1920-х годах учил студентов извлекать максимум лингвистической информации из фразы «Глокая куздра штеко будланула бокра и курдячит бокрёнка».

Массовые задачи и алгоритмы

Задача — это всегда требование что-то найти, построить, указать. В школе это «что-то» обычно называют *ответом*, а систему рассуждений, приводящую к ответу, — *решением*. Во «взрослой» математике ответ чаще всего тоже называют решением. Таким образом, термин «решение» приобретает два значения: 'решение-ответ' и 'решение-процесс', причём первое есть результат второго. С точки зрения русской лексики ситуация эта отнюдь не уникальна: например, печенье как изделие есть результат печения как действия по глаголу «печь». К путанице подобная полисемия, как правило, не приводит: из контекста всегда бывает ясно, что имеется в виду. Так что согласимся употреблять «взрослую» терминологию.

В замечательной одноактной пьесе «Урок» Эжена Ионеско есть такой диалог, который мы приведём с купюрами.

Учитель. <...> Сколько будет, ну, скажем, если три миллиарда семьсот пятьдесят пять миллионов девятьсот девяносто восемь тысяч двести пятьдесят один умножить на пять миллиардов сто шестьдесят два миллиона триста три тысячи пятьсот восемь?

Ученица (*отвечает немедленно*). Это будет девятнадцать квинтиллионов триста девяносто квадриллионов два триллиона восемьсот сорок четыре миллиарда двести девятнадцать миллионов сто шестьдесят четыре тысячи пятьсот восемь.

<...>

Учитель (*сосчитав в уме, с нарастающим изумлением*). Да... Вы правы... ответ, действительно... (*невнятно бормочет*) квадриллионов... триллионов... миллиардов... миллионов... (*разборчиво*) сто шестьдесят четыре тысячи пятьсот восемь...

Журнальная публикация: Новый мир. — 2007. — № 11. — С. 146—149 (в качестве гл. 6 статьи «Апология математики, или О математике как части духовной культуры»). Полная публикация в книге: *В. А. Успенский*. Апология математики: Сборник статей. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 109—115 (в качестве гл. 6 статьи «Апология математики»).

(*Ошеломлённо.*) Но каким образом вы это вычислили, если вам недоступны простейшие приёмы арифметического мышления?

Ученица. Очень просто. Поскольку я не могу положиться на своё арифметическое мышление, я взяла и выучила наизусть все результаты умножения, какие только возможны.

Всех результатов умножения бесконечно много, так что выучить их наизусть нет никакой возможности. Да это и не нужно: Ионеско справедливо утверждает устами Учителя из своей миниатюры, что «математика — заклятый враг зубрёжки». (Кстати, теоретическая невозможность выучить все результаты получила в приведённом диалоге и экспериментальное подтверждение. Дело в том, что Ученица дала неправильный ответ: правильным ответом является число 19 389 602 947 179 164 508, а ею названо число 19 390 002 844 219 164 508 Не берусь судить, получил ли этот факт должное отражение в ионесковедении[1].)

Но мы ведь умеем умножать. Это потому, что ещё в начальной школе нам сообщают некоторый общий способ умножения любых целых чисел, а именно способ умножения столбиком. Любой человек, овладевший этим способом, имеет право заявить, что теперь он готов умножить друг на друга любые два натуральных числа — и не потому, что он выучил все результаты (что, повторим, невозможно), а именно потому, что указанный способ позволяет найти требуемый результат для любой пары сомножителей.

На примере с умножением можно получить представление о понятии *массовая задача*. Массовая задача образуется путём совместного рассмотрения серии однотипных единичных задач. В случае умножения каждая единичная задача состоит в указании пары кон-

[1] Сдержанность в этом вопросе российского ионесковедения объясняется, возможно, тем, что в некоторых русских переводах (например, на с. 208 издания: *Э. Ионеско*. Носорог: Пьесы и рассказы. — М.: Текст, 1991) приведены иные цифры, отличающиеся от французского оригинала. Наши цифры сверены по двум изданиям, вышедшим в 1954 году в известном парижском издательстве Gallimard: 1) *Ionesco, Eugène*. Théâtre. V. 1. P. 73, и 2) *Ionesco, Eugène*. La cantatrice shauve, suivi de La leçon. P. 114. Для полной ясности приведём французский текст. Вопрос Учителя звучит так: *...Combien font, par exemple, trois milliards sept cent cinquante-cinq millions neuf cent quatre-vingt-dix-huit mille deux cent cinquante et un, multiplié par cinq milliards cent soixante-deux millions trois cent trois mille cinq cent huit*? На что Ученица сразу же отвечает: *Ça fait dix-neuf quintillions trois cent quatre-vingt-dix quadrillions deux trillions huit cent quarante-quatre milliards deux cent dix-neuf millions cent soixante-quatre mille cinq cent huit...*

кретных чисел (как, например, тех, которые были названы Ученице Учителем) и требовании найти их произведение. Это произведение является *решением* предложенной единичной задачи. Массовая же задача состоит здесь в требовании указать некий метод, позволяющий найти произведение для каждой отдельной пары чисел.

Другой простой пример. Задача решить квадратное уравнение $x^2 - 13x + 30 = 0$ — это единичная задача, и её решением служит пара чисел 3 и 10. А вот изучаемая в средней школе задача о решении произвольного квадратного уравнения — это массовая задача, и её решением служит всем известная (или долженствующая быть всем известной) формула, дающая решение для любого конкретного квадратного уравнения.

Остановим свой взгляд на какой-нибудь массовой задаче и посмотрим, чем отличаются друг от друга составляющие её единичные задачи. Мы видим, что они отличаются своими *исходными данными*. Для каждой единичной задачи умножения исходным данным служит конкретная пара чисел. А для каждой единичной задачи на решение квадратного уравнения исходное данное — это конкретное квадратное уравнение. Решением же массовой задачи является общий метод, дающий для каждой из составляющих её единичных задач решение этой задачи. Если предложенный общий метод состоит в последовательности строго детерминированных операций, ведущих от исходного данного к результату, он называется *конструктивным*, или *эффективным*, или *алгоритмическим*, или, короче, *алгоритмом*. Таким образом, можно говорить об алгоритме сложения столбиком, об алгоритме умножения столбиком, об алгоритме решения квадратных уравнений и т. п. Алгоритмы играют в математике, да и во всей нашей жизни, большую роль — особенно в связи с развитием компьютерной технологии.

Само слово «алгоритм» достаточно интересно: это, возможно, единственный математический термин, произошедший от географического названия. Таким названием служит *Хорезм*, имя среднеазиатского исторического региона в низовьях Аму-Дарьи. Арабское имя *аль-Хорезми* буквально означает 'из Хорезма'. Аль-Хорезми́ жил в конце VIII — первой половине IX века. Он предложил некоторые методы решения арифметических задач, и на его авторитет ссылались средневековые европейские авторы, писавшие, как это было принято, на латыни. При этом начиная с XII века его имя транслитерировалось как Algoritmi. Отсюда и пошёл термин «алгоритм». Поиски общего метода для решения массовой задачи велись со времён античности. Однако впервые ясное понимание алгоритма в

качестве самостоятельной сущности встречается лишь в 1912 году в трудах великого французского математика Эмиля Бореля.

Понятие алгоритма — одно из центральных в математике. Программа для компьютера есть не что иное, как запись какого-то алгоритма на одном из так называемых языков программирования. Прорыв в осознании этого важнейшего понятия произошёл в 1936 году, когда независимо друг от друга Алонзо Чёрч в Америке и Алан Тьюринг в Англии предложили математические уточнения понятия алгоритма (каждый своё) и на основе этих уточнений предъявили первые примеры массовых проблем, неразрешимых алгоритмически, в числе которых оказалась и очень знаменитая, стоявшая с 1915 года так называемая das Entscheidungsproblem (проблема разрешения), считавшаяся главной проблемой математической логики. Поясним, что термины «проблема» и «задача» для нас синонимы и что массовая проблема считается ***алгоритмически неразрешимой***, если не существует решающего её алгоритма, т. е. такого единого алгоритма, который позволял бы находить решение для каждой из тех единичных проблем, которые и составляют рассматриваемую массовую проблему.

Алгоритмически неразрешимые проблемы, указанные Чёрчем и Тьюрингом, слишком сложны, чтобы их здесь формулировать. Сейчас мы приведём достаточно простой пример такой проблемы. Разумеется, мы вынуждены ограничиться её формулировкой и не приводить ни доказательства, ни даже намёка на доказательство её неразрешимости. Пример этот покажет, что массовые проблемы, для которых отсутствует требуемый алгоритм, лежат совсем близко к нашей повседневной жизни.

Для большей наглядности изложим наш пример в терминах некоей игры. Любезный читатель согласится, что такая игра вполне мыслима в нашу эпоху пиара, рекламных акций, казино и игровых автоматов.

Средствами игры будут служить пластинки, наподобие тех костяшек, что используются при игре в домино. Как и костяшка домино, каждая пластинка разделена на верхнюю и нижнюю половину. В каждой половине что-то написано. Отличие от домино в том, что́ именно написано. В случае домино в каждой из половин записывается количество очков, от 0 до 6. А нашем случае в каждой из половин записывается какая-то цепочка из букв x и z. Вот примеры таких цепочек. Цепочки длины один: x, z. Цепочки длины два: xx, xz, zx, zz. Цепочки длины три: xxx, xxz, xzx, xzz, zxx, zxz, zzx, zzz. Возможна и цепочка длины ноль, в этом случае не записано ничего.

А вот одна из 128 цепочек длины семь: *zxzxxxz*. Проиллюстрируем сказанное изображениями возможных пластинок:

x	*x*	*xz*	*zzz*
zx	*zzxx*	*zz*	*z*
A	*B*	*C*	*D*

Изображённые на рисунке четыре пластинки, в том порядке, как они показаны, обозначим — для дальнейших ссылок — буквами *A*, *B*, *C*, *D*. Если приложить одну пластинку к другой, но не торцами, как при игре в домино, а боками, то в результате получим две строчки букв: одну сверху, другую снизу. Так, прикладывая *A* к *D* (слева *D*, справа *A*), получаем *zzzx* сверху и *zzx* снизу. Если приложить в другом порядке, получим *xzzz* сверху, *zxz* снизу. Аналогично можно прикладывать друг к другу несколько пластинок и считывать верхнюю и нижнюю строчки букв. Более того. Каждую пластинку разрешается воспроизводить в неограниченном количестве и создавать сочетания из повторяющихся пластинок, такие, например, как *AACA*. В этом примере верхней строчкой будет *xxxzx*, а нижней — *zxzxzzzx*. Прошу у читателя прощение за долгое предварение к игре, но хотелось бы, чтобы всё было предельно ясно.

Теперь — сама игра. Она состоит в следующем. В средствах массовой информации объявляется некоторый конкретный набор пластинок. Далее предлагается, воспроизводя каждую из пластинок набора в необходимом количестве, приложить пластинки друг к другу так, чтобы верхняя и нижняя строчки иксов и зетов совпали друг с другом. Первым пяти приславшим решения будет выплачен внушительный приз.

Поясним сказанное на примерах. Пусть объявленный набор содержит всего только одну пластинку *A* из приведённого выше перечня. Ясно, что решение невозможно, поскольку, сколько раз ни прикладывай пластинку *A* саму к себе, нижняя строка всегда окажется длиннее верхней. По сходной причине решения не существует, если объявленный набор состоит из одной только пластинки *D*, только тут длиннее будет верхняя строка. Желающие могут попытаться доказать, что решения не существует и в том случае, когда объявленный набор состоит из двух пластинок *A* и *D*. А вот если объявить набор из всех наших четырёх пластинок *A*, *B*, *C* и *D*, то решение существует. Действительно, если сложить пластинки в таком порядке: *DBCDA*, то и верхняя, и нижняя строка окажутся одинаковы: *zzzxxzzzzx*.

Итак, набор объявлен. Все хотят получить приз. Но прежде чем пытаться найти такое расположение пластинок, при котором верхняя и нижняя строки окажутся одинаковыми, желательно узнать, возможно ли такое расположение в принципе. Ведь если оно невозможно, то бесперспективно его искать, это будет пустой потерей времени. Так вот, оказывается, что не существует никакого эффективного способа это узнавать. Не существует (именно не существует, а не просто неизвестен) такого алгоритма, который позволял бы для любого объявленного набора пластинок узнать, имеется ли решение, т. е. возможно или невозможно сложить пластинки требуемым образом. Для каждого отдельно взятого набора пластинок задача узнать, к какой из двух категорий этот набор относится — к той, для которой решения имеются, или же к той, для которой решений нет, — она, эта задача, есть сугубо творческая задача, своя для каждого такого набора, а общий метод получения ответа для всех таких задач отсутствует.

Ватсон против Холмса

Знание есть переживание, сравнённое с другими переживаниями.
Н. О. Лосский. Обоснование интуитивизма.

Мира восторг беспредельный
Сердцу певучему дан.
А. Блок. Роза и Крест.

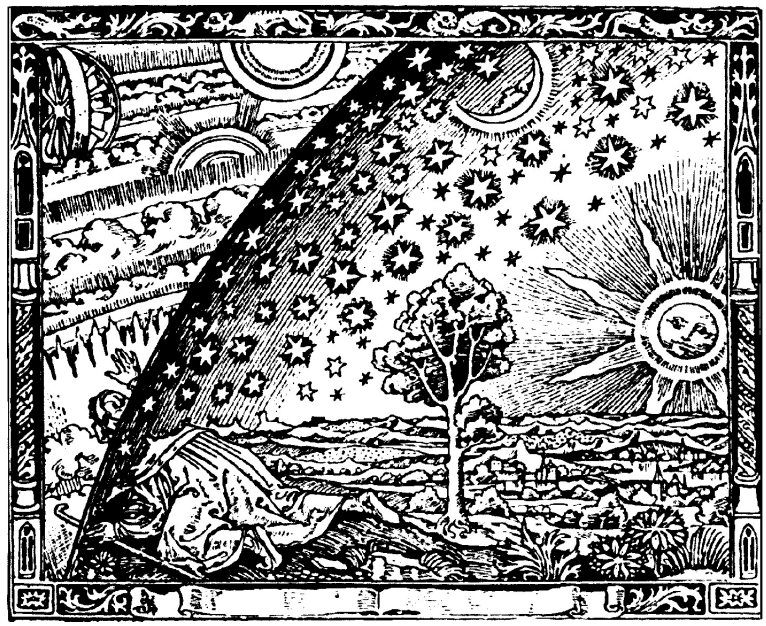
«Человек отличается от свиньи, в частности, тем, что ему иногда хочется поднять голову и посмотреть на звёзды». Это изречение принадлежит Виктору Амбарцумяну (в 1961—1964 годах президенту Международного астрономического союза). А почти за 200 лет до него на ту же тему высказался Иммануил Кант, который поставил звёздное небо по силе производимого впечатления на один уровень с пребывающим внутри человека — и прежде всего внутри самого Канта — нравственным законом. Эти высказывания объявляют усеянное звёздами небо частью общечеловеческой духовной культуры, более того, частью обязательной для всякого человека. Трудно представить индивидуума, не впечатлявшегося видами неба. Впрочем, воспоминания переносят меня в осень 1947 года, на лекцию по астрономии для студентов первого курса Механико-математического факультета МГУ. Лекцию читает профессор Куликов. Он делает нам назидание. «В прошлом веке профессор Киевского университета Митрофан Хандриков, — говорит он, — на экзамене спросил студента, каков видимый размер Луны во время полнолуния, и в ответ услышал, что студент не может этого знать, поскольку никогда не видал Луны»[1].

Приведённые выше высказывания о роли звёздного неба в духовной культуре человека декларируют, если не прямо, то косвенно,

Журнальная публикация: Новый мир. — 2007. — № 11. — С. 127—131 (в качестве гл. 1 статьи «Апология математики, или О математике, как о части духовной культуры»). Полная публикация в книге: *В. А. Успенский.* Апология математики: Сборник статей. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 42—52 (в качестве гл. 1 статьи «Апология математики»).

[1] Константин Алексеевич Куликов вообще щедро делился со студентами замечательными подробностями из истории науки. Так, из его лекций я узнал, что знаменитый датский астроном XVI века Тихо Браге, чьим именем названы кратеры на Луне и на Марсе, лишился части носа во время дуэли и носил протез. Уже в пересказе до меня дошёл такой его рассказ. В конце XVIII века на Сухаревской башне была установлена зрительная труба. Образованные барышни, зная о способности трубы показывать перевёрнутое изображение, проходя мимо, старательно придерживали юбки.

принадлежность к ней сведений об устройстве небесного свода. Неотъемлемой частью человеческого знания является то или иное представление об этом устройстве, хотя бы и признаваемое в наши дни совершенно фантастическим, как, например, такое: «А Земля — это только лишь плесень в перевёрнутой неба корзине; звёзды — это свет другого мира, к нам просвечивающий сквозь дно корзины, сквозь бесчисленные маленькие дыры, не затёртые небесной глиной».



Человек, вовсе не имеющий представления об устройстве мироздания, признаётся выпадающим из культуры. Вспомним, как изумился доктор Ватсон, когда вскоре после вселения в знаменитый дом 221b по Бейкер-стрит узнал: Холмс понятия не имеет, что Земля вертится вокруг Солнца. И даже полагает это знание совершенно излишним. «Ну хорошо, пусть, как вы говорите, мы вращаемся вокруг Солнца, — возражал Холмс. — А если бы я узнал, что мы вращаемся вокруг Луны, много бы это помогло мне или моей работе?». Вот здесь очень важный момент. Холмс признаёт нужным только то знание, которое может быть использовано в практических целях. Ватсон считает — и, очевидно, исходит из того, что читатели его записок разделяют эту точку зрения, — что некоторые знания обязательны независимо от того, имеют они практическое применение или нет. При всём уважении к великому сыщику, согласимся с доктором.

Итак, есть определённый объём непрактических знаний, обязательный для всякого культурного человека 1 (выражение «культурный человек» в силу расхожести и затрёпанности отдаёт дурновкусием, но ради ясности изложения приходится его употреблять). Мы полагаем, что в этот объём входят и некоторые математические 2 представления, не нашедшие утилитарного использования. Это не только факты, но также понятия и методы оперирования с ними.

Роль математики в современной материальной культуре, как и роль её элементарных разделов в повседневном быту, достаточно известны, так что на них можно не останавливаться. В этом очерке мы собираемся говорить о математике как о части культуры духовной.

Математические идеи способны вызывать эмоции, сравнимые с теми, что вызывают литературные произведения, музыка, архитектура. К сожалению, косные методы преподавания математики редко позволяют ощутить её эстетическую сторону, доступную, хотя бы отчасти, не только математикам. Математиками же эта сторона ощущается с полной ясностью. Вот что писал выдающийся математик, учитель великого Колмогорова, Николай Николаевич Лузин (27.11(09.12).1883—28.02.1950): «Математики изумляются гармонии чисел и геометрических форм. Они приходят в трепет, когда новое открытие открывает им неожиданные перспективы. И та радость, которую они переживают, разве это не есть радость эстетического порядка, хотя обычные чувства зрения и слуха здесь не участвуют. <...> Математик изучает свою науку вовсе не потому, что она полезна. Он изучает её потому, что она прекрасна. <...> Я говорю о красоте более глубокой [чем та, которая поражает наши чувства — *В. У.*], проистекающей из гармонии и согласованности воедино всех частей, которую один лишь чистый интеллект и сможет оценить. Именно эта гармония и даёт основу тем красочным видимостям, в которых купаются наши чувства. <...> Нужно ли ещё прибавлять, что в развитии этого чувства интеллектуальной красоты лежит залог всякого прогресса?».

Являясь (через Колмогорова) «научным внуком» Лузина, автор настоящего очерка с сочувствием относится к формуле «математика для математики», образованной по аналогии с известным слоганом «искусство для искусства». Однако всё не так просто. Следует огорчить поклонников чистого разума и утешить приверженцев практической пользы. Опыт развития математики убеждает, что самые, казалось бы, оторванные от практики её разделы рано или поздно находят важные применения. Всю первую половину XX века математическая логика рассматривалась как наука, занятая исклю-

чительно проблемами логического обоснования математики, своего рода философский анклав в математике; в СССР борцы со всевозможными «-измами» ставили её под подозрение, и первая кафедра математической логики была открыта лишь в 1959 году. Сегодня математическая логика переплетена с теоретической информатикой (theoretical computer science) и служит для последней фундаментом. Теория чисел, одна из древнейших в математике, долгое время считалась чем-то вроде игры в бисер. Оказалось, что без этой теории немыслима современная криптография, равно как и другие важные направления, объединённые названием «защита информации». Специалисты по теоретической физике интересуются новейшими разработками алгебраической геометрии и даже такой абстрактной области, как теория категорий.

Применение математики в физике не ограничивается числовыми формулами и уравнениями. Её (математики) абстрактные конструкции позволяют лучше понять природу тех физических явлений, исследования которых составляют передовой край науки. Поясним сказанное с помощью исторической аналогии. Когда-то считалось, что Земля плоская. Ничего другого в то время просто не могло прийти в голову. Затем люди пришли к мысли о её шарообразности. Вряд ли эта мысль затеплилась бы в человеческом сознании, не обладай оно уже готовым представлением о шаре. Точно так же долгое время считалось очевидным, что окружающее нас физическое пространство есть самое обычное трёхмерное евклидово пространство, известное из школьного курса геометрии. В этом были уверены все, включая тех, кто, не владея учёной терминологией, ведать не ведал, что это за «евклидово пространство» такое. (Вспомним мольеровского Журдена, не подозревавшего, что он говорит прозой.) И действительно, а как же может быть иначе? Первыми прониклись сомнением в XIX веке, независимо друг от друга, в России великий геометр Лобачевский, а в Германии — великий математик Гаусс и, возможно, юрист и математик Швейкарт **3**. Они первыми осознали не только существование неевклидовой геометрии как математического объекта, но и возможность неевклидового строения нашего мира (мы ещё коснёмся этой темы в главе 8[2]). Лобачевского тогда никто не понял, кроме Гаусса, сам же Гаусс, предчувствуя непонимание, ни с кем не делился своим прозрением. Теория относительности подтвердила неевклидовость мироздания, предсказав искривление пространства

[2] ●●▶ В настоящем издании названная глава 8 публикуется на с. 109—128 в виде статьи «Параллельные прямые в мифологии, в реальности и в математике». ◀●●

под воздействием массивных тел, что, в свою очередь, было подтверждено наблюдаемым отклонением луча света вблизи таких объектов. Некоторые свойства пространства-времени оказались парадоксальными, другие остаются неизвестными. Вместе с тем познание этих свойств может оказаться жизненно важным для человечества. Математика предлагает уже готовые модели, позволяющие лучше понять подобные свойства, в особенности же свойства парадоксальные, противоречащие повседневному опыту. Более точно, в математике построены структуры, обладающие требуемыми свойствами.

В частности, математические модели позволяют понять два непривычных качества окружающего нас пространства — его признанную сообществом физиков кривизну и его возможную четырёхмерность (нельзя исключать, что измерений ещё больше). Говоря о четвёртом измерении, мы не имеем в виду время (которое иногда не без оснований так называют), а ведём речь об измерении в прямом, пространственно-геометрическом смысле. Не исключено, что в реальности[3] пространство, в котором мы живём, четырёхмерно (или даже имеет пять, шесть, а то и больше измерений), хотя непосредственному наблюдению, по крайней мере до сих пор, было доступно лишь его трёхмерное подпространство. Осознание подлинной размерности пространства (оставим в стороне вопрос о смысле слова «подлинный») может оказаться важным для познания мира. Представим себе двумерную поверхность (например, плоскость или сферу), по которой ходит слон. Его следы на поверхности имеют вид пятен. Двумерным, не обладающим толщиной существам, живущим *в* (не *на*, а именно *в*!) поверхности, появление этих пятен покажется необъяснимым. Наиболее проницательные двумерные мудрецы предположат наличие третьего измерения и передвигающегося в нём «слона». Возможно — всего лишь возможно! — некоторые явления в доступном нашим чувствам трёхмерном пространстве получат аналогичное объяснение на основе представлений о «четырёхмерном слоне», т. е. как следы процессов, развивающихся в четырёхмерном пространстве.

Здесь мы прикоснулись к важной философской, а точнее, гносеологической теме. Выше говорилось, что мысль о шарообразности Земли не возникла бы в человеческом сознании, если бы ещё раньше в нём не появилось представление о шаре. Само же это представление, в свою очередь, опиралось на повседневный опыт, а именно наблюдение шарообразных тел, как природного происхожде-

[3] Автор просит не допытываться у него, что значит «в реальности»: он всё равно не сумеет ответить.

ния (плодов и ягод, катимых скарабеями навозных шариков и т. п.), так и искусственного (например, пушечных ядер). И когда человек задумался над формой Земли, ему оставалось лишь воспользоваться названным представлением. Иначе обстоит дело с попытками познать строение Вселенной. Повседневный опыт не даёт требуемых геометрических форм. Но, хотя такими формами и не обладают предметы, доступные непосредственному созерцанию, оказалось, что этим формам отвечают уже обнаруженные математиками структуры. Поскольку указанные математические структуры точно описаны, при желании нетрудно понять, как в них реализуются предполагаемые свойства мироздания — даже те, которые кажутся парадоксальными. А тогда остаётся допустить, что геометрия реального мира хотя бы отчасти выглядит так, как геометрия этих структур. Таким образом, математика, не давая ответ на вопрос, как оно *есть* в реальном мире, помогает понять, как оно *может быть* — что не менее важно: ведь как оно есть, мы вряд ли когда-нибудь узнаём до конца. И помощь, которую оказывает математика в познании мира, также следует вписать в перечень её практических приложений.

Как говорил один из самых крупных математиков XX века Джон фон Нейман (1903—1957), «в конечном счёте современная математика находит применение. А ведь заранее и не скажешь, что так должно быть».

Нередко утверждают, что математику следует рассматривать как часть физики, поскольку она описывает внешний физический мир. Но с тем же успехом её можно считать частью психологии, поскольку изучаемые в ней абстракции суть явления нашего мышления, а значит, должны проходить по ведомству психологии. Взять, например, такое основное (и, может быть, самое главное) понятие математики, как понятие *натурального числа*, т. е. числа, являющегося одновременно и целым, и положительным (иногда к натуральным числам причисляют ещё и число ноль, для чего есть серьёзные основания). Ведь показать, скажем, число пять невозможно, можно только предъявить пять пальцев или пять иных предметов. Уже здесь не такая уж малая степень абстракции. Ещё более высокая степень абстракции в числе пять септиллионов: ясно, что предъявить столько предметов невозможно. И уж совсем высокая (и одновременно глубокая) абстракция заключена в понятии натурального числа вообще и *натурального ряда* как совокупности всех натуральных чисел. Здесь поле, которое психология только начала распахивать. Упоминавшийся уже Лузин, который был не только математиком, но и философом (и даже его избрание в 1929 году в Академию наук

СССР произошло «по кафедре философии»), так высказывался на эту тему: «По-видимому, натуральный ряд чисел не представляет собой абсолютно объективного образования. По-видимому, он представляет собой функцию головы того математика, который в данном случае говорит о натуральном ряде»[4].

Тем не менее два математика на разных континентах приходят к одним и тем же выводам о свойствах натурального ряда чисел, хотя могут наблюдать числа никак не внешним зрением, а лишь зрением внутренним, мысленным. В этом труднообъяснимом единстве взглядов на идеальные сущности некоторые усматривают доказательство существования Бога. (Как пишет Ю. И. Манин, «мы [математики — *В. У.*] изучаем идеи, с которыми можно обращаться так, как если бы они были реальными предметами»[5]. Весь вопрос в том, почему это возможно.)

Итак, мы отстаиваем два тезиса. Первый: математика — вне зависимости от того, находит ли она практическое использование, — принадлежит духовной культуре. Второй: отдельные разделы математики входят в общеобязательную часть этой культуры.

Задаваться же вопросом, что именно из математики, причём неприкладной, должно входить в общеобязательный культурный минимум, вряд ли стоит, потому что однозначного ответа на него не найти. Каждый должен определять этот минимум для себя. Задача общества — предоставить каждому индивидууму ту информацию о математических понятиях, идеях и методах, из которой можно было бы отобрать этот субъективный минимум. Вообще, приобретение знаний есть дело добровольное, и насилие тут неуместно. На ум приходит замечательное высказывание Суха́рто (второго президента Индонезии — не путать с первым её президентом, Сука́рно): «В наше время чрезвычайно трудно заставить кого-либо сделать что-либо добровольно». Школьная программа по математике — слишком болезненная тема, чтобы её здесь затрагивать (хотя она не может не волновать, поскольку касается миллионов наших детей). Ограничусь тем, что скажу: хорошо бы в этой программе устранить перекос в сторону вычислений и уделить больше внимания качественным моментам, с вычислениями непосредственно не связанным.

[4] Читателя, желающего задуматься о том, что, собственно, представляет собой натуральный ряд, отсылаем к статье: *П. К. Рашевский.* О догмате натурального ряда // Успехи математических наук. — 1973. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 243—246. ●●➤ Названная статья перепечатана в качестве приложения II в книге: *В. А. Успенский.* Апология математики. — СПб.: Амфора, 2009; 2010; 2011; 2012 [2-е изд., испр.]. ◄●●

[5] *Ю. И. Манин.* Математика как метафора. — М.: МЦНМО, 2008. — С. 20.

Замечу в заключение, что математика составляет часть мировой культуры и благодаря своему этическому аспекту. Хотя существование такового может показаться странным, он есть. Математика не допускает лжи, т. е. ложных утверждений. Более того, математика требует, чтобы утверждения не просто провозглашались, но доказывались. Она учит задавать вопросы и требовать разъяснений, если ответ оказался тёмен. Она по природе демократична, её демократизм обусловлен характером математических истин. Их непреложность не зависит от того, кто их провозглашает, академик или школьник. Вот поучительный эпизод из жизни Механико-математического факультета (знаменитого Мехмата) Московского университета, относящийся к концу 1940-х годов. Великий Колмогоров читает специальный (т. е. необязательный) курс по теории меры. Он объявляет некоторую теорему и говорит, что поскольку дальнейшее изложение на неё не опирается, он её доказывать не будет, а просит поверить на слово. Один из слушателей, третьекурсник, строит опровергающую конструкцию и в перерыве показывает её лектору. Вторую половину лекции Колмогоров начинает с изложения этой конструкции, а третьекурсника приглашает к себе на дачу, где производит в ученики.

Примечания

1 [к с. 137]. Сказанному, впрочем, отчасти противоречат данные Всероссийского центра изучения общественного мнения (ВЦИОМ). Как явствует из его пресс-выпуска № 679 от 20.04.2007 (выложенного в Интернете по адресу `http://wciom.ru/novosti/press-vypuski/pressvypusk/single/4448.html`), на вопрос «Согласны ли вы со следующим утверждением: „Солнце обращается вокруг Земли“?» правильный ответ дали 67% россиян, неправильный — 28%, затруднились с ответом 5%. Я не осмеливаюсь согласиться с тем, что лишь не более чем 67% моих соотечественников являются «культурными людьми». (То обстоятельство, что, по данным ВЦИОМ, те же цифры, с точностью до одного процента, дал аналогичный опрос в странах Европейского Союза, служит слабым утешением.) ●●➤ За прошедшие с тех пор четыре года положение ухудшилось, о чём свидетельствует пресс-выпуск ВЦИОМ № 1684 от 08.02.2011 (адрес в Интернете: `http://wciom.ru/index.php?id=459&uid=111345`).

МОСКВА, 8 февраля 2011 года. В День Науки Всероссийский центр изучения общественного мнения (ВЦИОМ) представляет результаты исследования о самых распространённых научных

заблуждениях россиян. Каждый третий россиянин считает, что Солнце вращается вокруг Земли. Большинство россиян уверены, что радиоактивность — дело рук человеческих (55%). Наши сограждане также убеждены в том, что антибиотики убивают вирусы так же, как и бактерии (46%). Треть опрошенных всерьёз полагают, что Солнце вращается вокруг Земли (32%), причём за последние четыре года таких респондентов стало даже больше (с 28% в 2007 году). Чуть меньшая доля россиян утверждает, что первые люди жили в ту же эпоху, что и динозавры (29%).

А вот как лучшие выпускницы РосГосТоргЭкУн (Российского государственного торгово-экономического университета) отвечают на простейшие вопросы: http://anti.fishki.net/comment.php?id=167443. ◄●●

Приходится признать, что мои представления об исключительности астрономических познаний (точнее, невежества) Холмса неверны. Однако не следует забывать и знаменитое высказывание Корнея Ивановича Чуковского. Когда его упрекнули в наивности: и как это он не понимает, что все его усилия в защиту чистоты русского языка напрасны, Чуковский возразил: «Я понимаю, но партия учит нас, что новое должно рождаться в борьбе со старым; так вот, я и есть это старое». В данном случае старым, по-видимому, является гелиоцентрическая система Коперника, а новым — приходящие ей на смену невежественные представления.

●●► Может сложиться впечатление, что именно азы астрономических знаний по каким-то причинам вызывают трудности для их усвоения. Но нет, такое впечатление будет ложным. Достаточно взглянуть на статью Бориса Игоревича Соболева «Дно знаний», вывешенную в Интернете 12 ноября 2012 года: http://www.vesti.ru/doc.html?id=956877&cid=7. В статье воспроизводятся собеседования с претендентами на должность школьного учителя литературы. Вот некоторые вопросы и ответы из этих бесед:

— *Эрих Мария Ремарк — мужчина или женщина?*
— Женщина.
— *Жорж Санд?*
— Мужчина.
— *С кем стрелялся Пушкин?*
— С Дантесом.
— *А Лермонтов?*
— Стрелялся?
— *Да. Или он не стрелялся?*

— Вы надо мной издеваетесь?

— *Как, по-вашему, умер Лермонтов?*

— А чёрт его знает!

Отвечал аспирант-филолог одного из московских вузов.

— *«У Лукоморья дуб зелёный...». Вы помните, из какого это произведения?*

— Не «Три богатыря»?

— *«Не приведи Бог видеть русский бунт, бессмысленный и беспощадный»?*

— Я тоже не знаю, откуда это. Ну, я знаю, что это, но в общем — нет.

— *«Любви все возрасты покорны»?*

— Лермонтов. Нет?

— *«Не хочу учиться, а хочу жениться»?*

— Я забыла название этого произведения.

— *«Не хочу учиться, а хочу жениться»?*

— Да я знаю, я сто раз это слышала. Просто сейчас у меня вылетело из головы.

Отвечала студентка выпускного курса филологического факультета другого московского вуза. ◀●●

2 [к с. 137]. Разумеется, не только математические. Извольте получить пример. В 2007 году на Рождественских чтениях Патриарх Алексий II высказался против, как он выразился, «навязывания» представления о том, что «человек произошёл от обезьяны». Высказывание Патриарха очень характерно и отражает распространённое заблуждение. Дело в том, что в действительности эволюционная теория отнюдь не утверждает, что человек произошёл от обезьяны — хотя эволюционной теории обычно приписывают именно это утверждение. Эволюционная теория утверждает лишь, что человек и обезьяна имеют на филогенетическом дереве общего предка, и что предок этот расположен на этом дереве ближе к нашему времени, нежели общий предок человека и любого другого животного. (А ещё ближе к истине высказался наш замечательный биолог А. В. Марков: *С точки зрения биологической классификации человек не произошёл от обезьяны — он ею как был, так и остался*[6].) С тем же успехом можно было бы приписать эволюционной теории утверждение, что обезьяна произошла от человека. (Оба ложных утверждения — *человек произошёл от обезьяны* и *обезьяна произо-*

[6] *А. В. Марков*. Эволюция человека: В 2 кн. — М.: Астрель; CORPUS, 2011.

шла от человека — занимают одинаковое положение относительно того, что в действительности утверждает эволюционная теория.)

3 [к с. 138]. Впрочем, озарение снизошло на Швейкарта (Ferdinand Karl Schweikart, 1780—1857), когда он находился в России. С 1811 по 1816 год (по другим источникам — с 1812 по 1817 год) Швейкарт состоял ординарным профессором древних прав Харьковского университета. В «Энциклопедическом словаре» Брокгауза и Ефрона (2-й дополнительный том, или 4-й полутом, с. 880) сообщается, что Фердинанд Львович Швейкарт читал лекции на латыни. О том, что к неевклидовой геометрии Швейкарт пришёл именно в харьковский период своей жизни, свидетельствует письмо ученика Гаусса, Х. Л. Герлинга (Christian Ludwig Gerling, 1788—1864), своему учителю от 26 февраля 1844 года, в котором он, благодаря Гаусса за указания на труды Лобачевского, прибавляет: «Das russische Steppenland scheint demnach doch ein geeigneter Boden für diese Spekulationen, denn Schweikart (jetzt Professor in Königsberg) ersann seine Astral-Geometrie während er in Charkov war» [«Русские степи, должно быть, — благоприятная почва для этих изысканий, потому что Швейкарт (сейчас профессор в Кёнигсберге) придумал свою астральную [звёздную] геометрию, будучи в Харькове»].

Просвещённого читателя может удивить, что выше не упомянуто имя великого венгерского геометра Бóйаи. Увы, автор не знает, допускал ли Бойаи возможность неевклидова строения реального мира.

Из статьи «Закон исключённого третьего и закон двойного отрицания»

I. Колмогоров и конструктивизм. — II. Общая логика суждений. — III. Частная логика суждений. — IV. Аксиома двойного отрицания как диагностическая формула. — V. Границы применимости закона исключённого третьего. — Литература.

Сочинения Колмогорова имеют следующую примечательную особенность: с течением времени их значение не убывает. Напротив, тщательное их обдумывание открывает новые возможности для их осмысления. Даже замечания, оброненные Колмогоровым мимоходом, могут служить источником неожиданных и содержательных построений (см., например, ниже раздел V).

Данный комментарий, составленный в 2005 году, подводит итоги обдумывания статьи Колмогорова «О принципе tertium non datur», появившиеся после нашего первоначального комментария более чем двадцатилетней давности; некоторые из таких итогов были сообщены в докладе [PatlPli], сделанном на Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения Колмогорова. Заметим, что в современной литературе вместо термина «принцип tertium non datur» обычно употребляют термин «закон исключённого третьего».

I. Колмогоров и конструктивизм

«Во всём современном математическом мышлении большое место занимает различие между „конструктивным“ и „неконструктивным“, — писал Колмогоров в своём замечательном предисловии [Колм] к русскому переводу первой в мире монографии о рекурсивных функциях. — Даже математики, которые спокойно признают „неконструктивные“ доказательства существования, не могут отрицать, что

Полностью статья опубликована в качестве комментария к циклу работ А. Н. Колмогорова по интуиционистской логике в книге: *А. Н. Колмогоров*. Избранные труды: В 6 т. — Т. 1: Математика и механика / Сост. В. М. Тихомиров; Отв. ред. А. Н. Ширяев. — М.: Наука, 2005. — С. 445—454. (Соавтор: Валерий Егорович Плиско.)

чистое (неконструктивное) доказательство существования какого-либо математического объекта естественно влечёт за собой проблему восполнения этого доказательства соответствующей конструкцией».

Для самого Колмогорова характерно повышенное внимание к различению — в объектах и процессах — конструктивного и неконструктивного. Статьи Колмогорова по логике были посвящены исследованию проблематики, которая возникает при попытках отразить в логике указанное различение. Обе эти статьи: «О принципе tertium non datur» 1925 года и «Zur Deutung der intuitionistischen Logik» (в русском переводе: «К толкованию интуиционистской логики») 1932 года — сыграли в логической науке выдающуюся роль. Обе статьи объединены общей идеей — навести мост между интуиционистской логикой, признающей только конструктивные доказательства, и традиционной, или «классической», логикой, причём сделать это средствами, свободными как от «архиреволюционной» идеологии интуиционизма, так и от крайностей теоретико-множественного догматизма. Именно, в статье 1925 года предлагается такая интерпретация классической логики, которая приемлема с точки зрения интуиционизма; напротив, в статье 1932 года предлагается такая интерпретация интуиционистской логики, которая приемлема с классических позиций.

В статье «О принципе...» Колмогоров принимает предпринятую главой интуиционизма Л.Э.Я.Брауэром критику традиционной логики; при этом Колмогоров обнаруживает в последней ещё один уязвимый, но обойдённый критикой Брауэра логический принцип, а именно — выражаемый аксиомой $A \to (\neg A \to B)$. Как указывает Колмогоров, эта аксиома «не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного». Колмогоров выдвигает два вопроса: 1) почему незаконное, с интуиционистской точки зрения, применение закона исключённого третьего часто остаётся незамеченным? 2) почему оно не привело до сих пор к противоречию? На оба вопроса в статье даются ответы. На 1-й вопрос — потому что применения закона исключённого третьего оправданы, коль скоро возникающее в результате таких применений суждение носит финитный характер; действительно, в этом случае оно может быть доказано и без использования указанного закона; это открытие Колмогорова опровергло точку зрения Брауэра о том, что при получении финитных результатов должны быть запрещены нефинитные умозаключения. На 2-й вопрос — потому что если бы противоречие было получено при использовании закона исключённого третьего, то оно могло бы быть получено и без него; здесь впервые в исто-

рии логики произошло предвосхитившее последующие работы Гёделя 1930-х годов доказательство относительной непротиворечивости формальной аксиоматической системы, т. е. такое доказательство непротиворечивости, которое использует презумпцию о непротиворечивости другой системы. Колмогоров точно очертил круг тех суждений, для которых составленные из них тавтологии классической пропозициональной логики являются интуиционистски обоснованными (при последовательном проведении интуиционистской точки зрения — более последовательном, чем у самих интуиционистов): это суть те и только те суждения, для которых выполняется закон двойного отрицания. В своей статье Колмогоров впервые предложил позитивный анализ обоснованности с точки зрения интуиционизма традиционной, или «классической», математики. Одновременно Колмогоров впервые сделал интуиционистскую логику объектом строгого математического анализа. В статье была предложена первая система аксиом для этой логики, предвосхитившая формализацию А. Гейтинга, и ныне известная как минимальное исчисление для отрицания и импликации.

В 1-м разделе статьи «К толкованию...» Колмогоров наполняет формулы интуиционистской пропозициональной логики новым содержанием, свободным от философских предпосылок интуиционизма. Именно, он предлагает рассматривать каждую такую формулу не как утверждение, а как проблему (т. е. как требование указать или построить объект, подчинённый тем или иным заранее заданным условиям). Понятие проблемы, или задачи, есть одно из фундаментальных понятий математики; Колмогоров был первым, кто включил это понятие в логико-математический дискурс (здесь идеи Колмогорова предвосхитили так называемую семантику реализуемости Клини). Предложенная Колмогоровым интерпретация интуиционистской логики близка к концепции Гейтинга, однако у последнего отсутствует чёткое различение между суждением и проблемой. Существенным этапом в становлении логического мышления явилось предложенное Колмогоровым уточнение представления о сводимости одной проблемы к другой. Во 2-м разделе статьи выдвигается и обосновывается следующий взгляд: с интуиционистской точки зрения, нельзя, вообще говоря, рассматривать отрицание общего суждения в качестве содержательного суждения. «Но тогда, — указывает Колмогоров, — исчезает предмет интуиционистской логики, поскольку теперь принцип исключённого третьего оказывается справедливым для всех суждений, для которых отрицание вообще имеет смысл. Возникает, однако, новый вопрос: какие логические законы справедливы для суждений, отрицание которых не имеет смысла?».

II. Общая логика суждений

В математической литературе термины «алгебра» и «логика» (да даже и «теория») понимаются в двух смыслах — как названия наук и как названия математических объектов. В применении к слову «логика» эта терминологическая традиция восходит к колмогоровской статье 1925 года «О принципе tertium non datur». Так, в § 5 главы I названной статьи говорится: «Мы понимаем в дальнейшем под общей логикой суждений науку, исследующую свойства произвольных суждений в отношении их истинности, ложности и процесса вывода независимо от их состава (каждое суждение считается неразложимым элементом исследования)». А § 1 главы III той же статьи начинается с определения некоторого математического объекта, а именно некоторого множества формул: «Формулы, доказуемые на основе аксиом $\mathfrak{B}$, образуют общую логику суждений». Разумеется, оба понимания термина «логика суждений» тесно связаны, и эту связь автор подчёркивает, заявляя в подстрочном примечании в главе III: «Общая логика суждений имеет и другое, реальное определение (см. § 5 главы I)». Это другое, реальное определение состоит в том, что к общей логике суждений, понимаемой как множество формул, принадлежат, по Колмогорову, те и только те формулы, истинность которых в состоянии обосновать общая логика суждений, понимаемая как наука.

В статье «О принципе...» её автор становится на весьма последовательную позицию, которую сам он называет *интуитивистской* и которая, как мы увидим, является более жёсткой, чем даже позиция приверженцев интуиционизма в стиле Брауэра. С интуитивистской точки зрения обосновывать истинность формул разрешается с опорой лишь на не вызывающие никаких сомнений в их законности свойства суждений и логических операций. Именно такие свойства и отражены в пяти аксиомах, образующих систему $\mathfrak{B}$.

Происхождение этой системы аксиом $\mathfrak{B}$ таково. В 1923 году Гильберт опубликовал нижеследующую систему из шести аксиом, предложенную им для формализации логики суждений:

Аксиомы следования.

1. $A \to (B \to A)$.
2. $\{A \to (A \to B)\} \to (A \to B)$.
3. $\{A \to (B \to C)\} \to \{B \to (A \to C)\}$.
4. $(B \to C) \to \{(A \to B) \to (A \to C)\}$.

Аксиомы отрицания.

5. $A \to (\overline{A} \to B)$.
6. $(A \to B) \to \{(\overline{A} \to B) \to B\}$.

Первые четыре из них, аксиомы следования, не содержат иных логических операций, кроме импликации; эти аксиомы признаются Колмогоровым интуитивно истинными и потому сохраняются. Последние же две аксиомы системы Гильберта содержат наряду с импликацией также и отрицание; обе они в § 6 главы I Колмогоровым не признаются истинными и отвергаются. Одна из отвергаемых Колмогоровым аксиом (6-я в системе Гильберта) выражает, хотя и в необычной форме, закон исключённого третьего (т. е. принцип tertium non datur), подвергнутый критике основателем интуиционизма Брауэром. Про вторую отвергаемую аксиому (5-ю в системе Гильберта) Колмогоров пишет: «...критика Брауэра не коснулась её, тем не менее она также не имеет интуитивных оснований». Достойно восхищения, что двадцатидвухлетний Колмогоров решается предъявить к истинности более суровые требования, чем уже всемирно знаменитый к тому времени Брауэр — и даже чем брауэровские последователи, включившие впоследствии эту 5-ю аксиому Гильберта в число формул интуиционистского исчисления. Деликатно ограждая предшественника от возможных упрёков, Колмогоров считает нужным привести объяснение, почему «критика Брауэра не коснулась» этой аксиомы: «аксиома 5-я употребляется только в символическом изложении логики суждений», — пишет Колмогоров. Заметим, что в применении к последователям Брауэра подобное объяснение уже невозможно.

Однако должна же иметь место какая-то аксиома, выражающая свойства отрицания и являющаяся вместе с тем интуитивно очевидной! В качестве таковой Колмогоров предлагает (в § 6 главы II) свою собственную аксиому, названную им *принципом противоречия*:

$$(A \to B) \to ((A \to \overline{B}) \to \overline{A}).$$

В другой форме записи (на которую сам Колмогоров переходит в статье «К толкованию...») эта аксиома Колмогорова выглядит как

$$(a \supset b) \supset ((a \supset \neg b) \supset \neg a).$$

Своим принципом противоречия Колмогоров замещает отвергнутые им аксиомы. Добавление этой аксиомы Колмогорова к четырём сохранённым аксиомам Гильберта и даёт пятичленную систему аксиом $\mathfrak{B}$.

Логику суждений, образуемую формулами, получаемыми на основе системы аксиом $\mathfrak{B}$, Колмогоров называет *общей логикой суждений*. Термин *общая* означает, что формулы этой логики признаются истинными для в с е х мыслимых суждений, которые могут быть подставлены вместо переменных.

III. Частная логика суждений

Принцип, или закон, двойного отрицания утверждает, что из отрицания отрицания суждения следует само это суждение. В традиционной, так называемой *классической* логике этот принцип считается общеприменимым, т. е. справедливым для любого суждения. С брауэровской интуиционистской, а тем более с колмогоровской интуитивистской точки зрения закон двойного отрицания нельзя считать общеприменимым. Формальным выражением закона двойного отрицания служит аксиома двойного отрицания $\overline{\overline{A}} \to A$; в другой записи эта аксиома выглядит так: $\neg\neg a \supset a$.

Если к системе аксиом $\mathfrak{B}$ прибавить аксиому двойного отрицания, получим систему из шести аксиом, которую Колмогоров называет $\mathfrak{H}$ и которая, как он показывает, эквивалентна исходной системе Гильберта (гл. II, §§ 7 и 8). Формулы, доказуемые в этой системе, принадлежат так называемой *классической логике суждений*, или *классической логике высказываний*, повсеместно используемой в традиционной, или *классической*, математике, — но, разумеется не в математике интуиционистской. Именно для аксиоматизации классической логики суждений и была введена система аксиом Гильберта.

О формулах системы $\mathfrak{H}$ мы потому сказали, что они «*принадлежат* классической логике», а не «*образуют* классическую логику», что в классической логике высказываний наряду с операциями отрицания и импликации обычно допускаются также операции конъюнкции и дизъюнкции. Формулы, доказуемые в системе $\mathfrak{H}$, образуют импликативно-негативный фрагмент классической логики высказываний — т. е. совокупность тех и только тех формул этой логики, которые не содержат иных связок, кроме импликации и отрицания.

Этот импликативно-негативный фрагмент Колмогоров называет *частной логикой суждений*. В § 1 главы III он пишет: «Совокупность формул, доказуемых на основании шести аксиом $\mathfrak{H}$, будем называть частной логикой суждений. Содержание частной логики суждений богаче, чем общей, но область применения у́же». Термин *частная* означает, что формулы этой логики признаются истинными не для всех суждений, а лишь для некоторых. Но тогда возникает вопрос, для каких именно суждений справедливы формулы частной логики. Именно этот естественный вопрос и ставится — и притом впервые — в статье «О принципе...». Автор статьи даёт исчерпывающий ответ на этот вопрос: оказывается, формулы частной логики

суждений истинны для тех и только тех суждений, для которых справедлив закон двойного отрицания, в том числе для всех финитных (т. е. относящихся к конечным множествам) и для всех отрицательных суждений. «Этим найдена точная граница области применимости частной логики суждений: область эта совпадает с областью применимости формулы двойного отрицания» (гл. III, § 4). В следующем разделе настоящего комментария мы предложим интерпретацию этого результата Колмогорова, основанную на понятии *диагностической формулы*.

IV. Аксиома двойного отрицания как диагностическая формула

Результат Колмогорова о точной границе области применимости частной логики суждений — один из основных результатов его статьи «О принципе...» — может быть сформулирован в виде следующей теоремы:

Пропозициональная формула A, содержащая только пропозициональные переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *и логические связки* $\supset$ (*импликация*) *и* $\neg$ (*отрицание*), *тогда и только тогда принадлежит частной логике суждений* (что в данном случае равносильно принадлежности классической логике высказываний), *когда она выводится в общей логике суждений* (т. е. в исчислении Колмогорова $\mathfrak{B}$) *из гипотез* $\neg\neg p_1 \supset p_1$, $\neg\neg p_2 \supset p_2$, ..., $\neg\neg p_n \supset p_n$. (Напомним, что при выводе из гипотез применение правила подстановки к гипотезам запрещено.)

Поскольку для исчисления $\mathfrak{B}$ справедлива теорема о дедукции, теорема Колмогорова может быть переформулирована так:

Пропозициональная формула A, содержащая только пропозициональные переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *и логические связки* $\supset$ (*импликация*) *и* $\neg$ (*отрицание*), *тогда и только тогда принадлежит частной логике суждений* (что в данном случает равносильно принадлежности классической логике высказываний), *когда в общей логике суждений* (т. е. в исчислении Колмогорова $\mathfrak{B}$) *выводится формула*

$$(\neg\neg p_1 \supset p_1) \supset ((\neg\neg p_2 \supset p_2) \supset \ldots \supset ((\neg\neg p_n \supset p_n) \supset A) \ldots).$$

Теорема Колмогорова даёт сигнал о том, что аксиома двойного отрицания $\neg\neg p \supset p$ играет особую роль во взаимоотношениях общей и частной логик: как показывает эта теорема, названная аксиома

выражает условие, которому должны удовлетворять элементарные высказывания для того, чтобы с точки зрения общей логики для этих высказываний выполнялся всякий закон частной логики.

Описанную ситуацию можно изложить в общем виде. Имеются две пропозициональные логики — *базовая* логика $\mathscr{L}$ и *испытуемая* логика $\mathscr{W}$; каждая из них есть некоторое множество пропозициональных формул. (В применении к статье Колмогорова «О принципе tertium nondatur» в качестве базовой логики выступает логика $\mathfrak{B}$, а в качестве испытуемой — логика $\mathfrak{H}$.) Нас интересует вопрос, при каком условии, налагаемом на элементарные высказывания, принадлежность составленной из этих высказываний формулы A к испытуемой логике $\mathscr{W}$ оправдана «с точки зрения» базовой логики $\mathscr{L}$. Условие должно выражаться подходящей пропозициональной формулой D, а «оправданность» означает, что к базовой логике принадлежит формула, выражающая следование A из результатов применения условия D к каждому из элементарных высказываний, входящих в состав формулы A, т. е. формула

$$D_1 \supset (D_2 \supset \ldots \supset (D_n \supset A) \ldots),$$

где D_i есть результат применения формулы D к i-му элементарному высказыванию, входящему в состав формулы A. Саму формулу D будем называть *диагностической* для испытуемой логики $\mathscr{W}$ относительно базовой логики $\mathscr{L}$. Сказанное формализуется в виде следующего определения (см. [УспПли] и [Usp], p. 389):

Формула $D(p)$ с единственной пропозициональной переменной p называется ***диагностической формулой*** *для логики $\mathscr{W}$ относительно логики $\mathscr{L}$, если для любой формулы A, не содержащей иных переменных, кроме $p_1, p_2, \ldots, p_n$, эта формула A тогда и только тогда принадлежит логике $\mathscr{W}$, когда логика $\mathscr{L}$ содержит формулу*

$$D(p_1) \supset (D(p_2) \supset \ldots \supset (D(p_n) \supset A) \ldots).$$

Теперь теорему Колмогорова о границах применимости частной логики суждений можно сформулировать так:

Аксиома двойного отрицания $\neg\neg p \supset p$ служит диагностической формулой для частной логики суждений (т. е. импликативно-негативного фрагмента классической логики высказываний) *относительно общей логики суждений* (т. е. исчисления Колмогорова $\mathfrak{B}$).

V. Границы применимости закона исключённого третьего

Нахождение границ применимости частной логики суждений — одна из главных целей статьи «О принципе...». В § 1 главы I Колмогоров пишет: «Всё дальнейшее посвящено выяснению области применимости частной логики суждений». Но уже в следующей фразе он делится с читателем наблюдением, к которому более не возвращается и которое никак не разъясняет: «Эта область, может быть, и несколько у́же, чем область применимости принципа tertium non datur в гильбертовой форме». Это наблюдение Колмогорова, сформулированное как бы мимоходом, оказывается весьма тонким. Попробуем его прокомментировать. Прежде всего напомним, что в силу основного результата Колмогорова область применимости частной логики суждений совпадает с областью применимости закона двойного отрицания. Поэтому в нашем комментарии мы будем сравнивать между собой области применимости для этого закона и для принципа tertium non datur (иначе — закона исключённого третьего).

Прежде всего заметим, что для закона исключённого третьего само понимание слова «применимость» нуждается в разъяснении, которое не так просто дать. В самом деле, если говорить, скажем, о законе двойного отрицания или же о законе исключённого третьего в его обычной, дизъюнктивной форме, то ясно, что означает применимость каждого из них: первый закон примени́м к тем суждениям a, для которых истинна формула $\neg\neg a \supset a$, второй — к тем суждениям a, для которых истинна формула $a \vee \neg a$. Но в гильбертовой форме закона исключённого третьего

$$(a \supset b) \supset ((\neg a \supset b) \supset b)$$

помимо «основного» суждения a встречается ещё «вспомогательное» суждение b. Один из вариантов избавления от этого b состоит в замене b на a. После такой замены получаем формулу

$$(a \supset a) \supset ((\neg a \supset a) \supset a),$$

которая представляет собою частный случай закона исключённого третьего в гильбертовой форме. В исчислении Колмогорова $\mathfrak{B}$ (а также в системе Гильберта) эта формула эквивалентна (в смысле выводимости двух импликаций) формуле

$$(\neg a \supset a) \supset a.$$

Сопоставляя последнюю формулу с аксиомой двойного отрицания

$\neg\neg a \supset a$, обнаруживаем, что импликация $((\neg a \supset a) \supset a) \supset (\neg\neg a \supset a)$ невыводима в исчислении $\mathfrak{B}$ Колмогорова. Этот факт можно интерпретировать следующим образом: если для суждения a выполнен частный случай закона исключённого третьего в гильбертовой форме, то, с точки зрения общей логики суждений (т. е. исчисления Колмогорова), отсюда ещё не следует, что для суждения a выполнен принцип двойного отрицания. Так что область применимости принципа двойного отрицания оказывается более узкой, чем область применимости обсуждаемого частного случая закона исключённого третьего в гильбертовой форме.

Колмогоровское «может быть» мы соотносим с тем обстоятельством, что при рассмотрении вопроса о применимости закона исключённого третьего в гильбертовой форме произошла вынужденная замена общего вида закона (в указанной форме) на его частный случай. Оказывается, однако, что этот частный случай сам может служить выражением общего закона исключённого третьего. Для обоснования этого тезиса обратимся к работе [LukTar], в которой приведена предложенная Лукасевичем аксиоматика импликативно-негативного фрагмента классической логики высказываний, состоящая всего из трёх аксиом. Именно, система Лукасевича содержит единственную аксиому следования

$$(a \supset b) \supset ((b \supset c) \supset (a \supset c)),$$

выводимую на основании аксиом следования Гильберта, и две аксиомы отрицания: аксиому 5 системы Гильберта и аксиому исключённого третьего в форме Лукасевича $(\neg a \supset a) \supset a$. Последняя аксиома, как видим, совпадает с рассматриваемым нами частным случаем закона исключённого третьего в гильбертовой форме. Рутинным способом доказывается полнота этой системы. Таким образом, если в системе Гильберта аксиому 6 заменить на аксиому исключённого третьего в форме Лукасевича, мы получим систему, в которой выводимы все аксиомы системы Лукасевича. Следовательно, так изменённая система Гильберта полна и потому эквивалентна системе Гильберта в первоначальной формулировке. А значит, аксиома исключённого третьего в форме Лукасевича полноценно выражает закон исключённого третьего.

Литература

[Колм] *А. Н. Колмогоров*. Предисловие редактора перевода // *Р. Петер*. Рекурсивные функции. — М.: ИЛ, 1954. — С. 3—10.

[УспПли] *В. А. Успенский*, *В. Е. Плиско*. Диагностические пропозициональные формулы // Вестник Московского университета. — Математика, механика. — 1991. — № 3. — С. 7—12.

[LukTar] *J. Łukasiewicz*, *A. Tarski*. Untersuchungen über den Aussagenkalkül // Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie. — Cl. III. — 1930. — T. 23. — P. 1—21.

[PatlPli] *M. V. Patlasov*, *V. E. Plisko*. Diagnostic formulas for intuitionistic and minimal propositional calculi // Международная конференция «Колмогоров и современная математика»: Тезисы докладов. — М., 2003. — С. 691—692.

[Usp] *V. A. Uspensky*. Kolmogorov and mathematical logic // The Journal of Symbolic Logic. — 1992. — V. 57. — N. 2. — P. 385—412.

Разговор о книге Е. Ф. Сабурова «Власть отвратительна»

Предисловие автора настоящей книги

Всё началось с того, что в июне 2002 года мне позвонил Евгений Фёдорович Сабуров и сказал, что хочет меня посетить. До этого Сабуров мне никогда не звонил и у меня не бывал.

С Сабуровым я был знаком довольно отдалённо — так, случайные встречи, во время которых мы демонстрировали взаимную приязнь. Сабуров окончил Мехмат МГУ в 1969 году, на 17 лет позже меня, и, по моему ощущению, уважал меня тем специфическим уважением, каковое человек, когда-то окончивший Мехмат МГУ, но не пошедший далее по математической линии, питает к человеку, на Мехмате работающему. На полке у меня стояли два его стихотворных сборника, им мне подаренных: «Пороховой заговор» (М.: Золотой вѣк, 1995) и «По краю озера» (М.: ОГИ, 2001). На первом из них он надписал «...от всегдашнего мехматянина», на втором — «...от бывшего мехматянина». Я неоднократно слышал, что Сабуров был главой правительства Крыма. Интернет указывает, что с 11 марта по 6 октября 1994 года он был вице-премьером этого правительства; однако, в Интернете встречается и выражение «правительство Сабурова», а сам Сабуров именуется «руководителем правительства». Наконец, в том же источнике находим сведения, что августе 1991 года Сабуров был назначен заместителем Председателя Совета Министров и министром экономики РСФСР и что удостоверение он получил уже в осаждённом гекачепистами Белом Доме. В этих должностях он пробыл по ноябрь 1991 года. Он пытался, но не смог меня убедить, что какое-то время исполнял обязанности главы российского правительства; сошлись на том, что в некоторых ситуациях он исполнял эти обязанности фактически.

Разговор состоялся 30 июля 2002 года. Собеседники: В. Н. Некрасов, В. А. Успенский, М. Б. Ходорковский. Опубликовано в интернет-проекте «Русский журнал»: http://old.russ.ru/ist_sovr/20021017_stol.html. А также в книге: *Е. Ф. Сабуров*. Власть отвратительна. — М.: ГУ ВШЭ, 2003. — С. 136—158.

Приехав ко мне, Сабуров объявил, что написал книгу под заимствованным из строк Мандельштама названием «Власть отвратительна» и что он хотел бы организовать обсуждение не столько самой книги, сколько затронутых в книге тем до сдачи рукописи в печать. Имелось в виду, что запись указанного обсуждения войдёт в текст книги в качестве особого раздела. Обсуждение предполагалось организовать в редакции интернет-издания «Русский журнал» в виде трёх последовательных разговоров, каждый с тремя участниками. Впоследствии Сабуров так объяснял принцип, из которого он исходил, выбирая состав каждой из троек:

> Поскольку поставленные проблемы не носят профессионального, специализированного характера и не могут быть описаны и оценены с какой-то одной точки зрения, то выбор участников разговоров диктовался требованием их «перпендикулярности» друг к другу. (http://old.russ.ru/ist_sovr/20021017_sab.html)

Сабуров передал мне распечатку текста книги и предложил участвовать в одном из трёх разговоров вместе с предпринимателем Михаилом Ходорковским и поэтом Всеволодом Некрасовым, считающимся одним из основателей так называемого «московского концептуализма». Наш разговор оказался первым из трёх и состоялся 30 июля 2002 года. Помимо трёх собеседников и пришедшей с Некрасовым его жены Анны Журавлёвой присутствовали автор книги и заместитель главного редактора «Русского журнала» Елена Пенска́я. Книга с соответствующей строфой Мандельштама в качестве эпиграфа была выпущена Высшей школой экономики в 2003 году: *Е. Ф. Сабуров*. Власть отвратительна. — М.: ГУ ВШЭ, 2003.

Текст книги выложен и в Интернет: http://www.saburov.org/education/power_is_disgusting. Запись всех трёх разговоров составляет в названной книге раздел, который так и называется «Три разговора» и размещается на с. 136—209.

Краткое вступление сделал автор обсуждаемой книги. Далее выступить было последовательно предложено мне, М. Б. Ходорковскому, В. Н. Некрасову.

* * *

В. А. Успенский. Начну с двух мыслей, которые раньше не приходили мне в голову. «Истина рождается парадоксом и умирает тривиальностью», — сказал кто-то из великих. Первая мысль

касается роли информации в современном обществе, вторая — роли образования в престижных вузах.

Об информации. Информация как вид собственности котируется выше иных видов (например, средств производства). Это знают все. Но вот важное уточнение: более важной вещью, чем *обладание* информацией является *доступ* к ней. Не так важно, что человек что-то знает, он может знать сравнительно мало. Гораздо важнее, чтобы он *знал, как узнать*. Причём узнать сравнительно быстро. Вот это перераспределение шкалы ценностей представляется мне очень существенным.

О престижных вузах. Почему ценятся выпускники престижных вузов? Казалось бы, ясно, почему: в престижных вузах лучше учат или, по крайней мере, считается, что там лучше учат. Но есть, оказывается, и другая причина: в престижный вуз трудно поступить, там трудно учиться, трудно переходить с курса на курс и добраться до финала. Если человек всё это преодолел, он доказал свою состоятельность. Вот именно за этот «гроссмейстерский балл» выпускника престижного вуза и ценят. Обладатель этого балла автоматически попадает в повсеместно и повсесердно любимую категорию *удачников*. 1

Интерес вызывает и настойчиво проводимый в книге тезис о единстве поэзии и политики, точнее — о единстве психологического типа поэта и политика и о сходстве их профессий. По размышлении я обнаружил, что в названном тезисе есть и глубина, и некая справедливость. И дело не только в Тютчеве, совмещавшем обе профессии. Можно найти и другие подтверждения. Хорошо известно, например, что в 1917 году Хлебников провозгласил себя одним из Председателей Земного Шара. Менее известно, что в следующем, 1918 году Гумилёв, находясь в Англии, заявил, что государствами должны управлять поэты и предложил себя в правители России, Честертона (прозаика и поэта) — в правители Англии и д'Аннунцио (прозаика и поэта) — в правители Италии.

Однако в обсуждаемой книге есть положения, вызывающие у меня непонимание, недоумение или несогласие по существу. Меня, к примеру, возмутила фраза: «Конечно, психолого-педагогическое сообщество примет обращённый к нему вызов и найдёт достойные ответы». Это с чего вы взяли? Весь опыт нашего так называемого психолого-педагогического сообщества убеждает как раз в обратном. Может, оно и примет вызов (потому что это непроверяемо), но уж достойных ответов точно не найдёт. Сгустком указанного сообщества была пресловутая Академия педагогических наук (АПН) —

организация, которую по результатам её деятельности я оцениваю крайне негативно. Когда рушилась Советская власть и строилась новая Россия, была слабая надежда, что АПН закроют, — но нет, её преобразовали в Российскую академию образования. Здесь я останавливаюсь. Руководствуясь заветом глубоко мною чтимого Алексея Константиновича Толстого:

Ходить бывает склизко
По камешкам иным,
Итак, о том, что близко,
Мы лучше умолчим.

(Всё вышесказанное никак не относится к подвижническому труду тысяч учителей.)

Особо хочу сказать о предметно-урочной системе, берущей своё начало от великого педагога Яна Амоса Каменского. Если я правильно понял (в чём не вполне уверен), одновременно с введением предметно-урочной системы и вследствие такого введения обучение стало происходить на основе наук. То есть стали учить началам наук и создавать у учащегося так называемую научную картину мира.

Утверждения типа «учить надо наукам», «главная цель образования — создание научной картины мира» и т. п. стали парадигмами современной цивилизации. А ведь неизвестно, нужно ли на самом деле так учить, правильно ли всё это. Вот меня в мои школьные годы учили строению инфузории и особенностям кровообращения крокодила; кажется, этому учат и сейчас. А зачем? Ответа на этот естественный вопрос нет, да и сам вопрос обычно не ставится. Разумеется, биология (основы которой, конечно же, надо в школе изучать) взята лишь для примера; то же относится и к математике. Может быть, разумнее учить не научной картине мира, а тому, как устроен унитаз.

Когда-то мне довелось прочесть совершенно замечательную формулировку целей английского образования. Привожу по памяти: *сообщить учащемуся достаточное количество знаний и навыков, чтобы, пользуясь ими, он мог принимать решения по собственному усмотрению*. По-моему, совершенно замечательная цель. Тут наука как бы и не присутствует — во всяком случае, не присутствует явно.

Всё это недопустимо мало у нас обсуждается. Да и обсуждаются подобные проблемы (если вообще обсуждаются) больше в специальной педагогической среде. Известно изречение (забыл, кому принадлежит): «Война — слишком серьёзное дело, чтобы доверять

её генералам». Образование — не менее серьёзное дело, и доверять его генералам от образования уж точно нельзя.

Несомненно, что мы живём среди верований, это абсолютно верно. Но мы живём не только среди верований, но также и среди обрядов. Например, защита диссертации — это типичный обряд. Тем более что результат, как правило, известен заранее (и потому заранее заказывается банкет). Обряд этот мало отличим от плясок вокруг костра со священным зубом крокодила.

Об источнике власти. Раньше был правитель — «принц» (князь, король), а теперь вроде бы народ. Ну, насчёт народа это всегда несколько сомнительно. 2 Возможно, что о народе как об источнике власти говорят тогда, когда подлинный источник власти либо неизвестен, либо табуирован. Проскальзывает мысль, что подлинный источник не всегда себя раскрывает. Здесь уместно вспомнить Станислава Лема. Настоящая фантастика возникает там, где литература пытается сообщить нам представления, полностью отличные от нашего земного опыта. Вся жюльверновская фантастика основана на усовершенствовании привычных предметов. Иное дело Лем. Я хочу привести пример из его романа «Эдем». Необычным здесь является сам предмет, избранный Лемом для фантастического преломления в ткани романа — и в этом его, Лема, заслуга; это не техническое приспособление и не живое существо, а социально-психологическая структура общества. Общественное устройство, присущее высокотехнологичной цивилизации далёкой планеты, на которую попадает экспедиция с Земли, так и остаётся не полностью понятой участниками экспедиции. Но вот что им всё же удаётся понять. Источник власти в этом обществе анонимен, знание о природе этого источника запрещено и даже вопросы о такой природе жестоко подавляются. Кажется, здесь есть о чём поразмышлять и в применении к планетам не столь отдалённым.

Ещё о власти. Любопытно проследить разницу между механизмом достижения власти и механизмом её удержания. Некогда один американский журнал составил два списка: список качеств, требующихся, чтобы стать президентом, и список качеств, требующихся, чтобы быть президентом. Эти списки оказались почти (если не полностью) непересекающимися.

Ещё об Америке. В ней умиляет одномерность измерения успеха: деньгами и только деньгами. Скажем, в России достижения писателя могут измеряться тремя параметрами, до некоторой степени независимыми друг от друга: качеством произведений, степенью известности, размером гонорара. Не так в Америке. Если ты хороший, да ещё известный писатель, то изволь зарабатывать много денег — в про-

тивном случае тебе запрещено считаться хорошим и известным. Если ты хороший исследователь, твой оклад должен быть большим, а иначе ты исследователь плохой. Если ты знаменитый профессор, ты становишься профессором с окладом там 200 тысяч долларов в год, а если ты не знаменитый профессор, тебе платят 30 тысяч в год. Всё совершенно понятно и однозначно.

Я не нахожу эту систему порочной, признаю даже в чём-то удобной; просто идея денег как главного и единственного измерителя ценностей противоречит русскому менталитету, в котором ценность измеряется набором, состоящим из нескольких признаков. Американская система кажется нам столь же странной, как, скажем, приведённое к одному числу представление о величине автоцистерны, — тогда как автоцистерна имеет и вес, и длину, и ширину, и высоту, и вместимость.

И, наконец, самый последний комментарий. Я ещё раз убедился в справедливости следующих двух общих положений, относящихся к теории познания.

Положение первое. В познании мира человечеством можно выделить такой мейнстрим: общепризнанные понятия лишаются смысла, а представления, кажущиеся бессмысленными, смыслом наполняются. Например, с развитием физики лишились смысла такие общепринятые в своё время понятия, как флогистон (флюид горения), теплород (флюид тепла), мировой эфир [3]. Напротив, представление о том, что и размер предмета, и даже свойство одновременности двух событий являются не абсолютными, а относительными и зависят от обстоятельств наблюдения, — представление невообразимое, казавшееся совершенно диким, — оказалось не только осмысленным, но и верным. Более того, даже сама последовательность событий оказалась относительной: событие *A* может произойти раньше события *B* для одного наблюдателя и позже, чем *B*, для другого.

Положение второе касается причинно-следственной связи явлений. Это мы, люди, навязываем её мирозданию, а существует ли она в мироздании независимо от нас — это совершенно неизвестно. Может, да; а может, нет. Возникает такое впечатление, что сейчас человечество дошло до такой степени развития, что оно этот фундаментальный факт наличия причин и следствий начинает ставить под сомнение — ставить под сомнение самоё идею причинно-следственной связи. Подозрение, что представление об обязательности причинно-следственных связей (т. е. об обязательности причин у следствий и следствий у причин) является всего лишь заблуждением, поучительно и прогрессивно независимо от того, подтвердится оно ли нет.

М. Б. Ходорковский. Проблема правил игры очень глубокая. У неё есть оттенки как политические, так и экономические, социальные и образовательные. У меня в компании работает много иностранцев. И они всё время жалуются на то, что у нас каждый шаг должен подтверждаться распоряжением. Ну вот, условно говоря, как диспут проводить? Выходит распоряжение в компании: «Утвердить положение о диспуте. Регламент такой-то, работать в таком-то порядке». Иностранцы говорят: «Что у русских в компаниях творится? Вот у нас свобода творчества, народ действует в режиме собственного усмотрения. Мы дальше продвинулись». А я отвечаю: «Вы действительно дальше продвинулись, настолько дальше, что уже забыли, что, собственно говоря, у вас на самом деле происходит».

Заходишь в любую западную компанию и достаёшь у них регламент. Причём нашего слова «регламент» они тоже не понимают, у них это стандарт называется. И таких стандартов очень много. Причём изучают они их уже в университете. Поэтому когда они приходят на работу, то основная регламентная база у них уже в голове. Она принесена из вуза. А поскольку за границей ситуация меняется медленно — и в стране, и в бизнесе, и т. д., — тó, что они учили в университетах 10—15 лет назад, — оно в базе своей и до сегодняшнего дня сохранилось. Грубо говоря, положения о диспуте они уже изучали на каком-то курсе. И оно им не нужно. Потому что все они учились по более-менее одинаковой программе, несмотря на то, что каждый вуз на Западе будет рассказывать, насколько он сильно отличается от других.

Я был свидетелем того, как работает регламент в крупной западной компании. Я попросил в офисе British Airways поменять мне билет довольно сложным образом. Мне сотрудница отвечает: «У меня сейчас компьютер не работает, справки нет, я сейчас посмотрю регламент компании». Достаёт толстенную кипу бумаг и начинает её перелистывать. Нашла, что делать в этом случае по порядку.

Если взять западный банк, то русского человека поражает низкий интеллектуальный уровень исполнителей младшего ранга. Операционистов. Да и руководителей департаментов тоже. Ужасно? Да нет. Всё сложнее. Умные люди в банке есть, но они занимают высокие должности. А куда девать тех, кто не может принимать решения, тех, кому это противопоказано? Им надо дать работу и надо дать регламент. Американец мне объясняет: «Ну что же вы не понимаете? У нас есть, во-первых, социальная программа адаптации, мы увечных должны брать на работу. А мы с удовольствием берём таких, потому что у них

метромоторика[1] лучше, чем у обычных людей». Иными словами, обычный человек, если его заставить 6 часов в день заполнять разные формуляры, озвереет и начнёт ошибаться. А такой — нет. А если ему задают какой-нибудь нестандартный вопрос, он не должен отвечать. Русский человек всегда, когда его что-нибудь спросят, — он даже не знает — всё равно ответит. А тут есть кнопка — «Вызови менеджера». Менеджер приходит — у него свой набор инструкций. Чуть пошире, чем у операциониста, но тоже ограниченный. Не может — вызвал начальника смены. И так далее. Если сложный вопрос — выходят на тех, кто принимает решения. Система работает абсолютно чётко. Вот у нас в России среди операционистов встретишь столько же умных людей, сколько среди директоров банков, так? Это очень плохо. Это значит, что у нас селекция людей идёт плохо. В Америке среди операционистов умных людей практически не встретишь. Они считают, что у них выдвижение умных людей на тот уровень, на котором они должны находиться, достигает 75—85%. В Европе, видимо, порядка 60%, по их мнению. Вообще считается, что есть всего 3% людей, способных думать головой и принимать нестандартные решения, в Америке чуть побольше за счёт того, что они из других стран подтягивают. Вот задача каждого производства, каждого общества — сейчас особенно, когда руками уже меньше надо работать, головой надо больше, — задача извлечь эти 3% людей и поставить на тот уровень компетентности, на котором они могут максимально приносить пользу. Вот американцы считают, что они 75—85% всех этих людей расставляют правильно. А у нас считается — порядка 30%.

У нас машина, которая называется сепаратор, не работает. В Америке сепаратор начинает работать со школы. Когда мне начинают говорить о том, что дилетант может заниматься каким-то делом, я говорю: может, в том случае, если его поддерживает жёсткая система регламента, которая просто его игнорирует.

Поэтому, к примеру, такое огромное количество «красных директоров», директоров, которые были при Советском Союзе на заводах, действовали достаточно успешно в советское время и оказались абсолютно неуспешным в постсоветское. Тогда они действовали в жёстко

[1] По-видимому, имеется в виду микромоторика (мелкая моторика), т. е. координация движений кистей и пальцев рук и ног, выполнение ими своих функций, а также внимательность и слаженность работы глаз и рук, работа с мелкими предметами. Микромоторика заключается в совокупности эффективной работы нервной, мышечной и костной систем и развивается с младенчества. — *В. У.*

регламентированном режиме. Как только им сказали: ребята, теперь всё это отменяется, теперь думайте сами, то, на мой взгляд, не более 2% оказались способными действовать. Общество нуждается в профессионалах. Требования к профессионализму можно снижать по мере того, как растёт стабильность и регламентированность общества. Вот по мере того, как стабильность растёт, по мере того, как регламентация вследствие этого проясняется, требования к профессионализму понижаются. Теперь о корпорации. Задача любой крупной корпорации — создавать не наилучшие, штучные какие-то товары, а дешёвый стандартный продукт. Вы хотите простой хлеб — это к крупному бизнесу. А хотите специальную выпечку — это к мелкому предпринимателю. Но зато такая финтифлюшка может стоить 5 рублей, а простой батон будет стоить рубль. Почему? Потому что это крупный бизнес, серийное производство, рост регламентации, подавление свободы воли. Соответственно — снижение требования к квалификации, соответственно — снижение стоимости рабочей силы, соответственно — снижение стоимости продукта. Получите дешёвый стандартный продукт. Что в результате получается? Двести лет назад для того, чтобы народ прокормить, 70% или 80% населения работало в сельском хозяйстве. А сейчас, если мы возьмём Америку, наиболее продвинутую страну, — 3% населения кормят всю страну. Крупный бизнес.

А теперь второй аспект. Очень интересную вещь я для себя вывел. Эффективный размер трудового коллектива. По мере роста информатизации общества снижается размер эффективного трудового коллектива. Если мы возьмём время, когда промышленная революция начиналась, наиболее эффективным был коллектив в 10 тысяч человек. Ткацкие фабрики: куча народу, погонщик... Или каменоломня: тоже куча народу, тоже погонщик, в результате 10 тысяч человек очень эффективно работают. Меньше — неэффективно. Почему? Всё инхаус. Всё надо было делать внутри. Количество связей маленькое, налаживаются связи тяжело, затраты на налаживание связей огромные, всё выгодно делать внутри себя. В результате — эффективный коллектив, который всё делает сам. По мере того, как информатизация общества росла в широком плане, я не только компьютеры имею в виду, вообще связи росли, коллектив сжимался, сжимался-сжимался-сжимался, и сейчас, по моей оценке, эффективный коллектив составляет 100 человек. Вот 100—150 человек — это наиболее эффективный коллектив. Если вы можете свести свой бизнес к 100—150 людям — то это самое эффективное. Всё остальное — на подряд. Отдавать, отдавать, отдавать.

В. А. Успенский. А сколько у вас работает?

М. Б. Ходорковский. У нас в ЮКОСе работает 110 тысяч человек, и ЮКОС был бы наиболее эффективен, если бы мне его удалось сегментировать на подорганизации. Каждая по 100—150 человек. Мне до конца это не удалось. И это, на самом деле, на сегодняшний день разрыв между той производительностью труда, которая у меня есть, и той производительностью труда, которой я в принципе мог бы достигнуть, если бы я до конца построил эффективную структуру. Так что это моя недоработка.

А дальше что? Ведь по мере роста, по мере продвижения вот этих связей, глобализации и т.д., в принципе, настанет время, когда самым эффективным трудовым коллективом будет один человек. Значит, где проблема? Проблема, что вот этот один человек должен быть не просто человеком, а человеком думающим. А вот думающих — мало. 3% населения — по мнению социопсихологов. Не важно, кем он будет. Он пошёл в поэты, или он пошёл в учёные, или он пошёл в предприниматели — всего 3%. Вот это — потенциал общества.

В Советском Союзе не было бизнеса. Соответственно эти 3% переориентировались в какие-то другие сферы. Потом появился бизнес — откуда эти люди взялись, их же больше не стало, они просто вышли из других отраслей, из той же науки, и ушли в бизнес, потому что там появились более привлекательные условия. А это те же самые 3% думающих людей. Может быть, с помощью какого-то суперобразования можно как-то дотянуть и увеличить это число до 4%, я не знаю. Может быть, и в этом я абсолютно уверен, можно задушить. Если верования общества таковы, что предпринимательство — это плохо, если об этом все говорят, как было у нас в Советском Союзе, то человек, который в себе чувствовал предпринимательскую энергию, просто это не выдавал и до конца жизни сидел вжавшись. Мы теряли, соответственно, и потенциал людей. Так вот, с этой точки зрения, конечно, я приветствую существенную толику анархизма. Особенно в школах. Мне очень нравится, что делают в этом отношении американцы. Дети должны быть интеллектуальными дебоширами. Потому что только таким образом мы можем полностью раскрыть потенциал этих 3% и продвинуть их вверх для того, чтобы они дальше двигали всё общество.

Об этом неудобно говорить, но соотношение между тем, какую долю продукта в информационном обществе создают вот эти 3% населения и остальные 97% — очень легко определить. Возьмите две страны с одинаковым уровнем технического развития — Россию и Америку.

В. А. Успенский. С одинаковым уровнем технического развития?

М. Б. Ходорковский. Ну а что, какая разница у нас, по большому счёту, в производственных фондах? Ну, если мы возьмём нефтянку, то разницы в производительности труда американской буровой и российской буровой — никакой. Или станки по производству компьютеров — небольшая разница. А дальше встаёт вопрос: интеллект, который наполняет всё это железо. Американцы его задействуют полностью, а мы его до последнего времени не задействовали. Разница получается в 5—10 раз. Соотношение в объёме создаваемого продукта между 97% населения и 3% населения — это, в лучшем случае, один к одному.

В. А. Успенский. Но ведь есть и другие проблемы помимо плохой работы сепаратора, помимо отбора наиболее эффективных 3%. Возьмём самую простую вещь. Американский водопроводчик завёртывает кран, он завёртывает гайку как следует, а наш слесарь бьёт по ней кувалдой... Понимаете, что я хочу сказать? У тамошних 97% есть культура труда, а у нас нет 4 5. Или это абсолютно неверно?

М. Б. Ходорковский. Абсолютно неверно. Ничем наш рабочий не хуже их рабочего. Поверьте, я и там, и у нас внимательно приглядывался. Даже не хочу об этом говорить. Наш лучше.

В. Н. Некрасов. Мне нравится американское (как я слышал) выражение: «Если ты такой умный, чего же ты не такой богатый?» — только я никак не могу его принять в буквальном, прямом смысле: у меня совершенно не тот опыт, прямо обратный. А в переносном смысле звучит, да: если такой ты умный, чего же у тебя так плохо выходит?

Близкий мне пример: если ты такой великий теоретик-критик, чего ж ты возишься с такой фигурой — сомнительной — как блатной твой подшефный? А я, прости, вижу ясно, чего фигура стоит на самом деле, как литературный факт — и судить, уж извини, стану не по теории о практике; а по практике — о теории. Поскольку фигуре-то цену вижу: работа такая. Достаточно точно вижу, пусть и не в цифровом выражении...

А несуразица уже, что против практики двинули лозунг, а, главное, лозунгом таким взяли *духовность* в пику долларовому индексу. А она не лозунг и не вещь, которая так называется, и её можно куда-то двинуть; скорей уж она опыт, качество, которое наживают. Если получится. Да и *практика* ведь никакой не лозунг подавно, не знамя веры, а именно что практика. Жизнь.

Американцы и книжек не читали, а вон как живут... А мы, дураки... Дураки. Потому ещё, что не понимаем: дураки мы всё-таки

не в этом... Беря грубо, системы были обратно симметричны. И в целом у нас система оказалась самоубийственной, а у них — вообще у нормальных людей — жизнеспособной. И идея делиться передовым опытом социализма на уровне систем в целом, очевидно, странная: вроде как больному поделиться болезнью ради общего самочувствия... Что совсем не значит, будто на других уровнях в иных бесчисленных случаях так уж нечем нам делиться конкретно и нечего беречь для собственного пользования. Пользы. И до советской, и даже при советской власти какая-то тут жизнь всё же шла. И что-то всё-таки своё наживалось тоже.

И не всякий импорт — приобретение. Наше журнальё, как одна мартышка, стало везде пихать слово *шокировать* — за импортное, англо-американское происхождение — вместо сиволапого *потрясать*, — и где было два слова в русском языке, стало одно...

Импортировать же *институты*, очевидно, надо, раз свои искореняли с 17 года. *Пересаживать*, раз в своё время *пересажали*... Но с головой, с толком, разбором и понятием, и тут пример с искусством мог бы, наверно, что-то подсказать. И пересаживают всё-таки в землю, на какую-то почву, а не в чёрт-те что. Свежим нашим людям не то что уж совсем невдомёк, но не так ощутимы могут быть под простыми долларовыми заповедями другие американские заповеди, ещё проще:

Надо делать хорошо
И не надо — плохо.

И так-то почва тут — не бей лежачего, как говорится, а стремиться разбить, размесить её вконец в полную трясину специально резкими движениями кажется просто бесхозяйственным... Допустим даже, симметричная нашей земля-территория на той стороне глобуса и есть земля обетованная. Но лезть туда напролом — хороший шанс убедиться, что при таком подходе земля эта обернута к нам изнанкой.

Повсюду свои кочки и ямочки. Своя наука, своя природа, магия, своя необходимость, свои права у фигуры круг, свои — у фигуры квадрат. Похоже, ничего не остаётся, как искать *квадратуру круга*, которая даже не задача, а задание, занятие. Практическое, для решений в рабочем порядке.

М. Б. Ходорковский. Может быть, я не большой специалист, по-английски плохо говорю, но я всё время работаю с хорошо говорящими переводчиками. Так вот, английский язык для бизнеса очень подходящий. Жёсткая схема, чётко определённые понятия, тут нет

никакой расплывчатости. Если ты на английском составил договор, ты можешь быть твёрдо уверен, что обе стороны поняли его одинаково. Пригоден ли английский язык для других вещей, например для культуры? А там на самом деле три языка. Английский английский, английский американский, и английский-бизнес. Английский английский — это приблизительно 140 тысяч слов. Английский американский — это, говорят, 30 тысяч слов, я не знаю точно, но где-то такой порядок, а вот английский-бизнес — это около 8 тысяч слов. Восемь тысяч слов — и всё. То есть очень комфортный для бизнеса язык.

В. А. Успенский. Чем меньше слов, тем точнее смысл?

М. Б. Ходорковский. Проще. Я бы не сказал точнее — проще. А не требуется слишком большая точность. Требуется унификация понимания. Стандарт. Точности можно было бы достичь учётом оттенков. Это другое. Главное — простота. Поэтому, например, когда мы говорим с бизнес-контрагентами по-английски, я их понимаю, с американцами — почти всё понимаю. Но вот я разговаривал с лордом Ротшильдом. Я его вообще не понимаю. Он говорит по-английски, а я его вообще не понимаю. У него очень богатый лексический запас, и он говорит в общем понятные вещи, но подбирает такой синонимический ряд... И это уже не стандартный бизнес-язык, и я выпадаю вообще, не могу понять. Наследственная культура.

В. А. Успенский. Замечательно читать параллельно набоковские послесловия к английской «Лолите» и к русской «Лолите», в каждом из которых он пишет, что на другом языке всё это немножко по-другому и лучше. То есть в русском послесловии он пишет, что его роман лучше звучит по-английски, а в английском — что роман лучше звучит по-русски. И поэтому русский язык, конечно, терять нельзя.

М. Б. Ходорковский. Русский язык, конечно, терять нельзя. Я считаю, что вообще через 50 лет национальные государства приобретут совершенно иное значение, они будут культурными общностями. А вот с культурными общностями не простимся. И государствообразующими будут другие понятия.

В. Н. Некрасов. Я просто не стал говорить об очевидности, конечно, идиотизма вот такого, вот, прошу прощения, предположения, что: а может, мы язык импортируем?.. Вообще, такая идея сама по себе вызывает серьёзные опасения....

То, что делают журналисты, это ещё не русский язык, прости меня. Это разные языки. А русский язык, конечно, берёт то, чего надо, то, чего не хватает: «триггеры», «компьютеры», например.

Куда деваться? Это нормально. Язык работает с этими словами, осваивает.

Русский народ — это те люди, которые помнят русскую культуру и говорят на русском языке. А иные факторы, вообще говоря, меняются. Если это будет сохраняться, вот эта страна с этим более-менее сознанием, которое базируется не в последнюю очередь на языке и культуре, то не стоит говорить о том, что там будет с русским народом. Ничего такого не будет.

Правда: Господи, оборони от *духовного*... От разговоров о культуре — подальше. Культура не для разговоров о культуре. От разговоров таких культура бежит, спасается. Что мэр Лужков, что мэтр Глазунов, объявив, что в Америке культуры нет, культуру собственную не то, что оконфузили — уходили. Укокошили.

Культура и бахвальство — две вещи несовместные. Бахвальство культурой — для культуры вещь просто смертоубийственная. Этого не понимать — о какой тогда уж *культуре* разговоры...

Страна десятилетиями вылезти не могла из насильно навязываемой наглой и жалкой лжи про какое-то небывалое светлое будущее, куда она силком потащит за собой якобы весь мир, и существовала, этот мир шантажируя, завязая глубже и глубже, да ещё без устали при этом всём рекламируя свою якобы зато духовность, культурность. Торгуя духом святым.

Тем не менее, это правда, что хотя бы относительная свобода движений практически могла быть только здесь: на культурном, как говорится, поприще. Только здесь свободу эту можно было хоть как-то отстаивать — хоть под секретом. Свои плоды у этой ненормальности всё-таки усматриваются, в том числе нормальными людьми, из нормальной жизни — только они такие: волшебные. Способные от похвальбы обратиться в пыль.

В. А. Успенский. Утверждается, что поэты создают язык и тем самым сильно, а то и решающим образом влияют на общество. Например, говорится: «Тютчев вернул Россию в Европу». Интересно, что Строуб Тэлбот, ведущий американский эксперт по России и видный член администрации в правление Клинтона, окончил Йельский университет со специализацией именно по Тютчеву. Всё это так. Но всё равно цитированная фраза показалась мне недостаточно обоснованной. Ну, например, да кто там тогда читал этого Тютчева вашего, их всех можно пересчитать. Предлагается такой ответ: правильно, Тютчева никто не читал, кроме каких-то представителей элиты, но его прочли несколько поэтов, образовавших, так сказать, второй ярус, и они написали свои стихи. Стихи поэтов второго яруса

прочли поэты третьего яруса, которых уже было значительно больше. Возникла такая иерархическая структура, разветвляющаяся вниз, где на верхней ступеньке стоит Тютчев, а в самом низу — многочисленные читатели, на которых Тютчев тем самым опосредованно повлиял и вернул их в Европу. Так вот, Всеволод Николаевич, правильна ли эта модель опосредованного воздействия поэта на общество или всё-таки роль поэта преувеличена? Действительно ли Тютчев так сильно повлиял на русскую цивилизацию, на устройство нашего общества или нет?

В. Н. Некрасов. Могу сказать только, что на устройство моих мозгов он здорово повлиял.

Я только не могу согласиться, когда утверждается, что Тютчев — вот это да, а Лермонтов супротив Тютчева, что плотник супротив столяра.

В. А. Успенский. Да нет. Не утверждается, что Лермонтов супротив Тютчева — это ничто; просто утверждается, что Лермонтов не оказал такого влияния на Россию. Поэтически они не сравниваются.

В. Н. Некрасов. Лермонтов оказал другое влияние. Очень большая серьёзная мудрость стоит за школьным таким хрестоматийным опытом, когда парочка портретов висит: Пушкин и Маяковский, Пушкин и Лермонтов. Это не так глупо. Это устоялось не зря. Лермонтов — это потрясающее явление, это коллекция мелодий. Необязательно брать даже и «Демон», не говоря уже о том, что необязательно вообще брать эту романтику Лермонтова. Скорее видно другое, то, что из неё получилось как поэтический факт — остроту лирики зрелой. Это набор мелодий, до того не бывших в русской поэзии. «Анчар» или «Чёрная шаль» у Пушкина — совсем другое дело. У Лермонтова это существо дела, это Лермонтов сам и есть. Это лирика школьная. Она, по меньшей мере, равна какой угодно, хоть «Евгению Онегину».

Аналогично с Маяковским и Хлебниковым. Конечно, Хлебников — это очень интересно, конечно Хлебников — это замечательно. Хлебникова советское культуроведение гнобило, и это безобразие, и давно пора восстановить справедливость. Но её в общем-то восстановили. То есть Хлебников уже давно издан, Хлебникова мы все знаем. Нельзя говорить, что Хлебников — это великий мастер, а Маяковский — это мелкота. Маяковский — величайший революционер в стихе. Только если не бояться этого слова, понимать, что и у него есть свой смысл. В стихе революция была не то, что революция в других местах, она была необходима, она была органична, она была очень продуктивна. Я так думаю, что хоть взять

хоть «Засмейтесь, смехачи», хоть «Крылышкуя», хоть что, а никак этому не уступит, ну, хотя бы «Солнце». Кто ещё так вот речью писал русской? В общем-то, Маяковский останется, конечно, таким же важным реформатором для XX века как для XIX века Пушкин. Они не зря рядышком висят.

О воде живой и воде мёртвой. Вот Пушкин — этой мёртвой водой привёл русский стих в актуальное состояние. Мёртвая вода в сказке — это отнюдь не смерть, это другое. Это скорее именно состоятельность или упорядоченность. А Маяковский дал русскому стиху живую воду.

Теперь вернёмся к Лермонтову. Понимаете, без лермонтовской прозы невозможно представить русскую литературу. Её продолжили непосредственно Толстой и Достоевский особенно, как мы знаем, а это уже бренд-патент, это уже мировые признанные величины, тут говорить нечего. Русский психологический роман! Но дело в том, что лермонтовская проза невозможна без лермонтовских стихов. Профессор российской словесности из Англии, наверное, скажет: «А это Байрон и Шиллер, это мы все знаем!». Но это для него, он по-русски плохо разговаривает. Человек русской культуры, который русский язык, русский стиль знает чётко, ну не может он с этим согласиться. «Выхожу один я на дорогу», «Ночевала тучка золотая», ну что вы, ребята! Это классика самая что ни на есть.

А вот в отношении отбора, сепаратора надо быть очень осторожными. По-моему, слова *талант*, *бездарность* — неудачные, неудобные. Сразу запутывают. Талант, дар, даруемый, даваемый кем-то... Очень сомневаюсь в такой диагностике. В принципе. «Вот есть талант, или нету таланта? Скажите сразу...». Не знаю, кто бы взялся сказать сразу... Чур не я. Я-то повидал, как в этом давали маху. Давал и я в том числе.

Выйдет толк или нет — а, вот это другой разговор. Более нормальный. Может быть — да, может быть — нет. Попробуем. Поглядим. Постараемся. Гарантий никаких, ни в ту, ни в другую сторону.

У меня, например, *таланта* нету и не было. Ранние мои стихи просто отвратные. Бездарные принципиально, безнадёжно. Фальшивые. Не советские, нет. Не в этом дело. Таланта не было, но что-то же было. Не сразу, но удалось же зацепить и вытащить что-то из этого чего-то.

Я хуже скажу — *у нас* не было таланта... Имея в виду ближайших соседей. У кого учился и кто учился у меня. Взаимно... Но мы старались соображать. И было у нас — что? Трудолюбие? Это вряд ли. Упорство? Теплее, но не совсем. Закоренелый инте-

рес к этому делу — пожалуй, так. Занятно: у кого *талант*, кто гнал побойчей, броско, — те в дальнейшем от этого дела как-то поотошли. Интерес-то, похоже, и выдохся. И не очень такие бойкие жаловали нашего брата: «формалистов-авангардистов»... *Муравьиное копошение* — один вундеркинд выразился...

Что талантливых *растит партия* — тогда все слышали. Что-то не слыхать было, чтобы партия растила толковых...

На деле — когда авангард по делу — он-то и есть свобода. И за своих обезьян отвечать не может. Авангард и есть новые, непривычные возможности преодоления глухих стенок и способы общения с инстанциями. Не универсальные, абсолютные способы — такие существуют ли и в природе? — но они воочию показывают тебе: а ещё, ещё подумай. Не тупей, главное.

Конечно, бывают люди, совсем не расположенные к литературе или живописи, музыке. И просто глупые в чём-то. Это другой разговор. Всё же *дары* тебе уже даны. Твоё дело с ними обойтись — с какими-то. Какими, как — а ещё, ещё попробуй. Подумай. Может, не тут, а тут? Не так, а так?

Особенно же не годится слово *бездарность*. По-моему, просто вредное слово, с явно извращённой внутренней формой: я говорю — не *без* чего-то ходит *бездарность*, а именно что с *чем-то*. Чем-то лишним, мягко сказать — необязательным. С шилом в заднице, извините за точное выражение.

И что хошь делайте, никак не могу уверовать в три процента способных при фиксированных девяноста семи безнадёжных. В нашем деле, в искусстве, во всяком случае, проценты способностей способны бывают ого как гулять вверх-вниз по шкале статистики — не то откуда бы тут брались целые *эпохи* — начать хоть с Возрождения?

Процент способностей, процент предрасположенностей...

А умри Грибоедов в возрасте Лермонтова? Остался бы заурядным водевилистом...

Неужели же это *наше дело* одно такое исключительно капризное во всей многообразной человеческой природе, в остальном ориентированной жёстко-безоговорочно на достижения передовой американской социо-статистико-психологии?.. С чего бы это ему?..

В. А. Успенский. Насколько я понял, одна из главных поставленных проблем такова: следует или нет импортировать в Россию западные институты, управляющие социально-экономической жизнью, в частности — принятые на Западе принципы управления финансами, экономикой, производством. Но вот, смотрите, эти западные институты импортировали в Африку, и что там получилось? Резня.

М. Б. Ходорковский. Всё дело в уровне образованности населения. Возьмём даже не Африку, а Латинскую Америку, она социально и психологически всё же ближе к нам, чем Африка. Там применение западных (европейских и североамериканских) экономических подходов провалилось. Почему? А потому что низкий уровень образованности. В России уровень образованности довольно высок, и здесь западные принципы должны работать. Поэтому главная задача — поддерживать высокий уровень образованности. Для этого образованию, просвещению следует уделять повышенное внимание. В частности, в бюджете можно экономить на чём угодно, но не на образовании. Ассигнования на образование следует увеличивать.

В. А. Успенский. Но ведь одни только деньги положения не спасут. Надо ещё знать, чему учить. А мы этого не знаем.

М. Б. Ходорковский. Не согласен. Знаем. И вы знаете. 6

В. А. Успенский. И ведь дело не только в образовании. С 1917 года происходило разрушение генофонда. Имел место отрицательный естественный отбор — впрочем, не очень естественный, — при котором лучшие представители населения уничтожались. В результате имеем то, что имеем.

М. Б. Ходорковский. Отрицательный отбор происходил, но генофонд не нарушен. 7 Среди тех, кто рождается, процент способных и активных остался на прежнем уровне. Такие рождаются в самых простых семьях. Надежда есть. Она реальна.

Примечания

1 [к с. 159]. ●▶ Не могу удержаться, чтобы не вспомнить анекдот о неудачниках.

Нью-Йорк, 27-й этаж, обширный угловой кабинет с окнами на две стороны. Собирается конкурсная комиссия, чтобы выбрать единственного кандидата на должность топ-менеджера с очень серьёзным окладом. На столе — грандиозная куча папок, содержащих досье конкурсантов. Комиссия смотрит на неё с ужасом. Председатель разделяет кучу на две неравные части и бóльшую сбрасывает под стол. Члены комиссии выражают недоумение. «А кому нужны лузеры?» — говорит председатель. ◀●

2 [к с. 161]. ●▶ Слово «народ» вызывает много вопросов.

Уместно вспомнить, что говорил в связи с этим словом великий Готлоб Фреге:

> Псевдоимена, по-видимому, даже в большей степени, чем неоднозначные выражения, способствуют демагогическому злоупотреб-

лению языком. «Воля народа» может служить этому хорошим примером: легко можно установить, что у этого выражения нет никакого, по крайней мере общепринятого, значения.

Вот, скажем, считается, что народ имеет право силой свергнуть тираническую власть. Но власть, ежели она не желает свергаться, будет называть тех, кто пытается её свергнуть, не народом, а кучкой безответственных бунтовщиков. Как известно,

Мятеж не может кончиться удачей,
В противном случае его зовут иначе[2]. ◄●

3 [к с. 162]. ●► Мировым эфиром называлось предполагаемое вещество, которое заполняет межпланетное пространство и является средой, передающей свет, тепло и гравитацию. В одной из своих гипотез Д. И. Менделеев, допускал, что эфир мог оказаться специфическим состоянием сильно разрежённых газов воздуха. Поскольку эфир легче водорода, то в периодической таблице элементов он входит в особую, нулевую группу. Сам же элемент эфир как не обнаруженный, а всего лишь предполагаемый, Менделеев обозначил символом ***x***. Свои взгляды на возможную химическую природу эфира Менделеев изложил в брошюре «Попытка химического понимания мирового эфира» (СПб., 1905):

Представляя эфир газом, <...> относящимся к нулевой группе, я стремлюсь прежде всего извлечь из периодического закона то, что он может дать, реально объяснить вещественность и всеобщее распространение эфирного вещества повсюду в природе и его способность проникать во все вещества не только газо- или парообразные, но и твёрдые и жидкие, так как атомы наиболее лёгких элементов, из которых состоят наши обычные вещества, всё же в миллионы раз тяжелее эфирных и, как надо думать, не изменят сильно своих отношений от присутствия столь лёгких атомов, каковы атомы ***x***, или эфирные. Понятно само собой, что

---

[2] Это принадлежащий С. Я. Маршаку перевод эпиграммы английского поэта Джона Харингтона (Sir John Harington, 1561—1612):

Treason doth never prosper:
What's the reason?
Why if it prosper,
None dare call it treason.

Харингтон, кстати, является не только автором мудрой эпиграммы, но изобретателем сливного устройства в отхожем месте (и, главное, автором самой идеи такого устройства).

> вопросов является затем и у меня самого целое множество, что на бóльшую часть из них мне кажется невозможным отвечать, и что в изложении своей попытки я не думал ни поднимать их, ни пытаться отвечать на те из них, которые мне кажутся разрешимыми. Писал не для этого свою «попытку», а только для того, чтобы высказаться в таком вопросе, о котором многие, знаю, думают, и о котором надо же начать говорить.

А вот как замечательно Менделеев начинает свой очерк:

> Как рыба об лёд, испокон веков билась мысль мудрецов в своём стремлении к единству во всём, т. е. в искании «начала всех начал», но добилась лишь того, что всё же должна признавать нераздельную, однако и не сливаемую, познавательную троицу вечных и самобытных: вещества (материи), силы (энергии) и духа, хотя разграничить их до конца, без явного мистицизма, невозможно. Различение и даже противоположение, ещё нередко встречающееся в виде остатка от Средних веков, лишь материального от духовного или — что того менее обще — лишь покоя от движения, не выдержало пытливости мышления, потому что выражает крайность и, главное, потому, что покоя ни в чём, даже в смерти, найти не удаётся, а духовное мыслимо лишь в абстракте, в действительности же познаётся лишь чрез материально ощущаемое, т. е. в сочетании с веществом и энергиею, которая сама по себе тоже не сознаваема без материи, так как движение требует и предполагает движущееся, которое само по себе лишь мысленно возможно без всякого движения и называется веществом. Ни совершенно слить, ни совершенно отделить, ни представить какие-либо переходные формы для духа, силы и вещества не удаётся никому, кроме явных мистиков и тех крайних, которые не хотят ничего знать ни про что духовное: разум, волю, желания, любовь и самосознание. ◄●

4 [к с. 167]. ●► Ответ Ходорковского вызвал у меня сомнения, но возражать я не стал, заранее соглашаясь с тем, что в этой теме он компетентнее меня. Его подлинный ответ был более развёрнутым. Он тогда сказал примерно следующее: «Вы ведь не стояли рядом с американским конвейером, а я стоял. И видел, как это происходит. Рабочий на каждом месте имеет очень точную инструкцию типа „довернуть такую-то гайку“. Тут никакой квалификации не надо, надо только точно выполнять инструкцию». ◄●

5 [к с. 167]. ●●► Если бы наш разговор шёл в середине лета 2013 года, я привёл бы более удачный, нежели слесарь с кувалдой, пример на тему всесилия знаменитой русской пословицы *Сила есть* —

ума не надо. Актуальность её была подтверждена 2 июля 2013 года. Стартовавшая в тот день с космодрома Байконур ракета-носитель «Протон-М» с тремя российскими навигационными космическими аппаратами «Глонасс-М» упала на космодром на первой же минуте старта. Причиной стала неправильная установка датчиков угловых скоростей. Вот, что сообщает по этому поводу Лента.ру (http://lenta.ru/news/2013/07/18/usetheforce/):

> Пресс-служба Роскосмоса обнародовала заключение аварийной комиссии, из которого следует то, что все три датчика поставлены при сборке на место вверх ногами с применением силового воздействия. Подробности приведены на сайте федерального космического агентства.
>
> Заключение аварийной комиссии гласит, что ставшие причиной аварии датчики угловой скорости были поставлены на место с разворотом на 180 градусов за счёт силового воздействия.

Воображению читателя предоставим воспроизвести перед глазами картину, как датчики не желали влезать вверх ногами в заготовленные для них пазы, и как их туда запихивали «с применением силового воздействия». Возможно, всё же, обошлось без кувалды. (Возможно, впрочем, что и не обошлось. Вот что сказал по этому поводу подполковник ФСБ в запасе А. А. Ермолин, выступая 26.08.2013 в программе «Арсенал» на радиостанции «Эхо Москвы»: «...Сейчас забивают датчики молотками и „Протоны“ падают» (http://echo.msk.ru/programs/arsenal/1142000-echo/).

Интересно было бы узнать, а присутствовала ли на датчиках маркировка, указывающая, каким концом или боком их следует вставлять.

Однако, «разруха не в клозетах, а в головах», как говорил профессор Филипп Филиппович Преображенский доктору Ивану Арнольдовичу Борменталю. Провалы, постигшие российскую космическую отрасль в 2011 году наглядно это демонстрируют. Так, 9 ноября 2011 года потерпел неудачу запуск к Фобосу российской автоматической межпланетной станции Фобос-Грунт, которая должна была сесть на названный спутник Марса, провести там ряд исследований, а затем доставить образцы грунта Фобоса на Землю. Вот что писала по этому поводу известная американская газета Los Angeles Times в своей публикации от 29 ноября 2011 года, озаглавленной «Russia Mars probe failure underlined by successful U.S. launch»:

> The $167-million probe, launched Nov. 9, was intended as a major step back into exploration of the deeper cosmos by Russia's

proud space program. It was to land on the Martian moon Phobos next year, pick up samples of dust and deliver them back to Earth. After the probe separated from its main booster rocket, however, its engines failed to fire properly to set it on a path toward Mars, and it didn't respond to signals from ground control.

<...>

...Phobos-Ground added to a list of embarrassing space failures over the last year. On Dec. 5, three satellites failed to reach orbit after being erroneously loaded with excess fuel. Then, on Feb. 1, a military satellite failed to reach orbit and lost contact with ground controllers. Another satellite missed its orbit Aug. 18 because of a programming error. Less than a week later, on Aug. 24, the unmanned cargo ship Progress M-12M disintegrated just minutes into a flight to bring supplies and research equipment to the International Space Station. ◀●●

6 [к с. 174]. ●▶ Я не стал возражать Ходорковкому, оставив несогласие при себе. Но, конечно, я был с ним не согласен. Я не знаю, чему надо учить в школах, помимо счёта и грамоты. Полагаю, что и другие не знают, а те, кто думают, что знает, заблуждаются. ◀●

7 [к с. 174]. ●▶ И опять я не согласился с Ходорковским, но промолчал. Полагаю, что мнение о разрушении, вследствие репрессий и эмиграции, российского генофонда разделяется многими. Достаточно набрать в каком-нибудь поисковике два слова: «генофонд» и «репрессии». ◀●

Из книги «Что такое аксиоматический метод?»

§ 1. Что такое аксиомы. — § 2. Аксиомы Евклида. — § 3. Современный подход к аксиоматизации геометрии: аксиоматика Гильберта. — § 15. Аксиомы метрики и аксиомы меры. — Заключительные замечания. — Добавление от декабря 2013 года.

§ 1. Что такое аксиомы

Аксиоматический метод — это такой способ построения какой-либо математической теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *аксиомами*, а все остальные положения теории, называемые *теоремами*, доказываются на основе этих аксиом путём *чисто логических рассуждений*. Те выражения из предыдущей фразы, которые были выделены курсивом, а именно *аксиомы*, *теоремы* и *чисто логические рассуждения*, будут разъяснены далее.

Начнём с аксиом. Возникают естественные вопросы: что такое аксиомы? откуда они взялись? зачем они нужны? Чтобы ответить на них, нам придётся вступить в области, пограничные между математикой и философией.

В естественных науках многие факты обосновываются экспериментально, т. е. посредством проведения эксперимента (*экспериментом* называется научно поставленный опыт). Возьмём, например, такой медицинский факт: анальгин производит обезболивающее и жаропонижающее действие. Этот факт обосновывается многочисленными экспериментами: анальгин давали людям, имевшим повышенную температуру или испытывавшим боль, после чего температура у них понижалась, а боль уменьшалась. Или такой ботанический факт: деревья, имеющие хвою, имеют и шишки. Этот факт обосновывается многочисленными наблюдениями над хвой-

В. А. Успенский. Что такое аксиоматический метод?. — 2-е изд., испр. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 95 с.

ными деревьями. Или растворимость поваренной соли в воде — каждый может убедиться в этом на своём собственном опыте. В физике свойство равноускоренности свободного падения неоднократно проверялось открывшим это свойство Галилеем и его современниками.

Другое дело — теоремы геометрии. Предположим, что мы хотим обосновать тот факт, что у двух треугольников, у которых равны две стороны и угол между ними, равны и третьи стороны. Что мы должны делать? Конечно, мы можем поставить опыт: взять какие-либо два треугольника, удовлетворяющие сформулированному требованию, и убедиться в том, что их третьи стороны действительно равны. Однако может ли этот опыт служить достаточным обоснованием интересующего нас факта? А ну как равенство третьих сторон имеет место только для выбранной нами пары треугольников, а для других пар треугольников оно места не имеет? Будем продолжать наши эксперименты и брать всё новые и новые пары треугольников с равными углами, заключёнными между попарно равными сторонами. Каждый раз мы будем убеждаться, что и третьи стороны равны. Но ведь мы всё равно не сможем перебрать в с е треугольники, а тогда каждый раз будет оставаться сомнение: а вдруг для ещё не рассмотренных нами треугольников равенство третьих сторон не выполняется!

Наши сомнения совершенно законны, и их законность подкрепляется следующим рассуждением. Изменим условия, изначально налагаемые нами на треугольники, и вместо того, чтобы требовать равенства углов, расположенных м е ж д у попарно равными сторонами, будем требовать равенства углов, п р и л е ж а щ и х к соответствующим сторонам. Более точно, рассмотрим такое утверждение: «Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ сторона AB равна стороне $A'B'$, сторона AC равна стороне $A'C'$ и, кроме того, угол B равен углу B'; тогда сторона BC равна стороне $B'C'$». Это утверждение неверно, и мы приглашаем читателя убедиться в этом самостоятельно, найдя противоречащий пример, т. е. пару треугольников, для которой выполнены все условия сформулированного утверждения (они перечислены после слова «пусть»), но не выполнено его заключение (оно сформулировано после слова «тогда»). Однако легко может случиться, что такой противоречащий пример будет найден не сразу, и у многих испробованных пар треугольников, в которых равны углы, прилежащие к равным сторонам, третьи стороны этих треугольников также окажутся равными. А что если противоречащий пример (хотя он на самом деле существует) вовсе

не будет найден? Ведь тогда можно было бы сделать ошибочный вывод, что наше утверждение истинно! Проведённый анализ показывает, что надо быть очень осторожным при применении неполной индукции, т. е. перехода от частных примеров, не исчерпывающих в своей совокупности всех возможных случаев, к утверждениям общего характера.

Здесь у читателя может возникнуть законное недоумение. Ведь упомянутые выше выводы о свойствах анальгина, о наличии шишек у хвойных деревьев, о растворимости соли, о законе свободного падения — все эти выводы сделаны на основе ограниченного числа наблюдений, т. е. на основе той самой неполной индукции, которую мы только что вроде бы отвергли. Да, мы её отвергли — но только как средство для доказательств положений математики. Для естественных наук — таких, как медицина, биология, химия, физика — метод неполной индукции считается вполне приемлемым; более того, им без него не обойтись. Хотя, случается, он подводит. Так, почти 70 лет считалось непреложной истиной, что инертные газы не вступают ни в какие химические реакции и что химические соединения с их участием невозможны (отсюда и название *инертные*). Это положение было выведено методом неполной индукции. Автор этих строк, которого этой истине обучали в школе, помнит своё ощущение шока, когда в 1962 году было найдено соединение одного из таких газов с другими химическими элементами.

Что же касается математики, то её истины более незыблемы, чем истины медицины или химии, и в математике неполная индукция не работает.

Вернёмся, однако, к теореме о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними. Что же с нею делать? Перед нами выбор: или пытаться доказывать её, опираясь на ранее доказанные утверждения, или объявить её аксиомой, т. е. утверждением, не нуждающимся в доказательстве. Если несколькими строками выше читатель был вправе недоумевать, то теперь он вправе возмутиться. Что значит «объявить аксиомой»? Разве это в нашей власти? Да, в значительной степени в нашей власти, и чуть позже мы попытаемся это объяснить. Если же мы будем доказывать нашу теорему с помощью других, ранее доказанных теорем, а те, другие теоремы — с помощью третьих, и т. д., то ведь всё равно этот процесс не может продолжаться бесконечно. Значит, где-то придётся остановиться, т. е. какие-то предложения уже не доказывать, а принять их за аксиомы.

§ 2. Аксиомы Евклида

Необходимость аксиом была осознана ещё древними греками. Самое знаменитое сочинение мировой математики — написанный в III веке до н. э. древнегреческим математиком Евклидом и охватывающий всю современную ему математику трактат «Начала» — начинается так. Сперва идут определения, а сразу вслед за ними — аксиомы. Аксиомы у Евклида разбиты на два списка. Первый список состоит из пяти предложений, второй — из девяти. Лишь аксиомы второго списка названы в русском переводе трактата *аксиомами*, аксиомы же первого списка названы *постулатами*. Говоря о древних текстах, всегда надо точно указывать издание; вот издание, на которое мы здесь ссылаемся: Начала Евклида / Перевод с греческого Д. Д. Мордухай-Болтовскóго. — Книги I—VI. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. Приведём полностью постулаты и аксиомы из этого издания. Слова в квадратных скобках добавлены нами для ясности.

Постулаты

Допустим:

1. Что из всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. И что ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. И что из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.
4. И что все прямые углы равны между собой.
5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме] меньшие двух прямых [углов], то, неограниченно продолженные, эти прямые встретятся с той стороны, где [внутренние] углы [в сумме] меньше двух прямых [углов].

Аксиомы

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые [т. е. суммы] будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не содержат пространства.

Возникает естественный вопрос, почему одни предложения названы постулатами, а другие — аксиомами. Вопрос этот достаточно сложен. На примере приведённых двух списков можно увидеть некое различие между значениями слов «аксиома» и «постулат» — но различие столь тонкое, что нам, для целей нашего изложения, нет нужды принимать его во внимание; к тому же это различие не всегда ясно прослеживается. В современном языке термины «аксиома» и «постулат» считаются синонимами. Например, *пятый постулат* Евклида часто называют *аксиомой о параллельных*. (В более строгой терминологии **аксиомой о параллельных** называется другое утверждение, а именно такое: *через точку, лежащую вне заданной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной исходной*. Это утверждение оказывается равносильным пятому постулату.) Мы тоже будем считать термины «аксиома» и «постулат» синонимами, а если и будем называть одни формулировки Евклида постулатами, а другие — аксиомами, то только потому, что у них такое исторически сложившееся название.

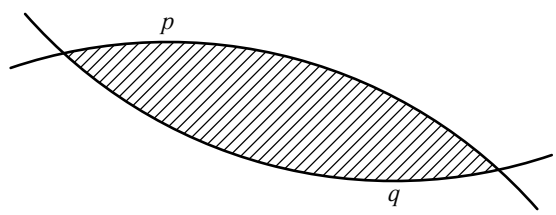
Кроме того, надо иметь в виду следующее. Текст Евклидовых «Начал», как и подавляющее большинство других древних текстов, не сохранился в виде рукописи, написанной самим автором. До наших дней дошли лишь копии, причём копии, сделанные не с оригинального манускрипта, а с других копий. Изготовление таких копий требовало достаточно высокой, по тем временам, математической квалификации, и этот высокий уровень древних переписчиков и издателей имел свою оборотную сторону: иногда они «улучшали» и дополняли Евклида — в особенности же по части постулатов и аксиом. Поэтому некоторые учёные полагают, что не все те аксиомы и постулаты, которые приводятся в современных изданиях «Начал», действительно присутствовали в исходном тексте Евклида. Некоторые даже считают, что у Евклида вовсе не было аксиом второго списка (они-то и называются в переводах аксиомами), а из пяти постулатов первого списка Евклиду принадлежало лишь первые три. А некоторые публикаторы, оставляя в списке постулатов первые три, оставшиеся два переносят в аксиомы; они же добавляют в аксиомы ещё одну: «И если от неравных отнимаются равные, то остатки будут не равны». Всего тогда в списке оказывается 12 аксиом, среди которых аксиома о параллельных — предпоследняя, отчего её иногда называют *одиннадцатой аксиомой*.

Мы привели постулаты и аксиомы Евклида по двум причинам. Во-первых, интересно посмотреть, как формулировали свои мысли математики далёкого прошлого. Во-вторых, поучительно сравнить

формулировки Евклида с современными формулировками аксиом геометрии.

Но сперва четыре замечания о Евклидовых формулировках.

Замечание 1. Принято считать, что когда Евклид говорит о равенстве геометрических фигур, он имеет в виду их равновеликость. А девятая аксиома Евклида отражает тот факт, что через две точки может проходить только одна прямая, т. е. что для двух прямых p и q невозможно расположение, показанное на рисунке (если бы такое расположение было возможно, Евклид сказал бы, что линии p и q «содержат пространство» — а именно то «пространство», которое заштриховано на рисунке).



Девятая аксиома Евклида утверждает невозможность такого взаимного расположения прямых p и q.

Замечание 2. Некоторые из аксиом (например, 8-я) не используются Евклидом в его последующем изложении.

Замечание 3. Напротив, изложение Евклида опирается на некоторые положения, не входящие в списки постулатов и аксиом. Так, бросается в глаза, что в эти списки не входят аксиомы стереометрии, хотя теоремы стереометрии в трактате Евклида имеются. Но даже если ограничиться теоремами планиметрии, то Евклид часто опирается не только на аксиомы, но и на непосредственную геометрическую наглядность. Например, в аксиомах Евклида ничего не говорится о таких важных геометрических понятиях, как 'располагаться между', 'располагаться по одну сторону' и т. п., хотя использование этих понятий необходимо при доказательстве многих теорем.

Замечание 4. Некоторые формулировки при внимательном анализе оказываются неполными или непонятными. Но, может быть, всё дело в том, что мы пока ничего не сказали об определениях Евклида? Может быть, если принять во внимание определения, формулировки станут полными и понятными? Обратимся к определениям.

Как мы отметили ранее, трактат Евклида начинается с определений. Вот некоторые из них.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия же — длина без ширины.
4. Прямая линия есть та, которая равно расположена к точкам на ней.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
7. Плоская же поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.

С современной точки зрения это всё не определения таких понятий, как 'точка', 'линия', 'прямая', 'поверхность', 'плоскость', а всего лишь пояснения этих понятий.

Впрочем, у Евклида встречаются и такие формулировки, которые следует признать определениями и с современной точки зрения. Таково, например, его 10-е определение, в котором определяются понятия 'прямой угол' и 'перпендикуляр':

10. Когда же прямая, восставленная на другой прямой, образует рядом [смежные] углы, равные между собой, то каждый из [этих] равных углов есть прямой, а восставленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восставлена.

Меньше всего, однако, мы хотели бы создать впечатление, что Евклид и другие древние авторы заслуживают лишь критики или снисходительного похлопывания по плечу: вот, дескать, какие у них неточные и примитивные формулировки, только в отдельных случаях поднимающиеся до нашего просвещённого уровня! Совсем наоборот, достойно удивления и восхищения то обстоятельство, что более двух тысяч лет назад мыслящие люди ставили перед собою задачу заложить логический фундамент математики (и блестяще решили эту задачу!). Этот факт служит опровержением известного тезиса, что движущей силой развития науки являются исключительно практические потребности: ведь и уровень строгости, и само содержание трактата Евклида далеко превосходили практические потребности того времени. Что же касается формулировок, которые кажутся нам сейчас странными, расплывчатыми, устаревшими, то такими же (или даже худшими) покажутся, надо думать, современные формулировки нашим потомкам — причём не через две тысячи лет, а много раньше, потому что человеческая цивилизация эволюционирует с ускорением.

§ 3. Современный подход к аксиоматизации геометрии: аксиоматика Гильберта

В названии этого параграфа два учёных слова: «аксиоматика» и «аксиоматизация». *Аксиоматика*, или *аксиоматическая система*, — это то же самое, что система аксиом. А *аксиоматизация* какой-либо теории — это процесс создания аксиоматики для этой теории.

Только что мы познакомились с древнейшей аксиоматической системой — системой геометрических аксиом (куда мы включаем и постулаты!) Евклида. Посмотрим теперь, как устроены современные системы аксиом геометрии. Мы сделаем это на примере наиболее известной из таких систем. Она была создана на рубеже XIX и XX веков великим немецким математиком Давидом Ги́льбертом и называется поэтому *системой аксиом Гильберта*. На этом примере мы сможем увидеть и проанализировать многие свойства, характерные для аксиоматических систем вообще.

Чтобы устройство системы аксиом Гильберта, да и любой системы аксиом геометрии, было более понятным, — важное предварительное замечание. В аксиомах геометрии встречаются те или иные геометрические понятия — такие, как, например, 'угол' (для обозначения понятий принято использовать так называемые *одинарные кавычки* — такие, какими мы только что окружили слово «угол»). Чтобы понимать смысл аксиомы, мы должны иметь представление о смысле участвующих в аксиомах понятий — говоря попросту, понимать, что эти понятия означают. Но как можно составить представление о том или ином понятии? Есть два основных способа, один из которых мы условно назовём *наглядным*, а другой, столь же условно, *дефиниционным* (от латинского существительного «definitio», произносимого как «дэфини́цио» и переводящегося на русский как «определение»).

При наглядном способе понятие усваивается на примерах, при дефиниционном — с помощью определений. Скажем, усвоение понятий 'стол' и 'корова' происходит на основе того, что человеку показывают достаточное количество столов и коров. Таким же наглядным способом могут усваиваться и понятия, выражающие свойства, такие, например, как 'металлический' или 'фиолетовый'; для этого нужно предъявить достаточное количество металлических предметов и предметов фиолетовой окраски. Аналогичным образом человек обучается понятиям, выражающим положение в пространстве одних предметов относительно других, таких как 'слева от', 'справа от', 'спереди', 'сзади', 'над', 'под', 'на', 'в', 'между' и т. п.

А вот представление о понятиях 'металлический стол' или 'фиолетовая корова' можно получить, и не прибегая к примерам (в случае фиолетовой коровы это было бы и затруднительно). Здесь годится способ дефиниционный. Понятия 'металлический стол' и 'фиолетовая корова' можно не показать, а определить: металлический стол — это такой стол, который является металлическим; фиолетовая корова — это такая корова, которая является фиолетовой.

Наглядным способом происходит и первое знакомство с такими математическими понятиями, как, скажем, шар или прямая. Однако здесь надо проявить осторожность и понимать, что арбуз в меньшей степени шар, чем волейбольный мяч, а мяч — в меньшей степени шар, чем биллиардный шар или шарик подшипника: ведь, строго говоря, геометрических шаров в природе не бывает, а бывают лишь предметы, приближающиеся по форме к геометрическому шару. С прямыми дело обстоит ещё сложнее: ведь прямая бесконечна, а все примеры, которые мы можем предъявить, будь то линия, начерченная на песке или бумаге, или натянутая нить, или граница между стеной и потолком — все они демонстрируют нам (опять-таки, разумеется, приблизительно) лишь ограниченные, конечные участки прямых линий, т. е. тó, что на языке современной геометрии называется отрезками. Отметим, что в трактате Евклида термин «прямая» обозначает не всю бесконечную прямую линию, а именно отрезок. Представление о бесконечности было, по-видимому, чуждо античной математике. Например, утверждение о бесконечности множества простых чисел выглядит у Евклида так: простых чисел больше, чем в любом предъявленном списке таковых (предложение 20 книги IX «Начал»). Для возникновения представления о бесконечной прямой одного только наглядного способа недостаточно — требуется ещё воображение. От зарождения геометрии прошли тысячелетия, пока люди осознали, что мы не можем непосредственно наблюдать точки, прямые, плоскости, углы, шары и прочие геометрические объекты и потому предметом геометрии служит не реальный мир, а мир воображаемый, который населён этими идеальными геометрическими объектами и который всего лишь похож на мир реальный (как говорят философы, является *отражением* реального мира).

Таким образом, к геометрическим понятиям наглядный способ применим лишь с оговорками. Посмотрим, как работает дефиниционный способ. Возьмём для примера понятие угла. Можно объяснять это понятие, демонстрируя конкретные углы, т. е. применяя наглядный способ. А можно воспользоваться способом дефиниционным, т. е. попытаться определить, что такое угол. Вот определение: угол есть

совокупность (другими словами — множество) двух лучей, исходящих из одной и той же точки *O*. Но тогда надо знать, что такое «луч, исходящий из точки *O*». Это понятие, в свою очередь, определяется как множество, состоящее из самой этой точки *O* и всех точек, расположенных по одну и ту же сторону от этой точки. Но что́ значит, что две точки лежат «по одну и ту же сторону» от точки *O*? Это значит, что эти две точки и точка *O* лежат на одной и той же прямой, причём так, что точка *O* не находится между этими двумя точками. Но тогда мы должны сперва знать, что означает, что одна точка находится «между» двумя другими.

Итак, при дефиниционном способе одни понятия определяются через другие, другие через третьи, и т. д. Но ведь мы не можем продолжать этот процесс бесконечно. А значит, на каких-то геометрических понятиях мы вынуждены остановиться и далее их не определять. Эти понятия, которые уже не имеют определения, называют ***неопределяемыми*** или ***исходными***. Но если исходные понятия не могут быть определены, то, спрашивается, откуда же мы можем знать, что они означают? Казалось бы, ответ очевиден: мы должны использовать наглядный способ и познать эти понятия из непосредственного опыта, иными словами — усвоить их на примерах. Однако несколькими строками выше было отмечено, что на примерах можно получить хотя и близкое, но всё-таки лишь приблизительное представление о том или ином геометрическом понятии. А математика — наука точная, приблизительность ей не к лицу, и математик должен совершенно точно знать, с каким именно понятием он оперирует. Вроде бы возник тупик. Аксиоматический метод как раз и предлагает выход из этого тупика.

Чтобы понять этот выход, ещё раз осмыслим встающую перед нами проблему. Мы хотим рассуждать о некоторых понятиях, причём рассуждать совершенно точно. Но точности наших рассуждений мешает то обстоятельство, что эти понятия не имеют определений. Тогда поступим так. Попытаемся выписать основные свойства этих понятий, а именно те свойства, на которые мы будем опираться в наших рассуждениях. Дадим себе обещание не использовать в рассуждениях никаких иных свойств, кроме тех, которые внесены нами в наш список основных свойств. Каждый отдельный элемент списка, в котором фиксированы какие-то определённые свойства рассматриваемых понятий, будем называть ***аксиомой***, сам же список — ***системой аксиом***. Рассуждения же, которые не опираются ни на какие свойства понятий, кроме явно указанных в аксиомах, — это и есть те самые ***чисто логические рассуждения***, которые упоминались в начале § 1.

Очевидно, что построению системы аксиом должно предшествовать составление перечня исходных, или неопределяемых, понятий. Надо подчеркнуть, что составление такого перечня во многих чертах произвольно и зависит от вкуса составителя. Например, можно взять за исходное понятие понятие отрезка (как это по существу и делает Евклид) и с его помощью определять понятие прямой, а можно, напротив, взять за исходное понятие понятие прямой (как это и делается в большинстве современных аксиоматических систем), а через него уже определять понятие отрезка. Говоря о трёх точках O, A, B некоторой прямой, мы определили (см. выше) понятие 'лежать по одну сторону от O' через понятие 'находиться между A и B'. А могли бы наоборот, следующим образом определить второе понятие через первое: 'точка Q находится между точками A и B' означает, что A и B не лежат по одну сторону от Q. Таким образом, по желанию составителя системы аксиом геометрии в качестве исходного можно принять одно из двух понятий: 'находиться между' или 'лежать по одну сторону'.

Для своей системы аксиом геометрии Гильберт выбирает восемь исходных, или неопределяемых, понятий: *точка*, *прямая*, *плоскость*, *отношение связи точки и прямой*, *отношение связи точки и плоскости*, *отношение 'находиться между'* (для точек), *отношение равенства отрезков*, *отношение равенства углов*. Список же своих аксиом он для удобства изложения разбивает на группы.

Гильбертовы аксиомы первой группы говорят о способах, которыми прямые и плоскости связываются, или соединяются, или сочетаются, с точками. Поэтому их называют *аксиомами связи*, или *аксиомами соединения*, или *аксиомами сочетания*. Наглядно мы себе представляем, что́ значит, что какая-то точка лежит на какой-то прямой или на какой-то плоскости. Это соотношение между точкой A и прямой или плоскостью p словесно можно выразить по-разному: «A лежит на p», «p проходит через A», «A соединяется (сочетается) с p». Все эти взятые в кавычки обороты синонимичны, они выражают один и тот же факт. Таким образом, слова разные, а понятие одно и то же; его можно называть и 'соединяться', и 'сочетаться', и 'лежать на', и 'проходить через'.

В обычной, «школьной», геометрии прямая рассматривается как множество точек. В аксиоматической геометрии прямые — это просто такие особые вещи, некоторые из которых связаны (соединяются, сочетаются и т. д.) с некоторыми другими вещами, точками. Но каждой прямой отвечает *множество точек, лежащих на этой прямой*. Вместо того, чтобы говорить длинно «точка A принадлежит мно-

жеству точек, лежащих на прямой p» говорят короче: «точка A принадлежит прямой p» (и эта фраза выражает то же, что и фраза «p проходит через A»). Аналогично, фразу «точка A принадлежит множеству точек, лежащих на плоскости π» сокращают до фразы: «точка A принадлежит плоскости π» (и эта фраза выражает то же, что и фраза «π проходит через A»). Поэтому отношения связи называют также *отношениями принадлежности*, а аксиомы связи — *аксиомами принадлежности*.

< . . . . . >

§ 15. Аксиомы метрики и аксиомы меры

Знаете ли Вы, уважаемый читатель, что такое расстояние между двумя точками? Ну конечно же, знаете — это знают все: надо соединить эти точки отрезком и измерить его длину. Очень хорошо. Значит, когда говорят, что от Москвы до Владивостока столько-то километров, мысленно соединяют эти города отрезком прямой... Нет, тут что-то не так: ведь ввиду шарообразности Земли этот отрезок пройдёт под землёй. А расстояния между городами всё-таки измеряются по поверхности Земли. Значит, расстояние между Москвой и Владивостоком надо мерить так: натянуть между этими двумя городами нитку по глобусу, измерить её длину и затем умножить на масштаб. На более научном языке тот же способ излагается так: находим дугу большого круга, соединяющую Москву и Владивосток, и измеряем её. (Для простоты изложения мы принимаем, что Земля — это в точности шар; именно тогда можно говорить о «больших кругах», т. е. о тех окружностях на поверхности Земли, центры которых совпадают с центром Земли.) Допустим, что мы нашли расстояние между нашими городами именно таким способом (можно даже внести поправку на отклонение формы Земли от шара). Но если мы теперь откроем железнодорожный справочник, то мы увидим совсем другое расстояние — и это понятно, поскольку там расстояние указывается в километрах железнодорожного пути. А в справочнике автомобильных дорог — ещё одно расстояние, в километрах автодорог[1].

Итак, мы обнаружили четыре разных расстояния между Москвой и Владивостоком. Которое же из них истинное? А ведь есть

[1] Впрочем, существует ли автомобильная дорога от Москвы до Владивостока, да ещё включённая в справочник — это автору не известно.

ещё и другие способы измерения расстояния. Всем известно, что капитаны добрых старых времён измеряли путь по пучинам вод не иначе, как количеством выкуренных трубок. Вот более серьёзный пример: представим себе неоднородное прозрачное вещество, внутри которого распространяется свет. Тогда расстояние между двумя точками уместно измерять временем прохождения света от одной точки до другой, и это время будет зависеть не только от геометрического расстояния между точками, но и от меняющихся на его пути оптических свойств среды.

Повторим вопрос: какой же из способов измерения расстояния приводит к истинному расстоянию? Ответ: все. Просто мы имеем дело с разными представлениями о расстоянии или, как говорят, с разными *метриками*.

Вот, скажем, в случае Москвы и Владивостока мы имели четыре разные метрики: 1) *евклидову метрику*, когда расстояние между двумя точками пространства измеряется длиной соединяющего их отрезка, пусть даже и протыкающего насквозь нашу планету; 2) *сферическую метрику*, когда расстояние между двумя точками мерится по поверхности сферы; 3) *железнодорожную метрику*, когда расстояние между двумя точками измеряется длиною рельсового пути между ними; 4) *автомобильную метрику*, когда расстояние измеряется длиной автомобильного пути.

А давайте подумаем, можно ли расстояние между двумя точками туристского маршрута измерять временем перехода. Если мы так сделаем, то расстояние от точки A, лежащей под горой, до точки B, расположенной на горе, может оказаться больше, чем расстояние от B до A, что как-то нехорошо. (По той же причине нельзя мерить расстояние количеством затраченного топлива.) В наших предыдущих примерах такого неприятного эффекта не наблюдалось, и расстояние было симметричным. А вот между площадями Москвы измерять расстояние при помощи пробега автомобиля нельзя: такое расстояние оказалось бы несимметричным (ввиду наличия улиц с односторонним движением и вызванной этим необходимости объездов).

Можно попытаться выделить те свойства, которые присущи всем мыслимым способам измерения расстояния. Таких свойства оказалось четыре. Во-первых, расстояние является действительным числом, и это число не может быть отрицательным. Во-вторых, расстояние от любого места до этого же самого места равно нулю, а расстояние между различными местами не может быть равно нулю. В-третьих, расстояние от одного места до второго должно быть равно расстоянию от второго места до первого (свойство симметричности расстояния).

В-четвёртых, мы не можем сократить расстояние от *A* до *B*, если по дороге зайдём в пункт *C*. Все эти свойства оформляются в виде так называемых ***аксиом метрики***. А ***метрикой*** называется функция, относящая двум объектам расстояние между ними.

<...> Итак, мы познакомились с различными способами измерения расстояния; все они подчиняются аксиоматике метрики. Но бывают и совсем другие измерения. Так, размер комнаты обычно измеряют площадью её пола. Однако если нужно клеить обои, то важнее другое измерение — площадь стен. Немаловажное значение имеет и объём комнаты. Когда перемещают товар, то иногда его мерят по весу (столько-то тонн угля), иногда по объёму (столько-то кубометров газа), а в иных случаях — скажем, при таможенных расчётах — и по стоимости (на такую-то сумму денег). А сельскохозяйственные угодья можно измерять количеством снимаемого урожая. Все эти способы подчиняются ***аксиомам меры***.

Представим себе, что у нас есть нечто, что может делиться на части. Это может быть проволока, или жилой фонд, или какой-то товар, или лесной массив. Далее, каждой части мы относим некоторое число, называемое ***мерой*** этой части. Например, в случае проволоки мерой части, т. е. куска проволоки, может служить её длина или вес — но мы должны остановиться на одном из этих вариантов. В случае жилого фонда часть состоит из какого-то количества комнат или квартир, а мерой может служить или, как обычно, площадь, или, скажем, объём (что́ на практике, кажется, не встречается). В случае товара мерой части может служить или её вес, или объём, или цена — но, конечно, мы должны выбрать что-нибудь одно. В случае леса частями являются его участки, а мерой может служить количество кубометров вырубленной на нём древесины — или, что более приятно в экологическом отношении, цена, вырученная за собранные на этом участке шишки.

Во всех этих случаях мера каждой части есть неотрицательное действительное число. Очевидны основные свойства меры. Ну, например, мера пустой части должна быть равна нулю. Но это не главное свойство меры. Главное свойство меры состоит в её ***аддитивности***. Это значит, что при сложении частей меры должны тоже складываться; разумеется, слагаемые части должны при этом не перекрываться. Достаточно потребовать, чтобы это правило действовало для сложения двух частей, т. е. чтобы выполнялось следующее: если две неперекрывающиеся части соединяются в одну, то мера образовавшейся суммарной части должна быть равна сумме мер тех двух частей, из которых эта суммарная часть составлена. А тогда

это свойство аддитивности будет автоматически распространяться на сложение любого конечного числа неперекрывающихся частей. Действительно, меру части, полученной слиянием частей A, B и C, можно вычислить так: сперва объединить A и B, мера объединённой части будет равна сумме мер частей A и B; а затем к этой объединённой части присоединить C; в результате окажется, что результирующая мера равна сумме мер всех трёх частей. И так — для сложения любого конечного числа частей. Поэтому изложенный вариант свойства аддитивности называется свойством ***конечной аддитивности***.

Однако для развития теории меры свойство конечной аддитивности часто оказывается недостаточным, а востребованным оказывается его обобщение на случай бесконечного числа слагаемых. Чтобы мы имели дело с полноценной мерой, нужно чтобы выполнялось следующее правило ***счётной аддитивности***: если A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ... есть последовательность неперекрывающихся частей и мы соединили их всех в новую часть, то мера этой образовавшейся суммарной части равна сумме ряда, составленного из мер всех отдельных членов нашей последовательности. Заметим, что свойство конечной аддитивности вытекает из свойства счётной аддитивности. Это обосновывается следующим простым рассуждением. Сумма двух частей A и B равна сумме членов бесконечной последовательности, у которой первые два члена совпадают соответственно с A и B, а остальные члены совпадают с пустой частью. Составленный из мер числовой ряд будет выглядеть так: мера части A плюс мера части B плюс нули, нули, нули... Сумма этого ряда как раз и будет равна сумме мер частей A и B.

Мы уже почти готовы дать точное определение меры. Чтобы перейти на математический уровень, вместо слова «часть» будем говорить слово «подмножество». Когда говорят о подмножествах, всегда имеют в виду некоторое универсальное множество, чьими частями и являются рассматриваемые подмножества. В случае проволоки таким множеством будет множество её точек; это если игнорировать её толщину. (А если не игнорировать — множество линейных координат поперечных срезов; линейная координата — это расстояние от начала проволоки до среза.) Всякий кусок проволоки можно рассматривать как подмножество такого множества. В случае жилого фонда универсальным множеством будет множество всех точек пространства, принадлежащих включённым в этот фонд комнатам и квартирам. В случае товара универсальным множеством служит множество всех единиц, из которых состоит товар. Например,

в случае мебели — это предметы мебели, а в случае угля или газа — материальные точки, т. е. мельчайшие частицы, из которых состоит топливо. В случае лесного массива универсальным множеством можно считать множество принадлежащих этому массиву деревьев.

Перед окончательным определением — ещё два примера.

Представим себе пространство, заполненное материальными телами, имеющими массу; тогда, очевидно, имеет смысл говорить о суммарной массе, заключённой в данном объёме пространства, — а более общо, в данном множестве точек пространства. Мы получаем функцию, относящую некоторым множествам точек пространства их (множеств) массу. Эта функция является мерой. Универсальное множество здесь — множество всех точек пространства.

Другой пример — с тем же универсальным множеством. Поставим в соответствие данному объёму пространства вероятность того, что интересующее нас событие происходит именно в пределах этого объёма. Более общо, припишем некоторым множествам вероятность того, что событие происходит в одной из точек этого множества. Функция, относящая множеству соответствующую вероятность, является мерой. Этот простой пример позволяет понять, почему вся современная теория вероятностей (следуя высказанному в начале 30-х годов предложению великого математика Колмогорова) имеет своим фундаментом теорию меры.

Мера есть функция, аргументами которой служат подмножества универсального множества. Не предполагается, что мера есть у всякого подмножества; те подмножества, у которых она есть, называются *измеримыми*. Скажем, в случае товара, при измерении его по стоимости, не всякое собрание единиц этого товара можно считать товаром, имеющим стоимость. Даже газ должен поступать достаточно компактными объёмами; если мы, скажем, мысленно отберём в рассматриваемую часть каждую десятую молекулу газа, то полученное подмножество молекул будет слишком разрежённым, чтобы признать его частью того самого газа — не в физическом, а в потребительском смысле.

<...> В аксиоматиках метрики и меры участвовало, помимо исходных (неопределяемых) понятий этих аксиоматик, также и понятие действительного числа. <...> Возможны два подхода к введению в рассмотрение действительных чисел. При одном подходе мы их строим (используя в качестве строительного материала натуральные числа), при другом — определяем аксиоматически. Если мы выбираем второй подход, то в систему аксиом как метрики, так и меры должны быть включены и аксиомы действительных чисел.

Заключительные замечания

Во всех рассмотренных нами системах аксиом свободно употреблялись понятия множества, функции и натурального числа. Иногда эти понятия были упрятаны внутрь других. Так, использовавшееся понятие последовательности содержит внутри себя понятия натурального числа и функции: ведь последовательность это не что иное, как функция, определённая на натуральном ряду. Мы не включали понятия множества, функции и натурального числа в наши списки исходных, неопределяемых понятий на том основании, что относили их к тому языку, на котором мы разговариваем. Точнее сказать — к логике этого языка. Однако пользование логикой — а лучше сказать тем, что мы считаем логикой, — языка без каких-либо ограничений приводит к парадоксам. Удивляться этому особенно не приходится, потому что ведь логика языка возникла и развивалась, исходя, прежде всего, из бытовой практики, а потом уже стала, не вполне законно, применяться к сложным математическим образованиям.

Мы оказали бы дурную услугу читателю, призвав его усомниться в существовании натуральных чисел. Но всё же полезно задуматься над тем, что́ значит, что существует какое-нибудь очень большое число — например, число, превосходящее количество элементарных частиц в видимой Вселенной. А существование натурального ряда — т. е. совокупности всех натуральных чисел — вызывает ещё больше непростых философских вопросов.

Можно потребовать, чтобы и такие фундаментальные понятия математики, как понятия множества и натурального числа, определялись аксиоматически. Однако задача аксиоматического определения фундаментальных понятий таит в себе ловушки и опасности. Это уже совершенно другая и более сложная тема, относящаяся к компетенции математической логики.

Добавление от декабря 2013 года

Бывает, однако, и так, что одна только постановка задачи о создании системы аксиом для какой-либо отрасли знания встречается в штыки. Подтвердим сказанное эпизодом из истории математики.

Три математика играли в этом эпизоде главные роли. Это Давид Гильберт (*David Hilbert*; 23.01.1862—14.02.1943) — немецкий математик-универсал, внёсший значительный вклад в развитие многих областей математики. В 1910—1920-е годы (после смерти Анри Пуанкаре) Гильберт был признанным мировым лидером математиков (так его характеризует русскоязычная версия Википедии). Это Андрей Андреевич Марков-старший (2(14).06.1856—20.07.1922) — выдающийся российский математик, один из классиков теории вероятностей, в каковой ему принадлежит понятие марковской цепи и соответствующей теории; отец Андрея Андрееича Маркова-младшего (9(22).09.1903—11.10.1979), также выдающегося математика и также классика, но в другой области — в математической логике и в теории алгоритмов. И это Андрей Николаевич Колмогоров (12(25).04.1903—20.10.1987) — один из крупнейших математиков XX века, в отдельные годы многими воспринимавшийся как первый математик мира. (Когда выдающийся бельгийский математик Пьер Делинь, впоследствии виконт, приехал в Россию и увидел Колмогорова, он сказал: «Это как если бы я увидел живого Пуанкаре».)

Теперь послушаем рассказ петербургского академика-математика Владимира Ивановича Смирнова (1887—1974), чьё имя носит сейчас НИИ математики и механики Санкт-Петербургского государственного университета. В 1907—1909 годах он был студентом этого (в те годы Императорского Санкт-Петербургского) университета.

> А знаете, у кого я слушал курс теории вероятностей? У самого Андрея Андреевича Маркова (старшего). О, это был человек крутого нрава! Он начал свою первую лекцию так: «Господа! Некто Гильберт недавно выдвинул перед математиками всего мира 23 задачи, объявив их почему-то наиболее важными. И среди них имелось предложение переделать теорию вероятностей на аксиоматической основе. К сожалению, наше математическое общество сочло возможным согласиться с господином Гильбертом и рекомендовало вниманию своих членов все без исключения придуманные им задачи. В знак протеста я немедленно вышел из этого общества!». Здесь Андрей Андреевич медленно обвёл

глазами аудиторию и, немного помолчав, сказал: «А теперь приступим к делу».

(*В. В. Новожилов*. «Воспоминания. В. И. Смирнов» // Вопросы механики сплошной среды. — Л.: Судостроение, 1989. — С. 384—385.)

А теперь посмотрим, что пишет Википедия:

> **Проблемы Гильберта** — список из 23 кардинальных проблем математики, представленный Давидом Гильбертом на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году[2]. Тогда эти проблемы (охватывающие основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, топологию, алгебраическую геометрию, группы Ли, вещественный и комплексный анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и теорию вероятностей, а также вариационное исчисление) не были решены. На данный момент решены 16 проблем из 23. Ещё две не являются корректными математическими проблемами (одна сформулирована слишком расплывчато, чтобы понять, решена она или нет, другая, далёкая от решения, — физическая, а не математическая). Из оставшихся пяти проблем две не решены никак, а три решены только для некоторых случаев.

Каждой из 23 проблем Гильберт посвятил особый раздел своего текста. «Предложение переделать теорию вероятностей на аксиоматической основе», коего негодующим упоминанием открыл свой курс лекций А. А. Марков, вошло как часть в Шестую проблему; посвящённый ей раздел озаглавлен «Математическое изложение аксиом физики». Воспроизведём первый абзац этого раздела:

> С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача *об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика.*
>
> (Проблемы Гильберта: Сборник / Под общ. ред. П. С. Александрова. — М.: Физматлит, 1969. — С. 34.)

Задача математического изложения аксиом физики (без теории вероятностей, которую вскоре из физики исключили) была признана слишком расплывчатой и, вообще, не относящейся к математике.

[2] Доклад Гильберта назывался «Математические проблемы» и состоялся 8 августа. — *В. У.*

Что же касается попыток аксиоматизировать теорию вероятностей, то таковые стали появляться с начала XX века. Первая аксиоматическая система для теории вероятностей принадлежит Сергею Натановичу Бернштейну (1880—1968), одному из крупнейших российских[3] математиков XX века[4]. Общепринятой в настоящее время аксиоматикой для математического описания теории вероятностей является аксиоматика Колмогорова, составленная в рамках теоретико-множественной концепции. Её первоначальный вариант был предложен её автором в статье 1929 года[5], окончательная версия — в книге «Основные понятия теории вероятностей», написанной Колмогоровым на немецком языке и вышедшей в Берлине в 1933 году[6]. Эта 62-страничная книга постепенно произвела революцию в теории вероятностей, уложив её в рамки теоретико-множественной концепции при полном сохранении связи с действительностью[7]. Тем самым аксиоматика Колмогорова позволила придать теории вероятностей стиль, принятый в современной математике.

---

[3] Возможно, более справедливым было бы не ограничивать словом «российских» значение Бернштейна в математике.

[4] *С. Н. Бернштейн*. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщения Харьковского математического общества. — Т. 15. — Харьков, 1917. — С. 209—274; *С. Н. Бернштейн*. Теория вероятностей. — 4-е изд., доп. — М.—Л.: Гостехиздат, 1946.

[5] *А. Н. Колмогоров*. Общая теория меры и исчисление вероятностей // Труды Коммунистической академии. Математика. — Т. 1. — М., 1929. — С. 8—21.

[6] *A. Kolmogoroff*. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Berlin: Julius Springer, 1933. — 62 s. На русском языке книга впервые вышла в 1936 году и впоследствии переиздавалась на русском и других языках.

[7] Отрыв от действительности был бы неприемлем для Колмогорова, о чём свидетельствует его фраза из письма к знаменитому французскому математику Фреше (Maurice René Fréchet, 1878—1973) от 3 августа 1939 года:

> Вы правы, приписывая мне мнение, что формальная аксиоматизация должна быть сопровождаема анализом её реального смысла.
>
> (http://www.probabilityandfinance.com/articles/04.pdf. — Appendix A.2. — P. 66.)

Заметим, что § 2 главы I колмогоровских оснований теории вероятностей озаглавлен «Отношение к данным опыта».

Колмогоров

Колмогоров Андрей Николаевич, р. 25.04.1903 н. ст. (12.04.1903 ст. ст.) в Тамбове, ум. 20.10.1987 в Москве, — российский учёный, оказавший влияние на развитие ряда разделов математики (в том числе математической логики), её философии, методологии, истории и преподавания, а также внёсший значительный вклад в кибернетику, информатику, логику, лингвистику, историческую науку, гидродинамику, небесную механику, метеорологию, теорию стрельбы и теорию стиха. Действительный член Академии наук СССР (1939); почётный член многих зарубежных академий и научных обществ.

Колмогоров окончил Физико-математический факультет Московского университета (1925) и аспирантуру там же (1929); во время обучения был учеником Н. Н. Лузина. Первые научные работы — одну по истории Новгорода (опубликована в 1994 году) и другую, математическую (опубликована в 1987 году), — выполнил в январе 1921 года. Первая научная публикация — в 1923 году. С 1931 года Колмогоров состоял профессором Московского университета, где внёс выдающийся вклад в организацию математического образования. В МГУ Колмогоров создал и первым возглавил кафедру теории вероятностей (1935), лабораторию статистических методов (1963), кафедру математической статистики (1976); с 1980 года до конца жизни — зав. кафедрой математической логики. В Математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР Колмогоров с 1939 по 1960 год заведовал отделом теории вероятностей, а с 1983 года до конца жизни — отделом математической статистики и теории информации.

Колмогоров получил фундаментальные математические результаты в области теории вероятностей, математической статистики, теории множеств, теории функций, топологии, математической логики, теории алгоритмов, теории информации, теории динамических систем.

Опубликовано в книге: Новая философская энциклопедия: В 4 т. — Т. 2. — М.: Мысль, 2001. — С. 272—274.

Научное наследие Колмогорова весьма обширно; в библиографию к данной статье включены лишь сочинения, имеющие философскую составляющую.

Мировоззрение Колмогорова было последовательно материалистическим. Центральным для него был вопрос о соотношении математических представлений с реальной действительностью. Для философии и методологии математики огромное значение имела статья Колмогорова «Математика» в 1-м (1938) и 2-м (1954) изданиях Большой Советской Энциклопедии. Эта статья, перепечатанная также в сборнике статей Колмогорова «Математика в её историческом развитии», содержит оригинальную периодизацию истории математики, анализ предмета и метода математики и её места в системе наук, а также специальный раздел, посвящённый вопросам обоснования математики. В других статьях названного сборника Колмогоров исследует влияние Ньютона и Лобачевского на формирование математического мышления. В трудах Колмогорова вскрыты как внешние, так и внутриматематические мотивы возникновения новых математических понятий и теорий. Колмогоров отстаивал ту точку зрения, что восхождение к более высоким ступеням абстракции имеет прямой практический смысл, и потому настаивал на более широком внедрении метода абстракции в преподавание. В 1933 году Колмогоров предложил общепринятую ныне систему аксиоматического обоснования теории вероятностей.

Для Колмогорова характерно повышенное внимание к различению, в объектах и процессах, конструктивного и неконструктивного. Конструктивными объектами с необходимостью являются объекты, участвующие в конструктивных процессах, а также выражения какого-либо языка. При этом выражение языка служит, как правило, именем неконструктивного объекта. Последнее наблюдение естественно приводит к понятию нумерации, служащему математической формализацией общей идеи соответствия между именами (в математической терминологии — «номерами») и обозначаемыми ими предметами в рамках какой-либо системы имён (в математической терминологии — идеи «нумерации»); основы теории нумераций были сформулированы Колмогоровым в 1954 году. Интерес к конструктивным процессам привёл Колмогорова к алгоритмической проблематике. В частности, в 1960-х годах Колмогоров предложил новые, алгоритмические, подходы к обоснованию теории вероятностей, что позволило в конечном счёте дать строгое определение понятию случайности для индивидуального объекта (что недоступно традиционной теории вероятностей).

В кибернетике Колмогоров проанализировал роль дискретного (в противопоставлении непрерывному) и отстаивал принципиальную возможность возникновения у машин мышления, эмоций, целенаправленной деятельности и способности конструировать ещё более сложные машины. В информатике Колмогоров в 1950-х годах предложил общее определение понятия алгоритма, а в 1960-х годах, опираясь на алгоритмические представления, создал теорию сложности конструктивных объектов. Эта теория, в свою очередь, была им применена для построения нового обоснования теории информации.

Выдающуюся роль в логике играют две статьи Колмогорова: «О принципе tertium non datur» (Математический сборник. — 1925. — Т. 32. — № 4. — С. 668—677) и «Zur Deutung der intuitionistischen Logik» (Mathematische Zeitschrift. — 1932. — Bd. 35. — S. 58—65); обе перепечатаны в его книге «Избранные труды. Математика и механика» (вторая — в русском переводе: «К толкованию интуиционистской логики»)[1]. Обе объединены общей идеей — навести мост между интуиционистской логикой и традиционной, или «классической», логикой, причём сделать это средствами, свободными как от идеологии интуиционизма, так и от крайностей теоретико-множественного догматизма. Именно, в статье 1925 года предлагается такая интерпретация «классической» логики, которая приемлема с точки зрения интуиционизма; напротив, в статье 1932 года предлагается такая интерпретация интуиционистской логики, которая приемлема с классических позиций.

В статье «О принципе...» Колмогоров принимает предпринятую главой интуиционизма Брауэром критику традиционной логики; при этом Колмогоров обнаруживает в последней ещё один уязвимый, но обойдённый критикой Брауэра логический принцип, а именно — выражаемый аксиомой $A \to (\neg A \to B)$. Как указывает Колмогоров, эта аксиома «не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного». Колмогоров выдвигает два вопроса: 1) почему незаконное, с интуиционистской точки зрения, применение принципа исключённого третьего часто остаётся незамеченным? 2) почему оно не привело до сих пор к противоречию? На оба вопроса в статье даются ответы. На 1-й вопрос — потому что применения закона исключённого третьего оправданны, коль скоро возникающее в результате таких приме-

[1] ●➤ Названные сочинения Колмогорова прокомментированы в двух статьях настоящей книги: «Интуиционистская логика в трудах А. Н. Колмогорова», с. 375—390; «Из статьи „Закон исключённого третьего и закон двойного отрицания“», с. 146—156. — *Примеч. ред.* ◄●

нений суждение носит финитный характер; действительно, в этом случае оно может быть доказано и без использования указанного закона (это открытие Колмогорова опровергло точку зрения Брауэра о том, что при получении финитных результатов должны быть запрещены нефинитные умозаключения). На 2-й вопрос — потому что если бы противоречие было получено при использовании закона исключённого третьего, то оно могло бы быть получено и без него; здесь впервые в истории логики произошло предвосхитившее последующие работы Гёделя 1930-х годов доказательство относительной непротиворечивости формальной аксиоматической системы, т. е. такое доказательство непротиворечивости, которое использует презумпцию о непротиворечивости другой системы. Колмогоров точно очертил круг тех суждений, для которых составленные из них тавтологии классической логики высказываний являются интуиционистски обоснованными: это суть те и только те суждения, для которых выполняется закон двойного отрицания. В своей статье Колмогоров впервые предложил позитивный анализ обоснованности с точки зрения интуиционизма традиционной, или «классической», математики. Одновременно Колмогоров впервые сделал интуиционистскую логику объектом строгого математического анализа. В статье была предложена первая система аксиом для этой логики, предвосхитившая формализацию Гейтинга и ныне известная как минимальное исчисление для отрицания и импликации.

В 1-м разделе статьи «Zur Deutung...» («К толкованию...») Колмогоров наполняет формулы интуиционистской пропозициональной логики новым содержанием, свободным от философских предпосылок интуиционизма. Именно, он предлагает рассматривать каждую такую формулу не как утверждение, а как проблему (т. е. как требование указать или построить объект, подчинённый тем или иным заранее заданным условиям). Понятие проблемы, или задачи, есть одно из фундаментальных понятий логики; Колмогоров был первым, кто включил это понятие в логико-математический дискурс (здесь идеи Колмогорова предвосхитили так называемую семантику реализуемости Клини—Нельсона). Предложенная Колмогоровым интерпретация интуиционистской логики близка к концепции Гейтинга, однако у последнего отсутствует чёткое различение между суждением и проблемой. Существенным этапом в становлении логического мышления явилось предложенное Колмогоровым уточнение представления о сводимости одной проблемы к другой. Сам Колмогоров впоследствии так определял цель статьи: «Работа писалась в надежде на тó, что логика решения задач сделается со

временем постоянным разделом курса логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами». Во 2-м разделе статьи выдвигается и обосновывается следующий взгляд: с интуиционистской точки зрения, нельзя, вообще говоря, рассматривать отрицание общего суждения в качестве содержательного суждения. «Но тогда, — указывает Колмогоров, — исчезает предмет интуиционистской логики, поскольку теперь принцип исключённого третьего оказывается справедливым для всех суждений, для которых отрицание вообще имеет смысл. Возникает, однако, новый вопрос: какие логические законы справедливы для суждений, отрицание которых не имеет смысла?».

Сочинения Колмогорова, имеющие философскую составляющую

Книги

Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974. — 119 с.

Введение в математическую логику. — М.: Изд-во МГУ, 1982. — 120 с. (Соавтор: А. Г. Драгалин.)

Математическая логика: Дополнительные главы. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 119 с. (Соавтор: А. Г. Драгалин.)

Математика и механика: Избранные труды. — М.: Наука, 1985. — 470 с.

Теория вероятностей и математическая статистика: Избранные труды. — М.: Наука, 1986. — 424 с.

Теория информации и теория алгоритмов: Избранные труды. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

Математика — наука и профессия: Сборник статей. — М.: Физматлит, 1988. — 288 с.

Математика в её историческом развитии: Сборник статей. — М.: Физматлит, 1991. — 223 с.

Новгородское землевладение XV века. — М.: Физматлит, 1994. — 128 с.

Статьи

Современные споры о природе математики // Научное слово. — 1929. — № 6. — С. 41—54.

Современная математика // Сборник статей по философии математики / Под ред. С. А. Яновской — М.: ОНТИ, 1936. — С. 7—13.

Теория и практика в математике // Фронт науки и техники. — 1936. — № 5. — С. 32—42.

Предисловие // *А. Гейтинг.* Обзор исследований по основаниям математики. — М.: ОНТИ, 1936. — С. 3—4.

Аксиома // БСЭ. — 2-е изд. — Т. 1. — М.: Советская энциклопедия, 1949. — С. 613—616.

О понятии алгоритма // Успехи математических наук. — 1953. — Т. 8. — Вып. 4 (56). — С. 175—176.

Предисловие редактора перевода // *Р. Петер.* Рекурсивные функции. — М.: ИЛ, 1954. — С. 3—10.

Тезисы о кибернетике [от 20 января 1957 года] // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 142—145. [См. с. 495—500 настоящей книги. — *Примеч. ред.*]

Информация // БСЭ. — 2-е изд. — Т. 51. — М.: Советская энциклопедия, 1958. — С. 129—130.

Кибернетика // БСЭ. — 2-е изд. — Т. 51. — М.: Советская энциклопедия, 1958. — С. 149—151.

Предисловие // *У. Р. Эшби.* Введение в кибернетику. — М.: ИЛ, 1958. — С. 5—8.

Автоматы и жизнь: Тезисы доклада // Машинный перевод и прикладная лингвистика. — Вып. 6. — М.: 1961. — С. 3—8. [Перепечатано в сборнике: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 147—150.] [См. с. 501—505 настоящей книги. — *Примеч. ред.*]

Жизнь и мышление как особые формы существования материи // О сущности жизни / Отв. ред. Г. М. Франк, А. М. Кузин. — М.: Наука, 1964. — С. 48—57.

Бесконечность в математике // БСЭ. — 3-е изд. — Т. 3. — М.: Советская энциклопедия, 1970. — С. 264—265.

Вероятность // БСЭ. — 3-е изд. — Т. 4. — М.: Советская энциклопедия, 1971. — С. 544.

Элементы логики в современной школе // Математика в школе. — 1971. — № 3. — С. 91—92.

О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения // Математика в школе. — 1978. — № 3. — С. 6—9.

Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьном курсе математики и физики // Квант. — 1980. — № 4. — С. 15—18.

Письма А. Н. Колмогорова к А. Гейтингу // Успехи математических наук. — 1988. — Т. 43. — Вып. 6. — С. 75—77.

Семиотические послания // Новое литературное обозрение. — 1997. — № 24. — С. 216—245. [Перепечатано в настоящем издании: Кн. 4: Филология. — С. 207—250. — *Примеч. ред.*]

Литература о Колмогорове

Колмогоров: Юбилейное издание в 3 кн. — Кн. 1: Истина — благо: Биобиблиография / Ред.-сост. А. Н. Ширяев; Подготовка текста Н. Г. Химченко. — М.: Физматлит, 2003. — 384 с.

Колмогоров в воспоминаниях / Ред.-сост. А. Н. Ширяев. — М.: Физматлит, 1993. — 734 с.

Колмогоров в воспоминаниях учеников / Ред.-сост. А. Н. Ширяев; Подготовка текста Н. Г. Химченко. — М.: МЦНМО, 2006. — 472 с., 24 с. илл.

Явление чрезвычайное: Книга о Колмогорове / Сост. Н. Х. Розов; Под общ. ред. В. М. Тихомирова. — М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999. — 256 с.

Тихомиров В. М. Андрей Николаевич Колмогоров, 1903—1987: жизнь, преисполненная счастья / Отв. ред. С. С. Демидов. — М.: Наука, 2006. — 199 с.

Успенский В. А. Андрей Николаевич Колмогоров — великий учёный России // Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 484—505.

Uspensky V. A. Kolmogorov and mathematical logic // The Journal of Symbolic Logic. — 1992. — V. 57. — N. 2. — P. 385—412.

Youshckevitch A. P. A. N. Kolmogorov: Historian and Philosopher of Mathematics // Historia mathematica. — 1983. — V. 10. — N. 4. — P. 383—395.

Витгенштейн и основания математики[1]

Большинство предложений и вопросов, трактуемых как философские, не ложны, а бессмысленны.
Л. Витгенштейн, [ЛФТ], 4.003.

Философ — тот, кто должен излечиться от многих недугов рассудка, прежде чем он сумеет прийти к понятиям здравого человеческого разумения.
<...> В здоровье разума мы окружены безумием.
Л. Витгенштейн, [ЗпОМ], IV, 53.

1

Не без трепета приступаю я к написанию этого текста. Если уж Витгенштейна, по его мнению[2], не понял (в своём введении к [ЛФТ], см. [Р]) сам Рассел, сумевший привести в замешательство великого Фреге[3], то где уж нам. «„Но разве ты действительно не понимаешь, что́ имеется в виду?!“ — А разве невозможно думать, будто понимаешь, а между тем заблуждаться?» ([ЗпОМ], IV, 12).

Впрочем, Витгенштейн и не ожидал понимания: «Мне безразлично, — замечал он, — поймёт ли и оценит ли меня типичный западный учёный: ведь он всё равно не постигнет духа, в котором я пишу. <...> Меня интересует не возведение здания, а уяснение для себя оснований возможного здания» ([КЦ], 31). Поэтому автору настоящей статьи остаётся уповать на то, что он не является «типичным западным учёным» (а также на то, что примат уяснения оснований перед самим построением хорошо вписывается в российские традиции).

2

Различие между возведением здания и уяснением оснований возможного здания нигде так чётко не проявляется, как в математике. Поэтому постоянное обращение Витгенштейна к математике — не для создания математических теорий, разумеется, но для иллюстрации своих философских взглядов — очень характерно. Математические сущности, пребывающие в мире чистых форм, служат идеальным полем для философских спекуляций. С одной стороны, они менее

Опубликовано в журнале: Вопросы философии. — 1998. — № 5. — С. 85—97.

1 Изложение доклада, сделанного 30 октября 1997 года на международной конференции «Витгенштейн в контексте культуры XX века» (Москва, 29—31 октября 1997 года). ■

2 См. [К-1], с. IX.

3 Письмо Рассела к Фреге опубликовано в [Б-2] на с. 105—106; там же см. о реакции Фреге.

загрязнены «эмпирическим мусором», с другой — если уж этот мусор их касается, он более ясно виден на их зеркальной поверхности. Где расположены эти сущности — в бытии или в сознании? Если в бытии, то где именно? А если в сознании, то в чьём — индивидуальном или коллективном? Если в коллективном, то что́ представляет собою коллективное сознание? А если в индивидуальном, то как объяснить, что различные индивидуальные сознания действуют в этом вопросе согласованно, так что теорема из теории чисел (не эмпирический факт, а теорема!) окажется одной и той же, будь она доказана в Саратове или в Рио-де-Жанейро. (Я нарочно взял теорию чисел, потому что теоремы этой теории устанавливаются практически работающими математиками не исходя из каких-либо аксиом, а опираясь на непосредственное интуитивное представление о натуральном числе и о натуральном ряде как совокупности таких чисел.)

Вопросы о природе и свойствах математических объектов занимали Витгенштейна на протяжении всей его деятельности. Нельзя, конечно, утверждать, что он разрешил возникающие здесь проблемы. Но это и не требуется. Когда говорят, что философия решила какой-то вопрос (да ещё и «окончательно решила») — это всегда подозрительно. Ведь дело философии — не столько давать ответы, сколько формулировать вопросы. «Постановка того или иного вопроса в философии всегда предпочтительнее ответа на вопрос» ([ЗпОМ], II, 5). Философ тот, кто умеет формулировать правильные вопросы. И тут Витгенштейну принадлежит видное место в мировой философии.

Итак, Витгенштейн занимался основаниями математики всего лишь как экспериментальным полигоном для занятий философией. Поэтому следует в первую очередь констатировать воздействие знакомства с этими основаниями на становление философских взглядов Витгенштейна и лишь во вторую очередь — воздействие этих взглядов на основания математики. Если понимать основания математики более узко, как некую специфическую математическую дисциплину, то тогда влияние Витгенштейна на основания математики обнаруживается с трудом. Если же признать, что термин «основания математики» охватывает своим объёмом и философию математики или по крайней мере ощутимо с нею пересекается (а именно так мы и будем трактовать этот термин в рамках настоящей статьи), то тогда можно говорить о вкладе Витгенштейна в основания математики. Я бы осмелился указать три элемента такого вклада: это роль веры в математике (слово «вера» понимается здесь не в религиозном смысле, а в том смысле, с каким оно входит, скажем, в сочетание «вера в счастливое разрешение конфликта»); это спокойное отношение к про-

тиворечию; это настороженное отношение к объектам очень большого размера и, в частности, недоверие к очень длинным доказательствам.

3

Стиль Витгенштейновых «Заметок по основаниям математики» непривычен для текстов на подобные темы. Прежде всего, этот стиль необычайно эмоционален. «От этого может закружиться голова» ([ЗпОМ], I, 11); «лёгкое опьянение мыслей» ([ЗпОМ], I, Приложение 1, 16) — вот обороты, характеризующие тональность названных заметок. Он понимает философию как часть эмоциональной жизни. И так же понимает основания математики. «...Противоречие становится интересным лишь благодаря тому, что оно мучает людей <...>» ([ЗпОМ], I, 13).

Тексты Витгенштейна (кроме «Логико-философского трактата») отличает повышенный процент вопросительных и повелительных предложений (а также — но об этом позже — сослагательных форм). И это соответствует его мировоззрению, поскольку для него вопрос важнее ответа, а действие важнее заявления.

4

Математические предложения и факты трактуются Витгенштейном прежде всего как ответы на разумно поставленные вопросы. А в ещё большей степени — как побуждение к действию. «Способ осмысления формулы определяет, какие действия должны совершаться при её расчёте», а самим способом осмысления «является тот способ, каким мы пользуемся ею» ([ЗпОМ], I, 2). Таким образом, интерпретация математического предложения у Витгенштейна оказывается не столько индикативной, сколько императивной: предложение предстаёт не столько в виде утверждения, сколько в виде повеления. Эта повелительная интерпретация математических предложений близка к процедурной (императивной) идеологии современной теории алгоритмов и Computer Science («Шишков, прости: не знаю, как перевести»: ни «информатика», ни тем более «вычислительная наука» не являются адекватными переводами). Самоё теорию алгоритмов можно трактовать как логику и лингвистику повелительных предложений. Чтó же касается науки Computer Science, то среди своих языков программирования она выделяет процедурные, или императивные языки, в которых преобладает описание действий, направленных на получение результата, и непроцедурные, или декла-

ративные, языки, в которых центральное место занимает описание (так называемая декларация) свойств того результирующего объекта, который требуется получить. Кажется замечательным, что у Витгенштейна можно обнаружить и зачатки непроцедурных, декларативных языков программирования: «Легко представить себе язык, в котором нет вопросительной и повелительной формы, а вопрос и пожелание выражаются в форме утверждения, в форме, соответствующей, например, нашему: „Я хотел бы знать...“ и „Я хочу, чтобы...“» ([ЗпОМ], I, Приложение 1, 1).

Деятельность, деятельность и ещё раз деятельность — вот кредо Витгенштейна. Для него процесс важнее результата. «Я открываю не результат, а тот путь, которым он достигается» ([ЗпОМ], III, 47). Точнее было бы сказать, что для Витгенштейна результат неотделим от процесса (насколько я понимаю, такая позиция близка к позиции гуссерлианства): «В логике процесс и результат эквивалентны» ([ЛФТ], 6.1261); «В математике процесс и результат эквивалентны» ([ЗпОМ], I, 82); «Свойством [записи числа] 100 является то, что оно произведено или может быть произведено таким образом» ([ЗпОМ], I, 83).

5

Однако, спросит читатель, какое всё это имеет отношение к основаниям математики? Самое прямое. Математика, по Витгенштейну, есть деятельность. Поэтому проблемы оснований математики суть не онтологические проблемы, а проблемы деятельности. Следовательно, если в математике возникает противоречие, то это не есть онтологическое противоречие бытия, а противоречие человеческой деятельности, за каковое противоречие, естественно, несёт ответственность не бытие, а сам создавший это противоречие человек. И путь к разрешению возникшего противоречия — в дальнейшей деятельности. «„Противоречие отменяет исчисление“ — откуда взялась эта странная констатация?» ([ЗпОМ], V, 12). «Противоречие можно понимать как знак богов, говорящий, что надо действовать, а не размышлять» ([ЗпОМ], III, 56). (Нелишне напомнить, что до сих пор противоречия если и возникали в математике, то отнюдь не в повседневной математической практике, но лишь в парадоксах теории множеств и математической логики, расположенных на отдалённых границах математического мироздания, — там, где, собственно говоря, исчезает право использования привычных математических понятий, поскольку в таком отдалении эти понятия начинают размываться.) Таким образом, следует быть психологически готовым

к встрече с противоречием. Столкнувшись же с таковым, надо не пугаться, а подвергнуть критическому пересмотру собственную деятельность — в том числе язык (потому что язык тоже есть один из видов деятельности).

6

Витгенштейн убедительно разрушает иллюзию, что математику якобы можно отделить от физической реальности. Как известно, в отношении математики бытуют две точки зрения. Согласно первой из них, математика отражает реальность, а её понятия в абстрактном и обобщённом виде выражают представления, почерпнутые из опыта. (Математике повезло или не повезло — зависит от пристрастий — в том отношении, что о ней высказался Энгельс: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал». Эта формулировка неизменно присутствовала в качестве дефиниции слова «математика» во всех словарях и энциклопедиях коммунистического периода истории России. При развитии темы, однако, приходилось подгонять непространственные формы и неколичественные отношения под пространственные и количественные.) Согласно другой точке зрения, объектами математики являются символы и их комбинации, а сама математика состоит в игре, наподобие шахматной, с указанными символьными комбинациями. Обе эти точки зрения имеют, каждая, свою правду и могут мирно уживаться друг с другом (если кто и не уживается, то исповедующие эти точки зрения люди). У Витгенштейна же вторая точка зрения как бы погружается в первую.

Действительно, Витгенштейн воспринимает сами символы и их комбинации как объекты реального мира, а правила игры с символами — как правила действия с предметами физического пространства. Уместно заметить, что именно такой подход лежит в основе того способа, посредством которого знаменитая Теорема Гёделя о неполноте была установлена её автором в 1931 году. (Теорема утверждает, что при любом достаточно разумном и достаточно точном определении понятия доказательства имеются такие утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть; или, в другом варианте, — такие истины, которые нельзя доказать.) В своём рассуждении Гёдель не только исходил из традиционного для математической логики представления математических утверждений в виде цепочек знаков, но и трактовал эти цепочки как элементы действительности;

в качестве таковых они, в свою очередь, делались предметом рассмотрения математики (у Гёделя — арифметики, но можно было бы, что и геометрии; ср. глубокое замечание Витгенштейна: «Доказательство недоказуемости — это как бы геометрическое доказательство: доказательство, касающееся геометрии доказательств» ([ЗпОМ], I, Приложение 1, 14)).

Витгенштейн, конечно же, материалист: он говорит и о «действительности во всём её охвате» ([ЛФТ], 2.063), и о том, что образ, или картина, есть «модель действительности» ([ЛФТ], 2.12). Однако «основной вопрос философии» получает своеобразное преломление во взглядах Витгенштейна на математику: сознание делается здесь частью бытия, а мир идеальный — частью мира материального. В самом деле, математические понятия и математические факты, принадлежащие сознанию (миру идеальному), воспринимаются Витгенштейном в неразрывном единстве с выражающими их знакосочетаниями. Эти последние принадлежат бытию (миру материальному): «Образ (картина) есть факт» ([ЛФТ], 2.141), «Знак-предложение есть факт» ([ЛФТ], 3.14). С другой стороны, ценность и оправдание этих знакосочетаний как явлений бытия состоит, по Витгенштейну, в том, что они служат объектами человеческой деятельности, направляемой сознанием. Сознательный характер этой деятельности подчёркивается неоднократным появлением в текстах Витгенштейна упоминаний о цели и целесообразности. Например: «Доказательство непротиворечивости должно дать нам основания для предсказания; и в этом его *практическая цель*» ([ЗпОМ], II, 86).

7

По Витгенштейну, правила игры с знакосочетаниями — математическими символами и их комбинациями — потому таковы, какие они есть, что они целесообразны, что следование этим правилам приводит к определённой цели. Таким образом, оправданием правил игры в данном случае служит критерий практики (что и отличает «математическую» игру от игры, скажем, шахматной).

Критерий практики занимает у Витгенштейна видное место. Вот он ведёт разговор с воображаемым собеседником о логико-математическом кванторе общности, и в разговоре используется слово *все*. «Как он усвоил, что означает *все*? Вероятно, на практике» ([ЗпОМ], I, 10). И далее: «...выражение пусто, пока для него нет применения» ([ЗпОМ], I, Приложение 1, 9). «Но тебе не понять этого предложения, пока ему не найдено применение. <...> А когда его

понимают? — Я полагаю: тогда, когда его могут применять» ([ЗпОМ], IV, 25). Даже математические аксиомы выделяются среди прочих положений не в силу своей безусловной истинности, а в силу того, что они специальным образом используются, что им приписывается особая функция ([ЗпОМ], III, 1, 5). Именно применимость служит главным оправданием математики: «Для математики существенно, чтобы её знаки применялись и в *гражданской* жизни. Именно употребление вне области математики <...> делает знаковую игру математикой» ([ЗпОМ], IV, 2). В силу общей ориентации Витгенштейна на деятельность, критерий практики служит у него не столько критерием истины, как в традиционной марксистской философии, сколько критерием разумности действия: в частности, упомянутое в начале настоящего абзаца слово *все* он поясняет на примере исполнения приказа «Сруби все эти деревья!» ([ЗпОМ], I, 10). Правильно поступать важнее, чем правильно думать, — этому учил ещё Цицерон. «А почему бы понятию не убеждать меня прежде всего тем, что я склонен *его* применять?» — это говорит Витгенштейн. И не в этом ли состоит тот «выход из <...> мерцания понятий», о котором говорится в [ЗпОМ], IV, 16?

8

У Витгенштейна свои отношения с истиной, в частности — с математической истиной. «Предложение делается математической теоремой не потому, что оно является истинным, а потому, что оно воспринимается нами как таковое» ([ЗпОМ], III, 3). То есть центр тяжести переносится с объективного положения вещей на субъективное восприятие. И даже ещё более резко: «Тó, чтó в действительности п о д р а з у м е в а е т солипсизм, вполне правильно. <...> Строго проведённый солипсизм совпадает с чистым реализмом» ([ЛФТ], 5.62 и 5.64). С другой стороны, в первых строках того же «Логико-философского трактата» читаем: «Мир есть всё, что имеет место. Мир есть совокупность фактов» и т. д. И ещё: «Предложение есть картина действительности» ([ЛФТ], 4.01); «Понять предложение — значит знать, чтó имеет место, когда оно истинно» ([ЛФТ], 4.024). Здесь мы подходим к той *проблеме веры*, о которой упоминалось выше в нашем п. 2 и которая, по нашему разумению[4], занимает у Витгенштейна достаточно центральное место. Вот как мне представляется его позиция в данном вопросе.

[4] Напомним оговорки о возможном непонимании, сделанные в начале статьи.

Есть мир, состоящий из фактов, и есть язык, отражающий этот мир. «Границы моего языка означают границы моего мира» ([ЛФТ], 5.6). Есть факт и есть отражающее его высказывание, или предложение: «Предложение есть описание какого-либо положения вещей» ([ЛФТ], 4.023). Мы видим, что наряду с сущностями двух общепризнанных разрядов: разряда фактов (событий, положений вещей) и разряда языковых выражений (предложений, высказываний) — на сцену выступает третья сущность: соответствие между фактом и выражением, описывающим, или отображающим, этот факт. Именно эта третья сущность занимает центральное место в рассуждениях Витгенштейна. Он неоднократно подчёркивает, что суть соответствия состоит в параллелизме структуры образа (картины, выражения) и структуры факта (события, положения вещей) — см., например [ЛФТ], 2.15 и 2.18. Однако, чем больше мы вчитываемся в Витгенштейна, тем больше убеждаемся, что полностью объяснить это соответствие в логически безупречных терминах невозможно. Признание человеком того, что данному высказыванию соответствует именно данное положение вещей, а не какое-либо иное, а данному положению вещей — именно данное высказывание, есть, в конечном счёте, результат *акта веры*. И в этом нет ничего удивительного, потому что любое объяснение происходило бы на языке, а тем самым опиралось бы на предположение, что язык «правильно» описывает действительность. Перефразируя поэта, можно сказать, что образ мира, в слове явленный, есть творчество и чудотворство.

9

И снова читатель вправе спросить, при чём тут основания математики. Мы попытаемся дать ответ на этот законный вопрос на примере одной из знаменитых теорем математической логики, а именно Второй теоремы Гёделя, относящейся к теории формальных логических систем (называемых также логистическими, формальными аксиоматическими и т. п. системами). Вывод в таких системах осуществляется по точно определённым правилам, опирающимся лишь на внешние, синтаксические свойства участвующих в выводе знакосочетаний. Система называется непротиворечивой, если в ней нельзя вывести противоречие (т. е. нельзя, для некоторого выражения, вывести как его само, так и его отрицание). Вторая теорема Гёделя имеет совершенно точную математическую формулировку, традиционное (и в целом верное) истолкование которой таково: непротиворечивость

какой-либо формальной логической системы не может быть доказана средствами самой этой системы. Более развёрнутое истолкование: если непротиворечивая формальная логическая система настолько богата выразительными средствами, что в ней можно записать утверждение о её собственной непротиворечивости, то это утверждение не может быть выведено в этой системе («доказана» и «выведена» суть синонимы в этом контексте). Говоря «можно записать утверждение о...», имеют в виду следующее: можно предъявить знакосочетание, трактуемое как утверждение о непротиворечивости рассматриваемой системы. Обратим внимание на слова «трактуемое как». Обычно предъявляют некоторое совершенно конкретное знакосочетание (в литературе оно часто обозначается символом Consis), которое всеми признаётся как выражающее непротиворечивость. И оно действительно не может быть выведено в системе — например, Consis для формальной арифметики не может быть выведено в формальной арифметике. Оказывается, однако, что можно привести другое знакосочетание, которое также можно трактовать как выражающее непротиворечивость и которое, тем не менее, можно доказать в рассматриваемой системе (в арифметике, например). Этот эффект был обнаружен в 50-х годах российским логиком А. С. Есениным-Вольпиным.

Наблюдение Есенина-Вольпина показывает, что традиционное понимание Второй теоремы Гёделя нуждается в значительном уточнении. Тó свойство знакосочетания, что оно выражает непротиворечивость системы, оказывается ещё недостаточным для заявления о его невыводимости в данной системе. Требуется указать конкретное знакосочетание. Однако при таком подходе формулировка Второй теоремы теряет свою философскую привлекательность. Потому что сказать «существует выражающее непротиворечивость знакосочетание, которое недоказуемо» — это сказать очень мало. Хотелось бы заменить «существует» на «всякое», но это, как мы только что видели, невозможно. Может быть, в будущем удастся выделить, по их структурным свойствам, те выражающие непротиворечивость знакосочетания, для которых справедлива Вторая теорема Гёделя, и отделить их от тех, для которых она неверна, — но пока это не удаётся. И весь вопрос упирается в невозможность исчерпывающим образом ответить на простой, казалось бы, вопрос: «Чтó означает, что данное знакосочетание, т. е. предложение, выражает данный факт (в нашем случае — непротиворечивость рассматриваемой системы)?». Как уже отмечалось, в отсутствии исчерпывающего ответа нет ничего удивительного: ведь подобный ответ уже содержал

бы в самом себе и факт, и предложение, и соответствие между ними, так что возникал бы порочный круг. Таким образом, соответствие между предложением и фактом оказывается тем «мистическим, которое себя показывает» ([ЛФТ], 6.522).

Представляется весьма поучительным, что непонимание всей философской сложности проблемы соответствия между предложением и фактом может привести к прямой математической ошибке. Именно так случилось с известным автором в области математической логики Р. М. Шмульяном (он же Смальян, он же Смаллиан). В своей известной книге о теоремах Гёделя он не заметил того, что применимость Второй теоремы Гёделя ограничивается конкретными предложениями, выражающими непротиворечивость, и потому пришёл к ложным математическим формулировкам[5].

10

Вспомним теперь, что семантика Витгенштейна (особенно позднего Витгенштейна) не только, да и не столько утвердительная, но скорее императивная. В императивной семантике предложение служит прежде всего побуждением к действию. Обсуждавшиеся нами выше проблемы соответствия между действительностью и отображающим её языком сохраняются и в императивной семантике. В частности, роль фактора веры здесь не менее важна. Прежде всего, надо верить, что приказ понят правильно. Но что значит «правильно»? Этот вопрос занимает, более того — волнует Витгенштейна.

При исполнении приказа появляется новая сущность: результат. Цель исполнения — получение результата. Приказ понят правильно, если он приводит к правильному результату. Но какой результат считать правильным? Для Витгенштейна характерно иллюстрировать терзающие его вопросы на примере математических вычислений. Именно поэтому его философские искания особенно близки к тем методологическим проблемам, которые возникают в Computer Science.

Допустим, мы перемножаем два числа. В каком случае мы признаём, что получили правильный результат? И что вообще понимать под правильным результатом? Самый простой ответ: тот результат, который мы получили, и есть — по определению! — правильный

[5] Что и было отмечено в рецензии на указанную книгу, в п. 5 списка критических замечаний: см. *V. A. Uspensky*, *V. Ye. Plisko*. [Рецензия] // Journal of Symbolic Logic. — 1995. — V. 60. — N. 4. — P. 1320—1324. — [Рец. на книгу: *R. M. Smullyan*. Gödel's incompleteness theorem. — (Oxford logic guides; N. 19). — New York; Oxford: Oxford University Press, 1992. — XIII + 139 p.].

результат (как говорят юристы: «Истина — это то, что́ устанавливается в результате судоговорения»). А если мы ошиблись? Но ведь понятие ошибки опирается на понятие правильности; тем самым возникает порочный круг. Эта цикличность, автореферентность в системе понятий отчётливо осознаётся Витгенштейном: «Вычисление — это феномен, который мы узнаём из вычисления» ([ЗпОМ], II, 80). Таким образом, само понятие ошибки обогащается у Витгенштейна философским дискурсом. Скажем об этом чуть подробнее.

11

Естественно, что представление об *ошибке* при совершении той или иной математической операции неотделимо от представления о *правильности*. Ошибки неизбежны в познавательной деятельности человека (и, можно полагать, в деятельности компьютера), и в своих текстах Витгенштейн неоднократно возвращается к анализу их места и их роли в этой деятельности: см., например, [ЗпОМ], I, 106, 112, 134, 135, 168; II, 73, 75; V, 11.

Вот Витгенштейн рассматривает процедуру обнаружения равночисленности двух множеств путём установления взаимно однозначного соответствия между элементами первого множества и элементами второго множества ([ЗпОМ], I, 31). Здесь правильную процедуру легко дистанцировать от неправильной, поскольку, как указывает Витгенштейн, «в самой сущности [множеств] заложено, что они равночисленны». Сложнее дело обстоит в случае совершения таких арифметических операций, как, например, умножение. Здесь на сцену выступает психология: «...Я с большой достоверностью знаю, что, умножив 25×25, каждый раз буду получать 625. Это значит, что я знаю психологический факт» ([ЗпОМ], III, 44). К компетенции психологии принадлежит и рассмотрение фактора обученности (см., например, [ЗпОМ], I, 1 и 112).

За апелляцией к психологии скрывается глубокая проблема: что́ считать, вообще, произведением двух чисел — то ли нечто, имманентно и априорно связанное с сомножителями (как свойство равночисленности было связано с равночисленными множествами), то ли нечто, возникающее в результате процедуры, задаваемой алгоритмом умножения. (Здесь уместно заметить, что в той системе аксиом арифметики, которая общепринята в математической логике, аксиомы для сложения и умножения, хотя и записанные в декларативной форме, являются по существу процедурными: они задают рекурсивные процедуры, позволяющие *вычислять* суммы и произве-

дения.) При любом решении названной проблемы остаётся вопрос, что́ считать правильным вычислением, а в более точной постановке — какова должна быть та система действий, которая убедит нас, что произведённое вычисление было правильным. В случае сравнительно небольших вычислений мы можем повторить их в будущем или же, обращаясь к прошлому, сослаться на опыт наших предшественников, производивших то же самое вычисление.

Вообразим теперь, что вычисление астрономически велико и требует десятков лет работы современных компьютеров. Насколько можно доверять такому вычислению? И как его проверить? И — уже почти чисто философский вопрос — в каких терминах следует определять правильность результата? Не оказываемся ли мы в ловушке, потому что у нас нет иного выхода, как объявить правильным тот результат, который получен, — просто потому, что он получился? Повторить вычисление колоссальных размеров невозможно. Остаётся надеяться на правильность алгоритма, правильность программы, безошибочность компьютера — но здесь опять слова «правильность», «безошибочность», как раз и нуждающиеся в дефиниции, каковую дать не так-то просто. Да и надежда на то, что в течение нескольких лет вычислений не произойдёт никакой ошибки, нереальна — не говоря уже о компьютерных вирусах. Во времена Витгенштейна, не было, разумеется, ни компьютеров, ни, тем более, их вирусных заболеваний, но с тем большей остротой и прозорливостью ставит он проблему: «Представь себе такую странную возможность: до сих пор мы всегда ошибались при умножении 25×25. Да, непонятно как такое могло случиться, но это случалось. <...> В таком случае должно быть что-то не так в нашей идее истинности и ложности арифметических предложений» ([ЗпОМ], I, 134; ср. также III, 25, где рассматривается возможность изменения счётных таблиц).

Но даже систематические ошибки, о которых говорилось в только что приведённой цитате, присущи, надо полагать, конкретному человеку или конкретному компьютеру. Поэтому можно заявить, что правильные вычисления, подобно правильным физическим экспериментам, должны удовлетворять свойству повторяемости — причём при повторении их различными людьми или различными компьютерами. Повторение вычисления, как и повторение физического эксперимента, должно давать один и тот же результат (ср. [ЗпОМ], III, 17). И здесь мы снова сталкиваемся с *проблемой веры*. Потому что повторяемость вычисления или эксперимента основана на презумпции, что завтра будут действовать те же законы природы, которые действуют сегодня. Презумпция же эта не может быть подтверждена

ничем, кроме веры в самоё эту презумпцию. Но разве наша презумпция не подтверждается опытом? Ведь опыт сообщает нам, что законы природы остаются неизменными на протяжении длительного времени. Внесём поправку: не остаются, а оставались. Свойство консерватизма законов природы само может считаться универсальным законом природы. Однако то обстоятельство, что указанное свойство сохранится в следующее мгновение, — это обстоятельство не может быть подкреплено ничем, кроме *веры*. «Мы убеждены, что всегда будет получаться, вычисляться то же самое вычисление. А является ли это математическим убеждением? Нет <...>» ([ЗпОМ], III, 46).

12

Консерватизм сродни жёсткости. «Что, если бы кто-то сказал: „долженствование“ в кинематике значительно жёстче, чем причинное „долженствование“ <...>?» ([ЗпОМ], I, 121). В качестве иллюстрации Витгенштейн предлагает рассмотреть «абсолютно жёсткий» механизм — но уже в непосредственно следующем отрывке (122) он говорит о возможности деформации реального механизма. (Не допускается ли тем самым и для причинного долженствования возможность его нарушения?)

Жёсткость математических объектов традиционно рассматривается как их исключительная привилегия — в сравнении, например, с объектами физическими. Ведь, строго говоря, для реального физического тела нельзя говорить ни о постоянстве его размера, ни о постоянстве его состава: на границе тела происходят микроскопические флуктуации, всё время изменяющие и то, и другое. Математические же объекты в наибольшей степени удовлетворяют закону тождества формальной логики. Однако послушаем Витгенштейна. Вот что он говорит о строке, содержащей около ста триллионов знаков: «А если я посмотрю на неё через час, разве она не может за это время измениться? Ведь она необозрима» ([ЗпОМ], II, 3). Таким образом, сверхдлинные строки знаков оказываются нежёсткими и потому не внушают доверия; именно это и имелось в виду выше, в нашем п. 2, когда при обсуждении вклада Витгенштейна в основания математики говорилось о его настороженном отношении к объектам очень большого размера.

Тут читатель вправе возмутиться. Ведь речь должна идти о математических, а не о физических объектах, а говоря об изменчивости сверхдлинной строки, или цепочки, знаков, мы трактуем её как реальный физический объект. На это справедливое замечание у нас три возражения.

Первое. Если сверхдлинная строка (цепочка) знаков и является физическим объектом, то — хотя бы начиная с некоторой длины — объектом скорее мысленным, чем реальным.

Второе. Знакосочетания, служащие для записи математических понятий и утверждений, хотя и трактуются Витгенштейном как объекты физической реальности (см. выше наш п. 6), остаются, разумеется, в поле зрения и в компетенции математики.

Третье. Витгенштейн рассматривает такой вопрос: «появится ли при бесконечном десятичном разложении числа π сочетание цифр φ (некая конкретная конечная последовательность цифр, например „770“)?» ([ЗпОМ], IV, 9). Закон исключённого третьего требует, чтобы на это вопрос имелся один из двух возможных ответов: «да» или «нет». В связи с этим Витгенштейн замечает: «Если кто-то выдвигает закон исключённого третьего, то он как бы предлагает нам на выбор две картины, говоря, что одна из них должна соответствовать факту. А что, если сомнительна сама применимость здесь этих картин? ⟨Здесь позиция Витгенштейна близка к точке зрения интуиционизма. — *В. У.*⟩ Заявляя, что бесконечное разложение числа π должно либо содержать, либо не содержать сочетание цифр φ, нам предлагают как бы картину уходящего вдаль необозримого ряда. А что, если изображение на большом удалении начинает терять чёткость контуров? ⟨Здесь позиция Витгенштейна близка к точке зрения российского математика П. К. Рашевского[6]. — *В. У.*⟩» ([ЗпОМ], IV, 10). Слова «на большом удалении» показывают, что, по мнению Витгенштейна, чёткость контуров теряется как для бесконечного разложения в целом, так и для очень длинного его начала. Но и бесконечное десятичное разложение какого-либо действительного числа, и любая цепочка десятичных знаков, являющаяся началом такого разложения, суть объекты самые что ни на есть математические.

13

Ясно, что консерватизм и жёсткость должны быть в полном объёме присущи таким специфическим математическим сущностям, как доказательства. Доказательство должно оставаться ***тем же самым*** при повторном к нему обращении и, в частности, при его проверке.

В своих текстах Витгенштейн несколько раз обращается к иссле-

[6] См. *П. К. Рашевский.* О догмате натурального ряда // Успехи математических наук. — 1973. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 243—246. ●●➤ Названная статья перепечатана в качестве приложения II в книге: *В. А. Успенский.* Апология математики. — СПб.: Амфора, 2009; 2010; 2011; 2-е изд., испр. — 2012. ◄●●

дованию понятия математического доказательства — см., например, [ЗпОМ], II, 4, 7, 13, 21—65; V, 17, 19, 23. Из требований, предъявляемых им к доказательствам, мы выделим два тесно связанных между собою: доказательство должно быть обозримо ([ЗпОМ], II, 1, 39; V, 17) и воспроизводимо ([ЗпОМ], II, 1, 21).

Казалось бы, эти требования достаточно очевидны. Однако при их реализации возникают серьёзные и вполне реальные проблемы. Укажем две из них: проблему человеческого фактора и проблему компьютерного фактора.

Проблема человеческого фактора возникает в связи с тем, что доказательство рассчитано на восприятие его человеком. Математическое доказательство есть понятие психологическое: это текст, убеждающий нас настолько, что мы делаемся в некотором смысле агрессивными, а именно становимся готовы убеждать других с помощью *этого же самого* текста. Ясно, однако, что убедительность зависит от того багажа математических знаний, которым располагает воспринимающий доказательство субъект: для продвинутого математика доказательство может быть более коротким, поскольку может опираться на известные этому математику понятия и факты; для новичка такое короткое доказательство окажется непонятным, и ему потребуется другое, более развёрнутое доказательство, включающее в себя все исходные определения и теоремы. Но такое развёрнутое доказательство вполне может занять несколько сотен или даже тысяч страниц. Можно ли считать его обозримым и воспроизводимым?

Проблема компьютерного фактора возникает в связи с привлечением компьютера для получения доказательства. Обстановка, в которой происходит подобное привлечение, такова. Иногда удаётся свести рассматриваемую задачу к проверке конечного числа частных случаев. Если количество случаев невелико и проверка для каждого отдельного случая не слишком сложна, человек может сам осуществить эту проверку для всех случаев и тем самым решить интересующую его задачу. Если же проверка для отдельного случая сложна или если таких случаев много, то человеку решение становится не под силу и требуется привлекать компьютер. Именно так обстояло дело с одной из самых знаменитых задач математики, называемой «проблемой четырёх красок» (см. в энциклопедиях и словарях статью «Четырёх красок проблема»). Скажем об этой проблеме чуть подробнее.

Как известно, политико-административные карты печатают в несколько красок, добиваясь при этом, чтобы страны, имеющие общую границу, были окрашены в различные цвета (лучше всего, конечно, каждую страну печатать своей особой краской, но это

слишком дорого). Такую раскраску карты называют *правильной*. Спрашивается, сколько красок достаточно для правильной раскраски любой карты — не только реально существующей, но и любой возможной. Этот вопрос был задан известным математиком А. Кэли (A. Cayley) на заседании Лондонского математического общества в 1878 году, а в 1879 году Кэли опубликовал об этом статью в трудах Королевского географического общества. Ясно, что трёх красок не хватает. В 1890 году было доказано, что всегда достаточно пяти красок. Но никому не удавалось сочинить такую карту, для которой не хватало бы четырёх красок. Предположение, что любую мыслимую карту можно правильно раскрасить четырьмя красками, получило название *гипотезы четырёх красок*, а требование доказать (или опровергнуть) эту гипотезу — *проблемы четырёх красок*.

В решении проблемы четырёх красок долго не было никакого продвижения, пока в 1976 году Аппель (K. Appel) и Хакен (W. Haken) не анонсировали, а в следующем 1977 году не изложили положительное решение проблемы[7]. Авторы предъявили 1834 плоских графа[8] и объявили, что свели проблему к проверке того, что каждый из этих графов обладает некоторым специальным свойством. Такая проверка проводилась на компьютере, что потребовало примерно 300 часов машинного времени. Сегодня, через 20 лет, это было бы сделано гораздо быстрее, поскольку возросло быстродействие компьютеров, но человеку всё равно не под силу — и вряд ли будет под силу когда-нибудь. Можем ли мы признать доказательство Аппеля и Хакена доказательством? Ведь оно необозримо. (Столь же необозримо, как «ложное доказательство» формулы $10^{10} + 1 = 10^{10}$ в логистической системе Рассела — см. ниже пример (6) из нашего п. 15; а как демонстрирует названный пример, для таких необозримых доказательств отличить их от лжедоказательств становится невозможным.)

14

Мы потому так подробно остановились на ситуации с проблемой четырёх красок, что, знай о ней Витгенштейн, она привлекла бы его внимание. В самом деле, имеется простой и наглядный, но гипоте-

[7] Библиографические ссылки и более подробное обсуждение предложены на с. 149—150 в статье: *В. А. Успенский*. Семь размышлений на темы философии математики // Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты: Сборник статей. — М.: Наука, 1987. — С. 106—155. (См. также с. 231—289 настоящей книги. — *Примеч. ред.*)

[8] Читатель, не знакомый с термином «плоский граф», может считать, что это просто чертёж.

тический факт: раскрашиваемость любой карты посредством четырёх красок. Предъявляется доказательство этого факта — однако доказательство, включающее в себя компьютерный эксперимент столь объёмный, что осуществление его человеком невозможно. Человек может только всеми доступными ему средствами верифицировать задействованные компьютерные программы. Но можно ли полностью доверять такой верификации? И можно ли быть уверенным, что — даже при правильных программах — за 300 часов работы компьютера ни разу не произошло сбоя? «Рассмотрение *длинных*, недоступных обозрению логических доказательств — это лишь средство показать, как эта техника — покоившаяся на геометрии доказательств — может утратить силу, а новая — стать необходимой» ([ЗпОМ], II, 45). Однако что́ это за новая техника — остаётся неясным.

Витгенштейн неоднократно подчёркивал, что ценность математического утверждения заключена в его предсказательной силе, а цель доказательства — гарантировать действенность предсказания. Можно ли, в создавшихся условиях, высказать предсказание, что любая карта, которая нам встретится, окажется пригодной для правильной раскраски четырьмя красками? По-видимому, ответ на этот вопрос принадлежит компетенции не математики, а философии. Таким образом, **философия становится прикладной наукой**: ведь выходит, что без апелляции к ней невозможно судить о доказанности (а тем самым и об истинности) математических утверждений.

Возникновение у философии черт прикладной науки вообще очень замечательно. Это движение началось в XX веке, и оно связано прежде всего с успехами физики и космологии. Возникшие в этих науках новые представления не укладывались в традиционное миропонимание; чтобы понять — а, значит, и применить — эти представления потребовалось (и требуется) философское их осмысление. Мы имеем здесь в виду и теорию относительности, переведшую понятие одновременности из разряда абсолютных в разряд относительных (т. е. зависящих от точки зрения), поставившую свойства пространства и времени в зависимость от полей тяготения и приведшую к следствиям, кажущимся весьма странными (типа парадокса близнецов); и квантовую механику с её принципом неопределённости; и космологию с её чёрными дырами, допущением конечности Вселенной и идеей «большого взрыва» (т. е., по существу, сотворения мира). Была констатирована неевклидовость нашего мира и впервые поставлен вопрос о границах применимости общеизвестных законов природы. На этом фоне появление неканторовской теории множеств и превращение в прикладные науки математической логики и математической лингвистики отступает на второй план.

15

Несколько слов о стиле Витгенштейна. В нашем п. 3 уже говорилось о повышенном количестве повелительных и особенно вопросительных предложений. Но особенно примечательны сослагательные формы: «Если бы словом „боль“ я обозначал лишь то, что ранее называл „моей болью“ <...>» ([ФИ], 403). В значительном числе случаев их появление связано с тем, что Витгенштейн мысленно создаёт некую малореальную или же совсем нереальную, однако же логически допустимую ситуацию и, тем самым, — с целью пояснения хода своих мыслей — как бы переносит себя и читателя в воображаемый, параллельный мир. Воображение вообще эксплуатируется довольно часто. «...Если бы воображение представляло механизм, части которого состояли бы из очень мягкого материала (например, теста) и потому изгибались бы на картине различным образом <...>» ([ЗпОМ], III, 33; не правда ли, картина так и просится на холст Дали?; вопрос о возможной мягкости механизмов явно занимал Витгенштейна: см. выше наш п. 12).

Вот несколько замечательных примеров «параллельных миров»; все они связаны с философским осмыслением важнейшего математического понятия — понятия вычисления.

(1) «Продавцы брёвен <...> продают их в кубических метрах — но правы ли они, поступая так? Разве не было бы более правильным продавать их на вес, или по времени, затраченному на рубку леса, или по труду лесорубов, замеряемому по их возрасту и силе? <...> Хорошо; а что если брёвна сложены в штабеля произвольной, различной высоты, а затем продаются по цене, пропорциональной площади, занимаемой штабелями? <...> Как показать этим людям, что на самом деле — выражусь так — не тот покупает больше дров, кто покупает штабель, расположенный на большей площади? — Я взял бы, например, по их понятиям, малый штабель, и перекладкой дров превратил бы его в „большой“. Это *могло бы* их убедить, но, пожалуй, они бы сказали: „Да, теперь здесь *больше* дерева, и оно стоит больше“, — и с этой проблемой было бы покончено» ([ЗпОМ], I, 147—149).

(2) «Представим себе такой случай: люди некоего племени могут считать только устно. <...> В их счёте часто встречаются ошибки, цифры повторяются или опускаются, а они этого не замечают. Вот какой-то путешественник <...> учит их письменности и письменному вычислению и затем показывает им, как часто они ошибались при устном счёте. — Должны ли теперь эти люди признать, что прежде

они, собственно, и не производили вычислений? <...> А разве они не могли бы сказать: раньше наши дела шли лучше, наша интуиция не была отягощена мёртвой буквой?» ([ЗпОМ], II, 81).

(3) «Представь себе, что вычислительные машины встречаются в природе, но их корпуса непроницаемы для людей. И тогда люди использовали бы эти устройства так же, как мы — вычисление, хотя о таковом они ничего не знают. Так, с помощью вычислительных машин они бы делали предсказания, но их обращение с этими странными предметами носило бы характер экспериментирования» ([ЗпОМ], IV, 4).

(4) «Вычисление, которое служит для проведения некой церемонии. Например, в соответствии с определённой техникой из возраста отца и матери и числа их детей выводится число слов для некой формы благословения их семейного очага. Описание процедуры вычисления можно было бы представить себе в виде некоего подобия Моисеева закона. И разве нельзя было бы представить себе, что народ, обладающий этими церемониальными вычислительными предписаниями, в практической жизни никогда не вычисляет?» ([ЗпОМ], IV, 8).

(5) «В некой арифметике, где счёт не идёт дальше 5, вопрос о том, сколько будет $4+3$, ещё не имеет смысла. Однако здесь вполне может существовать проблема придания смысла этому вопросу» ([ЗпОМ], IV, 11).

(6) «Допустим, кто-нибудь скажет: арифметика Рассела совпадает с обычной для чисел, меньших 10^{10}; дальше же они расходятся. И чтобы обосновать это, он приведёт доказательство [в логистической системе] Рассела: $10^{10}+1=10^{10}$. Почему бы мне не доверять этому доказательству? Как меня убедят в том, что я, должно быть, совершил ошибку <...>?» ([ЗпОМ], II, 13). Дело в том, что число 10^{10} очень велико, и потому тексты, претендующие на то, чтобы служить формальными доказательствами (в системе Рассела) связанных с этим числом соотношений, поневоле очень длинны. Таким образом, здесь мы встречаемся со следующей важной идеей Витгенштейна: для очень длинных доказательств мы не в состоянии отличить верное доказательство от неверного (ср. замечание в скобках в конце нашего п. 13).

16

В двух последних примерах предыдущего пункта Витгенштейн вплотную приблизился к понятию *достижимого натурального числа*. С помощью этого понятия математики пытаются выделить

среди всех натуральных чисел те, которые могут претендовать на «реальное» существование (в той идеологии, в которой слишком большие числа не могут претендовать на такое существование).

Вопрос о том, как понимать существование в математике — один из центральных вопросов её философии. «„Понимать математическое предложение“ — это очень зыбкое понятие. <...> Отсюда возникает спор, является ли доказательство существования, не представляющее собой конструкцию, действительно доказательством существования. То есть спрашивается: *понимаю* ли я предложение „Существует...“, если у меня нет возможности найти, где это существует?» ([ЗпОМ], IV, 46).

В рамках короткого очерка было невозможно, конечно, затронуть все мысли Витгенштейна, относящиеся к философии математики. Поэтому поставим здесь точку, но прежде приведём две цитаты, характеризующие его взгляды на сущность и на предназначение математики как явления человеческой культуры.

«Являются ли предложения в математике антропологическими предложениями, которые говорят о том, как мы, люди, умозаключаем и вычисляем? — Является ли свод законов сочинением по антропологии, которое сообщает нам, как люди, принадлежащие к данному народу, обращаются с вором и т. д.?» ([ЗпОМ], II, 65).

«Но почему бы ей [математике] вместо того, чтобы „учить нас фактам“, не создавать формы того, что мы называем фактами?» ([ЗпОМ], V, 15).

Примечания

1 [к с. 206]. Принимающей стороной был Российский государственный гуманитарный университет на Миусской площади. Родину Витгенштейна, Австрию, представлял государственный секретарь одного из австрийских министерств, т. е. чиновник достаточно высокого, но всё же не министерского уровня и уж тем более не Государственный секретарь Австрийской республики, каковой должности не существует в природе. Но именно так, по аналогии с Государственным секретарём США, восприняли его российские организаторы конференции. Они называли его не иначе, как *Государственный секретарь Австрии*. И обращались с ним с соответствующим пиететом, как если бы он был одним из высших руководителей иностранного государства. (Не исключаю, впрочем, что российские устроители всё понимали правильно, но стремились создать у публики впечатление, что к ним приехал сам «Господин Финансов».)

Литература

[Б-2] *Бирюков Б. В.* Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времён до эпохи кибернетики. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Знание, 1985. — 191 с.

[В-0] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат / Пер. с нем. И.Добронравова и Д.Лахути; Общ. ред. и предисл. В.Ф.Асмуса. — М.: ИЛ, 1958. — 133 с.

[В-1] *Витгенштейн Л.* Философские работы. — Ч. 1. / Пер. с нем. М. С. Козловой и Ю. А. Асеева; Сост., вступ. статья, примеч. М. С. Козловой. — М.: Гнозис, 1994. — XXI + 520 с.

[В-2] *Витгенштейн Л.* Философские работы. — Ч. 2, кн. 1 / Пер. с нем. М. С. Козловой и Ю. А. Асеева; Вступ. статья М. С. Козловой. — М.: Гнозис, 1994. — XLII + 207 с.

[ЗпОМ] *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики // [В-2], с. 1—207.

[К-1] *Козлова М. С.* Философские искания Л. Витгенштейна // [В-1], с. VII—XXI.

[К-2] *Козлова М. С.* Проблемы оснований математики (к публикации заметок Л. Витгенштейна) // [В-2], с. VII—XXX.

[КЦ] *Витгенштейн Л.* Культура и ценность // [В-1], с. 407—492.

[ЛФТ] *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат // [В-0], с. 27—97; [В-1], с. 1—73.

[Р] *Рассел Б.* Введение [к [ЛФТ]] // [В-0], с. 11—26.

[ФИ] *Витгенштейн Л.* Философские исследования // [В-1], с. 75—319.

On respecting the "otherness" of others[1]

It has been necessary for me to come to Minnesota to learn that I play some role in this project[2]. [*Laughter.*] Many thanks to all of you who have helped me to learn this. Please be merciful about my use of language. I have been taken out of the Russian environment rather suddenly and am not accustomed to speaking English.

Yesterday with my new American colleagues I was in two schools, a high school and a middle school, in Mapleton and in Amboy[3], and I was very impressed with what I saw there. First, I was impressed with the teaching of handicapped children. In America in general you take much care of handicapped people. Beside every stairs there is a smooth path without stairs. In the Soviet Union we are only trying to do this, anywhere we can[4]. What I have seen of the treatment of handicapped persons in ordinary schools, not in special schools, is very important and has a rather philosophical meaning. In the Soviet Union we teach them in special schools — schools for the blind, for the deaf and so on. I personally knew rather well the founder of a famous Soviet school for those who are both deaf and blind, and he explained to me that it was very important for even these students to be embedded in

---

Без названия (но с указанием автора: Vladimir A. Uspensky) опубликовано в сборнике: Education for Global Citizenship in the 21st Century: Explorations by the USSR and the USA: Proceedings of a Soviet/American Conference on Education (October 31—November 2, 1989) organized by the College of Education, Mankato State University, Mankato, Minnesota / Edited by Elaine M. Lilly. — Mankato, Minnesota: Mankato State University, 1990. — P. 30—34.

1 Текст представляет собою запись моего выступления 31 октября 1989 года на пленарном заседании советско-американской конференции по проблемам образования, проходившей с 31 октября по 2 ноября в городе Манкейто (штат Миннесота, США), в Манкейтском университете [1].

2 Речь идёт о проекте «Школа» (School Project) Академии наук СССР. Руководителем проекта был вице-президент Академии Е. П. Велихов, заместителем руководителя — А. Л. Семёнов.

3 Mapleton, Amboy — небольшие населённые пункты в окрестностях Манкейто.

4 Сильное преувеличение.

a normal environment as early as possible. I have heard that 10 years ago you treated handicapped people in special schools too, as we do now. In this area we are behind you and I strongly hope that maybe in 10 years we will teach handicapped students, including mentally retarded children, in ordinary schools. This is a very important thing. This [integration] is important not only for the handicapped or retarded people, but also for "normal" people who interact with them, who see their "otherness," their quite graphic otherness, their "defect", but become accustomed to respect them nevertheless as human beings and as school children. I think it is one of the most important things, to respect the "otherness" of others; to see in them human beings no matter what they might be. This may be the most important aim of any education.

Secondly, what impressed me in Mapleton and Amboy was the fact that school children were impressed by me. Not by my person, but by the fact that I am Russian. I was the first Russian they had seen. Maybe they expected that I would have some horns, a tail... I don't know. But when I was having some refreshments in the teachers' room, the children from other classes which I had not visited came only to see me. They could not explain why they came, only that they came to see what is a Russian. Maybe that is the same thing as with a handicapped person. Maybe I am handicapped but they respect me nevertheless as a human being.

Those were positive impressions for me. But I have a negative impression too. We attended a lesson in the history of the United States and I was asked to put a question to the school children. I asked them about the history of Minnesota before the state was created about a hundred years ago. Were there some inhabitants? Who were they? Did they have any history at all? Or did the history of Minnesota begin only a hundred years ago — not the state of Minnesota, but this area. And they said practically nothing. This relates to the same topic as my previous two comments, the same theme. They do not have any bad impression of the Indians, of course. They showed me a Chippewa[5] in their classroom. But they do not understand Indian

[5] Слово *Chippewa* (также *Chippeway*), переводимое на русский язык как *чиппéва*, есть этноним, обозначающий представителя одного из индейских племён группы алгонкинов. В качестве синонима употребляется также этноним *Ojibwa*, или *Ojibway*, переводимый на русский ныне как *оджúбве*, а прежде как *оджибуэй*. Племя это к XVI веку населяло восточный берег озера Верхнее. Ср. строки из вступления к «Песне о Гайавате» Лонгфелло (H. W. Longfellow, «The Song of Hiawatha»):

history as the history of their country. And I think that is important. You have a very long history, even before Columbus, not only before the creation of the state of Minnesota. (Excuse me as I pretend to teach you this. Excuse me, but it is because I love you and I wish that in this beloved state of Minnesota there would be no defects at all.)

These are my three impressions on the same topic: two positive, and one negative. They bring us to the very profound and philosophical aspects of any education: For what must we educate our children? For what? It is the main question posed by our great writer, without a doubt known to you, Leo Tolstoy. He wrote that mankind creates great bridges and trains and so on and they make war against other countries, but for what? He gave no answer "for what" but he posed an important point and I strongly believe that if we try to agree about some method of education, some technology for education, some educational program, the first question which must be asked and which we must try to answer is "for what?" For what purpose? Is the purpose to have more money, or more power over other human beings? For what? I do not pretend that I have an answer to this important question, but I repeat that maybe it is the most important problem among all educational problems. For what?

Maybe if I can get the answer just now in this room, I will be very happy. But I believe that we all do know part of the answer. The main purpose of our existence as human beings and so of education is to live in harmony with three things, three entities: with ourselves, with the environment, and with other people. Maybe the hardest problem is to be in harmony with ourselves. Dealing with handicapped children helps to resolve this problem because when one learns a merciful and good attitude toward these children, one seems to be better in one's own eyes. And this is an important aspect of the treatment of handicapped people. I will say nothing about living in harmony with the environment, but about harmony with other people, I think that the first thing we are obliged to teach our children is to respect the diversity of mankind, to respect the otherness of any other person — man, woman or child.

...From the great lakes of the Northland,
From the land of the Ojibways <...>

В классическом переводе И. А. Бунина:

...Из озёр страны полночной,
Из страны Оджибуэев <...>

К этому племени оджибуэев (оджибвэев, оджибве, чиппева) принадлежал и сам Гайавата (а жена его Миннегага — к племени дакотов).

I repeat that I don't have a good answer to all of the questions that I'm trying to pose here. But I think that as you in America know better than we in our country, to pose a problem in a proper way is to maybe help solve the problem. I think that maybe in our conference, which is of the greatest importance for me and for my Soviet colleagues, we must at least try to "exactify" the problems and try to find a proper answer to the question, "For what?"

Примечания

1 [к с. 227]. ●▶ Когда мы шли на это заседание, руководитель советской делегации Алексей Львович Семёнов сообщил мне, что после его выступления выступать предстоит мне. Для меня это было полной неожиданностью. Никакого подготовленного текста у меня не было; более того, мне не было заранее сообщено, что когда-либо я должен буду что-либо говорить. Расчёт А. Л. Семёнова был на полную импровизацию — он объявил, что я могу говорить о чём хочу. Единственное, что он потребовал, это сообщить ему название. Пребывая в понятном смятении, я через несколько минут изобрёл что-то вроде «Фундаментальные ценности как основа всякого образования», ещё слабо представляя, что именно я скажу. Когда я произносил свою речь, у меня не было ни малейшего представления, что она где-то фиксируется. Впервые я узнал об этом, увидев весной 1990 года сборник трудов конференции. Надо сказать, что выступление было записано очень точно. ◀●

Семь размышлений на темы философии математики

1. Действительно ли в математике всё определяется и доказывается? — 2. Можно ли определить понятие натурального числа? — 3. Можно ли определить Натуральный Ряд (с прописной буквы)? — 4. Можно ли аксиоматически определить понятие натурального ряда (со строчной буквы)? — 5. «Можно ли доказать, что Великую теорему Ферма нельзя ни доказать, ни опровергнуть?». — 6. Что такое доказательство? — 7. Можно ли сделать математику понятной?

1. Действительно ли в математике всё определяется и доказывается?

Математики, как правило, очень гордятся тем, что они математики. Источник гордости они видят в своей науке — причём не столько в той пользе, которую приносит математика, сколько в том, что это такая уникальная, ни на какую другую не похожая область знаний. И с этой исключительностью согласны и нематематики (так что величие математиков, к удовольствию этих последних, осознаётся не только ими самими, но и окружающими). В самом деле, считается общепризнанным, что математика имеет по крайней мере три присущие только ей черты. Во-первых, в математике, в отличие от других наук, все понятия строго определяются. Во-вторых, в математике — опять-таки в отличие от других наук — всё строго доказывается из аксиом. В-третьих, математика непонятна в такой вызывающей уважительный трепет степени, какая недоступна ни одной другой науке. Непонятна даже в школе (репетиторов по математике едва ли не больше, чем по всем другим школьным предметам, вместе взятым). А уж о современной математической науке и говорить нечего: достаточно раскрыть любую монографию, а тем более журнальную статью. (Заметим, что третья из перечисленных черт

Опубликовано в книге: Закономерности развития современной математики: методологические аспекты / Отв. ред. М. И. Панов. — М.: Наука, 1987. — С. 106—155.

вступает в известное противоречие с первыми двумя, хотя над этим мало кто задумывается.)

Когда что-то общеизвестно, закрадывается подозрение, не миф ли это (ведь общественное мнение обладает автономным механизмом самоподдержания). Постараемся непредвзятым, по возможности, образом критически рассмотреть три только что названные общеизвестные черты математики.

Тогда, во-первых, обнаружим, что определить все математические понятия невозможно. Одно определяется через другое, другое — через третье и т. д.; где-то мы должны остановиться. («Портной учился у другого, другой у третьего, да первоет портной у кого же учился?» — справедливо замечает г-жа Простакова.) Рассказывают, что известный одесский математик С. О. Шатуновский, приводя определение всё новых и новых понятий в ответ на повторные вопросы: «А что такое то-то и то-то?», наконец не выдерживал и сам спрашивал: «А что такое „что такое“?». Давайте задумаемся о принципах толкования слов в словаре какого-либо языка — русского, английского и т. п. В нём одни слова определяются через другие, другие — через третьи и т. д. Но поскольку слов в языке конечное число, то неизбежно возникает круг (т. е. ситуация, в которой слово определяется в конечном счёте через само себя)[1]. Избежать такого круга можно лишь одним способом: оставить некоторые слова без объяснений. В некоторых словарях так и делают[2]. Так же, разумеется, обстоит дело и с понятиями математики. А именно: если только не допускать порочного круга, некоторые понятия должны остаться без определения. Спрашивается, как же могут быть усвоены эти понятия. Ответ: из непосредственного наблюдения, из опыта, из интуиции. Нет нужды напоминать, что формирование общих, абстрактных понятий в мозгу человека — сложный процесс, принадлежащий более психологии, нежели логике. Эти понятия, усваиваемые не из словесного определения, а из непосредственного личного опыта, естественно называть ***первичными понятиями***, или ***категориями***, математики. К числу таких категорий относятся, например, понятия точки, прямой, множества, натурального числа.

---

[1] Полезно представить себе граф, в котором в вершинах размещены слова, а стрелка идёт от вершины X в вершину Y в том случае, если в словарной статье, толкующей слово X, встречается слово Y.

[2] Например, в толковом словаре английского языка Хорнби и Парнуэлла [8] оставлены без объяснений такие слова, как thing (в основном значении) и all. К сожалению, для русского языка подобный, без порочного круга, словарь ещё не создан.

При составлении перечня (который вряд ли может быть вполне определённым) категорий (первичных понятий) математики следует соблюдать известную осторожность. Иначе число первичных понятий будет неоправданно велико в нарушение принципа «бритвы Оккама». В самом деле, возьмём, например, такое понятие, как шар. Шар, как известно, есть геометрическое место точек пространства, удалённых на не более чем заданное расстояние (называемое радиусом шара) от одной определённой точки — центра шара. Однако вряд ли кто-нибудь впервые узнаёт, что такое шар, из этого определения. Надо полагать, что человек усваивает понятие шара в детстве — на примере мяча, глобуса, шарика из подшипника и бильярдного шара. Приведённое выше определение он узнаёт лишь на уроках в школе. При этом отнюдь не всегда учащемуся удосуживаются объяснить, что тот шар, который он знает с раннего детства, и тот шар, который он изучает в школе, — это одно и то же. В результате и возникает представление, что «у них в физике и математике всё наоборот. Может быть, у них и шар пойдёт вверх»[3]. Но следует ли на основании того, что понятие шара узнаётся из опыта, а не из словесной формулировки, считать понятие шара неопределяемым, одной из категорий математики? Вероятно, нет.

Казалось бы, дело обстоит яснее с более сложными и дальше отстоящими от опыта понятиями математики, такими, например, как понятие группы — уж понятие-то группы никак не отнесёшь к числу первичных. Однако формирование понятия группы в умах профессионалов-математиков, возможно, не слишком отличается от образования понятия шара в умах людей вообще (как математиков, так и нематематиков): как понятие шара возникает в результате многочисленного рассмотрения различных шаров, так и понятие группы возникает в результате рассмотрения конкретных групп, а уж потом это понятие закрепляется в словесной формулировке (здесь, разумеется, речь идёт о возникновении понятия группы в коллективном опыте математиков, а не в опыте отдельного математика). Поэтому характерным признаком первичности (категориальности) понятия надлежит считать не способ его возникновения, а способ сообщения сведений о нём при передаче системы знаний. Для разъяснения сказанного представим себе, что носитель некоторой системы знаний —

[3] Эти слова произнёс «неглупый ученик» в оправдание сделанному им на уроке заявлению, что шар, положенный на наклонную плоскость, покатится вверх. Сей замечательный эпизод описан в книге [10] на с. 150—151. ●➤ (Цитата из книги [10] с изложением указанного эпизода приведена в настоящей книге в примечании 1 на с. 367.) ◄●

в нашем случае знаний о математике — должен передать свои знания другому. Тогда он может сообщить другому, что такое шар или что такое группа, пользуясь словесным определением соответствующего понятия. И потому эти понятия не категориальные. Если же нужно сообщить, что такое множество, что такое прямая или что такое натуральное число, то это делается по-другому. Говорится примерно так: все стулья в этой комнате составляют множество, и все страусы за Полярным кругом составляют множество, и все иррациональные числа отрезка [0, 1] составляют множество; и далее, после приведения достаточного числа примеров, говорится: «Всё это множества», и так возникает общее понятие множества. Аналогично говорится: «Ноль, один, два, три, четыре, пять и так далее — всё это натуральные числа», и так возникает общее понятие натурального числа. (Мы видим, что при объяснении понятия натурального числа явно или неявно присутствуют слова «и так далее», иначе и не может быть для первичных понятий: указывается достаточное количество примеров, а дальше — «и так далее».)

Итак, первый из мифов — в математике всё определено — оказывается разрушенным. Перейдём ко второму: в математике всё доказывается из аксиом. Чтобы убедиться, что это не так и таким образом разрушить и этот миф, достаточно открыть классический школьный учебник геометрии А. П. Киселёва, или какой-нибудь втузовский учебник математического анализа, или университетский учебник теории чисел. Мы встречаем в этих учебниках доказываемые теоремы, но вряд ли (за исключением, возможно, аксиомы о параллельных — она же пятый постулат Евклида) найдём какие-либо аксиомы. Дело обстоит несколько загадочным образом. В самом деле, если нет аксиом, то на основе чего происходят доказательства, скажем теорем теории чисел? По-видимому, на основе здравого смысла и неких представлений об основных свойствах натуральных чисел, каковые представления, хотя и одинаковые у всех людей, не сформулированы явно в виде списка аксиом. (Насколько их можно сформулировать — тема следующего размышления.)

Необходима честная констатация того наблюдения, что в реальной математике сплошь и рядом встречаются теоремы, доказываемые без опоры на какие бы то ни было аксиомы. Сложнее дело обстоит с третьей отмеченной нами чертой математики — её непонятностью. Проще всего сказать, что это миф, но если относительно первых двух черт достаточно было спросить самоё математику — спросить и получить отрицательный ответ, — то здесь, конечно, обращение к математике с вопросом, понятна ли она, неуместно. А опрос обще-

ственного мнения, безусловно, выставит математику на призовое место по уровню непонятности. Выяснение причин этого явления — которое следует признать настолько объективным, насколько вообще могут быть объективными явления социальной психологии, — тема отдельного большого исследования, на которое мы не замахиваемся. Некоторым комментариям на эту тему будет посвящено наше последнее размышление.

2. Можно ли определить понятие натурального числа?

Конечно, можно сказать, что *натуральное число* — это количество предметов в конечной совокупности. Эта формулировка, по-видимому, будет отвечать как значению (точнее, одному из значений) слова «определить», предложенному «Толковым словарём русского языка» под редакцией Д. Н. Ушакова [5] («дать научную, логическую характеристику, формулировку какого-либо понятия, раскрыть его содержание»), так и формулировке «Философской энциклопедии» [11] [«поскольку результаты изучения объекта отображаются в соответствующих понятиях, определение можно рассматривать как формулирование (в явной и сжатой форме) содержания этих понятий»]. Подойдём, однако, к понятиям «определить», «определение» с позиций математика. А именно: потребуем, чтобы определение содержало в себе исчерпывающую информацию об определяемом понятии — настолько исчерпывающую, что человек, ничего ранее не знавший об этом понятии, мог бы составить правильное представление о нём исключительно из предложенного определения. Можно ли в таком случае предположить, что человек, вовсе не знающий, что такое натуральное число (не термин, а именно понятие), может усвоить это понятие из первой фразы данного абзаца? Весьма сомнительно: вряд ли, искренне не зная, что такое число, он понимает, что количество предметов не означает, скажем, их суммарного веса, да и само понятие конечной совокупности предметов расплывается при переходе к очень большим совокупностям. Вероятно, все согласны, что триллион в триллионной степени — это натуральное число; однако это число больше числа атомов во Вселенной. Неясно, насколько уместно говорить о конечной совокупности, состоящей из триллиона в триллионной степени предметов [16].

Итак, будем придирчиво требовать от определения исчерпывающей полноты, т. е. будем требовать, чтобы определяемое понятие выражалось с помощью общепринятых синтаксических конструкций

через другие понятия, отправные для рассматриваемого определения. С учётом сказанного попробуем предложить такую формулировку: натуральное число — это мощность конечного множества. В этом определении участвуют три основных понятия: 1) множество, 2) мощность, 3) конечное. В рамках тех теорий, в которых эти понятия уже как-то разъяснены (в частности, объявлены неразъясняемыми, или первичными), приведённая только что формулировка действительно является определением натурального числа. Именно такое определение — в идейном смысле такое, с точностью до несущественных деталей — принято, например, в трактате Николя Бурбакú «Начала математики»[4]. (Напомним в связи с этим, что полное имя единицы в теории Бурбаки требует для своей записи десятков тысяч знаков [6], с. 188.) Однако здравый смысл отказывается признать понятия множества, мощности, конечного более простыми, чем понятие натурального числа. Здесь типичный пример определения простого через сложное. (Как в прибаутке: «Плазма, или, короче говоря, протоплазма».)

Сказанное не следует воспринимать как критику в адрес Н. Бурбаки и других авторов, предлагающих аналогичные формулировки. Разумеется, они, как и все люди, имеют априорное представление о натуральном числе (априорное, конечно же, по отношению к предлагаемому определению, но не к опыту). Они не ставят себе цели дать объясняющее определение понятия натурального числа (т. е. определение, которое могло бы послужить для обучения новичка). Их цель более скромна и более технична — дать определение этому понятию в рамках излагаемой аксиоматической теории множеств.

Можно определить понятие функции через понятие пары, а можно — понятие пары через понятие функции. Ясно, что эти умственные построения имеют мало общего с объяснением непосвящённому, что такое пара и что такое функция. Все предыдущие рассуждения имеют целью подвести к следующей почти очевидной

[4] Автор пользуется случаем выразить свой протест против получившего, к сожалению, распространение русского перевода названия трактата Бурбаки как «Элементы математики» (в подлиннике «Eléments de mathématique»). Французские издания «Начал» Евклида также озаглавлены «Eléments». Параллельность замыслов Евклида и Бурбаки бросается в глаза. (Несколько менее очевидное сходство заключается в загадочности личностей обоих авторов и скудности биографических сведений о них. Ведь само существование Евклида как отдельного человека иногда подвергается сомнению.) Если принятое русское название трактата Евклида, укоренившееся ещё в XIX веке, есть «Начала», то русским названием для трактата Бурбаки должно быть «Начала математики».

мысли. Оставим в стороне математическую и логическую проблематику, связанную с поисками определения (а правильнее было бы сказать — поисками отражения, моделирования) понятия натурального числа в рамках той или иной аксиоматической теории. Займёмся попытками дать «наивное» объяснение понятия натурального числа, позволяющее незнающему узнать, что это такое. Довольно скоро мы убеждаемся, что такие попытки бесплодны. Натуральное число следует признать первичным, неопределяемым понятием, одной из категорий математики.

Замечание. Читатель был вправе удивиться тому, что мы считаем ноль натуральным числом, тогда как в школе учат, что наименьшим натуральным числом является единица. Дело в том, что на самом деле есть два понятия натурального числа, считательное и количественное. Считательные натуральные числа возникают в процессе пересчёта предметов: один, два, три и т.д. Поэтому наименьшее считательное число есть единица. В начальных классах школы появляются именно считательные числа. Количественное же натуральное число отражает количество предметов конечной совокупности, каковая совокупность может быть и пустой, т. е. не содержать ничего. Поэтому наименьшее количественное число есть ноль (нуль). Вот что писал по этому поводу выдающийся математик Павел Сергеевич Александров (следует учесть, что математики обычно вместо слова «совокупность» употребляют слово «множество», имеющее в математике тот же смысл): «К числу конечных множеств мы причисляем и пустое множество, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента; число элементов пустого множества есть нуль. Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что, когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью[5], так как, может быть, какой-нибудь капитан и завёз какого-нибудь страуса за Полярный круг».

3. Можно ли определить Натуральный Ряд (с прописной буквы)?

Потерпев неудачу в попытках определить, что такое натуральное число (или, напротив, преуспев в отнесении этого понятия

[5] Цитата относится к 1948 году. П. С. Александров как бы предвидел начавшееся в последние годы разведение страусов в Северном полушарии. — *В. У.*

к категории неопределяемых), обратимся к понятию Натурального Ряда. Натуральный Ряд — с большой, или прописной, буквы — это совокупность всех натуральных чисел. Если мы знаем, что такое натуральное число и понимаем слова «совокупность всех», то мы знаем и что такое Натуральный Ряд. И наоборот, зная Натуральный Ряд, мы легко определим натуральное число как его элемент. Поэтому понятие Натурального Ряда столь же неопределимо, как и понятие натурального числа; впрочем, можно считать фразу «Натуральный Ряд есть множество всех натуральных чисел» законным определением понятия Натурального Ряда через первичные неопределимые понятия 'натуральное число' и 'множество всех'.

«Как же так? — воскликнет читатель. — А аксиомы Пеано? Разве они не определяют Натуральный Ряд?». Конечно нет, да они на это и не претендуют, если понимать Натуральный Ряд так, как мы его понимаем — т. е. как единственную (!) совокупность некоторых однозначно понимаемых сущностей, называемых натуральными числами. В самом деле, посмотрим, как выглядят аксиомы Пеано. Они гласят: «Ноль есть натуральное число, и ноль не следует ни за каким натуральным числом, и т. д.». Таким образом, они опираются на понятия 'ноль' и 'следовать за' (имеется в виду непосредственное следование). Но они не разъясняют, да и не могут разъяснить, что означают эти понятия (т. е. что такое 'ноль' и что такое 'следовать за'), а лишь указывают связи между ними. Причём аксиомы сформулированы таким образом, что если ноль этих аксиом — это обычный Ноль[6] Натурального Ряда, а «следование за» означает непосредственное следование одного числа за другим в Натуральном Ряду (так что за Нолём следует Единица, за Единицей — Двойка и т. д.), то все эти связи будут выполнены в Натуральном Ряду. Иными словами, аксиомы Пеано оказываются верными, истинными утверждениями при естественной их интерпретации на Натуральном Ряду. Но они, разумеется, будут верны не только на Натуральном

[6] Названия Членов Натурального Ряда — Ноль, Один (Единица), Два (Двойка) и т. д. — мы пишем с прописной буквы, чтобы подчеркнуть уникальность, т. е. абсолютную единственность, этих членов. Слова «Ноль», «Один» (или «Единица»), «Два» (или «Двойка») и т. д. — собственные имена в абсолютном смысле (такие, как слова «Солнце», «Луна», «Земля»), у каждого из них единственное значение — количество элементов пустого, одноэлементного, двухэлементного и т. д. множества. А «ноль» аксиом Пеано является именем собственным лишь относительно, в пределах данного контекста, а точнее, в контексте той структуры, которая описывается этими аксиомами. Таких структур много, и в каждой из них свой ноль.

Ряду, но и на всякой структуре, изоморфной[7] Натуральному Ряду. Например, если интерпретировать встречающийся в аксиомах Пеано термин «ноль» как наименьшее простое число, а термин «следовать за» — как переход от одного простого числа к ближайшему за ним следующему простому числу, то при такой интерпретации все аксиомы Пеано окажутся верными. Выходит, они, эти аксиомы, не дают даже возможности отличить Натуральный Ряд от совокупности всех простых чисел. Повторяю, они на это и не претендуют. Они претендуют на то, чтобы, как говорят, «определить Натуральный Ряд с точностью до изоморфизма»[8]. Более точно это означает, что аксиомы Пеано определяют не одну, а сразу много математических структур, причём все эти структуры изоморфны Натуральному Ряду и, следовательно, изоморфны между собой. Ещё более точно, аксиомы Пеано определяют весь класс таких структур. Любую такую структуру будем называть натуральным рядом (с маленькой, или строчной, буквы!). Таким образом, Натуральный Ряд есть один из натуральных рядов.

Говоря коротко, изоморфизм двух математических структур — это взаимно однозначное соответствие между совокупностями элементов первой структуры и второй структуры, сохраняющее определённые на этих структурах операции и отношения. В нашем примере изоморфизм между структурой $\mathbb{N}$ (Натуральный Ряд с операцией «следовать за») и структурой $\mathbb{P}$ (простые числа с операцией «следовать за») задаёт бесконечная таблица

0	1	2	3	4	5	6	...
2	3	5	7	11	13	17	...

Операция «следовать за» при этом соответствии действительно сохраняется: 6 следует за 5, и одновременно 17 следует за 13, и вообще y следует за x в верхнем ряду тогда и только тогда, когда соответствующие им члены нижнего ряда p_y и p_x (именно в этом

[7] По поводу понятий 'изоморфизм', 'изоморфный' мы отсылаем читателей ко второй из двух статей «Изоморфизм» в 3-м издании Большой Советской Энциклопедии [14].

[8] Хотя обычно говорят «с точностью до изоморфизма», возможно, более правильным было бы говорить «с точностью до изоморфии». Дело в том, что *изоморфизм* — это математический объект, а именно такое соответствие между двумя структурами, которое сохраняет свойства этих структур (несколько более точно — сохраняет характерные для этих структур отношения и операции). *Изоморфия* же двух структур означает факт существования изоморфизма между ними.

порядке!) следуют один за другим (следуют в смысле, определённом для $\mathbb{P}$).

Иногда говорят, что Натуральный Ряд — это есть ряд

ноль, один, два, три, . . ., сто двадцать шесть, . . .

(его членами являются выражения, составленные из русских букв и пробелов между словами); или ряд

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 126,\ \ldots$$

(его членами являются выражения, составленные из арабских цифр); или ряд

$$\underline{\overline{0}},\ \mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \ldots,\ \mathrm{CXXVI},\ \ldots$$

(его членами являются выражения, составленные из римских цифр с добавлением придуманного нами символа $\underline{\overline{0}}$ — «римский ноль»).

Разумеется, любой из этих рядов не есть Натуральный Ряд (который состоит из абстрактных количественных категорий и не может быть изображён), а есть всего лишь ряд имён, обозначений для его членов, т. е. для натуральных чисел. Вместе с тем каждый из этих рядов имён может рассматриваться как один из натуральных рядов с маленькой буквы.

Ситуация с Натуральным Рядом имеет универсальный характер. Аналогичным образом обстоит, например, дело с тем трёхмерным евклидовым пространством, в котором мы живём. Отвлечёмся от того, что мы, скорее всего, живём в неевклидовом пространстве, да и вообще живём в пространстве не математическом, а физическом[9], а это разные вещи. Вообразим, отвлекаясь от реальности, что мы живём в совершенно конкретном трёхмерном Евклидовом Пространстве (мы опять употребляем прописные буквы, чтобы подчеркнуть уникальность этого пространства). Конечно, его нельзя определить никаким числом аксиом, а можно только «указать пальцем». С другой стороны, существуют многочисленные системы аксиом (наиболее известная из них принадлежит Гильберту [3]), определяющих

[9] Заметим в связи с этим, что «физический» Натуральный Ряд, скорее всего, отличается от своей математической модели — «математического» Натурального Ряда. См. по этому поводу глубокую и недостаточно оценённую статью П. К. Рашевского [16]. Вот цитата из неё: «Духу физики более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобретали бы в каком-то смысле „размытый вид“, а не являлись строго определёнными членами натурального ряда, как мы это себе представляем. Существующая теория, так сказать, переуточнена: добавление единицы меняет число — а что меняет для физика добавление одной молекулы в сосуд с газом?».

это пространство «с точностью до изоморфизма». Взятое в кавычки выражение означает, что система аксиом определяет целый класс изоморфных между собой пространств, а наше «реальное» Евклидово Пространство — одно из них.

Вообще, никакая система математических аксиом никогда не определяет какую-либо структуру однозначным образом, в лучшем случае — с точностью до изоморфизма. (Мы говорим «в лучшем случае», поскольку бывают и весьма важные системы аксиом, определяющие класс неизоморфных структур. Например, аксиомы теории групп определяют математические структуры, называемые группами, но не все они изоморфны между собой.)

Подведём итоги. Определить аксиоматически Натуральный Ряд невозможно. Можно пытаться определить аксиоматически понятие натурального ряда, т. е. понятие произвольной структуры, изоморфной Натуральному Ряду. Обсуждению этих попыток мы посвящаем наше следующее размышление.

4. Можно ли аксиоматически определить понятие натурального ряда (со строчной буквы)?

Итак, приступим к попыткам определить аксиоматически понятие натурального ряда — структуры, изоморфной Натуральному Ряду. Как только произносится слово «изоморфизм», тем самым предполагается, что указано, какие отношения и операции должны сохраняться при этом изоморфизме. Следовательно, мы должны прежде всего точно указать, какие отношения и операции мы желаем рассматривать на Натуральном Ряду и изоморфных ему натуральных рядах. В число этих операций могут быть включены нольместные операции (т. е. индивидные константы; например, индивидную константу «ноль» можно рассматривать как нольместную операцию) и одноместные отношения (т. е. свойства). Указание этих выделенных операций и отношений в значительной мере произвольно. Например, можно рассматривать Натуральный Ряд (а значит, и любой изоморфный ему натуральный ряд): 1) как структуру лишь с отношением порядка «<», или 2) как структуру с выделенным элементом «ноль» и операцией «переход к следующему», или 3) как структуру, в которой помимо уже названных отношений и операций выделены ещё операции сложения и умножения.

Для наших целей нагляднее всего не задавать никаких операций, а задать лишь отношение порядка «<». Итак, мы рассматриваем каждый натуральный ряд как множество, на котором определено

бинарное отношение порядка «<». Именно свойства такой математической структуры мы и будем исследовать.

Перейдём к перечислению этих свойств. Каждое свойство отношения «<» в произвольном натуральном ряду должно (в силу наличия изоморфизма) иметь место и в обычном Натуральном Ряду, когда отношение «<» понимается как обычное отношение порядка между натуральными числами. После этого замечания сформулируем несколько таких свойств.

1. Отношение «<» транзитивно. В символах:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x<y\ \wedge\ y<z\ \Rightarrow\ x<z).$$

2. Отношение «<» антирефлексивно. В символах:

$$\forall x\ \neg(x<x).$$

3. Отношение «<» связно. В символах:

$$\forall x\ \forall y\ (x<y\ \vee\ y<x\ \vee\ x=y).$$

Эти три свойства в своей совокупности утверждают просто-напросто, что «<» есть отношение строгого линейного порядка.

Прежде чем двигаться дальше, остановимся и задумаемся: а зачем, собственно, мы перечисляем эти свойства? А вот зачем. Мы надеемся, что, перечислив некоторое число свойств, мы сумеем дать аксиоматическое определение натурального ряда. Более подробно наш план таков. Сперва мы выписываем некоторое число характерных для Натурального Ряда свойств. Затем мы объявляем эти свойства аксиомами и определяем натуральный ряд как произвольную математическую структуру, удовлетворяющую выписанным аксиомам. Мы не претендуем на то, что ровно одно определённое множество с заданным на нём бинарным отношением «<» будет удовлетворять нашим аксиомам (такая претензия была бы совершенно нереальна), но претендуем на то, что все такие множества (с заданным на них отношением) окажутся изоморфными между собой. А поскольку наши аксиомы будут выполняться на Натуральном Ряду (так мы будем выбирать аксиомы), то Натуральный Ряд будет одной из попарно изоморфных структур, удовлетворяющих аксиомам, и значит, все эти изоморфные между собой структуры будут изоморфны и Натуральному Ряду. Если нам удастся достичь изложенной только что цели, мы и будем считать, что сумели аксиоматически определить натуральный ряд (со строчной буквы!).

Можем ли мы, имея в виду поставленную цель, довольствоваться тремя выписанными свойствами — аксиомами? Разумеется, нет.

Этим аксиомам удовлетворяют все линейно упорядоченные множества, среди которых много неизоморфных и, следовательно, заведомо неизоморфных Натуральному Ряду $\mathbb{N}$. Например, множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с обычным отношением порядка будет удовлетворять выписанным трём аксиомам. Наблюдая совместно $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$, мы замечаем, что $\mathbb{N}$ имеет по крайней мере два свойства, которых нет в $\mathbb{R}$. Вот они.

4. В $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент. В символах:

$$\exists x\ \forall y\ (x=y \vee x<y).$$

5. В $\mathbb{N}$ за каждым элементом x непосредственно следует некоторый y. («Непосредственно» — это значит, что между x и y нет третьего элемента.) В символах:

$$\forall x\ \exists y\ (x<y \wedge \neg\exists z\ (x<z \wedge z<y)).$$

Эти пять аксиом уже значительно сужают круг удовлетворяющих им линейно упорядоченных множеств. Этим аксиомам удовлетворяет Натуральный Ряд, а также, например, такое множество действительных чисел (рассматриваемое с обычным порядком):

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \ldots. \qquad (*)$$

Наличие этой, отличной от $\mathbb{N}$, структуры (*), удовлетворяющей аксиомам 1—5, ещё не служит препятствием к тому, чтобы считать эти аксиомы аксиоматическим определением натурального ряда, ведь эта структура изоморфна $\mathbb{N}$ (и, таким образом, может признаваться натуральным рядом). Графическое изображение порядка на (*) (и на $\mathbb{N}$) приведено на рис. 1.

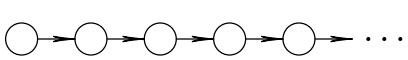


Рис. 1

Легко заметить, однако, что аксиомам 1—5 удовлетворяет и такая структура (т. е. множество плюс отношение порядка):

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \ldots,\ 10,\ 10\frac{1}{2},\ 10\frac{2}{3},\ 10\frac{3}{4},\ \ldots. \qquad (**)$$

Графический образ этой порядковой структуры приведён на рис. 2.

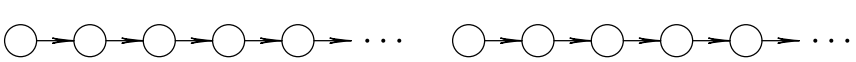


Рис. 2

В этой структуре у двух элементов (у 0 и у 10) нет непосредственных предшественников, чего не наблюдается в $\mathbb{N}$. Тем самым, структура (**) неизоморфна Натуральному Ряду $\mathbb{N}$. Запретим эту ситуацию следующей аксиомой 6.

6. Если у двух элементов x_1 и x_2 нет непосредственных предшественников, то они равны. В символах:

$$\forall x_1\ \forall x_2\ \{\neg\exists y_1\ [y_1 < x_1\ \wedge\ \neg\exists z_1\ (y_1 < z_1\ \wedge\ z_1 < x_1)]\ \wedge \\ \wedge\ \neg\exists y_2\ [y_2 < x_2 \wedge \neg\exists z_2\ (y_2 < z_2 \wedge z_2 < x_2)] \Rightarrow x_1 = x_2\}.$$

Аксиома 6 исключает структуру (**), но не исключает такой структуры:

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ 9+\frac{1}{m},\ 9+\frac{1}{m-1},\ \ldots, 9\frac{1}{4},\ 9\frac{1}{3},\ 9\frac{1}{2}, \\ 10,\ 10\frac{1}{2},\ 10\frac{2}{3},\ \ldots,\ 10+\frac{n-1}{n},\ \ldots. \qquad (***)$$

Структура (***), очевидно, не изоморфна натуральному ряду. Её графический образ приведён на рис. 3.

Рис. 3

Наша цель, подобно горизонту, отодвигается всё дальше и дальше... Оказывается, она вообще недостижима. Оказывается, имеет место следующий поразительный факт: сколько бы мы ни выписывали аксиом, использующих логические знаки, знак отношения «<» и переменные, пробегающие по элементам определяемой структуры, у совокупности выписанных аксиом всегда будет модель, не изоморфная натуральному ряду. Ввиду фундаментальной важности этого факта (означающего невозможность аксиоматического определения натурального ряда с использованием указанных средств) изложим его подробнее.

Будем записывать аксиомы на формализованном символическом языке, в алфавит которого входят следующие знаки:

1) знаки препинания — левая скобка «(» и правая скобка «)»;

2) логические знаки «$\neg$», «$\wedge$», «$\vee$», «$\Rightarrow$», «$\forall$», «$\exists$», «$=$»;

3) индивидные переменные x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, ...;

4) знак «<».

С помощью этих букв по естественным и легко формулируемым синтаксическим правилам составляются *формулы*. Простейшие примеры формул:

$$x<y \ \wedge \ y<x;$$
$$\forall x \ (x<x);$$
$$\exists x \ \exists y \ (y<x \Rightarrow y<x);$$
$$\exists y \ (x<y);$$
$$\forall x \ \exists y \ (x<y).$$

Возьмём теперь какое-либо множество с каким-либо определённым на нём бинарным отношением (не обязательно отношением строгого порядка), обозначаемым через «<». Всякое такое множество с отношением «<» будем называть *структурой сигнатуры* <. Таким образом, структура сигнатуры < состоит из множества (называемого *носителем структуры*) и отношения «<». Назначим для каждой индивидной переменной носитель структуры в качестве области изменения этой переменной. Тогда каждая формула становится либо высказыванием, как вторая, третья и пятая формула из приведённого только что списка, либо высказывательной формой, как первая и четвёртая формулы. Формулы, превращающиеся в высказывания, называются *закрытыми*[10], только их мы и будем впредь рассматривать. Про (закрытую) формулу, становящуюся — при рассмотрении на данной структуре — истинным высказыванием, говорят, что она *истинна на данной структуре* или *выполняется на данной структуре*, а про структуру — что она *удовлетворяет данной формуле*.

Среди структур сигнатуры < выделена структура $\mathbb{N}$ — наш обычный Натуральный Ряд с обычным отношением порядка. Будем называть *аксиомой* любую закрытую формулу, превращающуюся в истинное высказывание при интерпретации на структуре $\mathbb{N}$. Так вот, какое бы — конечное или бесконечное — количество аксиом мы ни выписывали, всегда найдётся такая структура сигнатуры <, которая, во-первых, удовлетворяет всем выписанным аксиомам и, во-вторых, не изоморфна $\mathbb{N}$.

Получается, таким образом, что натуральный ряд нельзя определить аксиоматически: ведь определить $\mathbb{N}$ аксиоматически — это

[10] Нетрудно заметить, что свойство закрытости формулы не зависит от того, применительно к какой структуре мы рассматриваем эту формулу; это свойство может быть определено чисто синтаксически по внешнему виду формулы. (Все переменные должны быть связаны кванторами; в этом и состоит закрытость.)

значит записать такую систему аксиом, которая определяла бы $\mathbb{N}$ с точностью до изоморфизма (это, в свою очередь, значит, что любые две структуры, удовлетворяющие всем выписанным аксиомам, изоморфны).

«Позвольте, — снова возразит читатель, — но аксиомы Пеано ведь определяют Натуральный Ряд как раз с точностью до изоморфизма. Система аксиом Пеано категорична, а это как раз и означает, что все её модели[11] изоморфны». Немножко терпения, разберёмся и с аксиомами Пеано.

А сейчас обсудим вот какой вопрос. На Натуральном Ряде определено не только отношение порядка «<», но и бесчисленное множество других отношений и операций. Среди них двуместное (или бинарное) отношение делимости двух чисел; трёхместное (или тернарное) отношение «$x+y=z$»; одноместное (или сингулярное, singulary[12]) отношение «быть простым числом» (напомним, что свойства мы трактуем как одноместные отношения); двуместная операция сложения; двуместная операция умножения; двуместная операция возведения в степень (причём $0^0=1$); одноместная операция непосредственного следования (мы будем, как это часто делается, обозначать её штрихом, так что, например, $0'=1$; $13'=14$); константы 0, 1, 2, 3, 4, . . . (напомним, что константы мы трактуем как нольместные операции); четырёхместная операция $[\log_{u+2} z! + y^{x\cdot z+u}]$ (здесь, как обычно, через $[a]$ обозначается целая часть числа a); и многие другие. Мы привели лишь несколько примеров, а всего на $\mathbb{N}$ определено несчётное количество операций и отношений. Для того чтобы определить понятие структуры, изоморфной $\mathbb{N}$, мы сперва должны из этого количества выделить некоторые (теоретически возможно — все) операции и отношения и рассмотреть изоморфизм относительно именно этих выделенных операций и отношений. На самом деле поэтому не существует понятия натурального ряда просто, а только понятие натурального ряда относительно данного списка операций и отношений. Выше мы рассматривали понятие натурального ряда относительно списка, в котором операций не было вовсе, а отношение одно — отношение 'быть меньше'.

Выделенные на множестве операции и отношения, а также выделенные элементы множества (таковых у нас пока не было) называют

[11] *Моделью* системы, или списка, аксиом называется всякая структура, удовлетворяющая каждой из аксиом системы.

[12] «Вслед за У. В. Куайном мы принимаем этот этимологически более правильный термин вместо распространённого в настоящее время термина unary (унарный)» [7], примечание 29.

в контексте наших рассмотрений *сигнатурными*, а список таких операций и отношений — *сигнатурой*. Точнее, сигнатурой называют список не самих выделенных элементов, операций и отношений, а список их имён, но для наших целей это различие (само по себе очень важное) не слишком существенно, и нам проще его не замечать. Множество с выделенными операциями и отношениями, образующими список σ, называется (*математической*) *структурой сигнатуры* σ. Теперь мы можем сказать, что всякий натуральный ряд является структурой той или иной сигнатуры σ. Поэтому следует говорить не о натуральном ряде вообще, а о натуральном ряде сигнатуры σ. До сих пор мы рассматривали случай, когда

$$\sigma = \{<\}.$$

Может быть, причина нашего неуспеха в попытке определить аксиоматически натуральный ряд вызвана именно бедностью сигнатуры? Давайте расширять сигнатуру и наблюдать, что́ при этом будет происходить.

Сперва добавим в сигнатуру константу «0» (для обозначения наименьшего, относительно порядка «<», элемента) и штрих «$'$» для обозначения операции непосредственного следования. На Натуральном Ряде $\mathbb{N}$ эти объекты подчинены аксиомам (свойствам) 7 и 8 (ср. свойства 4 и 5, которые вытекают из свойств 7 и 8).

7. $\forall y\ (0 = y \vee 0 < y)$.

8. $\forall x\ (x < x' \wedge \neg\exists z\ (x < z \wedge z < x'))$.

Всякий натуральный ряд с сигнатурой $\{0, ', <\}$ изоморфен, по определению, Натуральному ряду $\mathbb{N}$, причём изоморфизм рассматривается относительно $\{0, ', <\}$. Поэтому всякий такой натуральный ряд состоит из элементов $0, 0', \ldots$, упорядоченных следующим образом: $0 < 0' < 0'' < 0''' < \ldots$.

З а м е ч а н и е. Следует отдавать себе отчёт, что в каждом натуральном ряду свой 0, свой $'$ и своё $<$, т. е. свой элемент, обозначенный через «0», своя операция, обозначенная через «$'$», и своё отношение, обозначенное через «<». Строго говоря, для каждого натурального ряда мы должны были бы придумать своё обозначение этих объектов — например, если мы рассматриваем натуральный ряд $\mathbb{M}$, то можно прибавлять эту букву «$\mathbb{M}$» в качестве индекса к знакам «0», «$'$», «<». Эта строгость создаёт некоторое удобство. Однако отсутствие строгости тоже создаёт некоторое удобство. Считается, что в данном случае удобство от нестрогости больше, и поэтому одним и тем же знаком «0» обозначаются различные элементы (но в каждом

натуральном ряду — один и только один элемент ноль; в частности, в Натуральном Ряду — мощность пустого множества). Аналогично знак «<» обозначает различные отношения (но в каждом натуральном ряде только одно) и знак «$'$» обозначает различные операции (но в каждом натуральном ряде — только одну). Сказанное сохраняет силу не только для натуральных рядов, но и для любых структур сигнатуры $\{0, ', <\}$, не обязательно изоморфных $\mathbb{N}$.

Посмотрим теперь, как выглядит произвольная структура сигнатуры $\{0, ', <\}$, подчиняющаяся аксиомам 1—8 (аксиомы 4 и 5 следуют из аксиом 7 и 8, но в этом нет большой беды). Она, очевидно, представляет собой линейно упорядоченное множество, в котором 0 есть наименьший элемент, $0'$ — непосредственно следующий за 0 элемент (так что между 0 и $0'$ ничего нет), $0''$ — непосредственно следующий за $0'$ элемент и т. д. Все эти элементы $0, 0', 0'', 0''', \ldots$ образуют начальный отрезок нашей структуры. Этот начальный отрезок называется стандартной частью структуры, а оставшаяся часть (она может быть и пустой) — нестандартной. Стандартная часть изоморфна Натуральному Ряду $\mathbb{N}$. Если бы оказалось, что в любой структуре сигнатуры $\{0, ', <\}$, подчиняющейся аксиомам 1—8, нет ничего, кроме стандартной части, то наша цель была бы достигнута: аксиомы 1—8 давали бы в своей совокупности искомое аксиоматическое определение натурального ряда, точнее, натурального ряда сигнатуры $\{0, ', <\}$.

Однако это не так, поскольку структура, графически изображённая на рис. 3, такая как, скажем, (***), где

$$0' = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)' = \frac{2}{3}, \quad \left(9\frac{1}{4}\right)' = 9\frac{1}{3} \quad \text{и т. д.},$$

удовлетворяет аксиомам 1—8, но не изоморфна $\mathbb{N}$: в ней есть непустая «нестандартная» часть (на рис. 3 эта нестандартная часть изображена справа), в (***) эта нестандартная часть состоит из элементов вида $9 + \frac{1}{m}$ и $10 + \frac{n-1}{n}$. Более того, оказывается, что никакие аксиомы не могут задать натуральный ряд сигнатуры $\{0, ', <\}$, поскольку структура на рис. 3 всегда будет моделью для таких аксиом.

Может быть, дело всё ещё в бедности сигнатуры? Что будет, если добавить сложение и умножение и рассматривать натуральный ряд не сигнатуры $\{0, ', <\}$, а сигнатуры $\{0, ', <, +, \cdot\}$? Можно ли для такой более богатой сигнатуры составить список аксиом, определяющих понятие натурального ряда этой сигнатуры, т. е. выделить из *всех* структур этой сигнатуры те структуры, которые относительно $0, ', <,$

$+, \cdot$ изоморфны $\mathbb{N}$? Оказывается, нет, нельзя. Какую бы совокупность аксиом[13] — конечную или бесконечную — мы ни образовали, всегда для этой совокупности будут существовать структуры (сигнатуры $\{0, ', <, +, \cdot\}$), не изоморфные $\mathbb{N}$.

Более того, *какую бы* мы ни взяли *сигнатуру* и *какую бы* ни взяли для этой сигнатуры *систему аксиом*, всегда будет существовать модель этой системы аксиом, не изоморфная Натуральному ряду $\mathbb{N}$. Такие неизоморфные $\mathbb{N}$ модели называют *нестандартными*, а аксиомы, перечисляющие свойства натурального ряда (особенно, когда в сигнатуру входят «+» и «·»), называют *аксиомами арифметики*. Поэтому сказанное можно выразить и так: *для любой системы аксиом арифметики существует нестандартная модель*.

Если в число аксиом входят аксиомы 1—8 или какие-нибудь им равносильные, то в любой модели можно выделить стандартную часть $0, 0', 0'', \ldots$; нестандартность модели означает в этом случае непустоту нестандартной части. Эта нестандартная часть может оказаться устроенной более сложно, чем на рис. 3. На рис. 3 нестандартная часть подобна, с точки зрения порядка, множеству $\mathbb{Z}$ всех целых чисел. При естественных же аксиомах для сигнатуры, включающей операцию сложения, нестандартная часть всякой счётной (т. е. насчитывающей счётное число элементов) структуры, удовлетворяющей этим аксиомам, имеет вид, который мы (не очень удачно) пытались изобразить на рис. 4. На этом рисунке мы пытались как-то выразить следующую идею: берётся очень много (бесконечное счётное число) экземпляров множеств целых чисел $\mathbb{Z}$, и эти экземпляры располагаются так, как расположено множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

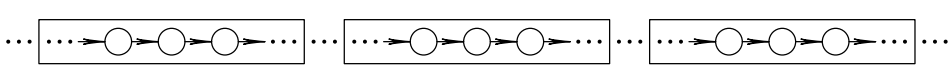


Рис. 4

Итак, *предъявить систему аксиом, определяющую понятие натурального ряда* (какой угодно сигнатуры), *невозможно*. Более подробная расшифровка этого утверждения, как мы знаем, такова: какие ни выбрать определённые на $\mathbb{N}$ операции и отношения, не может быть такой системы аксиом, все модели которой изоморфны $\mathbb{N}$ относительно этих операций и отношений.

[13] Когда мы говорим об аксиомах, мы имеем в виду символический язык, подобный описанному выше для сигнатуры $\{<\}$; только теперь в алфавит его знаков вместе с «<» входят «0», «$'$», «+», «·».

Вот теперь и ответим на вопрос: а как же аксиомы Пеано?

Классические аксиомы Пеано с несущественными изменениями устроены так. Рассматривается сигнатура $\{0, '\}$. Формулируются три аксиомы.

I. $\neg\exists x\ (x' = 0)$.

II. $\forall x\ \forall y\ (x' = y' \Rightarrow x = y)$.

III. *Аксиома индукции.*

Третью аксиому, аксиому индукции, мы пока только назвали, но не выписали. Теперь выпишем её:

$$\forall P\ \{[P(0) \wedge \forall x\ (P(x) \Rightarrow P(x'))] \Rightarrow \forall x\ P(x)\}.$$

Приглядимся к аксиоме индукции. Мы замечаем, что в ней наряду с обычной индивидной переменной встречается ещё переменная P. Разъясним смысл этой переменной. Прежде всего напомним, что семантика формулы (т. е. придание этой формуле смысла) возникает лишь после того, как предъявляется математическая структура соответствующей сигнатуры. В частности, чтобы обрели смысл аксиомы Пеано (формулы I—III), надо предъявить какую-либо структуру сигнатуры $\{0, '\}$, т.е. множество с выделенным элементом, обозначенным через «0», и выделенной одноместной операцией, обозначенной через «$'$». Тогда сразу определяется область изменения переменной x (как и всякой индивидной переменной): это есть множество всех элементов рассматриваемой структуры. Какова же область изменения переменной P?

Переменная P — особая, не встречавшегося ещё в нашем изложении типа. Её область изменения состоит из всевозможных свойств (= одноместных отношений), определённых на рассматриваемой структуре, т. е. свойств элементов этой структуры.

Понятие свойства относится к первичным и постигается из примеров. На натуральных числах определено, например, свойство чётности: каждое число может быть либо чётным, либо нечётным. Здесь несущественно, что бывают как чётные, так и нечётные числа; нас устроила бы ситуация, когда все числа — чётные; важно, что для каждого числа осмыслен вопрос, чётное оно или нечётное. А вот свойство зелёности не определено на натуральном ряду; для числа «быть зелёным» бессмысленно. Выше мы сформулировали некоторые свойства, какими как целое обладает Натуральный Ряд. Свойствами могут обладать и отношения: так, среди отношений выделяются, например, транзитивные. Но в данный момент нас интересуют свойства элементов рассматриваемой структуры (для которой

выполняются аксиомы Пеано). Именно эти свойства могут выступать в качестве значений переменной P.

Тот факт, что элемент a обладает свойством Q, записывается как $Q(a)$. Если на элементах какого-то множества M определено свойство Q, то можно ввести в рассмотрение подмножество K этого множества, состоящее из тех и только тех элементов M, которые обладают свойством Q:

$$(x \in K) \Leftrightarrow Q(x). \qquad (\oplus)$$

И наоборот, для каждого подмножества K можно ввести свойство Q — «быть элементом K», и опять-таки будет выполнено соотношение ($\oplus$). Таким образом, свойство — это почти то же самое, что подмножество: «язык свойств» и «язык подмножеств» тривиально переводимы один в другой. (На языке подмножеств, например, аксиома индукции записывалась бы так:

$$\forall P\ \{[0 \in P \wedge \forall x\ (x \in P \Rightarrow x' \in P)] \Rightarrow \forall x\ (x \in P)\}.)$$

Итак, область изменения переменной P в аксиоме индукции — совокупность всех свойств, определённых на рассматриваемой структуре. Посмотрим, как эта аксиома используется для того, чтобы установить, что удовлетворяющая аксиомам Пеано структура изоморфна $\mathbb{N}$. Пусть структура сигнатуры $\{0, '\}$ удовлетворяет аксиомам I—III. Аксиомы I—II обеспечивают наличие в этой структуре стандартной части $\{0, 0', 0'', 0''', \ldots\}$. Теперь применим аксиому индукции, взяв в качестве значения переменной P такое свойство P_0 элементов структуры: «принадлежать к стандартной части». Аксиома индукции утверждает, что нечто справедливо для всякого P, в частности для этого P_0. Таким образом,

$$[P_0(0) \wedge \forall x\ (P_0(x) \Rightarrow P_0(x'))] \Rightarrow \forall x\ P_0(x).$$

Заключённая в квадратные скобки посылка, очевидно, истинна (0 принадлежит стандартной части и если x принадлежит стандартной части, то принадлежит и x'); поэтому $\forall x\ P_0(x)$, т. е. все x (все элементы структуры!) принадлежат стандартной части. Стандартная часть, как уже было замечено, изоморфна $\mathbb{N}$. Этим завершается доказательство того, что рассматриваемая структура изоморфна $\mathbb{N}$.

Таким образом, всякая структура, удовлетворяющая аксиомам Пеано, изоморфна $\mathbb{N}$, и следовательно, эти аксиомы определяют понятие натурального ряда с сигнатурой $\{0, '\}$. Вроде бы это обстоятельство противоречит неоднократно делавшемуся нами заявлению, что системы аксиом с таким свойством не может быть.

Однако противоречия нет, и вот почему. Ранее речь шла лишь о свойствах Натурального Ряда, которые можно выразить определёнными языковыми средствами, иными словами, об аксиомах, записанных на определённом языке. В этом языке был лишь один вид переменных — индивидные переменные x, y, z, ... Сущность этих индивидных переменных заключается в том, что при интерпретации на какой-либо структуре областью изменения каждой из этих переменных объявляется одно и то же множество — множество всех элементов рассматриваемой структуры. В аксиоме же индукции участвует переменная другого вида — переменная P. Её значениями являются не элементы рассматриваемой структуры, а свойства этих элементов (иначе, определённые на этих элементах одноместные предикаты, отчего сама переменная P называется *предикатной*, точнее, *предикатной переменной валентности 1*). Таким образом, аксиома индукции — это формула *другого*, *расширенного языка*, более широкого, нежели рассматривавшийся до сих пор узкий язык. (Узкий потому, что в нём бывают только индивидные переменные.) А когда мы говорили, что систем аксиом, полностью характеризующих натуральный ряд, не бывает, мы имели в виду этот прежний, узкий язык.

Разъяснение, конечно, дано, но вряд ли оно кого-нибудь удовлетворит. Что с того, что на каком-то языке нельзя написать систему аксиом натурального ряда? Это, как говорится, «факт не биографии натурального ряда, а биографии этого языка». Просто-напросто узкий язык плохой, а вот теперь мы нашли хороший, расширенный язык, на котором как раз и возможно выписать адекватные аксиомы натурального ряда.

Однако всё не так просто. Грубо говоря, дело обстоит как раз наоборот: узкий язык «хороший», а расширенный — «плохой». Попробуем разъяснить ситуацию.

Начнём с терминологии. Формулы, в которых все переменные индивидные, называются *элементарными формулами*, а язык, в котором допускаются только элементарные формулы, — *элементарным языком*. Синонимом для термина «элементарный» в данном контексте является термин «1-го порядка», или «первопорядковый». Все рассматриваемые выше аксиомы, кроме аксиомы индукции (т. е. все аксиомы 1—8 и I—II), были элементарными аксиомами, т. е. элементарными формулами. Не существует никакой (ни конечной, ни бесконечной, и притом любой сигнатуры) системы аксиом, записываемых в виде элементарных формул (короче — никакой системы элементарных аксиом), которой удовлетворял бы Натуральный Ряд $\mathbb{N}$ и все модели которой были бы изоморфны Натуральному Ряду $\mathbb{N}$.

Бывают и неэлементарные формулы, но они принадлежат неэлементарному языку. В этом языке допускаются переменные более сложной природы: предикатные переменные валентности 1, значениями которых служат свойства (= одноместные отношения), предикатные переменные валентности 2, значениями которых служат бинарные (= двуместные) отношения и т. п., а также функциональные переменные (значением функциональной переменной валентности 1 может быть любая одноместная операция, такая, как, скажем, «следование за», а значением функциональной переменной валентности 2 может быть любая двуместная операция, такая, как скажем, сложение). Аксиома индукции служит примером неэлементарной формулы. Более точно, неэлементарный язык с описанными только что возможностями называется *языком 2-го порядка*: это значит, что в нём допускаются переменные, пробегающие по отношениям и операциям (каковые отношения и операции должны быть определены на элементах структуры), но не рассматриваются более сложные переменные, значениями которых могут служить, скажем, свойства операций или операции над отношениями (или свойства отношений, такие как «транзитивность»). Аксиома индукции служит примером неэлементарной формулы языка 2-го порядка (или просто примером формулы 2-го порядка).

Казалось бы, — и наличие аксиом Пеано это как бы подтверждает — возможна система неэлементарных аксиом 2-го порядка (т. е. аксиом, записанных в виде формул этого неэлементарного языка), определяющая понятие натурального ряда в следующем точном смысле:

1) $\mathbb{N}$ является моделью этой системы;

2) всякая модель этой системы изоморфна $\mathbb{N}$.

Однако здесь возникают неожиданные, но совершенно фундаментальные трудности семантического (можно даже сказать — гносеологического) характера. Дело в том, что уже для языка 2-го порядка (не говоря уже о более сложных неэлементарных языках) само понятие модели теряет необходимую ясность. Это положение иллюстрируется следующим примером, связанным с так называемой проблемой континуума.

Как известно, количество элементов какого-либо множества называется *кардинальным числом*, или *мощностью*, этого множества. Понятие кардинального числа, или мощности, является обобщением понятия натурального числа, поскольку натуральные числа — это мощности конечных множеств. Среди бесконечных мощностей выделяются следующие две: мощность множества всех натуральных

чисел и мощность множества всех действительных чисел (или всех точек какой-либо прямой). Первая обозначается $\aleph_0$ (читается «áлефноль») и называется *счётно-бесконечной* мощностью (или бесконечной счётной, а чаще — просто *счётной*, хотя нередко бывает полезным называть счётными не только счётно-бесконечные, но и конечные мощности, т. е. натуральные числа); вторая обозначается $\mathfrak{c}$ (строчное готическое «це») и называется мощностью *континуума, континуальной* мощностью. Эпитеты «счётно-бесконечный» («бесконечный счётный», «счётный») и «континуальный» распространяются и на множества соответствующих мощностей. Очевидно[14], $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

Знаменитая *проблема континуума* состоит в выяснении того, существует или нет промежуточная мощность, т. е. мощность $\mathfrak{m}$, удовлетворяющая неравенству

$$\aleph_0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{c}.$$

Знаменитая *континуум-гипотеза* состоит в том, что такой мощности нет. Философский смысл континуум-гипотезы очевиден: не существует количества, промежуточного между количеством всех натуральных чисел и количеством всех точек прямой линии (или равным ему количеством всех действительных чисел)! Эквивалентная формулировка континуум-гипотезы: всякая бесконечная часть континуального (т. е. имеющего континуальную мощность) множества либо сама имеет мощность континуума, либо же имеет счётно-бесконечную мощность.

Историческая справка. Континуум-гипотезу высказал ещё в XIX веке Георг Кантор (1843—1918) — великий немецкий (впрочем, родившийся в Санкт-Петербурге и проведший там первые одиннадцать лет жизни) философ и математик, создатель теории множеств. Он высказал эту гипотезу не как гипотезу, а как положительное утверждение. А именно: в написанной в 1877 году статье «К учению о многообразиях» [27], с. 257, [29], с. 132, Кантор заявил, что всякое бесконечное множество точек на прямой имеет либо континуальную, либо счётно-бесконечную мощность и что это утверждение устанавливается «с помощью индуктивного рассуждения, которое мы не будем здесь приводить». «Строгое исследование этого вопроса, — завершалась статья, — мы откладываем до другого раза».

[14] Точнее, это становится очевидным, если разумным образом распространить отношение строгого порядка «<» с конечных мощностей (т. е. конечных количеств) на все мощности, включая и мощности бесконечные (т. е. бесконечные количества).

И действительно, с 1879 года Кантор начал отдельными порциями публиковать трактат под названием «О бесконечных линейных точечных многообразиях»; эта серия публикаций должна была увенчаться доказательством заявленного утверждения. В шестой публикации [28] названной серии это утверждение и в самом деле было доказано, но лишь для узкого класса множеств (а именно, для так называемых замкнутых множеств). Соответствующая теорема была сформулирована в самом конце статьи [28], и её формулировка сопровождалась утверждением, что «эта замечательная теорема» (dieser merkwürdige Satz) остаётся справедливой и для произвольных множеств и что это будет доказано в последующих параграфах трактата. Таким образом, Кантор, во-первых, доказал, что не существует такого количества, промежуточного между счётно-бесконечным и континуальным, которое служило бы количеством элементов какого-либо замкнутого множества на прямой линии, а также, во-вторых, обещал предъявить доказательство более сильного утверждения, а именно: что ни для какого (а не только замкнутого) множества точек на прямой линии количество этих точек не может быть промежуточным. Статье [28], завершённой 15 ноября 1883 года, суждено было стать последней в серии. Кантор обнаружил, что не в состоянии выполнить своё обещание, поскольку не располагает доказательством для общего случая. Это осознание имело драматические последствия. В мае 1884 года Кантора постиг первый приступ нервной болезни. Через месяц приступ прошёл, но болезнь уже не отпускала свою жертву, а с 1899 года приступы участились. После 1897 года Кантор уже ничего не публиковал, а в 1918 году умер в нервной клинике.

Ныне известно (в силу результатов, полученных К. Гёделем и П. Коэном), что *ни доказать, ни опровергнуть континуум-гипотезу невозможно*. Говоря «доказать» и «опровергнуть», мы имеем в виду все мыслимые средства, допускаемые современной математикой. А значит, повисает в воздухе вопрос о самом смысле континуум-гипотезы. В самом деле, смысл утверждения, истинность или ложность которого заведомо нельзя установить никакими средствами, воспринимается как туманный. Эта чрезвычайная ситуация радикально отличается от такого часто встречающегося положения, когда мы просто чего-то не знаем (но хотя бы ясно понимаем сам вопрос[15]).

[15] А залог ясности понимания вопроса состоит в ясности понимания возможных ответов на него.

Оказывается, что можно выписать формулу 2-го порядка, которая тогда и только тогда имеет модель (т. е. такую структуру, в которой она становится верна), когда континуум-гипотеза справедлива. Можно выписать и такую формулу 2-го порядка, наличие у которой модели равносильно, напротив, наличию промежуточной мощности, т. е. справедливости отрицания континуум-гипотезы. Таким образом, для формул 2-го порядка вопрос о наличии у них модели может оказаться столь же туманным, как сама континуум-гипотеза. (Пример формулы, обладающей указанным свойством, интересующийся читатель найдёт в приложении к данной статье, на с. 287—289. Читателя следует предупредить, что это приложение при всём желании невоможно отнести к *нематематике*: его текст совершенно математический.)

Кажется сомнительным, чтобы язык со столь неясной семантикой мог служить удовлетворительным средством для аксиоматического определения чего-нибудь, в частности натурального ряда.

И действительно, если мы проанализируем использование аксиомы индукции в процессе доказательства того, что любая модель аксиом Пеано I—III изоморфна $\mathbb{N}$, мы увидим, что здесь, по существу, используется то самое понятие натурального числа, которое мы ещё только собираемся аксиоматически определить. Наше свойство P_0 означает «иметь вид $0''^{\cdots\prime}$». Многоточие между штрихами в выражении «$0''^{\cdots\prime}$» как раз и пытается заменить собою общее представление о натуральном числе. А выразить свойство P_0 без априорного представления о натуральном числе или без заменяющих его многоточия или слов «и так далее» невозможно.

5. «Можно ли доказать, что Великую теорему Ферма нельзя ни доказать, ни опровергнуть?»

●➢ Именно так было озаглавлено пятое размышление в опубликованном в 1987 году первоначальном тексте этой работы. В то время убеждение в справедливости Великой теоремы Ферма основывалось на некой иррациональной вере; доказательство теоремы отсутствовало, отсутствовало и опровержение. Напомним, что опровержение какого-либо утверждения состоит в доказательстве его ложности; опровергнуть утверждение — значит доказать, что оно является ложным, иначе говоря, доказать его отрицание.

Однако с тех пор в мировой науке произошло важное событие: более чем через 350 лет после того, как была сформулирована Великая теорема Ферма, она была наконец доказана! Автором доказательства стал сорокалетний англичанин Эндрю Уайлс (A. Wiles), выпускник аспирантуры Кембриджа, переехавший в 1980-х годах в Америку и ставший профессором Принстонского университета.

Доказательство Уайлса рождалось с драматизмом, достойным Великой теоремы. После многих лет упорной работы к маю 1993 года Уайлс был убеждён, что обладает доказательством, которое он изложил в общих чертах в трёх лекциях, прочитанных в его родном Кембридже 21—23 июня 1993 года. В номере от 5 июля 1993 года известный американский журнал «Тайм» посвятил этому событию статью с подзаголовком «Решена самая знаменитая математическая проблема в истории». В январе 1994 года популярный математический журнал опубликовал статью [31] о многовековой осаде Великой теоремы Ферма — осаде, завершившейся предпринятым Уайлсом семилетним штурмом; впрочем, в конце статьи содержалось следующее примечание:

> На декабрь 1993 года рукопись Уайлса ещё не обнародована. Кен Райбет (Ken Ribet) отмечает, что применительно к длинным рукописям подобная задержка является сравнительно нормальной. Большинство экспертов продолжает верить в то, что в основном доказательство правильно.

Однако когда Уайлс записал своё доказательство, в нём обнаружился пробел (т. е. недоказанный логический переход). Над учёным нависла угроза провала. (Здесь уместно вспомнить судьбу Георга Кантора.) К счастью, в сентябре 1994 года с помощью своего ученика Ричарда Тэйлора (R. Taylor) Уайлс сумел пробел устранить. Уточнённое доказательство Уайлса теперь уже не подвергается сомнению в мире математиков. Подробнее обо всём этом можно прочесть в замечательной книге Саймона Сингха [32].

Итак, теорема Ферма доказана. Поэтому избранный нами в качестве заголовка вопрос «Можно ли доказать, что Великую теорему Ферма нельзя ни доказать, ни опровергнуть?» потерял свой смысл и потому взят в кавычки; сегодня ответом на него должно служить уверенное «нельзя». Попробуем, однако, перенестись в прошлое, когда теорема Ферма ещё не была ни доказана, ни опровергнута. Будем рассуждать в рамках того прошедшего времени, когда ещё не было известно, появится ли когда-либо доказательство или опровержение Великой теоремы. С современной точки зрения, настоящее, пятое,

размышление, вероятно, следовало бы озаглавить так: «Можно ли когда-либо было ожидать (опасаться, надеяться) получить доказательство того, что Великую теорему Ферма нельзя ни доказать, ни опровергнуть?». Мы увидим, что ожидать этого было никак нельзя. ◀●

Проблема континуума, упомянутая в конце нашего предыдущего размышления, относится к числу главных проблем, волновавших умы математиков. В знаменитом докладе «Математические проблемы», с которым великий Гильберт выступил в 1900 году на Международном конгрессе в Париже, она была названа первой. Как было отмечено, проблема континуума оказалась неразрешимой: континуум-гипотезу невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Перечисляя 23 основные проблемы математики, Гильберт не упомянул проблему доказательства (или опровержения) Великой теоремы Ферма. По-видимому, Гильберт не считал эту проблему достаточно важной. Тем не менее нет сомнения, что это самая знаменитая из не решённых в то время математических проблем. И притом единственная из таких проблем, известных, к сожалению, широкой массе нематематиков. Мы написали «к сожалению», ибо ощутимую долю времени математики-профессионалы тратят на изучение и опровержение сочинений *ферматистов* — так называются люди, не имеющие должной математической подготовки, но считающие, что они доказали теорему Ферма.

Если считать, что под теоремами следует понимать лишь те математические утверждения, истинность которых *установлена* путём доказательства, то теорему Ферма нельзя было называть теоремой, а следовало называть *гипотезой Ферма*. Ведь доказательство «теоремы Ферма» ещё не было найдено[16]. Но если обозначать словом «теорема» математическое утверждение, истинность которого *подлежит установлению* путём доказательства, то термин «теорема Ферма» оказывается законным во все времена. Как бы то ни было, мы будем употреблять именно его. (Не чуждого терминологических проблем читателя приглашаем взглянуть на статьи «Теорема» и «Ферма теорема» в «Математической энциклопедии» [22], [23].)

[16] Впрочем, не все придерживались этой точки зрения. Так, Виктолий Иванович Будкин на с. 45 своей книги «Методика познания „истины“. Доказательство Великой теоремы Ферма» (Ярославль: Верх.-Волж. кн. изд-во, 1975) указывал: «Итак, сменилось 13 поколений людей, а Великая теорема Ферма осталась ещё не доказанной. Только в настоящей работе впервые приводится полное доказательство теоремы в общем виде». Следует отметить, что подавляющему большинству ферматистов всё же не удаётся опубликовать свои псевдодоказательства.

Много факторов способствовало популярности теоремы Ферма в среде непрофессионалов. Среди них: 1) авторитетность автора (теорему сформулировал великий французский математик Пьер де Ферма); 2) почтенность возраста (она была высказана около 1630 года); 3) романтические обстоятельства, при которых она была сформулирована (Ферма записал её на полях латинского перевода «Арифметики» Диофанта издания 1621 года. Восьмая задача второй книги «Арифметики» Диофанта гласит: «Заданный квадрат разложить на два квадрата». Ферма сделал к этой задаче следующее замечание (также на латыни): «Напротив, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата — вообще никакую степень, бóльшую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки». В бумагах Ферма доказательства найдено не было); 4) учреждение в 1908 году премии Вольфскеля в 100 тысяч германских марок за доказательство теоремы Ферма («приятный» факт учреждения большой премии, естественно, получил гораздо бóльшую известность, чем «неприятный» факт её обесценивания вследствие наступившей после Первой мировой войны инфляции); 5) простота формулировки.

Конечно, первые четыре фактора не смогли бы сработать, не будь теорема Ферма столь общедоступна по своей формулировке. Вот в чём она состоит: *каково бы ни было целое число n, большее чем 2, уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых положительных решений.*

Как видим, участвующее в формулировке теоремы Ферма уравнение рассматривают как уравнение с тремя неизвестными: x, y, z. Поскольку n может принимать значения 3, 4, 5, 6 и т. д., то на самом деле речь идёт о бесконечной серии уравнений и утверждается, что ни одно из них не имеет решения в таких целых x, y, z, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. С логической точки зрения, более естественно рассматривать уравнение $x^n + y^n = z^n$ как одно уравнение с четырьмя неизвестными n, x, y, z. Теорема Ферма, стало быть, утверждает, что это уравнение не имеет целых решений, таких что $n > 2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Современные эксперты сходятся во мнении, что Ферма на самом деле не обладал доказательством своей теоремы, хотя, возможно, умел её доказывать для двух частных случаев, а именно: для случая, когда показатель степени n равен 3, и для случая, когда этот показатель равен 4. Впервые доказательства для этих двух случаев были опубликованы великим швейцарским и российским математиком Эйлером в XVIII веке. Заметим, что из доказательства теоремы

Ферма для какого-либо показателя n немедленно вытекает её доказательство для всех показателей, делящихся на n. Таким образом, ещё в XVIII веке теорема была доказана для всех показателей, делящихся на 3 или на 4. Далее теорема Ферма была доказана последовательно для показателей, делящихся на 5 (1825 год), на 14 (1832 год), на 7 (1839 год). К 1978 году справедливость теоремы Ферма была установлена для всех показателей, меньших 125 000 (и, тем самым, для всех показателей, у которых хотя бы один делитель меньше, чем 125 000). Однако все эти успехи не позволяли утверждать истинность теоремы Ферма в её полном объёме, т. е. утверждать отсутствие таких положительных целых чисел x, y, z, которые смогли бы удовлетворить уравнению $x^n + y^n = z^n$ хотя бы при одном каком-нибудь показателе n, большем чем 2.

Ситуация с гипотезой, называемой «теоремой Ферма», значительно отличалась от той, которая имеет место для континуум-гипотезы: ведь, как мы знаем, доказано, что континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть (точнее, Гёдель в 1939 году показал, что её нельзя опровергнуть, а Коэн в 1963 году — что её нельзя доказать). Для гипотезы (теоремы) Ферма такое доказательство — доказательство того, что её невозможно ни доказать, ни опровергнуть, — отсутствует. Спрашивается, доказательство *пока*[17] отсутствует (и остаётся надежда получить его в будущем) или это в принципе невозможно? Если бы такое доказательство удалось получить, это, несомненно, принесло бы математике большую пользу, поскольку раз навсегда закрыло бы шлюз для потока безграмотных попыток доказать теорему Ферма[18].

К сожалению, такое доказательство невозможно. И мы сейчас разъясним, почему оно невозможно. Правда, остаётся теоретическая возможность того, что удастся доказать, что теорему Ферма нельзя доказать. Появление такого доказательства также перекрыло бы вышеназванный шлюз, но тогда, вероятно, возник бы поток попыток опровергнуть теорему Ферма (например, путём предъявления в косвенной форме четвёрок астрономически больших чисел n, x, y, z, для которых нужное равенство было бы, впрочем, практически непроверяемым).

---

[17] ●➤ Напомним, что мы перенеслись в XX век, когда доказательство Уайлса ещё не было обнародовано. ◄●

[18] ●➤ Этот прогноз, сделанный мной при первой публикации очерка, оказался слишком оптимистическим. Как мне сообщили в Российской академии наук в январе 2001 года, поток поступающих туда лжедоказательств теоремы Ферма не иссяк. ◄●

Итак, предположим:

(а) существует доказательство того, что теорему Ферма нельзя доказать;

(б) существует доказательство того, что теорему Ферма нельзя опровергнуть.

Наша цель теперь — показать, что (а) и (б) несовместимы, т. е. не может быть, чтобы оба эти утверждения были истинны одновременно. На самом же деле мы обнаружим, что (б) несовместимо даже с более слабым, чем (а), утверждением ($а_1$): теорему Ферма нельзя доказать. А именно, мы покажем, что из (б) следует: теорема Ферма поддаётся доказательству, что исключает ($а_1$).

Начнём с некоторых предварительных комментариев. Всякую четвёрку натуральных чисел n, x, y, z, такую, что $n>2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ и $x^n+y^n=z^n$, условимся называть *четвёркой Ферма*. Теорема Ферма гласит, что четвёрок Ферма не существует в природе. Опровергнуть какую-либо теорему[19] — это значит доказать истинность противоположного. Опровергнуть теорему Ферма — значит доказать, что четвёрки Ферма существуют.

Лемма 1. Если нельзя доказать, что четвёрки Ферма существуют, то их не существует.

Замечание. Пусть A — какое-либо утверждение. Нет никаких причин считать, что если нельзя доказать, что A верно, то A неверно. Однако — и в этом содержание леммы — это так, коль скоро A есть утверждение «четвёрки Ферма существуют».

Доказательство. Поведём доказательство от противного. В самом деле, предположим, что четвёрки Ферма существуют. Выпишем какую-либо из них. Это будет четвёрка натуральных чисел a, b, c, d. Проверим, что это действительно четвёрка Ферма, т. е. проверим, выполняются ли неравенства $a>2$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ и равенство $b^a+c^a=d^a$. Предъявление четвёрки $a>2$, $b>0$, $c>0$, $d>0$ вкупе с указанной проверкой образует *доказательство существования* четвёрки Ферма. Разумеется, если четвёрка состоит из гигантских чисел, то время, потребное на проверку, может превосходить длительность жизни человека, а то и всего человечества (а объём вычислений — размеры видимой Вселенной). Однако мы от этого отвлекаемся и считаем, что даже и в этом случае проверка того, что предъявленная четвёрка является четвёркой Ферма, *возможна в принципе*. Философ скажет, что здесь мы используем

[19] Мы по-прежнему пользуемся неточной терминологией и отождествляем слово «теорема» со словом «утверждение», а не со словосочетанием «доказанное утверждение».

так называемую *абстракцию потенциальной осуществимости*, как раз и состоящую в отвлечении от ограниченности наших реальных возможностей в пространстве и времени.

Лемма 2. Если нельзя опровергнуть теорему Ферма, то теорема Ферма верна.

Замечание. Не видно причин, почему это должно быть верно для любой теоремы.

Доказательство. Лемма 2 есть просто переформулированная лемма 1. Ведь «опровергнуть теорему Ферма» — значит «доказать, что четвёрки Ферма существуют», а «теорема Ферма верна» — значит «четвёрки Ферма не существуют».

Лемма 2, которую мы доказали, имеет строение «если P, то Q». Поэтому если P имеет доказательство, то и Q имеет доказательство (доказательство Q состоит в сочетании доказательства леммы с доказательством P). Поэтому имеем сформулированное ниже следствие леммы 2.

Следствие леммы 2. Если существует доказательство того, что нельзя опровергнуть теорему Ферма, то существует и доказательство того, что теорема Ферма верна, т. е., попросту, доказательство теоремы Ферма.

Ввиду важности этого следствия ещё раз сформулируем его: *если существует доказательство того, что теорему Ферма нельзя опровергнуть, то теорему Ферма можно доказать*. Итак, если верно (б), то теорему Ферма можно доказать, что и представляет собою обещанное отрицание утверждения ($а_1$).

Полученное противоречие и завершает наше рассуждение о том, что ($а_1$) и (б), а тем более (а) и (б), несовместимы.

Возникает следующий естественный вопрос: а почему проведённое рассуждение нельзя повторить для континуум-гипотезы, о которой шла речь в конце нашего предыдущего, четвёртого, размышления? В самом деле, гипотеза (теорема) Ферма утверждает, что нет четвёрок Ферма, а континуум-гипотеза — что нет множеств мощности, промежуточной между $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$. Давайте заменим четвёрку Ферма на множество промежуточной мощности, теорему Ферма — на континуум-гипотезу и повторим только что проведённое рассуждение. Мы должны, обязаны где-то споткнуться, ведь утверждения (а′) и (б′), получаемые из (а) и (б) заменой слов «теорема Ферма» на слово «континуум-гипотеза», оба верны. Где же мы споткнёмся? А вот где: в доказательстве леммы 1 (разумеется, не в первоначальной формулировке, а в той, где слова «четвёрки Ферма» заменены словами «множества промежуточной мощности»). Приве-

дённое выше доказательство леммы 1 основывалось на следующей идее: можно фактически предъявить четвёрку чисел a, b, c, d и удостовериться, что она образует четвёрку Ферма. Но что значит «предъявить множество»? Могут возразить, что и мы, собственно, предъявляем не числа как количественные категории — их предъявить невозможно, можно только написать их имена (например, в виде ноля со штрихами или в виде десятичной записи). Но дело в том, что каждое натуральное число имеет имя, чего нельзя сказать о множествах: *множеств больше, чем имён* (если понимать последние как конечные комбинации знаков какого-нибудь алфавита). Но даже если ограничиться множествами, имеющими имена, и предъявлять вместо множеств эти имена, всё равно остаётся главная трудность: как проверить, что предъявленное множество имеет промежуточную мощность? Проверить, что четвёрка чисел есть четвёрка Ферма, в принципе (если отвлечься от количества шагов и необходимого пространства), несложно: надо подставить числа в уравнение и сравнить левую и правую части. Способ же, который позволил бы по предъявленному множеству определить его мощность или хотя бы определить, будет ли эта мощность удовлетворять неравенству $\aleph_0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{c}$, неизвестен.

Замечание. Можно указать на ещё одно философское различие между ситуацией с теоремой Ферма и ситуацией с континуум-гипотезой. Обсуждая вопрос о возможных доказательствах теоремы Ферма или её возможных опровержениях (т. е. доказательствах её отрицания), мы исходили из понятия доказательства в общем, неформальном смысле; об этом понятии — наше шестое размышление. Упоминавшиеся же открытия Гёделя, установившего, что континуум-гипотезу нельзя опровергнуть, и Коэна, установившего, что континуум-гипотезу нельзя доказать, утверждают невозможность *формальных доказательств* в рамках некоторого ранее известного конкретного представления о формальном доказательстве — более точно, в рамках некоторой конкретной аксиоматики теории множеств, а именно так называемой системы Цермело—Френкеля. Однако считается (мнение это представляет собой не что иное, как акт веры), что система Цермело—Френкеля позволяет формализовать любое неформальное математическое доказательство. Это и даёт право говорить, что континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть какими бы то ни было средствами, допускаемыми современной математикой.

Обсуждаемая тема имеет самое тесное отношение к знаменитой теореме Гёделя о неполноте. Теорема эта утверждает, что

какое бы ни было предложено понятие формального доказательства, имеется такое утверждение о натуральных числах, что ни оно само, ни его отрицание не обладает формальным доказательством в рамках предложенного понятия. Мы исходим из очевидности того, что возможны различные определения формального доказательства. Эти определения отличаются друг от друга набором допускаемых аксиом и правил вывода. Могут быть такие представления о формальном доказательстве, в котором вообще не используются ни аксиомы, ни правила вывода. Короче говоря, подходы к понятию формального доказательства могут быть весьма различны. Но все эти подходы имеют и фундаментальную общность, выражаемую в следующих принципах:

1) каждое формальное доказательство есть текст, т. е. конечная цепочка знаков, выбранных из некоторого алфавита;

2) каждый текст, составленный из букв рассматриваемого алфавита, поддаётся алгоритмической проверке на предмет того, является ли он формальным доказательством или нет, и если да, то какого именно утверждения;

3) только истинные утверждения могут обладать формальными доказательствами.

В силу третьего принципа предъявление формального доказательства какого-либо утверждения гарантирует его истинность и, следовательно, может считаться его доказательством. Обратное, конечно, не предполагается: не предполагается, что каждое истинное или даже содержательно доказанное утверждение имеет — при заранее заданном понятии формального доказательства — формальное доказательство. Анализ теоремы Гёделя о неполноте показывает, что утверждение, о котором в ней идёт речь, всегда имеет вид $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое свойство натурального числа x. Это свойство зависит от рассматриваемого понятия формального доказательства, но всегда алгоритмически проверяемо[20] (подобно тому как алгоритмически проверяемо свойство четвёрки чисел «быть четвёркой Ферма»). Итак, теорема Гёделя утверждает, что ни $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$, ни $\neg\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ не имеют формального доказательства.

Ужесточим наши требования к представлениям о формальном доказательстве. А именно, потребуем, чтобы выполнялось следующее условие: коль скоро для какого-то алгоритмически проверяемого свойства $\mathfrak{A}$ утверждение $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ оказывается истинным, то это

[20] Это значит, что существует алгоритм, который для любого c проверяет, верно ли $\mathfrak{A}(c)$ или нет.

утверждение $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ обладает формальным доказательством. Это требование довольно естественно; оно реализуется при формализации следующих уже встречавшихся выше этапов: 1) предъявления некоторого c; 2) проверки, что это c удовлетворяет свойству $\mathfrak{A}$; здесь существенно и то, что c можно фактически предъявить, и то, что $\mathfrak{A}(c)$ можно фактически проверить.

Наше требование вытекает, в частности, из следующих двух ещё более естественных требований:

1) если для числа c справедливо (алгоритмически) проверяемое свойство $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}(c)$ обладает формальным доказательством;

2) для какого угодно свойства $\mathfrak{A}$, если для некоторого c утверждение $\mathfrak{A}(c)$ обладает формальным доказательством, то и $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ обладает формальным доказательством.

Теперь, прибегнув к рассуждениям, аналогичным тем, которые применялись в связи с теоремой Ферма, приходим к следующему выводу: если ни утверждение $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$, ни его отрицание $\neg\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ не обладают формальным доказательством, то одно это уже позволяет заключить, которое из этих двух утверждений верно, а именно: верно $\neg\exists x\ \mathfrak{A}(x)$.

В самом деле, если бы было верно $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$, то это утверждение обладало бы формальным доказательством, чего, как отмечалось выше, не может быть в силу теоремы Гёделя. Стало быть, $\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ неверно, а $\neg\exists x\ \mathfrak{A}(x)$ верно[21].

Давайте ещё раз оценим парадоксальность ситуации: *из одного только факта, что ни А, ни не-А не обладают формальным доказательством, можно заключить, которое из этих двух высказываний истинно на самом деле.*

6. Что такое доказательство?

> Если мы читаем книгу, написанную 50 лет назад, то рассуждения, которые мы в ней находим, кажутся нам большей частью лишёнными логической строгости.
>
> *Анри Пуанкаре*. Наука и метод. 1908. ([2], с. 356.)

В предыдущем размышлении встречался как термин «доказательство», так и термин «формальное доказательство». Иногда считают, что формальное доказательство — это такое доказательство, которое формально. Мы предпочитаем смотреть на эти понятия иначе.

[21] Слова «истинно» и «верно» — синонимы. Слово «доказуемо» имеет другой смысл (даже другие смыслы).

Формальное доказательство — это математический объект, подобный, скажем, числу или треугольнику. Это конечная цепочка знаков некоторого заранее фиксированного алфавита, т. е., как говорят в математике, *слово* в этом алфавите. Говоря «знак», мы — в данном случае — не имеем в виду какую-либо смысловую, содержательную сторону, но только внешнюю, графическую. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в математике, когда имеют в виду внешнюю, графическую сторону, говорят не «знак», а «буква». К числу букв относят обычно буквы алфавитов реальных языков (русского, латинского и т. д.), цифры, знаки препинания. Разумно отнести к числу букв и пробел между словами (словами в обычном, не математическом смысле), изобретая для его обозначения какой-либо специальный символ, например #. Это даёт возможность рассматривать текст, т. е. последовательность слов, как слово (в уточнённом выше математическом смысле). Итак, формальное доказательство — это прежде всего слово в некотором алфавите, алфавите формальных доказательств. Разумеется, этим ни в малейшей степени не исчерпывается понятие формального доказательства; мы просто хотели подчеркнуть, что понятие формального доказательства относится к разряду слов, так же как понятие треугольника — к разряду геометрических фигур.

Какие именно слова следует считать формальными доказательствами — это тема особого разговора, выходящего за круг предметов, которые мы хотели бы здесь обсудить. Подчеркнём, что можно дать различные определения понятию формального доказательства, каждое из которых приводит к своему множеству формальных доказательств. Некоторые общие положения, которым должно подчиняться любое разумное определение, были изложены в предыдущем размышлении. Заметим, впрочем, что иногда делают ещё один шаг в сторону общности и не требуют заранее, чтобы формальными доказательствами обладали только истинные утверждения, полностью отделяя понятие формального доказательства от понятия истины. А затем это отброшенное требование вводят в виде дополнительного свойства (которым формальные доказательства, вообще говоря, могут и не обладать), а именно: множество формальных доказательств называют *семантически непротиворечивым*, если всякое утверждение, обладающее формальным доказательством, истинно. Более точно общие представления о формальных доказательствах излагаются с помощью понятия *дедуктики* (см., например, [21]).

Подчеркнём ещё, что формальными доказательствами могут обладать (или не обладать) не сами содержательно понимаемые утвер-

ждения, а лишь их записи (т. е. опять-таки слова) в каком-либо точно заданном логико-математическом языке.

Определение понятия формального доказательства — быть может, лучше сказать: определение множества формальных доказательств — в широких пределах (обусловленных указанными выше общими ограничительными свойствами множества формальных доказательств) произвольно. Здесь имеется в виду тот «юридический» произвол, который отличает математические определения вообще. Мы имеем «юридическое» право, например, произвольно определить класс функций и назвать их «как хотим», например непрерывными.

Другое дело, что всякое разумное математическое определение обычно претендует на то, чтобы соответствовать некоторым интуитивным представлениям, отражать их. Законность определения ещё не означает его разумности. Так, математическое понятие непрерывной кривой отражает (с той или иной точностью) наши интуитивные, содержательные представления о траектории движущейся точки. Аналогично понятие формального доказательства отражает интуитивные представления о содержательном доказательстве.

Можно сказать, что понятие формального доказательства является математической моделью понятия доказательства — в том же смысле, в каком понятие непрерывной кривой является математической моделью понятия траектории.

Остаётся выяснить, что же такое *доказательство* — не формальное доказательство, а просто доказательство. Хотя, как мы отмечали в самом начале настоящего очерка, неправильно полагать, что в математике всё доказывается, нет сомнений, что понятие доказательства играет в математике центральную роль. «Со времён греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“» — так начинает свои «Начала математики» Николя Бурбаки [6], с. 231. Вместе с тем мы отмечали, что понятие доказательства не принадлежит математике (математике принадлежит лишь его математическая модель — формальное доказательство). Оно принадлежит логике, лингвистике и больше всего — психологии.

Итак, термин «доказательство» — один из самых главных в математике — не имеет точного определения. А приблизительное его определение таково: *доказательство — это убедительное рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других.*

Три детали являются здесь существенными. Во-первых, перенесение понятия ‘доказательство’ из сферы математики в сферу психологии и лингвистики. Во-вторых, придание этому понятию субъ-

ективного характера, поскольку субъективно понятие убедительности, на которое оно опирается. В-третьих, признание того неоспоримого факта, что именно такое, субъективное психолого-лингвистическое, понятие и используется математиками (ведь даже исследование формальных доказательств требует доказательств неформальных). Кажется, впервые изложенный подход к доказательствам в математике был сформулирован в [12][22].

Восприняв доказательство, мы делаемся в известной степени агрессивными, готовыми убеждать других с помощью этого воспринятого нами рассуждения. Если же мы не готовы, значит, мы ещё не восприняли предъявленного нам рассуждения как доказательства, а если и признали его доказательством, то просто чтобы отмахнуться.

Заметим, что понятия, присутствующие в нашем определении доказательства, — либо логико-лингвистические («рассуждение»), либо психологические («убеждающее», «способны убеждать»). Это полностью отвечает сути дела: само представление о доказательстве неразрывно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человека. И то, и другое изменяется с ходом истории. Меняется языковое оформление доказательств. Меняется и представление об убедительности.

Представление об убедительности зависит не только от эпохи, но и от социальной среды. К сожалению, не могу вспомнить, где читал пассаж на следующую тему. Кардиналы, современники Галилея, были неглупые люди, некоторые из них могли воочию наблюдать горы на Луне в Галилеев телескоп, а также с пониманием следить за логикой рассуждений Галилея. Однако для них их собственные взгляды, основанные на априорной догме, были убедительнее любого эксперимента и любой логики. (Интересный анализ того, как априорно суженное представление о способах доказывания препятствует признанию некоторых фактов, приведён в статье С. П. Божича [13].)

Представление об убедительности того или иного рассуждения зависит от многих факторов. Выявление этих факторов — важная задача логики и психологии. В число таких факторов входит, например, разделение понятий (а точнее, терминов) на осмысленные и бессмысленные. Понятия флогистона и теплорода[23], считавшиеся

[22] См. [12], с. 8 (с. 355 настоящего издания — *примеч. ред.*): «Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других».

[23] Понятия 'флогистон' и 'теплород' нередко отождествляют. На самом деле это разные вещи. Понятие флогистона возникло во второй половине XVIII века.

осмысленными в XVIII веке, признаются сейчас бессмысленными. Эйнштейн открыл, что бессмысленным является и понятие одновременности двух событий — если считать его объективным, не зависящим от наблюдателя (более точно, Эйнштейн открыл, что одновременность — не двуместное отношение между двумя событиями, а трёхместное отношение, членами которого являются 1-е событие, 2-е событие и наблюдатель). С другой стороны, такое «очевидно бессмысленное понятие», как бесконечно малое число, вот уже полвека наполняется точным смыслом в рамках так называемого *нестандартного анализа*[24]. С изменением представлений об осмысленности или бессмысленности понятий меняется и представление о самой сущности научной истины. Меняется представление об очевидности. Как в своё время все знали, что гроза вызывается высшими силами, так теперь все знают, что причина грозы — атмосферное электричество. Неспособность инертных газов образовывать химические соединения была настолько очевидной, что это свойство закрепили в самом названии «инертные». Когда же в 1962 году были получены первые соединения, которые эти газы образуют с другими веществами, химики, по-видимому, не испытали никакого стыда, а лишь с удовольствием констатировали, что «для объяснения строения этих соединений не потребовалось принципиально новых представлений о природе химической связи» (Большая Советская Энциклопедия, 3-е изд., статья «Инертные газы»).

То, что человеческое знание меняется с ходом истории, разумеется, общее место. Здесь хотелось бы подчеркнуть, что в состав знания входят не только сами факты, но и исходные предпосылки, презумпции, на основании которых тот или иной факт делается членом системы знаний: представления об осмысленности и бессмысленности, об очевидности и неочевидности, о возможном и невозможном,

Флогистон представлял собой субстанцию с нулевым или даже отрицательным весом, присутствующую в горючих телах и улетучивающуюся из них при горении; прекращение горения объяснялось тем, что окружающий воздух мог вместить лишь ограниченное количество флогистона. Гипотеза флогистона была первой теорией в химии и позволила обобщить множество реакций. Это было заметным шагом на пути становления химии как науки. В 1770-х годах теория флогистона была опровергнута, благодаря работам Лавуазье. В 1783 году тот же Лавуазье ввёл понятие теплорода как невесомого флюида, присутствующего в каждом теле и обеспечивающего его теплоту. Приток теплорода в тело должен вызывать его нагрев, убыль — охлаждение. Количество теплорода во всех тепловых процессах должно оставаться неизменным. Теория теплорода объясняла на тот момент многие известные в то время тепловые явления и была признана большинством учёных.

[24] ●●▶ См. статью «Нестандартный анализ» на с. 318—336 настоящей книги. ◀●●

о частном и общем, об убедительности и неубедительности, о доказанном и недоказанном, о достоверном и недостоверном. Все эти представления, хотя, возможно, и меняются медленнее простых представлений о фактах, в сущности, так же исторически относительны, как и последние.

Математика иногда воспринимается как скала, неподвижно возвышающаяся над волнами переменчивых представлений, относящихся к другим наукам. Конечно, основания для такого взгляда на математику имеются. Тем не менее, взгляд на математику как на нечто абсолютное, видимо, являет собой преувеличение. Если математика и абсолютна, то только на уровне повседневного опыта — точно так же, как абсолютна ньютоновская физика в применении к явлениям «средних масштабов» (а в очень малом и в очень большом действует уже иная, эйнштейновская физика)[25].

В частности, социально-историческая обусловленность представлений о «доказательствах вообще» распространяется и на математические доказательства.

Для иллюстрации сказанного автор сейчас попытается изложить вкратце свои представления о понятии доказательства в Древнем Египте, в Древней Греции и в Индии.

У нас не так много достоверных сведений о том, как излагались и воспринимались математические доказательства в древности. Многие из дошедших до нас текстов весьма отрывочны; к тому же встречающиеся в них термины зачастую допускают различную интерпретацию[26]. Многое приходится домысливать. Каждый домысливает в желательную для себя сторону, и автор этих строк, надо думать, не исключение. С учётом этих оговорок можно составить следующую схему.

Представление о доказательстве есть продукт социальной истории общества. Мы отдаём себе отчёт в упрощённости наших исторических подходов, приписывая Древнему Египту централизованную государственность, хотя и там были периоды раздробленности, а Древней Греции — демократию, хотя и там случались тиранические правления. Но любая схема предполагает упрощения.

Итак, Древний Египет. Теократическое государство с необычайно сильной центральной властью. В качестве действенного инструмента поддержания централизации, повиновения, порядка выступает постоянное строительство пирамид, требующее колоссальных людских и

[25] По поводу «расплывания в большом» представлений о натуральном числе см. уже упоминавшуюся статью П. К. Рашевского [16].

[26] См., например, относящееся к толкованию древнеегипетских текстов примечание переводчика С. Я. Лурье в работе [4], с. 139.

материальных ресурсов и объединяющее усилия всей страны. Авторитет фараона и жрецов непререкаем. Непререкаем и авторитет написанного слова. Если что-то сказал или написал жрец, писец, учитель, значит, это есть истина. Если что-то написано на папирусе, это есть истина. Убедительность основывается на авторитетности источника.

Математические тексты Древнего Египта содержат готовые правила без какого бы то ни было их обоснования. Говоря об отсутствии обоснования, мы имеем здесь в виду современное понимание слова «обоснование». С точки зрения древнего египтянина, написанное на папирусе было полностью обосновано тем, что исходило из авторитетного источника и было запечатлено в авторитетной форме записи на папирусе. Факт занесения на папирус, запечатления на нём и был сам по себе доказательством. Действительно, этого было достаточно для того, чтобы с его помощью убеждать других. Ряд правил для вычисления площадей треугольников и четырёхугольников не получил в наши дни однозначного толкования; идут споры, как надо понимать входящие в них термины [4], гл. IV, § 2, а. В зависимости от толкования эти формулы должны восприниматься либо как точные, либо как приближённые, либо как вообще неверные. Говоря о неверной формуле, мы имеем в виду выражение площади треугольника через полупроизведение основания на боковую сторону[27]. Многие исследователи считают, впрочем, что соответствующий древнеегипетский термин надо трактовать не как боковую сторону, а как высоту (и тогда формула из папируса оказывается верной). Однако, даже если бы этот термин означал в действительности не высоту, а боковую сторону, соответствующую (неверную, с нашей, современной точки зрения) формулу следует считать доказанной в древнеегипетском понимании, ведь эта формула убедительно обоснована тем, что она (конечно, записанная не с помощью математических символов, а посредством слов) содержится в авторитетном документе.

Иначе обстояло дело в Древней Греции. Сравнительно (с Египтом) небольшие государственные образования с народными собраниями.

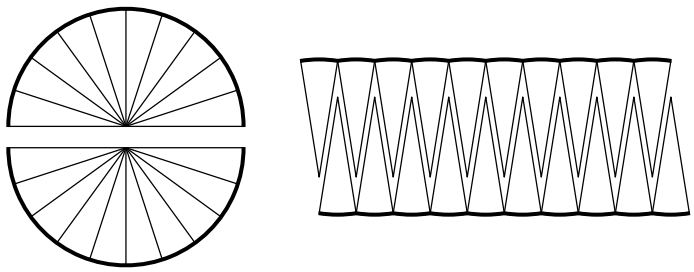
[27] Вот что говорит по этому поводу академик Л. С. Понтрягин: «Первая известная нам математическая рукопись — это рукопись Ахмеса, составленная за две тысячи лет до нашей эры. В ней содержатся некоторые алгебраические и геометрические правила — например, вычисление площади треугольника <...>. Однако в папирусе Ахмеса была допущена ошибка. Согласно ему, площадь равнобедренного треугольника равна произведению основания на половину боковой стороны — а каждый сегодняшний школьник знает, что это неверно» [26].

В народных собраниях выступают ораторы, не являющиеся носителями априорного авторитета. Они должны убедить слушателей посредством рассуждения. Формулирование правильных рассуждений становится повседневной и актуальной потребностью. Отсюда — зарождение логики у Сократа и окончательное оформление её в виде науки у Аристотеля. Отсюда же — приближающиеся к современным представления о доказательстве — начало дедуктивного метода в математике. Основой математической убедительности становится рассуждение. Возникает понятие об основах правильных рассуждений — аксиомах и правилах логического вывода. Убедительно (и следовательно, доказуемо) то, что может быть получено «законным рассуждением» из отправных утверждений, признаваемых справедливыми. (Если задуматься над тем, какие дисциплины опираются на понятие доказательства, то окажется, что таких дисциплин две: математика и юриспруденция. По-видимому, местом их рождения следует признать Древнюю Грецию: именно там возникла культура убеждения путём рассуждения, в частности — путём прения сторон. В этом смысле математику можно назвать младшей сестрой юриспруденции.)

Наконец, Индия. Хотя те геометрические иллюстрации, на которые мы собираемся ссылаться, относятся к средневековой Индии, скорее всего, они появились уже в Индии древней. Вообще, датировка индийских математических представлений вызывает значительные трудности, поскольку одни тексты могут представлять собою изложение других, более ранних. С другой стороны, это и не так существенно: в то время как средневековый Египет и средневековая Греция не имели ничего общего с Древним Египтом и Древней Грецией, средневековая Индия оставалась хранителем духовного наследия древней Индии. Существенной чертой этого наследия являлось и является придание статуса высшей достоверности внутреннему озарению. Непосредственное внутреннее озарение представляло собой основной источник знания и обладало неоспоримой убедительностью. То, что познано таким образом, считалось доказанным. Чтобы убедить в этом другого, надо привести его в такое состояние, чтобы и он мог испытать внутреннее озарение. Поэтому геометрические доказательства выглядели так: чертёж, а под ним подпись «Смотри!».

Примеры таких чертежей с подписями «Смотри!», относящиеся к XII и XVI векам, приведены, например, в монографии [9], с. 76, 154. Чертёж XIV века (он воспроизведён также в статье [15], с. 75), на наш взгляд, достоин того, чтобы излагаться в сегодняшней средней школе: он нагляднее современных доказательств показывает, что площадь круга равна площади прямоугольника, стороны которого

суть полуокружность и полудиаметр круга. Поэтому мы приводим этот чертёж здесь (рис. 5).

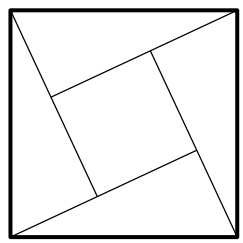


СМОТРИ!

Рис. 5

Автор отдаёт себе отчёт в том, что его мнение по поводу индийских доказательств расходится с мнением такого авторитета в области истории математики, как А. П. Юшкевич, который пишет [9], с. 155: «Лаконичность выводов в индийских сочинениях по математике или наличие в последних чертежей с одной лишь припиской „Смотри!“ не следует рассматривать как проявление особого подхода к проблеме доказательства или особого хода мышления». На наш взгляд, как раз следует. Почему же в противном случае такого рода «Смотри!» мы не встречаем нигде, кроме Индии?

На рис. 6 приведён ещё один чертёж с подписью «Смотри!». Он относится к XII веку и представляет собой доказательство теоремы Пифагора, опирающееся на формулу квадрата разности двух чисел.



СМОТРИ!

Рис. 6

Ценные соображения об эволюции понятия математического доказательства высказывает С. С. Демидов, который, в частности, указывает, «что доказательность математических рассуждений также

в конечном итоге есть их убедительность. То, что нам казалось убедительным вчера, уже не кажется таким сегодня» [15].

Определение доказательства как убеждающего текста делает понятие доказательства довольно-таки субъективным (для кого текст убеждающий, а для кого нет). Нам это не представляется недостатком определения. Такова суть вещей. Употреблённое выше слово «делает», пожалуй, неудачно. Наше определение не столько *делает* понятие доказательства субъективным, сколько *отражает* субъективный характер этого понятия. Тем интереснее уяснить задачу, от решения которой мы весьма далеки: почему же всё-таки понятие доказательства носит характер общекультурный в том смысле, что в пределах одной и той же культуры споры о том, доказано или нет то или иное утверждение, хотя и возникают, но сравнительно редко?

Говоря о таких спорах, мы не имеем в виду несогласия между представителями разных логических направлений в математике, например между представителями обычной (классической) и интуиционистской (конструктивистской) математики. Последние не признают доказанными (а, напротив, считают неверными) многие утверждения обычной математики. Можно считать, что интуиционисты (конструктивисты) принадлежат к другой математической культуре и даже самые привычные слова (такие, как, скажем, «существует») наполняют другим смыслом [разумеется, интуиционисты (конструктивисты) считают, что это представители традиционной математики наполняют слова другим смыслом, а они, интуиционисты, как раз и употребляют эти слова в единственно правильном смысле]. Поэтому интуиционисты считают неверными многие доказательства традиционной математики.

Мы говорим здесь о другом — не об изменении семантики терминов, ведущем к изменению оценки истинности утверждений, а о том, что доказательство может оказаться непонятным и потому неубедительным (а раз неубедительным, значит, вообще не доказательством). Современная математика имеет сложное строение, постепенно становящееся необозримым. Доказательства некоторых теорем оказываются столь громоздкими, что проверка их требует чрезвычайно большого желания, терпения и времени. О владении специальными знаниями нечего и говорить: не только придумывание, но и проверка доказательств ряда теорем доступна лишь узкому кругу посвящённых. ●➤ Именно так обстоит дело, например, с предложенным Уайлсом доказательством Великой теоремы Ферма. ◄●

Иногда интересуются объёмом доказательства той или иной теоремы. При этом обычно имеют в виду, что в доказательстве разрешается использовать в виде готовых формулировок, уже не тре-

бующих доказательств, теоремы, полученные ранее. Будет ли такое рассуждение доказательством, т. е. убеждающим текстом, для того, кто не знаком с доказательствами этих установленных ранее теорем? Мы не берёмся дать однозначный ответ на этот вопрос. Заметим ещё, что само слово «ранее» вносит дополнительный субъективный «релятивистский» момент (хронологическая последовательность двух почти одновременно доказанных теорем может по-разному определяться разными наблюдателями). Если же запретить ссылаться в доказательстве на какие бы то ни было ранее доказанные теоремы и восходить непосредственно к определениям и первичным, неопределяемым понятиям (о которых мы рассуждали в нашем первом размышлении), то такое полное доказательство может в ряде случаев простираться на тысячи страниц математического текста (и быть затруднительным для восприятия даже ещё более, чем доказательство, опирающееся на факты, хотя бы и неизвестные читателю, но ясно сформулированные).

Изучение трудных математических доказательств можно сравнить с альпинистским восхождением на вершину. Уровень моря соответствует начальным понятиям. Восхождение от уровня моря может занимать месяцы, а его математический аналог (понимание доказательства) — годы. В обоих случаях много промежуточных остановок. Первая — общий высокогорный лагерь, в котором собираются альпинисты, направляющиеся на различные окрестные вершины. Этому этапу соответствует получение серьёзной математической подготовки, достаточной для овладения более специальными темами. Затем начинается движение к избранной вершине, опять-таки с остановками в промежуточных лагерях. Для математика роль этих лагерей и остановок играют соответственно теории и теоремы. Как альпинист может совершить за свою жизнь ограниченное число восхождений, так и математик узнаёт ограниченное число доказательств.

Следующая общая для альпинизма и математики черта является существенной — это известная условность в выборе точки отсчёта. Собственно восхождение начинается не с уровня моря, а с точки, куда профессиональные альпинисты могут добраться как бы без труда, хотя для обычных людей попадание в эту точку может представить весьма большие трудности. Собственно доказательство начинается с аналогичной точки: эта точка расположена на некоем общекультурном (имеется в виду математическая культура) уровне. Впрочем, при современном состоянии математики область, очерчиваемая в сложных словах частью «обще-», постоянно уменьшается, и ныне многие доказательства начинаются с точки, доступной лишь узким

специалистам. Ещё одна общая черта математики и альпинизма — расчленённость на этапы, наличие достаточного числа промежуточных остановок.

Откуда же у математика берётся убеждение, что доказанные теоремы, доказательства которых он так никогда и не узнáет, действительно являются доказанными, т. е. располагают доказательствами? Видимо, такое убеждение основано не на чём ином, как на доверии. Это положение внешне не должно казаться слишком странным. В самом деле, многие ли читатели этих строк видели остров Пасхи? Ведь убеждение не видевших остров в том, что он существует, также основано в конечном счёте на доверии. Но если современное доказательство основано на доверии к авторитету, то в чём же его принципиальное отличие от древнеегипетского?

Ответ на этот непростой вопрос заключается, возможно, в том, что доказательства постепенно переходят из разряда явлений индивидуального опыта в разряд явлений опыта коллективного. Тенденция к выдвижению на первый план коллективного вообще характерна для истории цивилизации. Хорошо известно (и подробно обсуждено), что с развитием человеческого общества возникают и неуклонно усиливаются разделение и кооперация труда. Лишь в глубокой древности человек мог сам, лично производить всё необходимое для себя; сейчас каждый вынужден пользоваться результатами труда других. Известно (хотя и не столь подробно обсуждено), что одновременно происходит разделение и кооперация научных знаний. Трудно сказать, когда — по-видимому, в Средние века — ещё находились отдельные учёные, способные охватить всю доступную их современникам сумму знаний. Сейчас каждый вынужден так или иначе использовать знания других. Аналогично обстоит дело и с доказательствами: деятельность в сфере производства и потребления доказательств стала в такой же степени объектом разделения и кооперации, как и деятельность в сфере производства и потребления знаний. Само понятие убедительности начинает терять свой индивидуализированный оттенок и всё больше приобретает коллективный характер. По-видимому, следует постепенно приучаться говорить об убедительности не для отдельного индивидуума, а для некоторого научного коллектива. При этом коллективная убедительность отнюдь не означает равную «непосредственную убедительность» для каждого в отдельности члена коллектива. Коллектив выступает не как простая сумма членов, а как единое целое. Смысл коллективной убедительности в том, что для каждой составной части доказательства найдётся свой «отвечающий за неё» член коллектива, для которого непосредственно убедительна

именно эта часть (а другие члены коллектива полагаются в данном вопросе на этого члена).

Век информатики вносит свои коррективы и в представления о доказательствах. Возникают, например, случаи, когда доказательство требует перебора столь большого числа вариантов, что этот перебор делается недоступным человеку — а машине доступен. Допустим, машина перебрала все требуемые варианты и перебор привёл к нужным результатам. Можем ли мы считать, что получили доказательство? А что, если машина дала так называемый сбой? (Но ведь и человек может ошибаться!) Кроме того, необходима гарантия, что сама программа (работы машины) составлена правильно; правильность программы требует особого доказательства, и теория таких доказательств образует специальный раздел теоретического программирования.

Реально компьютер был привлечён для решения проблемы четырёх красок. По простоте формулировки эта проблема, состоящая в доказательстве гипотезы четырёх красок, мало уступает проблеме Ферма (состоящей в доказательстве гипотезы Ферма), а по естественности постановки (и прикладному значению) её превосходит. Вот формулировка этой гипотезы в Большой Советской Энциклопедии (3-е изд., том 29, статья «Четырёх красок задача»): *Четырёх различных красок достаточно для того, чтобы раскрасить любую карту так, чтобы никакие две области, имеющие общий участок границы, не были окрашены в один и тот же цвет.* Проблема четырёх красок возникла в картографической среде: впервые наблюдение о достаточности четырёх красок было сделано в 1852 году при составлении карты графств Англии. Обнаружилось, что гипотеза четырёх красок подтверждается во всех известных частных случаях. Сравнительно просто удаётся доказать (и это было сделано в 1890 году), что для любой мыслимой карты достаточно пяти красок. Попытки же доказать аналогичное утверждение для четырёх красок долгое время (в течение ста лет) были безуспешны.

В 1976 году Аппелем и Хакеном было анонсировано [17], а в 1977 году изложено [18], [19] решение проблемы, основанное на сведéнии решения к большому числу частных случаев, рассмотрение которых можно поручить машине. Машина всё проверила, и таким образом было получено доказательство того, что всякую карту можно раскрасить четырьмя красками так, как нужно.

Казалось бы, проблема была закрыта. Однако всё не так просто. Доказательство обладало двумя неприятными особенностями. Во-первых, рассуждения авторов были столь длинны и сложны, что

никому не удавалось проверить их во всей полноте. Во-вторых, существенная часть доказательств состояла в использовании компьютера; именно компьютер, а не человек проверял, обладает ли каждая из почти двух тысяч специально отобранных карт некоторым требуемым качеством. Первая особенность была впоследствии устранена (если не полностью, то в очень большой степени) другими авторами, значительно упростившими первоначальные рассуждения Аппеля и Хакена. А вот избежать того, что в истинности большого числа фактов удостоверяется не человек, а компьютер, не удалось. А что, если компьютер ошибся? Ведь такое иногда случается. Поэтому утверждение, что проблема четырёх красок решена, у многих вызывает сомнение.

Сами Аппель и Хакен высказывают такие мысли по поводу своего доказательства: «...При доказательстве было осуществлено беспрецедентное применение компьютеров. Дело в том, что используемые в доказательстве вычисления делают его более длинным, чем традиционно считается допустимым. На самом деле правильность предложенного доказательства вообще не может быть проверена без помощи компьютера. Более того, некоторые из решающих идей доказательства материализовались посредством компьютерных экспериментов. Не исключено, конечно, что в один прекрасный день появится короткое доказательство теоремы о четырёх красках... Вместе с тем не исключено, что такое короткое доказательство вообще невозможно. В этом последнем случае возникает новый и интересный тип теорем, для которых не существует доказательств традиционного типа» [20].

Комментарий. Остановимся на ситуации с доказательством Аппеля и Хакена чуть подробнее. Основная идея этих авторов связана со следующими представлениями. Прежде всего, авторы переходят от раскраски областей карты к раскраске вершин плоского графа, причём такого, который представляет собою триангуляцию. Далее, они называют конфигурацией любой подграф, образованный циклом и внутренностью этого цикла. Конфигурация называется *сводимой*, если некоторыми стандартными методами можно доказать, что она не может быть вложена в минимальный контрпример к гипотезе четырёх красок. Множество конфигураций называется *неизбежным*, если каждая плоская триангуляция содержит как подграф одну из конфигураций множества. Из определений немедленно следует, что для решения (положительного) проблемы четырёх красок достаточно предъявить неизбежное множество сводимых конфигураций. Авторы предъявляют в явном виде 1834 сводимые конфигурации, образующие

неизбежное множество [19], с. 505—567. Длина цикла в каждой из этих конфигураций — 14 или менее того. И для поиска неизбежного множества, и для доказательства сводимости его членов использовался компьютер. Однако если в первом случае (построение множества) компьютер выполнял вспомогательные функции, поскольку само доказательство неизбежности найденного (теперь уже неважно, каким способом) множества не опирается на машинные вычисления, то во втором случае (проверка сводимости) использование компьютера являлось существенным компонентом доказательства, и на каждую конфигурацию ушло примерно 10 минут машинного времени такой проверки. Оценивая доказательство Аппеля и Хакена, авторы обзора [24] указывают, что для доказательства понадобилось четыре года и 1200 часов машинного времени и что текст его занимает 139 страниц, в том числе 99 страниц рисунков, в среднем более 30 рисунков на страницу. Они отмечают также, что «существенно переборный характер доказательства затрудняет его проверку (по оценке Аппеля, проверка всех деталей требует 300 часов машинного времени)». Названные 300 часов относятся, по-видимому, к проверке сводимости. Однако, как мы уже отмечали, сомнения вызывает как раз немашинная часть — проверка неизбежности предъявленного множества конфигураций. Дело в том, что непосредственно в тексте статей [18] и [19] эта проверка исчерпывающим образом не проводится. В статье [18], с. 460, в подстрочном примечании, сообщено, что детали доказательства неизбежности предъявленного множества (более точно, детали доказательства лежащей в основе этой неизбежности так называемой теоремы о разрежении) содержатся на микрофишах[28], образующих специальное приложение к журналу. Автор этих строк, изучавший журнал в библиотеке, указанного приложения, однако, не обнаружил.

Что же касается авторов обсуждаемого доказательства, то они отдавали себе отчёт в сложности его восприятия. В статье [33], с. 852 приводится следующая цитата из неназванной статьи Аппеля и Хакена 1986 года (перевод даётся по статье [34], с. 95):

> Читатель должен разобраться в 50 страницах текста и диаграмм, 85 страницах с почти 2500 дополнительными диаграммами, 400 страницах микрофишей, содержащих ещё диаграммы, а также тысячи отдельных проверок утверждений, сделанных в 24 леммах основного текста. Вдобавок читатель узнаёт, что проверка некоторых фактов потребовала 1200 часов компьютерного времени, а

[28] *Микрофиша* — отдельно взятый кадр микрофильма, очень маленький слайд.

при проверке вручную потребовалось бы гораздо больше. Статьи устрашающи по стилю и длине, и немногие математики прочли их сколько-нибудь подробно.

Доказательство Аппеля и Хакена продолжало вызывать сомнения до конца XX века. Вот что пишет Робин Томас, автор упомянутой статьи [33]:

> <...> Трудности с доказательством Аппеля и Хакена можно уложить в два пункта:
>
> (1) часть доказательства основана на использовании компьютера и не может быть проверена вручную;
>
> (2) даже та часть, для которой ручная проверка предполагается возможной, не подвергалась, насколько мне известно, независимой проверке.

Далее Р. Томас указывает, что он и трое его коллег (N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour) пытались проверить доказательство Аппеля и Хакена, но вскоре сдались и поняли, что разумнее разработать собственное доказательство. Что они и сделали. Доказательство четырёх авторов следует основным идеям Аппеля и Хакена и не устраняет трудности (1), но в значительной мере ликвидирует трудность (2), будучи гораздо более проверяемым в своей некомпьютерной части. Тем не менее и это новое доказательство вызывает скептицизм. Вот что пишет о нём А. В. Самохин, завершая свою статью [34]:

> Компьютерная часть всё ещё остаётся скорее предметом веры. Ведь даже проверка распечаток всех программ и всех входных данных не может гарантировать от случайных сбоев или даже от скрытых пороков электроники (вспомним, что ошибки при выполнении деления у первой версии процессора Pentium были случайно обнаружены спустя полгода после начала его коммерческих продаж — кстати, математиком, специалистом по теории чисел). По-видимому, единственный способ проверки компьютерных результатов — написать другую программу и для другого типа компьютера. Это, конечно, совсем непохоже на стандартный идеал дедуктивных рассуждений, но именно так осуществляется проверка утверждений во всех экспериментальных науках. Из которых математика, стало быть, исключена напрасно.

Создаётся впечатление, что с развитием математики (и появлением всё более и более сложных и длинных доказательств) доказательства теряют своё главное свойство — свойство убедительности. Непо-

нятно, что же тогда остаётся от доказательства, ведь убедительность является их свойством по определению. Кроме того, с усложнением доказательства возрастает элемент его субъективности. Конечно, *формальное доказательство* объективно. Но, во-первых, формальными доказательствами обладают не сами суждения, а их выражения, записи в формализованных языках. Во-вторых, проверка утверждения, что данный текст является формальным доказательством, хотя и осуществляется алгоритмически, может, при объёмистом тексте, вызвать значительные практические трудности.

Большие доказательства начинают жить по каким-то своим, макроскопическим законам. При чрезмерном возрастании объёма доказательства расплывается само представление о доказательстве — подобно тому как в «большом» расплывается понятие о натуральном числе (ещё раз отсылаем читателя к статье П. К. Рашевского [16]).

Получается, что хотя все доказательства должны по определению быть убедительными, одни из них убедительнее других, т. е. как бы являются доказательствами в большей степени, чем другие. Возникает нечто вроде градации доказательств по степени доказательности — явление, которое, конечно, в корне противоречит первоначальным представлениям об одинаковой непреложности всех доказательств. Но ведь и математические истины допускают нечто вроде такой градации. Каждое из следующих трёх утверждений: «$2 \cdot 2 = 4$», «$17^{14} > 31^{11}$», «$300! > 100^{300}$» — истинно. Однако мы говорим: «Верно, как $2 \cdot 2 = 4$», но не говорим: «Верно, как $17^{14} > 31^{11}$» или «Верно, как $300! > 100^{300}$».

7. Можно ли сделать математику понятной?

Математическую теорию можно считать совершенной только тогда, когда ты сделал её настолько ясной, что берёшься изложить её содержание первому встречному.
Давид Гильберт[29].

Почему математика непонятна столь многим? Эта проблема волновала великого Пуанкаре. Вот что он писал в своём известном трактате «Наука и метод»: «Чем объяснить, что многие умы отказываются понимать математику? Не парадоксально ли это? В самом деле... здесь имеется проблема, которая не легко решается, но

[29] Гильберт приписывает это высказывание «старому французскому математику», чьего имени он, однако, не называет.

которая должна занимать всех, желающих посвятить себя делу преподавания» [2], с. 353.

Скорее всего, «виноваты» обе стороны. Виноваты нематематики, которым дурное преподавание помешало понять математику и даже привило неприязнь к ней (как указывает Пуанкаре, «зачастую ум людей, нуждающийся в руководящей нити, слишком ленив для поисков её» [2], с. 354). Виноваты математики, не желающие тратить усилий на разъяснение математики непосвящённым (а сколько людей удивляется, что в математике ещё осталось что открывать!). Конечно, в математике всегда останутся многочисленные детали, недоступные непрофессионалу (и даже профессионалу, но в другой области математики). Но ведь так обстоит дело всюду, в шахматах например. Многие ходы Карпова и Каспарова в их сражениях друг с другом были непонятны даже гроссмейстерам. В то же время гораздо больше из математики, чем принято думать, могло бы быть объяснено широким кругам доброжелательных слушателей и читателей — не в деталях, конечно, а на уровне общей сути. Разумеется, это требует от математиков целенаправленной деятельности в новом для них направлении. Возможно, что в этом и состоит их нравственный долг перед человечеством.

«Но, чтобы помочь непонимающим, мы должны сначала хорошо узнать то, что их останавливает» [2], с. 354. Во многих случаях, по-видимому, препятствием является сложное логическое строение математических определений и утверждений — строение, в котором логические связки и кванторы существования и общности чередуются друг с другом. Всякий преподававший математический анализ знает трудности, возникающие на пути параллельного усвоения понятия предельной точки последовательности, определение которой имеет структуру $\forall\varepsilon\ \forall k\ \exists n\ (A \wedge B)$, и понятия предела последовательности, определение которого имеет структуру $\forall\varepsilon\ \exists n\ \forall k\ (A \Rightarrow B)$. Однако что препятствует пониманию: сложности смысла или проблемы словесного выражения? Автор не знает ответа на этот вопрос, который связан с ещё более глубоким вопросом: можно ли отделить математику от словесных формулировок? Иначе говоря, пребывает ли математика исключительно в математических текстах или же математика имеет некоторую отличную от текстов сущность, а тексты служат лишь тем или иным (и потому, может быть, не всегда удачным) способом выражения этой сущности? По-видимому, этот вопрос, который мы назвали более «глубоким», примени́м не только к математике, но и к любой другой науке. Математика же выделяется среди других наук тем, что она есть, по формулировке Энгельса из «Диа-

лектики природы», «абстрактная наука, занимающаяся умственными построениями, хотя бы и являющимися отражениями реальности»[30] [1], с. 529.

По-видимому, всё же математические понятия, как и всякие разумные понятия, существуют в виде представлений, не обязательно связанных с текстами. Определяющие же эти понятия словесные тексты следует признать важным, но не единственным средством их усвоения.

Думается, сегодня мы располагаем более совершенными инструментами внедрения в сознание обучающегося понятий предела и предельной точки последовательности (обучающегося, не имеющего специальных «математических способностей», которые — при современном понимании этого взятого в кавычки словосочетания — предполагают умение свободно воспринимать именно словесные формулировки). Представим себе экран, на котором отображается траектория движения точки, неограниченно приближающейся к некоторой неподвижной точке, которая и есть предел. Этот сюжет многократно повторяется с изменением как положения предела (чтобы не создавалось ложного впечатления, будто у всех последовательностей один и тот же предел), так и способа приближения движущейся точки к пределу (чтобы не создавалось, в частности, ложного впечатления, что расстояние между движущейся точкой и её пределом изменяется монотонно). Можно представить и аналогичную наглядную иллюстрацию понятия предельной точки, когда траектория хотя и неограниченно приближается временами к этой точке, но вместе с тем опять-таки временами отдаляется от неё на большое расстояние. Кажется правдоподобным, что у любого наблюдающего такие картинки возникнет правильное представление и о пределе, и о предельной точке.

Можно быть уверенным, что с внедрением компьютеров преподавание пойдёт по пути визуализации понятий, традиционно считавшихся совершенно абстрактными. (Колмогоров, кстати, неоднократно высказывал мысль, что следует изучать те наброски, которые делает на бумаге математик, занимаясь самыми абстрактными построениями. Изучать надо даже те движения пальцами, которые математик в это время производит. Колмогоров полагал, что это может быть полезным и для математики, и для психологии.)

[30] Эти построения вряд ли могут быть осуществлены человеческим умом, если они не опираются на общечеловеческую логику, а следовательно, на реальность, из оперирования с которой эта логика происходит.

Если бы излагаемая тема имела только педагогическое значение, мы бы не останавливались на ней так подробно в сочинении философского характера. Однако тема выходит за рамки педагогики, смыкаясь с вопросом об онтологической природе математических сущностей. Вопрос же этот, как и всякий разумный теоретический вопрос, имеет прикладное значение — в данном случае, в порядке обратной связи, педагогическое. В самом деле, если математическое понятие имеет сущность, отдельную от воплощения в словесном определении или формуле, то можно надеяться на лучшее понимание этой сущности путём демонстрации различных её проявлений (а не только словесной формулировки).

Чтобы не быть голословными, приведём пример. В учебном пособии [25], с. 71—72 приведена формула, определяющая некое математическое понятие — так называемый конус Кларка. Сформулировав определение, авторы пишут: «Однако с первого взгляда невозможно понять ни свойств конуса Кларка, ни самого смысла его формального определения». И дальше они сперва приводят эвристические соображения, позволяющие уяснить конус Кларка, а затем переводят эти соображения на язык нестандартного анализа. Здесь можно уловить мысль, что понятие конуса Кларка существует как бы само по себе; определение же в виде формулы — лишь один из способов (и не наиболее удобный) постижения этого понятия, а для лучшего постижения полезны описания вроде «результаты разглядывания множества в микроскоп» [25], с. 86. Независимо от того, так ли это на самом деле, представляется плодотворной следующая рабочая гипотеза: подлинно глубокое математическое понятие или математическое утверждение должно быть в своей сути просто. А тогда есть надежда, что оно окажется понятным (или, лучше сказать, понятым): ведь к простому легче привыкнуть, а мы не знаем иного толкования для «понять», чем «привыкнуть».

Литература

[1] *Маркс К., Энгельс Ф.* Сочинения. — 2-е изд. — Т. 20. — М.: Госполитиздат, 1961.

[2] *Пуанкаре А.* О науке / Пер. с фр. под ред. Л. С. Понтрягина. — М.: Физматлит, 1983. — 560 с.

[3] *Гильберт Д.* Основания геометрии / Пер. с нем. И. С. Градштейна под ред. П. К. Рашевского. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — 491 с.

[4] *Нейгебауэр О.* Лекции по истории античных математических наук. — Т. 1: Догреческая математика. — М.—Л.: ОНТИ, 1937. — 243 с.

[5] Толковый словарь русского языка / Под ред. Д. Н. Ушакова. — Т. 2. — М.: Гос. изд-во иностр. и нац. словарей, 1938. — Стлб. 832.

[6] *Бурбаки Н.* Теория множеств / Пер. с фр. Г. Н. Поварова и Ю. А. Шихановича под ред. В. А. Успенского. — М.: Мир, 1965. — 455 с.

[7] *Чёрч А.* Введение в математическую логику / Пер. с англ. В. С. Чернявского под ред. В. А. Успенского. — М.: ИЛ, 1960. — 485 с.

[8] *Hornby A. S.*, *Parnwell E. C.* An English-Reader's Dictionary. — L.: Oxford University Press, 1959. — 511 p.

[9] *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. — М.: Физматгиз, 1961. — 448 с.

[10] *Потоцкий М. В.* О педагогических основах обучения математике: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1963. — 200 с.

[11] *Горский Д. П.* Определение // Философская энциклопедия. — Т. 4. — М.: Сов. энциклопедия, 1967. — С. 150—152.

[12] *Успенский В. А.* Предисловие // Математика в современном мире. — М.: Мир, 1967. — С. 5—11. [В настоящем издании публикуется на с. 351—359].

[13] *Божич С. П.* О способах истинностной оценки естественнонаучного высказывания // Логика и эмпирическое познание. — М.: Наука, 1972. — С. 243—255.

[14] Изоморфизм // Большая Советская Энциклопедия. — 3-е изд. — Т. 10. — М.: Сов. энциклопедия, 1972. — С. 98.

[15] *Демидов С. С.* К истории аксиоматического метода // История и методология естественных наук. — Вып. 14: Математика. Механика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. — С. 74—91.

[16] *Рашевский П. К.* О догмате натурального ряда // Успехи математических наук. — 1973. — Т. 28. — Вып. 4 (172). — С. 243—246. [Перепечатано в книге: *Успенский В. А.* Апология математики. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 537—547].

[17] *Appel K.*, *Haken W.* Every planar map is four colorable // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1976. — V. 82. — N. 5. — P. 711—712.

[18] *Appel K.*, *Haken W.* Every planar map is four colorable. Part I: Discharging // Illinois Journal of Mathematics. — 1977. — V. 21. — N. 3. — P. 429—490.

[19] *Appel K.*, *Haken W.* Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility // Illinois Journal of Mathematics. — 1977. — V. 21. — N. 3. — P. 491—567.

[20] *Appel K., Haken W.* The solution of the Four-ColorMap Problem // Scientific American. — 1977. — V. 237. — N. 4. — P. 108—121.

[21] *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте. — М.: Физматлит, 1982. — 111 с.

[22] *Плиско В. Е.* Теорема // Математическая энциклопедия. — Т. 5. — М.: Сов. энциклопедия, 1985. — Стлб. 334—335.

[23] *Толстиков А. В.* Ферма теорема // Математическая энциклопедия. — Т. 5. — М.: Сов. энциклопедия, 1985. — Стлб. 605—608.

[24] *Козырев В. П., Юшманов С. В.* Теория графов (Алгоритмические, алгебраические и метрические проблемы) // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — (Итоги науки; Т. 23). — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 68—117.

[25] *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы и их применения: Учеб. пособие. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1985. — 86 с.

[26] Уроки открывает беседа с математиком Л. Понтрягиным: Интервью академика Л. С. Понтрягина «Учительской газете» // Учительская газета. — 1985. — 23 мая.

[27] *Cantor G.* Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1878. — Bd. 84. — S. 242—258. [Русский перевод см. в книге [30], с. 22—35].

[28] *Cantor G.* Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 6 // Mathematische Annalen. — 1884. — Bd. 23. — H. 4. — S. 453—488. [Русский перевод см. в книге [30], с. 106—139].

[29] *Cantor G.* Gesammelte Abhandlungen. — Berlin: Springer, 1932. — 486 s.

[30] *Кантор Г.* Труды по теории множеств / Пер. с нем. Ф. А. Медведева, П. С. Юшкевича; Отв. ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич. — М.: Наука, 1985. — 430 с.

[31] *Cox D. A.* Introduction to Fermat's Last Theorem // American Mathematical Monthly. — 1994. — Jan. — P. 3—14.

[32] *Сингх С.* Великая теорема Ферма: Пер. с англ. — М.: МЦНМО, 2000. — 288 с. [Оригинальное издание: *Singh S.* Fermat's Last Theorem. — L.: Fourth Estate, 1997].

[33] *Thomas R.* An update on the Four-Color Theorem // Notices of the American Mathematical Society. — 1998. — V. 45. — N. 7. — P. 848—859.

[34] *Самохин А. В.* Проблема четырёх красок: неоконченная история доказательства // Соросовский образовательный журнал. — 2000. — Т. 6. — № 7 (56). — С. 91—96.

Математическое приложение[31]. Проблема континуума и языки второго порядка

На языке второго порядка можно написать такую систему аксиом, что наличие или отсутствие у неё модели будет равносильно соответственно подтверждению или опровержению континуум-гипотезы. А если соединить все эти аксиомы знаком конъюнкции, то возникнет формула второго порядка, которая тогда и только тогда имеет модель, когда континуум-гипотеза справедлива; такая формула и была обещана на с. 256, в конце четвёртого размышления. Указанную систему аксиом мы и намерены выписать в настоящем приложении.

Пусть множество M обладает следующими свойствами: 1) его мощность континуальна; 2) в нём выделено некоторое такое подмножество Q счётно-бесконечной мощности, что всякое подмножество множества M, содержащее, в свою очередь, Q в качестве подмножества, имеет мощность либо счётно-бесконечную, либо континуальную. Легко проверить, что возможность такого множества равносильна подтверждению континуум-гипотезы. Поэтому всякое такое M временно условимся называть *подтверждающим*. Наша цель — выписать систему аксиом, задающую подтверждающее множество. Для этого мы воспользуемся следующей теоремой из теории упорядоченных множеств: всякое линейно упорядоченное множество M, обладающее плотным в нём счётно-бесконечным подмножеством и такое, что любое его сечение дедекиндово, имеет мощность континуума. (Напомним, что *сечением* линейно упорядоченного множества называется такое его разбиение на два класса, нижний и верхний, что любой элемент нижнего класса предшествует любому элементу верхнего класса. Сечение называется *дедекиндовым*, если либо в нижнем классе есть наибольший элемент, либо в верхнем классе есть наименьший элемент, но не то и другое вместе.) Система аксиом, которую мы собираемся выписать, как раз и задаст нам в качестве подтверждающего такое линейно упорядоченное множество M, причём в роли Q выступит подмножество, плотное в M. (Напомним, что подмножество K линейно упорядоченного множества называется *плотным*, коль скоро для любых двух различных элементов найдётся элемент K, расположенный между ними[32].)

Но прежде чем выписывать аксиомы, необходимо указать сигнатуру. Наша сигнатура имеет четыре члена. Она состоит из кон-

[31] Для появления этого математического приложения в составе трудов по НЕматематике автор не сумел найти должного оправдания.

[32] K плотно в L, если $\forall x\ \forall y\ [x \in L \wedge y \in L \wedge x < y \Rightarrow \exists z\ (z \in K \wedge x < z < y)]$.

станты $0_{\boldsymbol{Q}}$, имени $\boldsymbol{Q}$ одноместного отношения (т.е. свойства), имени $<$ двуместного отношения и имени «$'$» одноместной операции. Об этих членах сигнатуры не требуется знать ничего, кроме того, что будет записано в аксиомах.

Как известно, *носителем* модели называется множество её элементов. Все операции и отношения модели считаются заданными на её носителе.

Начнём выписывать аксиомы, попутно их комментируя.

H1. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x<y\ \wedge\ y<z\ \Rightarrow\ x<z)$.

H2. $\forall x\ \neg(x<x)$.

H3. $\forall x\ \forall y\ (x<y\ \vee\ y<x\ \vee\ x=y)$.

Аксиомы H1—H3 утверждают, что отношение $<$ представляет собою строгий линейный порядок, определённый на носителе модели. Таким образом, этот носитель оказывается линейно упорядоченным множеством.

H4. $\forall P\ \{\exists x\ P(x)\ \wedge\ \exists y\ \neg P(y)\ \wedge\ \forall x\ \forall y\ [P(x)\ \wedge\ \neg P(y)\ \Rightarrow\ x<y]\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ [\exists u\ [P(u)\ \wedge\ \forall x\ (P(x)\ \Rightarrow\ x<u\ \vee\ x=u)]\ \vee$
$\vee\ \exists v\ [\neg P(v)\ \wedge\ \forall y\ (\neg P(y)\ \Rightarrow\ v<y\ \vee\ y=v)]]\ \wedge$
$\wedge\ \neg[\exists u\ [P(u)\ \wedge\ \forall x\ (P(x)\ \Rightarrow\ x<u\ \vee\ x=u)]\ \wedge$
$\wedge\ \exists v\ [\neg P(v)\ \wedge\ \forall y\ (\neg P(y)\ \Rightarrow\ v<y\ \vee\ v=y)]]\}$.

Аксиома H4 утверждает, что линейный порядок на носителе является дедекиндовым. (Сечение образуется областями истинности свойств P и $\neg P$.)

H5. $\forall x\ \forall z\ [x<z\ \Rightarrow\ \exists y\ (\boldsymbol{Q}(y)\ \wedge\ x<y\ \wedge\ y<z)]$.

Аксиома H5 утверждает, что между любыми двумя элементами носителя найдётся элемент из области истинности свойства $\boldsymbol{Q}$ (т.е. из множества тех элементов носителя модели, которые обладают этим свойством). Иначе говоря, аксиома утверждает, что эта область плотна в носителе.

H6. $\boldsymbol{Q}(0_{\boldsymbol{Q}})$.

H7. $\forall x\ (\boldsymbol{Q}(x)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{Q}(x'))$.

H8. $\neg\exists x\ (\boldsymbol{Q}(x)\ \wedge\ x'=0_{\boldsymbol{Q}})$.

H9. $\forall x\ \forall y\ [\boldsymbol{Q}(x)\ \wedge\ \boldsymbol{Q}(y)\ \wedge\ (x'=y')\ \Rightarrow\ (x=y)]$.

H10. $\forall P\ \{[P(0_{\boldsymbol{Q}})\ \wedge\ \forall x\ (\boldsymbol{Q}(x)\ \wedge\ P(x)\ \Rightarrow\ P(x'))]\ \Rightarrow\ \forall x\ (\boldsymbol{Q}(x)\ \Rightarrow\ P(x))\}$.

Аксиомы H6—H10 гарантируют счётную бесконечность области истинности свойства $\boldsymbol{Q}$. В самом деле, аксиомы H6 и H7 означают, что элемент $0_{\boldsymbol{Q}}$ принадлежит области истинности свойства $\boldsymbol{Q}$, а операция «$'$» не выводит за пределы этой области. Аксиомы H8—H10 напоминают аксиомы Пеано I—III; их можно было бы назвать «аксиомами Пеано» для области истинности свойства $\boldsymbol{Q}$. Эта область истинности, следовательно, представляет собою один из натуральных рядов (со строчной буквы, разумеется). Поэтому она, эта область, счётно-бесконечна.

$$\begin{aligned}
&\text{H11. } \forall W\,\{\forall x\,[\boldsymbol{Q}(x) \Rightarrow W(x)] \Rightarrow \exists\varphi\,\{[\forall y\,\exists x\,(W(x) \wedge (\varphi(x)=y)) \wedge \\
&\wedge \forall y\,\forall x_1\,\forall x_2\,(W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge (\varphi(x_1)=y) \wedge (\varphi(x_2)=y) \Rightarrow (x_1=x_2))] \vee \\
&\quad \vee [\forall x\,[W(x) \Rightarrow \boldsymbol{Q}(\varphi(x))] \wedge \forall y\,[\boldsymbol{Q}(y) \Rightarrow \exists x\,(W(x) \wedge (\varphi(x)=y))] \wedge \\
&\wedge \forall y\,\forall x_1\,\forall x_2\,(W(x_1) \wedge W(x_2) \wedge (\varphi(x_1)=y) \wedge (\varphi(x_2)=y) \Rightarrow (x_1=x_2))]\}\}.
\end{aligned}$$

Аксиома H11 (последняя) утверждает нечто о произвольном надмножестве области истинности свойства $\boldsymbol{Q}$; в аксиоме это надмножество фигурирует в качестве области истинности свойства W. А именно: H11 утверждает, что всякое такое надмножество находится во взаимно однозначном соответствии либо с носителем модели, либо с областью истинности свойства $\boldsymbol{Q}$. В первом случае оно континуально, во втором счётно-бесконечно. Соответствие, о котором идёт речь, представлено функцией φ, которая взаимно однозначно отображает область истинности свойства W либо на весь носитель, либо на область истинности свойства $\boldsymbol{Q}$.

Математическая логика в вычислительных науках и вычислительной практике[1]

Общие концепции, понятия, теоремы. — Языки. — Конкретные алгоритмы и теоремы. — Перспективы.

Всё более существенное место в системе современного научного знания и научной деятельности занимают *вычислительные науки*, предметом которых является вычислительная техника, программное и алгоритмическое обеспечение, а также всевозможные применения электронных вычислительных машин (ЭВМ). В Академии наук СССР этот процесс организационно зафиксирован созданием Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации.

К вычислительным наукам относятся разделы самых различных естественных и общественных наук, выступающих, как правило, одновременно в роли и потребителей, и поставщиков научных и практических результатов для рассматриваемой области — физики, химии, математики, лингвистики, биологии, психологии и т. д. Важное место среди вычислительных наук занимает соответствующая часть математики, называемая по-разному: теоретическая информатика, математическая теория вычислений, вычислительная теория, алгоритмика, кибернетика и т. д. В зарубежных странах используются названия: «computer science», «informatique».

Часть математики, относящаяся к вычислительным наукам, тоже неоднородна. В неё входят разделы математической физики, изучающие уравнения физических процессов, которые протекают в элементах вычислительной техники, теория численных методов решения дифференциальных уравнений, теория массового обслуживания,

---

Опубликовано в журнале: Вестник Академии наук СССР. — 1986. — № 7. — С. 93—103. (Соавтор: Алексей Львович Семёнов.)

[1] С согласия А. Н. Колмогорова в основу данной статьи положены выступления А. Н. Колмогорова, А. Л. Семёнова и В. А. Успенского, посвящённые математическим аспектам вычислительных наук и связанным с этими аспектами вопросам математической подготовки кадров. Выступления состоялись 12 января 1984 года на семинаре Г. И. Марчука в Госкомитете СССР по науке и технике.

используемая при построении операционных систем и в приложениях ЭВМ, теория игр и т. д. Однако центральное место в этой связанной с вычислительными науками части математики принадлежит математической логике и теории алгоритмов. Часто обе эти дисциплины объединяют под общим названием «математическая логика», считая теорию алгоритмов составной частью математической логики в широком смысле слова. Мы будем на протяжении статьи придерживаться этой традиции.

Один из самых выдающихся программистов нашего времени Э. Дейкстра в недавно (1986 год) опубликованной статье называет блестящим предвидением следующее высказывание другого известного специалиста, автора языка программирования ЛИСП Дж. Маккарти, сделанное ещё в 1967 году: «Есть основания полагать, что в следующем столетии связи между вычислительной техникой и математической логикой окажутся столь же плодотворными, какими были связи между математическим анализом и физикой в столетии предыдущем».

Прежде чем перейти к примерам, иллюстрирующим роль математической логики в вычислительных науках, отметим особенность, выделяющую её среди других разделов математики и объясняющую, на наш взгляд, её исключительное место в фундаменте вычислительных наук. Дело в том, что среди математических дисциплин математическая логика является единственной дисциплиной, изучающей взаимоотношение между текстами и их смыслом. Математическое исследование и математическое описание этого взаимоотношения приобретают первостепенную важность, когда тексты превращаются из средств общения между людьми в средство взаимодействия с компьютером.

Тексты бывают повествовательные, повелительные, вопросительные. Теория алгоритмов изучает повелительные тексты, называемые в ней программами. Содержание (семантику) такого текста составляет заключённый в ней алгоритм. Связь теории алгоритмов с вычислительной практикой очевидна.

Менее очевидна роль математической логики в узком смысле слова — науки, предметом которой является соотношение между повествовательными текстами логико-математических языков и их смыслами. Тем не менее оказывается, что с развитием программирования эта роль становится всё более и более важной: от явного, «процедурного», «повелительного» описания всё чаще переходят к «непроцедурному», «функциональному», «повествовательному» программированию. В связи с этим достаточно упомянуть

функциональный язык программирования ЛИСП, который за 20 лет существования не только не утратил актуальности, но служит одним из главных инструментов проекта вычислительных машин пятого поколения.

Возникшая в XIX веке (её «отцом» следует назвать немецкого учёного Г. Фреге) математическая логика, начиная с 1910-х годов, пережила бурный подъём. В 1930-е годы сформировались её основные понятия и направления. То, что было тогда создано, оказалось математикой, «спроектированной под» ещё не существовавшую реальность; такой реальностью оказались ЭВМ, возникшие лишь впоследствии, в середине столетия. Такие ситуации встречались и прежде: геометрия Лобачевского возникла раньше, чем у физиков появилась потребность в ней.

Необходимость изучения основного семантического отношения между текстами и их смыслами привела к задаче математического изучения множеств текстов самих по себе — этим занимается теория формальных грамматик и языков. Вычислительные процессы и устройства изучает теория автоматов и машин, а математические структуры, с помощью которых определяется семантика логических формул, — алгебра и т. д.

Однако центральное место в этой области занимает именно математическая логика. Не случайно Дж. фон Нейману и А. Тьюрингу — учёным, стоявшим у колыбели первых компьютеров, — принадлежит и ряд наиболее фундаментальных вкладов в математическую логику.

Воздействие математической логики на вычислительную практику осуществляется прежде всего в виде формирования общей методологии построения аппаратного и программного обеспечения. Во вторую очередь это влияние сказывается в выборе языков и вычислительных моделей. Использованию же конкретных теорем и алгоритмов математической логики в вычислительной практике следует, как нам кажется, отдать третье место (хотя для вычислительной теории некоторые фундаментальные теоремы гносеологического характера — такие, как теорема Гёделя о неполноте — имеют первостепенное значение).

Общие концепции, понятия, теоремы

Одно из важнейших достижений математики XX века — открытие общего понятия *вычислимой функции*, т. е. функции, вычисляемой каким-либо алгоритмом. Почти одновременными и тесно связанными с этим оказались другие открытия.

Первое из них — *тезис Чёрча*. Попросим любого человека, немного знакомого с работой вычислительной машины, придумать свой язык программирования или описать какой-либо из тех языков, с которыми ему приходилось встречаться. Почти наверняка окажется, что если допустить использование потенциально неограниченных ресурсов, получившийся язык будет *универсальным*. Другими словами, этот язык будет пригоден для записи (может быть, неестественной, неэкономной) программы вычисления любой вычислимой функции. Таким образом, взяв небольшое исходное семейство простейших вычислимых функций и несколько основных алгоритмических конструкций, мы получаем язык программирования, пригодный для задания произвольных вычислимых функций. Для конкретного языка программирования это утверждение (а именно, утверждение о возможности для любой вычислимой функции написать её программу на рассматриваемом языке) и называется тезисом Чёрча. Этот тезис является математическим выражением следующей идеи: вместо того, чтобы строить специализированные устройства для решения тех или иных конкретных задач, можно построить машину, исполняющую программы некоторого универсального языка программирования, а затем составлять программы решения нужных задач на этом универсальном языке.

Эта идея, кажущаяся теперь почти очевидной, была выдвинута создателями теории алгоритмов Э. Л. Постом, А. М. Тьюрингом, А. Чёрчем в 1930-е годы и стала важнейшим шагом на пути создания ЭВМ. Недавно она пережила второе рождение в связи с применением универсальных микропроцессоров, заменившим разработку и изготовление различных специализированных устройств автоматики.

Многие понятия программирования были предсказаны в теории алгоритмов. Отметим среди них понятие транслятора, предвосхищённое понятием алгоритмической сводимости нумераций вычислимых функций (А. Н. Колмогоров), и, как недавний пример, понятие смешанного вычисления в трактовке А. П. Ершова.

Оставим на время языки повелительных предложений и перейдём к другим. Прежде всего, естественные языки допускают конструкции «разрешающего типа», позволяющие (а не предписывающие, как это делают алгоритмы) выполнять те или иные действия. При этом выбор действия зависит от воли участников, случая и т. д. Возникают понятия исчисления, вероятностного алгоритма, игры.

Остановимся на понятии *исчисления*. Как конкретному алгоритму соответствует конкретная функция, вычисляемая этим алгоритмом, — так конкретному исчислению соответствует конкретное множество,

порождаемое этим исчислением. Как общему понятию алгоритма соответствует общее понятие вычислимой функции (т. е. функции, вычисляемой каким-либо алгоритмом), так общему понятию исчисления соответствует общее понятие *породимого множества* (множества, порождаемого каким-либо исчислением). Например, породимым является множество всех верных равенств между неопределёнными интегралами и формулами, задающими первообразные (ср. термин «интегральное исчисление»). Другим примером породимого множества является множество всех выражений формального языка (языка математической логики, языка программирования и т. д.), построенных в соответствии с правилами этого языка. Все эти множества порождаются соответствующими исчислениями.

Для породимых множеств можно аналогично тезису Чёрча сформулировать *тезис Поста* о совпадении интуитивного понятия породимости с понятием породимости некоторым универсальным исчислением (с параметром — описанием конкретных правил порождения). Понятие породимости оказывается тесно связанным с понятием вычислимости. Именно, породимые множества — это в точности множества значений (а также в точности области определения) вычислимых функций. С другой стороны, среди породимых множеств есть такие, для которых невозможен алгоритм распознавания принадлежности к ним. В частности, не существует алгоритма проверки по любой программе на универсальном алгоритмическом языке, не зацикливается ли она при заранее фиксированном исходном данном.

Сама по себе идея отделения текста на языке от его смысла, возможность сопоставления с текстом различных смыслов (и возможность различных способов такого сопоставления) является революционной и очень важной для программирования. Формальные определения семантики для языков математической логики послужили образцом для многих построений в программировании. Тонкое взаимодействие между повествовательной (функциональной) и повелительной (операционной) семантиками является важным моментом в достижении большей надёжности математического обеспечения, программ и оборудования. С этими вопросами связана ещё одна большая область — доказательство правильности программ. Сама постановка задачи доказательства правильности была бы невозможной без достижений математической логики. Ведь вопрос о том, правильно ли работает программа, допускает тривиальный ответ: она работает в соответствии с самой собой, именно так, как она написана. Этот ответ, конечно, неудовлетворителен.

В действительности один из начальных этапов разработки программы состоит в задании её *спецификации*, т. е. в указании на некотором повествовательном логико-математическом языке сведений о том, в каких условиях должна работать и какого результата должна достигать программа. Доказательство правильности программы, т. е. её соответствия заданной спецификации, представляет собой нечто аналогичное математическому доказательству (наиболее близкий аналог — доказательство в геометрических задачах на построение). Дополнительные трудности, по сравнению с традиционной математикой, состоят в том, что доказательству подлежат свойства программы, связанные с её выполнением — процессом, разворачивающимся во времени.

Потребность в строгости и достоверности получаемых доказательств привела к созданию формальных систем, предназначенных для доказательства правильности программ. Источником таких систем являются формальные дедуктивные системы математической логики. Естественно, что для систем доказательства правильности программ есть и ограничение на их доказательную силу: в соответствии с теоремой Гёделя о неполноте для любой мыслимой системы доказательств найдутся правильные программы, правильность которых невозможно доказать.

Теорема Гёделя о неполноте (не смешивать с теоремой Гёделя о полноте!) — одно из величайших достижений математической мысли XX века. Она заключается в следующем.

Пусть мы имеем какую-либо достаточно богатую и непротиворечивую систему аксиом, описывающую свойства натурального ряда, т. е. свойства натуральных чисел и операций сложения и умножения. Термин «достаточно богатая» означает, что из системы аксиом можно получить (вывести) достаточно содержательные следствия, т. е. что определённые, заранее указанные истины относительно натурального ряда могут быть выведены, или доказаны, отправляясь от этой системы. Термин «непротиворечивый» означает, что ни для какого утверждения не может случиться, что в рассматриваемой системе доказывается как само это утверждение, так и его отрицание. Оба требования (достаточное богатство и непротиворечивость) совершенно естественны: системы аксиом, не удовлетворяющие этим требованиям, могут представлять лишь второстепенный интерес.

Пусть далее процесс получения следствия из аксиом формализован настолько, что может быть поручен вычислительной машине (или не слишком квалифицированному, но педантичному и испол-

нительному лаборанту). Тогда непременно найдётся такое истинное утверждение о натуральном ряде, которое не может быть получено указанным формальным образом из рассматриваемых аксиом (если же мы попытаемся присоединить это истинное утверждение к нашей аксиоматике в качестве новой аксиомы, немедленно возникнет новая недоказуемая истина). Здесь важно подчеркнуть, что система аксиом и правила получения следствий из неё выбираются совершенно произвольно — лишь бы эти правила носили механический характер и соблюдались описанные выше естественные требования. Таким образом, невозможна никакая система аксиом и формальных, механических правил вывода, обеспечивающая получение всех истин, относящихся к арифметике натуральных чисел, а тем более всех истин, относящихся к какой-либо математической теории, содержащей арифметику как часть.

Остаётся прибавить, что практически любая математическая теория (и уж во всяком случае теоретическое программирование) включает в себя натуральные числа и простейшие операции над ними и, следовательно, содержит арифметику как свою часть. Поэтому теорема о неполноте имеет фундаментальное гносеологическое значение — она показывает неисчерпаемость творческого мышления как средства познания.

Следующее открытие, возникшее в математической логике и играющее сейчас важную роль в практических задачах, — понятие *сложности вычисления*. Это понятие исследовалось и развивалось параллельно и в большой степени независимо от потребностей реальной вычислительной практики. Однако полученные теоретические результаты оказали существенное и очень широкое, хотя и не прямое, влияние на решение реальных задач программирования. Это можно проследить на примерах так называемых переборных задач. Напомним, что в теории сложности вычислений алгоритм принято считать *достаточно быстрым*, если время его работы на данном входе, или аргументе, ограничено полиномом от объёма аргумента (входа). В течение длительного времени разработчики математического обеспечения затрачивали значительные усилия на попытку построить достаточно быстрый алгоритм решения различных задач, имеющих следующий общий вид.

Пусть задача состоит в отыскании для каждого объекта x либо некоторого объекта y, для которого выполнено заданное соотношение $P(x, y)$, либо сигнала о том, что такого y не существует. Пусть далее ответ на вопрос, выполнено ли соотношение $P(x, y)$ для данных x, y, получается посредством достаточно быстрого алго-

ритма. Пусть, наконец, заранее известны границы на возможные y, скажем, известно, что объём y не превосходит объёма x. Тогда есть тривиальный алгоритм решения поставленной задачи. Он состоит в последовательном переборе всех y, не превосходящих заданной границы, и проверке соотношения $P(x, y)$ для каждого y.

Например, пусть требуется найти в графе x путь y, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу (гамильтонов путь). Тогда $P(x, y)$ как раз и означает, что y есть гамильтонов путь в графе x; граница по объёму очевидна. Среди других примеров описанного типа существуют различные задачи на графах (раскраска графа, поиск максимального паросочетания и т. д.), задача целочисленного линейного программирования и другие оптимизационные задачи и т.д.

Значительные усилия были затрачены на то, чтобы для каждой из этих задач найти не просто алгоритм решения, но достаточно быстрый алгоритм. Ни для одной из большого числа задач найти требуемый достаточно быстрый алгоритм не удавалось. Однако поиски продолжались. Прогресс наступил в теории.

Во-первых, было доказано, что все упомянутые задачи (для которых не удавалось найти достаточно быстрого алгоритма) эквивалентны в том смысле, что построение достаточно быстрого алгоритма для одной из них автоматически приводит к нахождению достаточно быстрого алгоритма для всех остальных. Эти эквивалентные друг другу задачи получили название *переборных*.

Во-вторых, была сформулирована гипотеза (завоёвывающая всё большее признание), что ни для одной из переборных задач достаточно быстрого алгоритма не существует.

Почему сочетание этой теоремы об эквивалентности переборных задач и этой гипотезы следует считать прогрессом? Дело в том, что без теоретического осознания ситуации каждая новая переборная задача приводила бы к новым бесплодным попыткам кустарными средствами найти для неё достаточно быстрый алгоритм. Теперь же происходит следующее: специалист-алгоритмизатор, столкнувшись с задачей, кажущейся ему переборной, может обычно довольно быстро доказать, что она действительно такова; тогда он модифицирует её формулировку, выделяет подклассы, представляющие практический интерес, и т. д., после чего пытается построить достаточно быстрый алгоритм в этих подклассах.

Наряду с доказательством переборности отдельных задач теория сложности даёт и другие нижние оценки сложности вычислений, показывающие бесплодность попыток существенного улучшения алгоритмов.

В качестве результата развития теории сложности вычислений можно рассматривать и возможность эффективно оценивать и сравнивать различные конкретные алгоритмы (об отыскании самих алгоритмов речь пойдёт ниже).

С точки зрения математика не менее фундаментальным, чем понятие сложности вычислений, является понятие *сложности объекта*. Достаточно давно было замечено, что объём описания объекта может быть значительно меньше, чем объём самого объекта. Например, текст «миллион букв Ы» много короче текста «ЫЫ...» из миллиона букв «Ы». Объём описания объекта и называется его сложностью — при данном *способе описания*. Однако лишь в середине 1960-х годов стало ясно, что среди всевозможных способов описания существуют такие, называемые *оптимальными*, которые позволяют получать описания не хуже любого другого способа («не хуже» здесь означает «длиннее не более чем на некоторую, не зависящую от описываемого объекта константу»). В качестве такого оптимального способа описания можно использовать, например, так называемый универсальный. Описание, подаваемое на вход универсального способа, состоит из программы конкретного способа описания и описания объекта при этом способе. Универсальность — возможность имитировать любой конкретный способ — и обеспечивает свойство «быть не хуже». Формализация приведённого рассуждения составляет содержание теоремы об оптимальном способе описания (А. Н. Колмогоров). Объём описания, получаемого при оптимальном способе описания, называется *энтропией*. Теория энтропии объектов может быть положена в основу определения, скажем, случайной последовательности. Классическая теория вероятностей не в состоянии дать такое определение, а важность этого понятия для вычислительной практики несомненна (имея в виду, например, метод Монте-Карло).

Касаясь общеметодологической роли математической логики для вычислительной практики, уместно специально выделить значение отрицательных результатов. Понимание, что в принципе невозможно сделать что-то, имеет для программирования не меньшее значение, чем для техники невозможность нарушить второе начало термодинамики или для физики невозможность превысить скорость света.

Два примера важнейших отрицательных результатов математической логики мы уже привели. Один был связан с теоремой Гёделя о неполноте и доказательством правильности программ, другой (условный) — с переборными задачами. Безусловно, практически важными являются и другие отрицательные результаты математической логики. Теорема о нераспознаваемости нетривиальных свойств вычислимых

функций показывает невозможность существования транслятора, устанавливающего какие-либо нетривиальные свойства программ, например определяющего, зацикливается ли программа на любом входе.

Языки

Второй источник приложений математической логики и теории алгоритмов в вычислительной практике — формальные языки, разработанные в этой области математики. Хотя важность этого источника нам кажется меньшей, чем идейное влияние общих концепций, обсуждённых выше, но зато здесь это влияние более очевидно и иногда просто поразительно. Большинство логических и алгоритмических языков, изобретённых независимо от компьютеров, так или иначе вошло в языки программирования, описание работы ЭВМ и т. д.

Один из самых впечатляющих примеров — язык ЛИСП. Он до сих пор сохраняет своё лидирующее положение в сфере задач искусственного интеллекта, служит источником многих новых идей и разработок, среди которых ЛИСП-машины 1980-х годов. Синтаксис и семантика ЛИСПа построены на базе одного из языков математической логики, а именно λ-исчисления, предложенного Чёрчем в 1930-е годы. Вспомним также, что конструкции повелительного языка нормальных алгорифмов, ориентированные на обработку строк символов, вошли во многие языки программирования.

Конечно, языковое влияние на вычислительную теорию и практику не ограничивается использованием конкретных языков. Более фундаментально влияние общих языковых концепций, общего представления о языке как о выразителе смысла — повествовательного, повелительного, вопросительного. Сама идея формальной семантики языка, без которой невозможно современное программирование, принадлежит математической логике. Приведём ещё один пример такого концептуального влияния.

Как известно, в современных языках программирования повествовательные и повелительные компоненты тесно переплетены. Одной из основных идей, лёгших в основу языка ПРОЛОГ, является возможность двоякой интерпретации предложений вида «если A, B, C, . . ., то X». Одна интерпретация — повествовательная: «из истинности A, B, C, . . . следует истинность X». Другая — повелительная: «чтобы достичь цели X, сделай A, B, C, . . .». А ведь идея повелительной интерпретации предложений логического языка — так называемая

логика задач (А. Н. Колмогоров) — возникла ещё в начале 1930-х годов!

Но и влияние конкретных языков бывает весьма существенным. Так, при изучении языка нормальных алгорифмов ещё в 1950-е годы были открыты основные приёмы структурного программирования, вошедшие в практику в 1970-е годы.

Ещё значительнее роль наиболее известного из языков математической логики — языка узкого исчисления предикатов. В 1970-е годы программисты, работающие с большими объёмами информации, поняли, что им необходим простой и универсальный язык, позволяющий формулировать утверждения о хранимой информации, и что такой язык может быть построен на основе языка исчисления предикатов. В настоящее время этот язык — под названием «реляционная модель данных» — составляет краеугольный камень быстро развивающейся и актуальной области — построения баз данных.

Применение исчисления предикатов в информатике не ограничивается базами данных. Отметим, например, что исследования по так называемому «естественному выводу», начатые ещё в 1930-е годы (Г. Генцен), стали основой для систем автоматического поиска вывода, применяемых в задачах искусственного интеллекта. С точки зрения названных задач перспективной кажется и разработка математических исчислений так называемой модальной логики, оперирующей, наряду с традиционными для классической логики оценками утверждений «истинно» и «ложно», также и такими оценками, как «возможно», «необходимо», «правдоподобно», «произойдёт в будущем» и т. д.

Наряду с формальными языками (повелительными, повествовательными, вопросительными) математическая логика поставляет для вычислительной теории и практики и вычислительные модели. Первые универсальные вычислительные устройства — машина Поста, машины Тьюринга — появились в 1936 году не «в железе», а всего лишь на бумаге — в публикациях их создателей как идеализированные абстрактные схемы. Хотя эти схемы и не были предназначены для конкретной реализации, они и поныне служат мощным инструментом для исследования принципиальных возможностей реально существующих вычислительных устройств.

Таким образом, умозрительные конструкции и вычислительные реалии оказываются во взаимодействии более тесном, чем это можно было предполагать априори. Показательна в этом отношении история абстрактных вычислительных моделей, образованных семейством элементов с одной и той же структурой. Абстрактные вычислительные устройства, составляющие эту модель, впервые рассматривались в

начале 1950-х годов Дж. фон Нейманом. По-видимому, первоначальные мотивы их изучения носили в основном философский характер и связывались прежде всего с вопросами о возможности имитации искусственными устройствами самовоспроизведения, размножения и других функций живых организмов. Теория этих вычислительных моделей развивалась и время от времени привлекала внимание практиков. При этом название моделей много раз менялось: говорили об автоматах фон Неймана—Чёрча, клеточных автоматах, итеративных сетях, однородных средах и т. д.; сейчас по отношению к этому понятию наиболее часто употребляется термин «систолические структуры».

За последние годы прогресс в области элементной базы вычислительной техники привёл к тому, что работы в указанной области приобрели практическую значимость. Это отразилось на росте публикаций по теории сверхбольших интегральных схем (СБИС), включающей и область рассматриваемых вычислительных моделей. В трудах основных международных конференций по теоретическим основам вычислительных наук такие публикации сейчас занимают 20—30% объёма.

Конкретные алгоритмы и теоремы

Наконец, последняя по степени фундаментальности, но всё же практически важная сфера влияния математической логики на вычислительную практику связана с конкретными алгоритмами (и лежащими в их основе теоремами). Дело в том, что в сфере интересов математической логики всегда находились выражения формальных языков и в какой-то степени произвольные знакосочетания (цепочки символов, размеченные графы и другие подобные *конструктивные объекты*). Особое внимание, уделяемое математической логикой проблеме эффективности, алгоритмичности построений, привело к тому, что в ней накопился значительный запас алгоритмов для работы с объектами указанного вида.

Как известно, расширение сферы использования вычислительной техники связано сейчас прежде всего с обработкой нечисловой информации, представляемой конструктивными объектами различных типов. Так, лингвистические алгоритмы синтаксического анализа в значительной мере используют алгоритмы, выработанные при анализе скобочных и графовых структур математической логики. Использование в вычислительном деле алгоритмов математической логики

особенно наглядно видно на примере развития практических работ в области логического вывода и использования неклассических логик, о чём мы уже упоминали выше. Соответствующая теоретическая база давно и успешно строится математической логикой.

При том, что (как мы неоднократно подчёркивали) среди идей, методов и фактов математической логики конкретные теоремы занимают по значимости лишь третье место (деля его с конкретными алгоритмами), их роль тоже бывает весьма важной (просто роль концепций и языков ещё важнее). Примером может служить известная *теорема о неподвижной точке* теории алгоритмов, называемая также *теоремой о рекурсии*. Использование её в вычислительной практике (а именно, в программировании) даёт пищу для поучительных размышлений, и мы остановимся на этой теме подробнее. Начнём с общего идейного фона.

Развитие программирования, в частности языков программирования, вначале происходило таким образом, что к текстам на этих языках предъявлялись очень жёсткие синтаксические правила и ограничения. Но со временем синтаксис этих языков становился всё более неформальным и «человечным»: происходила и продолжается сейчас гуманизация взаимодействия человека и машины. Представление же о том, что, собственно, программа должна делать, если в ней удалось правильно расставить все точки с запятыми и скобки, с самого начала было абсолютно неформальным. Однако необходимость создания больших программ, работающих в соответствии с достаточно сложными спецификациями и не зависящих от типа используемой ЭВМ, привело к попыткам формализации интуитивных представлений о семантике конструкций программирования.

Таким образом, если развитие синтаксиса идёт в направлении от формального к неформальному, семантика развивается или пытается развиваться в противоположном направлении — в сторону всё большей формализации. Но создание достаточно простой и последовательной (иначе человек не смог бы ею пользоваться), строгой и непротиворечивой (иначе её невозможно было бы реализовать в компиляторах и использовать в доказательствах правильности) семантики оказалось весьма сложным делом. Построить такую семантику для ряда языков программирования не удалось по сей день. С другой стороны, во многих случаях был достигнут существенный прогресс. Он основан на широком использовании конструкций, накопленных в математике, и прежде всего в теории алгоритмов.

Один из важнейших примеров такого использования — построение формальной семантики для рекурсивных программ. В немашинной

математике иногда встречаются примеры определения функции через саму себя (классический пример — факториал). Однако роль таких (они называются *рекурсивными*) определений намного важнее в программировании. Типичная ситуация, когда рекурсивные определения возникают, такова.

Мы определяем функцию, применяемую к объектам, которые могут иметь сложную структуру. При этом мы знаем, что даёт эта функция в простейших случаях (т. е. для простейших объектов). Кроме того, известно, как разбить произвольный объект на сравнительно крупные части — подобъекты — с тем, чтобы применить функцию к этим частям и из результатов применения получить результат действия функции на весь объект. Такое задание функции соответствует естественному для человеческой деятельности подходу — многоступенчатому разбиению задачи на подзадачи, сводящиеся в конце концов к задачам совсем простого вида. В вышеприведённом описании не содержится в явном виде никакого алгоритма вычисления определяемой функции: ведь результаты её применения к подобъектам тоже не указаны (чтобы получить эти результаты, надо разбить подобъекты на более мелкие подобъекты и т. д. — пока не дойдём до простейших объектов). Тем не менее при получении такого описания в вычислительной машине автоматически формируется некоторый алгоритм вычисления. И хотя функция, задаваемая этим алгоритмом, соответствует семантике рекурсивного определения, сама эта семантика носит неалгоритмический характер, она отражает лишь те представления о функции, которыми программист пользовался при её описании.

Основой для описанной неалгоритмической семантики рекурсивных определений как раз и служит вышеназванная теорема о неподвижной точке. Вообще теоремы о неподвижной точке играют важную роль в различных областях математики. В теории алгоритмов они имеют вид теоремы о неподвижной точке вычислимого оператора, отображающего функции в функции. Теорема эта утверждает, что всякий оператор имеет неподвижные точки (т. е. функции, перерабатываемые этим оператором в себя), причём среди этих неподвижных точек-функций существует *наименьшая* (так что все другие неподвижные точки-функции служат её продолжениями на бóльшие области определения). Таким образом, достаточно описать вычислимый оператор, чтобы получить описание и в конечном счёте программу некоторой вычислимой функции — наименьшей неподвижной точки описанного оператора. Именно такое использование теоремы о неподвижной точке и легло в основу построения упоминавшегося

уже языка ЛИСП (Дж. Маккарти), а также создания формальной семантики для многих конструкций более поздних языков программирования (Д. Скотт).

Перспективы

СССР традиционно занимает одно из ведущих мест в мире по исследованиям в области математической логики. Однако необходимо отметить следующие два обстоятельства. Во-первых, проблема создания ЭВМ нового поколения требует интенсивного расширения исследований. Во-вторых, в некоторых областях, где вначале советские учёные занимали ведущее положение, затем произошло отставание. В целом численность специалистов, разрабатывающих проблематику математической логики в Академии наук СССР и университетах, за последние годы сократилась.

Рассмотрим ситуацию более детально. При этом мы не претендуем на полноту картины, а лишь хотим обратить внимание на существующие проблемы.

Логический вывод. В этом направлении в СССР есть серьёзные достижения, принадлежащие прежде всего ленинградской группе математических логиков. Разработанный в этой группе обратный метод Маслова не менее эффективен, чем созданный на Западе метод резолюций, и был опубликован раньше него. Для зарубежных стран (прежде всего Японии) в последние годы характерен всплеск работ в этой области.

Формальные грамматики и языки. Уже на раннем этапе развития этого направления в СССР были достигнуты существенные успехи. Однако теперь уровень исследований отстаёт от зарубежного.

Сложность вычислений. Первые работы по сложности вычислений существенно опередили зарубежные. За последние годы в нашей стране получен ряд важных результатов. Однако масштаб отечественных разработок значительно отстаёт от ведущихся на Западе, где основные результаты получены группами специалистов по математической логике и теории алгоритмов, сотрудничающими с крупными фирмами.

Сложность (энтропия) конструктивных (конечных) объектов. Эта область пока имеет меньший удельный вес, чем уже перечисленные, но является весьма перспективной. Советские исследователи, которым принадлежат здесь первые работы, продолжают сохранять ведущие позиции.

Логические языки и их семантика. В этой обширной и разветвлённой области советским исследователям принадлежит ряд важных достижений, в частности, полученных недавно. Отметим, что программные (динамические) логики, исследование которых было начато в СССР, сейчас наиболее интенсивно развиваются на Западе.

Итак, идейное влияние математической логики, в том числе теории алгоритмов, на формирование вычислительной теории и практики существенно уже сейчас, а в будущем будет возрастать. Поэтому представляется целесообразным расширение как фронта исследовательских работ в этой области, так и масштаба подготовки кадров; должна возрасти и роль математической логики как компонента обучения на различных его этапах и при подготовке специалистов всех уровней. Затраты на соответствующие мероприятия ничтожны по сравнению с общими затратами на развитие вычислительного дела, а в том, что они многократно окупятся, нет сомнений.

Отзыв о докторской диссертации Зураба Николаевича Микеладзе

Всякий, кто посмотрит статью «Аристотель» в 3-м издании Большой Советской Энциклопедии, будет изумлён, как мало там сказано о его вкладе в логику. В сущности, не сказано ничего, кроме упоминания «Органона» и описания — в четырёх фразах — теории силлогизмов. Уже одно это показывает, что заниматься логическим наследием Аристотеля всё ещё необходимо. Ведь вклад Аристотеля в логику даже неудобно и называть-то вкладом: по существу, Аристотель создал науку логику.

В истории развития общества наступает важный момент — когда появляется грамматика языка этого общества, написанная на том же самом языке. Ибо первые грамматики, скажем, русского языка, написанные в других странах и на других языках, имели нескрываемую утилитарную (именно, коммерческую) направленность. Грамматика же какого-либо языка, написанная на том же самом языке, означает важное явление: то, что язык осознаётся его носителями как предмет исследования (а до этого, подобно мольеровскому Журдену, эти носители просто говорили прозой, не замечая этого). Другая аналогия — осознание окружающего воздуха не как пустоты, а как вещества.

Деятельность Аристотеля хорошо вписывается в указанную схему. Он не был первый, кто применил тонкие логические рассуждения и силлогизмы (этому его обучил его учитель Платон), но он был первый, кто сделал эти рассуждения предметом изучения и стал рассуждать о рассуждениях.

Когда рассуждения и осуществляемые посредством рассуждений доказательства делаются предметом изучения, непременно обнаруживается следующее, на первый взгляд неожиданное, обстоятельство.

Защита диссертации «Логическое учение Аристотеля с точки зрения современной формальной логики» состоялась 4 марта 1985 года в Институте философии Академии наук СССР (точнее — в Специализированном совете Д 002.29.03 при этом Институте). Учёная степень доктора философских наук присуждена З. Н. Микеладзе 13 декабря 1985 года Высшей аттестационной комиссией при Совете министров СССР.

Оно состоит в том, что на самый первый план выдвигаются модальности, прежде всего категория возможности в различных её оттенках. Ещё раз повторю, что на первый взгляд это кажется удивительным: кажется очевидным, что в теории логических доказательств на первом месте — не деля этого первого места ни с чем — должны находиться лишь категории истины и лжи. Более внимательный анализ показывает, однако, что само понятие доказательства (я говорю, разумеется, о содержательных логических доказательствах, а не о цепочках формул математических исчислений) осмысленно лишь в универсуме, в котором присутствует категория возможности. И причина тому отнюдь не только в том, что рассуждения проводятся на естественном языке, насыщенном модальностями. Причина гораздо глубже. В самом деле, пусть мы собираемся доказать некоторый факт, т. е. некоторое положение вещей. Если это положение вещей уже дано нам как истинное, то нечего его и доказывать: ибо вот, оно нам дано. Точно так же нечего (а именно, бесполезно пытаться) доказывать и такое положение вещей, которое дано нам как ложное. Другое дело, если интересующее нас положение вещей дано нам как возможное, т. е. как такое, которое может быть, а может и не быть; тогда доказательство как раз и имеет своею целью установить, какой из возможных членов этой альтернативы имеет место в действительности. Таким образом, самая необходимость доказательства возникает лишь тогда, когда подлежащий доказыванию факт априори предполагается возможным.

Одновременно в понятии доказательства присутствует и категория необходимости: ведь в правильном доказательстве заключение с необходимостью следует из исходных посылок. Можно сказать, что процедура доказывания как раз и состоит в переквалификации подлежащего доказательству факта из статуса возможного в статус необходимого.

Итак, категория модальности (прежде всего — категория возможности) лежит в основе логической (но не математической!) теории доказательств. Именно поэтому у Аристотеля (особенно в 9-й, 12-й и 13-й главах трактата «Об истолковании» и в 29-й главе «Первой аналитики») рассуждения о доказательствах неизбежно включают в себя рассуждения о возможном. И именно поэтому **одну из главных заслуг** диссертанта я вижу в том, что он — по-видимому, впервые — чётко поставил логику модальностей во главу угла во всём логическом учении Аристотеля.

Хорошо известно, что модальности — сложные образования, и наши представления о возможности и необходимости имеют много оттенков. По существу имеется много понятий «возможность» и

много понятий «необходимость». Так, одни из смыслов термина «возможность» включают в себя по объёму и необходимость («если необходимо, то тем более возможно»), а другие — исключают («нет, это не необходимо, это всего лишь возможно»). **Второе достоинство** диссертации состоит в расчленении этих оттенков понятия, к примеру, возможности — лучше сказать, этих различных понятий возможности. Разумеется, я включаю в состав диссертации не только 36-страничный текст, напечатанный тиражом 100 экземпляров на правах рукописи взамен автореферата (как известно, такое происходит, когда диссертация защищается в форме научного доклада по совокупности работ[1]). При ссылках я буду называть «диссертацией» указанный 36-страничный текст.

Недавно Институт философии АН СССР издал сочинения Аристотеля в четырёх томах. Том 2, изданный в 1978 году, содержит шесть трактатов, традиционно объединяемых в так называемый «Органон»: именно, «Категории», «Об истолковании», «Первая аналитика», «Вторая аналитика», «Топика» и «О софистических опровержениях». Вступительную статью к этому тому написал диссертант, он же написал примечания и, вообще, является редактором тома 2. Вступительная статья озаглавлена «Основоположения логики Аристотеля» в дальнейшем, для краткости, ОЛА. Её следует отнести к составу диссертации.

Так вот, в названной вступительной статье автор различает

1) простую, или безусловную, или унилатеральную возможность (ОЛА, с. 16 и 28); эта возможность включает в себя необходимость как частный случай;

2) потенциальную возможность (ОЛА, с. 17);

3) акцидентальную, или билатеральную, возможность (ОЛА, с. 28—29).

Две последние возможности несовместимы с необходимостью, однако (как показывает проведённый автором анализ) содержания этих двух возможностей существенно различны: акцидентальная возможность означает случайность (и потому, если *A* акцидентально возможно, то в той же степени акцидентально возможно и не-*A*), потенциальная же возможность означает, что обсуждаемое положение вещей в данный момент имеется лишь в потенции, т. е. ещё не существует как реальность, но может проявиться в развитии. Именно в этом последнем, потенциальном, смысле диссертант

[1] ●➤ Такую форму защиты я считал бы единственно правильной для докторских защит. ◄●

совершенно правильно истолковывает кажущуюся сперва загадочной фразу Аристотеля («Об истолковании», гл. 13): «некоторые вещи <...> могут в одно и то же время принимать противолежащие друг другу [свойства]».

И здесь мы вплотную подходим к **третьему важному достоинству** диссертации. Оно состоит в упорном стремлении понять, что хотел сказать Аристотель (что, как мы знаем, не всегда легко), а поняв — разъяснить, вместо того, чтобы пойти по гораздо более лёгкому (и, к сожалению, отчасти проторённому) пути; этот лёгкий путь состоит в попытках объявить тексты Аристотеля непонятными или даже ошибочными. Так, известный польский логик Лукасевич объявляет ошибочной трактовку Аристотелем возможности как отсутствия необходимости. Подвергая критике эту точку зрения Лукасевича, а также взгляды известного швейцарского философа Бохеньского, Микеладзе, достойно продолжая методы своих античных предшественников, применяет остроумный полемический приём: он сталкивает друг с другом позицию Лукасевича и позицию Бохеньского, со сдержанной иронией отмечая (ОЛА, с. 29), что «по И. М. Бохеньскому унилатеральная возможность изучается Аристотелем в основном в трактате „Об истолковании“, а билатеральная — в „Первой аналитике“. По Я. Лукасевичу — наоборот». Диссертант даёт своё понимание проблемы и своё разъяснение возникающих здесь трудностей, и я не смог бы оценить вклад диссертанта лучше, чем это сделал известный финский логик Г. Х. фон Вригт. Предоставляю ему слово (это выдержка из письма фон Вригта, опубликованного в «Известиях АН Груз. ССР. Серия философии и психологии», 1980, № 1, с. 103—104):

> Я прочитал введение проф. Микеладзе к переводу логических сочинений Аристотеля. Считаю интерпретацию автора очень интересной. Позволю себе высказать несколько замечаний.
>
> Как было сказано, я нашёл толкование проф. Микеладзе очень интересным. Оно может быть подвергнуто обсуждению с двух точек зрения: как вклад в интерпретацию Аристотеля и как вклад в теорию модальности. Здесь я не затрону последней части (§ 5) введения, касающейся понятия необходимого следования; всё, что там сказано, мне кажется абсолютно правильным и неоспоримым. Не будучи сам специалистом по Аристотелю, я не могу делать «авторитетных» заявлений об интерпретации Микеладзе. Но насколько я могу судить, проф. Микеладзе прав в споре как с Бохеньским, так и с Лукасевичем. Особенно поразила меня, — как наиболее оригинальное в интерпретации Микела-

дзе, — попытка показать, что позиция Аристотеля совершенно последовательна. Другими словами, он не затушёвывает трудности, объявляя определённые отрывки путаными или туманными или же несовместимыми со всем остальным. Должен признаться, что, читая знаменитую девятую главу De Interpretatione, я был склонен игнорировать определённые отрывки как «путаные» и не соответствующие картине, которую я сам составил о позиции Аристотеля в обсуждаемом вопросе. Но после того, как я прочёл и внимательно рассмотрел мнение проф. Микеладзе, думаю, что без этого я сам не смог бы в полной мере отдать должное Аристотелю.

Итак, диссертант в своём понимании Аристотеля спорит и побеждает в споре своих противников. Здесь хочется отметить, что он не просто побеждает, но побеждает, отстаивая правое дело — защиту Аристотеля. Мне чрезвычайно импонирует то, что диссертант, подобно Дон-Кихоту, бросается в бой, защищая честь Аристотеля. Я приведу несколько цитат:

Стагирит[2] не нуждается в снисхождении (ОЛА, с. 34).

Прежде чем упрекать Аристотеля в выставлении противоречивых соображений, казалось бы, следовало... (с. 5 статьи «Из комментариев к „Органону“ Аристотеля» (в дальнейшем ИККОА) в сборнике «Логика, семантика, методология», Тбилиси, 1978).

Канонизация <...> способствовала распространению в высшей степени упрощённого представления о научном содержании логических сочинений Аристотеля <...>. А между тем вряд ли найдётся в истории человеческой мысли столь адогматично мыслящий ум <...>. Создаётся впечатление, будто учёные, осуждающие Стагирита в догматизме и прочих грехах, просто не читали «Органона» (Диссертация, с. 2—3).

Распространённое мнение, будто он путал логическое с грамматическим, следует считать полным недоразумением (Диссертация, с. 4).

Эти и другие высказывания, да и вся манера изложения, показывают, я бы сказал, любовь диссертанта к Аристотелю. Право же, Аристотель заслуживает такой любви. Диссертация производит сильные впечатление своим неравнодушием, эмоционально напряжённым отношением к предмету исследования. На мой взгляд, такой и должна быть философия. Говоря о некоторых историках логики, автор пишет (ИККОА, с. 6): «Нам кажется, что они <...> больше заботились о проведении собственных философских взглядов, чем о

[2] Стагирит — прозвище Аристотеля, который был родом из города Стагиры в Македонии. — *В. У.*

воссоздании аристотелевского замысла». Обсуждаемая диссертация полностью свободна от этого недостатка.

Я уже так долго хвалю диссертацию, что пора сказать и что-нибудь критическое. Мне не представляется оправданным сопоставление в ОЛА, с. 34, в качестве контрадикторных следующих двух высказываний Аристотеля: «сущее, когда оно есть, необходимо есть» и «не всё сущее необходимо есть». Кажется, что в этих двух высказываниях не содержится даже внешней видимости противоречия: ведь первое из них содержит немаловажную клаузулу «когда оно есть». На эту клаузулу диссертант, как мне кажется, не обратил должного внимания. А суть, как мне кажется, состоит в том, что Аристотель выделяет здесь среди всего сущего (которое отнюдь не является необходимым) то сущее, которое есть (и которое, в силу того, что оно есть, является необходимым).

Но вернёмся к достоинствам диссертации. **Четвёртое достоинство** состоит в глубине философского анализа обсуждаемых сюжетов. Я приведу только один пример: открытие диссертантом у Аристотеля категории потенциальной возможности. То есть, категорию эту открыл Аристотель, но обнаружить, вычленить её в его текстах отнюдь не просто, что показывают многочисленные непонимания или неправильные толкования этой аристотелевской темы целым рядом исследователей. Анализируя и расчленяя различные оттенки модальности «возможность» (об этом мы уже говорили) и внимательно читая Аристотеля с установкой понять, а не находить скороспелые опровержения (об этом мы также уже говорили), Микеладзе приходит к трактовке одной из аристотелевских возможностей как возможности потенциальной, а саму эту потенциальную возможность истолковывает как особую форму бытия. Повторяю, это делается в точном соответствии с текстами Аристотеля (и если бы это было не так, диссертант не достигал бы своей цели), но понять эти тексты и дать им правильное толкование — непросто, и потому само это толкование может рассматриваться как открытие (ведь и полезные ископаемые уже содержатся в земной коре, однако их обнаружение справедливо рассматривается как открытие).

Основой для такого правильного толкования служит, в свою очередь, фундаментальное наблюдение, которое делает Микеладзе, занимаясь текстами Аристотеля. Именно, диссертант сумел увидеть у Аристотеля важный философский метод, которому дал специальное название — метод аспектов. Микеладзе пишет (ОЛА, с. 40): «Назовём *Методом аспектов* приём Аристотеля рассматривать одно и то же событие и в аспекте бытия в возможности и в аспекте бытия в действительности».

Бытие в возможности касается событий хотя и будущих, но отнесённых к настоящему моменту времени. Поясняя свою мысль, Микеладзе пишет (ИККОА, с. 7): «будем рассматривать сегодняшнее обстояние вещей как бытие завтрашнего обстояния вещей в возможности». Тем самым диссертант находит способ разрешить кажущееся противоречие (или, по крайней мере, кажущуюся неясность) у Аристотеля, который писал в гл. 13 трактата «Об истолковании»: «некоторые вещи... могут в одно и то же время принимать противолежащие друг другу [свойства]». Речь здесь, как убедительно доказывается в диссертации, идёт о свойствах потенциальных: разумеется, не может быть, чтобы в настоящем у одной и той же вещи обнаруживались противолежащие свойства, реализующиеся в том же настоящем; но возможно присутствие в настоящем противолежащих свойств, проявляющихся в будущем.

Изложенная тема потребовала глубокого философского анализа проблемы соотношения настоящего и будущего, проблемы движения во времени, проблемы возникновения и развития. Именно такому глубокому анализу посвящена статья диссертанта «Проблема возникновения и Аристотелев метод аспектов», опубликованная в 1981 году в «Вопросах философии» и входящая в корпус диссертации. Автор не боится полемики: заключительный раздел статьи так и называется — «Полемический эпилог». (Вспомним, что уже говорилось нами ранее о неравнодушном стиле диссертации.)

Пятое достоинство диссертации заключается в том, что найденные автором у Аристотеля оттенки модальных понятий закрепляются в формулах математической логики. Роль формул математической логики, конечно, не следует переоценивать: вряд ли какое-либо количество формул может полностью выразить, скажем, всё содержание отрицания или же союзов «и» и «или». Однако нет сомнения, что соотношения математической логики закрепляют в нашем сознании существенные черты этих логических операций. Точно так же выписываемые во вступительной статье ОЛА и в примечаниях к тому 2 «Сочинений» Аристотеля соотношения, в которых участвуют различные модальные операторы, отражающие различные Аристотелевы модальности, помогают постичь эти модальности. Здесь есть ещё один важный момент, ждущий ещё своего объяснения. Дело в том, что всякое толкование принадлежит (а почему — это и требует объяснения) ассерторической логике. Именно с помощью ассерторической (а не модальной!) логики мы истолковываем модальности, преобразуя модальное в том или ином смысле (скажем, необходимое или возможное) высказывание P в ассерторическое высказывание

вида «*P* необходимо» или «*P* возможно». Выписываемые Микеладзе соотношения также сами по себе принадлежат ассерторической логике (они попросту истинны) и дают тот самый перевод модальности в утвердительность, о котором только что говорилось.

Вначале мне показалось, что в одном месте — а именно, во 2-м примечании к 13-й главе трактата «Об истолковании» — какая-то путаница или, по меньшей мере, опечатка. В самом деле, там рядом стоят формулы, казалось бы, противоречащие друг другу. Но потом я понял что в различных формулах этого списка ромбом обозначаются различные возможности, а квадратом — различные необходимости. И как раз здесь правильно обозначать эти различные модальности одинаковыми символами, поскольку это наглядно подчёркивает, какими различными смыслами возможности и необходимости пользовался Аристотель. Автор, конечно, прекрасно понимает различие этих смыслов и в другом месте вводит специальную символику — например, M для безусловной (простой, унилатеральной) возможности и E — для возможности потенциальной (см. ОЛА, с. 16—17).

Итак, запись в формулах, хотя и не исчерпывает мысль, делает эту мысль более ясной. Это является достоинством. Но поэтому легче и сделать возражения — и это, как ни парадоксально, тоже достоинство. Ведь только на отчётливые положения и можно возражать, а мы хорошо знаем (увы!), что бывают тексты столь запутанные и непонятные, что и возразить-то не можешь, поскольку невозможно ни за что ухватиться.

Возражений у меня два. Первое касается записи $\Diamond \Leftrightarrow \neg\Box$ в упомянутом только что примечании к 13-й главе, записи, отражающей формулировку 2.8.1 из ОЛА (смысл входящих в формулировку терминов разъясняется в сноске 42 на с. 14 ОЛА). Ведь эквивалентность $\Diamond \Leftrightarrow \neg\Box$ означает, что для любого p будет $\Diamond p \Leftrightarrow \neg\Box p$. Но подставим вместо p что-нибудь заведомо невозможное, абсурдное во всех смыслах, например, $(2 \cdot 2 = 5)$. Тогда и $\Diamond p$ будет ложным, и $\Box p$ будет ложным, и выписанная равносильность не имеет места. Здесь, таким образом, оппонент подвергает сомнению и самоё формулировку 2.8.1. Возможно, впрочем, что оппонент необоснованно объявил запись $\Diamond \Leftrightarrow \neg\Box$ отражающей словесную формулировку 2.8.1. Первое возражение в таком случае снимается.

Второе возражение никак не затрагивает содержательных формулировок, а только форму символической записи. В ОЛА, на с. 17, приводится запись $Ep \Leftrightarrow M(p$ и $\neg p)$. Аналогичная запись $M(p$ и $\neg p)$ встречается и в ИККОА на с. 8. Я понимаю, что хочет сказать

здесь автор. Он хочет выразить мысль Аристотеля, что в потенции, т. е. в аспекте бытия в возможности, в один и тот же момент возможно p и $\neg p$ (в отличие, скажем, от акцидентальной возможности, где имеет место лишь (Mp и $M\neg p$)). Однако способ записи этой правильной мысли мне представляется неправильным. Прежде всего, такой способ записи приводит к противоречию: $M(p$ и $\neg p) = M(2 \cdot 2 = 5) =$ ложь. А дело в том, что поскольку здесь само p понимается не в аспекте бытия в действительности, а в аспекте бытия в возможности, то способ записи должен был бы состоять не в простом вынесении за скобки оператора M, а в ином (иным цветом, что ли) способе записи самого p. При самом высказывании p (а быть может, и при «и» и «$\neg$») следовало бы указать возможностный (а не действительностный) аспект его рассмотрения: т. е. было бы что-то вроде (Wp и $W\neg p$), где W — аспект бытия в возможности. Это указание, во-первых, адекватно выражало бы соответствующую мысль, а во-вторых, не вело бы к тождественно ложному утверждению.

Шестое достоинство диссертации состоит в содержательном и вместе с тем оригинальном исследовании Аристотелевой «Топики». Этому посвящён § 8 Диссертации, п. 5 из ИККОА и др. Нередко работы, посвящённые «Топике», сводятся к довольно унылому её пересказу. Микеладзе же сумел, причём убедительно сумел, выделить в «Топике» новое и главное. Из этого нового и главного я хочу отметить здесь три глубокие идеи, увиденные диссертантом (с такой ясностью едва ли не впервые) в «Топике».

Первая идея состоит в том, что, в отличие от диалогов Платона, предметом «Топики» является сама диалогическая форма обнаружения истины. «Сама диалектика Платона есть её предмет». (Мы уже отмечали в самом начале нашего отзыва принципиальную важность того переломного момента в науке, когда предметом исследования становится метод или язык.)

Вторая идея состоит в выделении в каждом диалоге пяти его компонентов. Разумеется, Микеладзе приписывает эту пятичленную структуру диалога Аристотелю (возможно, что и Аристотель с этим бы согласился), но любой читатель «Топики» (а также читатель литературы о «Топике») признáет, что обнаружение у Аристотеля этих пяти компонентов представляет собою подлинное открытие, сделанное диссертантом. Эти пять компонентов суть: 1) главная проблема; 2) некоторые специальные четыре вида логических средств, названных в диссертации «органонами»; 3) набор правил вывода; 4) стратегия спрашивающего; 5) стратегия отвечающего. Такая проведённая в диссертации формализация диалогового общения представляет фун-

даментальное значение, особенно в свете возросшего сейчас интереса к человеко-машинному диалогу. С уверенностью могу сказать, что с изложенной в диссертации формализацией понятия диалога с пользой для себя ознакомятся исследователи прикладных диалоговых систем, занимающих видное место в современной информатике и кибернетике. Позволю себе всё же одно критическое замечание, касающееся, впрочем, не сути дела, а стиля изложения. Мне казалось бы правильным при изложении пяти компонентов диалога наличие более детализированных ссылок на конкретные места «Топики». Так, например, второй компонент диалоговой системы (четыре органона) указывается Аристотелем в главах 14—18 первой книги «Топики», это сообщает Микеладзе в своих примечаниях к «Топике»; но где, по какому адресу искать остальные четыре компонента?

Третья важная идея, найденная диссертантом в «Топике», заключается в том, что от диалога можно перейти к диалоговой схеме. Этот переход осуществляется подобно тому, как от аксиомы, заменяя в ней конкретные имена и высказывания неопределёнными именами и высказываниями, можно перейти к аксиомной схеме. При переходе от диалога к диалоговой схеме проблема заменяется на проблемную схему, конкретное правило вывода — на схему правил и т. д. (Диссертант говорит не о диалоговых схемах, а о схемах диалогических подсистем, но в рамках нашего отзыва эта разница не очень существенна.) Таким образом, возникает формализация не для отдельных диалогов, но для целых классов однотипных диалогов и, более того, формализация для самого понятия «однотипные диалоги». Иначе говоря, уточняется, что значит, что два диалога проходят по одной и той же схеме. Это важно не только в прикладнологическом отношении (для теории диалоговых систем, о чём уже говорилось выше), но и в историко-логическом отношении. Именно, автор показывает, что класс однотипных (т. е. проходящих по одной и той же схеме) диалогов — это и есть тот самый, всегда несколько загадочный аристотелев «топ», или «топос», давший имя «Топике».

Перехожу к последнему, **седьмому достоинству** диссертации — последнему не потому, что в ней больше нет достоинств, а потому, что оппонентский отзыв должен быть всё-таки ограничен в размерах. Это седьмое достоинство, быть может, самое главное, во всяком случае, именно оно произвело на меня наибольшее впечатление. Дело в том, что в мировой науке есть мало сочинений столь же знаменитых, как «Органон»; это сочинение читалось и перечитывалось, оно имеет огромную литературу.

> Однако наличие в «Органоне» формулировок следующих трёх важных принципов осталось до сих пор незамеченным. Один из них касается понятия существенного расширения данной дедуктивной науки, точнее — понятия надстраивания одной дедуктивной науки над другой, например, геометрии над арифметикой. Второй принцип касается понятия независимости одной дедуктивной науки от другой и, наконец, третий — проблем полноты и разрешения дедуктивных наук и одного специального случая соотношения между этими проблемами. При этом Стагирит неявно предполагает, что дедуктивные науки непротиворечивы, конечно аксиоматизируемы и представляют собой системы предложений, т. е. системы замкнутых (не открытых) высказываний.

Это была цитата из начала § 7 диссертации. Содержащиеся в этой цитате мысли о трёх принципах убедительно и лаконично подтверждаются, соответственно, пунктами 7.1, 7.2 и 7.3 из того же § 7. Таким образом, хотя в «Органоне», бесспорно, присутствуют сформулированные три важных принципа, до исследований Микеладзе это не было замечено. Третий принцип особенно поразителен. Нельзя без волнения читать — а читаем мы это у Микеладзе впервые, — что Аристотель в IV веке до н. э. осознавал проблемы полноты и разрешения и связь между ними. Я позволю себе привести цитату из вводной статьи Микеладзе ОЛА ко второму тому сочинений Аристотеля. Цитирую со с. 49:

> Особого внимания заслуживает одно место из «Первой аналитики», которое как-то ускользнуло от пытливых взглядов историков логики: «Если в исследовании не упущено ничего из того, что действительно присуще предметам, мы будем в состоянии для всего, доказательство чего [вообще] имеется, таковое найти и дать; в тех же случаях, где доказательство по самой природе вещей невозможно, — показать эту [невозможность]». Это положение, относящееся к методологии дедуктивных наук, бесспорно свидетельствует о том, что Стагирит впервые увидел и сформулировал (и притом безупречно) две главнейшие методологические проблемы — проблему полноты и проблему разрешения для произвольной системы знания и вместе с тем установил, что из полноты очевидно непротиворечивой и аксиоматизируемой системы следует её разрешимость.

Конечно, в таком большом труде должны быть и недостатки (я думаю, что их присутствие в обширной и трудной работе ско-

рее необходимо, чем возможно). Есть они и в данной диссертации. О некоторых из них я говорил по ходу дела. О другом скажу сейчас. Главный недочёт — это (если взять все работы по диссертации в целом) неоднородность стиля: отдельные места очень ясные, в то время как другие читаются с большим трудом. Эти другие места трудны для понимания, причём трудности не всегда вызваны сутью дела: их, этих трудностей, можно было бы избежать, если бы автор, во-первых, приводил бы побольше конкретных примеров к своим положениям, а во-вторых, тщательно следил, чтобы всё было надлежащим образом определено. А то некоторые моменты остаются без должного определения или уточнения. Что значит, например, словосочетание «строго пересекается» в формулировке на с. 12 диссертации? Об этом можно только догадываться без уверенности в правильности догадки. Только догадываться можно и о том, с какими именно вершинами традиционного логического квадрата соотнесены члены четвёрки (А, Б, В, Г) или (Д, Е, Б, З), когда квадрат обозначается такой четвёркой на с. 8 диссертации. А ведь если предположить, что читатель не додумался бы до совершенно необходимого здесь уточнения, то весь текст § 3 (содержащий интересный этюд об иерархии логических квадратов) делался бы непонятным.

Однако недочёты не должны и не могут заслонить главного качества диссертации. Она будит мысль — как и должно происходить в случае «рассуждения на тему любви к мудрости», что является русским переводом термина «диссертация по философии». Некоторые существенные вещи об Аристотеле мы узнаём из этой диссертации впервые. Другие существенные вещи впервые получают надлежащее освещение.

Если же говорить не о диссертации, а о диссертанте (а докторская степень, по моему убеждению, присуждается — в отличие от кандидатской — не столько тексту, сколько лицу), то перед нами крупный учёный в области философской логики (имеющий, кстати, и другие работы, не вошедшие в состав диссертации, — например о неожиданных связях между логикой Канта и логикой Брауэра).

Сказанное позволяет с уверенностью квалифицировать диссертацию «Логическое учение Аристотеля с точки зрения формальной логики» как отвечающую требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по философии, а её автора Зураба Николаевича Микеладзе как достойного учёной степени доктора философских наук.

17 января 1985 года.

Нестандартный анализ

Что такое бесконечно малая величина? — Как построить гипердействительное число? — Несколько слов об эквивалентности. — Что такое число? — Что такое гипердействительное число? — История и перспективы нестандартного анализа.

Математическим анализом (в кругу математиков — просто анализом) называют в совокупности те разделы математики, существо которых составляют методы дифференциального и интегрального исчислений. Издавна он служит традиционной, привычной — можно сказать, стандартной — основой для образования специалистов по точным, естественным и техническим наукам.

Но вот в математических публикациях с недавних пор стал мелькать термин «нестандартный анализ». Объединяемые им концепции позволили сократить доказательства многих теорем, оказались удобными для построения математических моделей физических явлений. В этой статье говорится главным образом о лежащем в основе нестандартного анализа понятии гипердействительного числа.

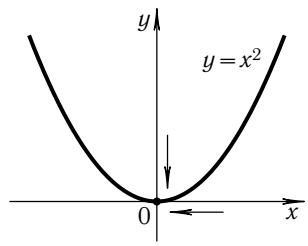
Что такое бесконечно малая величина?

Долгое время после своего возникновения математический анализ именовался анализом бесконечно малых. Понятие бесконечно малой величины и сейчас играет в нём важную роль. Как известно из школьного курса, всякая такая величина определяется как переменная, стремящаяся к нулю. Например, если единицу делить на последовательные натуральные числа $n = 1, 2, 3$ и т. д., то возникнет бесконечно малая последовательность:

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ \ldots.$$

Опубликовано в журнале: Наука и жизнь. — 1984. — № 1. — С. 45—50.

Бесконечно малой является и, скажем, функция $y = x^2$, когда её аргумент x стремится к нулю.



Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые величины рассматриваются в нём не как переменные, а как постоянные. Такой подход хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с историей зарождения математического анализа.

Что касается интуиции, то достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолкнуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объёмы и т. п. Все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Физику вряд ли станет понятнее от нравоучительного рассуждения математика, что, дескать, никаких бесконечно малых масс в бесконечно малых объёмах на самом деле нет, а есть только последовательность неограниченно уменьшающихся объёмов, содержащих неограниченно уменьшающиеся массы.

Что же касается истории математического анализа, то в наиболее явной форме излагаемый подход проявился у одного из основоположников этой науки — Готфрида Вильгельма Лейбница. Скоро — в мае 1984 года — исполнится 300 лет с того дня, как символы dx и dy впервые появились на страницах математических публикаций, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Именно Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления.

Какое же число следует называть бесконечно малым? Во-первых, конечно, нуль. Но это не интересно — интересно найти бесконечно малое число, не равное нулю (например, положительное). Какие положительные числа следует называть бесконечно малыми?

Первый — самый наивный — ответ таков: положительное число называется бесконечно малым, если оно меньше всех других положительных чисел.

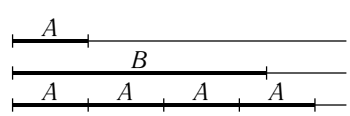
К сожалению, действительного числа ε с указанными свойствами нет и быть не может: $\varepsilon/2$ будет положительным числом, меньшим ε. Так что если мы не хотим отказываться от привычных нам свойств действительных чисел (например, от возможности разделить любое число на 2 или от возможности умножить любое неравенство на положительное число), но хотим иметь бесконечно малые числа, то приведённое определение бесконечной малости не годится.

Более изощрённое определение бесконечной малости числа $\varepsilon > 0$, которое мы и будем использовать в дальнейшем, таково. Будем складывать число ε с самим собой, получая числа

$$\varepsilon+\varepsilon,\quad \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon,\quad \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon,\quad \ldots.$$

Если все полученные суммы окажутся меньше 1, то число ε и будет называться бесконечно малым. Другими словами, если ε бесконечно мало, то сколько раз ни откладывай отрезок длины ε вдоль отрезка длины 1, до конца не дойдёшь.

Знаток математики, разумеется, тотчас скажет на это: существование подобных бесконечно малых величин противоречит аксиоме Архимеда! Эта аксиома утверждает: если взять любые два отрезка, то меньший из них (скажем, A) можно отложить столько раз, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший (отрезок B). На нашем рисунке для этого потребовалось отложить отрезок A всего четыре раза.



Если считать, что длины отрезков выражены числами, мы приходим к такой формулировке архимедовой аксиомы: для любых двух чисел a и b, для которых $0 < a < b$, одно из неравенств $a+a>b$, $a+a+a>b$, ... обязательно выполнено. В дальнейшем, говоря об аксиоме Архимеда, мы будем иметь в виду именно эту формулировку. Из неё видно, что в множестве действительных чисел (где эта аксиома выполняется) нет бесконечно малых, не равных нулю.

Вывод из всего сказанного таков: если мы хотим ввести в математику бесконечно малые, рассматриваемые как некоторые постоянные величины, мы должны расширить множество действительных чисел $\mathbb{R}$ до некоторого большего множества $^*\mathbb{R}$. Элементы этого расширенного множества мы будем называть *гипердействительными* числами. В нём аксиома Архимеда не выполняется, и существуют бесконечно малые числа — такие, что сколько их ни складывай с собой, сумма всё время будет оставаться меньше единицы.

Подобно тому, как обычный (или стандартный, или архимедов) математический анализ занимается изучением множества действительных чисел $\mathbb{R}$, *нестандартный* (или *неархимедов*) анализ изучает множество гипердействительных чисел $^*\mathbb{R}$.

Как построить гипердействительное число?

Прежде чем браться за задачу, поставленную заголовком этой главы, выясним, каким требованиям подчинены гипердействительные числа в нестандартном анализе.

Эти требования просты и естественны. Множество гипердействительных чисел содержит в себе все обыкновенные действительные числа. Над гипердействительными числами выполнимы арифметические операции: гипердействительные числа можно складывать, перемножать, вычитать и делить. При этом соблюдаются привычные законы арифметики (например, $a+b$ равно $b+a$ для любых гипердействительных чисел a и b). Кроме того, гипердействительные числа сравнимы по величине: если даны два любых различных гипердействительных числа, то одно из них больше другого.

Будем называть действительные числа *стандартными*, а остальные гипердействительные числа *нестандартными*.

Наряду с бесконечно малыми среди гипердействительных чисел существуют и бесконечно большие. Положительные бесконечно большие числа определяются так: сколько ни складывай единицу с собою, ни одна из возникающих сумм не превзойдёт положительного бесконечно большого числа. А если вычесть положительное бесконечно большое число из нуля, то получится также бесконечно большое число, но только отрицательное.

Легко доказать, что если ε бесконечно мало, но отлично от нуля, то число $A = 1/\varepsilon$ бесконечно велико. (Оговорка «отлично от нуля» важна: в нестандартном анализе, как и в стандартном, на нуль делить нельзя!) Верно и обратное: если число A бесконечно

велико, то число $\varepsilon = 1/A$ бесконечно мало. (Любитель математических доказательств без труда выведет отсюда, что все бесконечно большие числа нестандартны.)

Гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, называются *конечными*. Оказывается, каждое конечное гипердействительное число a можно представить в виде $b+\varepsilon$, где b — стандартное число, а ε — бесконечно малое. При этом число b называется *стандартной частью* конечного гипердействительного числа a. Таким образом, множество конечных гипердействительных чисел разбивается на классы. В каждый класс входит какое-то стандартное число b и все бесконечно близкие к нему. (Числа x и y *бесконечно близки*, если $y-x$ бесконечно мало.) Эти классы называются (из уважения к Лейбницу) *монадами*: монадой стандартного числа b называется множество всех бесконечно близких к нему гипердействительных чисел.

Обсудив структуру нестандартного «микромира», скажем несколько слов и о строении нестандартного «макромира» (мира бесконечно больших гипердействительных чисел). Их можно разбить на классы (*галактики*), каждый из которых устроен подобно множеству всех конечных гипердействительных чисел («нашей галактике»). Именно, два гипердействительных числа a и b попадают в одну галактику, если их разность $b-a$ является конечным гипердействительным числом. Каждая галактика, как мы видели, разбивается на монады: два числа a и b относятся к одной монаде, если $b-a$ бесконечно мало.

Среди галактик нет ни самой большой, ни самой малой; между любыми двумя галактиками есть бесконечно много других галактик.

Попытаемся теперь построить систему гипердействительных чисел, удовлетворяющую высказанным выше требованиям. Постараемся сделать это как можно более просто, добавив к действительным числам только то, чего нельзя не добавить.

Прежде всего нужно добавить к ним какое-нибудь бесконечно малое число ε. Будем считать (это потребуется нам в дальнейшем), что число ε положительно. Добавив ε, нам придётся добавить и 2ε, 3ε, $\varepsilon/2$, и вообще все числа вида $a\varepsilon$, где a — любое стандартное число: ведь мы хотим, чтобы в системе гипердействительных чисел было определено умножение! Но этого мало: нужно добавить и степени числа ε и суммы таких степеней. В возникающей системе чисел, таким образом, оказываются все многочлены от ε с действительными коэффициентами (стандартными) и все частные таких многочленов...

Программа, как видим, намечается довольно последовательная. А начинается всё с построения хотя бы одного-единственного бесконечно малого числа. Вот этим мы сейчас и займёмся.

Но прежде разберёмся: а что же такое обычные числа? Например, натуральные — 0, 1, 2, 3 и т. д.?

Несколько слов об эквивалентности

В попытках объяснить, что такое число, нам не обойтись без столь важного математического понятия, как *эквивалентность*. Если искать для него русский синоним, то наиболее подходящим окажется, пожалуй, слово «взаимозаменяемость».

Даже не вдаваясь в математические тонкости, оставаясь в кругу повседневных представлений, нетрудно указать несколько свойств отношения взаимозаменяемости, связывающего какие-либо предметы. Во-первых, каждый из них взаимозаменяем с самим собой (математики называют это свойство рефлексивностью). Во-вторых, если один предмет замени́м другим, то и второй замени́м первым (симметричность). В-третьих, если один предмет заменим вторым, а второй третьим, то первый замени́м и третьим (транзитивность).

Итак, три свойства. И если некоторое отношение, существующее в каком-то множестве предметов, обладает всеми тремя, то математики называют это отношение *эквивалентностью*.

Возьмём для примера отношение «быть однофамильцем», существующее среди людей. И один из создателей романа «Двенадцать стульев», и первооткрыватель электрической дуги, и композитор балета «Сотворение мира», и автор первого русского учебника шахматной игры — однофамильцы (все они Петровы). Каждый из них однофамилец по отношению к себе. Далее: если Евгений Петрович однофамилец Василия Владимировича, то и Василий Владимирович однофамилец Евгения Петровича. Наконец, если Евгений Петрович однофамилец Василия Владимировича, а тот однофамилец Андрея Павловича, то Евгений Петрович и Андрей Павлович — тоже однофамильцы. Как видим, отношение «быть однофамильцем» обладает всеми тремя признаками эквивалентности.

Всеми тремя обладает и отношение «начинаться на одну букву», существующее во множестве слов. А вот отношение «иметь хотя бы одну общую букву», определённое на том же словесном множестве, эквивалентностью уже не назовёшь. У него нет свойства транзитивности. В самом деле, слово *кит* имеет общую букву со

словом *кот*, слово *кот* — со словом *рог*, однако у слов *кит* и *рог* ни одной общей буквы нет. И вот что существенно: всякое отношение эквивалентности, введённое на некотором множестве, разбивает это множество на непересекающиеся подмножества — так называемые *классы эквивалентности*. Отношение «быть однофамильцем» разбивает множество всех людей на подмножества однофамильцев. Отношение «начинаться на одну букву» разбивает весь словарь на главы по буквам.

Что такое число?

Овладев необходимыми сведениями о классах эквивалентности, перейдём к вопросу о том, что такое число. Но сначала взглянем на Казанский вокзал Москвы. На его фасаде установлены не совсем обычные часы: на их циферблате проставлены знаки зодиака. Каждому часу соответствует свой знак и каждому знаку — час: первый час обозначен символом Водолея, второй — Рыб, третий — Овна, четвёртый — Тельца и т. д.

Несведущий может, конечно, перепутать Овна и Тельца, но с точки зрения математики это не так уж важно. А важно то, что элементы обоих множеств — часов дня и знаков зодиака — могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие.

Взаимно однозначное соответствие связывает знаки зодиака и с месяцами года. Недаром говорят: родился под знаком Стрельца или, скажем, Девы.

Какое же ещё множество можно связать взаимно однозначным соответствием с тем или иным из уже названных? Понятно, что не всякое. Не подойдёт тут, например, множество ног осьминога: на все месяцы или на все знаки зодиака у него явно не хватит ног. А вот со множеством белых пешек множество ног осьминога во взаимно однозначное соответствие поставить уже можно. Множество чёрных пешек здесь тоже годится. И множество колонн Большого театра тоже.

Нетрудно проверить, что взаимно однозначное соответствие обладает всеми тремя свойствами эквивалентности. А это значит, что вся совокупность конечных множеств разбивается этим отношением на классы эквивалентности. В одном из таких классов окажутся множества знаков зодиака, часов дня, месяцев года. В другом — множества ног осьминога, белых пешек, чёрных пешек, колонн Большого театра. Ещё в одном — множества дней недели, нот гаммы, цветов радуги,

чудес света, гномов из сказки о Белоснежке. Ещё в одном — множества олимпийских колец, пальцев одной руки...

Что же объединяет множества, попавшие в тот или иной из этих классов? То, что в каждом из множеств, если они входят в один класс, содержится одинаковое число элементов.

Но стоп! Можем ли мы употреблять понятие числа, не дав ему строгого определения? Тут мнения математиков расходятся. Одни считают, что это вполне допустимо. Другие полагают, что понятие числа нуждается в определении. Не вступая в дискуссию по этому поводу, заметим, что всё сказанное до сих пор вплотную подвело нас к такому определению.

Натуральные числа (0, 1, 2, 3, . . .) представляют собою классы эквивалентности, на которые вся совокупность конечных множеств разбивается отношением взаимно однозначного соответствия.

Так, число 12 представляет собой класс эквивалентности, куда попало множество знаков зодиака. Число 8 — класс, куда входит множество ног осьминога. Число 7 — класс, где оказалось множество дней недели. Число 5 — класс, в котором содержится множество олимпийских колец и т. д.

Но это натуральные числа (т. е. целые положительные и нуль). А отрицательные? Как определяются они?

Вспомните свои далёкие школьные годы, когда вам впервые пришлось вычитать из меньшего натурального числа большее и когда Вы бились над вопросами: сколько будет $3-5$? А $11-13$? А $4-9$? А $12-17$?

Легко заметить, что первые две пары чисел, соединённые знаком минус, определяют собою одно число (минус два), а остальные две — другое (минус пять). И теперь уже нетрудно определить отрицательные числа через эквивалентные пары натуральных чисел.

Подобным образом можно определить рациональные числа, т. е. дроби a/b. Каждую можно рассматривать как пару «числитель—знаменатель», причём в роли числителя a могут выступать все целые числа, а в роли знаменателя b — лишь целые положительные. Перебирая всевозможные дроби, мы тотчас заметим, как устанавливается между ними отношение эквивалентности. Например, 1/2, 3/6, 5/10 эквивалентны. Выражается этот факт известным правилом пропорции: эквивалентны друг другу любые две дроби a/b и c/d, если $ad = bc$. Каждый из классов эквивалентности, на которые при этом разбивается множество дробей, объявляется рациональным числом, а любая дробь из того или иного класса — представителем этого рационального числа. Чаще всего в роли представителей выступают

несократимые дроби (скажем, из трёх вышеперечисленных дробей — первая). Но когда дроби приходится приводить к общему знаменателю, в ход идут и сократимые.

Заметим: среди всех дробей находятся и целые числа — это дроби со знаменателем единица.

Перейдём теперь к определению действительных чисел (т. е. рациональных и иррациональных, взятых вместе). Начнём с напоминания: каждое иррациональное число можно сколь угодно точно приблизить той или иной последовательностью чисел рациональных. Вот, к примеру, несколько последовательностей, приближающих число π; первые две — это десятичные приближения π с недостатком и избытком, третья основана на принадлежащем Лейбницу разложении в ряд числа $\pi/4$:

$$3 \to 3{,}1 \to 3{,}14 \to 3{,}141 \to 3{,}1415 \to \ldots,$$
$$4 \to 3{,}2 \to 3{,}15 \to 3{,}142 \to 3{,}1416 \to \ldots,$$
$$4 \to 4 - \frac{4}{3} \to 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} \to 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} \to \ldots.$$

Будем перебирать всевозможные сходящиеся последовательности и станем называть их эквивалентными, если они сходятся к одному пределу. Так множество всех сходящихся последовательностей рациональных чисел окажется разбитым на классы эквивалентности. Каждый из получившихся при этом классов объявим действительным числом, а любую последовательность из того или иного класса — представителем соответствующего действительного числа.

Заметим: среди всех действительных чисел, определённых таким способом, оказываются и рациональные. Каждое из них можно представить последовательностью с одинаковыми членами (например, рациональное число 1/3 представляется последовательностью 1/3, 1/3, 1/3, ...).

Что такое гипердействительное число?

Всё сказанное до сих пор было разбегом для того, чтобы одолеть главное — выработать определение гипердействительного числа. Мы, так сказать, набирали инерцию мышления (как видно, инерция мышления — не всегда плохо).

И вот сейчас, мысля по инерции, станем рассматривать всевозможные последовательности действительных чисел. И определим гипердействительные числа как классы эквивалентных последовательностей действительных чисел.

Какие же последовательности мы будем считать эквивалентными с точки зрения вырабатываемого определения? Те, у которых совпадают *почти все* члены. Или скажем так: у которых не совпадает *достаточно мало членов*.

Выделенные слова, такие простые на первый взгляд, выражают весьма непростые понятия. В тонкости, связанные с построением системы гипердействительных чисел, читатель сможет вникнуть, прочитав, например, брошюру: *В. А. Успенский*. Нестандартный, или неархимедов, анализ. — М.: Знание, 1983.

Здесь же, ради самого первого и неподробного знакомства с обсуждаемыми понятиями, достаточно полагать, что две последовательности, служащие определению некоторого гипердействительного числа, заведомо эквивалентны, если у них не совпадает лишь конечное число членов. Например, эквивалентны последовательности:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots; \tag{I}$$

$$0, \quad 0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots. \tag{II}$$

Таким образом, (I) и (II) служат представителями *одного и того же* гипердействительного числа a. (Подчеркнём, что условие «иметь различными лишь конечное число членов» достаточно, но не необходимо для эквивалентности двух последовательностей.)

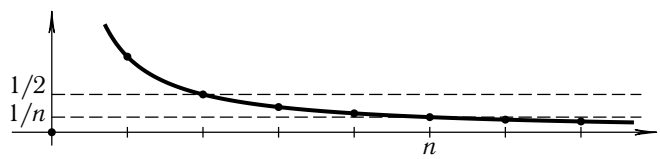
Стандартные числа при таком подходе мы определим через последовательности, у которых все члены одинаковы. Например, единицу представим последовательностью:

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad \ldots. \tag{III}$$

Сравнивая два каких-то гипердействительных числа по величине, возьмём представляющие их последовательности скажем, что первая последовательность больше второй, если почти все члены первой больше соответствующих членов второй, и лишь достаточно мало (скажем, конечное число) членов первой меньше соответствующих членов второй или равны им; тó же скажем про соответствующие числа. Например, из приведённых здесь гипердействительных чисел третье больше первого, $1 > a$. Действительно, у последовательности, выражающей число 1, все члены, начиная со второго, больше соответствующих членов последовательности, выражающей число a. Но это ещё не всё! Возьмём, например, стандартное число 1/2 и выражающую его последовательность:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots.$$

Все её члены, начиная с третьего, больше соответствующих членов последовательности, представляющей число a. И так оно будет, какое бы стандартное число мы ни взяли (см. график). Правда, нужное нам неравенство будет справедливо для всё более далёких членов. Но нарушаться оно будет всегда лишь ***конечным*** числом начальных членов!



Итак, что же у нас получилось? Число a оказывается меньшим любого стандартного числа. Стало быть, мы создали столь необходимый нам образец бесконечно малого числа!

Теперь дело пойдёт легче. Как, например, определить сумму двух действительных чисел? Возьмём выражающие их последовательности и сложим их почленно — результат и назовём искомой суммой. Аналогично определим произведение двух гипердействительных чисел — почленно перемножая представляющие их последовательности. Если требуется вычислить функцию от гипердействительного числа, то вычислим её от членов соответствующей последовательности и возникшую при этом последовательность назовём искомой функцией.

При первом знакомстве с системой гипердействительных чисел мы отмечали, что она разбивается на монады, в каждую из которых входит какое-то стандартное число и все бесконечно близкие к нему. Попробуем представить себе монаду какого-либо числа — например, числа 5. Для этого призовём на помощь уже построенное нами бесконечно малое число a. Ясно, что числа 5 и $5+a$ принадлежат к одной монаде: ведь их разность, равная a, бесконечно мала. (Напомним: два числа входят в одну монаду, если их разность бесконечно мала.) Число $5-a$ по той же причине принадлежит к той же монаде, попадают в неё также числа $5+2a$, $5+a^2$ и т. д.

А как представить себе какую-нибудь галактику? Возьмём произвольное гипердействительное число d — конечное или бесконечное, всё равно. Число $d+1$ находится в той же галактике, что и d: ведь их разность, единица, есть конечное действительное число. (Напомним: два числа входят в одну галактику, если их разность — конечное действительное число.) В той же галактике — числа $d-1$, $d+5$, $d+25$ и т. д. Возьмём теперь произвольное бесконечно большое гипердействительное число D. Образуем затем число $3D$, тоже

бесконечно большое. Они лежат в разных галактиках: их разность, равная $2D$, бесконечно велика.

Интересно после этого рассмотреть число $2D$. Оно больше D и меньше $3D$. Но разность у каждой пары названных чисел бесконечно велика. Иными словами, все они из разных галактик. И, очевидно, галактика, содержащая число $2D$, лежит между галактиками, содержащими числа D и $3D$. Этот несложный пример иллюстрирует уже упоминавшееся положение нестандартного анализа: для любых двух различных галактик можно указать «промежуточную» галактику, расположенную между ними.

История и перспективы нестандартного анализа

В 1961 году в «Трудах Нидерландской академии наук» появилась статья А. Робинсона «Нестандартный анализ». В статье были намечены как основные положения нестандартного анализа, так и некоторые его приложения (например, к аналитической механике). В этой статье, в частности, говорилось: «Наша главная цель — показать, что эти модели дают естественный подход к старой почтенной проблеме построения исчисления, включающего бесконечно большие и бесконечно малые количества. Как хорошо известно, использование бесконечно малых, настойчиво защищаемое Лейбницем и без колебаний принимаемое Эйлером, было дезавуировано с появлением методов Коши, поставивших математический анализ на твёрдую основу». (Заметим в скобках, что за твёрдость основы надо было платить и сложностью аппарата, и отдалением от физической наглядности.)

В течение последующих восьми лет вышли в свет три монографии, излагавшие нестандартную теорию. В 1966 году в биографию нестандартного анализа было занесено важное событие: его методами удалось решить трудную проблему из теории гильбертовых пространств, не поддававшуюся «стандартным» подходам.

Сегодня приложения нестандартного анализа внутри математики охватывают обширную область от топологии до теории вероятностей. Что касается внематематических приложений, то среди них уже есть приложения и к математической экономике (рассматривается рынок с бесконечно большим числом участников, каждый из которых вносит бесконечно малый вклад), и к квантовой механике (рассматривается бесконечная флуктуация поля в бесконечно малой области), и к статистической механике (рассматриваются системы из бесконечного числа частиц).

В 1981 году вышла книга Р. Лутца и М. Гозе «Нестандартный анализ: практическое руководство с приложениями». В этой книге после изложения основных принципов нестандартного анализа рассматриваются вопросы теории возмущений. Грубо говоря, задача теории возмущений состоит в следующем. Имеется какой-то математический объект (многочлен, дифференциальное уравнение и т. д.). Его чуть-чуть изменяют. Как связаны свойства получившегося объекта со свойствами исходного? На языке нестандартного анализа задача ставится так. Исходный объект является стандартным. Изменение, которому он подвергается, бесконечно мало́. Что можно сказать о свойствах изменённого объекта, если нам известны свойства исходного? Мы видим, что понятия нестандартного анализа фигурируют уже в самой постановке задачи (а не только в её решении). Разумеется, можно пытаться перевести задачу на язык классического анализа и решать её классическими средствами. Однако, как пишут авторы упомянутой книги, в результате применения нестандартных методов появляются «как изящные формулировки, так и интуитивно более ясные доказательства».

Нестандартный анализ завоёвывает всё большее признание. Ему и его приложениям было посвящено уже несколько международных симпозиумов. В течение последнего десятилетия нестандартный анализ (точнее — элементарный математический анализ, основанный на нестандартном подходе) преподавался в ряде высших учебных заведений США. Некоторые итоги такого рода преподавания были подведены в методической статье, опубликованной в 1976 году в «Американском математическом ежемесячнике» («American Mathematical Monthly»). Статья заканчивается фразами: «Опасения, <...> что те студенты, которые будут изучать математический анализ при помощи инфинитезимальных ⟨бесконечно малых — *В. У.*⟩ элементов, в меньшей степени овладеют основными навыками, должны быть, без сомнения, сняты. Более того, представляется весьма вероятным, что использование инфинитезимального подхода сделает курс математического анализа гораздо более живым и увлекательным как для преподавателей, так и для студентов».

Добавление от февраля 2001 года

§ 1. Несколько примеров. — § 14. Существуют ли гипердействительные числа «на самом деле»?

Разумеется, нестандартный анализ в целом есть часть математики. Однако он имеет очевидный философский компонент, куда относится, в частности, общее представление о нестандартных числах. Изложенное выше можно рассматривать как попытку дать такое представление — попытку, рассчитанную на читателя достаточно массового журнала «Наука и жизнь». Впоследствии автор выпустил небольшую книгу (*В. А. Успенский*. Что такое нестандартный анализ?. — М.: Физматлит, 1997. — 128 с.), рассчитанную, как сказано в аннотации к ней, на «лиц, владеющих математическим анализом в объёме первого курса вуза». Поэтому названную книгу, несмотря на популярный характер изложения, уже нельзя отнести к «нематематике». Но её начало и её конец, кажется, можно. Ниже приводятся несколько самых первых строк книги и полностью её заключительный параграф; весь текст, пребывающий в книге между этими двумя её кусками, заменён многоточием в угловых скобках.

§ 1. Несколько примеров

Относятся ли грифоны и единороги к позвоночным? Как устроены их эндокринные системы? Как протекает химическая реакция между философским камнем и флогистоном? Читатель, обнаруживший в серьёзной научной монографии обсуждение подобных проблем, будет, надо думать, несколько ошарашен. А ведь отдельные страницы сочинений по нестандартному анализу могут произвести на неподготовленного читателя (впрочем, даже и подготовленного, но только в области обычной, стандартной математики) сходное впечатление.

< . . . . . >

§ 14. Существуют ли гипердействительные числа «на самом деле»?

Конечно, нестандартные гипердействительные числа (т. е. гипердействительные числа, не являющиеся действительными) — довольно-таки необычные объекты. На то они и называются нестандартны-

ми. Но что значит необычные? Необычные означает непривычные. Ведь то, к чему привыкли, уже перестаёт ощущаться как необычное. И к нестандартным числам надо просто привыкнуть.

Процесс привыкания к нестандартным числам встречает известные психологические трудности. Не всем сразу делается понятным, где отводится место для новых чисел. Для бесконечно больших чисел такое место находится с большей (хотя, скорее всего, ложной) лёгкостью — где-то в отрицательной или положительной бесконечности.

В этом смысле психологически проще освоиться с нестандартными гипернатуральными числами. Всякое такое число бесконечно велико и положительно, оно больше всякого натурального. По существу, представление о таком числе уже бытовало (хотя и не в строгом понимании) в среде математиков: словом «гу́гол» стало обозначаться в последнее время натуральное число, превосходящее всякое разумное количество. Бесконечно большие гипердействительные числа могут быть уже не только положительны, но и отрицательны: бесконечно большое отрицательное число меньше[1], а положительное — больше всех обычных, стандартных чисел. Но ведь есть ещё конечные нестандартные числа. Где помещаются они? Они помещаются между действительными, заполняя пустоты между ними. Но разве существуют такие пустоты? Это как посмотреть. Разумеется, если стоять на той точке зрения, что возможны только (стандартные) действительные числа, никаких пустот между ними не окажется, да и заполнять эти пустоты, существуй они, было бы нечем (ведь при выбранной точке зрения никаких нестандартных чисел просто нет). Переход от действительных чисел к конечным гипердействительным числам путём добавления к первым конечных нестандартных чисел происходит аналогично тому, как осуществляется переход от рациональных чисел к действительным числам путём добавления к первым чисел иррациональных. Иррациональные числа располагаются между рациональными, и ясное понимание этого тоже нередко вызывает у учащихся психологические затруднения. И в этом случае тоже можно (хотя это и очень неудобно) стать на точку зрения, что числа бывают только рациональные, и для действительных чисел тогда не будет места на нашей числовой оси. Правда, в таком случае мы должны будем отказаться от таких привычных возможностей, как, скажем,

[1] Терминология малоприятна: бесконечно *большое* отрицательное число характеризуется как число, которое *меньше* любого числа некоторой совокупности. Дело в том, что бесконечно большие числа (как положительные, так и отрицательные) выделяются тем, что их абсолютная величина *больше* всякого (стандартного) натурального числа.

возможность извлечь квадратный корень из любого положительного числа. Отказываясь от нестандартных чисел, мы также лишаем себя некоторых возможностей — но на этот раз возможностей как раз непривычных, таких, как право рассматривать бесконечно малые и бесконечно большие числа.

Конечно, аналогия между конечными нестандартными числами и иррациональными числами справедлива лишь до известных пределов: иррациональные числа заполняют так называемые щели между рациональными числами (по одному иррациональному числу на каждую щель), а чтобы получить конечную часть гипердействительной оси, надо каждое действительное число раздуть в интервал (правда, бесконечно малый). (Ведь мы видим звёзды точками, хотя на самом деле они диски. Аналогично можно считать, что то, что мы «видим» как точки на действительной оси, на самом деле представляет собой интервал с центром в действительной точке, т. е. монаду.)

Прочитав предыдущие строки этого параграфа, читатель вправе испытать законное недоумение. Что значит «можно считать так, а можно и так»? А как на самом деле? Всамделишная-то числовая ось из чего состоит — только из рациональных чисел? или только из действительных? или конечных гипердействительных? или из всех гипердействительных, как конечных, так и бесконечно больших?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо прежде всего понять, что значат слова «на самом деле». В чём же заключается это самое дело? А дело в том, что надо чётко различать математическую и физическую реальности.

В математической реальности существуют различные *числовые системы* (если угодно, можно называть их *числовыми осями*): система *натуральных* чисел $\mathbb{N}$, система *целых* чисел $\mathbb{Z}$, система *рациональных* чисел $\mathbb{Q}$, система *действительных* чисел $\mathbb{R}$, система *гипердействительных* чисел $^*\mathbb{R}$. Каждая из них представляет собой линейно упорядоченное множество с определёнными на нём операциями сложения и умножения. Каждую из этих систем можно считать расширением предыдущей (причём и порядок, и результат применения операций сохраняются для «старых» элементов) и, таким образом, писать

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}.$$

Числовая система (или числовая ось) $\mathbb{R}$ выделяется тем, что её элементы (действительные числа) взаимно однозначно, и с сохранением порядка, соответствуют точкам геометрической прямой. Казалось бы, это обстоятельство является решающим: геометрическая прямая (точнее, прямая с выделенными на ней двумя точками, названными

соответственно «нуль» и «единица») и даёт «подлинную» числовую ось.

Однако сама геометрическая прямая представляет собою объект математической (а не физической!) реальности — в данном случае объект математической структуры, описываемой соответствующими аксиомами и называемой «евклидова геометрия». Но ведь можно рассматривать и другие системы аксиом и получать другие геометрии, в которых прямые линии будут обладать другими, нежели в евклидовой геометрии, свойствами. Все мы знаем, что бывают неевклидовы геометрии. Среди них выделяются геометрия Лобачевского и геометрия Римана. В геометрии Лобачевского нарушаются (по сравнению с евклидовой геометрией) внешние свойства прямой, т. е. свойства, характеризующие поведение прямой в отношении других прямых, но внутренние свойства каждой прямой сохраняются: точки на прямой Лобачевского расположены так же, как на прямой Евклида. В геометрии Римана нарушаются не только внешние, но и внутренние свойства прямой: порядок точек на прямой Римана цикличен, он подобен порядку точек на окружности (в строгом математическом смысле его даже нельзя называть порядком). А можно придумать и такую «нестандартную» систему аксиом геометрии, в которой точки на прямой будут расположены так же, как на гипердействительной оси $^*\mathbb{R}$. Итак, мыслимы различные геометрии, и им соответствуют различные числовые системы.

Но тогда естественно спросить, которая же из геометрий, и, в частности, которое же из представлений о геометрической прямой, описывает реальное физическое пространство и, в частности, реальную физическую прямую. Здесь надо отчётливо понимать, что геометрическое описание физической реальности возможно только с известной степенью приблизительности. Так, планету Земля можно описать как шар, как эллипсоид и как геоид: и первое, и второе, и даже третье описания приблизительны, хотя точность их возрастает (но не надо думать, что чем точность выше, тем описание лучше: подлинную революцию произвело именно представление о Земле как о шаре и, скорее всего, это представление навсегда останется «самым главным»). При не слишком больших и не слишком малых (по сравнению с размером человека) пространственных размерах физическое пространство с достаточной точностью описывается обычной геометрией Евклида. При значительном увеличении или, напротив, уменьшении размеров эта точность начинает расшатываться.

О том, как устроено физическое пространство в очень большом и в очень малом, мы знаем ещё недостаточно. По-видимому, общепри-

нятой является точка зрения, что пространство в целом конечно[2]. Луч света, направленный из некоторой точки такого пространства в какую-либо сторону, вернётся в ту же точку с другой стороны (да и это верно со множеством оговорок). Не исключено, что два астрономических объекта, видимых на небе в разных местах, суть один и тот же объект, видимый с разных сторон. В одном из рассказов Уэллса[3] герой рассказа, Готфрид Платтнер, совершив путешествие в четвёртое измерение, возвращается на Землю зеркально отражённым — нельзя исключить такой результат и при путешествии в пределах окружающего нас трёхмерного физического пространства. Описанное парадоксальное явление (а именно, зеркальное отражение при перемещении) непременно присутствует в так называемых неориентируемых пространствах, а наше физическое пространство, может статься, как раз и является неориентируемым. Итак, мы мало знаем, как ведёт себя пространство в удалённых от нас районах. Мы мало (хотя, конечно, очень много по сравнению с прошлым веком) знаем и о микромире. Одна из серьёзно обсуждаемых гипотез, лежащая в основе так называемой теории квантования пространства-времени, состоит, например, в том, что временны́е и пространственные промежутки не дробимы неограниченно, а что, напротив, существует минимальный возможный для таких промежутков конечный размер. Если бы это было так, все физические величины измерялись бы только натуральными[4] числами. Противоположная точка зрения состоит в том, что существуют бесконечно малые размеры и бесконечно малые интервалы времени. Эта точка зрения приводит к тому, что физические величины представляют собою гипердействительные числа. Какая из точек зрения ближе к действительности — автору неизвестно. Тем не менее автор убеждён, что любая математическая концепция может описывать действительность не исчерпывающим образом, а лишь приблизительно, огрублённо.

Быть может, во многих случаях вообще нецелесообразно спрашивать, которая из данной совокупности математических моделей лучше

---

[2] Однако столь велико, что утверждение «Вселенная бесконечна» описывает реальность не хуже, чем утверждение «Земля — шар».

[3] А именно, в рассказе «История Платтнера» («The Plattner story»). Этот рассказ можно найти, например, в одноимённом сборнике рассказов Уэллса (*Г. Дж. Уэллс.* История Платтнера. — Л.: Красная газета, 1928) или на с. 462—478 в пятом томе вышедшего в 1930 году собрания его сочинений (*Г. Дж. Уэллс.* Собрание фантастических романов и рассказов. — М.—Л.: Земля и фабрика, 1930). С тех пор этот рассказ на русском языке не переиздавался.

[4] А может быть, гипернатуральными?

описывает физическую действительность. По-видимому, разумно принимать принцип множественности моделей и считать, что действительность описывается сразу целой совокупностью математических моделей, частично противоречащих друг другу. Так, скорее всего, разумно считать, что физическое пространство одновременно описывается несколькими моделями, одна из которых — обычная евклидова геометрия, другая предполагает минимальный пространственный размер («квант пространства»), третья — существование бесконечно малых расстояний и т. д. В этой связи полезно вспомнить, что в трудах основоположников математического анализа — Ньютона и Лейбница — прослеживаются различные модели мироздания. Говоря образно и уже по одному этому весьма огрублённо, Лейбниц видел мир как мозаику, составленную из мельчайших частиц; можно интересоваться отношением одной из частиц, dy, к другой, dx. Мир Ньютона непрерывен и непрерывно меняется с течением времени: переменные (по Ньютону *флюенты*) x, y, . . . суть функции времени, и можно интересоваться скоростями их изменения (*флюксиями* по Ньютону) $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... Таким образом, если картина мира Лейбница выполнена в технике мозаики и меняется так, как если бы мы встряхивали калейдоскоп через бесконечно малые промежутки времени dt, то картина мира Ньютона написана масляными красками, которые ещё не успели застыть и потому текут по поверхности холста.

Итак, не исключено, что представление о бесконечно малых расстояниях, массах, зарядах и т. п. хорошо соответствует физической реальности. Тогда для описания этих бесконечно малых величин требуются бесконечно малые числа. Если желать, чтобы эти числа могли подвергаться обычным арифметическим операциям, неизбежно возникают бесконечно большие числа (как результаты деления единицы на бесконечно малые), а также такие нестандартные числа, которые не являются ни бесконечно большими, ни бесконечно малыми (как результаты прибавления бесконечно малых к обычным действительным числам). Полученная система гипердействительных чисел, включающая все действительные как подсистему, претендует на то, чтобы обслуживать физический мир не хуже, чем это делает обычная числовая ось.

Что такое парадокс?

1. Тезис. — 2. Антитезис. — 3. Синтез. — Примечания.

В поисках ответа раскроем на слове «Парадокс» словари и энциклопедии: «Энциклопедический словарь» издания Брокгауза и Ефрона (ЭСБЕ), полутом 44, 1897 год; «Толковый словарь» под редакцией Ушакова (ТСУ), т. 3, 1939 год; «Большую Советскую Энциклопедию», изд. 2-е (БСЭ-2), т. 2, 1955 год и изд. 3-е (БСЭ-3), т. 19, 1975 год; «Философскую энциклопедию» (ФЭ), т. 4, 1967 год; «Логический словарь» Н. И. Кондакова (ЛСК), 1971 год; «Словарь иностранных слов» (СИС), изд. 7-е, 1979 год. Мы обнаружим различные дефиниции, отражающие, по-видимому, различные понимания. Цель данной заметки — примирить эти понимания. Изложение идёт в ритме Гегелевой триады: тезис, антитезис, синтез.

1. Тезис

«Парадокс — мнение, расходящееся с общепринятым» (ЭСБЕ). Сходные дефиниции дают ТСУ и БСЭ-3. А БСЭ-2 и СИС относят к парадоксам и сами факты, выражаемые парадоксальными суждениями. Понимание парадокса как чего-то, расходящегося с общепринятым мнением, было известно издавна. Так, в своей книге «Корзина парадоксов» выдающийся британский логик и философ математики XIX века Огастес Де Мóрган, чьим именем названы два закона логики высказываний и кто был первым президентом Лондонского математического общества, называл такое понимание *старым смыслом*: «Я употребляю слово в старом смысле: парадокс есть нечто, что расходится с общим мнением <...>»[1]. При обоих

Опубликовано в книге: Finitis duodecim lustris: Сборник статей к 60-летию проф. Ю. М. Лотмана. — Таллин: Ээсти раамат, 1982. — С. 152—162.

[1] I use the word in the old sense: a paradox is something which is apart from general opinion, either in subject matter, method, or conclusion (*Augustus De Morgan*. A Budget of Paradoxes. — L., 1872. — P. 2).

оттенках понимания парадоксальное высказывание или явление противостоит некоторому ортодоксальному мнению, которое естественно было бы называть презумпцией[2]. Таким образом, парадокс есть разрушение презумпции. Примеры:

(1.1) Парадоксы Оскара Уайльда. Их много, приведём три:

(1.1.1) «...У нас теперь с Америкой всё общее, кроме, разумеется, языка» [«...We have really everything in common with America nowadays, except, of course, language»] — цитата из новеллы «Кентервильское приведение» [«The Canterville Ghost», 1887]. Разрушаемая презумпция: в Англии и в Америке один и тот же язык.

(1.1.2) «...Жизнь отражает Искусство в гораздо большей степени, нежели Искусство отражает Жизнь» [«...Life imitates Art far more than Art imitates Life»] — цитата из диалога «Упадок лжи» [«The decay of lying: An observation», 1889]. Эта мысль повторяется в диалоге неоднократно, вот один из его фрагментов:

> Кирилл. <...> Но вы же не хотите сказать, что вы серьёзно верите, что Жизнь отражает Искусство, что на самом деле Жизнь есть зеркало, а Искусство — реальность?
>
> Вивиан. Именно это я и хочу сказать. Хотя это и может показаться парадоксом — а парадоксы всегда опасная вещь — тем не менее это верно: Жизнь отражает Искусство в гораздо большей степени, нежели Искусство отражает Жизнь. <...>
>
> [Cyril. <...> But you don't mean to say that you seriously believe that Life imitates Art, that Life in fact is the mirror, and Art the reality?
>
> Vivian. Certainly I do. Paradox though it may seem—and paradoxes are always dangerous things—it is none the less true that Life imitates Art far more than Art imitates Life. <...>]

Разрушаемая презумпция: Искусство отражает Жизнь.

(1.1.3) «...Я готов доказать всё, что угодно» [«...I am prepared to prove anything»] — слова Вивиана из того же «Упадка лжи». Разрушаемая презумпция: доказать можно только истину (или, более точно: человек готов доказывать только то, что он считает истиной, а считать истиной всё — невозможно).

(1.2) Парадокс Ю. М. Лотмана: иногда жизнь следует за литературой, подражая последней. Разрушаемая презумпция: литература всегда следует за жизнью.

---

[2] Ср. *Падучева Е. В.* Понятие презумпции в лингвистической семантике // Семиотика и информатика. — Вып. 8. — М.: ВИНИТИ, 1977. — С. 91—124.

(1.3) Парадокс близнецов: если из двух близнецов один остаётся на Земле, а другой совершает космическое путешествие, то в момент возвращения на Землю космонавт окажется моложе своего брата; если ускорения, которым подвергался космонавт, были достаточно велики и длительны, разница в возрасте будет заметна простым глазом. Разрушаемая презумпция: близнецы во всех обстоятельствах имеют одинаковый возраст.

(1.4) Парадокс обтянутого шара (из статьи «Парадоксы математические» в БСЭ-2). Обтянем шар нитью по экватору и затем удлиним нить на 1 м так, чтобы возникший между нитью и шаром просвет был одинаков вдоль всего экватора. Парадоксальный факт: этот просвет и для земного шара, и для глобуса оказывается одним и тем же, он равен примерно 16 см независимо от размеров шара. Разрушаемая презумпция: просвет ничтожно мал в случае огромного шара, и для земного шара он неизмеримо меньше, чем для глобуса.

(1.5) «Не откладывай на завтра то, что можешь сделать послезавтра». Разрушаемая презумпция здесь скорее лингвистическая, чем моральная, и заключается в том, что естественным отрицанием для «отложить на завтра» считается «сделать сегодня».

2. Антитезис

Однако, помимо указанного в п. 1 значения, к числу значений термина «парадокс» СИС относит также 'противоречие', а БСЭ-2 и ЛСК — 'рассуждение, ведущее к противоречию'. ФЭ даёт такую дефиницию парадокса: «рассуждение, доказывающее как истинность, так и ложность некоторого предложения», и объявляет антиномию и апорию синонимами парадокса. Хотя дефиниция в БСЭ-3 близка к дефиниции из ЭСБЕ, при дальнейшем изложении она противопоставляется «научному пониманию термина „парадокс", при котором парадокс отождествляется с отклонением от истины, ложью, противоречием, антиномией». Впрочем, едва ли ложь (например, утверждение «дважды два пять») уместно называть парадоксом или отождествлять с антиномией (т. е. с противоречием между двумя обладающими одинаковой убедительностью утверждениями).

Причину появления этого второго, «научного» смысла термина «парадокс» следует искать в том, что широко известные эффекты логики и теории множеств, приводящие к противоречию, именуются как антиномиями, так и парадоксами[3]. Вот три наиболее знаменитых примера:

[3] См.: *Клини С. К.* Введение в метаматематику. — М., 1957. — С. 39; *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. — М., 1966. — С. 11.

(2.1) Антиномия (парадокс) лжеца в форме Эвбулида (IV век до н. э.). «Предложение, которое я сейчас произношу, ложно». Признание взятого в кавычки предложения истинным, равно как и признание его ложным, приводит к противоречию.

(2.2) Антиномия (парадокс) Рассела (1902 год). Назовём правильным всякое множество, которое не является элементом самого себя. Будет ли правильным множество всех правильных множеств? Как утвердительный, так и отрицательный ответ на этот вопрос ведёт к противоречию.

(2.3) Антиномия (парадокс) Берри (1906 год). Выражение «наименьшее натуральное число, которое нельзя назвать посредством меньше чем тридцати трёх слогов» называет, и притом посредством тридцати двух слогов, некоторое натуральное число.

В том, что каждый из этих примеров действительно заключает в себе антиномию, нет сомнения. Но есть ли здесь парадокс (если понимать парадокс не как синоним антиномии, а в смысле п. 1)?

3. Синтез

Для того чтобы оправдать употребление термина «парадокс» в применении к примерам из п. 2, нет нужды вводить особое, «научное» (а лучше сказать — «квазинаучное», «паразитическое») понимание этого термина, противопоставляемое «общеразговорному» (выражение из БСЭ-3). Мы полагаем, что во всех случаях парадокс — будь то парадоксальное суждение (мнение) или парадоксальный факт — есть разрушение некоей презумпции и что примеры из п. 2 не составляют исключения. В примере (2.1) презумпция состоит в том, что всякое повествовательное предложение (и, в частности, взятое в (2.1) в кавычки) является либо истинным, либо ложным. И примере (2.2) презумпция состоит в том, что всякое свойство множеств порождает множество всех множеств, обладающих этим свойством, и что, в частности, раз имеется свойство правильности, то имеется и множество всех правильных множеств. В примере (2.3) презумпция состоит в том, что выражения, синтаксически подобные взятому в кавычки, имеют ясный смысл и потому могут служить именами. При рассмотрении примеров (2.1), (2.2), (2.3) возникают антиномии (т. е. противоречия); возникновение этих антиномий как раз и разрушает названные презумпции, т. е. создаёт явление парадокса. Однако ни антиномия, ни тем более апория 1 (типа апорий Зенона Элейского) не являются, сами по себе, синонимами парадокса.

В заключение разберём первый из примеров статьи «Парадоксы математические» в БСЭ-2. Пусть $a = b$, тогда $a^2 - ab = a^2 - b^2$, $a(a - b) = (a + b)(a - b)$, $a = a + b$, $a = 2a$, $1 = 2$. Ошибка возникает при сокращении на множитель $a - b$, равный нулю. Приведённый пример, названный в БСЭ-2 парадоксом, можно лишь в том случае признать парадоксом, если возможность сокращения на любой множитель квалифицировать как презумпцию (т. е. как общепринятую, традиционную точку зрения). Подобная квалификация, однако, вряд ли справедлива. А тогда пример следует отнести либо к категории паралогизмов, либо к категории софизмов ❷.

Примечания

❶ [к с. 340]. Апори́я фиксирует несоответствие эмпирического факта и описывающей его теории.

❷ [к с. 341]. Паралоги́зм — случайная, неосознанная или непреднамеренная логическая ошибка в мышлении (в доказательстве, в споре, диалоге), возникающая при нарушении законов или правил логики и приводящая к ошибочному выводу (заключению). Паралогизмы — это неумышленные логические ошибки, обусловленные нарушением законов и правил логики, это невольные ошибки (по незнанию логики, невнимательности). Паралогизм не является, в сущности, обманом, так как не связан с умыслом подменить истину ложью.

В отличие от паралогизмов софи́змы — результат преднамеренного обмана, умышленные логические ошибки. Софизм представляет собой рассуждение, кажущееся правильным, но содержащее скрытую логическую ошибку и служащее для придания видимости истинности ложному заключению. Софизм является особым приёмом интеллектуального мошенничества, попыткой выдать ложь за истину и тем самым ввести в заблуждение. Софизм — это ложное высказывание, которое, тем не менее, при поверхностном рассмотрении кажется правильным. Софизм основан на преднамеренном, сознательном нарушении правил логики. Это отличает его от паралогизма и апории, которые могут содержать непреднамеренную ошибку, либо вообще не иметь логических ошибок, но приводить к явно неверному выводу. Аристотель называл софизмами «мнимые доказательства», в которых обоснованность заключения кажется верной и обязана чисто субъективному впечатлению, вызванному недостаточностью логического или семантического анализа.

К публикации статьи Г. Фреге «Смысл и денотат»

Немецкий логик Готлоб Фрéге (1848—1925) принадлежит к числу тех учёных, идеи и труды которых с течением времени не тускнеют, а, напротив, приобретают всё большее и большее признание. Именно Фреге внёс в логику методы точного знания. Ему больше, чем кому-либо, обязана современная логика многими своими понятиями и конструкциями, позволившими ей выдвинуться на первый план при исследовании строения и преобразования информации (в частности научной) и потому служить фундаментом теоретических основ информатики.

В 1879 году Фреге в небольшой книге «Исчисление понятий. Формульный язык чистого мышления, построенный подобно арифметическому» («Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens») впервые осуществил дедуктивно-аксиоматическое построение логики высказываний и логики предикатов. Впоследствии предложенный метод построения теории путём формальной дедукции был распространён им на арифметику.

В серии статей 1879—1904 годов Фреге дал подробный анализ таких понятий, как 'понятие', 'переменная', 'функция', 'смысл', 'истинностное значение' и др. В работах Фреге эти фундаментальные понятия впервые сделались предметом исследования, отвечающего современным представлениям об уровне строгости. Вот что пишет о Фреге Николя Бурбаки: «Его работы отличаются чрезвычайной точностью и подробностью анализа понятий. Следуя этой тенденции, он вводит множество различений, которые оказались столь важными в современной логике. Так, например, именно он впервые указывает

Под названием «От редакции» опубликовано в продолжающемся сборнике: Семиотика и информатика. — Вып. 8. — М.: ВИНИТИ, 1977. — С. 179—180. Повторная публикация: Семиотика и информатика. — Вып. 35. — М.: Русские словари, 1997. — С. 351—352. Непосредственно вслед за данным текстом в «Семиотике и информатике» шла публикация (в вып. 8 на с. 181—210, в вып. 35 на с. 352—379): *Г. Фреге.* Смысл и денотат [Sinn und Bedeutung] / Пер. с немецкого Е. Э. Разлоговой.

на различие между формулировкой высказывания и утверждением, что это высказывание истинно, между отношением принадлежности и отношением включения, между объектом x и множеством $\{x\}$, сводящимся к этому одному объекту» (*Н. Бурбаки.* Очерки по истории математики: Пер. с французского. — М., 1963 — С. 19). Именно он изъял из употребления нечёткое понятие «переменного количества», предложив взамен представление о переменной как об особого рода знаке.

Фреге может по праву быть назван отцом современной логической семантики. К нему восходит представление о семантическом (называемом также семиотическим) треугольнике, в одной из вершин которого располагается имя (представляющее собой выражение какого-либо языка), в другой — обозначаемая, или называемая, этим именем вещь (предмет имени, или денотат имени), в третьей — выражаемый этим именем смысл (смысл имени, он же концепт денотата). Ему же принадлежит распространение предложенной им теории имён на предложения, при котором предложение считается именем своего истинностного значения (которое, таким образом, объявляется денотатом предложения), а третьим членом — смыслом предложения — признаётся выражаемое предложением суждение. В этом распространении по существу содержатся зачатки современных методов логического анализа естественного языка. Превосходное изложение теории имён Фреге (и некоторых других важных его идей) содержится во введении к монографии Алонзо Чёрча (*А. Чёрч.* Введение в математическую логику: Пер. с английского. — М., 1960)[1]. Эта теория и сейчас является непревзойдённым по своей строгости инструментом логического анализа информации. По существу она лежит также в основе понятийного аппарата современной теории моделей.

Идеи Фреге неоднократно излагались в советской логической литературе (см., например, *Б. В. Бирюков.* Теория смысла Готлоба Фреге // Применение логики в науке и технике. — М., 1960; *Н. И. Стяжкин.* Становление идей математической логики. — М., 1964). Ниже приводится перевод знаменитой статьи Фреге «Смысл и денотат» («Sinn und Bedeutung»), более известной в русской литературе под названием «О смысле и значении», в которой автор предлагает свою теорию имён (включая номинативную теорию предложений). Статья датирована 1892 годом; кажется, что она написана вчера.

[1] ●●▶ Предисловие к русскому изданию классической монографии Чёрча опубликовано в настоящей книге — см. «От редактора перевода...», с. 425—432. ◀●●

Послесловие от февраля 2001 года

Итак, данное предисловие предваряет собою публикацию:

Г. Фреге. Смысл и денотат [Sinn und Bedeutung] / Пер. с немецкого Е. Э. Разлоговой // Семиотика и информатика. — Вып. 8. — М.: ВИНИТИ, 1977. — С. 181—210. Повторная публикация: Семиотика и информатика. — Вып. 35. — М.: Языки русской культуры; Русские словари, 1997. — С. 352—379.

Это была исторически первая публикация на русском языке какого бы то ни было сочинения Фреге. В следующем году состоялась вторая публикация:

Г. Фреге. Понятие и вещь [Begriff und Gegenstand] / Пер. с немецкого Е. Э. Разлоговой // Семиотика и информатика. — Вып. 10. — М.: ВИНИТИ, 1978. — С. 188—205. Повторная публикация: Семиотика и информатика. — Вып. 35. — М.: Языки русской культуры; Русские словари, 1997. — С. 380—396.

Далее последовали:

Г. Фреге. Шрифт понятий [Begriffsschrift...] // Методы логических исследований. — Тбилиси: Мецниереба, 1987. — С. 83—151.

Г. Фреге. Мысль: логическое исследование [Der Gedanke: eine logische Untersuchung] / Пер. с немецкого В. А. Плунгяна [перевод напечатан с купюрами и с довольно безобразной редакторской правкой] // Философия. Логика. Язык: Пер. с англ. и нем. / Сост. и пред. В. В. Петрова; Общ. ред. Д. П. Горского и В. В. Петрова. — М.: Прогресс, 1987. — С. 18—47.

Г. Фреге. Логические исследования: Сборник переводов / Сост., общ. ред., вступ. ст. и комм. В. А. Суровцева. — Томск: Водолей, 1997. — 128 с.

Г. Фреге. Основоположения арифметики: Логико-математическое исследование о понятии числа [Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl] / Вступ. ст. и пер. В. А. Суровцева. — Томск: Водолей, 2000. — 127 с.

Г. Фреге. Логика и логическая семантика: Сборник трудов / Пер. с немецкого Б. В. Бирюкова под ред. З. А. Кузичевой; Введение и послесловие Б. В. Бирюкова; Комм. Б. В. Бирюкова и З. А. Кузичевой. — М.: Аспект Пресс, 2000. — 512 с.

Предисловие к книге Е. Я. Гика «Математика на шахматной доске»

Среди сокровищ гробницы Тутанхамона (египетского фараона начала XIV века до н. э.), которые в 1973 году экспонировались в московском Музее изобразительных искусств, можно было увидеть игральную доску, разделённую на тридцать квадратов, и стоящие на ней фигурки конической и катушкообразной формы[1]. Игральные доски находили и в ещё более древних захоронениях Месопотамии[2]. Конечно, это — ещё не шахматы, а какой-то их дальний родственник, более близкий современным нардам. Однако можно, по-видимому, считать установленным, что игры, связанные с передвижением фигур по расчерченной доске, существуют, по крайней мере, три с половиной — четыре тысячи лет. «И я даже готов утверждать, — пишет Г. Картер, открывший гробницу Тутанхамона, — что современные игры, требующие настоящего умения, такие, как „сига“, или шашки, или шахматы, по всей видимости, произошли от азартных игр, подобных тем, которые мы находим время от времени в египетских гробницах...»[3].

В коллекции Британского музея хранится так называемый Папирус Ринда[4], изготовленный египетским писцом Ахмесом около 1550 года (по другим источникам — около 1700 года) до н. э. и переписанный с ещё более раннего папируса. В нём содержится несколько десятков конкретных математических задач с их решениями; эти задачи относятся к действиям с дробями, вычислениям длин и площадей, определению

Опубликовано в книге: *Е. Я. Гик.* Математика на шахматной доске. — М.: Наука, 1976. — С. 3—8. 1

1 Сокровища гробницы Тутанхамона: Каталог выставки. — М.: Советский художник, 1973. — № 46.

2 Говоря о раскопках царского кладбища в Уре, относящегося, скорее всего, к 3-му тысячелетию до н. э., археолог свидетельствует: «Рядом с повозкой мы нашли игорную доску» ([*Ч.*] *Л. Вулли.* Ур Халдеев. — М.: Изд-во восточной литературы, 1961. — С. 62).

3 *Г. Картер.* Гробница Тутанхамона. — М.: Изд-во восточной литературы, 1959. — С. 240.

4 Хорошая репродукция фрагмента этого папируса открывает сборник «Математика в современном мире» (М.: Мир, 1967).

количества хлебов, которые можно выпечь из данного количества зерна, и т. п. Математические таблицы встречаются среди клинописных текстов Месопотамии, датированных приблизительно 2000 годом до н. э. Таким образом, математическая литература — а вместе с ней и математика как особая область знания, осознающая себя таковой, — также насчитывает не менее трёх с половиной — четырёх тысяч лет.

Итак, и шахматы, и математика уходят своими корнями в глубокую древность. Разумеется, не в этом основа того сродства между ними, которое интуитивно ощущается всеми и которое ведёт к известной конкуренции между этими двумя сферами интеллектуальной деятельности. Сродство это состоит в абстрактном и аксиоматическом характере математики и шахмат.

Подобно тому как математика абстрагируется от конкретности рассматриваемых ею объектов и изучает отношения и формы в чистом виде, так и для шахмат безразлично, из чего сделана доска (в то время как, скажем, для футбола качество травяного покрытия имеет немалое значение), что из себя представляют поля (важно лишь знать, сколько их и какие из них смежны друг с другом) и какого вида шахматные фигуры (существенно лишь, как они ходят). Подобно тому как шахматная партия разворачивается в точном соответствии с правилами игры, не оставляющими сомнения, какой ход возможен, а какой — нет, так и математическая теория развивается на основе своих «правил игры» — аксиом и правил вывода из них; как и шахматный ход, каждый этап математического доказательства должен быть разрешён правилами. Решение шахматной задачи так же неоспоримо, как доказательство математической теоремы: вся шахматная игра целиком укладывается в рамки математики, представляя собой один из видов так называемых исчислений. Шахматное исчисление, однако, весьма сложно и пока что не поддаётся (и неизвестно, поддастся ли когда-нибудь) изучению «до конца» — с тем, скажем, практическим выходом, чтобы уметь указывать наилучшие ходы в различных позициях (хотя такие ходы заведомо существуют и даже в принципе существует алгоритм, указывающий для каждой позиции наилучший ход: этот алгоритм может быть найден, например, путём перебора всех мыслимых партий, которых, как следует из цифр, приведённых в главе 12 книги Е. Я. Гика, имеется никак не больше, чем 21866^{11796})[5].

[5] ●●▶ Положение дел значительно изменилось со времён написания настоящего предисловия. Современные компьютерные программы способны указывать ходы, может быть, и не являющиеся наилучшими в строго математическом смысле, но достаточные для того, чтобы обыграть сильнейших гроссмейстеров. ◀●●

Таким образом, исчерпывающая монография о связях шахмат с математикой пока ещё не может быть написана. Однако можно выделить область таких связей, где появление соответствующей книги давно назрело. Речь идёт о жанре, условно называемом «занимательные задачи». Одна из таких задач, уходящая в глубины математического фольклора, связана как раз с легендой о зарождении шахмат; это задача о числе зёрен на шахматной доске; с неё начинается и повествование в книге Гика. Задачи, так или иначе связанные с шахматами, часто встречаются на математических олимпиадах, на занятиях математических кружков для школьников, на страницах популярных математических журналов, брошюр, задачников. Шахматная тематика нашла своё отражение и в одной из самых замечательных популярных книг по математике — в «Математическом калейдоскопе» Г. Штейнгауза. Задачами о движении коня и расстановке ферзей занимались великие математики Леонард Эйлер и Карл Гаусс. Тем удивительнее, что после выхода в свет в 1935 году небольшой (87 страниц) книги Л. Я. Окунева «Комбинаторные задачи на шахматной доске», давно уже ставшей довольно редкой (и к тому же явно стоящей намного ближе к алгебре, чем к шахматам), на русском языке не было выпущено ни одной шахматно-математической книги.

Появление книги Е. Я. Гика поэтому совершенно своевременно и уместно. Тем более, что разносторонность её автора (он — выпускник Механико-математического факультета Московского университета, кандидат наук по специальности «техническая кибернетика», мастер спорта СССР по шахматам, член Союза журналистов СССР) даёт ему право написать такую книгу.

Рекомендуемая вниманию читателей популярная книга будет интересна и любителям математики, и любителям шахмат. Написанная с должной математической строгостью, она затрагивает и шахматную реальность: достаточно сказать, что в ней рассматриваются (с математической точки зрения) позиция, встретившаяся в партии на первенство мира 1951 года (в главе 3), и трудности, вставшие перед устроителями матча СССР—Югославия в 1970 году (в главе 15).

Первая глава носит вводный характер. В ней излагаются шахматные легенды прошлого (о зарождении шахмат и их связях с магическими квадратами) и настоящего (о создании шахматной машины, которая в конце концов станет чемпионом мира). Предметом последних двух глав служат математические вопросы, возникающие при организации шахматных состязаний — от вычисления так называемых коэффициентов Эло, характеризующих индивидуальную силу шахматиста в данный момент, до построения рациональных расписаний.

В остальных двенадцати главах приведены едва ли не все известные разновидности математических задач на шахматной доске. Автор сумел собрать их из разнообразных, в том числе малодоступных, источников, удачно классифицировать и довольно компактно и вместе с тем живо изложить.

Глава вторая посвящена в основном шахматной доске самой по себе, как геометрическому объекту, без участия шахматных фигур. Фигуры появляются в главе третьей, причём наибольшее внимание уделяется длине проходимого ими пути; показывается, как оценка этой длины может принести пользу при анализе шахматных окончаний. Самая популярная шахматная фигура — конь — служит предметом четвёртой и пятой глав. Четвёртая глава — пример сведения воедино шахматной и математической проблематики: отправляясь от свойства коня менять цвет поля при каждом ходе, автор предлагает основанные на этом свойстве решения как шахматных этюдов, так и математических задач; шахматный термин «ретроградный анализ» соседствует здесь с математическим термином «граф». Пятая глава целиком посвящена знаменитой задаче Эйлера об обходе конём всех полей шахматной доски. В главе шестой излагается ряд комбинаторных и занимательно-шахматных задач, связанных с расстановкой и движением ладей.

Седьмая глава содержит различные задачи о движении и расстановке ферзей. Она открывается задачей о *доминирующих* ферзях, т. е. о таких ферзях, которые в своей совокупности держат под боем все поля доски. В восьмой главе, напротив, исследуется задача о *независимых* ферзях, т. е. о таких, из которых ни один не бьёт другого; эта задача знаменита тем, что ею занимался Гаусс. В девятой главе минимальное число доминирующих фигур и максимальное число независимых фигур вычисляется для королей, ладей, слонов, коней и пешек. Для полноты картины стоило бы, пожалуй, привести позиции с доминирующими и независимыми пешками и для случая, когда этим пешкам разрешается быть разных цветов (для прочих фигур цвет не играет, разумеется, никакой роли в вопросах независимости и доминирования).

В главе десятой предпринимается попытка выразить в цифрах, причём математически убедительно, сравнительную силу шахматных фигур. Эта проблема не может не занимать и практического шахматиста, и математика, составляющего программу шахматной игры для вычислительной машины. Все знают, конечно, что сила той или иной фигуры зависит от конкретной ситуации на доске и что нетрудно придумать позицию, где конь оказывается сильнее ферзя; но никто не сомневается, вместе с тем, что ферзь всё-таки более сильная

фигура, нежели конь. Естественно считать фигуру тем сильнее, чем большее число полей она может бить; это число угрожаемых полей зависит от исходной позиции фигуры, и для всех фигур, кроме пешки (которая ходит одним способом, а бьёт — другим), совпадает с числом полей, достижимых из данного поля за один ход. Вычисляя число достижимых полей для каждого возможного для данной фигуры исходного поля, складывая эти числа и деля их на число возможных исходных полей, мы получаем количественно выраженную оценку средней силы фигуры. Соответствующие цифры приведены на с. 116 книги Е. Я. Гика. Замечательно, что они не слишком расходятся с шахматной традицией, хотя предложенный способ вычисления, по меньшей мере, по двум причинам может рассматриваться лишь как самое первое приближение к истинной силе фигур (если такое понятие вообще имеет смысл). Во-первых, не совсем ясно, насколько проводимые вычисления отражают силу пешки, поскольку для неё угрожаемые поля не совпадают с достижимыми; кроме того, если вести расчёт не на один ход, а, скажем, на два, то пешка, стоящая на предпоследней горизонтали, получает, ввиду превращения, гораздо более широкие возможности движения. Во-вторых, вычисления для каждой фигуры проводятся в искусственной ситуации, когда на доске расположена только эта фигура; число достижимых полей, конечно, изменится, если на доске будут стоять и другие фигуры: ферзь, окружённый со всех сторон фигурами своего цвета, имеет ноль достижимых полей, в то время как конь в том же положении может иметь их восемь. Разумеется, подсчёт числа достижимых полей не только для каждого исходного поля (как это сделано в книге), но и для каждой дислокации фигур на остальных полях вызывает колоссальные трудности.

Одиннадцатая глава вновь возвращает читателя к занимательному жанру. Здесь рассматриваются позиции, в которых требуется произвести перестановку фигур, подчинённую тем или иным условиям; излагается остроумный метод «пуговиц и нитей», нередко помогающий при решении подобных головоломок. В двенадцатой главе конструируются партии и позиции, отдельные характеристики которых являются рекордно большими или рекордно малыми — например, самые короткие партии, приводящие к мату, пату или «голым» королям, и позиции с самым большим числом ходов или шахов. Одни из этих рекордов являются абсолютными — в том смысле, что не могут быть улучшены; другие всего лишь относительными, но зато представляющими тем самым читателю возможность получить улучшенный результат.

В главе тринадцатой рассматриваются некоторые обобщения шахматной игры. К ним относятся как игры на обычной шахматной доске, но с необычными правилами, так и игры на необычных досках. Подобные игры отнюдь не являются только плодом чистого воображения. Так, предложенная Мартином Гарднером игра в «уполовиненные шахматы» (доска 5×5, и у каждой стороны по пять пешек и по одной фигуре каждого вида, причём пешке запрещено ходить на два поля сразу) пользуется популярностью у московских школьников, а знаменитый Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат играл (и выиграл со счётом 3 : 1) в 1929 году матч с венгерским гроссмейстером Мароци на доске 16×12 с удвоенным комплектом фигур (начальный ход пешки возможен сразу на три поля, а для победы достаточно заматовать любого из королей противника). Обе эти игры естественно дополняют перечень, приведённый в главе 13.

Можно надеяться, что «Математика на шахматной доске» доставит читателям несколько часов удовольствия и что в недалёком будущем появится более обстоятельная книга на ту же тему.

Примечания

1 [к с. 345]. ●●➤ Евгений Яковлевич Гик (род. 10.05.1943) — математик и кибернетик, шахматист и журналист. Кандидат наук и мастер спорта по шахматам. Дважды чемпион по шахматам Московского университета (1961 и 1963 годов). Участник 35-го чемпионата СССР (1967 год). Обладатель первого Кубка Москвы (1971 год). Вице-чемпион мира по блицу среди журналистов (Лозанна, 1998 год). Книга «Математика на шахматной доске» 1976 года открывает собою хронологический список пятидесяти книг Гика, приведённый на с. 334 его иллюстрированной книги «Люди и фигуры. Шахматный однотомник» (М.: Зебра Е, 2013. — 336 с.). ◄●●

Предисловие к сборнику переводов «Математика в современном мире»

Современный мир неожиданно обнаружил, что математика уверенно расположилась в самых разных его частях и уголках. Несмотря на то, что вторжение математики продолжается — и со всё возрастающей интенсивностью, — удивление по этому поводу скорее даже убывает: математическая экспансия стала привычной. Сейчас уже все смирились со словосочетаниями: «математическая биология», «математическая лингвистика», «математическая экономика», «математическая психология»; и какую бы дисциплину ни взять, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к её наименованию эпитета «математический».

Распространение математики вширь сопровождается её проникновением вглубь; математика занимает теперь видное положение в жизни общества. Изменилось и традиционное представление о математиках: место паганелеобразных чудаков заняли в этом представлении молодые люди в ковбойках, занимающиеся лыжным спортом. Всё большее число родителей желает определить своих детей в школы с математическим уклоном: математика стала модной профессией.

Исчерпывающие причины такого стремительного (в течение последних десяти—пятнадцати лет) изменения роли математики в современном мире, конечно, легче будет установить будущим историкам науки, чем нам, современникам этого изменения. Однако уже сейчас можно, пожалуй, сказать, что основная причина заключается не только и не столько в конкретных успехах математики за последние годы, сколько в осознании необъятных возможностей применения математики и в появлении возросших потребностей в использовании этих возможностей.

Тем не менее повсеместное проникновение математики некоторым кажется загадочным, а некоторым — подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, скажем, физики

Опубликовано в книге: Математика в современном мире / Пер. с английского Н. Г. Рычковой. — М.: Мир, 1967. — С. 5—11.

или химии: физика открывает нам новые мощные источники энергии и новые средства быстрой связи, химия создаёт искусственные ткани, а сейчас покушается и на создание искусственной пищи. (Сказанное не претендует, разумеется, на какое-либо определение и тем более ограничение роли физики и химии.) Не удивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках силы, связи, одежды и еды, прочно и почётно вошли в нашу жизнь. А ведь математика проникла даже в науки, традиционно считающиеся гуманитарными. И хотя, например, в языкознании пользуются физическими приборами для исследования устной речи, никто не говорит о «физической лингвистике».

Так что же даёт людям математика, такая теоретическая наука, которая не открывает ни новых вещей, как химия, ни новых средств движения (движения вещей или сигналов), как физика? И почему появление в какой-либо отрасли науки математических методов исследования или хотя бы просто математического осмысления соответствующей системы понятий и фактов всегда означает и достижение этой отраслью определённого уровня зрелости, и начало нового этапа в её дальнейшем развитии? Наиболее распространённый в недавнем прошлом ответ состоял в том, что математика умеет хорошо вычислять и тем самым позволяет находить в нужных случаях требуемые цифровые данные. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики — и особенно в последние годы, ознаменованные столь бурным развитием вычислительной техники, — этот аспект оказывается и второстепенным, и вторичным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Любая попытка дать краткое объяснение этих причин неизбежно приведёт к неполной и неточной формулировке. Если всё же заранее согласиться на это, то можно сказать следующее: математика предлагает весьма общие и достаточно чёткие модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками; действительность же так усложнилась (как за счёт познания новых её сторон, так и за счёт создания человеком новых её форм), что без упрощающих, огрубляющих, формализующих, охватывающих лишь одну сторону явления моделей ныне не обойтись. Появление таких моделей в какой-либо отрасли науки свидетельствует о том, что система понятий этой отрасли уточнилась настолько, что может быть подвергнута строгому и абстрактному, т. е. математическому, изучению. Такое изучение в свою очередь играет решающую роль в дальнейшем уточнении понятий, а следовательно, и в успешном их применении.

Математическая модель нередко задаётся в виде особого «языка», предназначенного для описания тех или иных явлений. Именно так, в виде языка, возникли в XVII веке дифференциальное и интегральное исчисления. Важнейшим примером математического языка, описывающим количественную сторону явлений, служит «язык цифр»; вот почему упомянутый выше вычислительный аспект математики как производный от её основного языкового аспекта мы назвали «вторичным». Замечательно, что хотя математическая модель создаётся человеческим разумом, она, будучи создана, может стать предметом объективного изучения; познавая её свойства, мы тем самым познаём и свойства отражённой моделью реальности.

Сказанным обусловлен и специфический характер математических открытий. Естественнонаучные открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства окружающего мира. Математические же открытия обнаруживают ранее неизвестные свойства рассматриваемых моделей мира, а наиболее революционные открытия дают начало новым моделям. Так, поистине революционный характер носило осознание древними бесконечности натурального ряда, а точнее, создание такого понятия натурального числа (такой модели), при котором натуральных чисел оказывалось бесконечно много (ведь представление, что числа бывают только, скажем, до миллиарда, а дальше чисел нет, вряд ли могло быть опровергнуто прямым наблюдением). Возникнув как инструмент в исследовании мира, понятие натурального числа само стало предметом исследований, приведших к выявлению скрытых, но объективных свойств этого понятия. Поразительным достижением античной математики было, например, установление бесконечности множества[1] простых чисел — поразительным как по постановке вопроса о бесконечности, хотя и без употребления самого слова «бесконечность», так и по безукоризненной точности формулировки ответа (как гласит двадцатое предложение IX книги Евклидовых «Начал», «простых чисел существует больше всякого предложенного количества простых чисел») и по неожиданной простоте доказательства. Точно так же принятая нами геометрическая картина мира неизбежно приводит к наличию несоизмеримых отрезков, потрясшему ещё пифагорейцев.

Появление новых моделей нередко означает принципиальный поворот в развитии математики. Один из таких переломных моментов связан с величайшими достижениями математической мысли прошлого века — открытием неевклидовой геометрии (правильнее

[1] «Множество» — принятый в математике синоним слова «совокупность».

сказать, «неевклидовых геометрий») и возникновением теории бесконечных множеств. Открытие неевклидовых геометрий знаменовало начало новой эры в математике: впервые было обнаружено, что одну и ту же сторону реального мира (в данном случае его геометрическую структуру) можно отразить различными моделями, одинаково хорошо согласующимися с действительностью при определённых возможностях экспериментальной проверки. Теория множеств Г. Кантора продемонстрировала возможность строгого изучения бесконечности; она распространила на бесконечные совокупности понятие количества, замкнутое до того времени в рамки понятия натурального числа; оказалось, что не только конечные, но и бесконечные совокупности могут состоять из разного количества элементов.

Теория множеств дала универсальную систему понятий, которая охватила все существовавшие к тому времени математические теории. Вместе с тем при дальнейшем развитии теории множеств появились существенные трудности, не преодолённые полностью до сих пор. Исследования последних лет дают основания считать, что созданная Кантором «наивная теория множеств» описывает на самом деле не одну, а сразу несколько «теоретико-множественных моделей», так что факты, верные в одной модели, могут быть неверны в другой[2]. Если это так (а, по-видимому, это действительно так), то «наивная» теория множеств расщепится на несколько моделей, подобно тому как основанная на непосредственных пространственных представлениях «наглядная» геометрия расщепилась в прошлом веке на евклидову и неевклидовы. Подобное расщепление моделей происходит, пожалуй, всё же реже, чем обратный процесс, приводящий к возникновению на основе нескольких моделей одной обобщающей «сверхмодели»; именно так, отвлекаясь от частностей, возникают алгебраические понятия кольца, поля, группы, решётки и даже поглощающее их все понятие универсальной алгебры.

Мы видим, что «модель Кантора» оказывается недостаточно чёткой — а ведь выше говорилось именно о «достаточной чёткости» как характерной черте математических моделей. Дело в том, что само понятие «достаточной чёткости», конечно, не абсолютно, а исторически обусловлено. Определения, открывающие собой Евклидовы «Начала»: «Точка есть то, что не имеет частей», «Линия же — длина

[2] Кажется на первый взгляд непостижимым, как это у такого «наглядного» понятия, как «совокупность», могут быть разные математические модели; но ведь в прошлом веке, да и сейчас ещё, многим было столь же непонятно, что возможны различные математические модели «наглядного» представления о расположении прямых на плоскости.

без ширины» и т. д., казались, вероятно, достаточно чёткими современникам Евклида (III век до н. э.), а непреложность его системы в целом не подвергалась публичным сомнениям вплоть до 23 февраля 1826 года, когда Н. И. Лобачевский сделал свой доклад о принципах геометрии[3]. Зато именно сомнения в этой непреложности и привели в конечном счёте к современной (достаточно чёткой на сегодняшний день) формулировке евклидовой системы геометрии.

Итак, действительное значение математической строгости не следует преувеличивать и доводить до абсурда; здравый смысл в математике не менее уместен, чем во всякой другой науке. Более того, во все времена крупные математические идеи опережали господствующие стандарты строгости. Так было с великим открытием XVII века — созданием основ анализа бесконечно малых (т. е. основ дифференциального и интегрального исчисления) Ньютоном и Лейбницем. Введённое ими в обиход понятие «бесконечно малой» определялось весьма туманно и казалось загадочным современникам (в том числе, по-видимому, и самим его авторам). Тем не менее оно с успехом использовалось в математике. Разработанный Ньютоном и Лейбницем символический язык не имел точной семантики (которая в удовлетворяющей нас сейчас форме была найдена лишь через полтораста лет), но даже и в таком виде позволял описывать и исследовать важнейшие явления действительности. Так было и с такими фундаментальными понятиями математики, как предел, вероятность, алгоритм, которыми пользовались, не дожидаясь их уточнения. Так обстоит дело и с «самым главным» понятием математики — понятием доказательства. «Со времён греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“» — этими словами открывается знаменитый трактат Н. Бурбаки «Начала математики»[4]. Однако читатель заметит, что знакомое ему ещё со школы понятие доказательства носит скорее психологический, чем математический характер. Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) — это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) — одна из важнейших задач математики.

Трудовые будни математики по необходимости состоят в получении новых теорем, открывающих новые связи между известными поняти-

[3] ●●➤ Указанная дата кажется некоторым недостаточно обоснованной. Мы опираемся на слова Лобачевского, приведённые в настоящей книге на с. 120. ◄●●

[4] *Н. Бурбаки.* Теория множеств: Пер. с французского. — М.: Мир, 1965. — С. 23.

ями (хотя и теперь ещё приходится слышать — правда, всё реже — удивлённое: «Как? Неужели ещё не всё открыто в этой вашей математике?»). Однако к этому математика отнюдь не сводится. Вот какие цели математического исследования считает важными А. Н. Колмогоров:

> 1. Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14—15 лет.
>
> 2. Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математиками, физиками и техниками.
>
> Две сформулированные задачи тесно связаны между собой. По поводу второй замечу, что в отличие от времён создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных математических построений под любые методы расчёта, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдывающие себя на практике. Но фундамент этот иногда оказывается столь хитро построенным, что молодые математики, гордые пониманием его устройства, принимают фундамент за всё здание. Физики же и инженеры, будучи не в силах в нём разобраться, изготовляют для себя вместо него временные шаткие подмостки.
>
> (*А. Н. Колмогоров.* Простоту сложному // Известия. 31.12.1962.)

Непрерывное повышение уровня математической строгости одновременно с попытками представить самые сложные построения так, чтобы они стали интуитивно наглядными, возникновение одних понятий и уточнение других, переставших удовлетворять новым требованиям, расщепление казавшихся ещё недавно незыблемыми моделей и образование новых обобщающих моделей — весь этот исполненный большого внутреннего драматизма процесс характерен для математики не менее, чем доказательство теорем (без которого, впрочем, описанный процесс был бы совершенно бессодержателен, да и вообще не мог бы иметь места).

Математика подобна искусству — и не потому, что она представляет собой «искусство вычислять» или «искусство доказывать», а потому, что математика, как и искусство, — это особый способ познания. Имеет, быть может, смысл по аналогии с художественными

образами говорить о «математических образах» как специфической для математики форме отражения действительности.

Представление о математике не как о простом собрании теорем, а как о могучем инструменте познания характерно и для сборника «Математика в современном мире». Именно с этой точки зрения освещаются в его одиннадцати статьях различные стороны современной математики. Первая статья имеет вводный характер. Последняя рассказывает о техническом средстве современной математики — вычислительных машинах, в частности о том, как эти машины, которые вначале служили математике лишь устами для возвещения миру своих решений на понятном ему языке цифр, способствуют ныне прогрессу самой математики.

Остальные статьи затрагивают отдельные части математики (статьи со второй по шестую) и различные её приложения (статьи с седьмой по десятую). Как отмечается уже во вводной статье, разделение математики на «чистую» и «прикладную» весьма условно. Во всех этих статьях рассматриваются те или иные математические модели. Просто в каждой из статей, посвящённых основным частям математики, эти модели объединены общностью строения, а в каждой из остальных четырёх статей — общностью их применения. В этих последних статьях специальный упор сделан на использование моделей. Впрочем, и в предыдущих, «неприкладных» статьях связи математических моделей с отражаемыми ими явлениями из самых разных областей действительности уделяется большое внимание. Несколько особое место в этой схеме занимает статья о теории регулирования. По аналогии с тремя предшествующими ей статьями её можно было бы назвать «Математика в теории регулирования», однако, этого не сделано, и, по-видимому, потому, что в теории регулирования грань между явлениями, составляющими сам предмет теории, и математическими моделями этих явлений остаётся ещё довольно неопределённой.

Предлагаемая читателю книга представляет собой сборник переводов статей, образующих тематический номер журнала «Scientific American» за сентябрь 1964 года. Этот научно-популярный журнал выходит с 1845 года и пользуется широким признанием во всём мире.

Статьи указанного номера журнала написаны видными зарубежными учёными — десятью математиками, живущими в Америке, и одним экономистом, живущим в Англии. Вводная статья принадлежит одному из самых известных математиков современного мира Рихарду Куранту. Советскому читателю имя Куранта известно по переводам

на русский язык фундаментальной монографии «Методы математической физики», учебника «Курс дифференциального и интегрального исчисления» и популярной книги «Что такое математика?».

Сочинения большинства других авторов, в том числе научно-популярные, также переводились на русский язык. Так, только в 1965 году у нас вышли «Прелюдия к математике» У. У. Сойера (автора статьи «Алгебра»), «Вероятность и смежные вопросы в физике» Марка Каца (автора статьи «Теория вероятностей»), «Неравенства», «Введение в неравенства» и «Прикладные задачи динамического программирования» Ричарда Беллмана (автора статьи «Теория регулирования»); в позапрошлом году — «Процессы регулирования с адаптацией» того же Р. Беллмана и «Нерешённые математические задачи» Станислава Улама (автора статьи «Вычислительные машины»); в 1963 году — «Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел» М. Каца и «Статистическая теория энергетических уровней сложных систем» Фримэна Дайсона (автора статьи «Математика в физических науках»). Перевод книги автора статьи «Математика в общественных науках» Ричарда Стоуна «Метод „затраты—выпуск“ и национальные счета» издавался даже дважды — в 1964 и 1966 годах. Автор статьи «Математика в биологических исследованиях» Э. Ф. Мур известен советскому читателю своей работой, помещённой в сборнике «Автоматы» (М., 1966); его именем теперь названы автоматы, рассмотренные в указанной работе.

Помимо единой точки зрения на роль математики, статьи сборника объединены общностью объёма (по 16—18 страниц), непринуждённостью стиля и оригинальностью изложения. Последняя в сочетании с индивидуальностью каждого автора не могла не сделать статьи достаточно разнообразными. Для статей, посвящённых приложениям математики, характерна известная субъективность в отборе материала. Впрочем, этого, вероятно, и нельзя избежать, если стремиться — в рамках заданного объёма — продемонстрировать применимость математических идей на отдельных более детально разобранных примерах.

Девять статей из одиннадцати посвящены в основном современному состоянию соответствующих математических идей, хотя и с историческими экскурсами; цель статей «Арифметика» и «Геометрия» — показать становление арифметической и геометрической мысли в историческом развитии. Тем большее недоумение вызывает то, что в статье «Геометрия» даже не упоминаются имена основоположников неевклидовой геометрии Бо́льяй и Лобачевского.

Это заставляет скептически отнестись ко всем историко-математическим взглядам автора статьи и с осторожностью подойти к освещению вопросов истории науки в сборнике в целом; впрочем, эти вопросы носят в данной книге подчинённый характер. К сожалению, разнообразие стиля статей коснулось и их доступности. Одни из них, например «Алгебра», оказались более, другие, как, например, «Математика в физических науках», менее доступными для читателя-неспециалиста. Но даже сравнительно более сложные разделы книги читаются с неослабевающим интересом, так как почти всюду ощущается искреннее желание авторов донести до всех читателей современного мира богатство и своеобычность математических идей.

Особое место в книге занимают иллюстрации и таблицы. Прекрасно выполненные и снабжённые развёрнутыми комментариями, они не просто делают более наглядным содержание соответствующих статей, но и служат, по существу, их конспектами. Комментарии к ним настолько подробны, что их можно читать независимо от основного текста; тем самым иллюстрации и таблицы образуют как бы книгу в книге.

Нет сомнения, что выход в свет этого сборника будет с интересом встречен советскими читателями.

К преподаванию математики в начальной школе[1]

Печальный разрыв между математикой в начальных классах и математикой в последующих классах едва ли не более велик, чем разрыв (к тому же ныне сокращаемый) между математикой школьной и вузовской. Это связано с чрезмерно изолированным положением начальной школы в системе обязательного образования — положением, отражающимся отчасти даже в повседневном словоупотреблении, часто отказывающим начальной школе в праве считаться частью восьмилетней.

Так, было бы естественным предполагать, что термин «восьмилетняя школа» охватывает восемь лет обучения — с I по VIII классы. Оказывается, что это не всегда так: если взять брошюру «Программы восьмилетней школы. Математика» (М.: Просвещение, 1965), то легко обнаружить, что речь здесь идёт лишь о последних четырёх классах из восьми, т. е. о классах с V по VIII. Также лишь классы с V по VIII подразумеваются, по-видимому, в статье «Объём знаний по математике для восьмилетней школы» (Математика в школе. — 1965. — № 2).

Таким образом, оказывается, что словосочетание «восьмилетняя школа» имеет два значения, первое из которых (редкое) имеет в виду все восемь классов, а второе (частое) — лишь последние четыре. Это второе, паразитическое значение возникло потому, что для цикла классов с V по VIII нет специального названия, а потребность в таком названии есть. Вопрос о рациональных названиях основных этапов школьного обучения представляется отнюдь не праздным. Можно было бы, например, назвать эти этапы так: начальная школа (классы I—IV[2]),

---

Опубликовано в журнале: Математика в школе. — 1966. — № 2. — С. 36—39.

[1] По поводу статьи: *Н. Я. Виленкин*. О некоторых аспектах преподавания математики в младших классах // Математика в школе. — 1965. — № 1.

[2] Или, по более современным взглядам, классы I—III (см.: *А. М. Пышкало, А. Д. Семушин, А. Д. Терентьев*. Изучить познавательные возможности учащихся восьмилетней школы // Математика в школе. — 1965. — № 2. — С. 47; *Н. А. Менчинская, М. И. Моро*. Об изменении содержания начального курса математики // Начальная школа. — 1964. — № 9).

средняя школа (классы V—VIII[3]), старшая школа (классы IX—X). Сами учебные заведения можно было бы называть, например, по числу классов в них: восьмилетняя школа, десятилетняя школа — и уж никак не «средняя общеобразовательная трудовая политехническая школа № ... с производственным обучением» (какой избыток повторяющих друг друга и вовсе излишних слов!).

Конечно, было бы смешно приписывать слишком много именам и формам, тем не менее отрицательное воздействие неправильной терминологии несомненно. Фактическое выпадение младших классов из понятия «восьмилетняя школа» приводит к тому, что эти классы часто ускользают из серьёзных разговоров о восьмилетней школе (при том, что формально они вроде бы также затрагиваются в таких разговорах), а в применении к математике — к характерному, к сожалению, для сегодняшнего преподавания уже отмеченному отрыву математики в начальных классах от математики в более старших классах (не случайно сам изучаемый в первых четырёх классах предмет называется не «математика», а «арифметика»). Вот почему статья Н. Я. Виленкина «О некоторых аспектах преподавания математики в младших классах» представляется чрезвычайно актуальной.

Направленная на преодоление существующего между четвёртым и следующими классами разрыва статья трактует начальный курс математики не традиционным образом как один из предметов начальной школы, а как один из разделов общего курса математики (что, при всей своей естественности, является едва ли не новым). Подобный подход кажется весьма своевременным; математики зря примирились с тем, что математика в начальных классах целиком ушла из компетенции педагогов-математиков в компетенцию педагогов начального обучения.

Статья Н. Я. Виленкина интересна уже тем, что являет собой пример столь же редкого, сколь необходимого обращения профессионального учёного-математика к проблемам начальной школы. Известно, что в последние годы профессиональные математики стали всё больше осознавать первостепенную важность школьного преподавания для развития математической науки. А. Н. Колмогоров, И. М. Гельфанд, Е. Б. Дынкин и некоторые другие стали непосредственными руководителями и участниками преподавания математики в школе. Однако проникновение математиков в школу идёт сверху вниз и останавливается, как правило, перед начальными классами. В то же время именно в младших классах закладываются наи-

[3] Соответственно, IV—VIII.

более основные представления, и математика не составляет здесь исключения. Думается, что на самом деле проходимые в этих классах разделы математики — самые ответственные разделы школьного курса. (Иногда не без иронии спрашивают, не должны ли в таком случае математики заниматься обучением счёту в детских садах. Ответ: нет, не должны, ибо детский сад — факультативен, а начальная школа — обязательна.)

Но, более всего, конечно, обсуждаемая статья интересна своим конкретным содержанием. В ней убедительно показывается, что математика в начальной школе преподаётся в значительной степени неправильно, прежде всего по отбору материала, и что это устарелое преподавание нуждается в сильной переработке; указываются также некоторые конкретные рекомендации.

Посмотрим, в самом деле, каковы те цели, которые должен преследовать курс математики в начальной школе. Можно, пожалуй, выделить четыре такие цели:

1) обучение «бытовой» математике (умение правильно расплатиться в магазине или подсчитать количество обоев, необходимых для оклейки комнаты, или сообразить, сколько времени надо затратить на поездку в автомобиле по маршруту заданной длины и т. д.);

2) закладка фундамента для последующего изучения математики;

3) привитие навыков логического мышления («создание логического мировоззрения»), а также просто здравого смысла;

4) сообщение общего представления о математической науке.

С сожалением приходится признать, что реальное преподавание не отвечает удовлетворительным образом ни одной из этих целей (кроме, быть может первой, да и то эта первая цель достигается гораздо медленнее, чем нужно) и что, поэтому, печальная оценка, данная ему Н. Я. Виленкиным, справедлива. Справедлива и подавляющая часть предложенных им конкретных рекомендаций.

Более всего хотелось бы поддержать следующие положения, прямо или косвенно содержащиеся в статье Н. Я. Виленкина.

1. Гораздо большее место должны получить задачи «на здравый смысл». К ним принадлежат, в частности, задачи из комбинаторики. Кажется нелепостью, что наиболее наглядные и простые в своей основе комбинаторные представления считаются едва ли не сложнейшей частью курса математики и потому отодвинуты в конец обучения. Личный опыт автора этих строк показывает, что дошкольники старшего возраста без труда могут, например, образовывать сочетания из заданных предметов по 2 или по 3 и находить общее число таких сочетаний. Не худо было бы младшеклассникам потре-

нироваться и в понимании того (именно не в «обучении тому», а в «понимании того»), что, во-первых, если в ящике больше белых шаров, чем чёрных, то при вынимании с возвращением белые шары будут попадаться чаще, и, во-вторых, если белые шары попадаются чаще, то, вероятно, именно их большинство, — т. е. в понимании простейших случаев проявления закона больших чисел.

2. Конечно же, многие важные математические объекты — такие, например, как таблицы, — вполне могут и должны быть введены уже в младших классах. Нуждается в значительном расширении и геометрический материал начальной школы[4]. Оправдано и введение отрицательных чисел — и не только на примере температуры, но и на классическом примере «долга». Дело в том, что существуют игры (например, детский бильярд), где можно успешным ходом приобрести определённое количество очков, а неудачным ходом заслужить штраф; если этот штраф превышает набранное к этому времени количество очков, возникает долг; его «отрицательный» смысл прекрасно понимают дети.

3. Как указывает сам Н. Я. Виленкин, в его статье исчерпано не всё — за её пределами остались теоретико-множественное и логическое направления. Ясно, что включение этих направлений необходимо — не только для развития мышления, но и просто для текущего обслуживания: вряд ли, например, без привлечения в какой-либо форме понятия множества можно достичь единообразного понимания того, что́ есть «способ размена монеты в 5 коп.» (с. 28 статьи Н. Я. Виленкина). Заслуживает внимания уже имеющийся здесь опыт преподавания[5].

4. К логическому направлению примыкает и отмеченное в обсуждаемой статье направление алгоритмическое. Настойчивое введение алгоритмов в курс начальной школы необходимо. Роль алгоритмов здесь не исчерпывается ролью инструмента вычислений; она не столько познавательная, сколько воспитательная. Выполнение алгоритма (т. е. точной инструкции, предписывающей совершать определённые действия по формальным правилам) требует дисци-

[4] См.: *А. Н. Колмогоров, И. М. Яглом.* О содержании школьного курса математики // Математика в школе. — 1965. — № 4. — С. 57; *А. М. Пышкало.* Геометрия в I—IV классах. — М.: Просвещение, 1965.

[5] *А. А. Столяр.* Формирование теоретико-множественных понятий у учащихся IV класса // Начальная школа. — 1964. — № 10. См. также *Е. С. Беляева.* Из опыта преподавания математики в IV классе по экспериментальной программе // Математика в школе. — 1965. — № 1. Думается только, что введение теоретико-множественных и логических представлений надо начинать гораздо раньше, чем в IV классе.

плины мышления и приучает к этой дисциплине. (В более старших классах следовало бы перейти от задач на выполнение алгоритмов к задачам на формулирование таковых.) Умение правильно понять и точно выполнить заданную инструкцию, способность действовать по строго формальным правилам — важное искусство, и где же ему и обучаться, как не на уроках математики. Одним из простейших алгоритмов является правило сложения чисел столбиком. Стоило бы обучать этому алгоритму формально, как игре с цепочками цифр («словами в алфавите цифр») произвольной длины уже в первом классе, до осмысления этих цепочек — в последующих классах — как имён натуральных чисел; легко проверить, что дошкольник, знающий начертания цифр и владеющий в той или иной форме таблицей сложения однозначных чисел, обучается алгоритму сложения столбиком очень быстро. Отнюдь не фантастичным было бы включение в программу простейших примеров выполнения алгоритмов на вычислительных машинах и даже элементарных задач на программирование на таких машинах — только, конечно, для этого надо использовать не реально существующие машины, а их сильно упрощённые, существующие лишь «на бумаге» (или «на доске») идеализированные модели[6].

5. Всё это убеждает, что курс математики в начальной школе отнюдь не должен быть заполнен одной арифметикой (т. е. действиями над числами). «Чрезмерное увлечение арифметикой приводит к плохому знанию математики», — пишет Н. Я. Виленкин. Плохое знание математики — лишь одно из последствий этого чрезмерного увлечения. Не оно ли (увлечение) более всего ответственно за представление о математике как о чём-то сухом и скучном, — представление, которое столь прочно укореняется уже в младших классах, что часто не может выветриться потом в течение всей последующей жизни. Задача состоит даже не столько в том, чтобы заложить в начальном курсе «основные идеи, характеризующие современную математику и её приложения» (с. 19 обсуждаемой статьи),

[6] Автор этих строк надеется поместить описание одной из таких моделей — так называемой машины Поста — в ближайших номерах «Математики в школе». ●► Надежда была реализована в четырёх статьях, опубликованных в четырёх номерах названного журнала за 1967 год: 1) «Как работает машина Поста» (№ 1, с. 31—38); 2) «Прибавление единицы на машине Поста» (№ 2, с. 19—26); 3) «Анализ и синтез программ машины Поста» (№ 3, с. 18—27); 4) «Возможности машины Поста» (№ 4, с. 13—26). Впоследствии на основе этих статей появилась брошюра: *В. А. Успенский.* Машина Поста. — 2-е изд., испр. — (Популярные лекции по математике). — М.: Физматлит, 1988. — 96 с. ◄●

сколько в том, чтобы сообщить правильное понятие о математике как науке с широкой сферой применимости (прежде всего потому, что её законы не опираются ни на что, кроме здравого смысла), а не как хитроумном формализме, где шарики, положенные на наклонную плоскость, катятся не вниз, а вверх[7]. Достичь этого, на наш взгляд, можно и должно введением в преподавание большого числа неарифметических задач — прежде всего логико-комбинаторных (хорошим примером которых могут служить простейшие задачи на шахматной доске), а также теоретико-множественных и алгоритмических. К сожалению, сам Н. Я. Виленкин выражается здесь несколько туманно, говоря (на с. 19), что «единственным путём является систематическое использование новых видов математических задач — задач, решаемых с помощью обычных арифметических действий, но подготавливающих изучение более глубоких математических идей». А разве непосредственное решение комбинаторной задачи способом перебора является решением с помощью арифметических действий[8]? Гипертрофия арифметики не только приводит к дурным последствиям, но не имеет и достаточных оснований. Понятия числа и операции над числами, быть может, вовсе не самые простые из доступных первокласснику понятий. Как правильно отмечает А. И. Маркушевич[9], совершенно недостаточно учитывается математический опыт маленьких детей, с которым они приходят в школу, — опыт, не ограничивающийся только числами и фигурами, а включающий, например, и первоначальные представления о множестве и порядке. Важная задача начальной школы — закрепить и отточить этот опыт.

6. И уж, конечно, следует беспощадно изгнать из школьного курса арифметики (как из начальных, так и из последующих классов) такие задачи, алгебраическое решение которых проще, чем так называемое «арифметическое». О нелепости таких задач в рамках арифметики

[7] *М. В. Потоцкий.* О педагогических основах обучения математике. — М.: Учпедгиз, 1963. — С. 150—151 [1].

[8] Эта нечёткость сохраняется (и даже отчасти усиливается) в последующей статье Н. Я. Виленкина «О связи между преподаванием математики в начальной и средней школе» (Начальная школа. — 1965. — № 10), где говорится уже только о «новых типах арифметических задач» и о том, как можно достичь нужной цели, «не выходя за рамки арифметики». Впрочем, впоследствии сам Н. Я. Виленкин разъяснил мне, что действия и задачи логико-комбинаторного характера он имел в виду относить к числу арифметических и что термин «арифметические» употреблялся им лишь как противопоставительный по отношении к громоздкому алгебраическому аппарату.

[9] *А. И. Маркушевич.* Об очередных задачах преподавания математики в школе // Математика в школе. — 1962. — № 2. — С. 9.

писали и А. П. Чехов в 1884 году (в рассказе «Репетитор») и А. Я. Хинчин в 1938—1939 годах (в посмертно опубликованной статье «О так называемых „задачах на соображение“ в курсе арифметики»[10]), а в последние годы Б. В. Гнеденко[11] и А. И. Маркушевич[12]. По математике нормально иметь в школе отметку «пять»; убеждая в этом знакомых школьников и их родителей, приходится со стыдом признавать, что для отметок по арифметике — и именно из-за «задач на соображение» — может быть сделано исключение.

Ряд предложений Н. Я. Виленкина требует дополнительных разъяснений и уточнений. Так, неясно, как (и, главное, зачем) вводить в начальной школе умножение отрицательных чисел (с. 22). Не слишком убедителен и естествен пример на умножение векторов (с. 27): из того, что та или иная задача является «сводящейся по сути дела» к действиям с векторами, ещё не следует, что подобное осмысление должно происходить в младших классах. Нуждается в более подробном обосновании стремление к интуитивной интерполяции и интуитивной экстраполяции (соединение прямой точек графика линейной функции на с. 21; чисто эмпирическое заключение о постоянстве вторых разностей функции $y = x^2$ на с. 22).

Однако всё это мелочи по сравнению с главным. Необходимость потеснить «чистую» арифметику в пользу задач с большей идейной (в математическом смысле) нагрузкой, — прежде всего, в пользу задач логико-комбинаторного характера, — несомненна. А самое главное, не может подвергаться сомнению основное положение статьи Н. Я. Виленкина — неотложная нужда в экспериментальном преподавании по новым программам; подчеркнём, что цель эксперимента в данном случае — не проверка новейших методов преподавания (будь то программированное обучение или рассмотрение под новым углом зрения процесса сложения двух чисел), а, прежде всего, рациональный отбор материала для изложения в начальной школе[13]. Слишком возросла роль математики в жизни общества и слишком велика роль начальных классов в математическом образовании, чтобы можно было терпеть дальше нынешнее

[10] См.: Математическое просвещение. — Вып. 6. — М.: Физматгиз, 1961. — С. 6 и 29—36.

[11] *Б. В. Гнеденко.* Роль математики в развитии техники и производства // Математика в школе. — 1962. — № 1. — С. 32.

[12] Упомянутая в сноске [9] статья, с. 11.

[13] Показательно в этой связи само название упомянутой в сноске [2] статьи Н. А. Менчинской и М. И. Моро. Предлагаемые в этой статье изменения естественны и не вызывают сами по себе каких-либо возражений, однако они совершенно недостаточны.

положение вещей. Толчком к обновлению послужило бы и немедленное переименование предмета «арифметика» в начальной школе в предмет «математика».

Примечания

1 [к с. 365]. ●➤ Эпизод с шариком на наклонной плоскости достоин того, чтобы воспроизвести соответствующую цитату из книги Потоцкого:

> Здесь стоит привести один пример, ярко характеризующий взаимоотношения, в которые иногда вступают в представлении учащихся жизнь, физика и математика. Этот случай рассказал П. К. [Пётр Кронидович] Шмулевич [1872—1943], автор различных учебников и задачников для средней школы и для подготовки к экзаменам в высшую. В предисловии к своему «Сборнику задач», предлагавшихся на выпускных экзаменах в средних учебных заведениях (ч. 1, «Алгебра», 1917), он рассказывает следующий случай. Его школьный товарищ, в общем неглупый ученик, не приготовил урока по физике. Однако, на его несчастье, учитель вызвал его к доске. Произошёл следующий диалог. Учитель. Что вам было задано? Ученик. Наклонная плоскость. Учитель. Начертите наклонную плоскость. (Ученик чертит.) Учитель. Ну, что же дальше? (Молчание.) Учитель. Положите на неё шарик. (Ученик чертит.) Учитель. Ну, что же с ним будет? (Ученик снова молчит.) Учитель. Ну, представьте себе, что вы положили на наклонную плоскость тяжёлый шарик. Что с ним будет? Ученик (предварительно помолчав). Шарик покатится вверх! Под общий громовой хохот учитель сажает ученика на место. П. К. Шмулевича, как он пишет, заинтересовал этот ответ с другой стороны. Почему тот неглупый ученик дал такой странный ответ, ведь знал же он, что шарик вверх не покатится? И тут же на перемене он поинтересовался: «В чём дело?». Ученик, видя к себе участие, откровенно ответил: «Я знаю, что если я положу шар на уклон, то он, конечно, скатится вниз. Но ведь *у них в физике и математике всё наоборот*. Может у них и шар пойдёт вверх. А иначе, чего же он меня спрашивает?». Самое же интересное было то, что с этим согласились и многие их товарищи по классу.
>
> Хотя этот пример относится к давнему прошлому, и методика преподавания далеко шагнула вперёд, но какую-то долю и теперешних взглядов некоторых учащихся на обучение этот рассказ всё же содержит. ◄●

Что значит решить задачу?

§ 1. Задача из VIII олимпиады. — § 2. Что значит решить задачу.

§ 1. Задача из VIII олимпиады

На VIII Московской математической олимпиаде (1945 года) её участникам из 9-х и 10-х классов была предложена следующая задача[1]:

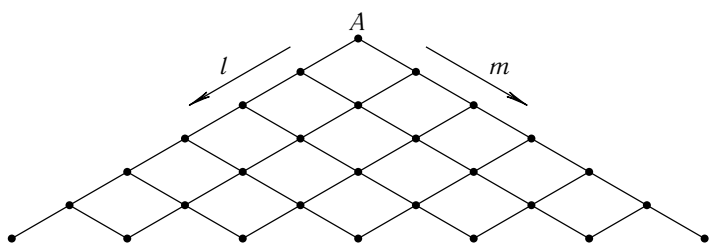


Рис. 1

Имеется сеть дорог (рис. 1). Из точки A выходят 2^{1000} человек. Половина идёт по направлению l, половина — по направлению m. Дойдя до первого перекрёстка, каждая группа разделяется: половина идёт по направлению l, половина — по направлению m. Такое же разделение происходит на каждом перекрёстке. Сколько людей придёт в каждый из перекрёстков тысячного ряда[2]?

Статья представляет собою первые два параграфа брошюры: *В. А. Успенский*. Треугольник Паскаля. — М.: Физматлит, 1966. — (Популярные лекции по математике; Вып. 43).

[1] См. *А. М. Яглом* и *И. М. Яглом*. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М.: Гостехиздат, 1954. — С. 10: «Номера задач, предлагавшихся на Московских математических олимпиадах», задача 60б.

[2] Имеется в виду, что ряды перекрёстков занумерованы, начиная с нулевого, так что в нулевом ряду — один перекрёсток (A), в первом — два, во втором — три и т. д.

Заметим, прежде всего, что мы пока не знаем, имеет ли задача решение, т. е. может ли движение людей происходить так, как требуется условием задачи. Ведь если на какой-то перекрёсток, на котором предстоит очередное деление людского потока пополам, придёт нечётное число людей, то движение застопорится. Следовательно, чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы в каждый перекрёсток любого из первых тысячи рядов, от нулевого до девятьсот девяносто девятого, пришло чётное число людей. Мы убедимся, что это так, решая задачу.

Начнём с того, что введём обозначения для количеств людей, прошедших через каждый перекрёсток нашей сети дорог. Будем нумеровать перекрёстки каждого ряда слева направо, начиная с нулевого; перекрёстки n-го ряда, следовательно, будут нумероваться от 0-го до n-го. Число людей, прошедших через k-й перекрёсток n-го ряда обозначим H_n^k. Поскольку пока ещё не известно, имеет ли задача решение, мы не можем быть уверены, что *все* числа H_n^k существуют, т. е. что существует каждое из чисел H_n^k при любом n от 0 до 1000 и при любом k от 0 до n. Некоторые из них, во всяком случае, существуют. Так, в силу введённых обозначений

$$H_0^0 = 2^{1000}. \tag{1.1}$$

Посмотрим теперь, как связаны между собой числа H_n^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) и H_{n+1}^k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$) при условии, что все они существуют. Изучая эту связь, мы сможем затем установить, что все числа H_n^k при $n \leqslant 1000$ действительно существуют. Рассмотрим n-й и $(n+1)$-й ряды перекрёстков и соединяющие их участки дорог; против каждого перекрёстка поставим обозначение соответствующего числа людей (см. рис. 2).

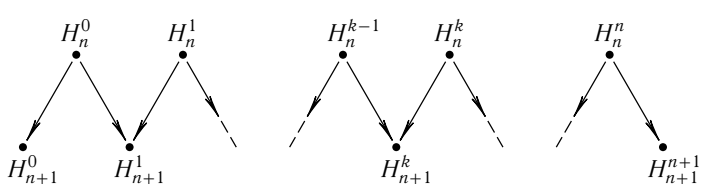


Рис. 2

Количество людей, вышедших из 0-го перекрёстка n-го ряда (т. е. H_n^0), разделится пополам и одна половина придёт в 0-й перекрёсток $(n+1)$-го ряда; поэтому

$$H_{n+1}^0 = \frac{H_n^0}{2}. \tag{1.2}$$

Другая половина от H_n^0 придёт в 1-й перекрёсток $(n+1)$-го ряда и там соединится с половиной людей, вышедших из 1-го перекрёстка n-го ряда, т.е. с половиной от H_n^1. Поэтому $H_{n+1}^1 = \frac{H_n^0 + H_n^1}{2}$. И вообще, количество людей, пришедших на k-й перекрёсток $(n+1)$-го ряда, слагается из половины количества людей, вышедших из $(k-1)$-го перекрёстка n-го ряда $\left(\text{эта половина равна } \frac{H_n^{k-1}}{2}\right)$, и половины количества людей, вышедших из k-го перекрёстка n-го ряда (эта половина равна $\frac{H_n^k}{2}\Big)$. Таким образом,

$$H_{n+1}^k = \frac{H_n^{k-1} + H_n^k}{2} \quad \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.3}$$

Наконец, число людей, пришедших на $(n+1)$-й перекрёсток $(n+1)$-го ряда, равно половине числа людей вышедших из n-го перекрёстка n-го ряда:

$$H_{n+1}^{n+1} = \frac{H_n^n}{2}. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.1)—(1.4) позволяют установить, что задача действительно имеет решение. В самом деле, из равенств (1.2)—(1.4) вытекает, что если при каком-либо фиксированном n все числа n-го ряда: H_n^0, H_n^1, ..., H_n^n — существуют и делятся на $2a$, то числа $(n+1)$-го ряда: H_{n+1}^0, H_{n+1}^1, ..., H_{n+1}^{n+1} — существуют и делятся на a. Поэтому, поскольку все числа 0-го ряда (а их всего одно — H_0^0) существуют и делятся на 2^{1000} (в силу (1.1)), то все числа первого ряда

$$H_1^0, \quad H_1^1$$

существуют и делятся на 2^{999}; все числа второго ряда

$$H_2^0, \quad H_2^1, \quad H_2^2$$

существуют и делятся на 2^{998}, ...; все числа 999-го ряда

$$H_{999}^0, \quad H_{999}^1, \quad \ldots, \quad H_{999}^{999}$$

существуют и делятся на 2; все числа 1000-го ряда

$$H_{1000}^0, \quad H_{1000}^1, \quad \ldots, \quad H_{1000}^{1000}$$

существуют (и делятся на 1).

Соотношения (1.2)—(1.4) не только доказывают существование решения задачи, но и показывают, как из строчки чисел

$$H_n^0, \quad H_n^1, \quad \ldots, \quad H_n^n$$

получается строчка

$$H_{n+1}^0, \quad H_{n+1}^1, \quad \ldots, \quad H_{n+1}^{n+1}.$$

Применяя последовательно эти соотношения, начиная с нулевой строки (т. е. используя соотношение (1.1)), мы в принципе можем вычислить значения H_n^k для всех 501 501 перекрёстков, содержащихся в рядах до тысячного включительно, в частности, для всех перекрёстков тысячного ряда, и тем самым решить задачу. Так, для первых рядов непосредственным вычислением находим:

$$H_1^0 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999}; \quad H_1^1 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999};$$

$$H_2^0 = \frac{H_1^0}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998}; \quad H_2^1 = \frac{H_1^0 + H_1^1}{2} = \frac{2^{999} + 2^{999}}{2} = 2^{999}; \quad H_2^2 = \frac{H_1^1}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998};$$

$$H_0^3 = \frac{H_2^0}{2} = \frac{2^{998}}{2} = 2^{997}; \quad H_3^1 = \frac{H_2^0 + H_2^1}{2} = \frac{2^{998} + 2^{999}}{2} = 3 \cdot 2^{997} \quad \text{и т. д.}$$

§ 2. Что значит решить задачу

Итак, задача из § 1 решена...

«Как решена? — удивится неискушённый читатель (искушённый знает наперёд, что скажет автор, и ничему не удивляется). — Я не заметил, чтоб мы её решили».

Автор. Ну, конечно, решили. Ведь решить задачу — значит найти её решение. Вот мы и нашли решение.

Читатель (*возмущённо*). Разве ж это решение?

Автор (*притворяясь, что не понимает, в чём дело*). А что, разве оно неверно?

Читатель. Нет, «оно» верно, но «ОНО» вообще не решение.

Автор. А что же такое решение?

Читатель. Строчка чисел, показывающих, сколько человек придёт в перекрёстки тысячного ряда.

Автор. Но в этой строчке должно быть 1001 число. Неужели устроители VIII олимпиады надеялись, что кто-нибудь напишет 1001 число?

Читатель (*задумывается*).

Автор. У меня есть предложение. Давайте, чтобы не осложнять ситуацию длинными строчками, выберем какой-нибудь перекрёсток и будем интересоваться числом побывавших в нём людей. Согласны?

Читатель (*соглашается*).

Автор. Так вот — что́ считать решением следующей задачи: сколько людей побывает в третьем перекрёстке четвёртого ряда?

Читатель. Как что? Число.

Автор. Как записанное?

Читатель (*удивлённо*). Ну, в десятичной системе.

Автор. А такой ответ: «H_4^3» — не будет решением?

Читатель. Конечно, нет. Какое же это решение?!

Автор. Продолжив цепочку вычислений, начатую в конце предыдущего параграфа, легко убедиться, что в 3-м перекрёстке 4-го ряда побывает 2^{998} человек. Ответ «2^{998}» будет решением задачи?

Читатель (*ещё не видя подвоха*). Да, конечно.

Автор. Но ведь выражение «2^{998}» не есть запись числа в десятичной системе счисления. Это выражение состоит из двух десятичных записей чисел, «2» и «998», относительное расположение которых показывает, какую операцию следует произвести с этими числами, чтобы получить нужное значение.

Читатель. Но выражение «2^{998}» легко превратить в десятичную запись.

Автор (*назидательно*). Не так-то легко. Попробуйте-ка возвести 2 в 998-ю степень. Но дело даже не в этом, а в том, что Вы противоречите сейчас своим прежним заявлениям. Вы ведь сами соглашались считать решением лишь число, записанное в десятичной системе. С точки зрения этого определения, выражение «2^{998}» ещё не является решением (это, так сказать, «полуфабрикат», из которого решение должно быть изготовлено). Такая точка зрения, конечно, возможна, если только её последовательно проводить. Но возможна и другая точка зрения, согласно которой 2^{998} — решение. Такая точка зрения Вам вероятно, будет больше импонировать — ведь довольно часто ответы на те или иные математические задачи даются не прямо в виде чисел, записанных в десятичной системе, а в аналогичной «косвенной» форме. Но всё же на каком понимании термина «решение» надлежит остановиться в нашем случае — для задачи о 3-м перекрёстке 4-го ряда?

Читатель. В нашем случае решением надо считать всякое выражение, обозначающее какое-то число, для которого (выражения, а не числа) есть способ, позволяющий перейти от этого выражения к десятичной записи соответствующего числа. 2^{998} будет именно таким

выражением. Способ перехода к десятичной записи (997 последовательных умножений) хотя и долгий, но в принципе осуществимый.

Автор. А почему тогда H_4^3 не решение? Здесь тоже есть способ перехода к десятичной записи. Он задаётся соотношениями (1.1)—(1.4).

Читатель (*растерян*).

Автор (*доволен, что ему удалось загнать читателя в тупик, — неискушённого читателя, конечно; искушённый сам загонит автора в тупик*). Дело в том, что возможны по крайней мере три понимания того, что такое решение задачи о числе людей, побывавших на данном перекрёстке:

Первое понимание. Решением считается число, записанное в десятичной системе счисления.

Второе понимание. Решением считается такое обозначающее число выражение, для которого известен способ, позволяющий перейти от этого выражения к десятичной записи обозначенного им числа (т. е. к решению в первом понимании).

Третье понимание. Решением считается такое обозначающее число выражение, которое составлено из чисел (записанных в десятичной системе) и некоторых операций, считающихся стандартными (например, арифметических действий)[3]. Потребуем, чтобы каждая стандартная операция сопровождалась способом, позволяющим переходить от десятичных записей чисел, к которым она применяется, к десятичной записи результата (именно таковы, например, арифметические действия). Тогда и для всего выражения в целом будет существовать способ, позволяющий перейти от десятичных записей участвующих в нём чисел к десятичной записи обозначаемого этим выражением числа, — так что решение в третьем понимании автоматически будет решением во втором понимании.

При первом понимании ни H_4^3 ни 2^{998} не являются решением задачи о третьем перекрёстке четвёртого ряда. Чтобы получить решение, надо найти для 2^{998} десятичную запись; эта запись, однако, должна содержать свыше 300 знаков.

При втором понимании и H_4^3 и 2^{998} будут решениями.

Что же касается третьего понимания, то здесь всё зависит от выбора исходных стандартных операций: если в их число включается возведение в степень, то 2^{998} будет решением, если же не включа-

[3] Набор стандартных операций должен быть указан заранее. Полезно подчеркнуть, что третье понимание зависит от выбора этого набора. Так, выражение 2^{998} будет служить решением при третьем понимании, только если в число стандартных операций включено возведение в степень.

ется, то не будет. Точно так же, если включить в число стандартных операций операцию «аш», вычисляющую по n и k число H_n^k (а способ такого вычисления задают соотношения (1.1)—(1.4), так что требование, наложенное нами на стандартные операции, здесь выполнено), то H_4^3 будет решением задачи; в противном случае — не будет.

Возникает вопрос, произвольно ли мы можем выбирать стандартные операции. Формально говоря, да. А неформально, конечно, в качестве стандартных операций — через которые нужно выражать решение любой задачи! — следует выбирать такие операции, которые встречаются при решении многих задач или, если уж не многих, то важных. Именно таковы четыре арифметических действия и некоторые другие операции, например, операция возведения в степень и операция взятия факториала. Если бы операция «аш» была нужна для разных задач или если бы сама наша задача о перекрёстках была очень важной, то операцию «аш», пожалуй, стоило бы отнести к числу стандартных. Однако операция «аш» пока этого не заслужила и вряд ли заслужит.

А сейчас вернёмся к нашей первоначальной задаче о перекрёстках тысячного ряда. Её решение можно искать в трёх разных видах, соответствующих трём изложенным выше пониманиям слова «решение»:

1) в виде строчки из 1001 числа, записанного в десятичной системе; не будем искать решение в таком виде (куда уж нам, когда мы для одного перекрёстка четвёртого ряда и то не можем найти решение в такой форме);

2) в виде выражения, позволяющего в принципе для каждого перекрёстка тысячного ряда вычислить число (т. е. найти десятичную запись числа) пришедших в него людей; такое решение мы уже нашли: H_{1000}^k, причём процесс вычисления задаётся равенствами (1.1)—(1.4);

3) в виде выражения, не только позволяющего вычислять H_{1000}^k при любом k от 0 до 1000, но образованного с помощью некоторых стандартных операций; в таком виде мы и будем пытаться найти решение; какие именно операции при этом будут считаться стандартными, станет ясным из дальнейшего изложения.

Интуиционистская логика в трудах А. Н. Колмогорова

Предварение

При публикации в 1965 году своих «Избранных трудов» Колмогоров снабдил каждую группу своих работ, посвящённую определённой тематике, кратким комментарием. Для более подробного комментария редколлегией был назначен специальный комментатор, согласованный с Колмогоровым. Комментировать их было поручено мне, а я попросил разрешения взять в соавторы своего ученика. Ниже, в рамках настоящего Предварения, приводится комментарий А. Н. Колмогорова. Работ по интуиционистской логике у Колмогорова было две: ПТНД и ТИЛ (соответственно, [9] и [10] по списку литературы в конце настоящей статьи на с. 388 этой книги).

К работам по интуиционистской логике

Работа [9] (ПТНД) мыслилась мной как вводная часть более широкого замысла. Построение в рамках интуиционистской математики моделей различных разделов классической математики должно было служить для обоснования их непротиворечивости (непротиворечивость интуиционистской математики при этом считалась следствием её интуитивной убедительности). Для обоснования непротиворечивости классической логики высказываний такой путь, конечно, излишен, но предполагалось, что метод окажется применимым и к обоснованию непротиворечивости классической арифметики (ср. работу Гёделя [29] 1933 года).

Работа [10] (ТИЛ) писалась в надежде на то, что логика решения задач сделается со временем постоянным разделом курса

Под названием «Интуиционистская логика» опубликовано в качестве комментария к циклу работ А. Н. Колмогорова по интуиционистской логике в книге: *А. Н. Колмогоров*. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1965. — С. 394—404. Повторная публикация в книге: *А. Н. Колмогоров*. Избранные труды: В 6 т. — Т. 1. — М.: Наука, 2005. — С. 435—444. (Соавтор: Валерий Егорович Плиско.)

логики. Предполагалось создание единого логического аппарата, имеющего дело с объектами двух типов — высказываниями и задачами.

А. Н. Колмогоров ◀●

Обе логико-математические работы А. Н. Колмогорова — «О принципе tertium non datur»[1] [9] и «К толкованию интуиционистской логики» [10] (в дальнейшем будем обозначать их ПТНД и ТИЛ) — посвящены интуиционистской логике. Они были написаны в то время, когда изучение неклассических логических систем только начиналось. Многие вопросы, впервые рассмотренные в этих работах, впоследствии были исследованы другими авторами. Известный специалист в области математической логики Ван Хао в своём предисловии [42] к английскому переводу ПТНД в [30] пишет: «Эта статья в большой степени предвосхитила не только гейтингову формализацию интуиционистской логики, но и результаты о переводимости классической математики в интуиционистскую. Она устанавливает важную связь между интуиционизмом и другими исследованиями по основаниям математики». В предисловии к хрестоматии [30] её составитель отмечает, что ПТНД представляет собой первое систематическое исследование интуиционистской логики.

Цель настоящего комментария — проследить развитие идей, выдвинутых А. Н. Колмогоровым в его логико-математических работах.

Текст статьи ПТНД перепечатывается в настоящем издании без существенных изменений (исправлены только замеченные опечатки). Статья ТИЛ переведена для этого издания с немецкого. При переводе несколько изменена запись логических формул: вместо принятой в оригинале точечной системы записи (см. [24], § 11), ныне редко употребляемой, используется более привычная для современного читателя скобочная система. Эта же скобочная система принята и в ПТНД, и в настоящем комментарии.

При записи пропозициональных формул мы придерживаемся символики, которая использована в ТИЛ. Она несколько отличается от символики, принятой в ПТНД. Именно мы пишем $\supset$ вместо $\rightarrow$ для обозначения импликации, $\neg A$ вместо $\overline{A}$ для обозначения отрицания; в качестве пропозициональных переменных мы используем строчные латинские буквы (в ПТНД используются прописные буквы). Квантор всеобщности в ПТНД и ТИЛ записывается в виде (x), а квантор

[1] Tertium non datur (лат.) — третьего не дано.

существования в ПТНД — в виде (Ex) (в ТИЛ квантор существования не встречается); мы пользуемся современными формами записи: $\forall x$ и $\exists x$.

I

Интуиционистское направление в математике (называемое в ПТНД «интуитивистским») возникло в начале XX века благодаря работам Брауэра, Вейля и др. Философские и методологические предпосылки интуиционизма изложены, например, в книге Гейтинга [3], где, в частности, говорится:

> К интуиционистам мы относим тех математиков, которые принимают следующие два принципа:
>
> 1. Математика обладает не только чисто формальным, но и содержательным значением.
>
> 2. Математические предметы непосредственно постигаются мыслящим духом; следовательно, математическое познание не зависит от опыта.

Первый принцип противопоставляет интуиционизм формалистской точке зрения, принятой в качестве рабочего методологического принципа гильбертовой школой обоснования математики. Как отмечается в ПТНД, гл. I, формалистская (называемая в ПТНД «формальной») точка зрения на математику утверждает, что математика представляет собой совокупность предложений определённого формализованного языка, выводимых из некоторой системы аксиом, причём выбор аксиом произволен и подчиняется лишь более или менее условным соображениям практического удобства, а также обязательному требованию непротиворечивости. Вопрос об истинности или ложности математических суждений с формалистской точки зрения не имеет смысла. Можно говорить лишь об их доказуемости или опровержимости на основе аксиом.

Таким образом, первый из перечисленных принципов интуиционизма признаёт за математикой существование предмета её исследования, однако второй принцип объясняет его исключительно продуктом мышления, отрицая какой бы то ни было объективный, независимый от мышления характер математических предметов.

Отвергая связь истинности математических суждений с опытом, в качестве единственного критерия истинности в математике Брауэр провозглашает интуицию. При этом, как указывает Гейтинг [3], с. 20, брауэровскую интуицию не следует понимать в каком-то «мистическом» смысле. Речь идёт лишь о том, что согласно концепции

Брауэра математические объекты рождены человеческой мыслью и потому истинность суждений о них полностью определяется представлениями (об этих объектах) того математика, в сознании которого сложились эти объекты. Строго говоря, с точки зрения интуиционизма сколько математиков — столько и математик. Однако в силу каких-то общих свойств человеческого мышления возможно образование в сознании разных людей сходных математических понятий. К ним относится, например, понятие натурального числа. Отправляясь от этого понятия, на основе интуиционистских представлений может быть развита своеобразная математическая теория.

Исходные философские предпосылки интуиционизма оказались неприемлемыми для значительной части математиков и были подвергнуты обоснованной критике. Так, А. Н. Колмогоров в предисловии к книге [3] пишет: «Мы не можем согласиться, что математические объекты являются продуктом конструктивной деятельности нашего духа. Для нас математические объекты являются абстракциями реально существующих форм независимой от нашего духа действительности». Однако и интуиционистская критика классической теоретико-множественной математики оказалась весьма плодотворной для математики в целом, так как привлекла внимание к проблемам конструктивного образования абстрактных математических понятий и к вопросу о границах применимости классической логики.

С точки зрения интуиционизма как конструирование математических объектов, так и рассуждения о них должны подчиняться критерию интуитивной ясности и убедительности. Касаясь отношений между математикой и логикой, Гейтинг [3], с. 22 указывает, что в интуиционистской математике умозаключения не производятся по заранее установленным правилам (как в формалистской концепции Гильберта), т. е. не фиксируется какая-либо априорная логическая система. Убедительность каждого логического шага должна проверяться непосредственно в соответствии с интуицией. Это, однако, не исключает существования общих правил, по которым из одних истинных математических предложений интуитивно ясным путём получаются другие истинные математические предложения. Таким образом, имеет смысл говорить об интуиционистской логике как о совокупности интуитивно приемлемых способов математических умозаключений. Основоположник интуиционизма Брауэр предпринял анализ принципов аристотелевой логики и пришёл к выводу, что применимость закона исключённого третьего (tertium non datur), выражаемого логической формулой $a \vee \neg a$, не во всех случаях можно считать очевидной.

II

В работе ПТНД впервые предпринимается попытка построения формальной логической системы, которая содержала бы только интуиционистски приемлемые законы логики высказываний. С этой целью подвергается критическому анализу система аксиом классической логики, предложенная Гильбертом. В результате формулируется следующая система аксиом интуиционистской логики, обозначаемая $\mathfrak{B}$:

1. $a \supset (b \supset a)$;
2. $(a \supset (a \supset b)) \supset (a \supset b)$;
3. $(a \supset (b \supset c)) \supset (b \supset (a \supset c))$;
4. $(b \supset c) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$;
5. $(a \supset b) \supset ((a \supset \neg b) \supset \neg a)$.

Другие законы логики высказываний разрешается получать из этих аксиом с помощью правила подстановки и правила заключения, оно же правило «модус поненс», позволяющего от формул $A \supset B$ и A перейти к формуле B.

Система $\mathfrak{B}$ (как и рассматриваемая в ПТНД гильбертова система аксиом для классической логики высказываний) содержит логические законы, касающиеся импликации и отрицания, в то время как, скажем, дизъюнкция и конъюнкция остаются вне поля зрения. В этом заключается некоторая ограниченность предлагаемой системы. Однако заметим, что связки $\supset$ и $\neg$ выражают наиболее важные с логической точки зрения отношение следования и операцию отрицания, а дополнительные аксиомы, разъясняющие смысл конъюнкции и дизъюнкции (например, упоминаемые в ПТНД аксиомы Аккермана для дизъюнкции), могут быть без изменений перенесены из классической логики в интуиционистскую. Кроме того, именно ограниченность системы $\mathfrak{B}$ делает результаты о возможности погружения в неё классической логики особенно сильными.

Пополненная естественными логическими законами для дизъюнкции и конъюнкции система $\mathfrak{B}$ превращается в так называемое минимальное исчисление. Это исчисление и термин «минимальное» были введены Иогансоном [33]. Чёрч [24], § 26 называет минимальное исчисление «минимальным пропозициональным исчислением Колмогорова и Иогансона». Оправданием такой терминологии служит не только основополагающая роль А. Н. Колмогорова в формировании минимального исчисления, но и следующий факт: всякая формула, выводимая в минимальном исчислении и содержащая лишь знаки импликации и отрицания, выводима и в колмогоровской системе $\mathfrak{B}$.

В § 3 главы V работы ПТНД рассматриваются интуитивно очевидные предикатные аксиомы:

1. $\forall x\,(A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x\, A(x) \supset \forall x\, B(x))$;
2. $\forall x\,(A \supset B(x)) \supset (A \supset \forall x\, B(x))$;
3. $\forall x\,(A(x) \supset C) \supset (\exists x\, A(x) \supset C)$;
4. $A(x) \supset \exists x\, A(x)$

и правило вывода P, позволяющее от формулы A перейти к формуле $\forall x\, A$. После присоединения этих аксиом и правила P к системе $\mathfrak{B}$ возникает некоторый вариант интуиционистского исчисления предикатов. Аналогичным путём из минимального пропозиционального исчисления получается минимальное исчисление предикатов.

Таким образом, система $\mathfrak{B}$, введённая в работе ПТНД, является первой аксиоматизацией интуиционистской логики высказываний, а её предикатное расширение — первой аксиоматизацией интуиционистской логики предикатов. Позднее другие системы интуиционистской логики (с более широким запасом вводимых формул) были предложены Гливенко [28], Гейтингом [31], Генценом [27]. Все они оказались эквивалентными в том смысле, что в них выводимы одни и те же логические принципы. Особенностью системы $\mathfrak{B}$ и минимального исчисления, отличающей их от системы Гейтинга и эквивалентных ей систем, является неприятие логического принципа $\neg a \supset (a \supset b)$.

По мнению А. Н. Колмогорова, эта формула не имеет интуитивных оснований, «как утверждающая нечто о последствиях невозможного: мы обязаны признать B, если признали ложным истинное суждение A» (ПТНД, гл. II, § 4).

Невозможно доказать адекватность представления интуиционистской логики посредством какой-нибудь системы аксиом, если сама эта логика не имеет точной семантики. Всё же, независимо от каких-либо семантических уточнений, наибольшее признание получила система аксиом, предложенная Гейтингом (как и в ТИЛ, мы сохраняем нумерацию аксиом, назначенную Гейтингом [31]):

2.1. $a \supset a \wedge a$;
2.11. $a \wedge b \supset b \wedge a$;
2.12. $(a \supset b) \supset (a \wedge c \supset b \wedge c)$;
2.13. $(a \supset b) \wedge (b \supset c) \supset (a \supset c)$;
2.14. $b \supset (a \supset b)$;
2.15. $a \wedge (a \supset b) \supset b$;

3.1. $a \supset a \vee b$;

3.11. $a \vee b \supset b \vee a$;

3.12. $(a \supset c) \wedge (b \supset c) \supset (a \vee b \supset c)$;

4.1. $\neg a \supset (a \supset b)$;

4.11. $(a \supset b) \wedge (a \supset \neg b) \supset \neg a$.

Эта и эквивалентные ей системы и получили в дальнейшем название интуиционистского исчисления высказываний. Были найдены разрешающие процедуры для этого исчисления, т. е. алгоритмы, позволяющие для произвольной формулы установить, выводима ли она в этом исчислении (Генцен [27], Яськовский [32], Пильчак [15], [16], Воробьёв [2] и др.). Обнаружены алгебраические и топологические интерпретации интуиционистской логики высказываний, естественным образом обобщающие интерпретации классической логики посредством булевых алгебр (Стоун [40], Тарский [41], Маккинси и Тарский [36], [37], Расёва [38]). Наиболее близкой к собственно логическому содержанию интуиционистского исчисления высказываний (и исчисления предикатов) оказалась семантика этого исчисления, предложенная Крипке [35]. Детальное изложение различных интерпретаций интуиционистской логики содержится в книгах [5], [20].

III

Выше мы отмечали, ссылаясь на Гейтинга [3], что фиксирование интуиционистской логики в виде какой-либо системы аксиом не имеет принципиального значения для интуиционизма. Однако построение такой системы позволяет сделать интуиционистскую логику предметом математического исследования, уже не зависящего от методологических принципов интуиционизма. После того как интуиционистское исчисление высказываний явно сформулировано, сам термин «интуиционистское» свидетельствует лишь об истории его возникновения и не должен вводить в заблуждение при оценке подлинной сущности этого исчисления как логико-математического объекта.

Таким образом, систему $\mathfrak{B}$ из работы ПТНД можно характеризовать как подсистему интуиционистского исчисления высказываний и одновременно как импликативно-негативный фрагмент минимального исчисления Иогансона. Именно в таком контексте основные результаты этой работы и формулируются в книге Чёрча [24]. А именно результаты главы III из ПТНД сформулированы в [24] (упражнение 26.20) следующим образом: если в некоторой теореме

классического исчисления высказываний, в которой нет связок, отличных от импликации и отрицания, заменить все вхождения каждой переменной на её двойное отрицание, то получающаяся формула будет теоремой минимального исчисления. Результаты главы IV из ПТНД в несколько обобщённой форме сформулированы в [24] (упражнение 38.12) так. Для каждой формулы A исчисления предикатов следующим образом определим формулу A^* («перевод» формулы A): если A есть элементарная формула, то A^* есть $\neg\neg A$; $(A \wedge B)^*$ есть $\neg\neg(A^* \wedge B^*)$; $(A \vee B)^*$ есть $\neg\neg(A^* \vee B^*)$; $(A \supset B)^*$ есть $\neg\neg(A^* \supset B^*)$; $(\neg A)^*$ есть $\neg A^*$; если A есть $\forall x\, B$, то A^* есть $\neg\neg\forall x\, B^*$; если A есть $\exists x\, B$, то A^* есть $\neg\neg\exists x\, B^*$. Формула A является теоремой классического исчисления предикатов тогда и только тогда, когда A^* есть теорема минимального исчисления предикатов.

В действительности в работе ПТНД «перевод» классических теорем на язык интуиционистской системы осуществляется не только для логических формул. По существу там намечена схема получения для широкого класса математических теорий следующего метаматематического результата: если в некоторой классической теории с использованием закона исключённого третьего или эквивалентных ему принципов доказано некоторое утверждение, то некоторое равносильное ему (с классической точки зрения) утверждение может быть доказано и без закона исключённого третьего, а именно в рамках минимальной логики. В частности, если в некоторой теории с помощью закона исключённого третьего получено противоречие, то противоречивое суждение может быть доказано и без использования этого закона. Таким образом, использование закона исключённого третьего нельзя считать подлинной причиной противоречий в классической математике, в частности причиной теоретико-множественных антиномий.

Результаты работы ПТНД можно резюмировать и таким образом. Пусть аксиомы математической теории таковы, что описанные выше их «переводы» признаны истинными с интуиционистской точки зрения. Тогда перевод всякой теоремы этой теории также должен быть признан истинным с интуиционистской точки зрения. Этот вывод имеет принципиальное значение. Он показывает, что та часть классической математики, которая имеет дело только с интуиционистски допустимыми объектами (например, арифметика), может быть истолкована интуиционистски с полным сохранением её классического содержания. Таким образом, ограничение интуиционистской логикой не является существенным, и различие интуиционистской и классической математики проявляется главным образом в способах образования абстрактных математических понятий.

Погружение классических логических и логико-математических теорий в соответствующие теории, основанные на интуиционистской логике, стало в дальнейшем важным инструментом исследования интуиционистских теорий, ибо оно часто позволяет без лишних усилий перенести результаты, полученные при исследовании классических теорий, на интуиционистские. Шаниным [25] проведено детальное исследование различных погружений классической арифметики в интуиционистскую. Им введён термин «погружающая операция» для обозначения такого алгоритма, который по каждому арифметическому предложению A строит другое арифметическое предложение A°, обладающее тем свойством, что A доказуемо в классической арифметике тогда и только тогда, когда A° доказуемо в интуиционистской арифметике.

Таким образом, в работе ПТНД построен исторически первый пример погружающей операции. Несколько позднее сходное погружение классической логики в интуиционистскую было предложено Гёделем [29]. В [25] доказано, что погружающие операции Колмогорова и Гёделя эквивалентны в том смысле, что результаты их применения к любой формуле интуиционистски эквивалентны.

IV

Если в работе ПТНД построена погружающая операция, которая позволяет дать интуиционистское истолкование для значительной части классической математики, то работа ТИЛ посвящена решению в известном смысле обратной задачи: дать толкование интуиционистской логики в рамках обычных математических понятий, независимое от философских и методологических установок интуиционизма. Это удаётся сделать, трактуя логические формулы не как схемы суждений, а как схемы типов задач. При этом общезначимость или «истинность» логической формулы понимается как существование общего метода решения всех задач данного типа. Таким образом, например, «опровергается» закон исключённого третьего: общезначимость формулы $a \wedge \neg a$ означала бы существование общего метода, позволяющего для любой конкретной задачи либо найти её решение, либо привести к противоречию предположение о существовании её решения. Поскольку такой метод вряд ли возможен, формулу $a \wedge \neg a$ нельзя признать общезначимой. В то же время все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, оказываются общезначимыми. Тем самым получена интерпретация этого исчисления в качестве логики задач.

Найденная интерпретация интуиционистской логики имела важное методологическое значение. В рамках хотя и не вполне точных, но всё же понятных любому математику понятий «задачи» и «решения задачи» была обоснована необходимость рассмотрения логических систем, не содержащих закона исключённого третьего. П. С. Новиков указывает в [14], с. 54—55: «В 1932 году Колмогоровым [10] была предложена интересная интерпретация этого [интуиционистского — *В. У., В. П.*] исчисления, не связанная с какими-то новыми специфическими принципами в основаниях математики. Согласно Колмогорову, наряду с традиционной логикой, систематизирующей схемы доказательств теоретических истин, возможна также логика, систематизирующая схемы решения задач (например, геометрических задач на построение). При этом понятия „задачи“ и „решения задачи“ считаются первоначальными».

Новое истолкование интуиционистской логики, свободное от философских установок интуиционизма, сделало осмысленным исследование её как исчисления задач. Характерно, что в 50-е годы сам термин «исчисление задач» употреблялся в советской логико-математической литературе для обозначения интуиционистского исчисления высказываний (см., например, [15], [16]).

Таким образом, в работе ТИЛ изложена в достаточно развёрнутом виде идея истолкования логических формул с помощью задач. Эта идея впоследствии получила различные конкретные воплощения, характеризующиеся выбором того или иного точно очерченного класса задач. Первое математическое развитие идеи А. Н. Колмогорова об истолковании интуиционистской логики как исчисления задач было дано его учеником Ю. Т. Медведевым [12] (см. также [21], § 13.7). Каждая из задач, рассматриваемых Медведевым, является задачей нахождения всюду определённой функции с заданными свойствами. Такие задачи названы в [12] «массовыми проблемами». Массовая проблема называется алгоритмически разрешимой (или просто «разрешимой»), если среди её решений имеется общерекурсивная функция. Центральное место в развиваемой теории занимает понятие сводимости одной массовой проблемы к другой, которое носит алгоритмический характер. Удаётся определить логические операции над массовыми проблемами, отражающие идеи, высказанные А. Н. Колмогоровым. Оказалось, что все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении высказываний, являются схемами алгоритмически разрешимых массовых проблем.

Несколько позднее Медведевым [13] была предложена другая интерпретация логических формул посредством задач. При этом в

качестве ограничения и уточнения понятия задачи использовались так называемые финитные задачи. Финитная задача определяется непустым конечным множеством возможных решений, в котором выделено некоторое (возможно, пустое) подмножество фактических решений. Задаются логические операции над финитными задачами. При этом, например, $A \supset B$ есть финитная задача, возможными решениями которой служат произвольные отображения множества всех возможных решений задачи A в множество возможных решений задачи B, а фактические решения — это те отображения, которые переводят фактические решения задачи A в фактические решения задачи B. Пусть теперь $A(p_1, \ldots, p_n)$ — какая-либо пропозициональная формула с переменными $p_1, \ldots, p_n$. Зафиксируем непустые конечные множества $X_1, \ldots, X_n$ и будем в формулу A вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$ подставлять всевозможные финитные задачи $F_1, \ldots, F_n$, множества возможных решений которых суть множества $X_1, \ldots, X_n$, варьируя множества фактических решений. Формула A называется финитно общезначимой, если при любом выборе множеств $X_1, \ldots, X_n$ всегда найдётся общее фактическое решение у всех задач $A(F_1, \ldots, F_n)$, полученных из формулы A подстановкой указанного вида. Иными словами, пропозициональная формула $A(p_1, \ldots, p_n)$ является финитно общезначимой, если можно указать фактическое решение задачи $A(F_1, \ldots, F_n)$, зная лишь множества возможных решений задач $F_1, \ldots, F_n$

Логика финитных задач оказалась устроенной довольно сложно. Она не совпадает с интуиционистским исчислением высказываний. Например, формула $(\neg a \supset b \vee c) \supset (\neg a \supset b) \vee (\neg a \supset c)$ финитно общезначима, но невыводима в этом исчислении. Неизвестно, является ли эта логика разрешимой. Доказано лишь, что она не может быть задана конечным множеством аксиом (см. [11]).

В последнее время Скворцовым рассматривались некоторые естественные обобщения понятия финитной задачи и соответствующие интерпретации логических формул (см. [22], [23]). Одно обобщение состоит в рассмотрении не только финитных задач, но задач с произвольным множеством возможных и фактических решений. Доказано, что получающаяся при этом логика не совпадает с интуиционистским исчислением высказываний, но может быть задана посредством рекурсивной системы аксиом.

Другое обобщение понятия финитной задачи, введённое Скворцовым [22], связано с рассмотрением задач, возможными и фактическими решениями которых являются натуральные числа, а логические операции носят алгоритмический характер. Так, фактическим реше-

нием задачи $A \supset B$ является всякое натуральное число, которое служит гёделевым номером частично рекурсивной функции, отображающей возможные решения задачи A в возможные решения задачи B, причём фактические решения задачи A отображаются в фактические решения задачи B. Эта интерпретация, называемая рекурсивной общезначимостью, распространяется и на предикатные формулы.

Рассмотренные выше интерпретации логических формул возникли как прямое развитие идей А. Н. Колмогорова, высказанных в работе ТИЛ. Заметим, что интерпретацию формул с помощью задач не следует рассматривать непосредственно как разъяснение интуиционистского смысла формул. Речь идёт как раз о *независимом от интуиционистских представлений* истолковании логических формул, которое приводит к логике без закона исключённого третьего. Однако в § 2 работы ТИЛ А. Н. Колмогоров показывает, что интуиционистский смысл экзистенциального утверждения естественным образом может быть связан с некоторой задачей. С другой стороны, согласно Гейтингу, «математическое высказывание утверждает тот факт, что было выполнено некоторое математическое построение» [4], с. 11, и вопрос об истинности высказывания заключается в существовании такого построения, т. е. имеет экзистенциальный характер. Поэтому идеи исчисления задач оказываются применимыми к истолкованию интуиционистского смысла произвольных математических суждений.

В математически точной форме восходящая к Гейтингу идея трактовки математического предложения как требования некоторого построения была осуществлена Клини по отношению к арифметическим суждениям [34] (см. также [8], [14]). С каждым арифметическим предложением связывается некоторое (возможно, пустое) множество натуральных чисел, называемых реализациями этого предложения. Грубо говоря, реализация кодирует информацию об интуиционистской истинности предложения. Так, элементарное предложение вида $s = t$ имеет реализацию только в случае, когда оно истинно в обычном смысле. Число e является реализацией предложения вида $A \supset B$, если частично рекурсивная функция с гёделевым номером e применима к любой реализации формулы A и переводит её в некоторую реализацию формулы B. Формула называется реализуемой, если существует число, реализующее её. Рекурсивная реализуемость обычно рассматривается как аналог интуиционистской (точнее, конструктивной) истинности. Можно, например, построить предложение вида $\forall x\,(A(x) \wedge \neg A(x))$, которое не будет истинным в этом смысле.

Связь рекурсивной реализуемости с исчислением задач состоит в том, что установление реализуемости арифметического суждения

можно рассматривать как задачу в колмогоровском смысле. (Более явно идея сопоставления каждому арифметическому предложению некоторой задачи осуществлена в предложенном Шаниным [26] алгоритме конструктивной расшифровки математических суждений.) Можно развивать соответствующую логику решения таких задач, рассматривая в качестве общезначимых или реализуемых так логические формулы, которые являются схемами реализуемых арифметических предложений. Возникающая при этом логика высказываний впервые исследовалась Роузом [39]. Им было установлено, что не все реализуемые пропозициональные формулы доказуемы в интуиционистском исчислении высказываний. В дальнейшем логика рекурсивной реализуемости исследовалась в работах [1], [6], [7] и др. Однако до сих пор не получено какой-либо характеризации класса реализуемых пропозициональных формул. В частности, неизвестно, является ли этот класс разрешимым или хотя бы перечислимым.

Наибольший прогресс достигнут в исследовании логики предикатов, основанной на понятии реализуемости. Установлено [19], что эта логика не может быть задана в виде исчисления и даже не является арифметической, т. е. класс всех реализуемых предикатных формул не может быть определён арифметической формулой. Попутно удалось показать [17], что если вместо языка формальной арифметики взять некоторый более богатый язык и определить для него понятие реализуемости, то соответствующий ему класс реализуемых предикатных формул окажется существенно более узким, чем в случае клиниевской реализуемости. Таким образом, семантика предикатных формул оказывается зависящей от исходного логико-математического языка. В работе [18] Плиско, основываясь на идеях рекурсивной реализуемости, предложил понятие абсолютно реализуемой предикатной формулы, не зависящее от какого-либо конкретного языка. Понятие абсолютной реализуемости близко упоминавшемуся выше понятию рекурсивной реализуемости.

V

В заключение обратимся к поставленному в конце § 2 главы II работы ПТНД вопросу о полноте системы аксиом 1—4, выписанных в начале нашего раздела II, для формул без отрицания: всякая ли формула, выводимая в классическом исчислении высказываний и содержащая лишь символы импликации, выводима на основе аксиом 1—4 системы Гильберта? Отрицательный ответ даёт Ван Хао [42], с. 416. А именно формула $((a \supset b) \supset a) \supset a$ выводима в классическом

исчислении высказываний, так как является тавтологией. В то же время она невыводима из аксиом 1—4, так как она невыводима в интуиционистском исчислении высказываний. Действительно, подставив в указанную формулу $\neg a$ вместо переменной b, мы получим формулу, эквивалентную закону двойного отрицания.

Литература

[1] *Варпаховский Ф. Л.* О нереализуемости дизъюнкции нереализуемых формул // ДАН СССР. — 1965. — Т. 161. — № 6. — С. 1257—1258.

[2] *Воробьёв Н. Н.* Новый алгоритм выводимости в конструктивном исчислении высказываний // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 52. — С. 193—225.

[3] *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики: Пер. с нем. — М.—Л.: ОНТИ, 1936.

[4] *Гейтинг А.* Интуиционизм: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965.

[5] *Драгалин А. Г.* Математический интуиционизм: Введение в теорию доказательств. — М.: Наука, 1979.

[6] *Кипнис М. М.* Об одном свойстве пропозициональных формул // ДАН СССР. — 1967. — Т. 174. — № 2. — С. 277—278.

[7] *Кипнис М. М.* О реализациях предикатных формул // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1971. — Т. 20. — С. 40—48.

[8] *Клини С. К.* Введение в метаматематику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1957.

[9] *Колмогоров А. Н.* О принципе tertium non datur // Мат. сб. — 1925. — Т. 32. — С. 646—667. [Англ. пер.: *Kolmogorov A. N.* On the principle of excluded middle // *Heijenoort J. van.* From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879—1931. — Cambridge, 1967. — P. 416—437].

[10] *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Math. Ztschr. — 1932. — Bd. 35. — S. 58—65.

[11] *Максимова Л. Л., Скворцов Д. П., Шехтман В. Б.* Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева // ДАН СССР. — 1979. — Т. 245. — № 5. — С. 1051—1054.

[12] *Медведев Ю. Т.* Степени трудности массовых проблем // ДАН СССР. — 1955. — Т. 104. — № 4. — С. 501—504.

[13] *Медведев Ю. Т.* Финитные задачи // ДАН СССР. — 1962. — Т. 142. — № 5. — С. 1015—1018.

[14] *Новиков П. С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. — М.: Наука, 1977.

[15] *Пильчак Б. Ю.* О проблеме разрешимости для исчисления задач // ДАН СССР. — 1950. — Т. 75. — № 6. — С. 773—776.
[16] *Пильчак Б. Ю.* Об исчислении задач // Укр. мат. журн. — 1952. — Т. 4. — № 2. — С. 174—194.
[17] *Плиско В. Е.* Рекурсивная реализуемость и конструктивная логика предикатов // ДАН СССР. — 1974. — Т. 214. — № 3. — С. 520—523.
[18] *Плиско В. Е.* Некоторые варианты понятия реализуемости для предикатных формул // ДАН СССР. — 1976. — Т. 226. — № 1. — С. 61—64.
[19] *Плиско В. Е.* Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул // Изв. АН СССР. — Сер. мат. — 1977. — Т. 41. — № 3. — С. 483—502.
[20] *Расёва Е.*, *Сикорский Р.* Математика метаматематики. — М.: Наука, 1972.
[21] *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.
[22] *Скворцов Д. П.* Два обобщения понятия финитной задачи // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. — М.: Наука, 1979. — С. 201—240.
[23] *Скворцов Д. П.* Логика бесконечных задач и модели Крипке на атомных полурешётках множеств // ДАН СССР. — 1979. — Т. 245. — № 4. — С. 798—801.
[24] *Чёрч А.* Введение в математическую логику: Пер. с англ. — Т. 1. — М.: ИЛ, 1961.
[25] *Шанин Н. А.* О некоторых логических проблемах арифметики // Тр. МИАН СССР. — 1955. — Т. 43. — С. 1—10.
[26] *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений // Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 52. — С. 226—311.
[27] *Gentzen G.* Untersuchungen über das logische Schließen. I, II // Math. Ztschr. — 1934—1935. — Bd. 39. — S. 176—210, 405—431. [Рус. пер.: *Генцен Г.* Исследование логических выводов // Математическая теория логического вывода. — М.: Наука, 1967. — С. 9—76].
[28] *Glivenko V. I.* Sur quelques points de la logique de M. Brouwer // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. — Sér. 5. — 1929. — V. 15. — P. 183—188.
[29] *Gödel K.* Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie // Ergeb. math. Kolloq. — 1933. — Bd. 4. — S. 34—38.
[30] *Heijenoort J. van.* From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879—1931. — Cambridge, 1967.

[31] *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — Phys.-math. Kl. — 1930. — S. 42—52.
[32] *Jaśkowski S.* Recherches sur le système de la logique intuitioniste // Actes Congrès Intern. Philos. Sci. VI. — (Philos. math. Actual. sci. industr.; V. 393). — 1936. — P. 58—61.
[33] *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compos. math. — 1937. — V. 4. — P. 119—136.
[34] *Kleene S. C.* On the interpretation of intuitionistic number theory // J. Symbol. Log. — 1945. — V. 10. — N. 1. — P. 109—124.
[35] *Kripke S. A.* Semantical analysis of intuitionistic logic. I // Formal systems and recursive functions. — Amsterdam, 1965. — P. 92—129.
[36] *McKinsey J. C. C., Tarski A.* On closed elements in closure algebras // Ann. Math. — 1946. — V. 47. — P. 122—162.
[37] *McKinsey J. C. C., Tarski A.* Some theorems about the sentential calculi on Lewis and Heyting // J. Symbol. Log. — 1948. — V. 13. — N. 1. — P. 1—15.
[38] *Rasiowa H.* Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis // Fund. math. — 1951. — V. 38. — P. 99—126.
[39] *Rose G. F.* Propositional calculus and realizability // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — V. 75. — P. 1—19.
[40] *Stone M. H.* Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics // Časopis pro Pěstování matematiky a fysiky. — 1937. — V. 65. — P. 1—25.
[41] *Tarski A.* Der Aussagenkalkül und die Topologie // Fund. math. — 1938. — V. 31. — P. 103—134.
[42] *Wang Hao.* [The introductory notes to the English translation of [9]] // *Heijenoort J. van.* From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879—1931. — Cambridge, 1967. — P. 414—416.

Предисловие к книге Ю. А. Шихановича «Введение в современную математику»[1]

I

Во взаимоотношениях математики с её приложениями сравнительно недавно наступил глубокий перелом. Раньше можно было более или менее чётко указать пограничные, «прикладные» области математики и глубинные, «чисто теоретические» её недра. Эти недра не имели непосредственного выхода на поверхность, в них осуществлялись свои собственные процессы (конечно, не без влияния периферии). Так, в античные времена математика сносилась с практикой через элементарную геометрию и искусство счёта — в то время как «в глубине» создавались «Начала» Евклида с их дедуктивной организацией геометрии, с геометрическими построениями, с основами теории чисел. В новое время прикладное значение имело исчисление бесконечно малых, для обоснования которого «в недрах» развивалась общая теория множеств и функций, вызвавшая в свою очередь к жизни математическую логику.

В XX веке положение начало меняться. Неевклидовы геометрии, открытые в связи с (казалось бы) чисто умозрительным вопросом о пятом постулате Евклида, оказались теоретическим фундаментом теории относительности. Теория групп стала применяться в физике. Абстрактная теория меры, возникшая из потребности логического уточнения понятий длины, площади и объёма, легла в основу тео-

---

Опубликовано в книге: *Ю. А. Шиханович.* Введение в современную математику (Начальные понятия). — М.: Физматлит, 1965. — С. 5—12. ●●► Перепечатано в книге: *В. А. Успенский.* Апология математики. — 2-е изд., испр. — СПб.: Амфора, 2012. — С. 283—298. ◄●●

[1] Есть некоторая разница между введением в современную математику и современным введением в математику. Последнее словосочетание больше отвечает содержанию книги; а ещё лучше было бы озаглавить её просто «Введение в математику». ●●► Совет был учтён, и в 2005 году издательство «Научный мир» выпустило книгу Ю. А. Шихановича «Введение в математику», которую можно считать переработанным изданием «Введения в современную математику». ◄●●

рии вероятностей, а через неё — и математической статистики. Но подлинный переворот наступил в середине века, когда математические методы стали активно вторгаться в самые различные сферы науки и практики. Оказалось, что математическая логика, которая раньше заботила лишь лиц, специально интересующихся проблемами обоснования, есть не чисто теоретическая, но и прикладная наука, тесно связанная с вычислительной математикой и всей современной кибернетикой. Оказалось, далее, что теоретико-множественная концепция, возникшая первоначально для обоснования исчисления бесконечно малых, располагает столь мощным аппаратом понятий и методов, что может не только служить фундаментом всей современной математики, но и непосредственно употребляться для описания явлений самых различных наук — от биологии до лингвистики.

Всё чаще представители самых различных и прежде далёких от математики областей знания обращаются к математикам с вопросом «Что почитать для начала?», имея при этом в виду вовсе не втузовские учебники по дифференциальному и интегральному исчислению, а именно начальные пособия по теории множеств и языку математической логики. Однако им почти нечего порекомендовать — во всяком случае на русском языке. Нужные сведения не собраны воедино, а разбросаны по разным книгам[2]. Как правило, начальные сведения по теории множеств составляют содержание первых, вспомогательных глав или специальных приложений[3] в руководствах по теории функций, топологии, алгебре и т. п. Такое положение едва ли можно признать нормальным и с точки зрения самой математики, даже если не думать о запросах представителей других наук. Представляется целесообразным поэтому собрать начальные сведения о базисных теоретико-множественных понятиях и элементах математического языка вместе и изложить их отдельно от их использования. Такая задача ставится и выполняется в книге Ю. А. Шихановича.

II

В книге систематически излагаются такие фундаментальные понятия, как ‘множество’, ‘кортеж’, ‘соответствие’, ‘функция’, ‘отноше-

[2] Некоторое исключение, пожалуй, представляет содержащая существенную часть таких сведений переводная книга: *Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон.* Введение в конечную математику / Пер. с английского М. Г. Зайцевой; Под ред. И. М. Яглома. — М.: ИЛ, 1963. — 486 с.

[3] Лучшее из которых — приложение под названием «Простейшие понятия теории множеств» в книге: *П. С. Александров.* Введение в теорию групп. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1951. — С. 109—122.

ние'. Эти понятия, на базе которых и осуществляется, собственно говоря, всё теоретико-множественное построение математики, с полным правом названы в книге «начальными понятиями математики»[4]. Наряду с ними в книге излагаются и элементы математического языка: разбираются понятия переменной, операции над высказываниями и т. д.

Подобная направленность книги делает её весьма актуальной. Действительно, сейчас, как никогда, становится ясным, что математика — это не только совокупность фактов, изложенных в виде теорем, но прежде всего — арсенал методов, и даже ещё прежде того — язык для описания фактов и методов самых разных областей науки и практической деятельности. Именно этим обстоятельством и обусловливается универсальный характер применимости математики — причём применимости её не только к техническим, физическим и другим дисциплинам, требующим часто значительного математического аппарата (и иногда с трудом отделимым от пограничных прикладных областей самой математики), а ко всем отраслям науки (если можно так сказать, к Науке В Целом), да и не только науки[5]. Лингвисту, например, или биологу, по моему убеждению, лишь во вторую очередь нужны математические теоремы, а в первую — математические методы исследований и язык для описания исследуемых явлений.

---

[4] Их можно было бы назвать также «предварительными понятиями математики», поскольку математика не столько посвящена изучению этих понятий, сколько строится на их основе. Именно поэтому для данной книги уместно название «Введение в математику»: ведь, как написано в одном старом учебнике, «предметом для введения в науку обыкновенно назначают *предварительные* о ней *понятия*, т. е. такие понятия, которые не могут войти в состав самой науки, однакож существенно к ней относятся и необходимо ею предполагаются».

●➤ В 1965 году, когда публиковался этот текст, назвать источник цитаты было невозможно: цензура не пропустила бы. На самом же деле приведённая в кавычках фраза открывает собою (на с. 7) следующую книгу: *Макарий.* Введение в православное богословие. — 2-е изд., испр. — СПб.: В типографии Г. Трусова, 1852. — 392 + VI с. Её автор Макарий (в миру — Михаил Петрович Булгаков, 1816—1882) — выдающийся учёный и общественный деятель. С 1847 года — доктор богословия (степень получена за первое издание книги), с 1850 по 1857 год — ректор Санкт-Петербургской духовной академии (в сане епископа Винницкого), с 1854 года — ординарный академик Санкт-Петербургской академии наук, с 1879 года — митрополит Московский и Коломенский. ◄●

[5] Эта общекультурная роль математики при всей её очевидности подчёркивается недостаточно часто. Более того, нередко можно слышать и даже читать, например, что главная цель обучения математике в средней школе — подготовка к дальнейшему обучению в вузах технического и сходного с ними профиля.

Если попытаться сформулировать некоторые общие цели обучения математике представителей других наук (общие для самых разных наук), то можно выделить — с известной долей условности, как всегда в подобных случаях, — три такие цели:

1. Овладение математическими методами исследования, включающими прежде всего по возможности чёткое выделение основных абстракций, сознательную идеализацию, разграничение между определяемым и неопределяемым и между установленным и гипотетическим, дедуктивное получение одних фактов из других и т. п.

2. Овладение «математическим языком» — языком основных математических понятий, столь общих, что с их помощью могут быть выражены многие факты действительности; примерами таких понятий служат понятия множества, отображения (функции), упорядочения, изоморфизма, вероятности, энтропии, алгоритма, исчисления и т. п.; к этому примыкает знакомство с основными понятиями логики, уточняемыми посредством математической логики, и кибернетики.

3. Овладение минимумом математических сведений, нужных для того, чтобы

а) можно было самостоятельно применять математические результаты к исследуемому кругу явлений;

б) можно было самостоятельно читать литературу по приложениям математики к изучаемой области знания;

в) можно было самостоятельно заниматься повышением своей математической квалификации.

Третья из этих целей не случайно поставлена на последнее место, ибо, как уже отмечалось, она — при всей своей значительности — представляется менее важной, чем две другие.

Что же касается первых двух целей, то среди них трудно установить какой-нибудь приоритет. При всей привлекательности того, чтобы считать первую цель (овладение методом) более важной, она вряд ли достижима без осуществления второй (овладения языком). Математические методы исследования неизбежно начинаются с — явного или неявного — уточнения языка. Причём главное в этом языке — не системы дифференциальных уравнений (которые суть уже «вторичные» образования, так сказать, высшие этажи), а прежде всего — фундамент, язык начальных понятий. К их числу — во всяком случае, при теоретико-множественном изложении математики, — и относятся прежде всего уже упоминавшиеся понятия ‘множество’, ‘кортеж’, ‘соответствие’, ‘функция’, ‘отношение’. Их рассмотрению и посвящён основной раздел (раздел А) книги Ю. А. Шихановича.

Понятия множества, кортежа, соответствия, функции, отношения — это не только начальные понятия математики; это (так же, как, например, понятие натурального числа), по существу, начальные понятия любого научного языка, начальные понятия науки вообще. В специальном приложении[6] к настоящему предисловию даётся беглый обзор этих понятий. Этот обзор имеет своей целью

1) показать широкую применимость перечисленных начальных понятий;

2) продемонстрировать известные трудности, возникающие при попытке дать им строгие определения;

3) оправдать те определения (или тот выбор неопределяемых понятий), которые избрал для своего изложения Ю. А. Шиханович.

III

Комментарии, содержащиеся в приложении[6] к предисловию, представляются тем более уместными, что в книге Ю. А. Шихановича не излагаются никакие приложения рассматриваемых в ней начальных понятий к каким-либо конкретным отраслям математики или других наук, за исключением приложений к комбинаторике[7] (которую естественно считать просто теорией конечных множеств) и одного приложения к лингвистике[8]. Это обстоятельство вряд ли может считаться недостатком книги: ведь не требуют же от учебника какого-либо языка, чтобы он содержал хотя бы основы излагаемых с помощью этого языка научных теорий. Зато сам язык, конечно, должен быть изложен с большим тщанием — с каким и изложен в предлагаемой книге язык начальных понятий математики. Уточнению языка придаётся в книге большое значение (и это одна из её наиболее характерных черт): уже в первом параграфе уточняется смысл союзов и составленных с их помощью сложных высказываний; в следующем параграфе вводится понятие переменной; ещё в следующем — разъясняется смысл знака равенства «=».

Этой же целью обусловлено и включение в книгу «Введение в современную математику» раздела Б, излагающего уточнения некоторых «школьных» терминов и обозначений. Дело в том, что

[6] Это приложение, имевшее заголовок «О понятиях 'множество', 'кортеж', 'соответствие', 'функция', 'отношение'», публикуется на с. 398—409 настоящего издания. — *Примеч. ред.*

[7] В § 3 гл. III и отчасти в § 5 гл. VII (см. теорему о зависимости между отношениями совершенного строгого порядка на конечном множестве и перестановками над тем же множеством на с. 271).

[8] См. пример 40 в § 5 гл. VII.

математический язык неизбежно включает в себя ряд терминов и обозначений, формально долженствующих быть известными из средней школы. Многие из них на самом деле усваиваются в школе очень плохо. Так, подавляющее большинство школьников и учителей, с которыми приходилось иметь дело автору этих строк, не знало правильного употребления знака «$\leqslant$». Они считали, что «$3 \leqslant 3$» неверно и «$3 \leqslant 5$» тоже неверно; и вообще, если a и b — произвольные, но фиксированные числа, высказывание «$a \leqslant b$» не может быть верным; утверждение же «$\sin x \leqslant 1$», по их мнению, верно, но лишь потому, что для некоторых значений x имеет место неравенство $\sin x < 1$, а для некоторых — равенство $\sin x = 1$[9]. Далеко не все правильно понимают смысл выражения $a^{\frac{m}{n}}$.

Приучить читателя к необходимости и важности уточнения языка — это представляется мне одной из самостоятельных и существенных целей книги. Уточнение научного (да и не только научного) языка является на самом деле важной проблемой, не получившей ещё, к сожалению, должного признания. Между тем эта проблема имеет не только научное, но совершенно практическое значение: ясно, сколь большую роль, например, играет точность языка в юридических документах[10]; известно, что применение математических методов в экономике в значительной степени затруднено именно недостаточной разработанностью языка описания экономических явлений.

С уточнением языка тесно связано повышение культуры мышления, чего настоятельно требуют интересы науки и народного хозяйства. В объём понятия «высокая культура мышления» входит умение мыслить формально. Формальное мышление не следует смешивать с неумением мыслить неформально, содержательно; формальное мышление — не нехватка чего-то, а особое искусство. Предлагаемая книга может служить пособием по обучению этому важному искусству.

IV

Думается, что книга Ю. А. Шихановича, заполняющая существенный пробел в нашей литературе, будет встречена с интересом. Ведь подобное изложение предпринято в нашей литературе впервые.

---

9 Таким образом, в обозначениях книги Ю. А. Шихановича выражение $\sin x \leqslant 1$ расшифровывается ими так:

$$(\forall x)[\sin x < 1 \vee \sin x = 1] \,\&\, (\exists x)[\sin x < 1] \,\&\, (\exists x)[\sin x = 1].$$

10 См., например, по этому поводу: *А. С. Пиголкин.* Толкование нормативных актов в СССР. — М.: Госюриздат, 1962. — Гл. II, § 2: «Грамматическое толкование».

Впервые воедино и обособленно собран такой материал, впервые встречаются и многие детали изложения (например, впервые приводится аккуратная формулировка одной из «самых главных теорем» математики — теоремы о связи между отношениями эквивалентности и разбиениями[11]). Можно рассчитывать, что книга Ю. А. Шихановича окажется также полезным материалом и одновременно «участником» того интенсивного обсуждения, которому подвергается сейчас всё преподавание математики сверху донизу — от вуза до начальной школы.

Среди читателей-математиков немало, вероятно, найдётся тех, кто придёт к заключению, что он изложил бы по-другому отдельные места этой книги или даже всю книгу в целом. Автор этого предисловия, если бы он писал такую книгу, также написал бы её иначе. Ясно, что различие вкусов и стилей проявляется тем сильнее, чем более первоначальных предметов касается изложение. Однако мне представляется бесспорным, что реальный автор книги имеет не меньшее право на проявление своего личного стиля и вкуса, чем авторы потенциальные.

Таким образом, я считаю, что книга Ю. А. Шихановича сможет быть полезной самым различным читателям — как нематематикам, заинтересованным в овладении языком начальных математических понятий (понятий столь универсальных, что на их базе могут описываться явления из самых различных областей науки и жизни), так и математикам, заинтересованным в уточнении собственного языка (хотя бы для того, чтобы нести свой уточнённый язык нематематикам). Математику нередко по разным поводам сравнивают со спортом, и это сравнение верно по крайней мере в одном — в математике бывают заметны иногда те недостатки, которые проявляются (опять-таки иногда) в спорте: выращивая рекорды, подчас забывают о будничной гигиенической гимнастике, о *массовой* физической *культуре*.

17 апреля 1965 года.

[11] В книге Ю. А. Шихановича эта теорема разделена на три теоремы из § 4 гл. VII — теоремы 1, 2 и 3.

О понятиях 'множество', 'кортеж', 'соответствие', 'функция', 'отношение'

Множество. — Кортеж. — Соответствие. — Функция. — Отношение.

Понятия множества и кортежа трактуются в книге Ю. А. Шихановича как первичные, неопределяемые понятия. Понятия же соответствия, функции и отношения определяются в ней через понятия множества и кортежа[1].

Множество

Понятие множества является не только первым, но и самым главным из перечисленных понятий. Заметим сразу же, что рассматриваемые в школьном курсе алгебры сочетания суть не что иное, как конечные множества.

Вот что говорят о понятии множества и о само́м термине «множество» знаменитые математики П. С. Александров и Н. Н. Лузин: «На каждом шагу нам приходится сталкиваться с тем трудно определимым понятием, которое выражается словом совокупность. Например, можно говорить о совокупности людей, присутствующих в данный момент в данной комнате, о совокупности гусей, плавающих на пруду, страусов, живущих в Сахаре, и т. п. В каждом из этих случаев можно было бы вместо слова совокупность употребить слово множество»[2].

«Что такое „множество“? Мы не станем доискиваться ответа на этот вопрос, потому что понятие множества является столь первоначальным, что затруднительно, по крайней мере на сегодняшний день, определить его при помощи более простых понятий.

Опубликовано в книге: *Ю. А. Шиханович*. Введение в современную математику. — М.: Физматлит, 1965. — С. 12—24.

[1] Возможны и другие решения вопроса о том, какие понятия назначить исходными неопределяемыми, а какие определять через первые.

[2] *П. С. Александров*. Введение в общую теорию множеств и функций. — М.— Л.: Гостехиздат, 1948. — Гл. 1, § 1. — С. 13.

Читателя это обстоятельство не должно удивлять. Действительно, когда некоторое понятие P определяется при помощи более простого понятия D, то само это понятие D также нуждается в определении посредством более простого понятия C, а оно, в свою очередь, нуждается в определении посредством ещё более простого понятия B и т. д. Таким образом, в конце концов мы должны будем прийти к столь первоначальному понятию A, которое не удаётся определить с помощью более простых понятий; всё, что можно здесь сделать, — это только разъяснить на *ряде примеров* смысл такого понятия A.

Итак, мы не станем искать определения слова „множество". Можно, разумеется, было бы сказать, что множество есть „собрание", „коллекция", „класс", „система", „семейство", „комплекс", „ансамбль" и т. д. Но такая замена одного слова другим никогда не может дать самую *идею* множества тому, кто раньше не приобрёл её каким-нибудь образом. Поэтому мы предпочитаем обратиться к *примерам*, разъясняющим смысл слова *множество*. Понимая под этим словом *совокупность, составленную из каких-нибудь предметов, мы можем говорить о множестве всех букв на данной странице, о множестве всех атомов серебра в данной монете, о множестве всех корней данного уравнения, о множестве всех положительных чисел, о множестве всех многочленов, о множестве всех непрерывных функций, о множестве всех точек на данной окружности, о множестве всех углов, имеющих иррациональное значение синуса, и т. д.*

Предметы, составляющие данное множество, называются его элементами»[3].

И далее:

«Из приведённых примеров видно, что элементами множества могут быть самые разнообразные предметы: буквы, атомы, числа, функции, точки, углы и так далее. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта *теории множеств* и её приложимость к очень многим областям знания (математике, механике, физике)»[4].

Надо иметь в виду, что список областей знания, приведённый в скобках Н. Н. Лузиным, не является не только исчерпывающим, но даже достаточно представительным; этот список, по существу, мог бы состоять из в с е х областей знания.

---

[3] *Н. Н. Лузин.* Теория функций действительного переменного. — М.: Учпедгиз, 1948. — § 1. — С. 7.

[4] Там же, с. 8.

Кортеж

Понятие кортежа несколько менее популярно, чем понятие множества, но почти столь же фундаментально. Так же, как понятие множества, оно заимствуется непосредственно из опыта (хотя это понятие и можно формально определить через понятие множества, но лишь весьма искусственно); сам термин «кортеж», как и термин «множество», допускает ряд синонимов, ничего не разъясняющих по существу, но служащих некоторым психологическим подспорьем для понимания. Такими синонимами в данном случае являются «упорядоченный набор», «конечная последовательность», «вектор»[5]. Вот что пишет, например, о понятии «вектор» известный кибернетик У.Р.Эшби (у которого это понятие полностью совпадает с нашим понятием «кортеж»):

«<...> Предположим, что радиопередача должна дать нам отчёт о „состоянии“ (в определённый момент времени) проходящего сейчас марафонского бега. Для этого она должна сообщить положение каждого бегуна в данный момент времени. Множество этих положений определит „состояние“ бега. Итак, состояние бега в целом задаётся различными состояниями (положениями) различных бегунов, взятыми одновременно <...>.

Такое состояние есть **вектор**, т. е. составной объект, имеющий определённое число **компонентов**, или **составляющих**. Удобно записывать его в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; это означает, что первая составляющая имеет значение a_1, вторая — значение a_2 и т. д.

<...> „Положение“ корабля в любой момент не может быть описано одним числом; необходимы два числа: широта и долгота. Таким образом, „положение“ есть вектор с двумя составляющими»[6].

Существенно подчеркнуть, что

1) составляющие вектора стоят на определённых местах, причём указано, какое место является первым, какое вторым и т. д. (бегунов нумеруют; договариваются, какую из координат — широту или долготу — указывать первой);

2) составляющие, стоящие в векторе на разных местах, могут совпадать: два бегуна могут иметь одинаковое положение, широта и долгота корабля могут также оказаться одинаковыми (если указывать широты и долготы просто числами со знаком плюс или минус, не прибегая к таким словам, как, скажем, «западная долгота»).

---

[5] Термин «вектор» имеет и другое, чисто геометрическое значение: направленный отрезок.

[6] *У. Р. Эшби.* Введение в кибернетику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1959. — § 3/5. — С. 52.

В книге Ю. А. Шихановича вместо термина «вектор» употребляется термин «кортеж», вместо термина «компонент» — термин «компонента», а записывается кортеж в угловых скобках:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

Вот ещё примеры кортежей: можно говорить о кортеже автомобилей в церемониальной процессии; о кортеже букв в слове; о кортеже слов во фразе; о кортеже фраз в абзаце; о кортеже абзацев в тексте; о кортеже азотистых (пуриновых и пиримидиновых) оснований в каждой из двух «нитей» молекулы дезоксирибонуклеиновой кислоты; знакомые, которые последовательно встретились вам сегодня на улице (при условии, что никакие двое знакомых не появлялись одновременно), также образуют кортеж. Во всех этих примерах, кроме первого, компоненты кортежа, стоящие на разных местах, могут и совпадать. Кортежи с несовпадающими элементами суть не что иное, как рассматриваемые в школьном курсе алгебры размещения.

Соответствие

Чтобы подойти к определению математического понятия соответствия, начнём с примеров употребления этого понятия.

Пример 1. Будем измерять рост людей в сантиметрах, а их вес — в килограммах. Каждому возможному для человека значению роста соответствует некоторые значения веса — те значения, которые может иметь вес при данном значении роста.

Пример 2. С другой стороны, каждому возможному значению веса человеческого тела соответствуют определённые значения роста человека — те значения, которые рост может иметь при данном весе.

Пример 3. Каждому человеку либо соответствует некоторый цвет — цвет его волос, либо ничего не соответствует, если он лыс.

Пример 4. Каждому цвету либо соответствуют люди с этим цветом волос, либо (как, например, зелёному цвету) никто не соответствует (если иметь в виду естественный цвет волос).

Пример 5. Каждому русскому существительному соответствуют окончания, возникающие при склонении этого существительного (а несклоняемому существительному ничего не соответствует, если только не считать отсутствие окончания особым «нулевым» окончанием).

Пример 6. Каждому окончанию соответствуют некоторые существительные, а именно те, которые имеют хотя бы одну форму

с данным окончанием, или ничего не соответствует, если такое окончание невозможно для существительных.

Пример 7. Каждому слову одного языка, если оно имеет слова-переводы в другом языке, соответствуют эти переводы.

Во всех этих примерах мы имеем дело с соответствиями (причём в примерах 2, 4, 6 — с соответствиями, обратными для соответствий из примеров 1, 3, 5). Соответствие, таким образом, предполагает наличие двух множеств (множества ростов и множества весов в первом примере, множества окончаний и множества существительных — в предпоследнем), причём для каждого элемента первого множества либо не указано соответствующих ему элементов второго множества (как для зелёного цвета в примере 4), либо такие элементы второго множества указаны (как для чёрного цвета в том же примере). Первое из этих множеств называется областью отправления, а второе — областью прибытия соответствия. Областями отправления в приведённых примерах служили, последовательно, множество возможных ростов, множество возможных весов, множество всех людей, множество всех цветов, множество всех существительных, множество всех окончаний, множество всех слов некоторого языка. Областями прибытия — множество возможных весов, множество возможных ростов, множество всех цветов, множество всех людей, множество всех окончаний, множество всех существительных, множество всех слов некоторого языка[7].

Чтобы задать соответствие, недостаточно, конечно, указать область отправления и область прибытия; надо ещё указать, какие элементы области прибытия каким элементам области отправления соответствуют. Если взять наугад какой-то элемент a из области отправления и какой-то элемент b из области прибытия, то элемент b, конечно, может и не соответствовать элементу a. Чтобы указать, какие элементы каким соответствуют, надо, следовательно, из всех пар $\langle a, b\rangle$, где a — элемент области отправления, а b — элемент области прибытия, выделить такие, в которых b соответствует a. Для этого достаточно, очевидно, указать множество таких «хороших» пар. Заданием этого множества (вместе с заданием областей отправле-

[7] Для простоты мы чуть-чуть огрубляем истинное положение вещей. На самом деле области отправления и прибытия ещё не вытекают однозначно из формулировок наших примеров. Так, в примере 3 мы могли бы считать областью прибытия и множество *не всех*, а лишь возможных цветов; напротив, областью отправления в примере 1 мы могли бы считать множество *всех* действительных чисел, а не только тех, которые служат значениями человеческого роста.

ния и прибытия) соответствие полностью определяется. Поэтому соответствие естественно определить (как это и делается при уточнении этого понятия в математике) просто как тройку множеств: область отправления, область прибытия и некоторое множество пар элементов из этих областей (первый член пары должен быть из области отправления, а второй — из области прибытия). Такое определение и принимается в книге Ю. А. Шихановича (с той только разницей, что в определении на с. 171 множество пар — как «главная компонента» — ставится в тройке на первое место). Поскольку пары и тройки суть просто частного вида кортежи, понятие соответствия оказалось выраженным через понятие множества и понятие кортежа.

Функция

Само слово «функция» встречается уже в школьном курсе математики. Однако расшифровка этого слова оказывается не таким простым делом, поскольку, как можно заметить, слово «функция» употребляется в несколько различающихся смыслах.

В классической математике известны два основных направления, по которым происходит осмысление понятия функции[8]. Первое направление — исторически более раннее и, пожалуй, даже сейчас более распространённое — ориентировано в основном на традиционно трактуемые технические и естественнонаучные приложения математики и опирается на понятие *переменной величины*; второе — более современное и более точное — не использует этого понятия вовсе (в то же время второе направление способно обслужить как все традиционные приложения математики, так и ещё много новых, возникших за последнее время).

Первое направление. Именно первое направление отражено, например, во втором издании Большой советской энциклопедии (БСЭ-2), статья «Функция»[9], в которой начинается со следующей дефиниции: «Функция — одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других».

В рамках данного направления в свою очередь можно выделить два подхода, первый из которых (опять-таки более ранний и, возможно,

[8] Мы не касаемся здесь осмысления этого понятия в конструктивной математике.

[9] *И. П. Натансон.* Функция // БСЭ-2. — Т. 45. — М., 1956. — С. 657. ●► С минимальными изменениями эта же статья повторена и в 3-м издании энциклопедии (БСЭ-3): Т. 28. — 1978. — С. 138—139. ◄●

более распространённый) скорее соответствует точке зрения физиков, второй — точке зрения математиков[10].

Первый подход состоит в истолковании функции как переменной величины. Именно такое истолкование принято в средней школе. «*Та переменная величина, числовые значения которой изменяются в зависимости от числовых значений другой, называется зависимой переменной, или функцией этой другой переменной величины*»[11].

●➤ «Так, например, величина смещения земной поверхности при землетрясении в каждый момент времени имеет определённое значение — величина смещения есть функция времени. Сила тока в полупроводниковом элементе есть функция напряжения, так как каждому значению напряжения соответствует определённое значение силы тока. Таких примеров можно привести очень много <...>»[12]. ◀●

Подобное определение функции принято и в ряде авторитетных вузовских учебников[13] и в Большой советской энциклопедии, где следующая за дефиницией фраза в только что упоминавшейся статье «Функция» гласит: «Если величины x и y связаны так, что каждому значению x соответствует определённое значение y, то y называют (однозначной) ф у н к ц и е й аргумента x»; как видно из исторического обзора в конце названной статьи, аналогичные формулировки встречались уже в прошлом веке и восходят к ещё более ранним представлениям.

Второй подход состоит в истолковании функции как закона, но также связанного с понятием переменной величины (и с разделением переменных величин на «зависимые» и «независимые»): «*Закон (правило), по которому значениям независимых пере-*

---

10 См. об этом в книге: *Р. Курант, Г. Роббинс.* Что такое математика?: Пер. с англ. — М.—Л.: Гостехиздат, 1947. — Гл. VI, § 1. — С. 365—366.

11 *А. П. Киселёв.* Алгебра. — Ч. II. — 41-е изд. — М.: Учпедгиз, 1964. — § 25. — С. 25.

12 *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль.* Функции и графики (основные приёмы). — 3-е изд. — М.: Физматлит, 1965. — С. 6.

13 «*Величина y называется ф у н к ц и е й величины x, определённой на множестве M, если каждому значению величины x, определённой на множестве M, соответствует единственное определённое значение величины y*» (*А. Я. Хинчин.* Краткий курс математического анализа. — М.: Гостехиздат, 1953. — § 3. — С. 15; ср. также § 2); «*переменная y называется ф у н к ц и е й от переменной x в области её изменения X, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из X ставится в соответствие одно определённое значение y*» (*Г. М. Фихтенгольц.* Основы математического анализа. — Т. 1. — 5-е изд. — М.: Наука, 1964. — § 17. — С. 40).

менных отвечают (соответствуют) значения рассматриваемой зависимой переменной, называется функцией»[14].

Приведённые формулировки нельзя, конечно, считать отчётливыми. Для их уточнения требуется предварительное создание достаточно нерасплывчатой системы представлений о переменных величинах. Создание такой системы если и возможно, то, по-видимому, лишь на основе использования в качестве исходных таких понятий, как «величина» и «изменение во времени»[15], т. е. вне рамок теоретико-множественной концепции[16].

Второе направление. Принципиально иной путь связан с отказом от переменных величин. Он приводит к более широкому понятию функции, поскольку разрешает рассматривать функции не только от «величин» (заметим вскользь, что попытки уточнить, что такое «величина вообще», приводят к значительным трудностям). В рамках этого второго направления можно опять-таки различить несколько подходов, а именно по меньшей мере три. *Первый подход* определяет не самоё функцию, а лишь, так сказать, «функциональную ситуацию», т. е. ситуацию, при которой разрешено говорить, что имеет место функция; *второй подход* трактует функцию как правило, или закон; *третий* — как соответствие.

Первый подход характерен для руководств по общей теории функций и теории функций действительного переменного. Вот, например, что говорит о функции П. С. Александров в своей уже цитированной нами книге: «*если каким-нибудь образом каждому элементу x некоторого множества X поставлен в соответствие определённый элемент y некоторого множества Y, то мы говорим, что имеется отображение множества X во множество Y или функция f, аргумент которой пробегает множество X, а значения принадлежат множеству Y*»[17].

А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин пишут:

«В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на

---

[14] *А. Д. Мышкис.* Лекции по высшей математике. — М.: Наука, 1964. — Гл. 11, § 1, п. 1. — С. 37.

[15] См.: *А. Н. Колмогоров.* Величина // БСЭ-2. — Т. 7. — М., 1951; см. также статью «Переменные и постоянные величины» в 32-м томе (1955 год) этой же энциклопедии. ●► В 3-м издании БСЭ, соответственно, т. 4 (1971 год), с. 456—457 и т. 19 (1975 год), с. 389—390. ◄●

[16] В книге Ю. А. Шихановича нет понятия переменной величины. Переменная понимается в ней (как это принято в современной математической логике) просто как буква, сопряжённая с определённым способом её использования.

[17] *П. С. Александров.* Введение в общую теорию множеств и функций. — М.— Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 21.

этом множестве определена функция f, если каждому числу $x \in X$[18] поставлено в соответствие определённое число $y = f(x)$. При этом X называется областью определения данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, — её областью изменения.

Если теперь вместо числовых множеств рассматривать множества какой угодно природы, то мы придём к самому общему понятию функции, а именно: пусть M и N — два произвольных множества. Говорят, что на множестве M определена функция f, принимающая значения из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент из N. В случае множеств произвольной природы вместо термина „функция“ часто пользуются термином „отображение“, говоря об отображении одного множества в другое»[19].

Как мы уже говорили, приведённые (и широко распространённые подобные им[20]) формулировки оставляют само понятие функции неопределяемым[21]. Здесь определяется не что такое функция, а лишь некоторое правило употребления этого термина. Что же такое функция и когда про две функции можно говорить как об одной и той же функции — это остаётся неопределённым.

●➤ Следующий текст служит яркой демонстрацией излагаемого первого подхода: «Описательно говоря, функция — это когда каждому значению некоторой величины <...> отвечает значение другой величины <...>»[22]. Слегка шокирующий оборот «функция — это когда» как нельзя лучше показывает, что функция здесь трактуется не как вещь, а как положение вещей, т. е. как функциональная ситуация. ◄●

---

[18] Не знакомые со знаком «∈» могут понимать его в данном случае просто как синоним предлога «из». — *В. У.*

[19] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Вып. 1: Метрические и нормированные пространства. — М.: Изд-во МГУ, 1954. — § 7. — С. 19—20.

[20] См., например, *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950. — Гл. IV, § 1. — С. 80.

[21] Вот что сказано по этому поводу в двух сочинениях, которые можно, пожалуй, назвать классическими: «Понятие функции такое же основное и первоначальное, как и понятие множества» (*Ф. Хаусдорф.* Теория множеств: Пер. с нем. — М.—Л.: ОНТИ, 1937. — § 2. — С. 12); «В конечном счёте понятие функции — или какое-либо сходное понятие, например понятие класса, — приходится считать первоначальным, или неопределяемым» (*А. Чёрч.* Введение в математическую логику: Пер. с англ. — Т. 1. — М.: ИЛ, 1960. — С. 351. — Прим. 39).

[22] *И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль.* Функции и графики (основные приёмы). — 3-е изд. — М.: Физматлит, 1965. — С. 6.

Однако правомерно и стремление определить самоё функцию (причём без понятия переменной величины). Попытки определить функцию как правило, или закон[23], посредством которого для каждого элемента одного множества указывается некоторый элемент второго, приводят к потребности уточнить, что такое правило, или закон. Такие уточнения приводили до сих пор к слишком узким классам функций — как, например, классу вычислимых функций, когда слово «закон» уточняется посредством понятия алгоритма. Попытки же найти слову «закон» максимально общее уточнение оказываются — и, по-видимому, неизбежно (во всяком случае при наших сегодняшних представлениях) — связанными с необходимостью максимально широко и одновременно совершенно отчётливо очертить язык (или языки) записи законов, что вряд ли когда-нибудь удастся; считать же понятие «закон» первичным и неопределяемым вряд ли целесообразно.

Наиболее законченное представление о функции заключается в рассмотрении её как соответствия. «Функция <...>, определённая на множестве M, есть не что иное, как просто *соответствие* F различным элементам множества M некоторых элементов (различных или тождественных) множества N»[24]. Или, более точно: «В самом общем смысле (однозначная) *функция* <...> — это соответствие, в силу которого каждому элементу x некоторого множества X отвечает единственный элемент y некоторого множества Y»[25]. Если понимать соответствие так, как мы уже условились выше его понимать, и считать, что в приведённой только что формулировке X и Y служат областью отправления и областью прибытия соответствия, то станет очевидным, что эта формулировка выделяет функцию — среди прочих соответствий — посредством следующего

[23] Вот, например, как определяется функция в § 6 главы I книги Дж. Кемени и др. «Введение в конечную математику»: «Пусть дано множество D, которое называется *областью определения* функции, и правило f, которое каждому элементу множества D ставит в соответствие некоторый объект <...> Тогда f называется *функцией*, определённой на множестве D» (*Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон* Введение в конечную математику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963. — С. 95). Сравнение с приведённой выше цитатой из книги А. Д. Мышкиса показывает, что этот второй подход второго направления по существу весьма близок ко второму подходу первого направления, поскольку в этом последнем обращение к понятию переменной величины является на самом деле совершенно необязательным.

[24] *Н. Н. Лузин.* Теория функций действительного переменного. — М.: Учпедгиз, 1948. — § 36. — С. 126.

[25] *С. К. Клини.* Введение в метаматематику: Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1957. — § 10. — С. 36.

требования: каждому элементу области отправления должен соответствовать р о в н о о д и н элемент области прибытия. Именно такое определение функции — как соответствия (понимаемого как тройка множеств), при котором каждому элементу области отправления соответствует ровно один элемент области прибытия — принято в «Началах математики» Н. Бурбаки[26]. Можно теперь сделать шаг в сторону обобщения, потребовав меньшего, а именно, потребовав, чтобы в случае функции каждому элементу области отправления соответствовало н е б о л е е о д н о г о элемента области прибытия. Так, если рассматривать функции действительного переменного, т. е. функции, у которых область отправления и область прибытия совпадают каждая с множеством действительных чисел, то

1) функция $y = x^2$ каждому действительному числу a ставит в соответствие ровно одно действительное число a^2;

2) функция $y = \sqrt{x}$ каждому неотрицательному действительному числу a ставит в соответствие ровно одно действительное число $\sqrt{a}$, а любому отрицательному действительному числу ничего не ставит в соответствие.

В приведённых выше примерах соответствий лишь пример 3 даёт функцию (если считать, что у каждого нелысого человека — вполне определённый цвет волос).

Изложенное определение функции — как соответствия, у которого каждому элементу области отправления соответствует не более одного элемента области прибытия, — и принято в книге Ю. А. Шихановича.

Отношение

Последним из начальных понятий нашего списка является понятие отношения. Начнём с примеров. Говорят об отношении родства среди людей; об отношении «меньше» среди чисел; об отношении старшинства среди военнослужащих; об отношении синонимии среди слов языка; об отношении паразитирования среди животных; об отношении совместимости среди групп крови; об отношении подобия среди геометрических фигур; об отношении подчинения среди слов в предложении. Мы видим, что каждый из этих примеров устроен следующим образом: имеется некоторое множество (людей, слов, фигур и т. д.), и для любой пары элементов из этого множества указано,

[26] См.: *Н. Бурбаки.* Теория множеств: Пер. с франц. — М.: Мир, 1965. — Гл. II, § 3, п. 4. — С. 90.

находится ли первый член этой пары в данном отношении ко второму или нет (например, для каждой пары военнослужащих указано, является ли первый из них старшим по отношению ко второму; для каждой пары чисел указано, является ли первое из них меньшим, чем второе), причём из рассмотрения не исключаются пары, у которых первый и второй члены совпадают (так, для любой пары, составленной из совпадающих чисел, указано, что первый член пары не находится в отношении «меньше» ко второму; для любой пары, составленной из совпадающих геометрических фигур, указано, что первый член находится в отношении подобия ко второму). Чтобы задать отношение, достаточно, следовательно, задать некоторое исходное множество — *область задания отношения* и некоторое множество пар его элементов — *график отношения*, состоящий из тех пар, у которых первый член находится в рассматриваемом отношении ко второму. Естественно поэтому само отношение отождествить с парой, составленной из его графика и его области задания. Такое отождествление и принято в книге Ю. А. Шихановича в качестве определения понятия «отношение»; отношение, следовательно, есть пара, составленная из двух множеств, причём элементами первого из этих множеств служат некоторые пары элементов второго.

К проблематике теории научной информации

Обсуждаются содержание и проблематика теории научной информации. Ставится вопрос об основных задачах теории информационных систем. В числе важнейших проблем теории информации отмечаются: разработка искусственных информационных языков и методов записи сообщений на этих языках; разработка информационных алгоритмов; разработка методов проектирования и оценки информационных систем. Рассматриваются связь теории научной информации с семиотикой, математической логикой, лингвистикой, а также роль машинного эксперимента.

В жизни общества громадную роль играет обмен информацией между его членами — людьми и коллективами людей. Среди этой информации выделяется та, которая связана с передачей определённых фактических сведений (в отличие, скажем, от чисто эмоциональной информации типа впечатлений о спектакле; например, театральная афиша уже несёт фактическую информацию). Среди *фактической информации* в свою очередь выделяется *научная информация*, т. е. информация о фактах науки. Ясно, что без хорошо налаженного обмена научной информацией развитие науки невозможно.

Существующие системы получения, обработки, хранения, поиска и выдачи информации (*информационные системы*), несмотря на свою сложность, разветвлённость и специализацию, в большинстве случаев не справляются с задачей снабжения потребителя необходимой научной информацией: значительная часть научных работ и технических отчётов доходит до потребителя с опозданием, а то и вовсе не доходит. Недостаточная приспособленность существующих информационных систем к возлагаемым на них задачам не должна

Опубликовано в журнале: Научно-техническая информация. — 1963. — № 3. — С. 17—20. (Соавтор: Юлий Анатольевич Шрейдер.)

казаться удивительной: эти информационные системы сложились в процессе общественного развития стихийно и потому не являются наилучшими ни по своей мощности, ни по организации.

Расхождение между организацией информационных систем и потребностями общества в последнее время резко обострилось. Количество источников и потребителей информации, а также её объём растут по экспоненте. Абсолютные цифры видны хотя бы из следующего примера. Всесоюзный институт научной и технической информации АН СССР, сокращённо ВИНИТИ, обрабатывает научно-техническую информацию, поступающую из 15 000 периодических изданий, а общее число публикаций, освещаемых в информационных изданиях Института за год, составляет около 700 000.

Далее, время прохождения информации в каком-либо научно-техническом журнале занимает в среднем не менее года. Подготовка ускоренных изданий (публикация кратких изложений типа заметок в «Докладах Академии наук СССР» или издания, выпущенные офсетным способом), занимают 4—6 месяцев. Цикл подготовки реферативного журнала сейчас занимает 6—7 месяцев. Таким образом, прохождение готового к публикации материала от автора к потребителю занимает не менее 10—12 месяцев. Если учесть, что выполнение эскизного проекта сложной вычислительной машины занимает примерно такой же срок, то очевидно, что при разработке новой вычислительной машины невозможно использовать существующий к началу разработки уровень техники. Ясно, что этот пример имеет общий характер.

Возникает, таким образом, имеющая важное государственное значение задача создания информационных систем (в частности, систем, обрабатывающих научную информацию), способных справиться с обработкой всё возрастающих потоков информации. Эта задача становится тем более актуальной, что развитие техники — разработка новых технических средств получения, обработки, хранения и передачи информации — делает её разрешимой. Решение этой задачи требует обширных, специализированных и целенаправленных научных исследований.

Разработка соответствующих технических средств основывается на достижениях электроники и вычислительной техники (запоминающие устройства и устройства обработки информации), автоматики и техники полиграфического производства (автоматические наборные и печатные устройства).

Теоретические исследования, лежащие в основе проектирования информационных систем, включают изучение и разработку языков

(естественных и искусственных), на которых записывается информация, алгоритмов перевода с одних языков на другие, изучение и разработку алгоритмов обработки информации (поиск, индексирование, реферирование, составление обзоров, справок и т. п.), изучение деятельности человека при восприятии информационных материалов, в частности, научной литературы (с целью моделирования такой деятельности), разработку логической структуры информационных систем. Эти теоретические исследования образуют особую новую научную дисциплину, которую можно было бы назвать *теорией информации*, если бы это название уже не было занято разделом теории вероятности, изучающим понятие информации с довольно узкой, «вероятностной» точки зрения. Поэтому для указанной научной дисциплины предлагается менее удачное название — **теория информационных систем**. Изучение информационных систем, имеющих дело только с **научной информацией** (а не с административной, экономической, военной и т. п.), составляет предмет **теории научной информации**[1], являющейся, таким образом, важнейшей составной частью теории информационных систем.

Теория информационных систем должна дать методы решения двух основных задач информационной службы:

- быстрого **оповещения** о новых фактах (в частности, о содержании появляющихся публикаций);
- долговременного **хранения** информации с целью оперативной выдачи сведений в ответ на поступающий запрос.

При решении задачи оповещения необходимо обеспечить не только быстрое, но и дифференцированное оповещение с тем, чтобы каждый потребитель получал именно ту информацию, которая ему нужна. При решении задачи хранения необходимо добиться возможности получать ответы на запросы самого разного характера, как **библиографического** («что содержится в тех или иных документах?», «в каких документах содержится информация по данному вопросу?» и т. п.), так и **фактографического** («какими свойствами обладает данный объект?», «какие объекты обладают данными свойствами?», «что известно по данному вопросу?» и т. п.). В перспективе следует иметь в виду и запросы более сложной логической природы (например, «верен ли данный факт?» или «какие следствия вытекают из данного факта?»).

---

[1] См. статью А. И. Михайлова и В. А. Полушкина «Теория научной информации — новая самостоятельная научная дисциплина» в этом же номере «Научно-технической информации» (1963, № 3).

Один из **критериев качества** той или иной информационной системы состоит в её **способности в минимальный срок выдать потребителю, находящемуся в любом месте, необходимую информацию по интересующему его вопросу и притом в удобной для него форме**. (Полный набор критериев качества может быть установлен лишь в результате специальных исследований, составляющих важную проблему теории информационных систем.)

В этом критерии качества отражены следующие пять моментов:

- **доступность** информации для любого потребителя (т. е. возможность давать запросы и получать ответы с помощью совершенных средств связи);
- **скорость** прохождения информационных потоков; любой замкнутый цикл типа «запрос — ответ» или «поступление информации — оповещение» должен выполняться за время, малое по сравнению с естественными циклами научного процесса;
- **полнота** информации, циркулирующей в системе; при обработке запроса должна быть учтена, по возможности, вся накопленная человечеством информация, относящаяся к данному запросу;
- **степень отбора**, т. е. стремление к очень сильному уменьшению объёма информации, фактически доходящей до потребителя; чем **меньшее** число статей, рефератов или обзоров должен будет освоить потребитель, тем полезнее для него окажется разработанная информационная система;
- выдача информации потребителю в **удобной для использования форме** (например, с переводом на нужный язык, с обзором цикла работ, перечнем источников и т. п.).

Эффективное решение указанных выше основных задач информационной службы с соблюдением перечисленных требований качества возможно лишь на пути создания **автоматизированных информационных систем**, способных выполнять функции восприятия, хранения, преобразования и выдачи нужной информации автоматически, без участия человека. Шагом на пути создания таких систем явится создание полуавтоматизированных систем, в которых указанные функции частично выполняются людьми, но не имеющими высокой квалификации, а действующими на основании чётких инструкций. Разработка требований, предъявляемых к автоматизированным и полуавтоматизированным системам, и принципов их организации является одной из важнейших проблем общей теории информационных систем.

Создание автоматизированных информационных систем — без чего информационная служба не сможет удовлетворительно обслужить общество — потребует привлечения всё более и более мощных

средств автоматизации (технических устройств и теоретических методов). Осуществление высокой степени отбора эквивалентно по существу созданию столь сложных «мыслящих» систем, что кавычки для них едва ли окажутся уместными.

Создание «мыслящих» информационных систем предполагает серьёзную теоретическую разработку «искусственного мышления» (сейчас преждевременно выяснять, будет или нет это «искусственное мышление» моделировать естественное мышление человека). В связи с этим проблематика теории информационных систем имеет общенаучное значение, выходящее за рамки этой отрасли науки.

Подход к проблеме создания искусственного «мышления», характерный для теории информационных систем, состоит в разработке некой системы языков и алгоритмов.

Любая информация (в частности, научная) всегда записывается на том или ином конкретном языке. Это может быть естественный язык с выработанной научной терминологией и специальными средствами типа формул или же искусственный язык типа языков программирования (АЛГОЛ, ЛИСП и т. п.). Ясно, что разные информационные задачи удобнее решаются с помощью разных языков. Так, человеку, как правило, удобнее при написании статьи или отчёта использовать естественный язык. Сообщение на семинаре (в узком кругу участников работы) делается на своеобразном необщепринятом научном «жаргоне». Библиографическое индексирование книг и статей производится в специальном коде (например, по системе Универсальной десятичной классификации, по кеттеровскому методу и т. п.). При записи и обработке информации в машине широко используются формализованные информационные языки. Поэтому изучение различных языков, пригодных для записи научной информации, а также конструирование таких языков представляется чрезвычайно важным для теории научной информации (в этих своих разделах проблематика теории научной информации примыкает к проблематике семиотики — общей теории знаковых систем). Наряду с исследованиями языков необходимо исследовать алгоритмы преобразования информации как в пределах одного языка, так и при переходе с одного языка на другой.

Проблематика теории научной информации включает, таким образом, следующие основные задачи:

а) разработка конкретных искусственных языков и методов кодирования искусственных и естественных языков;

б) разработка методов автоматического перевода с одних языков на другие (сюда, в частности, входят машинный перевод с одного

языка на другой и автоматическое программирование как задача перевода с человеческого языка на машинный);

в) разработка алгоритмов сложной обработки языковой информации (подготовка справок, рефератов, обзоров и т. п.);

г) разработка информационной системы в целом, т. е. определение состава используемых в системе языков и технических средств перечня решаемых задач, логической организации и параметров системы.

Из сказанного можно сделать вывод, что вопросы создания информационных языков и информационных алгоритмов (в особенности алгоритмов преобразования информации, включая алгоритмы логического вывода, алгоритмы перевода и алгоритмы реферирования) требуют обширных и серьёзных теоретических исследований. Эти исследования могут быть сгруппированы следующим образом.

1. Метатеоретические исследования. Метатеория — это теория, предметом которой является некоторая другая теория. Так, метаматематика изучает систему основных понятий математики, систему применяемых в математике умозаключений, математическую терминологию, способы записи математических объектов и фактов и т. д. Метатеоретические исследования необходимы на самом первом этапе создания информационных языков и алгоритмов. Действительно, создавая информационный язык, скажем, для электротехники, мы должны уяснить себе перечень основных понятий и объектов, встречающихся в электротехнике, способы их записи, отношения, в которые они вступают, и т. д., т. е. заняться метаэлектротехникой. К метаэлектротехнике относится и установление применяемых в электротехнике способов умозаключений (что нужно для разработки способов получения новых сведений о фактах из сведений известных), и установление «существенности» того или иного факта (что нужно для алгоритмов реферирования). В комплекс метатеоретических исследований входят изучение средств записи информации, применяемых в данной науке, и разработка формального аппарата данной науки. Именно разработанность формального аппарата математики позволила сразу применить новую технику для решения вычислительных задач математики. Создание подобных языков для других наук позволит аналогичным образом применить новую технику для решения задач этих наук. Разработка языков наук, изучение существующих и создание новых способов записи научной информации требуют, в свою очередь, решения ряда сложных теоретических вопросов современной логической семантики (имеются в виду прежде всего исследования, группирующиеся вокруг понятия смысла).

2. Логико-математические исследования. С методами математической логики соприкасается как непосредственное создание информационных языков, так и формализация процессов логического вывода в тех или иных теориях. Эта формализация в настоящее время разработана лишь для математики (здесь уместно отметить американские опыты по машинному доказательству теорем математики[2]). Распространение подобной формализации на другие теории, помимо важности для информационных нужд, является важной общенаучной задачей. Математическая логика обслуживает, главным образом, математику, поэтому необходимо создание аналогичных прикладных «логик», обслуживающих другие науки. Подтверждением этого тезиса могут служить важные работы, уже проведённые в области химии.

К кругу логико-математических исследований относятся также исследования, касающиеся дедуктивного построения той или иной области науки, выяснение принципиальных возможностей формализованного (и, следовательно, автоматического) оперирования с предложениями в этой области. Не погрешив против истины, можно сказать, что нет, пожалуй, такого раздела математической логики, развитие которого не имело бы важного значения для решения проблемы автоматизации информационного дела.

3. Лингвистические исследования. Для решения задач автоматического перевода, реферирования и некоторых других информационных задач (тесно связанных между собой) необходимо изучение записи информации в реальных языках и способов перехода от одних форм записи к другим. Важнейшей проблемой здесь является разработка методов, позволяющих анализировать смысл текстов, записанных на различных языках. Эти методы могут лечь в основу большинства алгоритмов (реферирования, аннотирования, определения новизны содержания и т. п.).

4. Исследования в области теории алгоритмов, программирования и кодирования. Насущной задачей является изучение информационных алгоритмов, рациональных способов их записи и т. д. Необходимо разрабатывать методику программирования информационных алгоритмов, рациональные способы кодирования информации для ввода её в информационную систему, а также принципы организации крупных массивов информации для долговременного хранения. Можно ожидать появления специальной дисциплины, занимающейся методами решения информационных задач и их программированием.

---

[2] См.: *Ван Хао*. На пути к механической математике // Кибернетический сборник. — Вып. 5. — М.: ИЛ, 1962. — С. 114—165.

5. Исследования по анализу информационной практики. Необходимо установить возможные типы информационных запросов, типы стандартных рефератов и т. д. Сделать это невозможно без анализа существующей информационной практики. Возможно, здесь потребуется участие психологов — специалистов в области моделирования процессов умственного труда (ведь речь идёт о передаче машине некоторых из таких процессов; отдельные функции информационной машины имитируют деятельность человека, пришедшего в библиотеку). Эти исследования позволяют выработать критерии качества информационных систем.

Перечисленные направления теоретических исследований достаточно новы; работы в этой области не могут не носить изыскательского характера.

Очень важной является связь между проблематикой теории научной информации и проблематикой вычислительной техники. Можно ожидать, что, кроме учебной литературы и некоторых монографий, основная часть научной информации будет распространяться в обозримом будущем только по запросам. Следовательно, основная часть информации будет храниться и обрабатываться в устройствах, родственных современным вычислительным машинам.

Так, в одном устройстве типа «магнокард» можно разместить $1{,}2 \cdot 10^9$ двоичных знаков информации, что соответствует тексту 6 тыс. печ. листов (300 книг по 20 печ. листов), без учёта методов сжатия информации. Время доступа к информации составляет менее 10 сек. Это показывает, что средства вычислительной техники в сочетании с автоматическими наборными устройствами и устройствами для чтения текста перспективны для создания информационных систем.

Можно представить, что замкнутый информационный цикл будет выглядеть в перспективе следующим образом: печатное оформление первичного материала — автоматический ввод в память — предварительная обработка для длительного хранения — формирование информационного материала по запросу — выдача печатного текста потребителю.

Для обеспечения такого цикла понадобятся самые совершенные средства вычислительной техники. Поэтому проблематика теории научной информации окажет большое влияние на развитие вычислительной техники. Вполне возможно, что именно в недрах этой теории будут создаваться наиболее совершенные варианты логической структуры вычислительных машин и систем, обладающие наиболее развитым «интеллектом». Современное развитие вычисли-

тельной техники показывает, что основное направление состоит в построении так называемых Data processing systems, т. е. систем обработки данных. В таких системах приходится решать вопросы согласования работы ряда мощных устройств, восприятия информации на языках обобщённого программирования, параллельной обработки массивов информации и др. Развитие информационной техники потребует возможности работать с частично заданными алгоритмами, самообучающимися алгоритмами и т. п.

Таким образом, хотя вычислительная техника есть вполне самостоятельная область знаний, многие её вопросы будут решаться в недрах или под влиянием теории научной информации.

Нормальное развитие общества (в частности, научный и технический прогресс) невозможно без эффективного использования научной информации. На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1) эффективное использование научной информации может быть организовано лишь на основе разработки самостоятельной научной дисциплины — теории научной информации;

2) разработка теории научной информации требует проведения больших научно-исследовательских работ как в рамках самой этой теории, так и в смежных дисциплинах;

3) наряду с теоретическими работами необходимо постоянное экспериментирование на машинах; техническое задание на специализированные устройства может быть выдано лишь после многократного опробования информационных алгоритмов на существующих сейчас больших вычислительных машинах;

4) с развитием теории научной информации будет вырабатываться особый профиль специалистов в этой области, что должно найти своё отражение в номенклатуре вузовских специальностей; в настоящее время (и в ближайшие 3—4 года) основными разработчиками этой теории должны быть математики, лингвисты и инженеры по радиоэлектронике и автоматизации наряду со специалистами в тех конкретных областях знания, информация из которых будет обрабатываться в проектируемых системах;

5) проведение как теоретических, так и экспериментальных работ в области теории научной информации должно осуществляться в специализированных научно-исследовательских учреждениях.

Абстракция актуальной бесконечности

АБСТРАКЦИЯ АКТУАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ (а. а. б.) — одна из основных абстракций логики и математики, позволяющая рассуждать о бесконечных совокупностях (бесконечные множества), применяя к ним логические принципы — в частности, закон исключённого третьего, принцип произвольного выбора и др. — почерпнутые из опыта обращения с конечными совокупностями (конечными множествами). Например, основанный на законе исключённого третьего логический принцип «либо все элементы заданного множества обладают некоторым свойством A, либо в этом множестве найдётся элемент, не обладающий свойством A» обосновывается для конечных множеств возможностью непосредственного перебора всех элементов любого конечного множества. При помощи а. а. б. этот принцип переносится и на бесконечные множества. Другой пример. Предположим, что задана какая-то совокупность $\mathcal{M}$ попарно непересекающихся (т. е. не имеющих общих элементов) непустых множеств. Принцип произвольного выбора утверждает, что всегда можно образовать такое новое множество, которое с каждым из множеств, принадлежащих совокупности $\mathcal{M}$, будет иметь ровно один общий элемент. Для конечной совокупности $\mathcal{M}$ этот принцип обосновывается возможностью перебрать все её члены и в каждом выбрать по элементу, из каковых выбранных элементов и будет состоять требуемое множество. А. а. б. позволяет перенести принцип произвольного выбора и на случай, когда $\mathcal{M}$ бесконечна.

А. а. б. состоит в отвлечении от незавершённости и незавершимости процесса образования бесконечного множества, от невозможности задать такое множество, предъявив полный список его элементов (в этом смысле можно сказать, что а. а. б. состоит в отвлечении от «бесконечности» множества). На основе а. а. б. бесконечные множества

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 16.

рассматриваются как актуально существующие независимо от какого бы то ни было способа задания. В математике а. а. б. необходима, например, при рассмотрении действительного числа как бесконечной десятичной дроби. Однако а. а. б. не является необходимой при изучении натуральных чисел: здесь нужна лишь возможность оперировать со «сколь угодно большими» числами, для чего достаточна так называемая абстракция потенциальной осуществимости (а. п. о.). Аналогично, в языкознании, чтобы допустить построение «сколь угодно длинных» фраз, требуется лишь а. п. о. Если же, скажем, множество всех грамматически правильных фраз какого-либо языка трактовать как бесконечное множество, то такой подход требует привлечения а. а. б.

Границы применимости а. а. б. не вполне ясны; неограниченное применение этой абстракции приводит к парадоксам в теории множеств.

Литература

[1] *Колмогоров А. Н.* Бесконечность в математике // Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 5. — М.: Сов. Энциклопедия, 1950. — С. 73—74.

[2] *Шанин Н. А.* О некоторых логических проблемах арифметики. — (Труды Математического института АН СССР; Т. 43). — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — Пункты 1.15; 5.1.

Гёдель

ГЁДЕЛЬ (Gödel), Курт (28 апреля 1906 года ●► — 14 января 1978 года ◄●) — австрийский логик и математик. Родился в г. Брно, в Австро-Венгрии (ныне ●●► Чехия ◄●●). В 1933—38 — приват-доцент Венского университета. В 1940 эмигрировал в США (с 1953 — профессор Института высших исследований в Принстоне). Известен своими трудами в области математической логики, в которую внёс выдающийся вклад. Ему принадлежат: теорема о полноте узкого исчисления предикатов (1930); метод арифметизации математики (1931); теорема о неполноте формальных систем (так называемая первая теорема Гёделя, или теорема о неполноте, 1930); теорема о невозможности доказать непротиворечивость формальной системы средствами самой системы (так называемая вторая теорема Гёделя, 1931); важные результаты об интерпретации конструктивной логики (1931—33); первое определение общерекурсивной функции (1934); установление непротиворечивости ряда важнейших гипотез теории множеств (1938).

Среди результатов Гёделя особое значение имеет теорема о неполноте, опубликованная в 1931 в его статье «О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем». В этой статье Гёдель показал, что в формальной системе, изложенной в сочинении Уайтхеда и Рассела «Principia Mathematica», и в других достаточно содержательных формальных системах (критерием содержательности является способность выразить арифметику натуральных чисел) имеются неразрешимые (т. е. недоказуемые и одновременно неопровержимые в данной системе) предложения. Теорема Гёделя о неполноте имеет важное логическое и гносеологическое значение, поскольку показывает невозможность полной формализации человеческого мышления.

Из теоремы о неполноте по существу вытекает и существование

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 338. (Соавтор: Софья Александровна Яновская.)

неразрешимых массовых проблем, а именно: неразрешимой является семантическая проблема разрешения любой достаточно содержательной формальной системы (однако это обстоятельство не могло быть обнаружено своевременно ввиду отсутствия чёткого понятия алгоритма, и первый пример неразрешимой массовой проблемы был опубликован лишь в 1936 независимо от результатов Гёделя; то, что существование неразрешимых массовых проблем вытекает из теоремы о неполноте, было осознано ещё позднее).

В начальный период своей деятельности Гёдель был членом Венского кружка неопозитивистов. Впоследствии выступил с критикой субъективизма Рассела и других в философских вопросах логики с позицией «реализма» и признания объективного характера логико-математических абстракций. В «реализме» Гёделя встречаются черты объективного идеализма в духе Платона.

Литература

[1] *Клини С. К.* Введение в метаматематику / Пер. с английского А. С. Есенина-Вольпина под ред. В. А. Успенского. — М.: ИЛ, 1957. — 526 с.

[2] *Nagel E.*, *Newman J.* Gödel's proof // Scientific American. — 1956. — V. 194. — N. 6. — P. 71—84, 86. [Русский перевод: *Нагель Э.*, *Ньюмен Дж. Р.* Теорема Гёделя / Сокр. пер. с английского Ю. А. Гастева. — (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика»; № 8). — М.: Знание, 1970. — 63 с.]

[3] *Подниекс К. М.* Вокруг теоремы Гёделя. — Рига: Зинатне, 1992. — 191 с.

[4] *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте. — М.: Физматлит, 1982. — 111 с.

[5] *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней // Математическое просвещение. — Сер. 3. — Вып. 15. — М.: МЦНМО, 2011. — С. 35—75.

[6] *Беклемишев Л. Д.* Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. I // Успехи математических наук. — 2010. — Т. 65. — Вып. 5 (395). — С. 61—106.

Гомоморфизм

ГОМОМОРФИЗМ (от греческих homós ⟨ὁμός⟩ — равный и morphḗ ⟨μορφή⟩ — образ) (в математике и логике). Гомоморфизмом называют такое соответствие между двумя системами объектов с определёнными для этих объектов отношениями, при котором: 1) каждому объекту первой системы поставлен в соответствие ровно один объект второй системы, и каждому отношению первой системы поставлено в соответствие ровно одно отношение второй системы; 2) если для некоторых объектов a, b, c, ... первой системы выполняется некоторое отношение S первой системы, то для объектов a', b', c', ... второй системы, соответствующих объектам a, b, c, ..., выполняется отношение S' второй системы, соответствующее отношению S. Вторая система объектов и отношений называется при этом гомоморфным образом первой. О гомоморфном образе какой-либо системы можно в определённом смысле говорить как о модели этой системы. В том частном случае, когда, во-первых, установленное между рассматриваемыми системами соответствие взаимно однозначно и, во-вторых, отношение S' выполняется во второй системе между объектами a', b', c', ... только тогда, когда соответствующее отношение S выполняется между соответствующими объектами a, b, c, ... первой системы, гомоморфизм называют изоморфизмом.

Пример гомоморфизма. Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторая система высказываний с определёнными для этих высказываний отношениями конъюнкции C и дизъюнкции D (для высказываний a, b, c тогда и только тогда выполняется отношение C, когда c есть конъюнкция высказываний a и b; для высказываний a, b, c тогда и только тогда выполняется отношение D, когда c есть дизъюнкция высказываний a и b). Пусть $\mathfrak{B}$ — система из двух чисел 0 и 1 с определёнными на этих числах отношениями K и L, где отношения K и L определены

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 387.

так: для чисел p, q, r тогда и только тогда выполняется отношение K, когда $p \cdot q = r$; для чисел p, q, r тогда и только тогда выполняется отношение L, когда $p + q - pq = r$. Поставим в соответствие каждому истинному высказыванию из системы $\mathfrak{A}$ число 1, каждому ложному высказыванию число 0, отношению C — отношение K, и отношению D — отношение L. Мы получим гомоморфизм между системами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, при котором $\mathfrak{B}$ является гомоморфным образом системы $\mathfrak{A}$.

Литература

[1] *Гастев Ю. А.* Гомоморфизмы и модели (логико-алгебраические аспекты моделирования). — М.: Наука, 1975. — 151 с.[1].

[1] ●➤ Заслуживает внимания выраженная в предисловии, на с. 4, благодарность Дж. Чейну и У. Стоксу. ◄●

От редактора перевода книги А. Чёрча «Введение в математическую логику»

I

В течение долгого времени математическая логика оставалась глубинной областью математики и логики, обслуживавшей внутренние потребности этих наук. Эхо больших естественнонаучных приложений математики докатывалось до этой области лишь через проблематику оснований математики. Что же касается логики, то она не имела и, казалось, не могла иметь никаких конкретных приложений; только в самые последние годы стало осознаваться её прикладное значение.

Разумеется, и роль «внутренней науки» является почтенной и необходимой. К тому же именно в этой роли математическая логика добилась выдающихся успехов (по крайней мере один из её результатов достоин того, чтобы быть известным каждому, кого интересуют возможности человеческого мышления: это так называемая теорема Гёделя о неполноте, утверждающая невозможность полной формализации процесса логического вывода).

Однако в течение последнего пятнадцатилетия установились новые связи между науками и открылись новые области приложений наук. Этот процесс, сопровождающийся одновременным проникновением математических методов во всё более широкие области знания, затронул и математическую логику. Можно указать по меньшей мере четыре обстоятельства, делающих математическую логику особенно актуальной в наши дни:

1. Одну из новых областей приложения математики составляют вопросы анализа и синтеза конечных автоматов. Важными представителями конечных автоматов являются релейно-контактные и электронные схемы, идеализированные «нервные сети» и т. п. При анализе и синтезе этих схем, сетей и т. п. с успехом используется

Опубликовано в книге: *А. Чёрч.* Введение в математическую логику. — Т. 1. — М.: ИЛ, 1960. — С. 5—11.

разработанный в математической логике для её собственных нужд формальный аппарат[1].

2. Пожалуй, наиболее «прикладной» отраслью математики является сейчас вычислительная математика. Существует глубокая связь между математической логикой и вычислительной математикой, основанная прежде всего на аналогии между процессами формального логического вывода и вычислительными процессами[2].

3. Происходящий сейчас «кибернетический переворот» ставит машины на места, которые ранее в системе обмена информацией занимали люди и их объединения (подобно тому как промышленный переворот поставил машины на места, которые занимали ранее люди и их объединения в системе промышленного производства). Общепризнанно, что замена людей машинами, способными воспринимать, перерабатывать, хранить и выдавать информацию, будет происходить во всё возрастающих масштабах. Чтобы успешно возложить на машины функции, долгое время считавшиеся исключительной привилегией человеческого интеллекта, необходим, очевидно, формально-логический анализ этих функций. Очевидно также, что при передаче машинам всё более и более сложных функций потребуется создание специального языка, или языков, машин, на котором информация будет храниться в машинах и передаваться от машины к машине. Целесообразно, по-видимому, чтобы этот язык был лишён неправильностей естественных языков и следовал бы логической форме, т. е. был бы «формализованным языком» в том смысле, как он описан в последнем абзаце § 00 книги Чёрча. Создание такого языка и тем более логический анализ возлагаемых на машины функций не есть, конечно, задача только математической логики, но математическая логика — понимаемая автором книги как «предмет формальной логики, изучаемый посредством построения формализованных языков», — может оказать тут существенную помощь.

4. Человечество накопило и продолжает со всё возрастающей быстротой накапливать огромные запасы информации в виде печатных текстов. Вопросы эффективного использования этой информации

---

[1] См.: Синтез электронных вычислительных и управляющих схем: Пер. с английского. — М.: ИЛ, 1954; Автоматы: Сборник статей / Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти: Пер. с английского. — М.: ИЛ, 1956; Сборник статей по математической логике и её приложениям к некоторым вопросам кибернетики. — (Труды Математического института им. Стеклова; Т. 51). — 1958.

[2] Эта связь подробно рассмотрена в статье: *А. А. Марков*. Математическая логика и вычислительная математика // Вестник Академии наук СССР. — 1957. — № 8. — С. 21—25.

уже сейчас приобрели характер важной самостоятельной научной задачи. Для её успешного решения необходимо провести логический анализ накопленной информации, что, в свою очередь, требует создания общих методов анализа логической структуры выраженной в виде печатного текста информации. На повестку дня встаёт и задача создания рациональных систем записи накапливаемой информации. (Все эти вопросы теснейшим образом связаны с вопросами автоматической обработки печатных текстов, тем более что некоторые виды человеческой деятельности — перевод, реферирование, создание справочников, каталогов, энциклопедий — сводятся по существу к преобразованию одних текстов в другие.) Решающая роль принадлежит здесь (наряду с лингвистикой) логике, и не в последнюю очередь — математической.

II

Выдающийся математик и логик, профессор математики Принстонского университета (США) Алонзо Чёрч (Alonzo Church) известен своим вкладом в математическую логику и теорию алгоритмов. Следующие два результата Чёрча оказали особенно сильное влияние на развитие этих дисциплин.

1. Построение в 1935 году (опубликовано в 1936 году) первого примера неразрешимой массовой проблемы[3].

2. Доказательство неразрешимости проблемы разрешения для узкого исчисления предикатов (или, по принятой в книге Чёрча терминологии, для чистого функционального исчисления первого порядка), т. е. доказательство того, что не существует алгоритма, который по виду формулы этого исчисления — описывающего значительный фрагмент логики — определял бы, выражает эта формула общелогическую истину или нет[4].

Алонзо Чёрч известен также как крупнейший знаток мировой литературы по математической логике. Им составлена знаменитая «Библиография математической логики»[5], ставящая себе целью дать

[3] Массовая проблема состоит в требовании найти алгоритм для решения некоторой серии (для каждой массовой проблемы своей) «единичных» проблем. Массовая проблема неразрешима, если её решения, т. е. требуемого алгоритма, не существует. Пример Чёрча опубликован в журнале: American Journal of Mathematics. — 1936. — V. 58. — N. 2. — P. 345—363.

[4] The Journal of Symbolic Logic. — 1936. — V. 1. — P. 40—42, 101—102.

[5] A bibliography of Symbolic Logic // The Journal of Symbolic Logic. — 1936. — V. 1. — P. 121—128; 1938. — V. 3. — P. 178—212.

свод всей литературы по математической логике от времени зарождения этой науки до 1935 года включительно.

Естественно, что появление монографии столь авторитетного автора было встречено с большим интересом. Изданный в качестве 17-го выпуска известной серии «Princeton Mathematical Series» первый том «Введения в математическую логику» быстро завоевал широкое признание и стал необходимой книгой для всякого, кто желает серьёзно изучить предмет. Том содержит описание метода математической логики и её первичных понятий (категорий математической логики, таких как «имя», «переменная», «форма» и т. п.) и изложение пропозиционального исчисления (в другой терминологии — исчисления высказываний) и функциональных исчислений двух первых порядков (в другой терминологии — исчислений предикатов двух первых ступеней). Он может быть использован как в качестве систематического курса, причём не требующего никаких специальных знаний, хотя и предполагающего довольно высокую математическую культуру, так и в качестве справочника, причём наиболее полного и удобного из существующих.

III

Первый том «Введения в математическую логику» Чёрча (второй том пока не опубликован[6]) отличается тщательным отбором материала. Всё подчинено основной задаче — изучению формальной логики путём построения формализованных языков. При этом каждый формализованный язык рассматривается в книге в соотнесении с другими формализованными языками — либо с языками, эквивалентными рассматриваемому и описывающими тот же, что и рассматриваемый язык, фрагмент формальной логики (так, автор говорит о различных формулировках пропозиционального исчисления), либо с языками, хотя и не эквивалентными рассматриваемому,

[6] ●➤ Алонзо Чёрч умер 11 августа 1995 года на 93-м году жизни (он родился 14 июня 1903 года), так и не написав второго тома. В августе 1966 года в Москве, в Главном здании Московского университета, проходил очередной Международный конгресс математиков. Чёрч приехал на конгресс, но (к удивлению многих) доклад делал не на секции математической логики и оснований математики, а на секции дифференциальных уравнений с частными производными. Его доклад назывался «Reduction of the Monge—Ampère equation» и состоялся 17 августа с 14 ч. 50 м. до 15 ч. 05 м. (Полагаю, что он придумал повод побывать в Москве.) Я воспользовался случаем, чтобы увидеть Чёрча и спросить о судьбе второго тома. И получил ответ, что второго тома не будет никогда. ◀●

но входящими вместе с ним в одно семейство близких друг другу языков (так, автор говорит о различных функциональных исчислениях первого порядка). Тем самым удаётся избежать утомительного параллелизма; одновременно делаются ясными основные черты языков, описывающих данный фрагмент логики, и не создаётся ложного впечатления, что пропозициональное или функциональное исчисление — это то, что жёстко описано на такой-то странице такого-то сочинения.

Книга Чёрча посвящена именно математической логике, а не основаниям математики, что отличает её от *Principia Mathematica* Уайтхеда и Рассела, от *Grundlagen der Mathematik* Гильберта и Бернайса и от *Introduction to Metamathematics* Клини; последняя книга вышла сравнительно недавно в русском переводе (*С. К. Клини*. Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957). Из имеющихся на русском языке книг к 1-му тому «Введения в математическую логику» ближе всего примыкают *Основы теоретической логики* Д. Гильберта и В. Аккермана (перевод с немецкого, 1947). Однако «Введение в математическую логику» значительно превосходит «Основы теоретической логики» как современностью и полнотой изложения, так и внимательностью к чисто логическим вопросам и чёткостью в употреблении основных понятий (не говоря уже о том, что во втором томе предполагается изложить такие совершенно не затронутые в книге Гильберта и Аккермана темы, как конструктивная логика, аксиоматическая арифметика и аксиоматическая теория множеств).

Изложение автора отличается необычайной полнотой — как в смысле полноты рассмотрения каждого вопроса, так и в смысле полноты круга рассматриваемых вопросов (с единственной оговоркой, что вовсе не рассматриваются вопросы модальной логики). В книге собран огромный материал, распылённый до этого по журнальным статьям, подчас в трудно доступных изданиях. Кажется, нет в литературе такой детали, относящейся к какому-либо из рассматриваемых в книге построений, которая не была бы соответствующим образом отмечена.

Чтобы не перегружать основной текст, автор относит значительную часть фактов в упражнения, разбитые на 30 циклов. Существенную часть содержания книги составляют 550 нумерованных (1—372, 400—486, 500—590) примечаний, служащих для примеров, сравнений, ссылок, дополнений, терминологических и исторических справок и т. д. (исторические вопросы освещаются также в двух специальных параграфах). В английском оригинале эти примечания были подстрочными, в русском издании они перенесены в конец

книги. Возможны различные способы использования этих примечаний — от чтения их параллельно основному тексту до полного их игнорирования при первом чтении. При намерении серьёзно проработать книгу лучше всего, пожалуй, читать каждый параграф по два раза — сперва один основной текст без примечаний, затем и основной текст, и примечания.

Наиболее замечательным разделом 1-го тома является Введение, содержащее систематическое описание основных первичных понятий математической логики и её метода. Ясность и последовательность, с которыми даётся это описание, вызывают восхищение. Выглядит, в частности, очень естественным, что первым рассматривается понятие имени (ведь дальнейшее изложение, каково бы оно ни было, неизбежно будет употреблять имена упоминаемых объектов; значит, надо прежде всего объяснить, что такое имя).

Введение можно рассматривать как самостоятельное литературное произведение и читать само по себе, без установки на чтение дальнейших глав. Оно может оказаться полезным и доступным и такому читателю, которому нет особой нужды или затруднительно читать всю книгу. Основные понятия и факты теории имён, прежде всего различение между предметом, обозначаемым именем, и смыслом, выражаемым именем, необходимо знать каждому научному работнику, заинтересованному в уточнении терминологии своей науки.

Характерные для Введения стремление к максимально отчётливому изложению и внимание к семантическим вопросам сохраняются на протяжении всей книги. Строя формализованные языки (даже такой простой, как пропозициональное исчисление), автор каждый раз чётко указывает его интерпретацию, не предполагая (как это сплошь и рядом делается в руководствах по математической логике) её саму собой разумеющейся или «постепенно выявляющейся». Там, где не было уверенности, передаёт ли русский перевод те же логические оттенки, что и английский текст, подлинный текст приводится в угловых скобках после русского перевода (подобная предосторожность тем более необходима, что автор нередко пользуется таким специфическим для английского языка приёмом, как терминологическое употребление определённого артикля).

IV

Русская математико-логическая терминология, к сожалению, ещё не устоялась, поэтому при выборе русских переводов английских терминов встречались иногда трудности. Английские прообразы для

русских терминов, входящих в предметный указатель (с. 461—477), могут быть восстановлены по этому указателю. В необходимых случаях английский термин, взятый в угловые скобки, следует за своим русским переводом непосредственно в тексте. Тем не менее представляется уместным обратить уже сейчас внимание читателя на употребление и перевод отдельных терминов.

1. В заключительной части § 07 термины «символическая логика», «математическая логика» и «логистика» объявляются синонимами (не смешивать логистику с логицизмом — направлением в философии математики!).

2. В самом начале § 08 проводится различие между синтаксисом в узком смысле (или просто *синтаксисом*) и синтаксисом в широком смысле (или *логическим синтаксисом*) и между *элементарным синтаксисом* и *теоретическим синтаксисом*.

3. Английский термин «sentence», понимаемый сперва как единица выражения в естественных языках и затем распространённый на формализованные языки, переводится русским термином «предложение» (употребляемом согласно с принятым в грамматике значением «слово или сочетание слов, выражающее законченную мысль»; см. Толковый словарь русского языка / Под ред. проф. Д. Н. Ушакова. — Т. III. — М., 1939. — С. 715).

4. Английский термин «proposition», означающий в книге Чёрча тó, что является смыслом предложения, которое может быть истинным или ложным, переводится русским термином «суждение». При этом, очевидно, принимается расширительное истолкование термина «суждение» по сравнению с истолкованием этого термина в отечественных руководствах по логике, где, как правило, рассматриваются лишь суждения, имеющие субъектно-предикатную структуру. Новое истолкование лишь расширяет старое, но не противоречит ему, поскольку всякое суждение в старом понимании является суждением в новом понимании. Совместное употребление терминов «суждение» и «предложение» — так, как это получилось в русском издании книги Чёрча в результате принятого перевода терминов «proposition» и «sentence», — согласуется, по-видимому (с учётом указанной расширительности истолкования), с употреблением этих терминов в отечественной литературе[7].

5. Термин «высказывание» имелось в виду оставить для того неопределённого случая, когда не уточняется, идёт ли речь о пред-

[7] ●●▶ Если бы сейчас переводили Чёрча на русский язык, то перевели бы «proposition» не как *суждение*, а как *пропозиция* — этот термин прочно вошёл, во многом благодаря Чёрчу, в русскоязычную лингвистику. ◀●●

ложении или о суждении (в разъяснённом только что понимании этих терминов). Именно с такой ситуацией сталкивается читатель книги Гильберта и Аккермана (с этой точки зрения употребление в русском переводе этой книги термина «высказывание» следует признать удачным).

6. Английский термин «decision problem» переводится русским термином «проблема разрешения», что является терминологическим новшеством. Раньше (см., например, русское издание книги Клини «Введение в метаматематику») это же понятие по навязчивой традиции неудачно обозначалось термином «проблема разрешимости». Представляется целесообразным отказаться, наконец, от этой традиции и проблему поиска разрешающей процедуры назвать проблемой разрешения. Проблемой разрешимости данной проблемы *A* естественно называть следующую проблему: «узнать, разрешима ли проблема *A*».

31 марта 1959 года.

Алгоритм[1]

Значение алгоритмов. — Примеры алгоритмов. — Основные черты алгоритмов. — Основные абстракции теории алгоритмов. — Основные понятия теории алгоритмов. — Связь теории алгоритмов с логикой. — Проблемы разрешения. — Неразрешимые массовые проблемы. — Сводимость. — Уточнения понятия алгоритма и сопутствующих понятий. — Литература.

АЛГОРИТМ (а л г о р и ф м) — одно из основных понятий логики и математики. Под алгоритмом понимают точное предписание, задающее вычислительный процесс, ведущий от начальных данных, которые могут варьироваться, к искомому результату.

Встречающиеся выше слова «вычисления», «вычислительный» не следует понимать в узком смысле цифровых вычислений. Так, уже в школьном курсе алгебры говорят о буквенных вычислениях, и хотя здесь буквы играют ещё роль заместителей чисел, уже в арифметических вычислениях появляются символы, не обозначающие никаких величин: скобки, знак равенства, знаки арифметических действий. Можно пойти дальше и рассматривать вычисления с произвольными символами и их комбинациями; именно в таком широком смысле и понимают термин «вычисления» при описании понятия 'алгоритм'. Так, можно говорить об алгоритме перевода с одного языка на другой, об алгоритме работы поездного диспетчера (перерабатывающего информацию о движении поездов в приказы) и других примерах алгоритмического описания процессов управления, изучаемых кибернетикой.

Значение алгоритмов

Само слово «алгоритм» восходит к 9 веку (оно происходит от Algoritmi, являющегося, в свою очередь, латинской транслитерацией,

Опубликовано в книге: Философская энциклопедия. — Т. 1. — М.: Сов. Энциклопедия, 1960. — С. 38—42.

[1] ●●▶ Читателю, решившему читать эту статью, рекомендуем, в качестве популярного вступления, ознакомиться с небольшой статьёй «Массовые задачи и алгоритмы» (см. с. 129—134 настоящей книги). ◀●●

произведённой, по-видимому, в 12 веке, арабского имени хорезмийского математика аль-Хорезми). В наши дни простейшие алгоритмы появляются уже в начальной школе — это алгоритмы арифметических действий (в средневековой Европе алгоритмом как раз и называлась современная школьная арифметика, десятичная позиционная система счисления и искусство счёта в ней, поскольку трактат аль-Хорезми был одним из первых, если не самым первым, благодаря которому Европа познакомилась с позиционной системой). Подчеркнём, что в начальной школе обучают именно алгоритмам счёта. Говоря об умении человека складывать числа, имеют в виду не то, что он для любых двух чисел рано или поздно сумеет найти их сумму, а то, что он владеет некоторым единообразным приёмом сложения, применимым к любым двум конкретным записям чисел, т. е., иными словами, алгоритмом сложения (примером такого алгоритма является известный алгоритм сложения чисел «столбиком»).

Алгоритмы встречаются в науке на каждом шагу, умение решать задачу «в общем виде» всегда означает, по существу, владение некоторым алгоритмом. Понятие задачи «в общем виде» уточняется при помощи понятия массовой проблемы. Под термином проблема всегда можно понимать задачу нахождения объекта, обладающего теми или иными свойствами; этот объект называют решением проблемы (в частности, для проблемы нахождения ответа на какой-то вопрос решением является ответ «да» или «нет» на поставленный вопрос). Проблема неразрешима в том и только в том случае, когда она не имеет решения, т. е. не существует объекта, обладающего нужными свойствами. Массовая проблема задаётся серией отдельных, «единичных» проблем и состоит в требовании найти общий метод (т. е. алгоритм) их решения. Неразрешимость массовой проблемы означает невозможность найти соответствующий алгоритм. Массовые проблемы чрезвычайно характерны и важны для логики и математики. Даже решение единичных проблем часто ценно именно благодаря тому, что одновременно даёт общий метод для решения целого класса проблем; в то же время постановка массовой проблемы означает превращение некоторого класса проблем в единичную проблему — проблему нахождения алгоритма для решения всех проблем этого класса; здесь проявляется связь таких категорий диалектики, как единичное, особенное и всеобщее. Ролью массовых проблем и определяется значение алгоритмов.

Установление неразрешимости той или иной массовой проблемы (т. е. отсутствия единого алгоритма, позволяющего найти решения всех единичных проблем данной серии) является важнейшим

познавательным актом, показывающим, что для решения конкретных единичных проблем принципиально необходимы специфические для каждой такой проблемы методы. Существование неразрешимых массовых проблем служит, таким образом, конкретным воплощением неисчерпаемости процесса познания.

Содержательные явления, которые легли в основу образования понятия «алгоритм», издавна занимали важное место в науке. Многие задачи, возникавшие в математике и логике, заключались в поисках тех или иных конструктивных методов. Поиски таких методов, особенно усилившиеся в связи с созданием удобной математической и логической символики, а также осмысление принципиального отсутствия этих методов в ряде случаев — всё это было мощным фактором развития научного знания. Осознание невозможности решить любую задачу прямым вычислением привело к созданию в 19-м веке теоретико-множественной концепции. Лишь после периода бурного развития этой концепции (в рамках которой вопрос о конструктивных методах в современном их понимании вообще не возникает) оказалось возможным в последние десятилетия вновь вернуться к вопросам конструктивности, но уже на новом уровне, обогащённом выкристаллизовавшимся понятием «алгоритма» (ещё одна иллюстрация к тезису о спиралеобразном характере развития познания).

Примеры алгоритмов

Подобно понятиям 'множество', 'соответствие', 'натуральное число', 'отношение' и т. п., понятие 'алгоритм' является первичным логико-математическим понятием (одной из категорий логики и математики). Оно не допускает формального определения через более простые понятия, а (как и другие математические категории) абстрагируется непосредственно из опыта. Понятие 'алгоритм' может быть усвоено лишь на примерах.

Пример 1. Возможными начальными данными являются конечные непустые комбинации, составленные из палочек (|), т. е. объекты |, ||, ||| и т. д. Алгоритм состоит из следующих правил (выполнять которые надлежит начиная с правила 1°):

1°. Подчеркни снизу крайнюю слева палочку и перейди к выполнению правила 2°.

2°. Надчеркни сверху крайнюю справа палочку и перейди к выполнению правила 3°.

3°. Рассмотри подчёркнутую палочку и, если она не надчёркнута, перейди к выполнению правила 4°.

4°. Рассмотри палочку, непосредственно следующую за подчёркнутой; если она не надчёркнута, перейди к выполнению правила 5°, если же она надчёркнута, перейди к выполнению правила 7°.

5°. Перенеси нижнюю чёрточку с подчёркнутой палочки на непосредственно за ней следующую и перейди к выполнению правила 6°.

6°. Перенеси верхнюю чёрточку с надчёркнутой палочки на непосредственно ей предшествующую и перейди к выполнению правила 3°.

7°. Сотри надчёркнутую палочку и все следующие за нею палочки и перейди к выполнению правила 8°.

8°. Сотри нижнюю чёрточку у подчёркнутой палочки; то, что получилось, и есть результат.

Применяя этот алгоритм к комбинации $||||$, взятой в качестве начального данного, получим последовательно: по правилу 1° — $\underline{|}|||$, по правилу 2° — $\underline{|}||\overline{|}$, по правилам 3°, 4°, 5° — $||\underline{|}\overline{|}$, по правилам 6°, 3°, 4° — $||\underline{|}\overline{|}|$, по правилу 7° — $||\underline{|}$, по правилу 8° — $||$ (результат). Если же попытаться применить алгоритм к комбинации $|||$, то получим: по правилу 1° — $\underline{|}||$, по правилу 2° — $\underline{|}|\overline{|}$, по правилам 3°, 4°, 5° — $|\underline{|}\overline{|}$, по правилу 6° — $|\underline{|}\overline{|}$, далее нужно перейти к выполнению правила 3°, но правило 3° выполнимо лишь при условии, что подчёркнутая палочка не надчёркнута. Таким образом, для создавшейся ситуации алгоритм не содержит указаний, как поступать дальше; произошла так называемая безрезультатная остановка (остановка, не сопровождающаяся получением результата). Легко подметить, что вообще сформулированный алгоритм даёт результат при применении его к любой комбинации из чётного числа палочек, и результатом в этом случае является комбинация, состоящая из половинного числа палочек; алгоритм не даёт результата в применении к любой комбинации, состоящей из нечётного числа палочек.

Пример 2. В логике и математике всякий конечный набор знаков называется «алфавитом», входящие в него знаки — «буквами» алфавита, а конечная (в том числе пустая) последовательность написанных друг за другом букв какого-либо алфавита называется «словом» в этом алфавите. Например, арабские цифры образуют алфавит, а всякая десятичная запись целого числа является словом в этом алфавите.

Рассмотрим алфавит (a, b) из двух букв: a и b. Примерами слов в этом алфавите являются: b, ab, aba, $aaababb$ и т. д. Условимся называть «допустимым» переход от слова в этом алфавите к другому слову в этом же алфавите согласно одному из следующих двух правил:

1) если слово имеет вид *aP*, где *P* — произвольное слово, перейти к слову *Pb*;

2) если слово имеет вид *baP*, где *P* — произвольное слово, перейти к слову *Paba*.

Далее формулируется следующее предписание: «исходя из какого-либо слова (взятого в качестве начального данного), делай допустимые переходы до тех пор, пока не получится слово вида *aaP*; когда слово такого вида получится, отбрось первые две буквы, а то, что останется, и есть результат». Поскольку каждый раз выполнимо не более одного правила перехода, то сформулированное предписание образует алгоритм, возможными начальными данными которого служат слова в алфавите (*a*, *b*). Возьмём в качестве начальных данных слово *babaa*. Согласно правилу 2 получим *baaaba*. Снова применяя правило 2, получим *aabaaba*. В силу нашего предписания надо остановиться; результатом (применения алгоритма к слову *babaa*) является *baaba*. Возьмём в качестве начальных данных слово *baaba*. По правилу 2 получим *abaaba*. По правилу 1 получим *baabab*. Далее получим последовательно *abababa*, *bababab*, *babababa* и т. д. Можно доказать, что процесс никогда не закончится (т. е. никогда не возникает слово, начинающееся с двух букв *a*, и для каждого из получающихся слов можно будет совершить допустимый переход). Таким образом, алгоритм не даёт результата при применении к слову *baaba*. Возьмём в качестве начальных данных слово *abaab*. Последовательно получим *baabb*, *abbaba*, *bbabab*. Далее ни одно из правил 1 и 2 не выполнимо, и в то же время результат не получился. Поэтому в применении к слову *abaab* алгоритм также не даёт результата.

Основные черты алгоритмов

По утверждению советского логика и математика А. А. Маркова младшего, для алгоритмов характерны следующие основные черты: а) определённость алгоритмического предписания, заключающаяся в его не оставляющей места произволу точности и общепонятности (в силу этой определённости предписания алгоритмический процесс является детерминированным: каждая стадия процесса однозначно определяет следующую стадию); б) массовость, заключающаяся в возможности для каждого алгоритма исходить из варьируемых в известных пределах начальных данных; в) результативность, заключающаяся в направленности его на получение искомого результата. Детерминированность алгоритма обеспечивает возможность сообщения

его одним лицом другому лицу с тем, что это другое лицо сможет выполнять алгоритм без участия первого; это же свойство детерминированности делает возможным передачу выполнения алгоритма машине. Массовость алгоритма предполагает, что существует некоторая совокупность (для каждого алгоритма своя) возможных начальных данных. Как задаётся эта совокупность — это уже другой вопрос. Можно считать, что соответствующая какому-либо алгоритму совокупность возможных начальных данных не задаётся отдельно от алгоритма, а указывается естественным образом самим содержанием этого алгоритма (так, для алгоритма сложения столбиком соответствующая совокупность состоит из всех пар записей чисел в десятичной системе). Когда какой-то конкретный объект выбирается в качестве начального данного алгоритма, то, следуя А. А. Маркову, говорят о применении алгоритма к этому объекту. Если алгоритм даёт результат при применении его к некоторому объекту, то говорят, что он применим к этому объекту. Результативность алгоритма вовсе не означает, что алгоритм обязан быть применимым к любому объекту из соответствующей совокупности возможных начальных данных (см. примеры 1 и 2). Здесь уместно отметить, что можно построить такой алгоритм, для которого не существует никакого алгоритма, который распознавал бы по произвольным начальным данным первого алгоритма, применим к ним первый алгоритм или нет.

Основные абстракции теории алгоритмов

В научной практике сложился ряд специфичных для математики и логики абстракций. Таковы прежде всего *абстракция актуальной бесконечности*, *абстракция отождествления*, *абстракция потенциальной осуществимости*. А. А. Марков показал, что две последние необходимы при рассмотрении алгоритмов. Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги, каждый из которых предполагается настолько элементарным, что возможность его фактического осуществления не вызывает сомнений. Вместе с тем число этих элементарных шагов, требующееся для получения результата, может быть настолько велико, что достижение результата может считаться практически неосуществимым. Однако представление о практической осуществимости или неосуществимости того или иного числа шагов является относительным. Оно меняется с развитием вычислительных средств (в принципе может меняться и представление об элементарности отдельного шага). В теории алгоритмов поэтому отвлекаются от «практической осуществимости» и считают осуществимым любое

конечное число шагов. Тем самым при изучении алгоритмов допускают абстракцию потенциальной осуществимости, состоящую в отвлечении от реальных границ наших возможностей. Развитие быстродействующих электронных вычислительных машин быстро отодвигает эти границы всё дальше и дальше. То, что было лишь потенциально осуществимым вчера, становится практически осуществимым сегодня. Это сближает теорию алгоритмов с практикой работы на вычислительных машинах и позволяет этим двум дисциплинам взаимно обогащать друг друга. Передача машине решения задач какой-либо серии невозможна без предварительного составления алгоритма решения. Составление такого алгоритма имеет, как правило, принципиальное значение (так, в проблеме машинного перевода основным является именно составление алгоритма перевода).

Абстракция потенциальной осуществимости необходима при рассмотрении не только алгоритмических процессов, но и самих объектов, участвующих в этих процессах (в том числе «начальных данных» и «результатов»). Так, чтобы говорить о любом натуральном числе (точнее, о записи этого числа, скажем, в десятичной системе), надо разрешить себе рассматривать записи столь больших чисел, что эти записи не уместились бы на земном шаре; таким образом, и здесь, отвлекаясь от физической осуществимости такой записи, используют абстракцию потенциальной осуществимости. Вообще к абстракции потенциальной осуществимости необходимо прибегнуть для того, чтобы рассуждать о сколь угодно длинных словах в заданном алфавите.

Объекты, построение и рассмотрение которых возможно в рамках абстракции потенциальной осуществимости (при противопоставлении её абстракции актуальной бесконечности), называются конструктивными объектами. Таковы натуральные числа, представленные своими записями в какой-либо системе их обозначений, слова в заданном алфавите и т. д., а также пары, тройки и вообще конечные последовательности, составленные из записей чисел, слов в алфавите и т. п.; рациональные числа (которые можно представить как тройки натуральных) и др. Конструктивными объектами являются и выражения так называемых исчислений, или формальных систем, что позволяет применить к последним аппарат теории алгоритмов. Всякий алгоритм (понимаемый как предписание) может (после записи этого предписания в виде комбинации каких-то символов) рассматриваться как конструктивный объект. Напротив, объекты, рассмотрение которых невозможно без привлечения абстракции актуальной бесконечности, не относятся к числу конструктивных объектов. Так,

например, конструктивными объектами не являются действительные числа (в смысле Кантора, Дедекинда или Вейерштрасса), геометрические точки (поскольку анализ такой абстракции, как 'точка', приводит к представлению о точке как об актуально бесконечной системе малых тел) и т. д. Конструктивные объекты группируются естественным образом в совокупности, примерами которых служат совокупность всех слов в данном алфавите и вообще любая совокупность всех объектов какого-либо «типа» из числа перечисленных выше типов конструктивных объектов. Каждая такая совокупность конструктивных объектов задаётся способом конструирования принадлежащих к ней объектов.

Другой основной абстракцией, используемой при рассмотрении конструктивных объектов и алгоритмов, является абстракция отождествления. В некоторых случаях о двух объектах говорят как об одинаковых. Условия «одинаковости» устанавливаются каждый раз применительно к данной ситуации. Так, например, при производстве вычислений человеком на бумаге обычно бывает безразличным шрифт, которым пишутся цифры, и записи *1647* и 1647 рассматриваются как одинаковые; однако можно представить себе ситуации, когда существенно различие прямого и курсивного шрифтов (как, например, при восприятии слов, встречающихся в Философской Энциклопедии). Тогда записи *1647* и 1647 уже не будут рассматриваться как одинаковые, но записи 1647 и 1647 (два числа, набранные одним и тем же шрифтом в разных местах страницы) всё равно скорее всего будут рассматриваться как одинаковые. Обычно принимают, что конструктивные объекты состоят из некоторых достаточно простых «элементарных частей» (подобно тому, как слова — из букв) и два конструктивных объекта считаются одинаковыми, если они состоят из одинаковых элементарных частей, расположенных в одинаковом порядке. Без понятия «одинаковости», на основе которого считаются, например, одинаковыми цифры, написанные мелом на доске, и цифры, написанные чернилами в тетради, невозможно обучение. Абстракция отождествления позволяет говорить об одинаковых объектах как об одном и том же объекте. Она приводит к образованию понятия 'абстрактного объекта': именно, два одинаковых конкретных объекта считаются представителями одного и того же абстрактного объекта. Каждый алгоритм, применённый к одинаковым объектам, приводит также к одинаковым объектам. Поэтому можно считать, что каждый алгоритм задаёт процесс преобразования абстрактных конструктивных объектов. Это свойство алгоритмов (вместе с детерминированностью) обусловливает их повторимость

или воспроизводимость: будучи выработан в форме алгоритма над абстрактными конструктивными объектами, алгоритм может быть повторно воспроизведён для любых конкретных конструктивных объектов, допустимых для данного алгоритма.

Из сказанного должно стать ясным, что начальные данные равно как окончательные результаты, возникающие при осуществлении какого-либо алгоритма, суть всегда конструктивные объекты (всякое «состояние» алгоритмичного процесса есть конструктивный объект!). Невозможность даже потенциально осуществимых процессов над неконструктивными объектами связана и с отсутствием способа опознавания их как одинаковых или неодинаковых (ср. известное положение кибернетики о преимуществах дискретных форм хранения информации перед непрерывными).

Существуют различные точки зрения относительно методов, допустимых при изучении алгоритмов. Одна из них, выдвигаемая представителями конструктивного направления в математике и логике, состоит в том, что, поскольку для образования понятия алгоритма достаточно абстракций отождествления и потенциальной осуществимости, то развитие теории алгоритмов должно вестись в рамках этих абстракций. Другая точка зрения допускает при изучении алгоритмов любые методы, вообще допускаемые в логике и математике, в том числе и требующие абстракции актуальной бесконечности. Так, можно себе представить случай, когда для доказательства того, что некоторый алгоритм, будучи применён к некоторому объекту, даст результат, потребуется использование тесно связанного с абстракцией актуальной бесконечности закона исключённого третьего.

Основные понятия теории алгоритмов

К числу основных понятий, возникающих на основе понятия алгоритма, относятся понятия *вычислимой функции*, *разрешимого множества* и *перечислимого множества*. Функция называется *вычислимой*, коль скоро существует алгоритм, *вычисляющий* эту функцию в следующем смысле: а) алгоритм применим к любому объекту, входящему в область определения функции, и даёт в качестве результата то значение функции, которое она принимает для этого объекта, взятого в качестве её аргумента; б) алгоритм не применим ни к какому объекту, не входящему в область определения функции. Множество,

расположенное в некоторой совокупности конструктивных объектов (т. е. множество, составленное из каких-то объектов этой совокупности), называется р а з р е ш и м ы м (относительно объемлющей совокупности), коль скоро существует алгоритм, р а з р е ш а ю щ и й это множество (относительно указываемой совокупности) в следующем смысле: алгоритм примени́м к любому объекту из объемлющей совокупности и даёт в качестве результата ответ на вопрос, принадлежит ли этот объект рассматриваемому множеству или нет. Наконец, непустое множество называется п е р е ч и с л и м ы м, коль скоро существует алгоритм, п е р е ч и с л я ю щ и й это множество в следующем смысле: а) результат применения алгоритма к любому натуральному числу существует и принадлежит рассматриваемому множеству; б) каждый элемент рассматриваемого множества может быть получен как результат применения алгоритма к некоторому натуральному числу. По определению, пустое множество также относят к классу перечислимых. Одна и та же вычислимая функция (соответственно, разрешимое множество, перечислимое множество) может вычисляться (соответственно, разрешаться, перечисляться) посредством различных алгоритмов. Из определений вытекает, что аргументы и значения вычислимой функции, элементы разрешимого или перечислимого множества суть всегда конструктивные объекты. Заменяя конструктивные объекты (некоторой фиксированной совокупности) их номерами в произвольной алгоритмической нумерации (т. е. такой нумерации, для которой существует алгоритм получения по объекту его номера и обратно), можно, как это часто делают в теории алгоритмов, ограничиться рассмотрением лишь таких вычислимых функций, аргументы и значения которых суть натуральные числа, и лишь таких разрешимых и перечислимых множеств, элементы которых суть также натуральные числа.

Можно доказать, что всякое разрешимое множество перечислимо. В то же время удалось построить перечислимое множество, не являющееся разрешимым. Этот первый конкретный пример (опубликован американским логиком и математиком А. Чёрчем в 1936 в статье «Одна неразрешимая проблема элементарной теории чисел») отсутствия алгоритма (а именно, алгоритма, разрешающего построенное множество) явился источником или образцом почти всех дальнейших примеров такого рода. Оказалось, что множество разрешимо тогда и только тогда, когда перечислимо и оно, и его дополнение (до объемлющей совокупности объектов). Таким образом, существуют такие дополнения к перечислимым множествам, которые сами неперечислимы.

Связь теории алгоритмов с логикой

Понятия разрешимого и перечислимого множеств тесно связаны с классификацией определений (мы ограничиваемся здесь лишь такими определениями, каждое из которых определяет объекты некоторого типа или, что то же самое, некоторый класс объектов). Как известно существуют две основные схемы определений: «через род и видовое отличие» и «по индукции».

При определении через род и видовое отличие задаётся некоторая объемлющая совокупность объектов («род») и указывается признак («видовое отличие»), выделяющий среди объектов указанной совокупности класс определяемых объектов. Если предполагать, что это определение конструктивно, т. е. что объекты конструктивны и что наличие или отсутствие видового отличия у элемента рода алгоритмически распознаваемо, то определяемое множество оказывается разрешимым (и каждое разрешимое множество можно определить таким образом). Тем самым разрешимые множества отождествляются с множествами, конструктивно определяемыми через род и видовое отличие.

Определение по индукции состоит из двух частей: базисной части, содержащей некоторый перечень объектов, которые объявляются принадлежащими к определяемому классу, и индуктивной части, гласящей, что если объекты такого-то и такого-то вида принадлежат к определяемому классу, то и объекты такого-то и такого-то вида, связанные с первыми объектами некоторым отношением, также принадлежат к определяемому классу. (Возможны и более сложные случаи так называемых перекрёстных определений, когда одновременно определяется друг через друга несколько классов объектов.) Если предполагать определение конструктивным, т. е. объекты — конструктивными, перечень исходных объектов, содержащийся в базисной части, — конечным, а содержащиеся в индуктивной части правила перехода от уже определённых объектов к новым — алгоритмическими (в том смысле, что наличие или отсутствие отношения, о котором идёт речь в индуктивной части, распознаётся посредством какого-то алгоритма), то мы приходим к понятию множества, конструктивно определяемого по индукции, или (синоним) эффективно порождаемого множества (поскольку такое определение задаёт эффективный порождающий процесс, на отдельных этапах развёртывания которого «возникают» или «порождаются» определяемые объекты). Примером конструктивного определения по индукции служит определение допустимых

шахматных позиций (т. е. позиций, которые могут возникнуть на доске в процессе игры). Базисная часть содержит одну-единственную исходную позицию. Индуктивная часть содержит правила ходов фигур. Множество допустимых позиций, таким образом, эффективно порождаемо. Другим примером эффективно порождаемого множества служит множество всех доказуемых формул какой-либо формальной системы, или исчисления: базисная часть определения доказуемых формул содержит аксиомы, индуктивная часть — правила вывода (аксиомы объявляются доказуемыми по определению и далее говорится, что если какие бы то ни было формулы доказуемы, то и формулы, полученные из них по правилам вывода, также доказуемы). Порождающим процессом является здесь процесс доказательства всех доказуемых формул. Наконец, процесс опровержения всех опровержимых формул исчисления также является примером эффективного порождающего процесса.

Понятие эффективного порождающего процесса очень тесно связано с понятием алгоритма. Выше мы дали определение (приблизительное) эффективного порождающего процесса, опирающееся на понятие алгоритма. В свою очередь, понятие порождающего процесса позволяет определить на его основе если не само понятие алгоритма, то, во всяком случае, понятие вычислимой функции. Действительно, пусть некоторый порождающий процесс способен порождать объекты, имеющие вид пар (x, y), и пусть у любых двух порождённых пар с совпадающими первыми членами совпадают и вторые члены. Тогда этот процесс следующим образом определяет функцию $y = f(x)$: функция определена для объекта x_0 тогда и только тогда, когда x_0 есть первый член какой-либо порождённой пары; значение функции для аргумента x_0 равно в таком случае второму члену этой пары. Функция, определённая в указанном смысле эффективным порождающим процессом, очевидно, вычислима [чтобы найти $f(x_0)$, надо развёртывать процесс до тех пор, пока не найдём пары с x_0 в качестве первого члена]. Обратно, всякую вычислимую функцию можно определить посредством эффективного порождающего процесса. Алгоритмические процессы и порождающие процессы близки друг другу с логической точки зрения. В основании каждого из них лежат лишь конструктивные понятия. Различие между ними состоит в том, что алгоритмический процесс развёртывается на основе т р е б о в а н и я, а порождающий — на основе р а з р е ш е н и я действовать определённым образом. Здесь проявляется различие между н е о б х о д и м ы м и в о з м о ж н ы м (в алгоритмическом процессе каждый этап однозначно, т. е. с необходимостью,

определяется предыдущим этапом, в то время как при развёртывании порождающего процесса после каждого этапа возникает лишь множество возможностей для следующего этапа).

При надлежащих уточнениях понятия эффективного порождающего процесса выясняется, что каждое эффективно порождаемое множество перечислимо, и обратно. Это обстоятельство, в сочетании с приведёнными выше взаимоотношениями между перечислимым и разрешимым множествами, позволяет заключить следующее. Всякий класс объектов, допускающий конструктивное определение через род и видовое отличие, допускает и конструктивное определение по индукции, но не обратно: существует класс объектов, конструктивно определяемый по индукции, но не допускающий конструктивного определения через род и видовое отличие; дополнение к этому классу объектов (до объемлющей совокупности конструктивных объектов) не допускает эффективного индуктивного определения. Каждый конструктивный порождающий процесс можно представить в виде процесса получения доказуемых формул подходящего исчисления. Поэтому пример класса, обладающего только что описанными свойствами, можно построить в виде класса всех доказуемых формул некоторого исчисления. Более того, оказалось, что это обстоятельство имеет место для любого достаточно содержательного исчисления (например, для исчисления предикатов или для исчислений, формализующих арифметику): если исчисление достаточно содержательно, то в нём можно выразить любой эффективный порождающий процесс. Класс всех доказуемых формул такого исчисления (являясь, конечно, перечислимым) не является разрешимым, так что не существует алгоритма, распознающего доказуемость формул исчисления; в этом смысле говорят, что исчисление н е р а з р е ш и м о. Поскольку класс всех доказуемых формул исчисления не является разрешимым, то дополнительный к нему класс всех недоказуемых формул не является перечислимым и, следовательно, не может быть получен никаким порождающим процессом; в частности, невозможно построить такое исчисление, в котором «опровергались» бы все недоказуемые формулы исходного исчисления и только они; тем более, все эти недоказуемые формулы не могут быть опровергнуты средствами самого исходного исчисления, так что в исходном исчислении имеются так называемые неразрешимые (т. е. ни доказуемые, ни опровержимые) формулы. В этих рассуждениях можно ограничиться лишь такими формулами, которые при содержательной интерпретации исчисления выражают осмысленные (т. е. либо истинные, либо ложные) суждения, и обнаружить, следовательно, и среди таких формул

неразрешимые. Отсюда вытекает, что можно предъявить формулу, выражающую истинное суждение, но не доказуемую в исчислении; в этом смысле говорят, что исчисление неполно. Подчеркнём, что в силу общего характера проводимых рассуждений свойство неполноты присуще любому достаточно содержательному исчислению.

Понятие неразрешимости исчисления опирается на понятие алгоритма, и не удивительно, что факт неразрешимости устанавливается на основе исследований в области теории алгоритмов. Весьма существенным (и, может быть, неожиданным на первый взгляд) является то обстоятельство, что такой общелогический факт, как неполнота исчислений (факт, выражающий принципиальную невозможность полностью формализовать процесс логического вывода и впервые строго доказанный австрийским логиком и математиком К. Гёделем ещё в 1931, до уточнения понятия «алгоритм»), может быть получен, как мы только что видели, средствами теории алгоритмов. Это обстоятельство уже одно показывает огромные возможности применений теории алгоритмов к вопросам логики. Эти применения не ограничиваются приведённым примером. Ещё в 1932 А. Н. Колмогоров предложил истолкование созданной интуиционистами конструктивной логики при помощи содержательных средств, не имеющих никакого отношения к установкам интуиционизма; именно, каждое предложение конструктивной логики Колмогоров предложил истолковывать как проблему. Понятие проблемы требовало, однако, конкретизации, которая могла быть дана только на базе уже разработанной теории алгоритмов. Два конкретных класса проблем, пригодных для интерпретации конструктивной логики, предложили, соответственно, американский логик и математик С. К. Клини в 1945 и советский логик и математик Ю. Т. Медведев в 1955. В 1956 советский логик и математик Н. А. Шанин выдвинул новую концепцию, согласно которой не всякое высказывание конструктивной логики требует истолкования в виде проблемы.

К этому кругу идей примыкают вопросы «конструктивизации», или «нахождения конструктивных аналогов», классических математических понятий и предложений; решение этих вопросов также возможно лишь на основе теории алгоритмов. Конструктивизация основных понятий математического анализа привела к разрабатываемому сейчас так называемому конструктивному математическому анализу. Намечаются пути конструктивизации и других математических теорий. Одним из основных приёмов, используемых при конструктивизации, является переход от изучаемых предметов к их именам, которые всегда являются конструктивными объектами.

Проблемы разрешения

Частным случаем массовых проблем являются проблемы разрешения. Проблема разрешения какого-либо множества есть проблема построения алгоритма, разрешающего это множество. Соответственно серия единичных проблем состоит здесь из проблем ответа на вопрос о принадлежности к множеству, поставленный для каждого объекта из объемлющей совокупности конструктивных объектов. Обратно, всякая массовая проблема, соответствующая серии единичных проблем ответа на вопрос, может быть рассмотрена как проблема разрешения некоторого множества, а именно — множества тех единичных проблем, ответом на которые служит «да». Отсюда ясна важная роль проблем разрешения. Именно они подвергались изучению с точки зрения их разрешимости. Среди проблем разрешения выделяются проблемы, поставленные для классов доказуемых формул исчислений. Проблема разрешения класса всех доказуемых формул какого-либо исчисления называется также проблемой разрешения самого исчисления. (В русских текстах проблему разрешения называли ранее «проблемой разрешимости»; однако «проблемой разрешимости» лучше называть проблему: «ответить, имеет ли решение данная проблема разрешения».)

Неразрешимые массовые проблемы

Проблема разрешения для какого-либо исчисления всегда есть проблема разрешения перечислимого множества. Вообще все естественно возникавшие в математике проблемы разрешения оказывались проблемами разрешения перечислимых множеств. Таков упоминавшийся выше первый пример неразрешимой проблемы разрешения (и одновременно первый пример неразрешимой массовой проблемы вообще), опубликованный Чёрчем в 1936. Такова так называемая проблема тождества для ассоциативных систем, доказательства неразрешимости которой опубликовали в 1947 независимо друг от друга А. А. Марков и американский логик и математик Э. Л. Пост; этот результат представляет интерес как первый пример доказательства неразрешимости массовой проблемы, возникшей (ещё в 1914) вне логики и теории алгоритмов. Такова и знаменитая проблема тождества для групп, поставленная ещё в 1912, неразрешимость которой доказана в 1952 советским логиком и математиком П. С. Новиковым (Ленинская премия, 1957). Каждая из проблем

тождества состоит в отыскании алгоритма, устанавливающего эквивалентность или неэквивалентность двух слов в заданном алфавите (от того или иного определения эквивалентности зависит, имеем ли мы дело с ассоциативной системой или её частным случаем — группой). Поэтому проблему тождества можно рассматривать как проблему разрешения множества всех пар эквивалентных друг другу слов (относительно совокупности всевозможных пар слов). При этом, поскольку можно задать порождающий процесс получения всех пар эквивалентных друг другу слов, множество всех таких пар перечислимо.

Сводимость

Начиная с примера Чёрча 1936 и по 1944 все доказательства неразрешимости массовых проблем проводились или могли быть проведены следующим единообразным методом. Заведомо неразрешимая проблема, исследованная Чёрчем, сводилась к рассматриваемой массовой проблеме, так что если бы рассматриваемая массовая проблема была разрешимой, то оказалась бы разрешимой и проблема Чёрча (в этом смысле можно сказать, что доказательство неразрешимости рассматриваемой проблемы сводилось к доказательству неразрешимости проблемы Чёрча). Возник вопрос, для всякой ли неразрешимой проблемы разрешения её неразрешимость может быть установлена таким способом. Этот вопрос, получивший название проблемы сводимости, был поставлен Постом в 1944; одновременно Пост привёл несколько примеров неразрешимых проблем разрешения, неразрешимость которых была установлена им методом, отличным от описанного выше (эти примеры не решали ещё проблему сводимости, поскольку оставался открытым вопрос, нельзя ли и для них найти такие доказательства неразрешимости, которые сводились бы к доказательству неразрешимости проблемы Чёрча; впоследствии для некоторых из указанных примеров такие доказательства были действительно найдены). Проблема сводимости стояла в центре исследований по теории алгоритмов вплоть до 1956, когда она была решена независимо советским логиком и математиком А. А. Мучником и американским логиком и математиком Р. М. Фридбергом. Был построен пример неразрешимой проблемы разрешения (для перечислимого множества), неразрешимость которой нельзя доказать сведением к этой проблеме проблемы Чёрча. Мучник показал даже больше, а именно, что не только проблема Чёрча, но и никакая другая проблема не может служить «стандартной неразрешимой проблемой» в том смысле, что доказательство

неразрешимости любой неразрешимой проблемы разрешения для перечислимого множества могло бы быть сведено к доказательству неразрешимости этой стандартной проблемы.

Уточнения понятия алгоритма и сопутствующих понятий

Получение результатов о несуществовании алгоритмов невозможно без дальнейшего уточнения и формализации понятия «алгоритм». Уточнение этого понятия возможно лишь в виде описания некоторого конкретного класса алгоритмов, претендующего на то, что любой алгоритм может быть заменён равносильным алгоритмом из этого класса. Подобные уточнения стали появляться начиная с 1936, когда Э. Л. Пост и английский логик и математик А. М. Тьюринг независимо друг от друга предложили сходные определения абстрактных вычислительных машин, предназначенных для выполнения алгоритмических процессов. (Замечательно, что эти определения, появившиеся до создания быстродействующих вычислительных машин, предвосхитили многие существенные черты последних.) В 1950 А. А. Марков описал специальный класс алгоритмов (названных им «нормальными алгорифмами»), осуществляющих преобразование слов; на базе этого уточнения он впервые разработал систематическую теорию алгоритмов. В 1953 А. Н. Колмогоров ввёл в рассмотрение алгоритмы, перерабатывающие топологические комплексы. Существуют и другие уточнения понятия алгоритма.

Все они исходят из следующих общих представлений (или легко могут быть сведены к этим общим представлениям). Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные, достаточно элементарные шаги. Каждый шаг состоит в смене одного состояния процесса другим (начальное данное и служит начальным состоянием). Переход от какого-либо состояния к непосредственно следующему происходит на основе так называемых правил непосредственной переработки, предполагаемых достаточно элементарными. Некоторые состояния опознаются как заключительные (на основе достаточно элементарных правил окончания) и из них извлекается окончательный результат (также на основе достаточно элементарных правил). При применении алгоритма к какому-либо объекту возможны три пути протекания алгоритмического процесса: 1) каждое состояние сменяется следующим, и процесс никогда не останавливается; 2) на некотором шаге возникает состояние, к которому не применимы ни правила непосредственной переработки, ни правила

окончания, и происходит безрезультатная остановка; 3) на некотором шаге возникает состояние, опознаваемое как заключительное, и происходит результативная остановка, сопровождающаяся получением окончательного результата. Алгоритм, следовательно, применим лишь к тем объектам, для которых алгоритмический процесс развивается по третьему пути.

Каждое из известных уточнений понятия алгоритма состоит, по существу, в том, что фиксируется некоторый конкретный вид правил непосредственной переработки, правил окончания и правил извлечения окончательного результата. При этом неизбежным образом фиксируется также и совокупность (или совокупности) конструктивных объектов, к объектам которой (или которых) имеет смысл применять указанные правила. Для каждого уточнения выдвигается основная гипотеза, заключающаяся в том, что для произвольного алгоритма может быть указан равносильный ему алгоритм, из класса алгоритмов, описываемых данным уточнением. (Равносильность, грубо говоря, означает, что оба алгоритма приводят к одним и тем же результатам. Само понятие равносильности нуждается, однако, в дальнейшем уточнении, так как исходный алгоритм может быть применим к таким объектам, которые вообще не являются возможными начальными данными для алгоритмов, описываемых рассматриваемым уточнением.) Эта основная гипотеза не может быть предметом математического доказательства, потому что в её формулировку входит понятие произвольного алгоритма. Она имеет характер естественно-научной гипотезы, подобной, например, законам физики. Для каждого из предложенных уточнений соответствующая гипотеза хорошо согласуется с практикой. В пользу этих гипотез говорит и то, что все предложенные уточнения оказались в некотором естественном смысле эквивалентны друг другу (последнее утверждение уже подлежит доказательству и действительно может быть доказано).

Первыми вариантами уточнения понятия эффективного порождающего процесса следует считать появившиеся ещё в 19-м веке (впервые в работах немецкого логика Г. Фреге) логистические системы с формально описанными правилами вывода. Впоследствии при формализации всё более и более широких областей математики (главным образом в работах английских логиков А. Н. Уайтхеда и Б. Рассела) появились исчисления достаточно мощные, чтобы посредством задаваемых ими порождающих процессов можно было определить (в смысле, разъяснённом ранее) любую вычислимую функцию. Это дало возможность Гёделю уже в 1934, ещё до появ-

ления первых уточнений понятия алгоритма, определить вычислимую функцию как функцию, определяемую правилами вывода в некотором исчислении. После работ Поста и Тьюринга оказалось возможным определить вычислимую функцию на базе предложенных ими уточнений понятия алгоритма (определения вычислимой функции возможны, конечно, и на базе других уточнений). Одновременно Клини предложил определение вычислимой функции, не зависящее от какого бы то ни было уточнения понятия алгоритма или порождающего процесса. (Все эти определения понятия вычислимой функции оказались эквивалентными друг другу.)

Не опирающееся на понятие алгоритма определение вычислимой функции представляет интерес как логический (поскольку обнаруживается, что понятие вычислимой функции имеет своё, не зависящее от понятия алгоритма, содержание), так и математический (поскольку в целом ряде задач нет нужды строить алгоритм явно, а достаточно установить вычислимость соответствующей функции). Такие основные понятия, как понятия перечислимого и разрешимого множества, могут быть определены через понятие вычислимой функции (без апелляции к понятию алгоритма). Разумеется, в конечном счёте ценность вычислимых функций состоит именно в том, что для каждой из них можно указать вычисляющий её алгоритм. В настоящее время вычислимые функции с натуральными аргументами и значениями идентифицируются с так называемыми частично-рекурсивными функциями, имеющими строгое математическое определение.

Литература

По общим вопросам:

[1] *Адян С. И.* Проблема алгоритма // Наука и жизнь. — 1957. — № 8. — С. 13—14.

[2] *Колмогоров А. Н.*, *Успенский В. А.* К определению алгоритма // Успехи математических наук. — 1958. — Т. 13. — Вып. 4 (82). — С. 3—28. [Перепечатано в книге: *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987. — С. 91—119.]

[3] *Марков А. А.* Теория алгорифмов // Труды Математического института АН СССР. — 1951. — Т. 38. — С. 176—189.

[4] *Марков А. А.* Теория алгорифмов. — (Труды Математического института АН СССР; Т. 42). — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1954. — 375 с. [См. Введение; гл. 1, § 1—2 и п. 1—5 из § 3; гл. 2, § 1—2, п. 1—6 из § 3 и п. 1—5 из § 4, § 5.]

[5] *Трахтенброт Б. А.* Алгоритмы и машинное решение задач. — М.: Гостехиздат, 1957. — 95 с.; 2-е изд. / Под ред. С. В. Яблонского. — М.: Физматгиз, 1960. — 119 с.

[6] *Трахтенброт Б. А.* Алгоритмы и вычислительные автоматы. — М.: Сов. Радио, 1974. — 200 с.

[7] *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте. — М.: Физматлит, 1982. — 111 с. [См. § 2 «Начальные понятия теории алгоритмов и их применения».]

[8] *Успенский В. А.* Машина Поста. — 2-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 1988. — 96 с.

[9] *Успенский В. А.*, *Семёнов А. Л.* Решимые и нерешимые алгоритмические проблемы // Квант. — 1985. — № 7. — С. 9—15.

[10] *Успенский В. А.*, *Семёнов А. Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. — М.: Физматлит, 1987. — 286 с.

[11] *Шанин Н. А.* О некоторых логических проблемах арифметики. — (Труды Математического института АН СССР; Т. 43). — М.: Изд-во АН СССР, 1955. — 112 с. [См. Введение; § 1; § 4; § 5—6.]

По отдельным вопросам:

Вычислимые функции:

[12] *Успенский В. А.* К теореме о равномерной непрерывности // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 1 (73). — С. 99—142. [См. § 2.]

[13] *Успенский В. А.* Лекции о вычислимых функциях. — М.: Физматгиз, 1960. — 492 с.

Определения по индукции:

[14] *Клини С. К.* Введение в метаматематику / Пер. с английского А. С. Есенина-Вольпина под ред. В. А. Успенского. — М.: ИЛ, 1957. — 526 с. [См. § 6; § 53.]

Конструктивное истолкование математических предложений:

[15] *Kolmogoroff A.* Zur Deutung der intuitionistischen Logik // Mathematische Zeitschrift. — 1932. — Bd. 35. — H. 1. — S. 58—65. [Русский перевод: *Колмогоров А. Н.* К толкованию интуиционистской логики / Пер. с немецкого В. А. Успенского // *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985. — С. 142—148.]

[16] *Успенский В. А.* К теореме о равномерной непрерывности // Успехи математических наук. — 1957. — Т. 12. — Вып. 1 (73). — С. 99—142. [См. § 3.]

[17] *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. — Т. 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1956. — С. 189—190.

[18] *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений // Труды Математического ин-та АН СССР. — 1958. — Т. 52. — С. 226—311.

Проблема тождества:

[19] *Ляпунов А. А.*, *Яблонский С. В.* Крупный вклад в математику // Природа. — 1957 — № 8. — С. 56—58.

Вычислительные машины и связь теории алгоритмов с вычислительной математикой:

[20] *Келдыш М. В.*, *Ляпунов А. А.*, *Шура-Бура М. Р.* Математические вопросы теории счётных машин // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации производства 15—20 октября 1956 года. Пленарные заседания. — М., 1957. — С. 100—130. [Изложение доклада, прочитанного 15.10.1956 на названной сессии от имени трёх авторов М. Р. Шура-Бурой.] [Перепечатано в книгах: *Ляпунов А. А.* Проблемы теоретической и прикладной кибернетики. — М.: Наука, 1980. — С. 34—54; *Келдыш М. В.* Избранные труды. Математика. — М.: Наука, 1985. — С. 421—442.]

[21] *Ляпунов А. А.*, *Шестопал Г. А.* Начальные сведения о решении задач на электронных счётных машинах // Математическое просвещение. — 1957. — Вып. 1. — С. 57—74.

[22] *Ляпунов А. А.* и *Шестопал Г. А.* Об алгоритмическом описании процессов управления // Математическое просвещение. — 1957. — Вып. 2. — С. 81—95.

[23] *Марков А. А.* Математическая логика и вычислительная математика // Вестник Академии наук СССР. — 1957. — № 8. — С. 21—25.

[24] *Семёнов А. Л.*, *Успенский В. А.* Математическая логика в вычислительных науках и вычислительной практике // Вестник Академии наук СССР. — 1986. — № 7. — С. 93—103. [См. с. 290—305 настоящей книги. — *Примеч. ред.*]

Библиографические списки:

[25] *Клини С. К.* Введение в метаматематику / Пер. с английского А. С. Есенина-Вольпина под ред. В. А. Успенского. — М.: ИЛ, 1957. — 526 с. [См. список на с. 493—509.]

[26] *Успенский В. А.*, *Семёнов А. Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. — М.: Физматлит, 1987. — 286 с. [См. список на с. 244—271.]

К проблеме построения машинного языка для информационной машины[1]

§ 1

Учёный, приступающий к какому-либо исследованию, сталкивается с информацией двух типов. Информация первого типа заключена непосредственно в том фрагменте объективной действительности, который составляет предмет исследования (извлечь эту информацию — и есть задача науки). Информация второго типа — это информация, уже извлечённая из реальности предшественниками нашего учёного и заключённая (закодированная) в статьях, книгах, таблицах, картотеках и т. п.[2]. Извлечь нужную информацию второго типа (только эта информация и будет рассматриваться в дальнейшем), хотя и значительно легче в подавляющем большинстве случаев (но не во всех случаях), чем нужную информацию первого типа, всё же обычно довольно трудно. К тому же эта задача делается всё труднее с ростом объёма и сложности накопившихся знаний.

В настоящее время поиск нужной информации осуществляется вручную, кустарными средствами. Такое положение можно было бы

Опубликовано в продолжающемся сборнике: Проблемы кибернетики / Под ред. А. А. Ляпунова. — Вып. 2. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 39—50. А также под названием «Логико-математические проблемы создания информационного языка для информационной машины» в издании: Сообщения лаборатории электромоделирования. — 1960. — № 1. — С. 5—28.

[1] Статья представляет собой, с незначительными изменениями, доклад, сделанный 28 мая 1957 года на созванном Лабораторией электромоделирования АН СССР Научно-техническом совещании по комплексу вопросов, связанных с разработкой и построением информационных машин с большой долговременной памятью. (Примечание. Сейчас, через два года, ●●➤ а через 57 лет тем более, ◄●● некоторые положения статьи кажутся автору чересчур банальными или, что ещё хуже, устаревшими и потому, возможно, неверными. Автор просит читателя сделать скидку на время, отделяющее написание статьи от её публикации.) ●●➤ Об указанном совещании см. на с. 314—316 кн. 3 «Языкознание» настоящего издания. — *Примеч. ред.* ◄●● ●➤

[2] Читателя не должно удивлять отсутствие в этом перечне файлов — ведь это было докомпьютерное время. ◄●

охарактеризовать как средневековое. Хотя со времени средних веков появилась масса указателей, каталогов и т. д., но объём сведений возрос настолько, что сейчас найти нужную справку в литературе подчас труднее, чем в средние века, когда каждый учёный мог сам хранить в голове все сведения по своей отрасли науки. Любая классификационная система принципиально ограничена и недостаточна хотя бы потому, что она рассчитана на состояние науки в момент составления системы, а пользуются системой через много лет. Всё это приводит к большой затрате человеческого труда и неизбежной потере информации. Хорошо известно, что два человека, задавшись одним и тем же вопросом и обратившись с этой целью к справочникам, предметным и систематическим каталогам, библиографическим бюро и т. д., могут получить различные результаты. Актуален поэтому вопрос об автоматизации процесса поиска нужной информации с целью быстрого и полного её получения. Имеется в виду создание для этой цели специальной машины. Эта машина должна, таким образом, хранить в своей «памяти»[3] значительное количество сведений и, используя их, отвечать на задаваемые ей вопросы. Предполагается, что вопросы будут такого же характера, какие ставит перед собой исследователь, прежде чем обратится к литературе, например, «какие есть книги по данной теме?», или «что известно по данной теме?» и т. д. Предполагается, далее, что машина сможет совершать элементарные логические выводы, подобные тем, которые производит читатель в самом процессе чтения книги (непосредственное сопоставление фактов и т. п.). Было бы желательно, наконец, чтобы машина могла определять тождественность содержания двух различных текстов. Это немедленно нашло бы своё применение в патентном деле и, самое главное, это было бы чрезвычайно удобно при записи в машину поступающих сведений: машина могла бы сличать поступающие сведения с уже записанными и записывать только действительно новые факты.

Развитие современной техники позволяет сделать реальным построение подобной машины (имеются в виду, в частности, разработанные под руководством Л. И. Гутенмахера в Лаборатории электромоделирования технические средства[4], дающие возможность хранить большой объём информации в малом объёме пространства и извлекать эту информацию с большой скоростью). Содержание настоящей

[3] ●➤ Тогда ещё память машины была метафорой и потому писалась в кавычках. ◄●

[4] ●●➤ О судьбе этих технических средств см. на с. 316—352 кн. 3 настоящего издания. ◄●●

статьи составляют, однако, вопросы, связанные не с проблемой построения самой машины, а с проблемой создания специального способа записи в ней научно-технических сведений, т. е. машинного языка.

Машинный язык не следует путать с машинным кодом, который строится для данного алфавита и посредством которого любой текст, составленный из букв данного алфавита, кодируется для записи в машину в виде последовательностей нулей и единиц (если машина построена на двоичном принципе)[5]. Речь идёт о создании специального искусственного абстрактного языка для записи научных сведений с целью последующего помещения этих сведений в «памяти» машины.

Чтобы лучше изучить наш предмет, отвлечёмся от всех посторонних вопросов, в том числе и от техники. Будем руководствоваться следующим принципом: «то́, что может быть формализовано, может быть и автоматизировано». Итак, наша общая задача — формализовать поиск нужной информации, а на первых порах создать язык, пригодный для формализации поиска, сравнения и отождествления информации. А кто всё это будет делать: машина или штат обученных (но формально обученных) людей — пока не важно.

Если иметь дело со сведениями, записанными на каком-либо реальном (например, русском) языке, то будет трудно выполнить чисто формально (т. е. без обращения к содержанию) поиск, сравнение и т. п. нужных сведений, ибо реальный язык обладает двумя существенными недостатками:

1. Он неоднозначен, субъективен; он имеет, как говорят, «прагматическую» функцию (т. е. предусматривает индивидуальную реакцию того или иного организма).

2. Он не формализован, не имеет ясной структуры, богат исключениями и потому неудобен для машины[6].

В какой мере эти недостатки являются препятствием к использованию реального (скажем, русского) языка в качество машинного?

---

[5] С этой точки зрения телеграмма, записанная азбукой Морзе, — это всё ещё текст на русском, английском или другом реальном языке, только иначе закодированный. Говоря приблизительно, мы понимаем под языком некоторую систему записи фактов объективной действительности, а под кодированием — какое-либо обратимое преобразование уже имеющегося языка, причём язык рассматриваем «с точностью до кодирования» (т. е. два языка, один из которых получается из другого кодированием, мы считаем одним и тем же языком).

[6] Реальный язык можно рассматривать как некоторую идеальную структуру плюс накладываемые на неё «шумы» (т. е. неправильности); при восприятии человеком языкового сообщения эти «шумы», по-видимому, устраняются.

Первое препятствие носит принципиальный характер, хотя его можно было бы устранить путём выделения из русского языка «непрагматической части», т. е. путём допущения лишь некоторых стандартных терминов и конструкций (нечто вроде Basic English) с точно установленными правилами их семантического истолкования. Второе препятствие носит более практический характер: принципиально возможно заложить в машину всю грамматику русского языка со всеми исключениями, и при создании автоматического перевода так и приходится поступать (если желать переводить любые тексты), но для задачи создания информационной машины такой способ окажется практически бесполезным (можно будет производить лишь простейший поиск, например, поиск всех фраз, в которые входит заданное слово; более сложные задачи будут решаться медленно и потребуют громоздких программ)[7].

Выход подсказывается отчётливым пониманием того, что наша цель — поместить в машину не тексты какого-либо языка сами по себе, а информацию, которая записана в этих текстах. Коль скоро реальные языки обладают с точки зрения наших целей серьёзными недостатками, не следует использовать ни один из них в качестве машинного языка. Нужно создать искусственный абстрактный язык, наилучшим образом пригодный для записи естественнонаучных сведений, подобно тому как шахматная нотация удобнее, чем реальные языки, для записи шахматных партий. К этому абстрактному языку предъявляются, таким образом, следующие требования:

1. Он должен быть недвусмысленным; каждая запись должна допускать однозначное истолкование;
2. Он должен быть удобным для формализации следующих функций:
   а) выбор нужной информации;
   б) отождествление различным образом записанных фактов;
   в) дедукция, т. е. производство логического вывода.

Эти требования отчасти противоречат друг другу и делают задачу создания оптимального (с точки зрения этих требований) языка задачей экстремального характера.

В качестве первой задачи надо создать частные абстрактные языки, обслуживающие отдельные отрасли науки (такие, как математика, химия) или даже ветви этих отраслей (геометрия, орга-

[7] Эти недостатки реальных языков, заключающиеся в неадекватности их структуры структуре человеческих знаний, совершенно естественны. Ведь языки довольно поздно стали использоваться для записи сложных научных фактов (уже словарный запас языка не приспособлен для обозначения научных понятий).

ническая химия). В какой-то степени эти языки уже созданы (ведь говорят же о «языке формул» математики или химии). Создавать частные абстрактные языки должны представители соответствующей конкретной науки совместно с логиками.

На абстрактном языке будет храниться информация в машине (мы опять-таки отвлекаемся здесь от того, что в машине все тексты будут закодированы в виде последовательностей нулей и единиц), и на первых порах будет происходить «разговор» человека с машиной (человеку ведь легче выучиться машинному языку, чем машине — человеческому). Как правило, человек будет задавать вопросы, а машина отвечать, но иногда и машина может задать человеку вопрос, например, попросить его уточнить свой вопрос.

В дальнейшем необходимо разработать формальные правила перевода с абстрактного языка на реальные и обратно.

Автоматический перевод с реальных языков на абстрактный даст возможность автоматически записывать в машину факты, выраженные на тех или иных реальных языках (быть может, на первых порах тексты должны будут предварительно препарироваться человеком). Это позволит записать в машину имеющиеся уже сейчас в литературе сведения (без создания автоматического перевода представляется, конечно, практически невозможным ввести в машину уже имеющуюся литературу). Автоматический перевод с абстрактного языка на реальный позволит воспроизводить сведения на желаемом языке. Таким образом, при разговоре человека с машиной человек получит право не знать машинного языка. Наконец, абстрактный язык можно будет рассматривать в качестве языка-посредника, и тем самым будет решена задача автоматического перевода научно-технических текстов: чтобы перевести текст с языка *A* на язык *B*, надо перевести текст с языка *A* на машинный язык и потом с машинного языка на язык *B*.

§ 2

Создание частного абстрактного языка для данной теории должно начаться с создания соответствующей метатеории.

Предметом теории является определённый фрагмент реального мира, предметом метатеории — сама система положений данной теории. Отношение теории к метатеории аналогично отношению искусства к искусствоведению. Художник отображает объективную действительность в художественных образах, затем приходит искусствовед и изучает самоё систему этих образов и отношение этой

системы к действительности, но не отображаемую действительность. Точно так же учёный отображает действительность в научных образах, а метатеоретик изучает систему этих образов и её связь с отображаемой действительностью.

Создать метатеорию легче всего для таких «теорий», предметом которых являются не природные процессы, а процессы, происходящие по законам, установленным людьми. Таковы, например, спортивные игры и уличное движение.

Предмет теории уличного движения — наилучшая организация уличного движения. Предмет метатеории уличного движения — уже выработанная в теории система правил уличного движения. Рассмотрим для примера несколько подробнее, в чём должна была бы состоять эта метатеория (если бы она существовала). Прежде всего исследуется система понятий, фигурирующих в правилах. Эти понятия классифицируются в зависимости от их отношения друг к другу. Таким образом, выделяются, например, такие группы понятий: то, что движется (транспорт, пешеходы); то, по чему движутся (улицы, площади и т. д.); то, что регулирует (регулировщики, светофоры, дорожные знаки и т. д.). Выделяются скрытые, неявно содержащиеся в правилах понятия («здание», «прямое направление» и т. д.). Выделяются понятия неопределяемые («светофор») и определяемые («перекрёсток»). Затем происходит исследование предложений теории. Они подразделяются на дефинитивные, в которых определяется какое-либо понятие, и позитивные, в которых формулируется какой-либо факт. Вся система предложений исследуется затем с точки зрения её непротиворечивости (не противоречат ли какие-либо правила уличного движения друг другу), полноты (все ли случаи предусмотрены правилами уличного движения) и однозначности (не допускает ли какое-либо правило разных по смыслу истолкований). Заметим, что значительную часть этих исследований можно провести, вовсе не зная, что такое уличное движение, или зная о нём очень мало. (Можно, например, считать, что «светофор» — это живое существо, а «регулировщик» — механизм.) ■

Вопросы о связи понятий и предложений теории между собой без обращения к их смыслу составляют синтаксическую часть метатеории. (Таковы, например, вопросы непротиворечивости.) Вопросы о смысловом истолковании понятий и предложений теории составляют семантическую часть метатеории.

Метатеория, таким образом, чётко очерчивает круг понятий и предложений данной теории. Она классифицирует понятия по их характеру, по степени общности, по семантическим связям. Она

выясняет общелогические понятия, требующиеся для данной теории (для теории уличного движения, например, не нужно общее понятие натурального числа, а для химии оно нужно). Метатеория должна фиксировать и устранять полисемию, т. е. употребление одного и того же термина в разных смыслах. (Например: «водород горюч» и «водород воспламенился»; в первой из этих фраз термин «водород» означает водород как вещество, а во второй — данный конкретный объём водорода.) Метатеория должна изучать способы, какими вводятся в данной науке новые понятия. В математике, например, они вводятся, по крайней мере, двумя способами — либо явным определением, либо как неопределяемое понятие (но тогда перечисляются его свойства). Определения в нематематических науках имеют свою специфику, поскольку используют непосредственный опыт (определение таких, например, понятий, как энергия, представляет значительные трудности). Изучая систему предложений теории, метатеория должна выделить среди них аксиомы, а также указать правила (правила вывода), по которым разрешается переходить от одних предложений к другим.

Метатеория призвана выработать точные нормы «непрагматического языка», на котором должны писаться сочинения по данной теории. В дальнейшем, быть может, следовало бы при научно-технических издательствах учредить органы, подобные отделам технического контроля (ОТК) на заводах; эти органы должны были бы контролировать печатную продукцию с точки зрения установленных синтаксических и семантических норм. При этом, конечно, вовсе не должно проверяться, верна или не верна данная статья (так же, как не дело ОТК проверять, нужно или не нужно данное изделие); должны контролироваться лишь такие формальные вещи, как недвусмысленность, непротиворечивость и т. д.

Наконец, создание информационной машины требует от метатеории установления характера вопросов, которые ставит перед собой исследователь, обращаясь к литературе, и которые теперь будут задаваться машине.

Из сказанного видно, что создание метатеории — задача серьёзная, лишь немного уступающая по трудности созданию самой теории. Думается, однако, что необходимость создания метатеории диктуется не только задачей создания информационной машины, но и всем развитием науки. Ведь создание метатеории имеет огромное значение для самой науки, поскольку метатеория контролирует чистоту понятий и помогает лучше разобраться в системе наших представлений о мире. Метатеории значительно помогут и в решении таких повседневных практических задач, как составление рефератов, ука-

зателей, энциклопедий и т. д. Некоторые метатеории построены или строятся. Так, созданы основы метаматематики, видны контуры метахимии, положено начало метабиологии. В дальнейшем можно было бы приступить к созданию метамедицины.

Самое сложное при построении частного абстрактного языка для данной теории — это создание метатеории. В метатеории каждое предложение теории приводится к стандартному виду: «такие-то объекты находятся в таких-то отношениях», причём и возможные объекты, и возможные отношения перечислены заранее. Построение языка состоит, далее, в том, что происходит символическая запись этих приведённых предложений.

Методы символической записи заимствуются из математической логики, в которой давно разработаны средства выражения синтаксических отношений.

В математической логике имеются специальные знаки, выражающие общелогические связи и операции: «и», «или», «существует» и т. д. К этим знакам теперь надлежит прибавить знаки для объектов рассматриваемой теории (в том числе для понятий), т. е. термины (постоянные и переменные), знаки для отношений (предикатные знаки), знаки для функций (функторы). Например, если знак G означает отношение «лежит на» (в геометрии), то предложение «точка a лежит на прямой p» запишется в виде

$$G(a, p).$$

Если условиться точки обозначать латинскими буквами, а прямые — греческими, то предложение «для любых двух точек найдётся проходящая через них прямая» надлежит привести к виду «для всякого объекта a и всякого объекта b существует такой объект α, что a лежит на α и b лежит на α»; символическая запись этого предложения такова:

$$(a)(b)(E\alpha)[G(a, \alpha) \,\&\, G(b, \alpha)].$$

Можно не вводить различий между записями объектов различных типов, но тогда придётся ввести предикаты «быть объектом такого-то типа». Пусть, например, T означает «быть точкой» и P — «быть прямой». Тогда предложение «для любых двух точек найдётся проходящая через них прямая» приведётся к виду «для всякого объекта a и всякого объекта b, если a есть точка и b есть точка, то существует такой объект c, что c есть прямая, a лежит на c и b лежит на c»; запись такова:

$$(a)(b)\{T(a) \,\&\, T(b) \longrightarrow (Ec)[P(c) \,\&\, G(a, c) \,\&\, G(b, c)]\}.$$

Ещё один пример. Пусть t означает температуру, *Тв* — предикат «быть в твёрдом состоянии» и ≈ — воду. Предложение «точка замерзания воды не меньше 0°» можно привести к виду «утверждение, что температура воды меньше 0°, равносильно утверждению, что вода находится в твёрдом состоянии». Запись такова:

$$t(\approx) < 0^\circ \sim Тв(\approx).$$

Создание символических способов записи возможно (и даже довольно несложно) при условии, что уже разработана метатеория (здесь видно значение выявления в метатеории скрытых понятий; достаточно попробовать записать символически возможность движения транспорта на зелёный свет).

При построении абстрактного языка, помимо математической логики, целесообразно использовать формальную семантику. Следует различать семантическую философию, семантику в языкознании, иначе называемую семасиологией, как учение о значении лингвистических элементов (слов, выражений и т. п.), и семантику в логике как учение о значении логических элементов (понятий, суждений и т. п.). Здесь нас интересует именно семантика в логике, и, в частности, формальная семантика, разработанная Карнапом и другими учёными. Необходимо различать философские взгляды этих учёных и их конкретные достижения в построении на базе математической логики формальных символических систем для записи естественнонаучных фактов. Эти формальные системы при всём их несовершенстве и неокончательности могут с успехом быть использованы для построения машинного языка. Существенны также разработанные представителями этого направления в логике методы формального (без обращения к содержанию!) анализа символических выражений; необходимо учесть, что машине доступен лишь такой, формальный и по необходимости «бессодержательный» язык. Приходится с сожалением признать, что у нас до последнего времени имели место недооценка и даже неправильная оценка семантики, которую к тому же часто смешивали с семантической философией (недавнее положение тут можно сравнить с недавним же положением кибернетики).

Абстрактный язык, или формальная семантическая система, состоит из списка элементарных символов (знаков), правил образования (устанавливающих, какие комбинации знаков допускаются), правил преобразования (устанавливающих, какие допускаются преобразования выражений с целью получения логического вывода) и правил интерпретации (устанавливающих, какой смысл надле-

жит приписывать выражениям, составленным по правилам образования).

В дальнейшем создание частного абстрактного языка и метатеории должно идти параллельно (с опережением языка метатеорией).

§ 3

Специальные вопросы возникают в связи с записью информации в машину.

Прежде всего вопрос о том, что записывать. Дело в том, что можно записать числовую таблицу (которая займёт значительный объём памяти), а можно записать формулу, из которой таблица может быть получена простой подстановкой. Формула, конечно, требует меньшего объёма памяти для своей записи, но тогда надо предусмотреть выполнение машиной таких операций, как подстановка чисел в формулу. Можно пойти ещё дальше и записывать в памяти машины не все факты данной теории, а только некоторые б а з и с н ы е факты, из которых остальные факты могут быть получены посредством логического вывода (при условии, что машина сможет сама осуществлять этот логический вывод). Возможно, далее, что окажется целесообразным избрать некоторую специальную структуру фраз машинного языка, более приспособленную для поиска информации. Пусть, например, имеется фраза, содержащая термины a_1, a_2, ..., a_s; обозначим её $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_s)$. Если ведётся поиск по признакам a_1, a_2, ..., a_s (т. е. нас интересуют фразы, содержащие термины a_1, a_2, ..., a_s), то придётся при поиске проникать внутрь фразы. Этого можно было бы избежать и, следовательно, упростить поиск, если указанную фразу переписать в другом виде: вынести все термины вперёд, а внутри фразы заменить эти термины их номерами: a_1, a_2, ..., a_s; $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots, s)$. (Например, «стул стоит на полу» переходит в «стул, пол; 1 стоит на 2».) Тогда поиск можно будет проводить лишь по приставкам, стоящим впереди фразы. Точно так же можно выносить в приставку не только предметы, но и отношения: «стул стоит на полу» переходит в «стул, пол, стоять на; 3(1, 2)». Такая обработка фразы удобна при осуществлении поиска фраз, содержащих данное отношение. Можно, конечно, сделать и так, чтобы машина сама при вводе производила необходимую перестройку фразы.

Несколько замечаний о размещении сведений в памяти машины. Память машины можно считать организованной по иерархическому

принципу: «дом», в «доме» — «этажи», на «этажах» — «коридоры», в «коридорах» — «комнаты», в «комнатах» — «шкафы», в «шкафах» — «полки», на «полках» — «папки». Каждое хранимое в памяти сведение имеет свой адрес, который состоит из номера соответствующего «дома», «этажа» и т. д. Примерный состав хранимого в памяти таков:

1. Предложения науки на абстрактном языке: аксиомы, теоремы, определения.

2. Правила логического вывода — правила преобразования (т. е., по существу, часть программы машины).

3. Сведения, записанные на обыкновенном языке, — цитаты, библиографические ссылки, неформализуемые определения и т. д.

Рациональное размещение всего этого обширного и разнородного материала представляет собой сложную задачу. Критерием рациональности размещения должны служить занимаемый в памяти объём и затрачиваемое на поиск время. При этом следует учесть, что по причинам, о которых говорилось вначале, мы лишь в ограниченной степени можем использовать классификационный принцип.

Размещение информации в памяти должно предусмотреть возможность динамического поиска, т. е. поиска по определённой программе с использованием промежуточных результатов. Например, нам нужно найти вещества, вредно действующие на бациллу туберкулёза (пример заимствован у В. В. Серпинского и Г. Э. Влэдуца). Для этого можно запрограммировать такой поиск: сначала найти вещества, необходимые для жизни бациллы, а затем — вещества, вступающие с первыми веществами в устойчивые соединения. Промежуточные результаты поиска могут без надобности и не выдаваться наружу. При организации памяти машины могут быть учтены, в частности, следующие положения:

1°. Вопрос организации размещения сведений встаёт лишь в связи с необходимостью экономить место и время. Принципиально возможно разместить сведения как попало, так как машина обладает возможностью сплошного просмотра всей памяти. Программа поиска в этом случае будет такова: «просматривай последовательно все имеющиеся сведения, отбирая то, что нужно».

2°. Можно использовать классификацию по неизменным признакам и различать, например, аксиомы, теоремы, определения, цитаты и т. д., помещая каждый из этих видов сведений в своём участке памяти.

3°. Можно было бы помещать при каждом «доме», «этаже» и т.д. некоторое заглавие (нечто вроде списка жильцов). Это позволило бы

просматривать сначала лишь заглавия, а в дальнейшем анализировать только участки памяти с подходящими заглавиями.

4°. Целесообразна, по-видимому, известная автономия отдельных участков памяти с тем, чтобы поиск мог вестись параллельно на нескольких участках с ограниченным обменом информации между ними.

5°. Необходимо широко использовать систему перекрёстных ссылок. Например, при каждом термине может стоять следующий адрес этого же термина или адреса связанных с ним (семантически) терминов.

6°. Из предыдущего пункта видно, что при организации памяти важно изучение семантических связей. Машина сама может выявлять устойчивые семантические связи (обнаруживающиеся, например, при динамическом поиске) и запоминать их для последовательного использования.

7°. При организации памяти должны использоваться вероятностные соображения (должно затрачиваться в среднем небольшое время на поиск). Тут могут пригодиться и методы исследования операций, и даже методы теории игр.

8°. В дальнейшем надо предусмотреть возможность автоматической реорганизации памяти машины в зависимости от накопленного ею «опыта» и мыслить, таким образом, информационную машину как обучающуюся.

§ 4

Построение информационной машины и создание информационного языка ставит специфические проблемы перед математикой и прежде всего перед математической логикой.

При создании машинного языка приходится решать три основные задачи:

1. Символическая запись понятий.
2. Символическая запись суждений.
3. Символическая запись контекста.

В математической логике разработаны методы решения второй задачи: записать символически логические отношения между понятиями, составляющими суждения (об этом уже говорилось ранее).

Задача о записи контекста и не вставала в математической логике; ведь, формально рассуждая, любой текст может быть записан одним

предложением, одним высказыванием. Но при этом мы, конечно, что-то теряем. Известно, например, что в языке значение тех или иных выражений зависит от контекста (при этом получается экономия в языковых средствах, так как разные смыслы записываются одним и тем же выражением). Было бы целесообразно формализовать эти особенности контекста. Это облегчило бы и перевод с реальных языков на абстрактный, поскольку абстрактный язык при формализации в нём контекста был бы ближе к реальным.

Очень важно решение первой задачи, т. е. выбор рациональной терминологии машинного языка. Было бы желательно, чтобы связи между понятиями выражались самой терминологией и, следовательно, не нужно было бы специальных предложений, фиксирующих эту связь. Если использовать обычную, скажем, русскую терминологию и задать машине какой-нибудь вопрос об антибиотиках, то чтобы машина включила в круг своих рассмотрений также и пенициллин, необходимо иметь в памяти предложение, гласящее, что пенициллин является антибиотиком. Такая фраза не будет нужна, если, скажем, обозначением для антибиотиков будет служить Q, для пенициллина Qa, для синтомицина — Qb и т. д. Здесь может помочь космоглотика (наука об искусственных языках); ведь ещё в XVII веке создавались так называемые философские языки, терминология которых строилась по описанному только что иерархическому принципу. Отчасти поможет здесь математической логике и химия с её разработанной системой названий органических веществ (замечу, что проблема тождества для названий химических веществ представляет несомненный математический интерес, особенно в свете неразрешимости общей проблемы тождества для ассоциативных исчислений). В математической логике ещё не созданы, но должны быть созданы способы символической записи понятий, отражающие построение одних понятий из других, подобные уже созданным способам символической записи высказываний, отражающим построение одних высказываний из других.

Среди отдельных проблем, встающих перед математической логикой, можно упомянуть ещё следующие:

1°. Абстрактный язык для данной теории можно считать построенным, когда будут заданы правила, позволяющие по любому факту данной теории находить его языковые выражения. Речь идёт, следовательно, об алгоритмизации соответствия «смысл» — «формальное выражение». Встаёт необходимость точного определения того, что значит в этом случае алгоритмизация, для чего в свою очередь требуется формализация понятия смысла.

2°. Математическая логика обслуживает сейчас главным образом математику. Необходимо создать «прикладные» разделы математической логики, обслуживающие конкретные науки (такие, как химия).

3°. В естественнонаучных построениях фигурируют такие не свойственные математике и потому не формализованные в классической математической логике категории, как возможность, правдоподобность и т. д. Необходимо поэтому формализовать эти понятия и развивать, стало быть, многозначную логику, модальную логику и другие направления интенциональной логики, или логики содержания (наряду с экстенциональной логикой, или логикой объёма).

4°. Наконец, надо заняться выделением в множестве доказуемых формул базисных сетей, т. е. множеств формул, из которых все другие доказуемые формулы выводимы в данное число шагов (эта идея принадлежит Р. Л. Добрушину).

Решение перечисленных задач требует развития теоретических исследований в различных областях математической логики, в частности, по теории исчислений, теории моделей и т. д. Одновременно необходимо приступить к созданию специальной машинной логики, изучающей в общем виде строение современных машин и взаимодействие их элементов.

Для записи в машину выражения абстрактного и реального языков должны кодироваться в виде последовательностей двоичных знаков. При этом кодировании возникает ряд проблем, характерных для теории информации. Одной из таких проблем является создание оптимального по длине кода. Другая проблема состоит в создании помехоустойчивого кода (надо предусмотреть возможность сбоев в машине); здесь предполагается использование теории так называемых «кодов с обнаружением ошибки».

Удовлетворение требованиям теории информации возможно лишь на базе известного компромисса с теорией алгоритмов, ибо есть основания полагать, что наиболее рациональный с теоретико-информационной точки зрения код будет нерационален с точки зрения теории алгоритмов. Здесь имеются в виду алгоритмы поиска, алгоритмы дедукции и алгоритмы перевода. Изучение этих алгоритмов, по существу, смыкает теорию алгоритмов с работами по теоретическому программированию, ведущимися коллективом под руководством А. А. Ляпунова. Требования теории алгоритмов окажут, по-видимому, значительное влияние на окончательную структуру машинного языка.

Важные задачи встают и перед лингвистикой. С сожалением надо признать, что у нас недооценивается прикладное значение лингвистики (так же как и логики). Лингвистика рассматривается главным образом (помимо своего чисто теоретического аспекта) как основа для составления школьных грамматик, для обучения иностранному языку и т. п. А ведь лингвистика имеет важные практические применения при разработке способов рациональной записи фактов. Работы в этом направлении у нас насчитываются единицами (здесь имеются в виду прежде всего работы Н. Ф. Яковлева и Е. Д. Поливанова по созданию алфавитов для бесписьменных языков). Характерно, что для развития прикладного аспекта лингвистики необходимо развитие самых теоретических её отраслей и прежде всего её связей с семиотикой.

§ 5

Построение информационной машины и создание машинного языка есть, по существу, кибернетическая задача. Кибернетика, как известно, изучает живые и искусственные организмы и коллективы таких организмов с точки зрения их способности воспринимать, хранить, перерабатывать и передавать информацию. Поиск информации в литературе — кибернетический процесс, в котором участвуют и обмениваются информацией такие организмы, как человек, книги, библиотеки, библиографические бюро и т. п. Поиск информации при помощи машины — также кибернетический процесс, моделирующий предыдущий.

Современная вычислительная машина моделирует мышление и в меньшей степени память; по своей структуре она моделирует скорее машинно-счётную станцию, чем мозг. Информационная машина наряду с мышлением моделирует также и память; по своей структуре она моделирует библиотеку с достаточным штатом библиографов и метатеоретиков (плюс машинно-счётную станцию для обработки библиографических карточек).

Однако и для вычислительной, и для информационной машины мозг является идеалом. Поэтому чрезвычайно важно подчеркнуть связь всей затронутой проблематики с психоневрологией. Изучение способов хранения и поиска информации в мозге может дать многое для построения машины. Достаточно указать на необычайно быстрое протекание процесса вспоминания у человека, на роль в этом процессе ассоциаций и опыта. Очень желательно смоделировать в машине процессы вспоминания по ассоциации, а также накопление опыта (обучающаяся машина, о чём уже говорилось выше). С этой целью необходимо усилить изучение процессов, связанных с

хранением и переработкой информации в мозгу, а также параллели между этими процессами и процессами, происходящими в машинах. (Заметим, кстати, что часто проводимую аналогию между нейронами и электронными лампами в качестве хранителей информации нельзя считать достаточно обоснованной.)

В дальнейшем, с передачей информационной машине всё большего количества «человеческих функций», будет, по-видимому, происходить постепенная «прагматизация» абстрактного языка; в частности, машина сможет воспринимать контекст.

Значительный интерес с точки зрения создания информационной машины представляет такая отрасль кибернетики, как общая теория знаковых систем (семиотика). Как правило, знаковые системы, которыми пользуется человек, являются избыточными. Например, знаки *c*, C, C, ⸢ воспринимаются человеком как буква эс; можно думать, что во всех этих знаках содержится некий общий инвариант (аналогично, смысл является инвариантом при выражении одного и того же суждения на разных языках; язык-посредник и есть формализация этого инварианта). Подобная избыточность проявляется, конечно, не только в восприятии отдельных букв: известно, что примерно половину букв текста можно зачеркнуть, не нарушая возможности однозначного опознавания содержания. Эту избыточность можно сократить, уменьшив, таким образом, объём памяти.

Наконец, абстрактный машинный язык сможет в будущем выполнять важную кибернетическую функцию в качестве средства непосредственного обмена информацией между машинами.

§ 6

Построение машины и создание языка должны идти одновременно, оказывая влияние друг на друга. Вероятно, первый, ограниченный этап деятельности машины будет характеризоваться следующим:

1°. Машинный язык ещё не будет окончательно создан. Сведения будут храниться на русском языке. Кроме того, будет разработан особый «телеграфный» стиль рефератов, и значительная часть материалов будет храниться на «телеграфном» языке.

2°. Поиск будет происходить по отдельным признакам, без проникновения во внутреннее содержание предложений и, быть может, на первых порах без проникновения даже во внутреннее содержание статьи. Такой поиск можно представлять себе как поиск по заглавию (естественному или искусственному; пример искусственного загла-

вия — шифр по десятичной классификации, который ставит на книге или статье библиограф).

Построение информационной машины и машинного языка требует углублённых теоретических исследований и, прежде всего, исследований, нужных для решения основной задачи, — создания метатеорий. Думается, что необходимо как можно скорее покончить с пренебрежением к формализации теории. Хочу высказаться также в защиту таких страшных слов, как «формализм» и «упрощенчество». Иногда бывает необходимо прибегать и к формализму, и к упрощенчеству хотя бы потому, что только формальное и упрощённое мы можем передать машине. Чтобы создать машину, необходимо стать на её точку зрения.

Для развития метатеорий, для построения машинного языка и связанных с ним алгоритмов перевода необходимо не только идейное содружество наук, но и организационное содружество научных учреждений. Необходимо также организовать соответствующую подготовку кадров.

Решение поставленных задач, научных и организационных, требует приложения значительных сил и средств. Затрата этих сил и средств оправдывается общенаучной значимостью указанных задач. Ведь их решение приведёт не только к возможности быстрого и полного получения нужных сведений и, тем самым, к повышению производительности умственного труда, но и к тому, что мы станем лучше разбираться в самой системе человеческих знаний.

Примечания

1 [к с. 459]. ●➤ Организация уличного движения оказалась удобной моделью для демонстрации метатеоретических представлений и семиотических идей. Рекомендуем читателю ознакомиться с одним из сочинений А. А. Зализняка, которое имеет такое начало:

> Для изучения сложных знаковых систем, используемых в обществе, например таких, как язык, определённую пользу может принести точный анализ знаковых систем более простой структуры. Одной из таких относительно простых знаковых систем, использующихся в современном обществе, является система регулирования движении на улицах городов и на дорогах.

Осталось привести библиографические данные. Вот они. *А. А. Зализняк.* Опыт анализа относительно простой знаковой системы // Структурно-типологические исследования: Сб. статей. — М.: Наука, 1962. — С. 172—187. ◄●

Литература[8]

К § 1:

[1] *Perry J. W., Kent A., Berry M.* Machine literature searching. — New York—London, 1956.
[2] *Гутенмахер Л. И.* Статистические и информационные машины нового типа // Вестник АН СССР. — 1956. — № 10. — С. 12—21.

К § 2:

[3] *Полтев К. М.* Пособие по правилам движения автотранспорта. — М., 1957.
[4] *Клини С. К.* Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957.
[5] *Woodger J.* Biology and language. — Cambridge, Great Britain, 1952.
[6] *Carnap R.* Introduction to semantics. — Cambridge, USA, 1946.

К § 4:

[7] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. — М.: ИЛ, 1947.
[8] *Дрезен Э.* В поисках всеобщего языка. — М.—Л., 1925.
[9] Автоматы: Сб. статей. — М.: ИЛ, 1957.
[10] *Shannon C. E., Weaver W.* The mathematical theory of communication. — Urbana, 1949.
[11] Коды с обнаружением и исправлением ошибок: Сб. статей. — М.: ИЛ, 1956.
[12] *Яковлев Н. Ф.* Математическая формула построения алфавита (опыт практического приложения лингвистической теории) // Культура и письменность Востока. — Кн. 1. — М., 1928. — С. 41—64.
[13] *Иванов В. В.* Лингвистические взгляды Е. Д. Поливанова // Вопросы языкознания. — 1957. — № 3. — С. 55—76. [См. в списке

[8] Обсуждаемую в настоящей статье проблематику затрагивает ряд докладов на упомянутом в подстрочном примечании [1] (с. 454) Совещании (перечень докладов на этом Совещании приведён в 1-м выпуске «Проблем кибернетики» на с. 266—268). Изложения двух из них были опубликованы за время печатания данной статьи:

Гутенмахер Л. И. Электрическое моделирование некоторых процессов умственного труда // Вестник АН СССР. — 1957. — № 10. — С. 88—95.

Иванов В. В. Лингвистические вопросы создания машинного языка для информационной машины // Материалы по машинному переводу. — Сб. 1. — Л.: ЛГУ, 1958. — С. 10—39.

научных работ Е. Д. Поливанова, приведённом в указанной статье В. В. Иванова, работы под № 26, 32, 35, 83].

К § 5:

[14] *Wiener N.* Cybernetics. — Paris, 1948. [Русский перевод: *Винер Н.* Кибернетика. — М.: Сов. радио, 1958].

Поступило в редакцию 15.X.1957

Винер

ВИНЕР (Wiener), Норберт (р. 1894) ●➤ (26.11.1894, США — 18.03.1964, Швеция) ◄● — американский учёный, один из основателей кибернетики. В 14 лет получил высшее математическое образование, в 18 лет — доктор философии Гарвардского университета (по математической логике). В 1913—15 продолжал своё образование в Кембридже (Англия) и Гётингене (Германия). В 1915—17 преподавал логику и математику в ряде американских ун-тов. В 1917—19 занимался журналистской деятельностью. С 1919 — преподаватель (с 1932 — профессор) Массачусетского технологического института.

Ранние работы Винера относятся главным образом к основаниям математики. В конце 1920-х годов занимался теоретической физикой (квантовая теория и теория относительности). Наибольшую известность Винеру как математику принесли его исследования по анализу (теория потенциала и гармонические функции, почти периодические функции, тауберовы теоремы, ряды и преобразования Фурье) и по теории вероятностей (стационарные случайные процессы). В области анализа Винер в 1930-х годах создал общую теорию тауберовых теорем, связав её с теорией преобразований Фурье, и развил (совместно с английским учёным Р. Пэли) гармонический анализ на комплексной плоскости. В области теории вероятностей Винер изучал важный класс случайных процессов, названных впоследствии его именем, и построил (в 1940-х годах) теорию интерполяции и экстраполяции (независимо от советского учёного А. Н. Колмогорова), а также теорию фильтрации стационарных случайных процессов. Для математического творчества Винера характерно внимание к запросам естествознания и техники (например, к броуновскому движению).

Во время второй мировой войны 1939—45 Винер занимался электрическими сетями и вычислительной техникой. В 1945—47

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 59. (Соавторы: Вячеслав Всеволодович Ива́нов, Михаил Константинович Поливанов.)

сотрудничал с мексиканским учёным А. Розенблютом в Национальном кардиологическом ин-те в Мехико (Мексика). Изучение глубоких аналогий между процессами, протекающими в электрических и электронных системах и в живых организмах, привело Винера к созданию *кибернетики*. Выпущенная им в 1948 книга «Кибернетика» оказала влияние на развитие мировой науки.

Винеру принадлежит ряд высказываний в печати о моральной ответственности учёных за использование их идей для создания оружия массового уничтожения.

Литература

[1] *Wiener N.* Cybernetics or control and communication in the animal and the machine. — 7 print. — N. Y.—P., 1949. [Русский перевод: *Винер Н.* Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине / Пер. с англ. И. В. Соловьёва и Г. Н. Поварова; Под ред. Г. Н. Поварова. — 2-е изд. — М.: Наука, 1983. — 344 с.]

[2] *Wiener N.* Human use of human beings. Cybernetics and Society. — Boston, 1950. [Русский перевод: *Винер Н.* Кибернетика и общество / Пер. с англ. Е. Г. Панфилова; Общ. ред. и предисловие Э. Я. Кольмана. — М.: ИЛ, 1958. — 199 с.]

[3] *Wiener N.* I am mathematician... An autobiographical account of the mature years and career of Norbert Wiener. — N. Y., 1956. [Русские переводы: *Винер Н.* Я — математик. — М.: Наука, 1964; *Винер Н.* Я — математик / Пер. с англ. Ю. С. Родман и Н. А. Зубченко. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 336 с.]

Метатеория

МЕТАТЕОРИЯ (от греческого metá ⟨*μετά*⟩— 'после', 'за' и *теория*) — теория, предметом изучения которой является какая-либо другая теория или раздел науки. Термин «метатеория» имеет смысл только по отношению к данной конкретной теории; так, можно говорить о метаматематике, метахимии и т. п. Каждая теория изучает определённый фрагмент реального мира, её метатеория — систему понятий и положений данной теории. Метатеория должна установить границы теории, ответить на вопросы о её непротиворечивости и полноте, изучить способы введения её новых понятий и доказательства её предложений и т. п. При этом широко используются методы *синтаксиса* в логике и *семантики* в логике[1].

Необходимость создания метатеории возникла прежде всего в применении к математике. Открытие неевклидовых геометрий и развитие вслед за тем аксиоматического метода в математике потребовало изучения таких понятий, как 'аксиома', 'теорема', 'интерпретация', 'непротиворечивость' и т. п., т. е. изучения самой математической науки и способа отражения ею объективной действительности. Следующим толчком к развитию метаматематики явилось открытие в конце 19 века так называемых антиномий (противоречий) в теории множеств, потребовавшее ещё более углублённого изучения математических понятий и выдвинувшее на первый план исследование таких понятий, как 'множество', 'соответствие', 'определение', 'истинность' и т. п. Значительную роль в развитии этих идей сыграл немецкий математик и логик Д. Гильберт, выступивший с книгой «Основания геометрии» (1899) и рядом статей. Наконец, открытие австрийского математика К. Гёделя (1930), заключающееся в установлении

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 198. (Соавтор: Владимир Соломонович Чернявский.)

[1] ●●▶ Статьи «Синтаксис (в логике)» и «Семантика (в логике)» из того же 51-го тома БСЭ публикуются на с. 478—486 настоящего издания. — *Примеч. ред.* ◀●●

принципиальной невозможности полной аксиоматизации арифметики натуральных чисел, привело не только к необходимости выяснения таких понятий, как 'полнота', 'алгоритм', 'разрешимость', но и к окончательному оформлению метаматематики в её современном виде как одной из отраслей математики со своим собственным, теперь уже довольно сложным, аппаратом.

На примере математики видно, что метатеория существенно влияет на развитие самой теории, и не только потому, что позволяет лучше уяснить основы рассматриваемой теории. Так, в математике большое значение имеют так называемые метатеоремы, или теоремы о теоремах. Эти метатеоремы имеют обычно такой вид: «если такие-то теоремы верны, то такие-то другие теоремы тоже верны». Примером метатеоремы может служить принцип двойственности в проективной геометрии, гласящий, что если какая-то теорема верна, то она остаётся верной после замены всюду слова «точка» словом «прямая» и наоборот. Ясно, что такого рода метатеоремы позволяют установить целый ряд математических утверждений и не проводя доказательства в каждом отдельном случае.

Метатеория, критически изучая структуру данной теории, позволяет более рациональным образом построить самоё теорию. В особенности это относится к вопросам формализации теории, приобретающим сейчас особое практическое значение в связи с развитием вычислительной техники. Уровень современной техники делает возможным автоматическую обработку научных сведений с целью быстрейшего получения нужной информации и даже вывода новых результатов. Для этого, однако, предложения интересующей нас научной теории должны быть записаны на специальном «машинном языке», чтобы автоматические устройства могли оперировать с этими предложениями совершенно формально, не обращаясь к их смыслу. Для создания подобного машинного языка необходимо сперва формализовать теорию в виде формальной системы, а здесь решающую роль играет разработка соответствующей метатеории. При рассмотрении формализованных теорий термин «метатеория» иногда употребляется в более узком смысле, совпадающем по существу со смыслом термина «синтаксис» (в логике). Изучение метатеорий может оказать существенную помощь в тех областях человеческой деятельности, которые так или иначе связаны с выбором наилучших средств записи научных знаний (справочно-библиографическая работа, составление всевозможных указателей, реферативных журналов, энциклопедий и т. п.). Однако в создании метатеорий для нематематических теорий делаются лишь первые

шаги. Так, например, к метахимии относятся вопросы номенклатуры неорганических соединений и номенклатуры органических соединений.

Литература

[1] *Гильберт Д.* Основания геометрии: Пер. с нем. — М.—Л., 1948.
[2] *Клини С. К.* Введение в метаматематику: Пер. с англ. — М., 1957.
[3] *Carnap R.* Foundations of logic and mathematics. — Chicago, [1939].
[4] *Tarski A.* Logic, semantics, metamathematics. — Oxford, 1956.
[5] *Curry H. B.* Language, metalanguage and formal system. — (Philosophical Review; V. 59). — New York, 1950.
[6] *Woodger J. H.* The technique of theory construction. — Chicago, [1939]; The axiomatic method in biology. — Cambridge, 1937; Biology and launguage. — Cambridge, 1952.
[7] *Church A.* Introduction to the mathematical logic. — V. 1. — Princeton, 1956. [Русский перевод: *Чёрч А.* Введение в математическую логику. — Т. 1 / Пер. с англ. В. С. Чернявского под ред. В. А. Успенского. — М.: ИЛ, 1960. — 485 с.]
[8] *Gödel K.* Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. — (Monatshefte für Mathematik und Physik. V. 38). — Leipzig, 1931.
[9] *Perry J. W.*, *Kent A.*, *Berry M. M.* Machine literature searching. — New York—London, [1956].

Семантика (в логике)

СЕМАНТИКА в логике — отдел логики, изучающий значения понятий и суждений, в особенности при записи их в виде выражений так называемых формальных систем. К задачам семантики относится прежде всего уточнение таких общелогических понятий, как 'смысл', 'соответствие', 'предмет', 'множество', 'логическое следование', 'интерпретация' и т. п. Важное место в семантике занимают вопросы различения между объёмом понятия и содержанием понятия, между истинностным значением суждения и смыслом суждения. Свойства, связанные с объёмом понятия и значением истинности суждения, называются экстенциональными, а свойства, связанные с содержанием понятия и смыслом суждения, — интенциональными. Так, суждения «дважды два четыре» и «Волга впадает в Каспийское море», равносильные экстенционально (их истинностные значения совпадают), различаются интенционально (они имеют разные смыслы).

Точный смысл проблемы семантики приобретают в связи с построением и изучением формальных систем. При исследовании какой-либо формальной системы семантические проблемы возникают тогда, когда система получает интерпретацию, т. е. истолковывается как отображающая некоторую содержательную теорию или раздел науки, в силу чего приобретают значение (смысл) выражения данной системы. Сама система в этом случае называется семантической, или интерпретированной. При изучении формальных систем объектом семантики являются общие вопросы соотношения между формальной системой и её интерпретациями. Таким образом, в семантике изучаются такие проблемы, как проблема истины (соответствие формул или предложений семантической системы положению вещей в изображаемой области), проблемы,

---

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 266—267. (Соавторы: Делир Гасемович Лахути, Виктор Константинович Финн.)

связанные с соотношением знака и обозначаемого, проблема определения смысла выражений системы и т. п. Семантика при этом не может быть оторвана от синтаксиса, который она естественно дополняет.

Существуют вопросы, являющиеся одновременно синтаксическими и семантическими. Так, например, одно из определений полноты формальной системы состоит в том, что система полна, если добавление к её аксиомам формулы, не являющейся теоремой, делает систему противоречивой; само это определение имеет синтаксический характер, однако существенно используемое в нём понятие непротиворечивости может определяться и семантически.

Но, в отличие от синтаксиса, семантика рассматривает выражения формальных систем не просто как таковые, а как записи суждений и понятий; при этом опять-таки существенно различение между экстенциональным и интенциональным. Запись некоторого понятия (для простоты, единичного) может считаться *именем* предмета, составляющего объём этого понятия. Таким образом, возникает трёхчленное соответствие (называемое часто *основным семантическим треугольником*) между предметом, содержанием понятия и именем. Чтобы подчеркнуть отношение первого и второго членов к третьему, их называют *предметом* имени и *концептом* имени. Так, у имён «А. С. Пушкин» и «автор „Евгения Онегина“» одинаковые предметы, но разные концепты. Здесь семантика тесно соприкасается с *семиотикой* — общей теорией знаковых систем (не смешивать с семиотикой в медицине[1]).

Семантика в логике начала впервые развиваться в львовско-варшавской школе польских логиков. До этого семантические проблемы рассматривал в своих работах немецкий логик и математик Г. Фреге, один из основателей современной математической логики. С. Лешневский в своих лекциях (1919) рассматривал понятие истины и семантические парадоксы. Позже (1926) Т. Котарбиньский проделал детальный анализ семантических понятий. На основе этих работ А. Тарский заложил основы систематического построения семантики (1933), которую продолжал развивать в своих позднейших работах. Теория смысла разрабатывалась К. Айдукевичем. В 1938 опубликовал свою первую работу по семиотике американский логик Ч. Моррис.

[1] ●➤ Опасность такого смешения возникала потому, что в 50 основных томах 2-го издания Большой Советской Энциклопедии хотя и присутствовал термин «семиотика», и даже дважды: в виде отдельной статьи в т. 38 на с. 179 и в виде упоминания в т. 14 на с. 257, но лишь в медицинском значении этого термина — ‘учение о признаках болезней’, ‘симптоматология’. ◄●

Согласно Моррису, семиотика делится на три раздела: синтаксису, или отношение знака к знаку; семантику, или отношение знака к обозначаемому; прагматику, или отношение знака к тому, кто его употребляет. Работы Тарского и Морриса оказали влияние на австрийского логика Р. Карнапа. Если в первый период своей деятельности Карнап ограничивал задачу логики изучением логического синтаксиса, то впоследствии, включив в сферу логических исследований семантику, он создал развитую систему семантики в серии работ под общим названием «Исследования по семантике» (1942—1947). Примерно в то же время оригинальные работы по проблемам семантики опубликовал американский логик У. Куайн. В последнее время (1956) интересную систему семантики предложил американский логик Дж. Кемени.

При разработке своей системы семантики Карнап исходил из задачи логического анализа языка науки, понимаемого как интерпретированная формальная система. По Карнапу, помимо чисто формального (синтаксического) анализа языка науки, требуется анализ его содержательной (сигнификативной) стороны. Теорией такого анализа и является семантика — наука о значении и интерпретации. Карнап делит семантику на три части: теорию обозначения (отношение между выражениями и их значениями), теорию истины, теорию логической дедукции. Основным понятием карнаповской семантики является понятие «описания состояния». Описание состояния есть конъюнкция (объединение) всех элементарных предложений данной системы, в которую каждое предложение входит либо как утверждаемое, либо как отрицаемое (но не вместе). Таким образом, описание состояния полностью описывает состояние всех индивидуальных предметов данной предметной области относительно всех свойств и отношений, выражаемых предикатами системы. Характерной особенностью подхода Карнапа является то, что он формализует семантику (рассматриваемую в качестве теории) в виде некоторой формальной системы.

Исследования Тарского отличаются от работ Карнапа прежде всего отсутствием формально построенной системы семантики. Основное внимание Тарский уделяет анализу семантических понятий ('истина', 'определение', 'выполнимость', 'обозначение'и др.) и выяснению возможности их определения. По Тарскому, семантические понятия могут быть определены только для формализованных языков, т. е. языков, построенных как некоторое (интерпретированное) логическое исчисление. Для того же, чтобы определить семантические понятия для неформализованных (в том числе естественных) языков, необходимо

построить формализованные языки, служащие приближениями к данному языку. Как показал Тарский, семантические понятия, в частности понятие истины, не могут быть определены в системе того языка, в котором они фигурируют, так как это с неизбежностью привело бы к возникновению семантических парадоксов типа парадокса «лжеца». Поэтому для определения семантических понятий, помимо исследуемого или объектного языка, должен вводиться так называемый метаязык, на котором и должно вестись рассуждение о семантических понятиях объектного языка. Метаязык должен включать объектный язык как свою часть. В метаязыке Тарский и строит свои определения семантических понятий (прежде всего понятия истины).

Взглядам Карнапа и Тарского противопоставляет свои взгляды Куайн. Не выдвигая сколько-нибудь разработанной системы семантики, Куайн основное внимание уделяет критике существующих систем, в особенности карнаповской. То, что обычно понимается под семантикой, он делит на две части: теорию смысла и теорию обозначения. Первая изучает проблемы, связанные со смыслом выражений; её характеризуют такие понятия, как 'смысл', 'синонимия' (одинаковость по смыслу), 'осмысленность', 'следование'. Вторая изучает проблемы соотношения обозначаемого и обозначающего; она характеризуется понятиями 'обозначение', 'наименование', 'истина' и т. д. По мнению Куайна, эти две дисциплины настолько отличаются друг от друга, что не имеет смысла объединять их под общим названием «семантика». Более или менее развитой из них Куайн считает теорию обозначения, к которой он относит, например, большинство работ Тарского.

Кемени в работе «Новый подход к семантике» предложил новую систему формализованной семантики. Он строит формализованный язык, в котором определяются понятия модели и интерпретации. На основе понятия интерпретации Кемени вводит различение аналитического и синтетического высказываний: аналитическое имеет место во всех интерпретациях данного исчисления, тогда как синтетическое имеет место лишь в некоторой данной интерпретации. В соответствии с этим понятия, определяемые в терминах всех интерпретаций, относятся к тому, что Куайн назвал теорией смысла, а понятия, определяемые в терминах одной интерпретации, — к теории обозначения.

В последнее время семантика в логике, в отличие от так называемой общей семантики (С. Чейз, А. Х. Кожибский), приобретает всё большее и большее практическое значение, особенно в связи с задачей создания рациональных систем записи научных сведений.

Литература

[1] *Carnap R.* Introduction to semantics. — Cambridge, 1946; Formalization of logic. — Cambridge, 1943; Meaning and necessity. — 2 ed. — Chicago, [1956].
[2] *Quine W. V. O.* From a logical point of view. 9 logic-philosophical essays. — Cambridge, 1953.
[3] *Kemeny J. G.* A new approach to semantics // The Journal of Symbolic Logic. — 1956. — V. 21. — N. 1—2.
[4] Semantics and the philosophy of language / Ed. L. Linsky. — Urbana, 1952.
[5] *Ajdukiewicz K.* Sprache und Sinn // Erkenntnis. — 1934. — Bd. 4 — [Heft 2].
[6] *Russell B.* On denoting // Mind. — 1905. — V. 14. — N. 56.
[7] *Frege G.* Translation from the philosophical writings. — Oxford, 1952.
[8] *Morris C. W.* Foundations of the theory of signs. — Chicago, [1938].
[9] *Church A.* Carnap's «Introduction to semantics» // The Philosophical Review. — 1943. — V. 52. — N. 3.
[10] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика: Сб. трудов / Пер. с немецкого Б. В. Бирюкова под ред. З. А. Кузичевой. — М.: Аспект Пресс, 2000. — 512 с.

См. также литературу к статье *Метатеория*[2].

[2] ●●▶ См. с. 477 настоящей книги. — *Примеч. ред.* ◀●●

Синтаксис (в логике)

СИНТАКСИС в логике — отдел логики, изучающий строение суждений и отношения между суждениями в отвлечении от их содержания, в особенности при записи суждений в виде выражений так называемых формальных систем. Синтаксисом называют также и самоё систему действующих в той или иной формальной системе правил. К кругу вопросов, изучаемых синтаксисом, относятся прежде всего (по аналогии с синтаксисом в языкознании) правила образования осмысленных суждений и (в отличие от синтаксиса в языкознании) правила вывода одних суждений из других (правила доказательства). Чтобы иметь общий характер, эти правила по необходимости должны быть формальными, т. е. формулироваться в терминах формы рассматриваемых суждений, но не их содержания (хотя, конечно, прообразом этих формальных правил служат конкретные отношения между конкретными суждениями, выявленные с максимальным учётом содержания). Особенно важно формально, без ссылок на содержание, изложить правила доказательства. Но синтаксические рассмотрения в целом ряде случаев позволяют как раз выявить более полно само содержание. Например, синтаксический анализ умозаключения «Иван и Пётр — братья; фамилия Ивана — Сидоров; следовательно, фамилия Петра — Сидоров» позволяет выявить скрытую посылку «братья имеют одинаковую фамилию». Подобные примеры можно найти и в истории науки, когда синтаксические рассмотрения приводили к необходимости уточнений основных понятий или основных допущений.

Объединение под термином «синтаксис» особого круга идей и методов приобрело специфическое значение в математической логике при исследовании формализованных теорий. При формализации какой-либо содержательной теории её понятия и предложения

Опубликовано в книге: Большая Советская Энциклопедия. — 2-е изд. — Т. 51 [дополнительный]. — М.: Сов. энциклопедия, 1958. — С. 269—270. (Соавторы: Делир Гасемович Лахути, Виктор Константинович Финн, Владимир Соломонович Чернявский, Юрий Александрович Шиханович.)

записываются в специальном коде в виде последовательностей символов (эти последовательности называются формальными выражениями), причём даются формальные правила образования понятий и предложений теории (более точно следует говорить о правилах образования формальных выражений, служащих записями понятий и предложений) и формальные правила вывода одних предложений из других (более точно следует опять-таки говорить о выводе формальных выражений). Совокупность формальных выражений вместе с соответствующими правилами образует формальную систему. При этом говорят, что исходная содержательная теория формализуется в виде полученной формальной системы или является интерпретацией последней (одна и та же формальная система допускает, вообще говоря, много разных интерпретаций). Формализация теории не только имеет громадный теоретический интерес, позволяя лучше разобраться в самой теории, но и приобретает в последнее время большое практическое значение (см. *Метатеория*[1]). При исследовании формализованных теорий объектом изучения синтаксиса является внутреннее строение формальных систем [этим синтаксис отличается от *семантики* в логике (см. *Семантика* (в логике)[2]), объектом изучения которой является соотношение между формальными системами и их интерпретациями]. Термин «синтаксис» в применении к логике был введён австрийским логиком Р. Карнапом в его книге «Логический синтаксис языка» (1934). Изучение синтаксиса формальных систем может помочь и при разработке синтаксиса в языкознании, поскольку можно строить формальные системы, служащие приближениями к реальным языкам.

Построением формальных систем, формализующих конкретные научные теории, и изучением их синтаксиса занимались: для арифметики — немецкий логик Г. Фреге, английские логики Б. Рассел и А. Уайтхед, немецкие математики Д. Гильберт и П. Бернайс; для квантовой механики — американские математики Г. Биркгоф и Дж. Нейман; для биологии — английский логик Дж. Вуджер.

Формальную систему можно задать, например, указав: 1) список символов, или алфавит; ряд написанных друг за другом символов из этого списка называется словом, или формальным выражением; 2) морфологические правила, или правила образования, согласно которым среди формальных выражений выде-

---

1 ●●▶ Статья «Метатеория» публикуется на с. 475—477 настоящей книги. — *Примеч. ред.* ◀●●

2 ●●▶ Статья «Семантика (в логике)» публикуется на с. 478—482 настоящей книги. — *Примеч. ред.* ◀●●

ляются термы (служащие для записи понятий) и формулы (служащие для записи суждений); 3) правила преобразования, или правила вывода, устанавливающие, как из одних формул непосредственно выводить другие; 4) список аксиом, согласно которому некоторые из формул выделяются как аксиомы.

Следует подчеркнуть, что правила преобразования имеют чисто синтаксический характер, т. е. формулируются лишь в терминах строения упоминаемых в этих правилах формальных выражений. Хотя выбор тех или иных правил обусловливается тем, для каких целей мы строим формальную систему, т. е. тем, какую содержательную теорию мы формализуем в виде данной формальной системы, сама окончательная формулировка правил должна быть не зависящей от интерпретации. Именно эта независимость и делает формальные системы мощным орудием исследования содержательных теорий. Ясно, что какую-либо конкретную формальную систему в отдельности интересно рассматривать лишь в том случае, если она имеет интерпретацию. Однако для построения общей теории формальных систем необходимо рассматривать все системы, независимо от того, имеют они интерпретации или нет (тем более, что не всегда можно сразу установить, имеет ли данная формальная система интерпретацию).

На основе правил преобразования определяется вывод в данной формальной системе. Конечная последовательность формул называется выводом из формул $P_1, \ldots, P_n$, если каждая формула этой последовательности есть либо аксиома, либо одна из формул $P_1, \ldots, P_n$, либо непосредственно выводится из каких-либо предыдущих формул той же последовательности. Формула называется выводимой из формул $P_1, \ldots, P_n$, если существует содержащий её вывод из формул $P_1, \ldots, P_n$. Формула, выводимая из аксиом, называется доказуемой формулой, или теоремой. При интерпретации формальной системы теоремам должны соответствовать истинные предложения, но не обязательно все истинные предложения рассматриваемой содержательной теории; так, австрийский логик и математик К. Гёдель показал, что не существует такой формальной системы, теоремы которой служили бы записями всех истинных (и только истинных) предложений арифметики (это утверждение о несуществовании составляет содержание знаменитой теоремы Гёделя о неполноте).

Основные проблемы, возникающие при изучении формальных систем, — это проблемы непротиворечивости и полноты. Обе эти проблемы допускают синтаксический и семантический под-

ходы, отображающие различные стороны наших представлений о непротиворечивости и полноте содержательных теорий. Даже при синтаксическом подходе возможны разные определения непротиворечивости и полноты. Для так называемых формальных систем с отрицанием, т. е. систем, в которых возможно записать, что одно предложение является отрицанием другого, существует, например, следующее определение непротиворечивости: система называется непротиворечивой, если ни для какой формулы не может случиться, чтобы и она, и её отрицание были теоремами. Другое определение непротиворечивости, годное для произвольных систем, таково: система непротиворечива, если существуют формулы, не являющиеся теоремами. Для широкого класса систем оба этих синтаксических определения равносильны. Как показал К. Гёдель, для наиболее важных систем запись утверждения о непротиворечивости системы не может быть теоремой этой же системы (эта невозможность составляет содержание так называемой второй теоремы Гёделя). Семантическое определение непротиворечивости состоит в требовании наличия хотя бы одной интерпретации. Синтаксическое определение полноты для систем с отрицанием таково: для всякой формулы либо она, либо её отрицание является теоремой. Первый из упомянутых результатов Гёделя равносилен синтаксической неполноте формализованной арифметики.

Литература

[1] *Carnap R.* The logical syntax of language. — L., 1937; Formalization of logic. — Cambridge, 1943.

[2] *Whitehead A. N.*, *Russell B.* Principia mathematica. — 2 ed. — V. 1—3. — Cambridge, 1927—35.

[3] *Frege G.* Grundgesetze der Arithmetik. — Bd. 1. — Jena, 1893; Bd. 2. — Jena, 1903.

[4] *Birkhoff G.*, *Neumann J. von.* The logic of quantum mechanics // Annals of Mathematics. — 1936. — V. 37. — N. 4. — P. 835.

См. также литературу к статье *Метатеория*[3].

[3] ●●▶ См. с. 477 настоящей книги. — *Примеч. ред.* ◀●●

Тезисы о кибернетике с комментариями

1. Определение кибернетики. — 2. Управление. — 3. Связь. — 4. Информация. — 5. Организованные системы. — 6. Место кибернетики в системе наук. — 7. История кибернетики. — 8. Роль кибернетики в убывании энтропии. — Послесловие от февраля 2001 года. — Примечания.

1. Определение кибернетики

Тезис Винер определил кибернетику как науку об управлении и связи в животных и машинах. Таким образом, кибернетика есть наука об организованных системах.

Комментарий Кибернетику можно было бы определить как науку об информации в той же мере, в какой физику можно определить как науку об энергии.

Есть и отличные от винеровского понимания кибернетики. По Куфиньялю[1], например, кибернетика есть общая теория целенаправленных действий и их эффективности.

Написано в январе 1957 года. Опубликовано в книге: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 137—142. (Соавторы: Вячеслав Всеволодович Ива́нов, Михаил Константинович Поливанов.)

[1] ●➤ Сейчас трудно восстановить ссылку на подразумеваемую здесь публикацию Луи Куфиньяля. Но вот его более поздняя публикация: *L. Couffignal*. La cybernétique et l'enseignement des langues vivantes // Études de linguistigue appliquée. — N. 4. — Paris: Didier, 1966. — P. 116—133. В этой статье, на её первой странице, мы находим заявление, торжественность которого подчёркнута графическим оформлением:

C'est ainsi que <...> la cybernétique est devenue
L'ART D'ASSURER L'EFFICACITÉ DE L'ACTION.

Русский перевод «заявления»:

Таким образом <...> кибернетика сделалась
ИСКУССТВОМ ОБЕСПЕЧИВАТЬ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДЕЙСТВИЯ. ◄●

2. Управление

Тезис

Управление предполагает:

а) цель управления;

б) программу управления (программа может предусматривать реакцию на воздействие внешней среды и корректировку управления, т. е. обратную связь);

в) сигналы управления, которые передаются через каналы связи. Таким образом, управление осуществляется посредством связи.

Комментарий

Управление всегда имеет в виду наличие некоторой организации, и потому учение об управлении имеет своим объектом те или иные организации.

Создание организации есть также акт управления.

Различаются три вида управления:

1) с жёстким программированием (полностью детерминированные алгоритмические процессы);

2) недетерминированные процессы с детерминированными обратными связями (автоматическое регулирование);

3) недетерминированные процессы с недетерминированными обратными связями (теория игр).

К сигналам управления относятся не только импульсы энергии, но и материальные частицы, например, гормоны. Гормоны есть частный случай сигналов «всем, кого это касается» (т. е. сигналов, воспринимаемых всеми узлами). Другими примерами таких сигналов могут служить запахи в муравейнике и расклеенные по городу приказы о мобилизации.

Передача сколь угодно большой информации может быть сопряжена со сколь угодно малой передачей энергии. Затрата энергии связана только с кодом, а не с самой информацией. Так, например, в логической машине последней конструкции, работающей на сверхпроводниках при температуре, близкой к абсолютному нулю, в части, перерабатывающей информацию, рассеивается энергия всего около 6 ватт.

3. Связь

Тезис

Связь предполагает:

а) систему коммуникации, состоящую из узлов и каналов;

б) информацию, хранимую, посылаемую и воспринимаемую узлами и передаваемую по каналам;

в) способы кодирования.

Таким образом, говоря о связи, имеют в виду циркуляцию информации или, по крайней мере, возможность такой циркуляции.

Комментарий Если говорить о связи в коллективе, то в настоящее время следует особенно подчеркнуть значение связи между человеком и машиной и связи между машиной и машиной.

4. Информация

Тезис Информация есть первичное понятие. Понятие информации имеет два аспекта:

о первом аспекте см. предыдущий пункт;

второй аспект состоит в том, что информация понимается как мера организованности.

В обоих случаях информация противоположна энтропии.

Комментарий Понятие информации ничуть не менее понятно, чем понятие энергии; оно только менее привычно. «Информация есть информация, не материя и не энергия» (Винер).

Доступная науке информация всегда появляется в кодированном виде, т. е. в форме сообщения, которое представляет собой последовательность сигналов. В сфере действия кибернетики информация не извлекается из сообщения, а только перекодируется. Если имеется некоторый код A, сообщение α в этом коде и правила перевода кода A в код B, то можно сообщение α перевести в сообщение β в коде B, которое можно рассматривать как носитель той же информации. Таким образом, информацию можно понимать как инвариант при переводе сообщения в другие коды.

Вероятностный подход к измерению количества информации не следует считать единственно возможным (ср. попытки Бар-Хиллела, Карнапа и МакКея). Вероятностный подход связан с материальным воплощением информации в сообщении.

Предполагается, что достаточно высоко организованные системы способны воспринимать некодированную информацию. Возможно, что это лежит вне рамок кибернетики.

5. Организованные системы

Тезис Организованные системы суть оазисы убывающей энтропии. Каждая организованная система есть информация в её втором аспекте.

Комментарий Традиционное понятие «жизнь» не входит в круг рассмотрения кибернетики (точно так же, как и физики). Поэтому кибернетика может на равных основаниях изучать машины, живые существа, сообщества и другие виды организованных систем (14-й квартет Бетховена). Различия между разнообразными организованными системами изучаются в кибернетике лишь постольку, поскольку они могут быть сформулированы в её же терминах. Например, различие между современным человеком и машиной по состоянию на 1954 год заключается, по Шеннону, в следующем:

1) размер, т. е. количество узлов;

2) отсутствие в машине произвольных связей между узлами (отсюда отмеченное ещё Паскалем преимущество человека, заключающееся в его произволе);

3) надёжность мозга человека (ср. последствия поломки одного узла машины);

4) разнообразие операций, выполняемых мозгом (универсальность);

5) различие во вводящих и выводящих устройствах.

К пяти пунктам Шеннона следует добавить следующие два пункта:

6) сложность программы человека, создававшейся в течение миллионов лет (и передававшейся по наследству);

7) отсутствие сообщества машин.

Сообщество организованных систем само может быть организованной системой (муравейник, цивилизация). Представляет интерес исследование причин возникновения таких сообществ. Таким образом, множество организованных систем является частично упорядоченным. Возникает вопрос, какой из элементов фиксированного линейно упорядоченного подмножества является наиболее высоко организованным.

6. Место кибернетики в системе наук

Тезис Вышеизложенное составляет предмет кибернетики, отличающий её от других наук, с которыми она связана (в первую очередь математика, биология, лингвистика,

статистическая и квантовая физика, социология беспозвоночных и др.).

Комментарий В отличие, например, от биологии и географии, кибернетика является наукой не описательной, поскольку она может рассматривать *мыслимые* организованные системы, *мыслимые* процессы управления и т. д. Как физика или генетика, кибернетика может широко пользоваться математическим аппаратом, но не сводится к нему. Законы кибернетики не опираются на физические законы, и поэтому их истинность не зависит от истинности последних. Винер подчёркивает связь идей кибернетики с идеями статистической физики (августинианство и манихейство).

Ценность кибернетики состоит в установлении аналогий и общего языка. Вводятся такие общие понятия, как обратная связь, способ поведения и т. д. Очевидно значение кибернетики для психологии, физиологии, медицины, техники, планирования и т. п. (предсказание новой болезни сердца на модели; возможность рассмотрения некоторых расстройств движения как нарушений обратной связи; моделирование условных рефлексов и обучения).

7. История кибернетики

Тезис Кибернетика есть естественное порождение науки XX века. Соответствующие идеи были сконденсированы Винером и его коллегами — представителями разных специальностей — в ходе непринуждённых застольных бесед о методах науки. Первой публикацией по кибернетике была напечатанная в 1948 году книга Н. Винера «Cybernetics», в которой и дано приведённое выше определение кибернетики.

Быть может, кибернетика как наука ещё не создана.

Комментарий Сопоставление живых организмов с искусственными и взаимопроникновение методов их изучения родилось задолго до кибернетики. Здесь имеется в виду, с одной стороны, понимание живого существа как машины, с другой стороны, моделирование отдельных органов и функций живых организмов как источник развития техники. Но эти идеи приобрели плоть и кровь лишь после введения понятия информации как основы для управления и связи.

Н. Винер, А. Розенблют [1] (роль которого неясна и нуждается в дополнительном исследовании) и др., а впоследствии К. Шеннон, У. Р. Эшби, В. Уолтер [2] и др., составили организованную систему, заложившую фундамент кибернетики. Современный этап кибернетики характеризуется повышенным интересом к дискретному, что свойственно современной науке вообще, например, квантовой физике (ср. идеи А. А. Малиновского и Э. Шрёдингера о дискретном в биологии).

Если существует теория игр, не являющаяся только частью математики, то её следует считать разделом кибернетики, так как сообщество игроков есть организованная система. Теория исследования операций изучает структуру организованной системы по её поведению (проблема «чёрного ящика»), точнее, устанавливает нормы поведения другой системы по отношению к первой. Таким образом, это есть теория игр на высшем уровне: по разгаданной стратегии одной системы устанавливается стратегия другой. Поскольку это ещё не часть математики, то высказанное выше предположение о теории игр подтверждается.

Кибернетика, задуманная Винером как единое целое, в работах последних лет распадается на две большие части: теорию живых и искусственных организмов и теорию связи и информации. Полный синтез этих двух направлений и других, названных выше (теория игр), и будет означать завершение создания кибернетики.

8. Роль кибернетики в убывании энтропии

Тезис Кибернетика сама есть наука в высшей степени кибернетическая, т. е. максимально способствующая возрастанию организованности и убыванию энтропии.

Комментарий Предполагается, что высоко организованная система, восприняв данное сообщение, состоящее из 8 тезисов и комментариев к ним, так настроится, что сможет получить некую некодированную информацию.

16—17 января 1957 года.

Послесловие от февраля 2001 года

«Тезисы о кибернетике» предназначались их авторами для единственного читателя — Андрея Николаевича Колмогорова — и были переданы ему мною 17 января 1957 года. В течение сорока лет они никому более не показывались, пока не были переданы для публикации Якову Ильичу Фету — одному из двух редакторов-составителей упомянутых в сноске на с. 487 «Очерков истории информатики в России».

История появления настоящих «Тезисов», а также Приложения 1 к ним вкратце такова (о других её деталях см. в пунктах 6.2—6.4 на с. 127—130 кн. 4 «Филология»).

Ещё до завершения в 1958 году второго издания Большой Советской Энциклопедии (БСЭ) было осознано, что её содержание не отвечает новым реалиям, наступившим со смертью Сталина и приходом к власти Хрущёва. В вышедших 50 томах отсутствовали члены Президиума ЦК КПСС, избранные в этот орган в июне 1957 года (тт. Аристов А. Б., Брежнев Л. И., Беляев Н. И. и др.[2]), реабилитированные личности (такие как В. А. Антонов-Овсеенко, Н. И. Вавилов, Г. А. Гуковский), реабилитированные народы (балкарцы, ингуши, чеченцы), реабилитированные науки: кибернетика, теория информации, теория игр (кибернетика до 1955 года официально считалась буржуазной лженаукой, а теория информации и теория игр с нею ассоциировались). Поэтому 28 апреля 1958 года был подписан к печати дополнительный, 51-й том, куда, в частности, вошли перечисленные выше слова.

Колмогоров был членом Главной редакции БСЭ и руководил математическим разделом энциклопедии. Относясь чрезвычайно ответственно к любому делу, которым он занимался, Колмогоров сам написал две большие статьи для 51-го тома: «Информация» и «Кибернетика». Для некоторой помощи в подготовке статьи «Кибернетика» он привлёк меня, а я — своих друзей Вячеслава Всеволодовича Ива́нова и Михаила Константиновича Поливанова. Основная наша деятельность состояла в доставлении Колмогорову сведений об имевшихся к тому времени зарубежных публикациях по кибернетике. Попутно возникли и эти «Тезисы». Они были написаны в обстановке большого эмоционального подъёма в ночь с 16 на 17 января 1957 года и 17 января были переданы мною Колмогорову.

[2] А ведь каждому из них полагался портрет на отдельной вклейке (кандидату в члены полагался портрет шириной в столбец внутри текста).

Колмогоров откликнулся на наши «Тезисы». 20 января он написал свои собственные «Тезисы о кибернетике», а 24 января — проект начала статьи «Кибернетика» для БСЭ. Оба текста были положены в один конверт и переданы мне, а я ознакомил с ними Ива́нова и Поливанова. Впоследствии оба колмогоровских текста были опубликованы на с. 142—146 «Очерков истории информатики в России».

Примечания

1 [к с. 492]. Артур Розенблют (Arturo Rosenblueth, 02.10.1900—20.09.1970) — мексиканский исследователь, врач и физиолог. Известен как один из пионеров кибернетики. Родился и умер в Мексике, работал в Мексике и в США, в том числе в Гарварде с Винером.

2 [к с. 492]. ●➤ Клод Э́лвуд Ше́ннон (Claude Elwood Shannon, 30.04.1916—24.02.2001) — американский инженер и математик, основатель теории информации, внёсший также фундаментальный вклад в ряд других теорий, из числа тех, которые в своей совокупности образуют понятие ‘кибернетика’. В 1948 году предложил использовать слово «бит» для обозначения наименьшей единицы информации.

Уильям Росс Эшби (William Ross Ashby, 06.09.1903—15.11.1972) — английский психиатр, специалист по кибернетике и пионер в исследовании некоторых её разделов. В СССР стал достаточно широко известен, благодаря русскому изданию своей книги «Введение в кибернетику», вышедшему в 1959 году в московском издательстве «Иностранная литература» с предисловием А. Н. Колмогорова. (Оригинальное английское издание с названием «Introduction to Cybernetics» вышло в Лондоне в 1956 году в издательтве «Chapman & Hall».)

Вильям Грей Уолтер (William Grey Walter, 19.02.1910—06.05.1977) — британский нейрофизиолог и разработчик роботов, известен как один из основателей кибернетики. Утверждают, что в молодости на Уолтера оказали значительное влияние исследования И. П. Павлова; он изучал условные рефлексы вместе с посетившей Британию группой студентов Павлова. ◀●

Приложение 1

А. Н. Колмогоров. Тезисы о кибернетике

1. Книга, долгоиграющая пластинка, запоминающее устройство вычислительной машины, участок коры головного мозга, хромосомы в зародышевой клетке — могут рассматриваться как носители «информации». Применимое во всех этих случаях понятие «информации» может быть формально определено, и поэтому его не следует считать неопределимым «первичным понятием» (см. далее п. 2—4).

2. Информация может быть или «сообщением», или «приказом». В первом случае это информация о некотором фактическом обстоянии, имеющем место независимо от носителя информации, во втором — информация, обуславливающая определённый характер действия организма или прибора, в который входит (к которому присоединён) носитель информации.

Примечание. Часто информация, заключённая в данном носителе, исполняет обе эти функции. Однако наличие хотя бы одной из них необходимо для самого определения информации: состояние некоторого объекта только в том случае выражает некоторую информацию, если установлено определённое соответствие между этими состояниями и фактами, которые они отображают, или между этими состояниями и действиями, которые они обуславливают.

3. В первом случае имеются налицо: множество A «элементарных возможностей», о реализации одной из которых даётся информация, и множество «сообщений», т. е. элементов b множества B возможных состояний носителя информации. Связь между $a \in A$ и $b \in B$ может быть:

1) чисто комбинаторной, т. е. задаваться указанием «совместимых» пар (a, b);

Опубликовано в книге: Очерки истории информатики в России / Ред.-сост. Д. А. Поспелов, Я. И. Фет. — Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 142—145. Публикация осуществлена по тексту, напечатанному А. Н. Колмогоровым на пишущей машинке. На копии документа надпись рукой В. А. Успенского: «Получено 24.01.57 от А. Н. Колмогорова». Об истории возникновения этого текста см. последний абзац «Послесловия от февраля 2001 года» на с. 494.

2) полувероятностной, т. е. задаваться указанием условных распределений $p(b \mid a)$[3];

3) вероятностной, т.е. задаваться указанием распределения $p(a, b)$.

В первом случае $b \in B$ несёт ту же информацию, как $b' \in B'$, если множество A_b возможностей a, совместимых с сообщением b, совпадает с множеством $A_{b'}$ возможностей a, совместимых с сообщением b'.

Во втором случае $b \in B$ несёт ту же информацию, что и $b' \in B'$, если отношение

$$p(b \mid a) : p(b' \mid a)$$

не зависит от a.

В третьем случае $b \in B$ несёт ту же информацию, что и $b' \in B'$, если $p(a \mid b) = p(a \mid b')$.

4. Можно аналогичным образом определить и эквивалентность приказов в смысле одинаковости информации об обуславливаемом ими действии. Как обычно, определение эквивалентности, или «равенства информации» в обоих случаях (сообщений и приказов) рассматривается как достаточное основание для возможности говорить о самой «информации», тождественной в эквивалентных сообщениях или приказах.

5. Носитель информации (организм или машина) может изменяться во времени: воспринимать новую информацию в результате воздействий извне, терять хранимую информацию под действием «шумов», передавать содержащуюся в нём информацию через «каналы связи» новым носителям информации, действовать вовне при помощи выдачи приказов. Часто информация, введённая в «неявном виде», должна быть для возможности выработки основанных на ней приказов существенно «переработана», т. е. записана в новой форме. Например, вычислительная [машина] с введённой в неё программой вычисления некоторой функции $y = f(x)$ (с указанием шага и пределов изменения x и точности определения y) уже содержит в себе всю информацию, которая по окончании вычисления таблицы функции $y = f(x)$ войдёт в эту таблицу. Однако эта информация в форме готовой таблицы предстаёт перед нами в существенно новой форме. Ещё более глубокие формы переработки информации осуществляет мозг человека.

6. Многие вопросы хранения, передачи и переработки информации и её использования в процессах познания, управления, воспроизве-

[3] Так в первом экземпляре машинописного текста. Выражение $p(b \mid a)$ вставлено карандашом рукой Колмогорова. Во втором (через копирку) экземпляре его же рукой и также карандашом вставлено $p(a \mid b)$. — *В. У.*

дения наследственных признаков и т. п. могут быть исследованы в общей форме в значительном отвлечении от конкретного содержания сообщений и приказов, т. е. от конкретной области явлений, к которой относятся отображаемые в сообщениях фактические обстояния и производимые в результате приказов действия. Часто при этом столь же безразлична и конкретная природа носителей информации, а существенны лишь принципы их работы (дискретный или непрерывный, двоичная или более сложная система записи и т. п.). Всеми такими общими вопросами и занимается *кибернетика*.

7. Если принять предлагаемое определение, то в кибернетику полностью войдёт общая теория вычислительных машин и теория информации. Из теории управления и регулирования *не войдут* в кибернетику вопросы реализации приказов в форме действий с наименьшей затратой энергии, и, вообще, основная часть классической теории регулирования останется по существу вне кибернетики, так как вопросы способов записи и переработки информации там столь просты, что играют подчинённую роль. Теория игр останется тоже независимой смежной дисциплиной, лишь тесно переплетающейся с кибернетикой в некоторых своих проблемах.

8. Эти более прозаические тезисы о кибернетике явно не предусматривают возведения её создателя в ранг пророка, но хотелось бы, чтобы авторы более возвышенного «сообщения в восьми тезисах» не пришли от этих новых тезисов в уныние ни в отношении деловых занятий кибернетикой, ни в своих поэтических и философских воспарениях, отделив эти последние в другую сферу своей активности, в которой может быть увлекательнее найти себе другие образцы, кроме «знаменитого математика, философа, медика и биолога периода World War no. 2».

Дополнительные замечания

а) Данное выше изложение проведено в объективных терминах, соответствующих в применении к работе мозга павловской рефлексологии. Взять такое изложение за основу необходимо, если желать сделать изложение убедительным и в случае машин, материального аппарата наследственности и т. п. *После* установления законности аналогий между всеми этими областями можно распространить субъективную психологическую терминологию и на неодушевлённые машины.

б) В самоё определение информации входит соответствие $a \leftrightarrow b$, т. е. код. Вопрос о «некодированной информации» даже не возникает.

в) Вопрос об измерении информации при помощи скалярной величины «количество информации» очень важен и в основном решён Шенноном, но к *определению* кибернетики отношения не имеет, так же как понятие энергии (количественной меры движения) не имеет отношения к определению физики.

г) Концепции «науки об организованных системах» или «науки об управлении и связи» слишком широки для того, чтобы на их почве можно было ожидать развития действительно целеустремлённого единого направления работы, требующего единой организации, специальных институтов, подготовки кадров по единым программам и т. п. Наоборот, кибернетика в очерченных выше более узких рамках, вероятно, может и должна получить известное организационное оформление.

д) С другой стороны, ограничивать кибернетику управлением и связью в «животных и машинах» не целесообразно. Библиотеки, научные институты и прочие социальные объединения — столь же законные объекты внимания кибернетики.

е) Энтропия в кибернетике появляется лишь в виде

$$H(\xi) = I(\xi, \xi),$$

т. е. количества информации в объекте ξ относительно самого себя. С физической энтропией она имеет лишь математические, хотя и весьма интересные аналогии. Тезис об «информации как мере организованности» мне непонятен, как и основанные на нём философемы.

ж) Лишь с натяжкой можно было бы назвать кибернетику «частью математики». Положение здесь аналогично с теорией вероятностей: в рамках чистой математики теория вероятностей может восприниматься как частная глава теории меры или теории булевских алгебр, но действительное её значение этим очень мало разъясняется. На самом деле теория вероятностей занимает видное самостоятельное положение как наука о реальных стохастических (вероятностных) связях между явлениями. По-видимому, настало время между конкретными естественными и социальными науками, классифицируемыми по отдельным кругам реальных явлений (механических, химических, биологических, экономических и т. п.) и математикой найти место для наук, имеющих дело с такими категориями, как случайность и вероятность (в реальном понимании этого слова), причинность, информация, связь, игра, стратегия и т. п., применимыми в весьма различных предметных областях, но не обладающими отвлечённостью собственно чисто математических понятий.

20 января 1957 года.

Проект начала статьи для БСЭ

КИБЕРНЕТИКА — научное направление, имеющее своей основной задачей построение общей теории способов хранения, передачи и переработки «информации» в машинах и живых организмах.

В качестве науки, или научной дисциплины с определённой системой основных понятий и подразделений К. находится ещё в стадии формирования. После того, как Шенноном была введена естественная мера «количества информации», сложилась под названием *информации теории* (см.) элементарная часть К., посвящённая способам хранения информации в «запоминающих устройствах» и передачи информации по «каналам связи». (Первое систематическое изложение в работе Шеннона «Математическая теория сообщений», 1948.) Более широкий замысел К. в целом был параллельно развит Винером и впервые изложен в его книге «Кибернетика» (1948). В управляющих системах (машинах или живых органах) информация, поступающая в виде «сообщений», отражающих состояние внешнего мира и объекта управления, перерабатывается в информацию, выдаваемую в форме «приказов», обуславливающих определённые воздействия на объект управления. В вычислительных машинах и в процессах человеческого мышления сообщения, выражающие логические определения и суждения, подвергаются глубокой переработке, в результате которой вырабатываются сообщения, выражающие новые суждения, являющиеся следствиями принятых определений и суждений. Общее исследование способов такой более глубокой переработки информации и составляет содержание высших разделов К.

Н. Винер определяет К. как науку об управлении и связи в животных и организмах. Это определение соответствует данному в начале статьи, если слово «управление» понимать в достаточно узком смысле определённой системы переработки поступающих в управляющий орган (управляющее устройство) сообщений в приказы. При этом вне сферы ведения К. остаются «цели», преследуемые управлением, в случае сознательной человеческой деятельности — К. изучает лишь способы осуществления заданной системы соответствий между сообщениями и приказами. Вне сферы К. остаются и способы осуществления выработанных приказов с точки зрения затрачиваемой энергии, размеров «исполнительных элементов» и т. п. Последнее ограничение создаёт возможность рассматривать в К. с общей точки зрения управление процессами весьма различной природы.

Техническая кибернетика (кибернетика машин) могла выделиться в самостоятельную науку лишь тогда, когда задача восприятия необ-

ходимых для управления сообщений и их преобразования в приказы приобрела самостоятельный интерес. В теории центробежного регулятора скорости вращения ещё нет ничего специфически кибернетического — это задача традиционной механики. В теории простейшего копировального механического устройства, пантографа, — тоже нет ещё ничего специфически кибернетического. Но в случае автоматического станка, обрабатывающего сложную деталь по программе, вырабатываемой счётно-решающим устройством на основании считывания необходимых данных (скажем, при помощи фотоэлемента) с чертежа, кибернетические задачи преобразования информации получают значительную самостоятельность по отношению к задаче рационального устройства и работы исполнительных элементов (резцов и т. п.).

24.01.57.

Приложение 2

А. Н. Колмогоров. Автоматы и жизнь[1]

Первая часть

1. Общеизвестен интерес к вопросам:

Могут ли машины воспроизводить себе подобных и может ли в процессе такого самовоспроизведения происходить прогрессивная эволюция, приводящая к созданию машин, существенно более совершенных, чем исходные?

Могут ли машины мыслить[2] и испытывать эмоции?

Могут ли машины хотеть чего-либо и сами ставить перед собой новые задачи, не поставленные перед ними их конструкторами?

Иногда пытаются обосновать отрицательный ответ на подобные вопросы при помощи:

а) ограничительного определения понятия «машина»,

б) идеалистического толкования понятия «мышление», при котором легко доказывается неспособность к мышлению не только машин, но и человека[3].

Опубликовано в бюллетене: Машинный перевод и прикладная лингвистика. — 1961. — № 6. — С. 3—8.

[1] Тезисы доклада, прочитанного акад. А. Н. Колмогоровым 6 апреля 1961 года на методологическом семинаре Механико-математического факультета МГУ.

[2] В раздававшемся на колмогоровском докладе тексте этих его тезисов слово «мыслить» — одно из центральных для идеологии доклада — по недосмотру было пропущено. Поэтому его не было и в последовавших публикациях. Заметила это лишь Н. Г. Химченко (Рычкова), и то через продолжительное время. Мне известно только одно издание, где публикация была сверена с рукописью Колмогорова и это слово восстановлено — это изданная тиражом 300 (триста!) экземпляров книга: Колмогоров и кибернетика / Под ред. Д. А. Поспелова, Я. И. Фета. — (Вопросы истории информатики; Вып. 2). — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001. — 159 с. Там настоящие тезисы помещены на с. 77—82. — *В. У.*

[3] «Математическое возражение» по классификации А. Тьюринга в книжке «Может ли машина мыслить?».

2. Существует более традиционная и простая форма этого вопроса. Возможно ли создание искусственных живых существ, способных к размножению, прогрессивной эволюции, в высших формах обладающих эмоциями, волей и мышлением вплоть до самых тонких его разновидностей? <...> размножению, прогрессивной эволюции, в высших формах обладающих эмоциями, волей и мышлением вплоть до самых тонких его разновидностей?

3. Точное определение всех входящих в поставленный сейчас вопрос понятий не вполне тривиально. Однако на естественнонаучном уровне строгости такое определение возможно. Лица, отрицающие такую возможность, неизбежно приводятся к солипсизму.

4. Создание высокоорганизованных живых существ превосходит возможности техники сегодняшнего дня. Если технические трудности будут преодолены, то вопрос о практической целесообразности осуществления соответствующей программы работ будет ещё, по меньшей мере, спорным.

5. Однако важно отчётливо понимать, что в рамках материалистического мировоззрения не существует никаких состоятельных принципиальных аргументов против положительного ответа на наш вопрос. Этот положительный ответ является современной формой положений о естественном возникновении жизни и материальной природе сознания.

6. Несомненно, что переработка информации и процессы управления в живых организмах построены на сложном переплетении:

а) дискретных (цифровых) и непрерывных механизмов,

б) детерминистического и вероятностного принципов действия.

7. Однако дискретные механизмы являются ведущими в процессах переработки информации и управления в живых организмах. Не существует состоятельных аргументов в пользу принципиальной ограниченности возможностей дискретных механизмов по сравнению с непрерывными.

8. Принципиальная возможность полноценных живых существ, построенных полностью на дискретных (цифровых) механизмах переработки информации и управления, не противоречит принципам материалистической диалектики. Противоположное мнение может возникнуть у специалистов по философии математики лишь потому, что они привыкли видеть диалектику лишь там, где появляется бесконечное. При анализе явлений жизни существенна не диалектика бесконечного, а диалектика большого (чисто арифметическая комбинация большого числа элементов создаёт и непрерывность, и новые качества!).

Вторая часть

9. Несмотря на сказанное в первой части, в распространённом движении против «преувеличения кибернетики» есть и здоровая сторона. Реальными распространёнными недостатками обобщающей литературы и отдельных работ по кибернетике являются:

а) упрощённое представление о механизмах переработки информации и управления в живых организмах и, особенно, в области высшей нервной деятельности человека;

б) пренебрежение опытом исследования этих механизмов, накопленным до возникновения кибернетики как отдельной науки.

10. Если первый из этих недостатков «исправляется на ходу» (в процессе работы несостоятельность упрощённых представлений обнаруживается), то второй недостаток требует систематической борьбы с ним, в частности, при планировании подготовки молодых специалистов.

11. В области высшей нервной деятельности человека кибернетика пока освоила лишь:

а) механизм условных рефлексов в его простейшей форме (см. работы по «математической теории обучения»),

б) механизм формального логического мышления. Но условные рефлексы свойственны всем позвоночным, а логическое мышление возникло лишь на самой последней стадии развития человека. Все предшествующие формальному логическому мышлению виды синтетической деятельности человеческого сознания, выходящие за рамки простейших условных рефлексов, пока не описаны на языке кибернетики.

12. В развитом сознании современного человека аппарат формального мышления не занимает центрального положения. Это скорее некоторое «вспомогательное вычислительное устройство», запускаемое в ход по мере надобности. Так как, с другой стороны, обычные схемы теории условных рефлексов дают очень мало для понимания высших разделов эмоциональной жизни человека или, скажем, творческой интуиции учёного, то следует признать, что кибернетический анализ работы развитого человеческого сознания в его взаимодействии с подсознательной сферой ещё не начат.

13. Рассматриваемые в кибернетических работах примеры художественного творчества и восприятия и их моделирование на машинах (компилирование музыкальных мелодий из отрывков по четыре-пять нот, взятых из нескольких десятков введённых в машину прежних мелодий и т. п.) поражают своей примитивностью, в то время как в «некибернетической» научной литературе формальный анализ

художественного творчества уже давно достиг высокого уровня. Это лишь один из примеров примитивного уровня гуманитарных интересов кибернетиков, повышение его необходимо, если ставить перед собой всерьёз задачу понимания с позиций кибернетики действительной сложности психической жизни человека.

14. Объективное изучение в терминах кибернетики некоторых наиболее тонких видов творческой деятельности человека может уже в ближайшем будущем получить большое практическое значение. Вот пример, наиболее близкий математикам. Общеизвестно, что карандаш и бумага необходимы математику в процессе интуитивных творческих поисков. Вместо полностью выписанных формул, иногда на бумаге появляются их предположительные схемы с незаполненными местами, несколько линий и точек изображают фигуры в многомерном или бесконечномерном пространстве, иногда знаками обозначается ход перебора вариантов, сгруппированных по принципам, которые перестраиваются в ходе перебора и т. д. Вполне возможно, что вычислительные машины с надлежащим устройством ввода и вывода данных могли бы быть полезны уже на этой стадии научной работы. Естественно, что разработка методики такого употребления машин предполагает предварительное объективное изучение процесса творческих поисков учёного.

15. Некоторые другие направления объективного изучения механизма творческой деятельности человека могут и не получить в ближайшее время практических применений[4]. Однако, серьёзное объективное изучение высшей нервной деятельности человека во всей её полноте представляется мне необходимым звеном в утверждении материалистического гуманизма. Развитие науки многократно приводило к разрушению привычных для человека иллюзий, начиная с утешительной веры в личное бессмертие. На стадии полузнания и полупонимания эти разрушительные выводы науки становятся аргументами против самой науки, в пользу иррационализма и идеализма. Дарвиновская теория происхождения видов и павловское объективное изучение высшей нервной деятельности неоднократно изображались как принижающие высшие стремления человека к созданию моральных и эстетических идеалов. Аналогично, в наше время страх перед тем, как бы человек не оказался ничем не лучше «бездушных» автоматов, делается психологическим аргументом в пользу витализма и иррационализма[5].

---

[4] Во всяком случае, мои личные опыты внесения идей кибернетики в стиховедение не имеют цели помогать поэтам писать стихи.

[5] Страусовский аргумент в терминологии Тьюринга.

Полное же понимание механизма высшей нервной деятельности человека должно, по моему убеждению, разрушить самый источник страха, заменив его удивлением перед результатами уже упоминавшейся диалектики большого[6].

[6] Поэт может вложить в «сообщение» из 400 печатных букв (сообщение чисто «цифровой» природы, несущее информацию порядка 10^3 «бит», т. е. количественно ничтожную с точки зрения современной техники) целый мир чувств, который справедливо признаётся неподдающимся «формализации» в понятиях, и создать с такими скромными средствами «канал связи» непосредственного эмоционального общения со своими современниками и потомками, раскрывающий, разрывая ограничения пространства и времени, его неповторимую индивидуальность. Замечу, что мнение о «неповторимости» не противоречит арифметике. Число возможных русских стихотворений из 400 букв имеет порядок 10^{100}.

Приложение 3

Письмо Колмогорова автору настоящей книги, написанное им от руки

Николаев, 5-III-1962.

Дорогой Володя!

С 24 февраля как кибернетик я с интересом наблюдаю организацию погрузки морских судов. Наибольшая вероятность выйти в море у нас была 28-го февраля, так как это содействовало бы выполнению февральского плана выхода судов в море. В соответствии с этим в ночь с 28-го февраля на 1-е марта мы вышли из Одессы в Николаев. До вчерашнего воскресного дня наше пребывание в Николаеве было осмысленно и в другом отношении. Вчера одесские футболисты побили николаевский «Судостроитель» (мастера класса Б) на Николаевском стадионе, и присутствие возможно большего числа одесских моряков было желательно для обеспечения безопасности одесских футболистов.

Впрочем, у нас был ещё «культпоход» на «Марию Стюарт» Шиллера в местном театре, возможность смотреть бокс и т. д. 14—15 марта сюда приедет Игорь Безродный, но я имею слабую надежду быть в это время в Индийском океане.

Сделавшись Вашими стараниями кибернетиком, я всё более в самом деле вовлекаюсь в её *общие* проблемы, выходящие за рамки математики, приходя к нескромному мнению, что ими мало кто занимается с должной широтой.

Вот, например, вопросы **обучения** (**людей** — напр., иностранному языку). Странным образом, кажется, никто из *кибернетиков* (на другом, старомодном языке нечто из нижеследующего давно говорилось!) не пришёл к той естественной идее, что учитель (для конкретности — преподаватель математики) находится в том же положении, как учёный, приходящий **со своей проблематикой** в уже существующий вычислительный центр с определённым набором вычислительных машин, запасом заготовленных (с другими целями!) программ, даже со штатом программистов. Задача его состоит в том, чтобы обучить

Текст письма приведён на с. 302—303 книги: Колмогоров в воспоминаниях учеников. — М.: МЦНМО, 2006.

этот сложный организм выполнить новую работу, используя все свои уже заготовленные заранее механизмы, программы, навыки.

Поэтому преподаватель математики должен хорошо понимать, например, природу геометрических воображения, интуиции, развившихся на решении практических задач управления собственными движениями, перемещения предметов, их метания и т. д. Выбирая символику, он должен считаться с уже выработанными навыками создания и запоминания систем знаков: надо думать, что даже у совсем хороших математиков сложность системы знакомого им родного языка превосходит и по сложности строения, и по объёму всё, что они усваивают как математики (в смысле количества знаков, понятий, отношений, их элементарных свойств, соответствующих грамматике).

Всё необычайное преимущество человеческой культуры (и особенно самой новой — именно нашего века) в её полной свободе — готовности создавать совсем новые необычные структуры, хотя бы и значительно более **простые**, чем уже созданные веками культуры и сотнями миллионов лет органической эволюции. Но эти простые (и даже **очень примитивные**) новые структуры приобретают подлинную значительность лишь управляя или направляя по новым путям старые, более консервативные, но **в своём роде**, конечно, значительно **более совершенные**, чем все, что мы создали вновь **или создадим в обозримом будущем**.

Ваш А. К.

Адрес: Indian Statistical Institute
Calcutta 35, India

До 1 мая

Экспансия математики[1]

— Как из абстрактных разделов математики Вы пришли в лингвистику и способствовали открытию в МГУ отделения теоретической и прикладной лингвистики? Какая связь вообще может быть между математикой и лингвистикой?

— Сейчас расскажу. В Отделении историко-филологических наук Российской академии наук состоит академик Вячеслав Всеволодович Иванов (ударение в фамилии на втором слоге). Мы познакомились в сентябре 1950 года на дне рождения нашего общего друга. Тогда он был не Вячеслав Всеволодович, а Кóма, студент пятого курса Филологического факультета МГУ, а я был студентом четвёртого курса Механико-математического факультета. Мы вышли вместе и часть ночи гуляли по Москве. Сразу возникло и взаимопонимание, и понимание того, что в лингвистике есть аспекты точных наук. Короче говоря, через некоторое время мы с ним решили открыть семинар по математической лингвистике. Но назвать его так... Знаете, это был как раз тот момент, когда кибернетика из «продажной девки мирового империализма»...

— Это же вроде генетика у нас была «продажная девка», нет?

— Кажется, Вы правы, кибернетика была всего лишь «буржуазной лженаукой на службе у империалистической военщины». За генетику у нас сажали, а за кибернетику выгоняли с работы. Но если при Хрущёве в отношении к генетике ещё не настал перелом, потому

Опубликовано в журнале: Вокруг света. — 2011. — № 7 (2850), июль. — С. 128—132. Интервью дано 2 декабря 2010 года. Беседовала А. Д. Нарышкина.

[1] Автор отдаёт себе отчёт, что эта статья была бы более уместна в книге 3 «Языкознание», нежели в книге 2 «Философия». Однако в книгу 3 она по техническим причинам не попала, и после некоторых колебаний автор решился исправить это упущение, включив её в настоящую книгу 2. «Незаконность» её пребывания в книге 2 служит причиной того, что она расположена не в общем хронологическом порядке, а в конце, после остальных, «законных» статей.

что Лысенко ещё царствовал, то в отношении к кибернетике если и не наступил, то наступал. Что же до математической лингвистики, то она была «так называемая». Поэтому назвать семинар семинаром по математической лингвистике было нельзя, и мы назвали его «Некоторые применения математических методов в языкознании».

— И вы, два студента...

— Нет, решение об открытии семинара было принято весной 1956 года, мы тогда уже не были студентами, мы познакомились студентами, а тут мы оба уже ассистенты: он на Филологическом, а я на Мехмате. И мы открыли семинар на Филологическом факультете. Первое занятие состоялось 24 сентября 1956 года. И семинар стал таким, я бы сказал, оплотом лингвистического свободомыслия. Ходили туда в основном лингвисты, но захаживали и математики. В 1958-м Ива́нова выгнали из университета за открытую поддержку травимого тогда Пастернака, и работа семинара прекратилась. В следующем году мой двойной тёзка Владимир Андреевич Звегинцев, специалист по истории языкознания, работавший на кафедре общего и сравнительно-исторического языкознания Филологического факультета, захотел оттуда выделиться и создать как собственную кафедру структурной и прикладной лингвистики, так и соответствующую специализацию студентов с преподаванием им математики. Организационно эта специализация должна была быть оформлена в виде особого, одноимённого с кафедрой отделения структурной и прикладной лингвистики (ОСиПЛ). И кафедра, и отделение, которые были созданы, оказались бревном в глазу для всего остального Факультета. Они раздражали. Они были какие-то не такие... Особенные. Раздражение засвидетельствовано в известном фильме Говорухина «Ворошиловский стрелок». Вы помните, что там происходит? Три мерзавца изнасиловали девочку. А кто эти мерзавцы?

— Я не помню.

— А я сейчас Вам напомню. Один — хозяин ларьков. Ясно, что это априори сволочь. Второй — сын большого милицейского начальника. Тем самым тоже гад. А третий изучает в университете структурную и математическую лингвистику. Ясно же, что мерзавец! Он же, Говорухин, не выбрал человека, который изучает, допустим, химию. Но вернусь к истории создания ОСиПЛа. В мае 1959 года ректор МГУ Иван Георгиевич Петровский, потрясающий ректор, созвал совещание по этому вопросу, и там я выступил с заявлением, что не надо создавать отделение структурной и прикладной лингвистики, а надо создать отделение лингвистики. Помню, Петровский очень удивился: он считал — и присутствовавший на совещании Колмогоров

тоже так считал, — что Филологический факультет разделён на два отделения: лингвистическое и литературоведческое. Подобно тому как Мехмат разделён на два отделения — отделение механики и отделение математики. И Петровский, и Колмогоров заведовали кафедрами Мехмата, и для них обоих было открытием, что Филологический факультет устроен по-другому, что на нём такая каша из лингвистики и литературоведения. От меня на этом совещании они всё это узнали. Филологический факультет был и есть устроен следующим образом. Человек окончил, допустим, русское отделение и получил в дипломе запись: специалист по русскому языку и литературе. Или окончил другое отделение, и он специалист по романским языкам и литературе. Я тогда настаивал, что это полная каша и что это надо разделить. Но не имел успеха, потому что, к моему изумлению, против отделения от литературоведов выступили лингвисты. Тогда я придумал такой терминологический трюк: открыть отделение теоретической и прикладной лингвистики, ОТиПЛ. Я имел в виду, что другой лингвистики не бывает. Звегинцев был против предложенного мною названия, потому что одноимённость кафедры и отделения укрепляла его власть над тем и другим. Однако меня поддержал Петровский, и в 1960 году впервые произошёл набор студентов на отделение теоретической и прикладной лингвистики Филологического факультета. Первый раз, кажется, приняли 13 человек, но окончили из них это отделение пять. По справедливости должны были окончить лишь трое, но ещё двух мы оставили, потому что три — это, конечно, кворум в палате лордов (сейчас там всё переделали, а раньше было так), но у нас такое было бы невозможно: нас бы не поняли и закрыли. В 1961 году был второй приём на ОТиПЛ, но всё это время Звегинцев работал над тем, чтобы переименовать ОТиПЛ в ОСиПЛ, и наконец преуспел: в 1962-м студентов уже принимали на ОСиПЛ. И только через 30 лет и кафедра, и отделение получают те названия, которые они имеют сегодня — «теоретической и прикладной лингвистики». Так что с 1992 года снова ОТиПЛ!

— А что даёт математика лингвисту?

— Точность мысли. Возьмём три последние сессии Российской академии наук, на которых были выборы. Выбрали ровно четырёх членов-корреспондентов РАН. При этом три из них — выпускники ОТиПЛа/ОСиПЛа. Это Владимир Алпатов, Анна Дыбо и Владимир Плунгян. Четвёртый же (но избран он был первым!) — заведующий кафедрой теоретической и прикладной лингвистики Александр Евгеньевич Кибрик. Когда я пришёл на это отделение преподавать, он уже окончил классическое отделение Филологического факуль-

тета и состоял в должности лаборанта. Все пять лет он посещал курс математики, что, как понимаете, было для него совершенно необязательно! Он ходил на все занятия, не пропуская ни одного. Я нахожу это очень существенным: ядро отечественной лингвистики сейчас составляют выпускники отделения теоретической и прикладной лингвистики Московского университета.

— А как работалось в 1970-е и 1980-е годы?

— Сергей Петрович Новиков, сын великого математика, академика Петра Сергеевича Новикова, и тоже академик замечательно сказал: «Как-то так получается, что выдающиеся теории создают простые люди (например, теорию относительности создал Эйнштейн, мелкий сотрудник патентного бюро в Швейцарии, генетику создал Мендель, монах, который на огороде возился с горохом), а опровергают Менделя — Лысенко, а Эйнштейна — Логунов. При этом Лысенко — академик, президент Академии сельскохозяйственных наук, трижды лауреат Сталинской премии, Герой Социалистического Труда, кавалер многих орденов; Логунов — академик, вице-президент Академии наук СССР, лауреат Ленинской и Государственных премий, Герой Социалистического Труда, кавалер многих орденов». А ведь Логунов 15 лет, с 1977 по 1992 год, был ректором Московского университета. Всё-таки ректор учебного заведения не должен опровергать общепризнанную теорию, даже если он считает её неверной. Мне скажут, что Лобачевский, будучи ректором Казанского университета, опровергал Евклида. Нет, он не опровергал Евклида, а просто выстраивал другую, неевклидову геометрию. Но Вы спросили, как работалось в то время? Плохо работалось. Летом 1982 года Логунов закрыл кафедру структурной и прикладной лингвистики, точнее присоединил её к кафедре общего и сравнительно-исторического языкознания, которая после поглощения соседа стала именоваться «кафедра общего, сравнительно-исторического и прикладного языкознания». Ею заведовал Юрий Владимирович Рождественский, который меня учил, как надо учить математике. Он прочёл мне небольшую лекцию о том, как надо её преподавать: «Главное в математике — это число, число в платоновском смысле. Вот этому понятию и надо обучать студентов в первую очередь. Раскрывать им смысл чисел: один — это единство мира, два — это его дуальность, три — это троичность, четыре — это четыре стороны света или четыре стихии».

Потом, слава богу, Логунов ушёл. Ректором стал Садовничий, который повёл другую политику: возобновилась кафедра, короткое время именовавшаяся кафедрой прикладной лингвистики и тут же переименованная новым заведующим, Кибриком, в кафедру теорети-

ческой и прикладной лингвистики. Кстати, в РГГУ к тому времени уже несколько лет существовало отделение теоретической и прикладной лингвистики.

— А удалось восстановить атмосферу? Всё-таки то закрыли, то открыли, а это 90-е годы, народ начинает разъезжаться... Как оно сейчас?

— Не очень хорошо. Я не готов оценивать своих коллег, я их люблю. Да и я уже не тот, мне 80 лет. У меня уже не горят глаза.

— А молодёжь-то способная есть?

— Есть. Несколько лет назад на Филологическом факультете МГУ снова открылся тот семинар, который в 1956 году учредили мы с Ива́новым. На этот раз по инициативе студентов. На ОТиПЛе я преподаю на первом курсе, а далее, на старших курсах, преподают мои коллеги. И вот весной 2002 года, в конце моего преподавания на первом курсе, ко мне подходит самый способный студент курса, Денис Паперно. И он объявляет мне, что курс математики — опять слово «курс», но в другом смысле — показался им настолько разумным, что они хотят, чтобы что-нибудь похожее продолжалось в какой-либо форме. При этом даёт мне список из более чем двадцати студентов, желающих участвовать в занятиях. Я говорю: очень хорошо, но подойдите ко мне со списком, когда начнётся третий курс; сейчас у вас энтузиазм, вот если он сохранится за год — отлично. К моему удивлению, энтузиазм угас лишь частично. Паперно нашёл меня в начале своего третьего курса, т. е. осенью 2003-го. Новый список составлял уже треть от первоначального. Я написал объявление, что возобновляется такой-то семинар, а его предыдущее заседание было 9 июня 1958 года.

— И что, семинар ведут те же люди?

— Нет, не те же. Тогда было три человека. Мы с Ива́новым поняли, что нам бы никто не дал открыть семинар, — мы были всего лишь ассистентами. Поэтому для прикрытия мы пригласили замечательного профессора Филологического факультета Петра Саввича Кузнецова, который, помимо прочего, был другом детства Колмогорова. Кузнецов очень давно умер, Ива́нов давно в Лос-Анджелесе, и сначала я вёл возобновившийся семинар один, потом пригласил ещё двоих соруководителей — математика Мати Рейновича Пентуса (теперь он главный руководитель) и лингвиста Петра Михайловича Аркадьева[2].

[2] Первое занятие возобновлённого семинара состоялось 15 ноября 2003 года. М. Р. Пентус — один из двух российских докторов физико-математических наук, получивших свою докторскую степень за исследования в области

— А семинар, это как? Раз в неделю?

— По субботам, но не каждую субботу. На нём, кстати, регулярно выступает тот самый Денис Паперно. Делает он это по скайпу из Калифорнии.

— Так он свалил в Калифорнию?

— Он был одним из самых способных студентов ОТиПЛа, каких я знал. Ну конечно, свалил! Не исключено, что я даже писал ему рекомендацию в аспирантуру Университета Калифорнии. Кое-кто меня осуждает за подобные рекомендации. Дескать, это непатриотично, этим мы оголяем наше образование, наши кафедры... Тем не менее я пишу рекомендации всем, кто хочет и кто этого достоин. Способного человека я отрываю от сердца, но не держать же его тут насильно.

— Что происходит с нашей математической школой? Вы говорили, что у нас была одна из лучших...

— Ну конечно, одна из лучших! Конечно, она уже совершенно не такая. Когда самые способные люди разъехались... Особенно это было в начале девяностых, когда человек просто не мог прокормить здесь свою семью.

— Вам не хотелось уехать?

— Мне никогда не хотелось, но я думаю, что главная причина была всё-таки возраст. Когда появилась возможность уехать, мне было уже за 60 лет, и это не то время, когда надо начинать жизнь в другой стране. А здесь я всё-таки привык... Но знаете, многие из тех, кто уехали, — я считаю, что они патриоты России. Человек уехал вынужденно, он хотел бы жить в России, хотя, боюсь, не в такой России, которая сейчас.

математической лингвистики как отдела математики. Диссертация Пентуса защищена им в 2000 году. Другой доктор — А. В. Гладкий, защитившийся в 1965 году. Пентус стал моим соруководителем с 2005/2006 учебного года, Аркадьев вошёл в число руководителей семинара с 2010/2011 учебного года. Впоследствии мною был приглашён в руководство семинара лингвист Александр Чедович Пиперски. В настоящее время коллегия руководителей семинара «Некоторые применения математических методов в языкознании» состоит из четырёх человек и выглядит так: М. Р. Пентус, П. М. Аркадьев, А. Ч. Пиперски, В. А. Успенский.

Приложение 1 к книге 2 «Философия»

А. Х. Шень. О непостижимой (не)эффективности философии

Марксизм–ленинизм в СССР. — Загадка «Материализма и эмпириокритицизма». — Философы о науке. — Загадка философии. — Примечания (В. А. Успенского).

Владимир Андреевич Успенский обнаружил у себя моё электронное письмо, где (видимо, после того, как был у него в гостях) я перечислял некоторые темы, которые мы обсуждали, и призывал В. А. записать подробнее свои рассказы для следующего издания «Трудов по нематематике»[1]. К сожалению, ни он этого не сделал, ни я не записал более подробно, и теперь, когда В. А. попросил меня восстановить, что тогда обсуждалось, я могу только гадать. Тем не менее я попробую развить одну из тем.

Марксизм–ленинизм в СССР

Современным читателям, наверно, трудно себе представить, насколько абсурдным было преподавание «общественно-политических дисциплин» (научного коммунизма, научного атеизма, диалектического материализма, исторического материализма, политэкономии и др.) в СССР, и описанное А. И. Солженицыным занятие в «сети

[1] Вот это письмо:

From: Alexander Shen
Subject: temy zastolnyjkh besed
Date: Tue, 29 May 2007 09:26:38 +0400

о которых можно было бы написать в седьмой том:
— Мартин-Лёф о философах и анекдот о резинках и карандашах
— Гегель Кант Фреге Витгенштейн — сравнения
— Колмогоров и Гуссерль
— почему материализм и эмпириокритицизм нужен, чтобы порешить вконец и царство?

Найдя в компьютере это письмо во время работы над книгой 2 «Философия», я попросил автора письма развить упоминаемые в нём темы. Он любезно выполнил мою просьбу, и вот что получилось. — *В. У.*

политучёбы»[2] может показаться злой пародией, если не сценой для театра абсурда. Но этот театр был вполне реальным: упомянутую книгу Энгельса и другие труды «классиков марксизма» (Маркса, Энгельса, Ленина — и Сталина, пока последний был у власти) изучали и конспектировали советские студенты. И они там могли прочесть, как Энгельс пытался разобраться в соотношении между импульсом и энергией (так и не смог)[3].

---

2 — Третья черта диалектики — это переход количества в качество. Эта очень важная черта помогает нам понять, что такое развитие. Не думайте, что развитие — это просто себе увеличение. Здесь прежде всего следует указать на Дарвина. Энгельс разъясняет нам эту черту на примерах из науки. Возьмите вы воду, вот хотя бы воду в этом графине, — ей восемнадцать градусов, и она простая вода. Пожалуйста, можете её нагревать. Нагрейте её до тридцать градусов — и она всё равно будет вода. И нагрейте её до восемьдесят градусов — и всё равно будет вода. А ну-ка догреть до сто? Что тогда будет? Пар!!

Этот крик торжествующе вырвался у лектора, иные даже вздрогнули.

— Пар! А можно сделать и лёд! Что? Это и есть переход количества в качество! Читайте «Диалектику природы» Энгельса, она полна и другими поучительными примерами, которые осветят вам ваши повседневные трудности. А вот теперь, говорят, наша советская наука добилась, что и воздух можно сжиживать. Почему-то сто лет назад до этого не додумались! Потому что не знали закона перехода количества в качество! И так во всём, товарищи! Приведу примеры из развития общества.

(«В круге первом», глава 88.)

3 Энгельс выписывает цитату из учебника (*Thomson* [лорд Кельвин] and *Tait*. A Treatise on Natural Philosophy. — Oxford, 1857. — P. 162): «Количество движения, или момент твёрдого тела, движущегося без вращения, пропорционально произведению его массы на скорость. Двойная масса или двойная скорость будут соответствовать двойному количеству движения. <...> Vis viva, или кинетическая энергия движущегося тела, пропорциональна произведению его массы на квадрат скорости». Но понять, в чём тут дело, Энгельс не может и сетует: «В такой совершенно грубой форме ставятся рядом друг с другом обе противоречивых меры движения, причём не делается ни малейшей попытки объяснить это противоречие или хотя бы затушевать его. В книге обоих этих шотландцев мышление запрещено; можно производить только вычисления. Ничего нет поэтому удивительного, что по крайней мере один из них, Тэт, принадлежит к правовернейшим христианам правоверной Шотландии». Особенно возмущает Энгельса то, что пишут в учебниках про сохранение импульса при неупругом ударе: «Не то мы наблюдаем в случае удара неупругих тел. Здесь ходячие элементарные учебники (высшая механика почти не занимается больше подобными мелочами) утверждают, что сумма mv остаётся неизменной до удара и после него. Зато здесь происходят потеря в живой силе, ибо, если вычесть сумму mv^2 после удара из суммы их до удара, то остаётся всегда положительный остаток; на эту величину (или на её половину, в зависимости от точки зрения) и уменьшается живая сила, благодаря взаимопроникновению и изменению

Справедливости ради надо сказать, что Энгельс при жизни не публиковал этих заметок: они были опубликованы в СССР в 1925 году. Но и опубликованная им книга «Анти-Дюринг» (которую тоже изучали и конспектировали) содержит немало всякой наивной ерунды[4].

формы соударяющихся тел. Это последнее ясно и очевидно. Не так очевидно первое утверждение, а именно, что сумма mv остаётся неизменной до удара и после него. Живая сила представляет, вопреки Зутеру, движение, и раз часть её потеряна, то потеряно и движение. Таким образом либо mv выражает здесь неправильно количество движения, либо вышеприведённое утверждение ошибочно. Я позволю себе предположить последнее.

Вообще вся эта теорема является наследием времени, когда ещё не имели никакого представления об изменении движения, когда, следовательно, исчезновение механического движения признавалось лишь там, где этого нельзя было не признать. Так, здесь равенство суммы mv до удара и после него доказывается на основании того, что нигде нельзя отметить потери или выигрыша в этой сумме. Но если тела утрачивают, благодаря внутреннему трению, соответствующему их неупругости, живую силу, то они теряют также и скорость, и следовательно сумма mv должна после удара быть меньше, чем до него. Ведь нелепо игнорировать внутреннее трение при вычислении mv, когда с ним так определённо считаются при вычислении mv^2.

Но это ничего не значит. Если даже мы примем эту теорему и станем вычислять скорость после удара, исходя из допущения, что сумма mv осталась неизменной, даже и в этом случае мы найдём, что сумма mv^2 убывает. Таким образом здесь mv и mv^2 приходят между собою в столкновение, выражающееся в разнице действительно исчезнувшего механического движения. И само вычисление показывает, что сумма mv выражает количество движения правильным образом, а сумма mv^2 — неправильным образом».

(«Диалектика природы», гл. 10.)

[4] Вот несколько забавных цитат из неё: «Мы уже упоминали, что одним из главных оснований высшей математики является противоречие, заключающееся в том, что при известных условиях прямое и кривое должны представлять собой одно и то же. <...> Но уже и низшая математика кишит противоречиями. Так, например, противоречием является то, что корень из A должен быть степенью A; а всё-таки $A^{1/2} = \sqrt{A}$» (раздел о «переходе количества в качество»). А «закон отрицания отрицания» в «Диалектике» Энгельс иллюстрирует так: «Возьмём любую алгебраическую величину, обозначим её a. Если мы отрицаем её, то получим $-a$ (минус a). Если же мы подвергаем отрицанию это отрицание, помножив $-a$ на $-a$, то получим $+a^2$, т. е. первоначальную положительную величину, но на высшей ступени, именно во второй степени. Здесь также не имеет значения, что к тому же самому a^2 мы можем прийти и тем путём, что умножим положительное a на само себя и таким образом также получим a^2. Ибо отрицание, подвергшееся уже отрицанию, так крепко пребывает в a^2, что последнее при всех обстоятельствах имеет два квадратных корня, а именно $+a$ и $-a$. И эта невозможность отделаться от отрицания, которое подверглось уже отрицанию, от отрицательного корня, содержащегося уже в квадрате, получает весьма осязательное значение уже в квадратных уравнениях».

Можно сказать (и это будет правдой), что в условиях советского режима легко было объявить великим научным достижением любую ерунду — возможность репрессий (вплоть до ареста и убийства) со стороны ЧК-ГБ будет убедительным аргументом в любой научной дискуссии (и аргумент этот постоянно применялся). А то, что великие учёные, даже и без прямой угрозы, ссылались на «классиков марксизма-ленинизма» в подтверждение каких-то своих мыслей[5], можно объяснить мимикрией, а также сознательным или подсознательным желанием, «задрав штаны, бежать за комсомолом», «быть понятым моей страной», «труда со всеми сообща и заодно с правопорядком».

Загадка «Материализма и эмпириокритицизма»

Тем не менее это объяснение явно не полно. В 1908 году, вскоре после «первой русской революции» 1905—1907 годов, когда до «великой октябрьской социалистической революции» (октябрьского переворота) и ЧК было ещё лет десять, находящийся в эмиграции В. И. Ульянов (Н. Ленин) пишет книгу «Материализм и эмпириокритицизм» (опубликована в 1909 году, псевдоним В. Ильин). В ней он критикует философские тексты своих бывших товарищей по партии (Луначарского, Богданова и др.) и иностранных авторов, на которые эти товарищи ссылаются, включая Эрнста Маха (физика, в честь которого названо «число Маха», отношение скорости тела к скорости звука) и Анри Пуанкаре. В советское время эта книга считалась главным философским трудом Ленина, значение которого состоит в дальнейшем развитии коренных философских вопросов, в философском обобщении новейших достижений естествознания, изучалась и конспектировалась студентами и т. д. и т. п.

Если сейчас прочесть её «на свежую голову», то поражает прежде всего отношение Ленина к научной дискуссии: видно, что для него все эти обсуждения — прежде всего борьба между своими («материалистами») и чужими («идеалистами»), и важно в первую очередь не то, что пишет тот или иной автор, а то, «за нас» он или против, «на чью мельницу он льёт воду». И «эмпириокритики» опасны, по Ленину, прежде всего тем, что они пытаются скрыть свою враждебную идеалистическую сущность и запутать простодушных материалистов своими словесными уловками, которые надо разобла-

[5] Наугад взятый пример: в 1980 году, в «юбилейном» (к 110-летию со дня рождения Ленина) четвёртом номере «Кванта» опубликована статья Колмогорова «Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики».

чить[6]. Естественно, что при таком подходе обсуждение по существу невозможно, тем более что даже популярные книжки Пуанкаре[7] не так просты для понимания. Остаются брань[8], разоблачения[9] и обида на то, что критикуемые им авторы не подозревают об этой критике и вообще о марксизме[10].

Всё это понятно: Ленин был не мыслителем, а политиком, и заботился о целесообразности, а не об истинности. Удивительно другое — почему вообще вопросы философии науки привлекли такое внимание? В России только что были бедствия, восстания, расстрелы, манифесты и пр. Можно понять тех, кто поднялся на «последний решительный бой» с вековой несправедливостью и за свободу против самодержавия. Можно понять и тех, кто спасал российскую культуру и государственность от толпы завистливых погромщиков, которые хотели всё отнять и поделить, разрушив до основанья. Но кого в такое горячее время может волновать мнение Маха или Пуанкаре о методологии науки и то, нарушается ли закон сохранения энергии при распаде радия («превращении радия в гелий», как об этом говорится в книге)? Станет ли эксплуатация рабочих капиталистами более или менее приемлемой, если признать, что задачей науки (как утверждал Мах) является отыскание наиболее экономного описания наблюдаемых явлений? Почему разногласия между Лениным и «эмпириокритиками» в таком вопросе (даже если считать, что эти обсуждения имеют какой-то смысл) так важны для Ленина в его

---

6 Предисловие к изданию 1989 года, подписанное «Институт марксизма-ленинизма при ЦК КПСС», характеризует эту книгу как «образец большевистской партийности в борьбе против врагов марксизма, в которой органически сочетаются страстная революционность и глубокая научность».

7 Их русские переводы изданы в сборнике «О науке» (М.: Наука, 1980).

8 «Ошибаетесь, г. Пуанкаре: ваши произведения доказывают, что есть люди, которые могут мыслить только бессмыслицу» (гл. V, разд. 6); «Это не философия, господа махисты, а бессвязный набор слов» (гл. I, разд. 4).

9 «Нельзя надеяться, что махизм не будет служить на пользу „чертовщины“, когда он уже послужил и продолжает служить на пользу имманентам. Да и не одним только имманентам. Философский идеализм есть только прикрытая, принаряженная чертовщина»; «Добросовестный и честный враг материализма, Пирсон, с которым, — повторяем, — Мах неоднократно выражает своё полное согласие, и который прямо говорит о своём согласии с Махом, — не сочиняет особой вывески для своей философии, а без малейших обиняков называет тех классиков, от которых он ведёт свою философскую линию: Юма и Канта» (гл. III, разд. 5).

10 «Рей тоже профессор и, в качестве такового, полон бесконечного презрения к материалистам (и отличается бесконечным невежеством насчёт гносеологии материализма). Нечего и говорить, что какие-то там Маркс и Энгельс для таких „мужей науки“ совершенно не существуют» (гл. V, разд. 1).

политической деятельности, что он пишет целую книгу и активно хлопочет о публикации?

Странным образом этот вопрос, кажется, не привлёк внимания историков (ср. обсуждение вопроса о престолонаследных распоряжениях Александра I, приведших к восстанию декабристов[11]).

Философы о науке

Есть такой способ проверить, можно ли доверять суждениям того или иного человека в незнакомой области: посмотреть, что он говорит о хорошо знакомых вещах. (Как с газетами: если в газетной статье говорится о чём-то знакомом, обычно видно, что там всё перепутано.) С этой точки зрения интересно посмотреть, что пишут философы о науке — и обнаруживаются удивительные вещи.

Гегель

Тот самый Гегель, диалектику которого так ценил Ленин, называя «самым всесторонним, богатым содержанием и глубоким учением о развитии» (*В. И. Ленин.* Карл Маркс, краткий биографический очерк с изложением марксизма), в 1801 году написал и издал философскую диссертацию «Об орбитах планет»; русский перевод её опубликован в сборнике «Работы разных лет» (Т. 1. — М.: Мысль, 1970). Исходя из своих философских воззрений, Гегель пытается пересмотреть основы небесной механики (к тому времени уже надёжно установленные)[12]. Ему не нравится, например, что согласно Ньютону тела в Солнечной системе обращаются вокруг центра масс[13]. Не нравится ему и

[11] См. статью В. А. Успенского «Прогулки с Лотманом и вторичное моделирование» (в сборнике: Труды по нематематике: В 2 т. — Т. 2 — М.: ОГИ, 2002. — С. 1164—1201), планируемую к публикации в кн. 5 настоящего издания. — *Примеч. ред.*

[12] Эту философскую методу столь чтимого Лениным Гегеля впоследствии взяли на вооружение советские философы, уверенно вторгавшиеся в сферу естественных наук. Понять эти науки они были не в состоянии, но были в состоянии опровергать и запрещать; так они поступили с кибернетикой, молекулярной генетикой, химической теорией резонанса. — *В. У.*

[13] Ньютон, пишет Гегель, «принимает, что хотя действия притягивающих и притягиваемых тел взаимны, так что ни одно не может оставаться в покое, но те и другие тела вращаются под влиянием этого взаимного притяжения якобы вокруг общего центра тяжести. И он ссылается при этом на четвёртый короллярий своих законов, где, однако, говорится лишь о том, что общий центр тяжести двух или более тел не изменяет своего состояния покоя или движения ни при каких взаимодействиях этих тел; о необходимости же

правило параллелограмма для сложения сил, а то, что он пишет о центростремительной и центробежной силе, трудно даже пересказать[14]. Наконец, в конце текста он обсуждает вопрос о соотношений расстояний планет до Солнца. В то время была эмпирически найдена закономерность Тициуса—Боде, согласно которой расстояния (большие полуоси планет) пропорциональны членам последовательности $4+3\cdot 2^m$, где $m=-\infty$, 0, 1, 2, ... Эта последовательность сравнительно неплохо описывает расстояния вплоть до Урана (открытого уже после того, как эта последовательность была предложена): если вычислить коэффициент пропорциональности по Земле, то максимальные отклонения будут у Марса и Сатурна (примерно 5%). Правда, для этого нужно пропустить один член последовательности между Марсом и Юпитером, и астрономы стали искать там планеты и обнаружили пояс астероидов[15]. Гегель и здесь находит повод для философских размышлений (комментарии в квадратных скобках добавлены мною):

истинного и реального центра, или центрального тела, там не сказано ни слова. Стало быть, этот общий центр тяжести есть чисто математическая точка, и если Солнце есть центр сил или во всяком случае подходит весьма близко к нему, то объясняется это вовсе не необходимостью, а случаем, который наделил его наибольшей массой. Представление же о громадности солнечной массы, к понятию которой относится и плотность, само опирается на гипотезу о зависимости всякой силы от массы. В противоположность этому философия природы учит, что истинный центр сил есть по необходимости источник света и что только в этом заключается истинная мощь и совершенство Солнца».

14 «В том-то и дело, что все эти различные силы — только пустые названия, без которых лучше было бы обойтись, ибо из пустоты этого различения и возникли вся путаница и нелепость в объяснении явлений. Явное противоречие заключается уже в том, что явление, вызываемое центростремительной силой, изображается синусом-версусом, а вызываемое центробежной изображается касательной, а в то же время каждая из этих сил приравнивается к другой. И устранить это противоречие не помогут никакие ссылки на первое и последнее отношения возникающих величин, которые в случае дуги, синуса-версуса и касательной сводятся к отношению равенства, так что эти линии могут взаимно заменять друг друга. Ибо названные первое и последнее отношения оказываются здесь лишь тогда отношениями равенства, когда они вообще исчезают, когда уже не остаётся места ни для дуги, ни для синуса-версуса, ни для касательной, ни для различия рассматриваемых сил; центробежная сила равна центростремительной только тогда, когда величиной той и другой действительно выражается величина всего движения, и, таким образом, отношение этих сил, их различие и их названия испаряются в ничто».

15 Первый астероид, Церера, был открыт как раз в том самом 1801 году, в котором Гегель написал свою диссертацию.

Примером может служить интересующий нас здесь вопрос о расстоянии планет. Эти расстояния составляют арифметическую [скорее уж геометрическую!] прогрессию; но так как в природе нет планеты, которая соответствовала бы пятому члену этой прогрессии, то считают, что между Марсом и Юпитером в действительности существует и движется в пространствах неба ещё неизвестная нам планета, и все усилия учёных направлены на то, чтобы её открыть.

Однако самый этот ряд лишён решительно всякого философского значения, ибо в качестве арифметической прогрессии он не соответствует даже порядку чисел, порождаемых его собственными членами, т. е. порядку их потенций (степеней). Известно, с каким усердием пифагорейцы изучали философские соотношения чисел. Поэтому да будет мне позволено привести здесь числовой ряд, идущий из пифагорейских кругов и сохранённый нам в обоих сочинениях, известных под заглавием «Тимей»[16]. Правда, «Тимей» относит эти числа не к планетам, а учит, что демиург создал по их схеме Вселенную. Вот этот ряд:

$$1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad 9;\quad 16;\quad 27,$$

причём вместо 8, стоящей в тексте на шестом месте, мы позволяем себе читать 16 [видимо, исходно там чередовались степени двойки и тройки]. Если этот ряд более соответствует истинному закону природы, чем вышеупомянутая арифметическая прогрессия, то ясно, что между четвёртым и пятым местами имеется большой незанятый промежуток и что там нечего искать планету.

Выскажем теперь вкратце наши последние соображения. Если возвести вышенаписанные числа в двойной квадрат и затем извлечь из них кубические корни (вместо стоящей на первом месте единицы берём [почему-то] $\sqrt[3]{3}$), то получится ряд чисел, представляющий отношения планетных расстояний:

$$1{,}4 — 2{,}56 — 4{,}37 — 6{,}34 — 18{,}75 — 40{,}34 — 81.$$

Так писал Гегель; при правильном подсчёте корней получаются немного другие числа:

$$1{,}44 — 2{,}52 — 4{,}33 — 6{,}35 — 18{,}72 — 40{,}32 — 81.$$

Если взять расстояния до планет (большие полуоси) и умножить их

[16] В силу моей необразованности фраза «в обоих сочинениях, известных под заглавием „Тимей“» показалась мне загадочной. За разъяснениями я обратился к Саше Шеню и к Владимиру Владимировичу Файеру. Результаты переписки с ними приведены в затекстовом примечании 1. — *В. У.*

на такой коэффициент, чтобы для Земли число совпало с указанным Гегелем, то получится последовательность

1,69 — 3,16 — 4,37 — 6,65 — 22,7 — 41,9 — 84,0

или

1,67 — 3,13 — 4,33 — 6,6 — 22,5 — 41,5 — 83,2,

если сравнивать с исправленной последовательностью; согласие получается заметно хуже, чем для прежнего правила, которое даёт (при той же нормировке по Земле)

1,73 — 3,03 — 4,33 — 6,93 — [12,12] — 22,5 — 43,3 — 84,9

(квадратные скобки отмечают пропущенный член между Марсом и Юпитером).

Помимо диссертации, Гегель подготовил ещё и двенадцать тезисов для диспута, требуемого процедурой защиты; первые пять из них таковы:

- Противоречие есть критерий истины, отсутствие противоречия — критерий заблуждения.
- Силлогизм есть принцип идеализма.
- Квадрат есть закон природы, треугольник — закон духа.
- В истинной арифметике может складываться только единица с двойкой и вычитаться только двойка из тройки, и в то же время в ней ни тройка не является суммой, ни единица — разностью.
- Как магнит есть естественный рычаг, так тяготение планет к Солнцу есть маятник природы.

В заключение приведём без комментариев ещё две цитаты из книги Гегеля (Энциклопедия философских наук. — Т. 2: Философия природы. — М.: Мысль, 1975):

> Ловцам дроздов хорошо известно, что после туманного утра эти птицы превращаются в течение нескольких часов из крайне худых в очень тучных: мы имеем здесь непосредственное превращение влаги воздуха в животное вещество без дальнейшего отделения и прохождения через единичные моменты процесса ассимиляции. (С. 521.)

> Подобно тому как несостоятельно представление физиков о составленности воды из кислорода и водорода, <...> точно так же и воздух не состоит из газообразных кислорода и азота, но и здесь это лишь формы, в которых полагается воздух. Далее, эти абстракции интегрируются не с помощью друг друга, а с помощью третьего, в котором крайние члены снимают свою абстрактность и восполняются до тотальности понятия. (С. 320.)

Другие философы

Почему-то именно небесная механика вызывает особое раздражение философов и писателей.

> Заботится ли солнце о земле? Ни из чего не видно: оно её «притягивает прямо пропорционально массе и обратно пропорционально квадратам расстояний». Таким образом, 1-й ответ о солнце и о земле Коперника [на самом деле закон тяготения сформулировал Ньютон] был глуп. Просто — глуп. Он «сосчитал». Но «счёт» в применении к нравственному явлению я нахожу просто глупым. Он просто ответил глупо, негодно. С этого глупого ответа Коперника на нравственный вопрос о планете и солнце началась пошлость планеты и опустошение Небес. «Конечно, — земля не имеет о себе заботы солнца, а только притягивается по кубам [видимо, квадратам?] расстояний». Тьфу.
>
> (В. В. Розанов, «Апокалипсис».)

Другой российский философ, приводя эту цитату из Розанова, предваряет её так:

> Вы влюблены в пустую и чёрную дыру, называете её «мирозданием», изучаете в своих университетах и идолопоклонствуете перед нею в своих капищах. Вы живёте холодным блудом оцепеневшего мирового пространства и изувечиваете себя в построенной вами самими чёрной тюрьме нигилистического естествознания. А я люблю небушко, голубое-голубое, синее-синее, глубокое-глубокое, родное-родное, ибо и сама мудрость, София, Премудрость Божия, голубая-голубая, глубокая-глубокая, родная-родная. Ну, да что там говорить... (А. Ф. Лосев, «Диалектика мифа», гл. X.)

Можно было бы объяснять эти и другие подобные цитаты просто недостатком образования. Но, скажем, П. Флоренский окончил математический факультет МГУ, был хорошо знаком с Лузиным — но тем не менее в книге «Мнимости в геометрии» (1922 год; переиздано в 1991 году издательством «Лазурь» в Москве) он пишет:

> Принцип относительности «доказывается» неудачею опыта Майкельсона и Морлея [Морли]. <...> я хотел бы, однако, задать простой вопрос о причине неудачи вышеупомянутого опыта. В основу опыта положена гипотеза о движении Земли, и когда последствий этого движения не обнаружилось, тогда стал придумываться ряд чрезвычайных новых гипотез, которыми хотели подпереть первую гипотезу о движении Земли. Но

гипотеза, признанная наиболее основательной, — специальный принцип относительности, — будучи вполне приемлемой сама по себе, однако в корень уничтожает самую предпосылку Майкельсона, ибо утверждает, что никаким физическим опытом убедиться в предполагаемом движении Земли невозможно. Иначе говоря, Эйнштейн объявляет систему Коперника чистой метафизикой, в самом порицательном смысле слова. А если так, то не проще было бы, чем хватать себя за ухо через голову, начать объяснение майкельсоновской неудачи наиболее естественным предположением — о **ложности** его основной предпосылки: предполагали, что опыт удастся, потому, что рассчитывали на скорость Земли — гипотетическую! — 30 км/сек; но опыт **не** удался, и следовательно прежде всего нужно было заподозрить допущенную гипотезу и подумать, движется ли, в самом деле, Земля? — Земля покоится в пространстве — таково **прямое** следствие опыта Майкельсона...

Но, кроме поступательного движения Земли, приходится иметь в виду ещё вращательное, и тут, казалось, Коперник что-то «открыл». Этому предположению противостоит обобщённый принцип относительности... Вообще, в Птолемеевой системе мира, с её хрустальным небом, «твердью небесною», все явления должны происходить так же, как и в системе Коперника [на самом деле в системе Птолемея и относительные движения совсем другие], но с преимуществом здравого смысла и верности земле, земному, подлинно достоверному опыту, с соответствием философскому разуму и, наконец, с удовлетворением геометрии. Но было бы большой ошибкой объявлять системы Коперникову и Птолемееву **равноправными** способами понимания: они таковы — **только** в плоскости отвлечённо-механической, но, по совокупности данных, истинной оказывается последняя, а первая — ложной.

Из менее давних (и, пожалуй, ещё более поразительных) примеров. Жиль Делёз, знаменитый французский философ, о котором написаны десятки книг и сотни статей, совместно с другим известным автором, Феликсом Гваттари, написал книгу «Что такое философия?» (русский перевод опубликован в 1998 году издательством «Алетеия»). В разделе «Функтивы и концепты» он пишет (пример X):

Теория множеств — это образование плана референции, включающего уже не только эндореференцию (внутреннее определение бесконечного множества), но и экзореференцию (внешнее определение). Несмотря на открытые усилия Кантора соединить философский концепт с научной функцией, между ними сохраняется

характерное различие, поскольку первый развивается в плане имманенции, т. е. консистенции без референции, а вторая — в плане референции, лишённом консистенции (Гёдель).

И на следующей странице ещё более загадочное:

Независимость обеих переменных проявляется в математике, когда одна из них стоит в степени, большей единицы. Поэтому Гегель и показывает, что переменность функции не только включает в себя те значения, которые можно изменить (2/3 и 4/6) или которые оставлены неопределёнными ($a = 2b$), но и требует, чтобы одна из переменных стояла в более высокой степени ($y^2/x = P$). Дело в том, что именно тогда некоторое отношение может быть непосредственно определено как дифференциальное отношение dy/dx, в котором у значения переменных остаётся только два определения — исчезновение или зарождение, хотя оно и изъято из сферы бесконечных скоростей[17].

Переходя в заключение от знаменитых философов к популярным авторам социальных сетей, можно привести цитату из «Живого журнала» (см. запись http://ivanov-petrov.livejournal.com/1557479.html), автора которой некоторые считают глубоким мыслителем. В этой записи он описывает одно из семи важнейших достижений современной науки такими словами:

6. Теоретико-категорная революция в математике. Дж. Конвей, 1976 год — теория, более общая, чем теория множеств Кантора. Принимается некая не сводимая к конечным элементам структура категорий, укрупнение систем — гомологии, связи наружу, изучение систем вглубь — когомологии. Отсюда масса следствий, в частности, в теорию информации. Далее — Гротендик и его достижения. Сюда же: теория информации — кодирование с коррекцией ошибок[18].

[17] Я попросил французского коллегу прочесть этот текст в оригинале, думая, что смысл был утрачен при переводе, но это предположение не подтвердилось.

[18] Что послужило толчком ко всем этим недоразумениям, восстановить сложно. Теория категорий возникла гораздо раньше 1976 года и к её созданию Конвей отношения не имел; гомологии и когомологии в математике — это алгебраические объекты, которые строятся (прежде всего) для топологических пространств; к теории информации и к кодам, исправляющим ошибки, они отношения не имеют.

Загадка философии

Приведённые примеры могут навести на мысль, что философы — это болтуны, за текстами которых (на научные темы) ничего не стоит, и к этим текстам нужно относиться примерно так же, как к письмам пенсионеров в «Науку и жизнь»[19]. Такое объяснение выглядит правдоподобно для тех, кто ходил на лекции по философии для студентов и аспирантов и помнит характерную для них атмосферу агрессивной безграмотности, но отпадает при более подробном изучении ситуации. Существуют бесспорно компетентные в науке люди, которые одновременно являются признанными философами и находят смысл в сочинениях своих коллег-философов.

В. А. рассказал мне, что он разговаривал с одним из таких людей, Пером Мартин-Лёфом[20], и спросил его, как так получается, что в текстах философов ничего не удаётся понять и может ли он, Мартин-Лёф, объяснить Успенскому на понятном для того языке причины такой ситуации.

Ответ Мартин-Лёфа был удивительным: представьте себе, сказал он, что математик, решая задачу, записывает подряд всё, что ему приходит в голову в процессе решения, и публикует — понять такой текст будет непросто. Вот так, сказал Мартин-Лёф, и философы[21]. Ещё Мартин-Лёф рекомендовал читать Кьеркегора как (сравнительно) понятного автора.

Ещё по этому поводу В. А. упоминал, что Колмогоров очень ценил Гуссерля и радовался, узнав, что лингвисты заинтересовались его работами.

Интересные наблюдения о восприятии науки сделал А. Л. Тоом (изобретатель известного *алгоритма Тоома—Кука* быстрого умножения, а также клеточного автомата, исправляющего ошибки). В своих воспоминаниях о деде, поэте Павле Антокольском (см.

---

[19] В которых объяснялось, в частности, что диагональное рассуждение Кантора о несчётности множества бесконечных дробей ошибочно, поскольку отсутствующее в пересчёте «диагональное» число можно всегда добавить.

[20] Мартин-Лёф дал одно из основных определений, касающихся алгоритмической случайности; теперь соответствующее понятие называют *случайностью по Мартин-Лёфу*. Среди других примеров — Сол Крипке, известный среди прочего *моделями Крипке* для интуиционистской логики, и Дональд Мартин, доказавший знаменитую *теорему Мартина* о детерминированности борелевских игр.

[21] Известный анекдот передаёт сетования университетского администратора, который сокрушается, что физикам всё время приходится покупать дорогое оборудование: «Вот математикам довольно карандашей и резинок. А философам даже и резинки не нужны».

П. Антокольский. Дневник. 1964—1968 / Предисловие и комментарии А. Л. Тоома; С приложением воспоминаний А. Л. Тоома. — СПб.: Изд-во Пушкинского фонда, 2002) он рассказывает:

> С моих ранних лет в семье считалось, что я стану математиком, и дед так и воспринимал меня и спрашивал об этой таинственной для него области. Притом идея логического доказательства была ему совершенно недоступна, и всё, что я говорил, он воспринимал по-своему. Как известно, смысл математического термина задаётся его формальным определением; при этом связи термина как слова в языке, его этимология, не имеют никакого значения. Дед так никогда этого и не понял. Услышав о каком-либо математическом или физическом термине, он не спрашивал, что под этим подразумевается (и не знал, что это нужно спрашивать)[22], а делал, видимо, то же, что делал всегда: давал волю своей фантазии. Я же начинал педантично излагать ему содержание соответствующего раздела высшей математики, совершенно не чувствуя специфики его мышления. Помню, однажды я попытался объяснить ему парадокс Рассела, так он несколько раз после того насмешливо называл меня «множество множеств».
>
> Отличить науку от шарлатанства дед был абсолютно неспособен. Помню, он с уважением показывал мне очередную паранаучную брошюру под названием «Биологическая радиосвязь»...
>
> Когда был шум по поводу космологической теории Козырева[23], дед очень заинтересовался тем, что по его мнению (не знаю, так ли это на самом деле), в этой теории получалось, что время — это энергия. При этом под словами «время» и «энергия» он, разумеется, понимал отнюдь не физические параметры, а совсем другое — так сказать, свой душевный отклик на эти слова.

Ещё важно не забывать, что многие выдающиеся математики (и другие учёные) видели связь своей работы с философскими и мистическими идеями. Наверно, наиболее известным примером здесь

[22] Когда-то я слышал от В. А. указание на принципиальную разницу между «гуманитарными» и «естественными» науками: «гуманитарий», высказывая какую-то научную гипотезу, готов к критике, но ждёт, что она будет обоснованной, «по умолчанию» высказанная гипотеза считается истинной — а в «естественных науках» наоборот. Наблюдение Тоома продолжает эту мысль: в математике термин считается бессмысленным, пока не дано его определение — а в «гуманитарных науках» наоборот. — *А. Ш.*

[23] Николай Александрович Козырев, российский астроном, автор книги «Причинная или несимметричная механика в линейном приближении» (Пулково, 1958. — 90 с.), а также других публикаций по «причинной механике».

является Кантор, родоначальник современной теории множеств. В сборник Кантора «Труды по теории множеств» (М.: Наука, 1985)[24] входят его философские публикации; например, в статье «К учению о трансфинитном» он пишет (перевод П. С. Юшкевича):

> В предшествующей статье я под влиянием некоторых старых и новых работ, направленных против возможности бесконечных чисел, сделал попытку охарактеризовать с самой общей точки зрения вопросы, связанные с актуально бесконечным, по их высшим различиям с тем, чтобы на этом пути получить обозрение главнейших позиций, которые можно занять по отношению к этому предмету. Я различил а. б. в *трёх* отношениях: *во-первых*, поскольку оно осуществляется в высочайшем совершенстве, в совершенно независимом, внемировом бытии, *in Deo*, где я называю его *абсолютно бесконечным* или просто *абсолютным*; *во-вторых*, поскольку оно обнаруживается в зависимом сотворённом мире; *в-третьих*, поскольку мышление может постигнуть его *in abstracto* как математическую величину, число или порядковый тип. В двух последних отношениях, где оно, очевидно, представляется как ограниченное и ещё доступное увеличению, а *тем самым родственное конечному* а. б., я называю его *трансфинитным* и самым строгим образом противопоставляю *абсолютному*.
>
> В каждом из трёх отношений возможность актуально бесконечного можно утверждать или отрицать. Отсюда вытекают в целом *восемь* различных точек зрения, которые все были представлены в философии и из которых я принимаю ту, которая *безусловно утвердительная во всех трёх отношениях*.
>
> Если исследование *абсолютно бесконечного* и определение того, что можно сказать о нём человеческому уму, принадлежит *спекулятивной теологии*, то вопросы, связанные с *трансфинитным*, относятся главным образом к области *метафизики* и *математики*. Ими-то я и занимаюсь преимущественно в течение ряда лет.

[24] Про этот сборник Понтрягин (в воспоминаниях: Жизнеописание Л. С. Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908 года. — М.: ИЧП «Прима В», 1998) в разделе «Работа с издательством» писал, что он «пришёл к заключению, что сочинения Кантора вообще издавать не следует, поскольку привлекать внимание молодых математиков к теории множеств в настоящее время неразумно. Теория множеств, очень популярная во времена Лузина, в настоящее время уже утратила актуальность. Моё предложение было принято группой, и книга была отвергнута. Секция с нами согласилась сразу, и это несмотря на то, что перевод сочинений Кантора уже был сделан! Так что пришлось его оплатить». Сборник был издан уже после того, как воспоминания Понтрягина были написаны.

Конечно, сейчас, когда основные результаты Кантора по теории множеств из чего-то странного и почти мистического стали стандартной техникой, изучаемой на младших курсах (а частично — и в математических классах), эти высказывания Кантора легко счесть признаками надвигающейся нервной болезни, тем более что в той же работе дальше встречаются уже и математические странности. Кантор утверждает, например, что он доказал аксиому Архимеда с помощью трансфинитной индукции:

> ...Я исхожу из предположения существования линейной величины ζ, которая так мала, что n-кратное $\zeta \cdot n$ меньше единицы *для любого сколь угодно большого конечного целого числа* n, а затем из понятия линейной величины и с помощью некоторых теорем теории трансфинитных чисел доказываю, что тогда и $\zeta \cdot \nu$ меньше, чем *любая сколь угодно малая конечная величина*, хотя бы ν означало сколь угодно большое *трансфинитное* порядковое число (т. е. количество или тип вполне упорядоченного множества) из произвольно высокого числового класса. Но это значит, что *никаким сколь угодно мощным актуально бесконечным умножением* ζ не может быть сделана *конечной*, а значит, определённое не может быть *элементом* конечных величин. Следовательно, сделанное предположение противоречит понятию линейных величин, поскольку в соответствии с этим понятием линейная величина должна мыслиться как составная часть других, в частности конечных, линейных величин. Поэтому не остаётся ничего другого, как отбросить предположение о существовании величины ζ, которая была бы меньше $1/n$ для всякого целого числа n, а тем самым наша теорема доказана.

И дальше, возражая Штольцу и Дюбуа-Реймону, которые предлагали рассматривать неархимедовы поля (где аксиома Архимеда не выполняется):

> Следовательно, так называемая аксиома Архимеда *вовсе не является аксиомой, а есть теорема, вытекающая с логической необходимостью из понятия линейной величины*[25].

[25] Кантор не говорит, какие свойства он включает в понятие «линейной величины»; если включить в их число так называемую аксиому непрерывности или полноты, то аксиому Архимеда действительно несложно вывести, но трансфинитная индукция при этом никак не используется и не видно никакого рассуждения, которое соответствовало бы приводимому Кантором описанию. — *А. Ш.*

Так или иначе, даже если считать склонность многих выдающихся математиков к философским экскурсам и мистическим озарениям чем-то болезненным (вообще способности к математике часто сочетаются с неустойчивостью психики), то всё равно надо отметить, что для них эта сторона их деятельности была важным побудительным мотивом к интересным (с любой точки зрения) работам[26].

[26] Можно вспомнить о философии интуиционизма, ставшей толчком к построению интересных и важных логических систем, и вообще о философской составляющей исследований по основаниям математики. Герман Вейль опубликовал статью «Призрак модальности» в сборнике 1940 года, посвящённом памяти Гуссерля (русский перевод статьи, сделанный З. А. Кузичевой, опубликован в книге: *Г. Вейль.* Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1984); она начинается словами «Философия Гуссерля возникла в результате его стремления вскрыть феноменологические корни арифметики и логики». Далее Вейль рассказывает о неклассических логиках, в том числе интуиционистской, а в последнем разделе пишет: «Я часто говорил, и повторяю ещё раз, что, используя континуум или последовательность целых чисел, мы проектируем актуально данное на экран a priori возможного на поле возможностей, построенное в соответствии с определённой процедурой, но открытое в бесконечное». И в подстрочном примечании: «Я осмелился добавить (1925): „С ней (математической конструкцией) мы стоим именно в той точке пересечения неволи и свободы, которая составляет самую суть человека“. Хайдеггер сказал ещё выразительнее: „Возможность как экзистенциальность является самой первой и самой последней положительной онтологической определённостью бытия“».

Интересно, что самые разные отрасли математики вызывали философские и/или мистические ассоциации. Скажем, Лузин писал Колмогорову: «моё желание, чтобы Вы несколько удалились от работ по теории вероятностей. И вовсе не потому, что Ваш вклад в неё не фундаментален: я прекрасно знаю, что он оценивается всеми, как равноценный вкладу классиков. Но самая-то теория вероятностей не стоит Вас: её источники сомнительные („origine infernale“ — прямо заявляет Lebesgue), и её действие на работающих в ней не положительное. Вам дан высокий дух, и я хочу, чтобы Вы его силы берегли для вещей, которые под силу очень немногим» (это письмо приводит В. М. Тихомиров в воспоминаниях «Слово об учителе» в сборнике: Колмогоров в воспоминаниях учеников. — М.: МЦНМО, 2006).

Ср. также интервью с лауреатом премии Филдса В. Воеводским, где он говорит, среди прочего:

«Сначала об очень общей идее, которую мне было трудно принять, но, основываясь на всём том опыте, через который я прошёл за последние пять лет, ничего другого я придумать не смог. Вокруг нас есть нечеловеческие разумы. Под словом „разум“ я здесь понимаю информационную систему, обладающую памятью, мотивациями, способностью к моделированию внешнего мира и к планированию. Они не „инопланетны“, а исконно земные и, скорее всего, эволюционно старше, чем люди. Эти разумы активно (и иногда негативно) влияют на жизнь людей.

Мир этих разумов очень сложен, может быть даже сравним по сложности с той частью мира в целом, которую мы сегодня называем физической

Творческие люди вообще склонны к отклику на самые неожиданные вещи (а высокочувствительные электронные схемы склонны к резонансу и самовозбуждению). «Когда б вы знали, из какого сора растут стихи, не ведая стыда» — писала Ахматова, так почему бы и какому-нибудь «материализму и эмпириокритицизму» не послужить поводом к интересным размышлениям?

Примечания (В. А. Успенского)

1 [к с. 521]. Начну с того, что повторю комментируемое предложение из осуществлённого издательством «Мысль» русского перевода Гегеля вкупе, для ясности, с предыдущим и последующим предложениями:

> Известно, с каким усердием пифагорейцы изучали философские соотношения чисел. Поэтому да будет мне позволено привести здесь числовой ряд, идущий из пифагорейских кругов и сохранённый нам в обоих сочинениях, известных под заглавием «Тимей». Правда, «Тимей» относит эти числа не к планетам, а учит, что демиург создал по их схеме Вселенную.

Из педантизма приведу также оригинальный текст Гегеля, присланный Шенем:

> Quantum in philosophicis numerorum rationibus Pythagoraei elaborarint, notum est: et inde traditam et in utroque Timeaeo servatam numerorum seriem afferre liceat, quos Timaeus non ad Planetas quidem refert, sed ad quorum rationem Demiurgum Universum conformavisse censet.

реальностью. Спекулировать о структуре этого мира мне бы не хотелось, потому что мне не хватает для этого фактов, наблюдений. Даже простейшие вопросы на сегодня для меня не имеют однозначных ответов. Я уверен, что эти разумы взаимодействуют с людьми. Почти уверен, что с высшими животными. А как они взаимодействуют с низшими животными? С неживой материей? Соображения логической непротиворечивости, которой должна удовлетворять полная картина мира, подсказывают, что как-то взаимодействуют. В этом смысле, они тоже есть часть „физической реальности“. Просто это часть, про которую мы знаем очень и очень мало. Эту часть мира нужно изучать и изучать, используя научную методологию.

Конечно, попытки такого изучения были. Особенно в конце девятнадцатого века, но тогда не было достаточных для этого возможностей».

(http://baaltii1.livejournal.com/200269.html)

Перевод В. В. Файера:

> Известно, насколько в философских рассуждениях о числах преуспели пифагорейцы: пусть будет позволено добавить [к этому] (вероятно, [к этому] можно добавить) переданный от них и сохранённый в обоих Тимеях ряд чисел, которые [числа] Тимей не только относит к планетам (связывает с планетами), но считает, что согласно их порядку Демиург придал форму[27] Вселенной (сотворил Вселенную).

Перевод А. А. Россиуса:

> Хорошо известно, как далеко продвинулись пифагорейцы в изучении философских отношений чисел: можно привести известную из (независимой) традиции и сохранённую в обоих сочинениях, дошедших под именем Тимея, последовательность чисел, которую Тимей хотя и не связывает с планетами, но утверждает, что демиург придал Вселенной устройство, им соответствующее.

Как было разъяснено А. А. Россиусом в письме к В. В. Файеру, «оба сочинения, дошедшие под именем Тимея», — это диалог Платона «Тимей»[28] и приписываемый одному из четырёх персонажей этого диалога, Тимею Локрскому, но в действительности написанный позже, трактат «О природе космоса и души».

[27] «Сотворил», наверное, более правильный перевод, однако важно, что латинское «conformare» всё-таки указывает на придание формы, а не на создание из ничего, на что слишком сильно намекает, как мне кажется, русский глагол «творить». — *Примеч. В. В. Файера.*

[28] Единственное, кажется, сочинение Платона, в котором обсуждаются вопросы космологии. — *В. У.*

Приложение 2 к книге 2 «Философия»

Три письма Натальи Леонидовны Трауберг автору настоящей книги

Предуведомление

Мой покойный друг Наталья Леонидовна Трауберг была выдающейся личностью. Такую дефиницию ей и следовало бы давать в энциклопедических справках. Когда, чтобы разъяснить, кто она такая, пишут «переводчик», этим сообщают не более чем способ зарабатывания ею денег на жизнь. Наталья Трауберг так же не исчерпывается словом «переводчик», как им не исчерпывается главный герой романа Людмилы Улицкой «Даниэль Штайн, переводчик». Википедия даёт для Трауберг такую дефиницию: «переводчик, эссеист, мемуарист». Это уже чуть-чуть лучше, чем просто «переводчик», но всё равно вызывает у меня воспоминания о том лёгком шоке, который постиг меня много лет назад при взгляде на надпись на обложке: «Сочиненія камеръ-юнкера Пушкина».

Наталья Леонидовна родилась в Ленинграде 5 июля 1928 года, умерла в Москве 1 апреля 2009 года. Я имел честь познакомиться с нею весной 1955 года. Через некоторое время мы стали друзьями, а ещё через время я стал воспринимать её как самого образованного человека из всех, кого я знаю.

Со второй половины 1998 года начал выходить очень необычный журнал «Неприкосновенный запас» с подзаголовком «Очерки нравов культурного сообщества» и со стандартной аббревиатурой «НЗ». Его периодичность, заявленная как 6 раз в год, была достигнута в следующем, 1999 году; в 1998 году вышло два номера. В первом, «пилотном» (по выражению главного редактора журнала И. Д. Прохоровой) номере журнала была опубликована моя статья «Требуется секундант», что дало мне повод преподнести его Наталье Леонидовне. Результатом явились три её письма ко мне, которые сперва были опубликованы в названном журнале, а затем перепечатаны в её книге «Невидимая кошка». Письма эти воспроизводятся в настоящем Приложении.

Наталья Трауберг. Москва, Страстной бульвар, на балконе над Пушкинской площадью. 1958 год. Фото В. Чепайтиса.

Ознакомившись с содержанием писем, читатель может удивиться, почему они помещены в книгу 2 «Философия», а не в книгу 4 «Филология»; действительно, Первое письмо посвящено ремеслу перевода, Второе — мемуарам, Третье — вопросам стилистики русского языка и опять-таки перевода. В объяснение укажу две причины. Во-первых, Наталья Леонидовна, несмотря на своё филологическое образование и таковую же учёную степень, воспринималась мною скорее как философ, чем как филолог, и эту свою память о ней я хотел бы донести до читателя. Во-вторых, в настоящую книгу включены статьи о философии математики и философии преподавания; это оправдывает присутствие рядом с ними текстов, тематику которых можно определить как философию перевода, философию мемуаристики, философию стилистики.

Аббревиатура «Т.», которой подписаны письма, означает не «Трауберг», как можно было бы подумать, а «Татя»; это детское имя Натальи Леонидовны, принятое в нашем с нею общении. Значение пометок «*Прим. Т.*» и «*Прим. У.*» в сносках разъясняется в преамбуле «От публикатора» к Первому письму. Примечания, сделанные специально для настоящей книги, взяты в семафоры «●●▶» и «◀●●».

Всякий, кто занимался публикацией уже опубликованных текстов, знает, что если делать это с должной скрупулёзностью, возникают проблемы, которых, казалось бы, не должно было быть. В решении этих проблем неоценимую помощь оказала мне дочь автора писем Мария Виргилиевна Чепайтите.

[Первое] письмо В. А. Успенскому

От публикатора

21 августа 1998 года я подарил Наталье Леонидовне Трауберг, вот уже более сорока лет служащей для меня предметом восхищения и поклонения, первый номер журнала «Неприкосновенный запас». А 5 сентября почта доставила мне её письмо, которое — с её разрешения — предлагается вниманию журнала. В письме были сноски; они сохранены, разумеется, и помечены так: «*Прим. Т.*». Подстрочные примечания публикатора (а их содержание почерпнуто, в основном, из бесед с Натальей Леонидовной) помечены так: «*Прим. У.*».

25 августа 1998 года.

Дорогой Успенский!

Спасибо за «НЗ». Если бы нам в 55 году (65 году, 75 году, 85 году) сказали, что мы увидим такой журнал, мы бы решили, что будет это в раю. У Честертона, в конце «Шара и креста»[1], встречаются те, кто был очень важен для сюжета. Так и тут слышишь людей, которых сто лет не видела, и читаешь то, что много раз хотела сказать.

Конечно, самое главное — просьба иметь совесть и не гневить Бога. Мариэтта Омаровна[2] и Андрей Леонидович[3] написали об этом всё, что можно написать. Но я перевожу книги, и для меня очень важно то, о чём пишет Борис Владимирович Дубин[4].

Опубликовано в журнале: Неприкосновенный запас. — 1999. — № 1 (3). — С. 40—41. Перепечатано в книге: *Наталья Трауберг*. Невидимая кошка: Сб. статей. — М.; СПб.: Летний сад, 2006. — С. 31—35.

1 «The Ball and the Cross» — роман Г. К. Честертона. См. перевод этого романа, выполненный Н. Л. Трауберг, в издании: *Г. К. Честертон*. Избранные произведения. — Т. 3. — М.: Бук Чембэр Интернэшнл, 1994. — С. 259—381. «Итак, все в сборе», — говорит главный врач больницы в заключительной, XX главе (см. с. 377). — *Прим. У.*

2 ●●▶ Мариэтта Омаровна Чудакова. В 1-м номере «НЗ» была опубликована её статья «Российское общество в воротах XXI века». — *Прим. У.* ◀●●

3 ●●▶ Андрей Леонидович Зорин. В 1-м номере «НЗ» были опубликованы его статьи «Неоконченные разговоры» и «Юбилей Иисуса Христа, или Комитет ДД». — *Прим. У.* ◀●●

4 ●●▶ В 1-м номере «НЗ» была опубликована статья Б. В. Дубина «Самопал». — *Прим. У.* ◀●●

Точнее, я их переводила, теперь я их чаще переписываю. Наверное, тот же Честертон отнёс бы это занятие к своим queer trades[5]. Это не «рирайтер»[6], куда там! Они бы давно перемёрли, если бы занимались вот этим. Сейчас я переписала вчистую 11 листов за месяц, что для переводчика невозможно — вероятно, злость помогла. Занятия тут, собственно, два, полегче и потруднее. Довольно легко, хотя и вредно, выгребать «Мадонну кобр» (исп. «cobre» — «медь»[7]), «Сэвиор жив» (естественно, «Спаситель жив») или мои любимые «король Саул из Тарса» (Савл Тарсянин)[8], «голос черепахи» («turtle»[9]) и «королевский злодей Лоурдес» (перечень чудесных исцелений — «королевская болезнь, Лурд»[10]). Гораздо утомительней разлеплять комки отглагольных имён, переворачивать пассивы, распутывать цепочки родительных падежей, выпаривать «является», «есть» и «суть» (для ед. числа) или устало перечёркивать бесчисленные «но». Выдерживаю я это не только ради маммоны и не только ради аскезы. Есть и вознаграждения.

Нетрудно понять, Успенский, что перевод — ремесло смиренное; но выкрутиться можно — спрашивать: «А вы читали у меня?»,

5 «The Club of Queer Trades» (в русском переводе — «Клуб Удивительных Промыслов») — сборник рассказов Г. К. Честертона 1905 года. — *Прим. У.*

6 Профессия рирайтера (буквально — переписчика) состоит в литературном редактировании текста. Эта профессия предполагает исправление грамматических и стилистических ошибок, но никак не ошибок в отношении имён и фактов. В тексте, который сегодня (28.09.98) «переписывает» Н. Л. Трауберг, ей приходится понимать, что «Пэйдс» — это населённый пункт Падес (Pades) в Испании, а «Пинаут» — это французская фамилия Пино (Pinaut). — *Прим. У.*

7 Madonna del Cobre — Медная Мадонна, один из почитаемых в Латинской Америке образов Богоматери; находится в поселении Cobre (букв.: медь) на Кубе. — *Прим. У.*

8 Упражнение: откуда взялся король? (Решается только методом отца Брауна.) — *Прим. Т.*

Применив этот метод, можно с большой долей уверенности предположить следующее. Переводчик (в данном случае — переводчица), посмотрев в словаре имя «Saul», обнаружила два значения. Одно из них отсылало к какому-то Павлу («Paul»), оно было отвергнуто. Другим было «the first king of Israel». Ещё один авторитетный источник сообщил, что по-русски этого древнего монарха следует именовать «Саул». А что «king» переводится как «король», знает всякий. — *Прим. У.*

9 Это слово имеет два значения: «черепаха» и «горлица»; в данном случае имелся в виду голос горлицы из «Песни песней» (2:12). — *Прим. У.*

10 Королевской болезнью (буквально — королевской напастью, the king's evil) называлась золотуха, поскольку её, как известно, излечивал король наложением рук. Переводчик удалил запятую, разделяющую чудеса, перевёл «evil» как «злодей», и транскрибировал «Lourdes» (Лурд) отчего и получился «королевский злодей Лоурдес». — *Прим. У.*

рассказывать, как кто похвалил и т. п. Queer trade совершенно, абсолютно уничтожает эту возможность. Мало того — если, скажем так, первоначальный переводчик захочет всё это проделать, пожалуйста. Ты тут ни при чём.

Конечно, такое вознаграждение годится только мракобесам[11]. А вот преображение хаоса в космос вполне уместится в обычные переводческие радости. Хаос, нетварная бездна или что-то ещё похуже[12] — перед тобой, а не где-то, в непонятном, невидимом и спорном зазоре между языками. Пишешь всё заново, рамки гораздо уже, в самом прямом смысле — надо уместиться между строчками или на полях. Плюёшь и пишешь на листочке только в крайнем отчаянии. Словом, полёта вольное упорство, причём упорства больше, чем вольности.

Наконец, занятие это всё-таки «спасает людей». Когда оно начиналось, один католический священник сказал мне: «Пожалейте читателя», и я жалела вовсю. Вы поймите, новые издательства, где сидят двое или трое, издадут и так, что там — издают, ведь всего не перепишешь. Спасибо, если спрашивают, совсем кошмар или не совсем, хотя вообще-то знают, что всё это — прихоти снобов. Недавно совет исправить очередных Неро и Фило, Кризостомов и Кловисов[13] приняли, покивали и ничего не исправили.

Вот тут мы подходим, Успенский, к problèmes и mystères[14].

Совсем уж недавно оказалось, что хитрый томист[15] имел в виду и другое: смотрите, не наплодите Цахесов![16] Я знаю, что примерно так же думаете и Вы. Заводить юродскую речь о том, что хорошо

---

[11] Назовём так христиан, принимающих всерьёз то, что читали и слышали. Слово это, кстати сказать, родилось в одном из могучих прежних издательств как пейоративное. — *Прим. Т.*

[12] Ольга Михайловна Фрейденберг говорила нам в 1945 году, что отперла ванную, запертую на блокадные годы, и увидела эту самую бездну Тиамат. Мы это запомнили на всю жизнь. — *Прим. Т.*

[13] Имеются в виду император Нерон (Nero), Филон Александрийский (Philo), Иоанн Златоуст (Chrysostom), Хлодвиг (Clovis). — *Прим. У.*

[14] Основатель французского католического экзистенциализма Габриель Марсель (Marcel) делил встающие перед человечеством вопросы на problèmes (задачи, проблемы) и mystères (тайны). — *Прим. У.*

[15] Хитрым томистом именуется упомянутый ранее в письме католический священник. — *Прим. У.*

[16] Именно такой случай выпукло представлен в известном фильме «Осенний марафон». Безграмотная переводчица Варвара в исполнении Галины Волчек облагодетельствована полностью переписавшим её перевод высококвалифицированным профессионалом Андреем в исполнении Олега Басилашвили. На основании представленного ею текста она получает место, первоначально предназначавшееся ему. — *Прим. У.*

подбадривать людей, которые спешат возвысить себя после жутких советских унижений, я сейчас не буду. И Вы озвереете, и я заколебалась.

Решение вроде «перетянем зло на себя и дадим место Богу» ещё больше огорчит Вас, а главное — вообще непристойно. Такие вещи — не для слов, мы переписываемся в другом пространстве.

Вероятно, резонного ответа нет. И всё-таки, ответьте, если можно, не только в том духе, в каком Вы говорили лет 10 назад о редактировании Джойса[17]. Бесспорную истину: «За отсутствие советской власти можно заплатить и бóльшую цену», вынесем за скобки.

Ваша Т.

Примечания

1 [к сноске [17], с. 539]. ●●➤ Наталья Леонидовна изложила этот сюжет в очерке «Улисс», впервые опубликованном в журнале «Истина и жизнь» (№ 9 за 2004 год) и впоследствии воспроизведённом в качестве главы с тем же названием в книге: *Наталья Трауберг.* Сама жизнь. — СПб.: Изд-во Ивана Лимбаха, 2008. — С. 109—112. Ниже приводится полный текст этой главы (сноска без подписи принадлежит Н. Л. Трауберг, сноски, помеченные «*Ред.*», принадлежат редактору книги «Сама жизнь»). ◄●●

УЛИСС

В день св. Франциска 1986 года начались странные девять месяцев, имеющие с этим святым на редкость мало общего. Чтобы было понятней, отступлю назад. Замечательный переводчик и человек Виктор Хинкис внезапно скончался за несколько лет до этого. Он любил Джойса и переводил «Улисса». Многие в XX веке считали Джойса одним из самых первых писателей, хотя кое-кто и не считал — и Дороти Сэйерс, и Льюис скорее удивлялись (Честертон, я думаю, тоже). Как бы то ни было, Витя его любил, а я терпеть не могла — в самом прямом смысле этих слов: не могла читать, становилось худо.

[17] Тогда я рискнул сказать Наталье Леонидовне, что я полностью прекращу с ней отношения, если она согласится редактировать перевод «Улисса». Наталья Леонидовна отвергла мой ультиматум, и мы оба смирились с предстоящим разрывом. По независящим обстоятельствам участие её в этом предприятии не состоялось **1**. — *Прим. У.*

Итак, Витя умер, и доканчивать «Улисса» стал его друг Сергей Хоружий, тоже человек замечательный.

К осени 1986-го огромный перевод лежал в «Худлите»[18] рядом с двумя сверхотрицательными отзывами весьма квалифицированных, но не кротких англистов (один из них — Владимир Муравьёв). Получалось, что бóльшую часть романа, переведённую С. Х., без жесточайшей редактуры печатать нельзя. Переводчики отказывались, один за другим, а я почему-то согласилась. Слово «почему-то» включает отношение к Вите, отношение к Кате[19] и что-то вроде мазохизма, который я принимала за жертвенность. Мне дали перевод, и я приступила к делу. Георгий Андреевич Анджапаридзе[20], услышав об этом, резонно и не без сочувствия сказал мне: «Ну вот, нашлась the дура!». Непреодолимые трудности начались немедленно. Сводились они к следующему: хотя меня снабдили ключами и справочниками, я практически не понимала текста; как говорилось выше, я от него буквально заболела (холециститом); С. Х. не уступал ни рецензентам, ни моим жалчайшим замечаниям вроде того, что «primrose» — это скорее «палевый», «бледно-жёлтый», а не «ярко-жёлтый». Ссылался он на то, что Джойс имел в виду, причём он это знал, а я — нет.

Дожили мы до перехода зимы в весну. Катя подустала, и мы с ней поехали к отцу Александру[21]. Бегая с нами по деревне, обходя старушек (мы ждали), приветливо беседуя с собаками («Как живёшь, Баскервиль?»), отец походя создал классический термин «букет». Так он назвал сочетание свойств, особенно нелюбезных христианству, что-то вроде самолюбия, компенсации и т. п. Мало того, он вывел правило: если «букет» в каком-то деле присутствует, не выйдет ничего. Более бытовых указаний он не дал, и я решила, что надо бросать, а Катя — что надо продолжать.

После этого дожили мы до июля[22]. Всё шло по-прежнему: я пыталась что-то понять и, сверяясь с ключами и отзывами,

---

18 ●●➤ «Худлит» — Издательство художественной литературы. — *В. У.* ◄●●

19 Екатерина Юрьевна Гениева. — *Ред.* ●●➤ Гениева является яростной поклонницей Джойса и писала о нём (см., в частности, её вступительную статью «Цена радости» к книге: «Русская одиссея» Джеймса Джойса. — М.: Рудомино, 2005. — 279 с.); Хинкиса же, с которым много общалась, Гениева назвала «одним из величайших русских переводчиков». — *В. У.* ◄●●

20 Тогда — директор «Худлита». — *Ред.*

21 ●●➤ О. Александр Владимирович Мень. — *В. У.* ◄●●

22 Мой любимый друг Владимир Андреевич Успенский сказал, что если я не оставлю эту работу, он не будет со мной разговаривать, и мы попрощались «до рая».

поправить (совершенно зря), С. Х. стоял насмерть, Катя меня подбадривала, на что-то надеясь. В самых первых числах июля мы с ней пошли на отпевание другого прекрасного переводчика, Андрея Кистяковского. Тем временем редактор «Худлита», с которой я делала испанские книги, позвонила моей маме, решив, что я у неё, если дома меня нет.

Мама, леди железная, к ней относилась очень хорошо за чёткость и элегантность; и, не разобравшись, кто англист, кто испанист, строго спросила: «Что вы там делаете с Натали? Она же кончается от вашего Джойса». С. А. (это редактор) удивилась; мама ей всё рассказала, заметно подчеркнув мою глупость и сложность ситуации. Тут С. А. удивилась не очень и, кончив разговор, кинулась к заведующей, перед которой выступила уже в роли моей мамы. Заведующая удивилась куда больше: ей и в голову не приходило, что ничего не получается. И, придя с похорон Андрея, я узнала, что злосчастный «Улисс» выброшен из худлитовского плана.

Как я давно мечтала, С. Х. отнёс его в «Иностранную литературу»[23], там тихо-мирно напечатали, а издательства, обретавшие неожиданную свободу, вскоре выпустили и книгу. С тех пор, насколько я понимаю, она выходила много раз и без всякой правки.

[23] ●●► Журнал. — *В. У.* ◄●●

Второе письмо В. А. Успенскому

24 октября 1998 года.

Дорогой Успенский!

Письмо это — гораздо проще и гораздо печальней[1]. Пора поговорить о мемуарах. Мы с Вами столько видели, что простодушные люди спрашивают, почему мы их не пишем. Не знаю, почему не пишете Вы[2], а своими сомнениями поделюсь.

Начнём с того, что память очень подводит. Кто попроще душой, пишет запросто прямую речь, иногда оговаривая это («у меня, знаете, стенографическая память»). Кто повредней, их обличает. Но и без диалогов сколько всего смещается! Я много лет видела сон, что иду со Смоленского бульвара на Гоголевский по зелёному склону, и честно считала, что так переплавилось воспоминание о том, как летом 1945 года я ходила из дома, где я гостила[3], к жене Эйзенштейна, чтобы с ним встретиться. Видела и считала, пока один киновед мне не сказал, что тем летом Сергей Михайлович был с женой в ссоре (как Вы знаете, брак был странный, жили они отдельно) и у неё не бывал. Вероятно, я ездила к нему на Потылиху, там действительно зелёные склоны[4], но памяти больше не верю.

Под названием «Ещё одно письмо В. А. Успенскому» опубликовано в журнале: Неприкосновенный запас. — 1999. — № 3 (5). Перепечатано в книге: *Наталья Трауберг*. Невидимая кошка: Сб. статей. — М.; СПб.: Летний сад, 2006. — С. 16—20.

1 Предыдущее письмо Натальи Леонидовны Трауберг ко мне (от 25.08.1998) было посвящено переводам. Оно опубликовано в «Неприкосновенном запасе» (№ 3 за 1999 год). — *Прим. У.* ●●➤ В настоящей книге указанное письмо публикуется на с. 536—539. — *Примеч. ред.* ◄●●

2 В послесловии публикатора будет сообщён аргумент против писания мемуаров, принадлежащий М. С. Волошиной. Но мне как раз казалось, что я сам не избежал этого греха, поскольку опубликовал воспоминания об Андрее Николаевиче Колмогорове (в сборнике «Колмогоров в воспоминаниях» [М.: Физматлит, 1993]), о Юрии Михайловиче Лотмане (в первом «Лотмановском сборнике» [М.: ИЦ-Гарант, 1995]), о Викторе Юльевиче Розенцвейге (в «Wiener Slavistischer Almanach» [1992. — N. 3]). Поэтому заявление автора письма, хорошо знакомой с названными публикациями, о том, что я не пишу мемуаров, меня несколько удивило. Как оказалось, однако, Наталья Леонидовна считает, что публикации эти суть не мемуары, а нечто другое; спасибо ей за это. — *Прим. У.*

3 На постоянное жительство в Москву, где и находятся оба бульвара, Н. Трауберг переехала (из Ленинграда) 12 мая 1953 года. — *Прим. У.*

4 Автор письма правильно помнит, что на пути от Смоленского бульвара к Гоголевскому вообще нет зелёных склонов. Однако замечательно, что этот

Такие странности вводят в заблуждение простодушного читателя, который ждёт от мемуаров каких-то сведений, но всё это ерунда, пока не вмешалось «дикое слово»[5]. Тогда возникают привычные вывихи, тоже — попроще и повредней.

О самом простом рассказала мудрая Тэффи. Одна дама пришла с похорон и села за дневник. Написала она, что NN делал ей какие-то комплименты, MM — такие-то, а покойник, человек знаменитый — такие-то (конечно, при жизни). Избежать этого можно, но избегают так редко, что задумаешься.

Но и это чепуха, даже трогательная (вот как одинока бедная дама!), перед особым случаем, который чаще бывает почему-то у мужчин. Именно он, автор, наводит всюду порядок, спасает любую ситуацию, а потом другие персонажи тех же мемуаров говорят для верности, какой он замечательный. Что уж там, и это трогательно, не от хорошей жизни делается; правда, тогда надо жалеть любого, самого патологического эгоиста — и ведь надо, но нелегко.

Однако и это чепуха, пока автор занят собой. Здесь мы подходим к самому опасному. Как в жизни недолюбленный человек легко превращается в крошку Цахеса, так и в мемуарах может всех перекусать. Самые наивные чешут прямо: вышел NN в фойе и умер, вот она, Божья кара! (сама читала). Бывает и хуже: умирал мучительно, издевались в лагере и т. п. Видимо, эти варианты больше свойственны церковным людям, да и не самым умным. А вот кто угодно может просто описать своих знакомых с полной беспощадностью.

Вы скажете: должен же кто-то обличать злодеев — но Вы как раз не скажете. Скажут скорее церковные (ведь у них[6] осталось что-то вроде идеологии), хотя могли бы знать, что «Мне отмщение», злорадство — большой грех, а человек многослоен.

Пойдём дальше. Бывают и не такие резкие формы, но если писать то, что видишь (даже если видишь немало), люди получаются, в лучшем случае, довольно смешные. Все мы смешны и все слабы, но не все готовы себя такими увидеть. Сколько человек делает, чтобы это скрыть! Зачем же разоблачать его? Золотое

простой географический факт явно произвёл в сознании автора меньшее возмущение, чем нюансы биографии великого кинематографиста. В назидание Наталье Леонидовне, судьбой ей было назначено жить с лета 1992 года в доме ●●➤ в Чистом переулке ◄●●, расположенном между названными бульварами. — *Прим. У.*

5 То есть слово «я». См. стихотворение В. Ф. Ходасевича «Перед зеркалом»; оно начинается так: «Я, я, я. Что за дикое слово!». — *Прим. У.*

6 Не у христиан, а у тех, кто так удачно изображён в Мф. 23. Конечно, есть они во всех конфессиях. — *Прим. Т.*

правило[7], как известно, работает лишь в одну сторону; если сам ты и готов, выводов отсюда делать не стоит.

Если же обойти смешные стороны и слабости, получится грузинский тост, что хорошо для семейных мемуаров, но всё же фантастично. Конечно, кому-то удаётся пройти между Сциллой и Харибдой, но я гораздо злее, во всяком случае — умом. Мучают меня мемуары, которые я написать могла бы.

Прошибли меня слова из полумемуаров Владимира Илюшенко в «Континенте» за этот год[8]. Описывает он исключительно подлых мымр, одна из которых к тому же довела до тюрьмы, бросила и обобрала его дядю. А потом заключает так: «Всё, что я нагородил здесь, вряд ли есть истина, ибо Истина неописуема и неизречённа. Мне жаль и Риту, и Шварце Маус, и тётю Муху, и даже в особенности тётю Муху, потому что я помню её страдальческие глаза <...>. Мне жаль Нику, которую зачем-то прозвали Шварце Маус <...>. Мне жаль их всех <...>».

Что ж, вообще не писать? или не писать, если не можешь вот так усомниться и всех пожалеть? Не знаю — и не пишу.

Ваша Т.

P. S. Естественно, сегодня же позвонила приятельница и ахает: «В „Независимой“ статья: Найман написал тако-ое!». Она имела в виду статью ленинградского критика Виктора Топорóва. Мы знаем, что бывает с теми, кто поднял, и я представила себе, как бедный Анатолий Генрихович гибнет от меча. Когда-то меня поразил тон (да и смысл) его проходной фразы обо мне — но я сказала ему, и он просил прощения. Но ведь то, что он пишет о других, читать тяжелее.

Послесловие публикатора

Имевшиеся в письме подстрочные примечания его автора помечены так: «*Прим. Т.*». Подстрочные примечания публикатора помечены так: «*Прим. У.*».

В своём письме Н. Трауберг выдвигает два аргумента против писания мемуаров: 1) практически неизбежные аберрации памяти мемуариста (особенно наглядно проявляющиеся в воспроизведении

[7] Известное золотое правило этики: «Не делай другому того, чего не хочешь себе». — *Прим. У.*

[8] Имеется в виду повесть Владимира Илюшенко «Попытка философии, или Комментарий к „Чжуан-цзы“ в рассказах и воспоминаниях», опубликованная в 1998 году в журнале «Континент», № 95. Приводимая далее цитата взята из 9-й главы повести. — *Прим. У.*

диалогов и вообще прямой речи) и 2) его почти неизбежная необъективность, часто приводящая либо к самовосхвалению и охаиванию других, либо же к стилю грузинского тоста. Но есть и третий, быть может, самый замечательный аргумент. Его указала мне Мария Степановна Волошина. Вот этот аргумент.

В пятидесятых годах, в Коктебеле, посетив волошинский дом и послушав захватывающие рассказы Марии Степановны о людях, бывавших в этом доме в двадцатые годы, я спросил её, отчего же она эти свои рассказы не запишет. Её ответ поразил меня своей неожиданностью. «Как же это можно! — сказала она. — Человек находился в гостях в моём доме, чувствовал себя совершенно свободно и позволял себе говорить откровенно. Кем же я буду, если я его слова запишу и опубликую!».

Предыдущий абзац явно относится к мемуарному жанру. Поэтому ему присущи все обсуждаемые в письме и в послесловии пороки этого жанра — в том числе и тот, который указан в самом этом абзаце.

Владимир А. Успенский,
17 января 1999 года.

Третье письмо В. А. Успенскому

23 октября 1999 года.

Дорогой Успенский!

Давно не писала Вам, темы не годились. Сперва я решила поговорить о странностях нашей церковной жизни, давно пора — люди и сами не рады, и других отпугивают; но она 1) всё-таки не Ваша, и 2) разговор этот не совсем для «НЗ». Можно подумать вместе о плюсах и минусах постмодернизма, но ещё (или вообще) не получается. Наконец, часто хочется напомнить, как плохо было при Советах, но об этом пишут и без нас и, судя по спорам, убедить не могут, поскольку упираются в стену неблагодарности и безнадёжности (в аскетике — «печали» и «отчаянья»). Словом, темы не годились, но тут помогла судьба.

Я упросила одно издательство, чтобы мне давали прочитать и, если нужно, поправить переводы некоторых книг. Делая это и ещё правя статьи для богословского журнала, я заметила, что самые разные тексты похожи, и сходство это в какой-то мере поддаётся описанию. Описать его стоит по нескольким причинам, и я опишу Вам, в «НЗ».

ПРИЧИНЫ

Дикости вроде «Мадонны кобр» (см.: НЗ. — 1999. — № 1 (3). — С. 40)[1], «царя Герода» или «Иоанна из Кросса» (Хуан де ла Крус, Иоанн Креста) всё-таки вопиют к небу и бывают довольно редко; как-никак, они — штучные. Странности, о которых я хочу рассказать, идут всплошную, сдвигая весь текст.

Когда они его сдвинут, писатель становится другим, обычно — более грубым или (и) более скучным. Он теряет голос, пафос, дыхание, а если всё это у него было, то жалко. Писателей проповедующих это просто убивает — появляется тот невыносимый привкус, которого и так достаточно в религиозных писаниях, но у них, на их языке, не было.

Наконец, здесь, как бы несерьёзно, легче предложить, чтобы издательства давали такие тексты тем, кто возьмётся их исправить.

Опубликовано в журнале: Неприкосновенный запас. — 2000. — № 2 (10). — С. 86—89. Перепечатано в книге: *Наталья Трауберг*. Невидимая кошка: Сб. статей. — М.; СПб.: Летний сад, 2006. — С. 36—42.

[1] ●●▶ См. сноску [7] на с. 537 настоящей книги. — *Примеч. ред.* ◀●●

Поверьте, дорогой Успенский, возьмутся многие. Стихи тоже пишут не для выгоды. А тут — и авторов жалко, и самый язык.

Вероятно, так переводят потому, что так пишут. За эти мерзкие десятилетия канцелярит побеждал сверху, сленг — снизу. Чудо ещё, что есть далеко не только это. Но многого уже не слышат, не замечают; и сейчас я перейду в область ультразвука.

Надеюсь, Вы помните мою бабушку Марию Петровну[2]. Она, бывшая классная дама и преподавательница словесности, чья жизнь практически кончилась в 1917 году[3], твёрдо знала, что в русском языке нет и быть не может слов «купальник», «зоосад»/ «зоопарк», «учёба», «молодёжь»[4], а от глаголов «одеть» и «довлеть» в недолжном употреблении невыносимо страдала. Тем временем другая бабушка, Эмилия Соломоновна[5], родившаяся тоже в 1881 году, восклицала «Вейз мир!»[6] и «Гóтыню» (так)[7], употребляла accusativus cum infinitivo, а при случае — и абсолютные конструкции. Можно решить, что правда — посередине; можно не решать, загоняя в неприкосновенный запас языка хоть что-то из мнений Марии Петровны.

ТЕПЕРЬ — СТРАННОСТИ

Первая, главная, — старый, добрый канцелярит. Сколько про него ни пишут, он не сдаётся. Мало того — как в пропаганде или в проповеди, его ругают именно те, кто им пользуется. Снова и снова мы видим глаголы-связки, и не только дорогое всем «является», но и загадочное «суть» в единственном числе. Снова встречаем пассивы, цепочки родительных падежей («изготовление полей шляп») и венец канцелярита, комки отглагольных существительных, которые заодно уснащают текст ассонансами на манер акафиста (...ание, ...ение). Кстати, цепочки генитивов часто появляются именно из-за этих комков.

---

2 ●●▶ Мария Петровна Ланде-Безверхова (Ланда-Безверхова, Ландо-Безверхова), урождённая Петренко. — *В. У.* ◀●●

3 Умерла она в 1977, 19 февраля. — *Прим. Т.*

4 Несомненно, её огорчило бы и слово «выпечка». — *Прим. Т.*

5 ●●▶ Эмилия Соломоновна Трауберг, урождённая Вейланд. — *В. У.* ◀●●

6 ●●▶ «Вейз мир», буквально «горе мне» («вей из мир»), употребляется как междометие с широким значением сильной эмоциональной реакции; употребляется примерно в тех же контекстах, что русское «Боже мой!». — *В. У.* ◀●●

7 ●●▶ «Готыню», или «Готеню», буквально «Боженька» — очень распространённая (в разных диалектных вариантах) форма. — *В. У.* ◀●●

Сюда же, хотя уже не к синтаксису относится любовь к слову «чувство», — «чувство жалости», например. Казалось бы, калька, но нет — любовь. Это возникает и там, где в оригинале ничего подобного нет.

Однако об этом всё же писали; а вот — **неожиданности**.

Почему-то вопросы неуклонно начинаются с «И» («И когда же вы пришли?»), обретая лёгкий одесский призвук. Что говорить, это бывает, но нужны хоть какие-то основания! О фразах, начинающихся с «Но», я уж и не говорю. В одном абзаце по три штуки.

Лёгкий одесский акцент и у вопроса «Почему нет?». Можно сказать «А что?» — но не хочется. Есть он и в слове «пара» (вместо «несколько» и т. п.); а вот у «где-то» вместо «примерно» — акцент разухабисто-советский 60—70-х годов.

Огорчает и слово «девушка» в роли местоимения (скажем, «Вошла Мэри. Он спросил девушку...»). Местоимений вообще боятся; «женщина», «мужчина», «парень» в этой роли идут по разряду дикостей. Но годится любое существительное. Вот пример: «Жена не окружала его заботами, в которых нуждался писатель» — всё он же, заметьте, не другой[8].

Слова «кажется», «вероятно», «видимо», «по-видимому» уступили место слову «похоже», а иногда — и неприятному «думается». Может быть, влечёт к себе мечта о литературности? Пишут же «Не правда ли?», «Не так ли?» среди полной фени, не считая возможным спросить «Правда?» или прибавить после вопроса «..., а?» или «..., да?». Вообще прямая речь — странная. Фраза набита всякими «врубился», «вырубился», «сечёшь», а синтаксис — оловянный, хоть половину выламывай. Естественно, лёгкости и правдоподобия разговор не обретает.

Не придаёт их и то, что англичане тыкают лакеям и дворецким. От этого я чуть не плачу, но тщетно; видимо, тут — уж полный ультразвук. Однако невоспитанным быть не хочется, и «Вы» исключительно часто пишут с большой буквы в чьей-то речи, не в письме. Но это уже орфография (или всё-таки нет?).

Лексика — ну что о ней скажешь? Нечувствительность к вульгаризмам уравновешивается нечувствительностью к словам, которые, вообще-то, есть, но то ли пропитались духом недоброй памяти собраний, то ли сами склонны к нему по объёму смысла. Изящно избегая постоянных (и незаметных) «сказал», переводчик рад заменить их

[8] Скрупулёзности ради заметим: если бы стояло «нуждается», был бы совсем другой смысл, не местоименный, обобщающий. — *Прим. Т.*

жестяным «заявил», слову же «говорит» охотно предпочтёт «утверждает». Словом, так и кажется, что цель — уподобить текст статье или документу 50-х, 60-х, 70-х годов.

ЧТО ЖЕ ИЗ ЭТОГО СЛЕДУЕТ?

Конечно, здесь — далеко не всё, здесь — то, что постоянно повторяется. Почему — не знаю. Предположим, так теперь можно; но нужно ли? Доктор Хэмфри в честертоновском «Возвращении Дон Кихота» считает, что людей поразила глазная болезнь, они не страдают от плохих красок и не отличают их от хороших. Казалось бы, людей поразила болезнь слуха; но, к счастью, это неверно. Недавно Наталья Мавлевич напечатала в Ex Libris невероятно трогательную статью о переводах «Карлсона» и говорит там, что в новом, противном переводе его не полюбят, а там — и не купят. Честертон прав, люди лучше, чем можно подумать. Действительно, если перевод даже не противный, а плоский, глухой, писателя не любят и книгу гораздо меньше покупают.

Помню, отец Александр Мень (которого — стоит ли говорить — я очень люблю) показал мне во времена самиздата перевод из Хуана де ла Крус, с французского (!) — на чудовищный. Когда я взвыла, он создал притчу о коте: если любишь кота, примешь и в мешке; если не любишь, не примешь ни в каком виде. Конечно, я с этим не согласна, ремесло наше теряет тогда последний смысл; но, оказывается, не согласны и просто люди, занимающиеся другими делами.

Что же до нынешних, странных, «средних» переводчиков, их слух намного хуже. Смотрите, Успенский, как это похоже на ту глухоту души, о которой сокрушаются и Библия, и Пушкин, и Тэффи («круглый дурак»[9] в отличие от обычного), и Набоков с Бердяевым («пошлость»), и Честертон («вульгарность» и просто «глупость»), и мы сами много лет назад, когда обозначили её латинским «х», поскольку такое свойство легче учуять, чем описать. Доктор Хэмфри прав, слепота и глухота — болезнь, отделяющая от истины и свободы, лёгкости и красоты. Сколько лет люди вынужденно жили без этого! Стоит ли набивать им уши ватой?

Обнадёживает то, что перевод исчезает. Учёные и развлекательные книги читают в оригинале. Остальное, действующее на сердца и утробы — Борхеса, Вудхауза, — переводят странные существа, которым непременно нужно, чтобы, как сказал Мандельштам, это было

[9] Согласно Тэффи, «настоящий круглый дурак распознаётся прежде всего по своей величайшей и непоколебимейшей серьёзности».

по-русски. Вообще-то, так обстоит дело не столько у нас, сколько в Англии, но вот-вот дойдёт и до нас.

А пока — несчастный читатель, у которого сердце и утроба настроены всё-таки на русский, берёт какую-нибудь из дивных англичанок, писавших детективы, и узнаёт, кто убил, но не оказывается в целебном поле свободы и уюта, мудрости и смеха, достоинства и умиления.

Ваша Т.

P. S.[10] Несколько лет тому назад, по-видимому — с запозданием, я удивилась странному слову «комфортно» («...ый»). Произнёс его лектор, говоривший о св. Фоме Аквинском, и удивительное сочетание поразило меня. Конечно, уже вошли в обиход и «гандикап» и «имидж», и много таких слов, даже «дистрибьюция». Иногда это новое понятие, иногда — добавление к старому, иногда — машинальный и неприятный перенос. Обычно их употребляют в не очень отработанной речи, а вот «комфортно» спокойно приняли самые просвещённые люди. Почему? Может быть, «удобно» — что-то более материальное? Но есть и другие слова, хотя бы «хорошо» («Мне здесь хорошо», а не мучительное «Мне здесь комфортно»).

Собственно перевода это не коснулось. Однако заветы Марии Петровны мешают мне многое принять.

[10] ●●➤ P. S. написано для книги: *Наталья Трауберг.* Невидимая кошка. — М.: Летний сад, 2006. — *Примечание сделано М. В. Чепайтите специально для настоящей книги.* ◄●●

Указатель имён

Иван Иваныч Фандерфлит
Женат на тётке Воронцова.
Из них который-то убит
В отряде славного Слепцова.
«Иван Иваныч Фандерфлит
Был только ранен, — я-то знаю».
— «А Воронцов?». — «Тот был убит.
Ах, нет! Не то! Припоминаю:
Ни Воронцов, ни Фандерфлит —
Из них никто не был убит,
Ни даже тётка Воронцова...
Одно известно: люди эти
И вовсе не были на свете;
И даже, кажется, — навряд
Была и тётка Воронцова?
Но был действительно отряд,
Да только — вовсе не Слепцова...».
— «Затем пронёсся слух таков,
Что вовсе не было отряда,
А был поручик Пирогов...».
— «Да был ли? Справиться бы надо».
И справками, в конце концов,
Одна лишь истина добыта:
Иван Иваныч Воронцов
Женат на тётке Фандерфлита.

Алексей Николаевич Апухтин.
«Кумушкам». 1888

Как правило, в указатель не вошли имена, используемые в качестве названий произведений (например, «Анна Каренина») и в сочетаниях: улица, премия, институт и т. п. (имени) такого-то.

Курсивом выделены номера страниц, на которых данное лицо упомянуто в качестве элемента библиографического описания.

Жирным шрифтом выделены номера страниц, на которых приводятся годы жизни (иногда только год рождения или год смерти) данного лица.

В составе имени жирным шрифтом выделяется фамилия.

В качестве отсылочного слова используется «*alias*». В отсылках из латинской части указателя в русскую кириллическое написание имени указывается с той минимальной степенью детализации, которая достаточна для нахождении в русской части этого написания — например, «Гаспаров» (а не «Гаспаров Михаил Леонович») и «Колмогоров Андрей» (а не «Колмогоров Андрей Николаевич»).

Николай Алексеевич Богомолов был настолько любезен, что прислал ценные уточнения к Указателю. Рад его поблагодарить.

Аванесов Рубен Иванович *18*
Ададуров Василий Евдокимович 27—29, 70
Адян Сергей Иванович *451*
Айдукевич Казимеж 479, *alias* **Ajdukiewicz**
Аккерман Вильгельм 379, 429, 432, *471*
Алекс 95
Александр I 519
Александров Павел Сергеевич 92, *197*, 237, *392*, 398, 405
Алексий II 144
Алпатов Владимир Михайлович 510
Аль-Хорезми́ Мухаммад ибн Муса 434, *alias* Хорезми
Амбарцумян Виктор Амазаспович 135
Анджапаридзе Георгий Андреевич 540
Андреев Николай Николаевич 15
Андроников Ираклий Луарсабович 48
Антокольский Павел Григорьевич 526, *527*
Антонов-Овсеенко (Антонов) Владимир Александрович 493
Аппель Кеннет 221, 277—280, *alias* **Appel**
Апухтин Алексей Николаевич 551
Аристов Аверкий Борисович 493
Аристотель 4, 5, 9, 93, 272, 306, 317, 341, *alias* Стагирит
Аркадьев Пётр Михайлович 512, 513
Арнольд Виталий Дмитриевич 15
Арнольд Владимир Игоревич 89, 90
Архимед 59, 320, 321, 529
Асеев Ю. А. *226*
Асмус Валентин Фердинандович *226*
Ахматова Анна Андреевна 531
Ахмес 271, 345
Байрон Джордж Гордон 172
Бар-Хиллел Иегошуа *339*, 489
Барсов Антон Алексеевич 27—29
Басилашвили Олег Валерианович 538
Баскервиль, собака 540
Бассалыго Леонид Александрович *27*, *66*
Бахрушин Сергей Владимирович 27, 67—69
Безродный Игорь Семёнович 506
Беклемишев Лев Дмитриевич *422*
Беликов Владимир Иванович 113
Беллман Ричард 358
Белый Андрей 25, 49, 107
Беляев Николай Ильич 493
Беляева Е. С. *363*
Бердяев Николай Александрович 549
Бернайс Пауль 429, 484
Бернулли Даниил 28
Бернштейн Сергей Натанович **198**
Берри Дж. 340, *alias* **Berry** G.
Бетховен Людвиг ван 490
Биркгоф Гарретт 484, *alias* **Birkhoff**
Бирюков Борис Владимирович *226*, *343*, *344*, *482*
Блок Александр Александрович 135
Богданов Александр Александрович 517
Богомолов Николай Алексеевич 551
Боде Иоганн Элерт 520
Божич Сергей Петрович 268, *285*
Бо́йаи Фаркаш 119, 123
Бо́йаи Янош 117—120, 122, 123, 145, *alias* **Больяй**, **Бояи**, **Bolyai**
Бо́льяй Янош 117, 358, *alias* **Бойаи** Янош, **Бояи**, **Bolyai**

Борель Эмиль 132
Борменталь Иван Арнольдович 177
Борунова Светлана Николаевна *18*
Борусяк Любовь Фридриховна 7, 88, 93, 104
Борхес Хорхе Луис 549
Бохеньский Юзеф (Иосиф) Мария 309
Бо́яи Янош 117, *alias* **Бойаи** Янош, **Больяй**, **Bolyai**
Браге Тихо 135
Браун, патер 537
Бра́уэр Лёйтзен Эгберт Ян 147, 149, 150, 201, 202, 317, 377, 378, *alias* **Brouwer**
Брежнев Леонид Ильич 493
Бродский Иосиф Александрович 109, 112, 113
Брокгауз Фридрих Арнольд 28, 41, *145*, *337*
Бугаев Николай Васильевич 49
Будкин Виктолий Иванович 258
Бузыкин Андрей Павлович 538
Булгаков Михаил Петрович **393**, *alias* Макарий
Булгарин Фаддей Венедиктович 120
Бунин Иван Алексеевич 229
Бурбаки́ Николя́ 65, 66, 68, 86, 236, 267, *285*, 342, *343*, 355, 408
Бучинская Надежда Александровна, *alias* Тэффи

Вавилов Николай Иванович 493
Ван Хао 376, 387, *416*, *alias* **Wang**
Варвара, переводчица 538
Варданян Валерий Арамович 20
Варпаховский Фёдор Леонидович *388*
Ватсон Джон 7, 135, 136
Вашингтон Джордж 73
Вейерштрасс Карл 440
Вейланд (Трауберг) Эмилия Соломоновна 547
Вейль Герман 377, 530
Велихов Евгений Павлович 227
Веллеман Даниэль 111, *alias* **Velleman** Daniel
Веллеман Шелли 111, *alias* **Velleman** Shelley
Венедиктов Алексей Алексеевич 113, 114
Вивиан 338, *alias* Vivian
Виленкин Наум Яковлевич *360*, 361—366
Винер Норберт 13, *472*, **473**, 474, 487, 489, 491, 492, 494, 499, *alias* **Wiener**
Витгенштейн Людвиг 8, 17, 24, 90, 206—226, 514
Влэдуц Георгий Эмильевич (Милиевич) 464
Воеводский Владимир Александрович 530, 531
Волошина Мария Степановна 542, 545
Волчек Галина Борисовна 538
Вольпин Александр Сергеевич, *alias* **Есенин-Вольпин**
Вольфскель Пауль 259
Воробьёв Николай Николаевич 381, *388*
Воронцова Вера Леонидовна *18*
Вригт Георг Хендрик фон 309
Вуджер Джозеф Генри 484, *alias* **Woodger**
Вудхауз Пэ́лем Грэ́нвил 549
Ву́лли Чарльз Леонард *345*

Гайавата 228, 229, *alias* Hiawatha
Галилей Галилео 180, 268
Гамильтон Александр 73
Гарднер Мартин 350
Гастев Юрий Алексеевич *422*, *424*
Гаусс Карл Фридрих 118, 119, 121—123, 138, 145, 347, 348, *alias* **Gauss**
Гваттари Феликс 524
Гегель Георг Вильгельм Фридрих 14, 17, 337, 514, 519—522, 525, 531
Гейтинг Аренд 148, 202, *204*, 205, 377, 378, 380, 381, 386, *388*, *alias* **Heyting**
Гельфáнд Израиль Моисеевич 361, *404*, *406*
Гениева Екатерина Юрьевна 540, 541
Генцен Герхард 300, 380, 381, *389*, *alias* **Gentzen**
Герлинг Христиан Людвиг **145**, *alias* **Gerling**
Герод, царь 546
Гёдель Курт Фридрих 6, 7, 12, 25, 65, 80, 81, **82**, 84—87, 148, 202, 210, 211, 213—215, 255, 260, 263—265, 286, 292, 295, 298, 375, 383, **421**, 422, 425, 446, 450, *452*, 475, 485, 486, 525, *alias* **Gödel**
Гиерон, сиракузский царь 59
Гик Евгений Яковлевич 10, *345*, 346, 347, 349, **350**
Гильберт Давид 8, 149—151, 154, 155, 179, 186, 189, **196**, 197, 240, 258, 281, *284*, 378, 379, 387, 429, 432, *471*, 475, *477*, 484, *alias* **Hilbert**
Глаголева Елена Георгиевна *404*, *406*
Гладкий Алексей Всеволодович 513
Глазунов Илья Сергеевич 170
Гливенко Валерий Иванович 380, *alias* **Glivenko**
Гнеденко Борис Владимирович 366
Говорухин Станислав Сергеевич 509
Гозе Мишель 330
Гольдбах Христиан 28
Горский Дмитрий Павлович *285*, *344*
Градштейн Израиль Соломонович *284*
Грант Улисс 73
Гротендик Александр 525
Грибоедов Александр Сергеевич 173
Грушницкий 100
Гуковский Григорий Александрович 493
Гумилёв Николай Степанович 159
Гуссерль Эдмунд 514, 526, 530
Гутенмахер Лев Израилевич 455, *471*

Дайсон Фримэн 358
Дали Сальвадор 223
Дантес Жорж Шарль 143
Д'Аннунцио Габриэле 159
Дарвин Чарльз 58, 515
Д'Артаньян 106
Дедекинд Юлиус Вильгельм Рихард 440
Дейкстра Эдсгер Вибе 291
Декарт Рене 25, 34
Делёз Жиль 524
Делинь Пьер 196
Демидов Сергей Сергеевич *205*, 273, *285*
Джефферсон Томас 73
Джойс Джеймс 539—541
Джэксон Эндрю 73
Диофант 259

Добронравов Игорь Степанович 226
Добрушин Роланд Львович 467
Дон Кихот 310, 549
Достоевский Фёдор Михайлович 172
Драгалин Альберт Григорьевич *203*, *388*
Дрезен Эрнест Карлович *471*
Дубин Борис Владимирович 536
Дыбо Анна Владимировна 510
Дынкин Евгений Борисович (Женя) 361
Дюбуа-Реймон Пауль Давид Густав 529
Дюринг Карл Евгений 516

Евклид (Эвклид) 59, 65, 75, 114—116, 118, 121—123, 125, 179, 182—185, 187, 189, 234, 236, 334, 353—355, 391, 511
Екатерина II 28, *alias* София
Ермолин Анатолий Александрович 177
Ершов Андрей Петрович 35, 293
Есенин-Вольпин (Вольпин) Александр Сергеевич 214, *422*, *452*, *453*
Еськова Наталья Александровна *18*
Ефрон Илья Абрамович 28, 41, *145*, *337*

Жванецкий Михаил Михайлович 93
Журавлёва Анна Ивановна 158
Журден 138, 306

Зайцева М. Г. *392*
Зализняк Андрей Анатольевич 22, 47, 49, 58, 59, 61, 64, 67, 103, 470
Зарубина Анна Юрьевна (Аня) 20
Захаренко Елена Николаевна *43*
Звегинцев Владимир Андреевич 509, 510
Зевес 31
Зенон Элейский 340
Зорин Андрей Леонидович 536
Зубченко Н. А. *474*
Зутер Генрих 516

Ива́нов Вячеслав Всеволодович (Ко́ма) 13, *471*, 472, 473, 487, 493, 494, 508, 509, 512, *alias* Ко́ма
Ильин В. 517, *alias* **Ленин**, **Ульянов**
Илюшенко Владимир Ильич 544
Иоанн Златоуст 538, *alias* Chrysostom
Иоанн из Кросса 546
Иоанн Креста, святой 546, *alias* Хуан де ла Крус
Иогансон Ингебрит 379, 381, *alias* **Johansson**
Ионеско Эжен 129, 130, *alias* **Ionesco**
Ирод, царь 546

Каверин Вениамин Александрович 113
Каган Вениамин Фёдорович **119**
Кай 56
Каменский Ян Амос 160
Кант Иммануил 17, 135, 317, 514, 518
Кантор Георг 91, 254, 255, 257, *286*, 354, 440, 524—526, 528, 529, *alias* **Cantor**
Капабланка (Капабланка-и-Граупера) Хосе Рауль 350
Карлсон 549

Ка́рнап Рудольф 462, 480, 481, 484, 489, *alias* **Carnap**
Карпов Анатолий Евгеньевич 282
Ка́ртер Хоуард (Говард) 345
Каспаров Гарри Кимович 282
Кац Марк 358
Келдыш Мстислав Всеволодович *453*
Кельвин, лорд 515, *alias* **Thomson**
Ке́мени Джон Джордж *392*, 407, 480, 481, *alias* **Kemeny**
Кибрик Александр Евгеньевич 510, 511
Кипнис Михаил Маркович *388*
Кирилл 338, *alias* Cyril
Киселёв Андрей Петрович 234, *404*
Кистяковский Андрей Андреевич 541
Кларк Франк 284
Клини Стивн (Стефен) Коул 148, 202, *339*, 386, *388*, *407*, *422*, 429, 432, 446, 451, *452*, *453*, *471*, *477*, *alias* **Kleene**
Клинтон Билл 170
Клиффорд Уильям **122**, *alias* **Clifford**
Кловис 538
Кожибский Альфред Х. 481
Козлова Мария Семёновна *226*
Козырев В. П. *286*
Козырев Николай Александрович 527
Колмогоров Андрей Николаевич 7, 8, 11, 13, 14, 16, 21, 27, 29, 32, 42, 47, 49, 58, 66, 67, 89, 104, 105, 107, 137, 142, 146—155, 194, **196**, 198, **199**, 200—205, 283, *286*, 290, 293, 298, 300, 356, 361, *363*, 375, 376, 378—380, 383, 384, 386, *388*, 405, *406*, *420*, 446, 449, *451*, *452*, 473, 493—496, 501, 506, 507, 509, 510, 512, 514, 517, 526, 530, 542, *alias* **Kolmogoroff**, **Kolmogorov**
Кольман Эрнест (Арношт) Яронирович (Натанович) *474*
Ко́ма 508, *alias* **Иванов**
Комарова Любовь Николаевна *43*
Конвей Джон Хортон 525
Кондаков Николай Иванович 337
Коперник Николай 121, 143, 523, 524
Котарбиньский Тадеуш 479
Коши́ Огюстен Луи 329
Коэн Пол 255, 260, 263
Кризостом 538
Крипке Сол Аарон 381, 389, 526, *alias* **Kripke**
Крысин Леонид Петрович *43*, 44
Куайн Уиллард Ван Ормен 246, 480, 481, *alias* **Quine**
Кузин Александр Михайлович *204*
Кузичева Зинаида Андреевна *344*, *482*, 530
Кузнецов Пётр Саввич 512
Кук Стивн 526
Куликов Константин Алексеевич 135
Курант Рихард 357, *404*
Кусраев Анатолий Георгиевич *286*
Кутателадзе Самсон Семёнович *286*
Куфинья́ль Луи 487, *alias* **Couffignal**
Кьеркегор Сёрен 526
Кэли Артур 221, *alias* **Cayley**

Лавуазье Антуан 269
Ланде-Безверхова Мария Петровна 547, 550, *alias* **Петренко**
Ларина Татьяна Дмитриевна 100
Лахути́ Делир Гасемович 13, 226, 478, 483
Лебег Анри Леон 40, *alias* **Lebesgue**
Лежандр Адриен Мари 116, 123
Лейбниц Готфрид Вильгельм 319, 322, 326, 329, 336, 355, 356
Лем Станислав 161
Ленин (Ульянов) Владимир Ильич (**Ленин** Николай) 17, 85, 109, 515, 517—519, *alias* **Ильин, Ульянов**
Ленский Владимир 100
Лермонтов Михаил Юрьевич 143, 144, 171—173
Лесков Николай Семёнович 121
Лесьневский (Лешневский) Станислав 479
Лимбах Иван Юрьевич 539
Линкольн Авраам 73
Лобачевский Николай Иванович 50, 51, 112—114, **117**, 118—121, 123—125, 138, 145, 200, 292, 334, 355, 358, 511, *alias* **Lobachevsky**
Логунов Анатолий Алексеевич 511
Ломоносов Михаил Васильевич 21, 48
Лонгфелло Генри Уодсуорт 228, *alias* **Longfellow**
Лосев Алексей Фёдорович 523
Лосский Николай Онуфриевич 135
Лотман Юрий Михайлович 10, 337, 338, 519, 542
Лоурдес, королевский злодей 537
Лохвицкая Надежда Александровна, *alias* Тэффи
Лужков Юрий Михайлович 170
Лузин Николай Николаевич **137**, 140, 199, 398, 399, *407*, 523, 528, 530
Лукасевич Ян 155, 309, *alias* **Łukasevich**
Луначарский Анатолий Васильевич 517
Лурье Соломон Яковлевич 270
Лутц Роберт 330
Лысенко Трофим Денисович 509, 511
Льюис Клайв Стэйплз 539
Ляпунов Алексей Андреевич *12*, *453*, *454*, 467

Мавлевич Наталья Самойловна 549
Майкельсон Альберт Абрахам 523, 524
Макарий, митрополит **393**, *alias* **Булгаков**
Маккарти Джон 291, 304, *426*
МакКей Дональд Маккримон 489, *alias* **MacKay**
Маккинси Джон 381, *alias* **McKinsey**
Максимова Лариса Львовна *388*
Малиновский Александр Александрович 492
Мандельштам Осип Эмильевич 158, 549
Манин Юрий Иванович 141
Марков Александр Владимирович 144
Марков Андрей Андреевич (отец) 91, **196**, 197
Марков Андрей Андреевич (сын) 91, **196**, *426*, 437, 438, 447, 449, *451*, *453*
Маркс Карл *284*, 515, 518, 519
Маркушевич Алексей Иванович 365

Ма́роци Геза 350
Марсель Габриель Оноре 538, *alias* **Marcel**
Мартин Дональд 526
Мартин-Лёф Пер 514, 526
Марчук Гурий Иванович 290
Маршак Самуил Яковлевич 175
Маслов Сергей Юрьевич 304
Мах Эрнст 517, 518
Маяковский Владимир Владимирович 89, 171, 172
Медведев Фёдор Андреевич *286*
Медведев Юрий Тихонович 384, 388, 446
Менделеев Дмитрий Иванович 21, 175, 176
Мендель Грегор Иоганн 511
Менчинская Наталья Александровна *360*, 366
Мень Александр Владимирович 540, 549
Микеладзе Зураб Николаевич 9, 22, 306—317
Миннегага 229
Михайлов Александр Иванович *412*
Моисей, пророк 224
Морган Огастес Де 337, *alias* **Morgan**
Мордухай-Болтовско́й Дмитрий Дмитриевич *182*
Морзе Сэмюэл Финли Бриз 456
Морлей (Морли) Генри 523
Моро Мария Игнатьевна *360*, 366
Моррис Чарльз Уильям 479, 480
Мур Эдвард Ф. 358
Муравьёв Владимир Сергеевич 540
Муха, тётя 544
Мучник Альберт Абрамович 448
Мышкис Анатолий Дмитриевич *405*, 407
Мэри 548

Набоков Владимир Владимирович 549
Нагин 113, *alias* **Ногин**
Нагель Эрнест *422*, *alias* **Nagel**
Найман Анатолий Генрихович 544
Нарышкина Анастасия Дмитриевна 14, 508
Натансон Исидор Павлович *403*, *406*
Нейгебауэр Отто *284*
Нейман Джон фон **140**, 292, 301, 484, *alias* **Neumann**
Некрасов Всеволод Николаевич 8, 157, 158, 167, 169, 171
Нельсон Дейвид 202
Неро 538
Нерон 538, *alias* Nero
Нечаева Ия Вениаминовна *43*
Ника 544, *alias* Шварце Маус
Новиков Пётр Сергеевич 21, 384, *388*, 447, 511
Новиков Сергей Петрович 511
Новожилов Валентин Валентинович *197*
Ногин 113, *alias* **Нагин**
Ньюмен Джеймс Рой *422*, *alias* **Newman**
Ньютон Исаак 56, 200, 336, 355, 356, 519, 523

Окунев Леопольд Яковлевич 347
Онегин Евгений 100, 479
Остроградский Михаил Васильевич 120

Павел, святой апостол 537, *alias* Савл, Paul, Saul
Павлов Иван Петрович 494
Па́дучева Елена Викторовна *338*
Панов Михаил Иванович *9*, *231*
Панов Михаил Юрьевич 15

Панфилов Е. Г. *474*
Панюнин Никита Михайлович 15
Паперно Денис Аронович 512, 513
Парнуэлл Эрик 232, *alias* **Parnwell**
Паскаль Блез 11, 368, 490
Пастернак Борис Леонидович 18, 25, 509
Пеано Джузеппе 83, 238, 239, 246, 250, 251, 253, 289
Пенска́я Елена Наумовна 158
Пентус Мати Рейнович 512, 513
Петренко Мария Петровна 547, *alias* **Ланде-Безверхова**
Петровский Иван Георгиевич 101, 509, 510
Пермяков Евгений Владимирович 21
Петер Рожа *155*, *204*
Петров Андрей Павлович 323
Петров Василий Викторович *344*
Петров Василий Владимирович 323
Петров Евгений Петрович 323
Петровский Иван Георгиевич 101, 509, 510
Печорин Григорий Александрович 100
Пиголкин Альберт Семёнович *396*
Пильчак Берта Юдовна 381, *389*
Пинаут 537
Пино 537, *alias* **Pinaut**
Пиперски Александр Чедович 513
Пирсон Карл 518
Пифагор 30, 82, 112, 117, 273
Платон 17, 26, 306, 314, 422, 532
Платтнер Готфрид 126, 335, *alias* **Plattner**
Плиско Валерий Егорович 7, *11*, 146, *156*, *286*, *375*, 387, *389*, *alias* **Plisko**
Плунгян Владимир Александрович 21, *344*, 510
Плунгян Надежда Владимировна 20
Поваров Геллий Николаевич *285*, *474*
По́дниекс Карл Мартынович *422*
Поливанов Евгений Дмитриевич 468, 471, 472
Поливанов Михаил Константинович (друг автора) 13, 473, 487, 493, 494
Полотовский Григорий Михайлович 114
Полтев Константин Михайлович *471*
Полушкин Вадим Алексеевич *412*
Понтрягин Лев Семёнович 271, *284*, *286*, 528
Поспелов Дмитрий Александрович *13*, *204*, *205*, *487*, *495*, *501*
Пост Эмиль Леон 293, 294, 300, 364, 447—449, 451, *452*
Потоцкий Михаил Владимирович *285*, *365*, 367
Преображенский Филипп Филиппович 177
Прокл Диадох 116
Простакова 110, 232
Прохорова Ирина Дмитриевна 533
Прутков Козьма 5, 65
Птолемей, египетский царь 59
Птолемей Клавдий 121, 524
Пуанкаре Анри 84, 196, 265, 281, 282, *284*, 517, 518
Пушкин Александр Сергеевич 99, 109, 143, 171, 172, 479, 533, 549
Пышкало Анатолий Михайлович *360*, *363*
Пэли Раймонд 473
Пэмп Хэмфри 549

Радзиховский Леонид Александрович 114
Разлогова Елена Эмильевна *342*, *344*
Райбет Кен 257, *alias* **Ribet**
Расёва Елена 381, *389*, *alias* **Rasiowa**
Рассел Бертран 206, 221, 224, *226*, 340, 421, 422, 429, 450, 484, 527, *alias* **Russell**
Рахилина Екатерина Владимировна (Катя) 19, 20
Рашевский Пётр Константинович *141*, 219, 240, 270, 281, *284*, *285*
Рей Абель 518
Ремарк Эрих Мария 143
Риман Бернхард 334
Ринд Александр Генри 345, *alias* **Rhind**
Рита 544
Роббинс Герберт *404*
Робинсон Абрахам 329
Роджерс Хартли *389*
Родман Ю. С. *474*
Рождественский Юрий Владимирович 511
Розанов Василий Васильевич 523
Розенблют Артуро 474, 492, **494**, *alias* **Rosenblueth**
Розенцвейг Виктор Юльевич 542
Розов Николай Христович *205*
Россиус Андрей Александрович 532
Ротшильд Натаниэль Чарльз Джейкоб 169
Роуз Джин Ф. 387, *alias* **Rose**
Рычкова Наталья Григорьевна (Наташа) *10*, *351*, *alias* **Химченко**
Рязанов Эльдар Александрович 100
С. А., редактор 541
С. С. 120
Сабуров Евгений Фёдорович 8, 157, 158
Савл, святой апостол 537, *alias* Павел, Paul, Saul
Садовничий Виктор Антонович 511
Самохин Алексей Васильевич 280, *286*
Саул, король 537
Санд Жорж 143
Семёнов Алексей Львович 9, 227, 230, 290, *452*, *453*
Семушин Алексей Дмитриевич *360*
Серпинский Владимир Владимирович 464
Сикорский Роман *389*
Сингх Саймон 94, 257, *286*, *alias* **Singh**
Скворцов Дмитрий Павлович 385, *388*, *389*
Скотт Дана 304
Слуцкий Борис Абрамович 26
Смальян (**Смаллиан**) Реймонд Мэррилл 215, *alias* **Шмульян**, **Smullyan**
Смирнов Владимир Иванович **196**
Снелл Джордж *392*, *407*
Соболев Борис Игоревич 143
Соболев Сергей Львович 40
Сойер Уолтер Уорвик 358
Сократ 272
Солженицын Александр Исаевич 514
Соловьёв И. В. *474*
София Августа Фредерика Анхальт-Цербстская, принцесса 28, *alias* Екатерина II
Спенсер Герберт 17
Спок Бенджамин Маклейн 57

Стагири́т 310, 316, *alias* Аристотель
Сталин Иосиф Виссарионович 59, 85, 90, 493, 515
Станиславский Константин Сергеевич 61
Стеклов Владимир Андреевич 15, 199, 426
Стокс Уильям, ирландский врач 424
Столяр Абрам Аронович *363*
Стоун Маршал Харвей 381, *alias* **Stone**
Стоун Ричард 358
Стюарт Мария 506
Стяжкин Николай Иванович *343*
Сука́рно 141
Суха́рто Хаджи Мухаммед 141
Суровцев Валерий Александрович *344*
Сцилла 544
Сэйерс Дороти 539

Талми Леонард 38, 39, *alias* **Talmy**
Тарский Альфред 381, 479—481, *alias* **Tarski**
Тауринус Франц Адольф 118, 123, *alias* **Taurinus**
Терентьев А. Д. *360*
Тимей из Локр 521, 531, 532, *alias* Timaeus
Тихомиров Владимир Михайлович *7*, *146*, *205*, 530
Толстиков А. В. *286*
Толстой Алексей Константинович 160
Толстой Лев Николаевич 120, 172
Томас Робин 280, *alias* **Thomas**
Томашевский Борис Викторович 107
Томпсон Джеральд *392*, *407*
Тоня, студентка 18
Тоом Андрей Леонович 526, 527
Топоро́в Виктор Леонидович 544
Трауберг Наталья Леонидовна 3, 4, 14, **533**, 534—550
Трауберг (Вейланд) Эмилия Соломоновна 547
Трахтенброт Борис Авраамович (Абрамович) *452*
Тредиаковский Василий Кириллович 33
Трусов Г. *393*
Тутанхамон 345
Туциус Иоганн Даниэль 520
Тьюринг Алан Матисон 132, 292, 293, 300, 449, 451, 501, 504
Тэйлор Ричард 257, *alias* **Taylor**
Тэлбот Строуб 170
Тэт Петер Гутри 515, *alias* **Tait**
Тэффи (**Бучинская (Лохвицкая)** Надежда Александровна) 543, 549
Тютчев Фёдор Иванович 159, 170, 171

Уайлс Эндрю 257, 260, 274, *alias* **Wiles**
Уайльд Оскар 338
Уайтхед Алфред Норт 421, 429, 450, 484, *alias* **Whitehead**
Улам Станислав 358
Улицкая Людмила Евгеньевна 533
Ульянов Владимир Ильич 517, *alias* **Ильин, Ленин**
Уолтер Вильям Грей 492, **494**, *alias* **Walter**
Успенский Борис Андреевич 28, 29
Ушаков Дмитрий Николаевич 43, 46, 235, *285*, *337*, *431*
Ушаков Максим Александрович 20
Уэллс Герберт Джордж 126, 335

Файер Владимир Владимирович 521, 532
Ферма Пьер 9, 30, 74, 75, 82, 93, 94, 231, 256—265, 274, 277, *286*, *alias* **Fermat**
Фет Яков Ильич *13*, *204*, *205*, *487*, 493, *495*, *501*
Филдс Джон Чарльз 530
Фило 538
Филон Александрийский 538, *alias* Philo
Финн Виктор Константинович 13, 478, 483
Фихтенгольц Григорий Михайлович *404*
Флоренский Павел Александрович 523
Фома Аквинский, святой 550
Фоменко Анатолий Тимофеевич 49
Фомин Сергей Васильевич 405, *406*
Франк Глеб Михайлович *204*
Франклин Бенджамин 73
Франциск, святой 539
Фре́ге Готлоб (Готтлоб) 4, 10, 174, 206, 292, **342**, 343, 344, 450, 479, *482*, 484, 514, *alias* **Frege**
Фрейденберг Ольга Михайловна 538
Френкель Абрахам 263, *339*
Фреше Морис Рене **198**, *alias* **Fréchet**
Фридберг Ричард М. 448
Фурье Жан Батист Жозеф 473
Фусс Павел Николаевич 28, *alias* **Fuss**

Хайдеггер Мартин 17, 530
Хайям Омар 117
Хакен Вольфганг 221, 277—280, *alias* **Haken**
Хандриков Митрофан Фёдорович 135
Харибда 544
Харингтон Джон **175**, *alias* **Harington**
Ха́усдорф Феликс *406*
Хиггинс Генри 18
Химченко Наталья Григорьевна *205*, 501, *alias* **Рычкова**
Хинкис Виктор Александрович 539, 540
Хинчин Александр Яковлевич 366, *404*
Хлебников Велемир 112, 159, 171
Хлодвиг 538, *alias* Clovis
Ходасевич Владислав Фелицианович 25, 543
Ходорковский Михаил Борисович 8, 157, 158, 163, 166—169, 174, 176, 178
Холмс Шерлок 7, 135, 136, 143
Холодович Александр Алексеевич 23
Хорезми́ Мухаммад бен Муса 131, 434, *alias* аль-Хорезми
Хорнби Альберт Сидней 232, *alias* **Hornby**
Хоружий Сергей Сергеевич 540, 541
Христос 536
Хрущёв Никита Сергеевич 493, 508
Хуан де ла Крус, святой 546, 549, *alias* Иоанн Креста

Цахес 538, 543
Цермело Эрнст 263
Цеткин Клара 109
Цицерон Марк **Туллий** 212

Чейз Стюарт 481, *alias* **Chase**
Чейн Джон, шотландский врач 424

Чепайтис Виргилиус-Юозас Владович 534
Чепайтите Мария Виргилиевна 535, 550
Чернявский Владимир Соломонович 13, *285*, 475, *477*, 483
Честертон Гилберт Кит 159, 536, 537, 539, 549
Чехов Антон Павлович 366
Чёрч Алонзо 12, 132, *285*, 293, 294, 299, 301, 343, 379, 381, *389*, *406*, 425—427, **428**, 429, 431, 442, 447, 448, *477*, *alias* **Church**
Чудакова Мариэтта Омаровна 536
Чуковский Корней Иванович 143

Шанин Николай Александрович 383, 387, *389*, *420*, 446, *452*, *453*
Шатуновский Самуил Осипович 232
Шварце Маус 544, *alias* Ника
Швейкарт Фердинанд Карл **118**, 125, 138, 145, *alias* **Schweikart**
Шенгели Георгий Аркадьевич 107
Шеннон Клод Элвуд *426*, 490, 492, **494**, 498, 499, *alias* **Shannon**
Шень Александр Ханевич (Саша) 4, 14, 20, 514—531, *alias* **Shen**
Шестопал Галина Абрамовна *453*
Шехтман Валентин Борисович *388*
Шиллер Иоганн Кристоф Фридрих 172, 506
Шипунова Анна Владимировна (Аня) 20
Ширяев Альберт Николаевич *7*, *146*, *205*
Шиханович Юрий Александрович 11, 13, *285*, 391—398, 401, 403, 405, 408, 409, 483
Шишков Александр Семёнович 208
Шмулевич Пётр Кронидович **367**
Шмульян Реймонд Мэррилл 215, *alias* **Смальян**, **Smullyan**
Шноль Эммануил Эльевич *404*, *406*
Шпет Густав Густавович 17
Шрейдер Юлий Анатольевич 11, 410
Шрёдингер Эрвин 492
Штайн Даниэль 533
Штейнгауз Гуго Дионисий 347
Штирлиц Макс Отто фон 95
Штольц Отто 529
Шувалов Виктор Валерьевич (Витя) 20
Шувалов Иван Иванович 29
Шу́ра-Бу́ра Михаил Романович 453

Щерба Лев Владимирович 128

Эвбулид 340
Эвклид, *alias* Евклид
Эйзенштейн Сергей Михайлович 542
Эйлер Леонард 75, 259, 329, 347, 348
Эйнштейн Альберт 122, 269, 511, 524
Э́ло Арпад Эмрик 347
Энгельс Фридрих 210, 282, *284*, 515, 516, 518
Эшби Уильям Рос *204*, 400, 492, **494**, *alias* **Ashby**

Юм Дэвид 518
Юстас 95

Юшкевич Адольф Павлович (Доля) 273, *285*, *286*, *alias* **Youshckevitch**
Юшкевич Павел Соломонович *286*, 528
Юшманов С. В. *286*

Яблонский Сергей Всеволодович *452*, *453*
Яглом Акива Моисеевич (Кика) *368*
Яглом Исаак Моисеевич (Изя) *363*, *368*, *392*
Яковлев Николай Феофанович 468, *471*
Якубова Нина Манашировна 113
Янин Валентин Лаврентьевич 27, 67
Яновская Софья Александровна 12, *204*, 421
Яськовский Станислав 381, *alias* **Jaśkowski**

* * *

Ajdukiewicz Kazimierz *482*, *alias* **Айдукевич**
Ampère André-Marie 428
Appel Kenneth Ira 221, *285*, *286*, *alias* **Аппель**
Ashby William Ross **494**, *alias* **Эшби**

Berry G. G. 340, *alias* **Берри**
Berry Madeline M. *471*, *477*
Birkhoff Garrett *486*, *alias* **Биркгоф**
Bolyai János **117**, *alias* **Бойаи** Янош, **Больяй**, **Бояи**
Brouwer Luitzen Egbertus Jan 389, 390, *alias* **Брауэр**

Cantor Georg *286*, *alias* **Кантор**
Carnap Rudolf *471*, *477*, 482, *486*, *alias* **Карнап**
Cayley Arthur 221, *alias* **Кэли**
Chase Stuart 481, *alias* **Чейз**
Chrysostom 538, *alias* Иоанн Златоуст
Church Alonzo 427, *477*, *482*, *alias* **Чёрч**
Clifford William Kingdon **122**, *alias* **Клиффорд**
Clovis 538, *alias* Хлодвиг
Couffignal Louis *487*, *alias* **Куфиньяль**
Cox David Archibald *286*
Curry Haskell Brooks *477*
Cyril 338, *alias* Кирилл

Fermat Pierre de 94, 286, *alias* **Ферма**
Fréchet Maurice René **198**, *alias* **Фреше**
Frege Gottlob 388—390, *482*, *486*, *alias* **Фреге**
Fuss Paul Heinrich von 28, *alias* **Фусс**

Gauss Carl Friedrich **118**, *alias* **Гаусс**
Gentzen Gerhard *389*, *alias* **Генцен**
Gerling Christian Ludwig **145**, *alias* **Герлинг**
Glivenko Valery Ivanovich *389*, *alias* **Гливенко**
Gödel Kurt Friedrich **82**, 215, 388—390, **421**, 422, *477*, *alias* **Гёдель**

Haken Wolfgang 221, *285*, *286*, *alias* **Хакен**
Harington John sir **175**, *alias* **Харингтон**
Heijenoort Jean van *388—390*
Heyting Arend *390*, *alias* **Гейтинг**
Hiawatha 228, *alias* Гайавата
Hilbert David **196**, *alias* **Гильберт**
Hornby Albert Sidney *285*, *alias* **Хорнби**

Ionesco Eugène *130*, *alias* **Ионеско**

Jaśkowski Stanisław *390*, *alias* **Яськовский**
Johansson Ingebrigt *390*, *alias* **Иогансон**

Kemeny John George *482*, *alias* **Кемени**
Kent Allen *471*, *477*
Kleene Stephen Cole *390*, *alias* **Клини**
Kolmogoroff A. N. *198*, *388*, *452*, *alias* **Колмогоров**, **Kolmogorov**
Kolmogorov A. N. 24, 156, 205, *388*, *alias* **Колмогоров**, **Kolmogoroff**
Kripke Saul Aaron *390*, *alias* **Крипке**

Lebesgue Henri Léon 530, *alias* **Лебег**
Lewis Clarence Irving 390
Lilly Elaine M. *9*, *227*
Linsky Leonard *482*
Lobachevsky Nikolai Ivanovich 117, *alias* **Лобачевский**
Longfellow Henry Wadsworth 228, *alias* **Лонгфелло**
Łukasevich Jan *156*, *alias* Лукасевич

MacKay Donald MacCrimon 489, *alias* **МакКей**
Marcel Gabriel Honoré 538, *alias* **Марсель**
McKinsey John Charles Chenoweth *390*, *alias* **Маккинси**
Monge Gaspar 428
Morgan Augustus De 337, *alias* **Морган**
Morris Charles William *482*

Nagel Ernest *422*, *alias* **Нагель**
Nero 538, *alias* Нерон
Neumann John von *486*, *alias* **Нейман**
Newman James *422*, *alias* **Ньюмен**

Parnwell Eric *285*, *alias* **Парнуэлл**
Patlasov M. V. *156*
Paul, the Apostle 537, *alias* Павел, Савл, Saul
Perry James Whitney *471*, *477*
Philo 538, *alias* Филон
Pinaut 537, *alias* **Пино**
Plattner Gottfried 335, *alias* **Платтнер**
Plisko Valery (Valerij) Egorovich (Yegorovich) *156*, *215*, *alias* **Плиско**

Quine Willard Van Orman *482*, *alias* **Куайн**

Rasiowa Helena *390*, *alias* **Расёва**
Rhind Alexander Henry 345, *alias* **Ринд**
Ribet Ken 257, *alias* **Райбет**
Robertson Neil 280
Rose Gene F. *390*, *alias* **Роуз**
Rosenblueth Arturo 474, 492, **494**, *alias* **Розенблют**
Russell Bertrand Arthur William *482*, *486*, *alias* **Рассел**

Sanders Daniel P. 280
Saul, the Apostle 537, *alias* Павел, Савл, Paul
Schweikart Ferdinand Karl **118**, **145**, *alias* **Швейкарт**
Seymour Paul 280
Shannon Claude Elwood *471*, **494**, *alias* **Шеннон**
Shen Alexander 514, *alias* **Шень**
Singh Simon *286*, *alias* **Сингх**
Smullyan Raymond Merrill *215*, *alias* **Смальян, Шмульян**
Stone Marshall Harvey *390*, *alias* **Стоун** Маршал

Tait Peter Guthrie 515, *alias* **Тэт**
Talmy Leonard *38*, *alias* **Талми**
Tarski Alfred *156*, *390*, *477*, *alias* **Тарский**
Taurinus Franz Adolf **118**, *alias* **Тауринус**
Taylor Richard 257, *alias* **Тэйлор**
Timaeus Locrus 531, *alias* Тимей
Thomas Robin *286*, *alias* **Томас**
Thomson William 515, *alias* **Кельвин**

Velleman Daniel J. 111, *alias* **Веллеман** Даниэль
Velleman Shelley L. 111, *alias* **Веллеман** Шелли
Vivian 338, *alias* Вивиан

Walter William Grey **494**, *alias* **Уолтер**
Wang Hao *390*, *alias* **Ван**
Weaver Warren *471*
Whitehead Alfred North *486*, *alias* **Уайтхед**
Wiener Norbert *472*, **473**, 474, *alias* **Винер**
Wiles Andrew 257, *alias* **Уайлс**
Woodger Joseph Henry *471*, *477*, *alias* **Вуджер**

Youshckevitch A. P. *205*, *alias* **Юшкевич** Адольф

Книги издательств ОГИ и Б.С.Г.-Пресс
можно приобрести:

в розницу в Москве

- Книжный магазин «Москва»; м. «Пушкинская», «Тверская»; ул. Тверская, 8; тел. (495) 629-64-83, 797-87-17;
- ТД «Библио-Глобус»; м. «Лубянка»; ул. Мясницкая, 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-27-37;
- Московский Дом книги; м. «Арбатская»; ул. Новый Арбат, 8; тел. (495) 789-35-91;
- Дом книги «Молодая Гвардия»; м. «Полянка»; ул. Большая Полянка, 28; тел. (495) 238-50-01;
- Книжный магазин «Фаланстер»; м. «Пушкинская», «Тверская»; Малый Гнездниковский пер., 12/27; тел. (495) 629-88-21;
- Сеть магазинов «Республика»; тел. (495) 251-65-27;

в розницу в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги; м. «Невский Проспект», «Гостиный Двор»; Невский пр-т, 28; тел. (812) 448-23-55;
- Сеть магазинов «Буквоед»; тел. (812) 601-0-601;
- Книжный магазин «Все свободны»; наб. Мойки, 28; тел. (911) 977-40-47;

оптом

- КД «Б.С.Г.-Пресс»; Москва, Варшавское шоссе, 3; тел. (495) 626-24-72, (915) 110-36-50;
- «А. Симпозиум»; Санкт-Петербург, 20-я линия В. О., 5/7; тел. (812) 325-66-61.

Наши книги в электронном формате можно найти по адресу:

www.bibliorossica.com/publishers.html

Владимир Андреевич Успенский

ТРУДЫ ПО *не*МАТЕМАТИКЕ

В пяти книгах

Книга 2
ФИЛОСОФИЯ

* * *

Ответственный за выпуск *Н. Н. Андреев*. Редакторы *М. Ю. Панов*, *Н. М. Панюнин*. Художник переплёта и суперобложки *М. Ю. Панов*

Подписано в печать 6/XI 2014 года. Формат $70 \times 100\ ^1/_{16}$. Печ. л. 35,5. Усл. печ. л. 46. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура литературная, картографическая № 151. Тираж 3500 экз. (1-й завод 1—1500). Заказ 6126.

Объединённое гуманитарное издательство.
117105, Москва, Варшавское шоссе, 3.
Тел.: (495) 626-24-70; e-mail: izdatelstvo.ogi@yandex.ru

Фонд «Математические этюды».
115573, Москва, Ореховый бульвар, 41, офис 119

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография».
Филиал «Чеховский печатный двор».
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, 1.
Сайт: www.chpd.ru; e-mail: sales@chpd.ru; факс/тел.: (496) 726-54-10