v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 1

Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев,
Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв,
Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Элементы математики в задачах

с решениями
и комментариями

Часть 2

Издательство МЦНМО
2010

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 2

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
Э45

Авторы:
Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов,
А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Э45 **Элементы математики в задачах** (с решениями и комментариями). Ч. 2 / Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов и др. — М.: МЦНМО, 2010. — 160 с.

ISBN 978-5-94057-703-4

Книга содержит один из курсов математики в задачах, на протяжении ряда лет используемых в 57 школе города Москвы. В представленном виде курс преподавался классу «В» 2008 года выпуска. Часть 2 состоит из тем, изучавшихся в 9 классе.

Задания снабжены решениями и комментариями. Многие сюжеты (листки) могут изучаться независимо.

Книга адресована учителям математики, работающим в математических классах, руководителям кружков и факультативов и всем, кто интересуется обучением старшеклассников математике вне школьной программы.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-94057-703-4

Оглавление

Введение 5
Листок 14. Поля . . . . 7 / 39
Листок 15. Отношение порядка . . . . 10 / 48
Листок 16. Действительные числа . . . . 12 / 54
Листок 5д. Счетные и несчетные множества . . . . 15 / 66
Листок 17. Бесконечные десятичные дроби . . . . 17 / 77
Листок 18. Предел последовательности . . . . 19 / 85
Листок 19. Прогрессии . . . . 22 / 97
Листок 20. Арифметика пределов . . . . 25 / 105
Листок 21. Ряды. Часть 1 . . . . 28 / 117
Листок 22. Ряды. Часть 2 . . . . 30 / 125
Листок 6д. Неравенства . . . . 33 / 138
Листок 7д. Топология прямой. Открытые и замкнутые множества 35 / 149

Задачи / Разбор

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 5

Введение

В математических классах 57 школы кроме алгебры и геометрии (на которых проходится более-менее обычная школьная программа) имеется еще предмет, который традиционно называется «математический анализ». В отличие от других предметов на уроках анализа практически нет рассказов у доски. Вместо этого ученикам регулярно выдаются листочки — наборы задач по какой-либо теме вместе с необходимыми определениями.

Школьники самостоятельно решают и кратко записывают эти задачи — каждый в своем темпе, ни формальных домашних заданий, ни текущих оценок нет (хотя примерно раз в полгода проводится зачет с отметкой), — а на уроке обсуждают их один на один с преподавателями. Для этого на каждом уроке присутствует команда из 4–6 преподавателей. Они же составляют листки.

Из таких листков (выдававшихся нами классу «В» 2008 года выпуска), снабженных решениями задач и комментариями, и состоит эта книга. В часть 2 вошли листки 9 класса.

Дополнительные задачи отмечены звездочкой, дополнительные листки имеют букву «д» в номере.

Некоторые подробности о том, как организован учебный процесс (а также о том, почему он организован именно так), можно найти в предисловии к части 1.

О содержании курса. Первая половина курса в 9 классе посвящена определению действительных чисел. С одной стороны, оно необходимо для замкнутости курса в целом: мы старались, не используя внешних ссылок, определять используемые объекты и доказывать все нужные свойства этих объектов.

С другой стороны, определение действительных чисел — а в курсе действительные числа определяются как полное упорядоченное поле — дает повод познакомиться с некоторыми элементами абстрактной алгебры, научиться работать с объектами, заданными аксиоматически. При этом действительные числа строятся в несколько шагов, каждый из которых превращает в формальное определение часть нашей интуиции («над числами можно производить арифметические операции» — определение поля, «числа можно сравнивать» — определение упорядоченного поля, «в прямой нет дырок» — определение полного упорядоченного поля).

Завершив построение действительных чисел, в первом из дополнительных листков мы возвращаемся к теории множеств, с которой начинался наш курс в 8 классе, — ведь действительные числа дают естественный пример несчетного множества.

При изучении действительных чисел сразу возникает потребность в технике пределов. И вторая половина курса в 9 классе посвящена, в основном, изучению пределов последовательностей и бесконечных сумм. С этого начинается курс собственно математического анализа, который затем продолжается и в 10–11 классах. При этом мы не стараемся ни дойти до какой-то цели как можно быстрее (для чего гораздо лучше подошло бы изложение анализа в виде курса лекций), ни овладеть как можно лучше вычислительными приемами (для чего гораздо лучше подошло бы решение большого числа упражнений из задачника по анализу).

Отметим, что эта часть курса во многом опирается на алгебраическую (в школьном смысле этого слова) технику неравенств и оценок.

В последнем из дополнительных листков обсуждаются топологические свойства действительных чисел, что готовит почву для включения изученного в более общий контекст метрических и топологических пространств.

Поля

листок 14 / сентябрь 2005

Соглашение. В этом листке буква p обозначает простое число.

Определение 1. Пусть на множестве $\mathscr{F}$ заданы две бинарные операции: сложение «+» и умножение «·», удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $\forall a, b \in \mathscr{F}\ a+b=b+a$ (*коммутативность сложения*);

2) $\forall a, b, c \in \mathscr{F}\ (a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения*);

3) $\exists 0 \in \mathscr{F}\colon \forall a \in \mathscr{F}\ a+0=a$ (*существование нуля*);

4) $\forall a \in \mathscr{F}\ \exists b \in \mathscr{F}\colon a+b=0$ (*существование противоположного элемента*);

5) $\forall a, b \in \mathscr{F}\ ab=ba$ (*коммутативность умножения*);

6) $\forall a, b, c \in \mathscr{F}\ (ab)c=a(bc)$ (*ассоциативность умножения*);

7) $\exists 1 \in \mathscr{F} \setminus \{0\}\colon \forall a \in \mathscr{F}\ a \cdot 1=a$ (*существование единицы*);

8) $\forall a \in \mathscr{F} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathscr{F}\colon ab=1$ (*существование обратного элемента*);

9) $\forall a, b, c \in \mathscr{F}\ a(b+c)=ab+ac$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Такое множество $\mathscr{F}$ с двумя бинарными операциями называется *полем*.

Определение 2. Элемент b из аксиомы 4 называется противоположным к a и обозначается $-a$; элемент b из акиомы 8 называется обратным к a и обозначается a^{-1}. Сумма $a+(-b)$ записывается в виде $a-b$ и называется *разностью* элементов a и b; произведение ab^{-1} записывается в виде $\frac{a}{b}$ и называется *частным* элементов a и b.

Задача 1. Докажите, что

а) $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$;

б) в $\mathscr{F}$ существует ровно один нуль;

в) для каждого x в $\mathscr{F}$ существует лишь один противоположный элемент;

г) элемент, противоположный сумме, есть сумма элементов, противоположных слагаемым;

д) $-(-a)=a$;

е) уравнение $a+x=b$ имеет в $\mathscr{F}$ единственное решение $x=b-a$.

Задача 2. Докажите, что:

а) $((ab)c)d=a(b(cd))$;

б) в $\mathscr{F}$ существует ровно одна единица;

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 8

в) для каждого $x \neq 0$ в $\mathscr{F}$ существует лишь один обратный элемент;

г) элемент, обратный произведению, есть произведение элементов, обратных сомножителям;

д) $(a^{-1})^{-1} = a$;

е) уравнение $ax = b$ $(a \neq 0)$ имеет в $\mathscr{F}$ единственное решение $x = ba^{-1}$.

Задача 3. Докажите, что: а) $a \cdot 0 = 0$; б) $(-1) \cdot a = -a$; в) $a^2 = (-a)^2$.

Задача 4. Существует ли элемент, обратный к нулю?

Задача 5*. Верно ли, что множество $\mathscr{F}$ с операциями «$+$» и «$\cdot$» является полем тогда и только тогда, когда:

1) $(\mathscr{F}, +)$ — коммутативная группа;
2) $(\mathscr{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ — коммутативная группа;
3) $\forall a, b, c \in \mathscr{F}$ $a(b+c) = ab + ac$?

Задача 6. Пусть $ab = 0$. Докажите, что $a = 0$ или $b = 0$.

Задача 7. Докажите, что: а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Задача 8. Существует ли поле из: а) одного элемента; б) двух элементов; в) трех элементов; г) пяти элементов; д) p элементов (p простое); е*) шести элементов; ж*) 4 элементов; з*) p^2 элементов (p простое)?

Задача 9. Является ли полем множество $M = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$ со следующими операциями:

а) $(p_1, q_1) + (p_2, q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2)$,
$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)$;

б) $(p_1, q_1) + (p_2, q_2) = (p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)$,
$(p_1, q_1) \cdot (p_2, q_2) = (p_1 \cdot p_2, q_1 \cdot q_2)$?

Задача 10. Пусть $M = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим на M следующее отношение:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Докажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности.

Определение 3. Множество классов эквивалентности относительно отношения эквивалентности, описанного в предыдущей задаче, называется *множеством рациональных чисел*. Обозначение: $\mathbb{Q}$.

Класс эквивалентности элемента (a, b) принято обозначать $\frac{a}{b}$. Вместо $\frac{a}{1}$ допускается краткая запись a.

Задача 11. Введите на $\mathbb{Q}$ операции сложения и умножения так, чтобы $\mathbb{Q}$ стало полем.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 9

Задача 12. Вычислите:
а) $\frac{1}{3}$ в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; б) $\frac{2}{5}$ в $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; в) $\frac{5}{57}$ в $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; г) $\frac{2008}{57}$ в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Задача 13. Сколько решений имеет уравнение $x^2+1=0$ в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Q}$; е) $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; ж*) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p — простое)?

Задача 14. Сколько решений имеет уравнение $x^2=2$ в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Q}$; е) $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; ж*) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 15. Вычислите 2^2, 2^3, …, 2^{10} в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Q}$.

Задача 16. Вычислите 57^{2008} в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$; е) $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$.

Задача 17. В какую степень надо возвести 2008, чтобы получить 57 в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?

Задача 18*. Докажите, что любое поле либо содержит «копию» поля $\mathbb{Q}$, либо содержит «копию» одного из полей $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Отношение порядка

листок 15 / сентябрь 2005

Определение 1. Бинарное отношение $\leqslant$ на множестве M называется отношением *линейного порядка*, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\forall a, b \in M$ $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$;
2) $\forall a \in M$ $a \leqslant a$ (рефлексивность);
3) $\forall a, b \in M$ $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность);
4) $\forall a, b, c \in M$ $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (транзитивность).

Задача 1. Опишите все отношения линейного порядка на множестве из трех элементов.

Задача 2. Все ли условия в определении 1 существенны?

Определение 2. *Упорядоченным полем* называется поле, на котором введено отношение порядка, согласованное с операциями сложения и умножения, т. е. такое отношение линейного порядка, что

1) $\forall a, b, c$ $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$;
2) $\forall a, b, c$ $a \leqslant b$ и $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$.

Задача 3. Докажите, что:

а) если $a \leqslant b$, то $-b \leqslant -a$; б) если $a \leqslant b$ и $c \leqslant 0$, то $bc \leqslant ac$; в) $0 \leqslant 1$.

Задача 4*. Докажите, что упорядоченное поле бесконечно.

Задача 5. Сформулируйте и докажите несколько известных вам свойств неравенств.

Определение 3. Пусть $\mathscr{F}$ — упорядоченное поле. *Множеством неотрицательных чисел* поля F называется множество $P = \{x \in \mathscr{F} \mid x \geqslant 0\}$.

Задача 6. а) Сформулируйте и докажите несколько свойств множества неотрицательных чисел.

б*) Придумайте равносильное определение упорядоченного поля следующего вида: «поле, в котором выделено множество, удовлетворяющее свойствам 1–…, называется упорядоченным полем».

Определение 4. Пусть $a, b > 0$. Определим «средние» чисел a и b следующим образом:

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ — \textit{среднее арифметическое;}}$$
$$G = \sqrt{ab} \text{ — \textit{среднее геометрическое;}}$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ — \textit{среднее квадратичное;}}$$

$$H = \frac{2}{1/a+1/b} \text{ — \textit{среднее гармоническое.}}$$

Задача 7. Докажите, что если $a, b > 0$, то $\min(a, b) \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant S_2 \leqslant$ $\leqslant \max(a, b)$.

Задача 8*. Сформулируйте определения «средних» для n чисел и докажите аналог предыдущей задачи.

Задача 9. Докажите, что:
а) $\exists k \in \mathbb{N}$: $1{,}000001^k > 1000000$; б) $\exists k \in \mathbb{N}$: $0{,}999999^k < 0{,}0000001$.

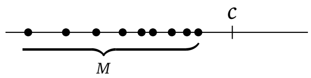
Задача 10. Докажите, что если произведение двух положительных чисел не меньше их суммы, то сумма не меньше четырех.

Задача 11. Докажите, что:
а) $x + 1/x \geqslant 2$ при $x > 0$; б) $a/b + b/c + c/a \geqslant 3$ при $a, b, c > 0$.

Действительные числа

листок 16 / октябрь 2005

Определение 1. Пусть $\mathscr{F}$ — упорядоченное поле, $M \subset \mathscr{F}$. Число $c \in \mathscr{F}$ называется *верхней гранью* множества M, если $\forall m \in M\ m \leqslant c$.



Множество $M \subset \mathscr{F}$ называется *ограниченным сверху*, если оно имеет верхнюю грань.

Задача 1. Дайте определение нижней грани множества; множества, ограниченного снизу; множества, неограниченного снизу; множества, неограниченного сверху.

Определение 2. Множество M называется *ограниченным*, если $\exists c \in \mathscr{F}\colon \forall m \in M\ |m| \leqslant c$.

Задача 2. Докажите, что M ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено сверху и снизу.

Задача 3. Верно ли, что каждая нижняя грань множества $M \subset \mathscr{F}$ строго меньше каждой верхней грани этого множества?

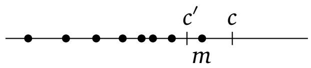
Верно ли, что каждая нижняя грань множества $M \subset \mathscr{F}$ не больше каждой верхней грани этого множества?

Определение 3. Число c называется *точной верхней гранью* множества $M \subset \mathscr{F}$, если

1) $\forall m \in M\ m \leqslant c$;

2) $\forall c' \in \mathscr{F}\ c' < c \Rightarrow \exists m \in M\colon c' < m$.

Обозначение: $\sup M$.



Задача 4. а) Дайте определение точной нижней грани. Обозначение: $\inf M$.

б) Напишите отрицание определения 3.

Задача 5. а) Пусть M — непустое подмножество поля $\mathscr{F}$. Пусть M_s — множество верхних граней M; M_i — множество нижних граней M. Докажите, что если $M_s \neq \varnothing$ и $M_i \neq \varnothing$, то $\sup M_i = \inf M$; $\inf M_s = \sup M$.

б) Докажите, что любое множество имеет не более одной точной верхней (нижней) грани.

Задача 6. Укажите, для каких из следующих подмножеств $\mathbb{Q}$ существуют (в $\mathbb{Q}$) inf и sup и найдите их:

а) $M=\left\{m_k \mid m_k=\frac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}\right\}$;
б) $M=\left\{m_k \mid m_k=\frac{(-1)^k}{k},\ k\in\mathbb{N}\right\}$;
в) $M=\{m_k \mid m_k=k^{(-1)^k},\ k\in\mathbb{N}\}$;
г) $M=\{a+b \mid -1\leqslant a<3;\ -4<b\leqslant 2\}$;
д) $M=\{ab \mid -1\leqslant a<3;\ -4<b\leqslant 2\}$.

Задача 7. Пусть $A, B\subset\mathscr{F}$, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ и существуют $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$, $\sup B$. Обозначим $A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$, $A\cdot B=\{ab \mid a\in A,\ b\in B\}$.

Найдите: а) $\inf(A+B)$; б) $\sup(A\cdot B)$;

в) Докажите, что если $A\cap B\neq\varnothing$, то $\min(\inf A, \inf B)\leqslant\inf(A\cup B)\leqslant\leqslant\inf(A\cap B)\leqslant\sup(A\cap B)\leqslant\sup(A\cup B)\leqslant\max(\sup A, \sup B)$.

Задача 8. Докажите, что множество рациональных чисел, квадрат которых меньше 2, не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней грани.

Определение 4. Упорядоченное множество называется *полным*, если у любого его ограниченного сверху непустого подмножества есть точная верхняя грань.

Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*.

Утверждение (без доказательства). Поле действительных чисел единственно. Обозначение: $\mathbb{R}$.

Задача 9*. Объясните, что означает написанное выше утверждение про единственность поля действительных чисел.

Задача 10. Докажите, что любое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.

Определение 5. Подмножество $M\subset\mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если $1\in M$ и $m\in M \Rightarrow m+1\in M$.

Определение 6. Наименьшее (содержащееся в любом другом) индуктивное подмножество $\mathbb{R}$ называется *множеством натуральных чисел*. Обозначение: $\mathbb{N}$.

Задача 11. Докажите, что (для данного множества действительных чисел) множество натуральных чисел существует и единственно.

Задача 12. Докажите, что в любом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 14

Задача 13. Докажите, что $-1 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$.

Определение 7. $2 = 1 + 1$.

Задача 14. $2 \in \mathbb{N}$.

Задача 15 (аксиома Архимеда). Докажите, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $n > x$.

Определение 8. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Отрезком* с концами a и b называется множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Определение 9. Последовательность $[a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, такая что $[a_i, b_i] \supset \supset [a_{i+1}, b_{i+1}]$, называется *последовательностью вложенных отрезков*.

Задача 16. а) (*Принцип вложенных отрезков.*) Докажите, что каждая последовательность вложенных отрезков имеет (хотя бы один) общий элемент.

б) Докажите, что общий элемент единственен, если и только если $\forall \varepsilon > 0\ \exists i \in \mathbb{N}$: $b_i - a_i < \varepsilon$ (длины отрезков стремятся к нулю).

Задача 17. Докажите, что:

а*) не существует взаимно однозначного отображения между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$;

б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Задача 18* (Дедекиндовы сечения). Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$, причем $\forall a \in A$, $b \in B$ $a \leqslant b$. Докажите, что $\exists c \in \mathbb{R}$: $\forall a \in A$, $b \in B$ $a \leqslant c \leqslant b$. Верно ли это утверждение для $\mathbb{Q}$?

Задача 19*. Докажите утверждение о единственности действительных чисел.

Задача 20* (игра Банаха—Мазура на $\mathbb{Q}$). Рассмотрим следующую игру. Двое по очереди выбирают отрезки так, что каждый следующий отрезок вложен в предыдущий. Таким образом они строят последовательность вложенных отрезков. Если пересечение состоит из одного числа и оно рационально, то выигрывает первый. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 21*. Дайте определение вещественной степени положительного вещественного числа так, чтобы сохранялись все известные свойства степени.

Соглашение. В следующих листках этой задачей можно пользоваться без доказательства.

Счетные и несчетные множества

листок 5д / октябрь 2005

Определение 1. Два множества A и B называются *равномощными*, если между ними существует биекция. Обозначение: $|A|=|B|$.

Говорят также, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($|A|\leqslant|B|$), если существует инъекция (вложение) из A в B.

Задача 1. Докажите, что «отношение» равномощности является «отношением» эквивалентности.

Замечание. Слово «отношение» в условии задачи взято в кавычки, так как обычно рассматривают отношения, заданные на каком-то *множестве* (а множества всех множеств не существует). Если по каким-то причинам игнорировать эту трудность не получается, то можно рассматривать отношение равномощности на каком-либо множестве множеств (например, на множестве всех подмножеств какого-нибудь множества).

Задача 2. Какие из следующих множеств равномощны:
а) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}\setminus\{1\}$; б) два отрезка разной длины;
в) интервал и полуокружность без концов; г) интервал и прямая;
д) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$; е) интервал и отрезок?

Определение 2. Множество A называется *бесконечным*, если при добавлении нового элемента мощность A не меняется. В противном случае множество A называется *конечным*.

Определение 3. Бесконечное множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел. В противном случае оно называется *несчетным*.

Задача 3. Докажите, что непустое множество конечно, если и только если оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n.

Задача 4. Докажите, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Задача 5. Пусть A — счетно, B — счетно (конечно). Что можно сказать про объединение, пересечение и разность A и B?

Задача 6. Докажите, что объединение а) конечного, б) счетного числа счетных множеств счетно.

Задача 7. Пусть множество A — счетно, B — не более чем счетно и непусто. Что можно сказать про их (декартово) произведение $A\times B = \{(x, y) \mid x\in A, y\in B\}$?

Задача 8. Докажите, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел несчетно.

Задача 9. Докажите, что множество рациональных чисел счетно.

Задача 10. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся интервалов на прямой, не более чем счетно[1].

Задача 11. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся кругов на плоскости, не более чем счетно.

Задача 12. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся букв Т на плоскости, не более чем счетно.

Задача 13. Докажите, что множество конечных последовательностей нулей и единиц счетно.

Задача 14. Докажите, что следующие множества несчетны:
а) множество всех подмножеств натуральных чисел;
б) множество бесконечных последовательностей нулей и единиц;
в) множество всех биекций из множества натуральных чисел в себя.

Задача 15*. Докажите, что все множества предыдущей задачи равномощны между собой и равномощны множеству действительных чисел.

Задача 16* (теорема Кантора—Бернштейна). Докажите, что из $|A|\leqslant|B|$ и $|A|\geqslant|B|$ следует $|A|=|B|$.

[1] То есть счетно или конечно.

Бесконечные десятичные дроби

листок 17 / декабрь 2005

Определение 1. $3=2+1$, $4=3+1$, $5=4+1$, $6=5+1$, $7=6+1$, $8=$ $=7+1$, $9=8+1$, $10=9+1$.

Определение 2. Запись вида $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$, где каждое из a_i является цифрой (т. е. одним из десяти знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и $a_n \neq 0$, называется *десятичной записью натурального числа*.

Задача 1. Дайте определение *значения* десятичной записи натурального числа.

Задача 2. Дайте определения *десятичной записи целого числа* и ее *значения*.

Определение 3. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где A — десятичная запись натурального числа либо 0, а α_i — цифры, называется *конечной десятичной дробью*. Если запись начинается со знака плюс, то при написании его часто опускают.

Задача 3. Дайте определение *значения* конечной десятичной дроби.

Задача 4. а) Запишите в виде конечной десятичной дроби числа $\frac{42}{125}$, $-\frac{57}{1250}$, $\frac{13}{25}$.

б) Запишите в виде обыкновенной дроби числа $-7{,}23$; $4{,}165$; $-3{,}6489$.

Определение 4. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, где A — десятичная запись натурального числа либо 0, а α_i — цифры, называется *бесконечной десятичной дробью* (БДД).

Определение 5. *Значением* бесконечной десятичной дроби $\pm A{,}\alpha_1\ldots$ называется число $\pm\sup\{A{,}\alpha_1\ldots\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$. БДД с равными значениями называются *близнецами*.

Задача 5. Докажите корректность определения 5.

Задача 6. Запишите в виде БДД: $-\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{19}{33}$.

Задача 7. Запишите в виде обыкновенной дроби: 15,(2); −2,(08); 3,(9).

Задача 8. Докажите, что для любого действительного числа x существует хотя бы одна БДД, значение которой равно x.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 18

Определение 6. БДД $A,\alpha_1\ldots$ называется *периодической*, если существуют такие натуральные k и n, что для всех $l \geqslant k$ выполнено $\alpha_{l+n} = \alpha_l$. Наименьшее возможное n называется *периодом* БДД.

Задача 9. Докажите, что БДД периодична тогда и только тогда, когда ее значение рационально.

Задача 10. Докажите, что множество периодических БДД счетно.

Задача 11. Докажите, что две БДД являются близнецами тогда и только тогда, когда до некоторой позиции они совпадают, а дальше имеют вид $a99\ldots$ и $(a+1)00\ldots$

Задача 12. Докажите, что периоды дробей $\frac{37}{2005}$ и $\frac{1968}{2005}$ равны.

Определение 7. БДД $A,\alpha_1\ldots$ *не меньше* БДД $B,\beta_1\ldots$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $A > B$;

2) $A = B$ и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $\alpha_k = \beta_k$ при $k < n$ и $A \cdot \alpha_n > A \cdot \beta_n$;

3) $A,\alpha_1\ldots$ и $B,\beta_1\ldots$ — близнецы.

Задача 13. Докажите, что одна неотрицательная БДД не меньше другой тогда и только тогда, когда значение первой не меньше значения второй.

Задача 14. Дайте определения суммы и произведения конечных десятичных дробей.

Задача 15*. Сформулируйте определение действительных чисел в терминах БДД. Докажите равносильность этого определения определению из листка «Действительные числа».

Задача 16*. Докажите, что в любой БДД можно так переставить цифры, чтобы она стала периодической.

Предел последовательности

листок 18 / декабрь 2005

Определение 1. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, называется *ε-окрестностью* точки (числа) a и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Определение 2. Говорят, что *почти все* элементы бесконечного множества удовлетворяют некоторому свойству, если этому свойству не удовлетворяет лишь конечное число элементов данного множества.

Задача 1. Какие из следующих утверждений верны для почти всех натуральных n?

а) n — составное. б) $n^4-1000n^3-10000>0$.

в) Найдутся такие $l, k\in\mathbb{N}$, что $n=3k+4l$.

г) Сумму в n рублей можно разменять купюрами по a и b рублей.

Определение 3. *Бесконечной числовой последовательностью* называется отображение $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Обозначение: (x_n).

Подпоследовательностью последовательности (x_n) называется последовательность $(x_{\varphi(n)})$, где $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — строго возрастающее отображение.

Определение 4. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит почти все члены этой последовательности.

Определение 5. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}\colon \forall n>k\ |x_n-a|<\varepsilon.$$

Обозначения и терминология: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $x_n\to a$ при $n\to\infty$, последовательность (x_n) сходится (стремится) к a.

Задача 2. Докажите равносильность этих определений.

Задача 3. Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

Задача 4. Запишите явно определение того, что последовательность (x_n) не имеет предела.

Задача 5. Какие из следующих последовательностей имеют пределы? Найдите эти пределы:

а) $1, -\frac12, \frac13, -\frac14, \ldots$; б) $1, 2, 3, \ldots$; в) $-1, 1, -1, 1, \ldots$;

г) $0, \frac12, 0, \frac13, 0, \frac14, \ldots$; д) $q, q+q^2, q+q^2+q^3, \ldots$;

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 20

е) 0,2, 0,22, 0,222, …; ж) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$, $1\frac{1}{8}$, …

Определение 6. Последовательность (x_n) называется *монотонно убывающей* (*невозрастающей*, *возрастающей*, *неубывающей*), если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$, $x_n < x_{n+1}$, $x_n \leqslant x_{n+1}$).

Определение 7. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если множество ее членов $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. В противном случае последовательность (x_n) называется *неограниченной*.

Задача 6. Докажите, что если (x_n) — монотонно неубывающая ограниченная последовательность, то (x_n) сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Задача 7. Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограниченна. Верно ли обратное?

Определение 8. Говорят, что последовательность (x_n) *стремится к бесконечности*, если

$$\forall C > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \forall n > k \quad |x_n| > C.$$

Обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Задача 8. Дайте определение окрестности бесконечности так, чтобы предыдущее определение можно было переформулировать следующим образом: говорят, что последовательность *стремится к бесконечности*, если любая окрестность бесконечности содержит почти все члены этой последовательности.

Задача 9. Определите следующие понятия: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Задача 10. Какие из следующих последовательностей ограниченны? стремятся к бесконечности? неограниченны?

а) $x_n = n$; б) $x_n = (-1)^n n$; в) $x_n = n^{(-1)^n}$; г) $x_n = \frac{100n}{100+n^2}$;

д) $x_n = \begin{cases} n & \text{при четном } n; \\ \sqrt{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$

Определение 9. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит бесконечное число членов этой последовательности.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 21

Определение 10. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \exists n > k\colon \ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Задача 11. Докажите равносильность последних двух определений.

Задача 12. а) Докажите, что предел является предельной точкой. Верно ли обратное утверждение?

б) Докажите, что у сходящейся последовательности ровно одна предельная точка.

в) Верно ли, что последовательность, имеющая ровно одну предельную точку, сходится?

Задача 13. Найдите предельные точки последовательностей из задачи 5.

Задача 14. Докажите, что a — предельная точка последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда у последовательности (x_n) есть подпоследовательность, сходящаяся к a.

Задача 15*. Может ли множеством предельных точек последовательности быть: а) множество натуральных чисел; б) множество рациональных чисел?

Задача 16* (теорема Больцано—Вейерштрасса). а) Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

б) Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Прогрессии

листок 19 / январь 2006

Определение 1. *Арифметической прогрессией* называется последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

где $n \in \mathbb{N}$. Число d называется *разностью арифметической прогрессии*.

Задача 1. Вычислите сумму первых n членов арифметической прогрессии.

Задача 2. Докажите, что каждый член (кроме первого) арифметической прогрессии равен среднему арифметическому равноотстоящих от него членов. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Задача 3. а) Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая лишь из простых чисел?

б*) Докажите, что найдется конечная арифметическая прогрессия длины 4, состоящая из простых чисел.

в**) Докажите, что найдется конечная арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины, состоящая из простых чисел.

г**) Докажите, что в любой арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с разностью, бесконечно много простых чисел.

Определение 2. *Геометрической прогрессией* называется последовательность вида

$$b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots,\ bq^n,\ \ldots,$$

где $b \neq 0$, $q \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Число q называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Задача 4. Вычислите сумму и произведение первых n членов геометрической прогрессии.

Задача 5. Докажите, что квадрат каждого члена (кроме первого) геометрический прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Определение 3. Геометрическая прогрессия, у которой модуль знаменателя меньше 1, называется *бесконечно убывающей*.

Задача 6. Докажите, что бесконечно убывающая геометрическая прогрессия стремится к 0.

Определение 4. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, (S_n) — последовательность ее частичных сумм. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то он называется *суммой геометрической прогрессии*

Задача 7. Докажите, что сумма бесконечной геометрической прогрессии существует, если и только если прогрессия бесконечно убывающая. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем q.

Задача 8. Известно, что при любом натуральном n сумма первых n членов некоторой последовательности выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найдите 10-й член этой последовательности и докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Задача 9. Найдите произведение P первых n членов геометрической прогрессии, если известно, что их сумма равна S_1, а сумма чисел, обратных первым n членам прогрессии, равна S_2.

Задача 10. Дана арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_n > 0$ для всех натуральных чисел. Докажите, что $a_n < b_n$ при $n > 2$.

Задача 11. Известно, что каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии отличается постоянным множителем K от суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, начинающейся со следующего номера. Какое значение может принимать K?

Задача 12. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

Задача 13*. Докажите, что для того чтобы отличные от нуля числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являлись n последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы при каждом целом $k \leqslant n$ выполнялось равенство

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}a_k} = \frac{k-1}{a_1a_k}.$$

Определение 5. Будем говорить, что несколько прогрессий *покрывают натуральный ряд*, если каждое натуральное число является членом хотя бы одной из этих прогрессий.

Задача 14. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть а) двумя; б) тремя; в*) четырьмя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными единице.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 24

Задача 15*. Укажите пять арифметических прогрессий с различными целыми разностями, не равными единице, покрывающих натуральный ряд.

Задача 16. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть конечным числом геометрических прогрессий.

Задача 17. Докажите, что найдется n такое, что

а) $1+1/2+\ldots+1/n>10$,

б) $1+1/2+\ldots+1/n$ больше любого наперед заданного числа.

Задача 18. Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, … Существует ли арифметическая прогрессия а) длины 5; б) сколь угодно большой длины, составленная из членов этой последовательности?

Задача 19. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых отсутствует ноль. Докажите, что сумма обратных величин любого количества из этих чисел (несовпадающих) не превосходит некоторого числа C.

Арифметика пределов

листок 20 / февраль 2006

Задача 1. Пусть (x_n) и (y_n) — последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Какие из следующих утверждений верны?

а) Если для почти всех n выполнено $x_n = y_n$, то последовательность y_n сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

б) Если для почти всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$, то последовательность (y_n) сходится, причем $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

в) Если для почти всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$ и последовательность (y_n) сходится, то $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

г) Если для почти всех n выполнено $x_n < y_n$ и последовательность (y_n) сходится, то $A < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Определение 1. Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если ее предел равен 0. Обозначение: $(\alpha_n) = o(1)$.

Задача 2. Какие из следующих последовательностей бесконечно малы:

а) $\frac{1}{n}$; б) $\frac{n}{2^n}$; в) $\frac{n^5}{2^n}$; г) $\frac{n^2+2n+5}{n^3}$; д) $\frac{1{,}1^n}{n^{10}}$?

Задача 3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечно малая последовательность (α_n), что $x_n = a + \alpha_n$.

Задача 4. Какие из следующих утверждений верны:

а) сумма (разность) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

в) частное бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

г) произведение бесконечно малой последовательности на произвольную есть бесконечно малая;

д) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая?

Задача 5. Дайте определение бесконечно большой последовательности. Сформулируйте и докажите свойства бесконечно больших последовательностей, аналогичные свойствам бесконечно малых последовательностей.

Задача 6. Докажите, что если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

а) последовательность $(x_n \pm y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

б) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

в) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Подумайте, что означает это утверждение в случае, когда $y_n = 0$ для некоторых n.

Задача 7. Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — бесконечно большая последовательности без нулевых членов. Докажите, что $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ — бесконечно большая, а $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ — бесконечно малая.

Задача 8. Если последовательность (α_n) бесконечно малая и $|x_n| \leqslant |\alpha_n|$ для почти всех n, то последовательность (x_n) — бесконечно малая.

Задача 9 (принцип двух милиционеров). Докажите, что если последовательности (x_n) и (z_n) сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для почти всех n выполнено неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то последовательность (y_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Задача 10. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$; б) $x_n = \frac{a_1 n^2 + b_1 n + c_1}{a_2 n^2 + b_2 n + c_2}$; в) $x_n = \frac{n^2 \sin n!}{n^3+1}$;

г) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; д) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; е*) $x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Задача 11. Докажите, что монотонно возрастающая неограниченная последовательность стремится к $+\infty$.

Задача 12. Докажите, что при перестановке членов последовательности предел не меняется.

Задача 13. Докажите, что существуют пределы и найдите их для следующих последовательностей:

а) $x_n = c^n$ $(|c| < 1)$; б) $x_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}$;

в) $x_1 = 1/2$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$; г) $x_n = \frac{c^n}{n!}$; д) $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$.

Задача 14. Докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} = 0$.

Задача 15. Придумайте две последовательности, у каждой из которых существует единственная предельная точка 57, а у их суммы существует единственная предельная точка 0.

Задача 16*. а) Докажите, что последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходятся и их пределы равны.

б) Докажите, что последовательность $z_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ сходится к тому же пределу.

Этот предел обозначается буквой e.

Ряды. Часть 1

листок 21 / март 2006

Определение 1. Пусть $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Точная верхняя грань S частичных сумм ряда с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется *суммой ряда*, т. е. $S = \sum a_n = \sup\{S_n \mid S_n = a_1 + \ldots + a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Обозначение: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, сокращенно $S = \sum a_n$. Если у ряда существует сумма, то он называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Задача 1. Докажите, что ряд a_n с положительными a_n сходится тогда и только тогда, когда существует такое B, что $a_1 + \ldots + a_n < B$ для любого n.

Задача 2 (составление уравнений). Найдите:

а) $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n}$ $(a > 0, q > 1)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Задача 3. Докажите, что $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$, $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$ (при $\lambda > 0$) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \ldots + a_k + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$.

Задача 4 (перестановка слагаемых). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Задача 5. а) Докажите, что если $a_n > 0$ для $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция («перестановка»), то $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$.

б*) Придумайте ряд (с произвольными a_n) и такую перестановку $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $\sum a_n \neq \sum a_{\sigma(n)}$.

Задача 6 (умножение рядов). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2 \cdot 2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Задача 7. а) Докажите, что если $a_n, b_n > 0$, то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0).$$

б*) Верно ли это без условия $a_n, b_n > 0$?

Задача 8. Найдите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{n^2}{2^n}$.

Задача 9 (преобразование Абеля). Докажите, что

а) $\sum\limits_{n=1}^{m} b_n(a_{n-1}-a_n)=a_0b_0-a_mb_m-\sum\limits_{n=1}^{m} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1}-a_n)=a_0b_0-\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$ (сформулируйте самостоятельно условия, при которых верна эта формула).

Задача 10 (разложение на простейшие дроби). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$;

е*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$.

Ряды. Часть 2

листок 22 / апрель 2006

Определение 1. Ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *сходящимся*, если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ его частичных сумм имеет конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число S называется *суммой ряда*. Обозначение: $S=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Определение 2. Ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела (в частности, если $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$).

Задача 1. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Верно ли обратное утверждение?

Задача 2. Сходятся ли следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-100}{10000n+100000}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-100}{10000n+100000}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$?

Задача 3. Определите, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Задача 4. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$, где $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, также сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\beta\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Определение 3. Последовательность a_n называется *фундаментальной*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\colon \forall m,n>N\quad |a_m-a_n|<\varepsilon.$$

Задача 5 (критерий Коши). Докажите, что последовательность сходится, если и только если она фундаментальна.

Определение 4. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *мажорируется* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\exists N\in\mathbb{N}\colon \forall n>N\ |b_n|\leqslant a_n$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 31

Задача 6 (признак сравнения). Докажите, что если мажорирующий ряд сходится, то мажорируемый тоже сходится, а если мажорируемый ряд расходится, то мажорирующий тоже расходится.

Задача 7. Определите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+n^2)}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$.

Задача 8 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с положительными членами. Тогда если $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ $\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда в случае $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$?

Задача 9. Установите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Задача 10 (признак Коши). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$?

Задача 11. Установите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$.

Определение 5. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Задача 12. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 6. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся*.

Задача 13. Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$ и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то *знакопеременный ряд* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ сходится. Существенно ли здесь условие монотонности (a_n)?

Задача 14. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2+1}{n^3+1}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$.

Задача 15. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится абсолютно. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, полученный из предыдущего ряда произвольной перестановкой его членов, также сходится, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Задача 16. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Докажите, что ряд, составленный из положительных (отрицательных) членов этого ряда, стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Задача 17 (теорема Римана). а) Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Тогда его можно превратить перестановкой членов как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперед заданной суммой.

б*) Дайте определение сходящегося ряда из векторов на плоскости.

в**) Дан ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ из векторов на плоскости. Тогда множество сумм рядов, получающихся из данного перестановкой членов, либо пусто, либо одна точка, либо прямая, либо вся плоскость.

Задача 18. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

а) Докажите, что ряд условно сходится;

б*) переставьте члены ряда таким образом, чтобы полученный ряд расходился.

Задача 19*. Постройте пример последовательности (a_i), для которой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^3$ расходится.

Задача 20*. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 33

Неравенства

листок 6д / май 2006

Соглашение. В этом листке буквами a, b, c, d, a_i, b_i обозначены неотрицательные числа, а буквами x, y, z — произвольные действительные числа.

Задача 1. Сравните числа:

а) $1234567\cdot 1234569$ и 1234568^2; б) 31^{11} и 17^{14};

в) $\frac{1}{5001}+\frac{1}{5002}+\ldots+\frac{1}{5100}$ и $\frac{1}{49}$.

Задача 2. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

Задача 3. Докажите, что:

а) $x^2-6x+9\geqslant 0$; б) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$; в) $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$;

г) $2a+b+c\geqslant 4\sqrt[4]{a^2bc}$; д) $2a+b\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b}$.

Задача 4. а) Докажите, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>1$.

б*) Докажите, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

Определение 1. Определим средние набора чисел $a_1,\ldots,a_n$ следующим образом:

$$A=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \quad \text{— среднее арифметическое,}$$

$$G=\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \quad \text{— среднее геометрическое,}$$

$$S_2=\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \quad \text{— среднее квадратичное,}$$

$$H=\frac{n}{1/a_1+\ldots+1/a_n} \quad \text{— среднее гармоническое.}$$

Задача 5 (неравенство о средних). Докажите, что $S_2\geqslant A\geqslant G\geqslant H$, причем равенство достигается только в случае $a_1=\ldots=a_n$ а) при $n=2^k$; б) для любых n. Неравенство $A\geqslant G$ называется также неравенством Коши.

Задача 6. Пусть $abcd=1$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+{}$ $+ad+bc+bd+cd\geqslant 10$.

Задача 7. Докажите, что:

а) $x^4+y^4+z^2\geqslant 2\sqrt{2}xyz$; б) $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geqslant 5\sqrt[5]{ab}$;

в) $\sqrt[n+1]{ab^n}\leqslant\frac{a+nb}{n+1}$; г) $x^4-x+0{,}5>0$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 34

Задача 8 (неравенство Юнга). Пусть $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и а) $p, q \in \mathbb{Q}$; б) $p, q \in \mathbb{R}$. Докажите, что $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (напомним, что a и b — неотрицательные действительные числа).

Задача 9 (обобщенное неравенство о средних). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \geqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$.

Задача 10*. Докажите, что при любых $a, b > 0$, для которых $a + b = 1$, верно неравенство $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant 12{,}5$.

Задача 11* (неравенство Коши—Буняковского—Шварца). Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Задача 12*. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}.$$

Задача 13*. Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Задача 14* (неравенство Гёльдера). Докажите, что для любых $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

При каких a_i, b_i достигается равенство?

Задача 15*. В условиях предыдущей задачи докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} = \max_{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q = 1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Задача 16* (неравенство Минковского). Докажите, что при $p > 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p}.$$

Топология прямой. Открытые и замкнутые множества

листок 7д / апрель 2006

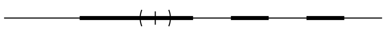
Задача 1. а) Докажите, что у любого положительного числа найдется окрестность, целиком состоящая из положительных чисел. Верно ли это утверждение для неотрицательных чисел?

б) Докажите, что в любой окрестности любого действительного числа найдется как рациональное так и иррациональное число.

в) Докажите, что у любого действительного числа найдется окрестность, содержащая не более одного натурального числа.

г) Докажите, что у любых двух различных действительных числе найдутся непересекающиеся окрестности.

Определение 1. Точка множества $A \subset \mathbb{R}$ называется *внутренней*, если в A целиком содержится некоторая окрестность этой точки. Подмножество $A \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние.



Задача 2. а) Сформулируйте предыдущее определение на языке кванторов.

б) Сформулируйте отрицание предыдущего определения.

в) Приведите примеры открытых множеств и множеств, не являющихся открытыми.

Задача 3. а) Докажите, что пустое множество и всё $\mathbb{R}$ открыты.

б) Докажите, что объединение (любого числа) открытых множеств открыто.

в) Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

г) Верно ли, что пересечение любого числа открытых множеств открыто?

Определение 2. Множество $\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ называется *проколотой ε-окрестностью* точки a.

Определение 3. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой его проколотой ε-окрестности есть точки множества A. Точка, не являющаяся предельной, называется *изолированной*.

Замечание. Другими словами, точка a называется предельной для множества A, если существуют отличные[2] от a элементы множества A, сколь угодно близкие к a.

Определение 4. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой его ε-окрестности[3] содержится бесконечно много точек множества A.

Определение 5. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если существует последовательность, сходящаяся к a, все члены которой принадлежат $A \setminus \{a\}$.

Задача 4. Докажите эквивалентность трех последних определений.

Задача 5. Найдите все внутренние и все предельные точки следующих множеств:

а) $\mathbb{R}$, б) произвольное конечное подмножество $\mathbb{R}$, в) $\varnothing$, г) $\mathbb{Z}$,
д) $[0, 1]$, е) $(0, 1)$, ж) $\{1/n \,|\, n \in N\}$, з) положительные числа,
и) неотрицательные числа, к) рациональные числа,
л) иррациональные числа, м*) множество чисел, хотя бы в одном троичном разложении которых нет цифры 1.

Задача 6. а) Верно ли, что предельная точка последовательности является предельной точкой множества членов этой последовательности?

б) Верно ли, что предельная точка множества членов последовательности является предельной точкой этой последовательности?

Задача 7. Докажите, что любое бесконечное подмножество отрезка имеет предельную точку.

Замечание. На прямой аналогичное утверждение неверно — контрпример дает, например, множество целых чисел.

Определение 6. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 8. а) Какие из множеств задачи 5 открыты? А какие замкнуты?

б) Бывают ли подмножества $\mathbb{R}$, замкнутые и открытые одновременно?

в) Верно ли, что любое подмножество $\mathbb{R}$ либо замкнуто, либо открыто?

---

[2]Именно для этого в определении используются *проколотые* окрестности — иначе любой элемент множества был бы его предельной точкой.

[3]Обычной (а не проколотой).

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 37

Задача 9. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Задача 10. а) Докажите, что пересечение (любого числа) замкнутых множеств замкнуто. б) Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Определение 7. Объединение множества A и множества его предельных точек A' называется *замыканием* множества A. Обозначение: $\bar{A}$.

Задача 11. Докажите, что замыкание любого множества замкнуто.

Задача 12*. Докажите, что любое открытое множество является объединением не более чем счетного числа интервалов.

Определение 8. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *всюду плотным*, если $\bar{A} = \mathbb{R}$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *нигде не плотным*, если $\bar{A}$ не имеет внутренних точек.

Задача 13. Какие из множеств задачи 5 всюду плотны? Нигде не плотны?

Задача 14. а) Верно ли, что дополнение до всюду плотного множества нигде не плотно?

б) Верно ли, что дополнение до нигде не плотного множества всюду плотно?

Задача 15*. На окружности расположена ловушка длины ε, а в некоторой точке вне ловушки сидит точечный заяц. Заяц прыгает по окружности, каждый раз на одно и тоже расстояние $x\pi$. При каких x заяц рано или поздно попадет в ловушку, независимо от ее размера и начального расположения?

Задача 16*. В каждой точке целочисленной решетки на плоскости посажена кукуруза фиксированного диаметра. Охотник стреляет из начала координат в некотором направлении. Докажите, что он никогда не промахнется.

Задача 17* (теорема Бэра). Докажите, что отрезок $[0, 1]$ нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Задача 18* (компактность отрезка). Пусть отрезок $[0, 1]$ содержится в объединении а) счетного; б) произвольного множества интервалов. Докажите, что из этих интервалов можно выбрать конечное подмножество, объединение которых содержит отрезок $[0, 1]$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 38

Задача 19*. Решите аналог предыдущей задачи, заменив интервалы на произвольные открытые множества.

Задача 20*. Множество $X \subset \mathbb{R}$ содержится в объединении некоторого множества интервалов. Докажите, что можно выбрать счетное подмножество интервалов, объединение которых содержит X.

Определение 9. Множество называется *совершенным*, если оно совпадает со множеством своих предельных точек.

Задача 21*. Приведите пример нигде не плотного совершенного множества.

Задача 22*. а) Докажите, что совершенное множество имеет мощность континуум.

б) Докажите, что любое замкнутое подмножество прямой есть объединение совершенного и не более чем счетного множеств.

в) (*Континуум-гипотеза для замкнутых множеств.*) Докажите, что замкнутое подмножество прямой либо не более чем счетно, либо равномощно отрезку.

Поля

листок 14 / сентябрь 2005

Первое полугодие девятого класса посвящено в основном построению действительных чисел. Это, с одной стороны, закладывает надежный фундамент для курса анализа, а с другой — позволяет естественно познакомиться с многими важными понятиями и идеями математики. Наконец, при этом отрабатывается навык работы с объектами, заданными аксиоматически.

Как нередко бывает, полезно сначала рассмотреть более общую ситуацию, поэтому наше построение действительных чисел начинается с обсуждения понятия поля.

Первая часть листка представляет собой набор упражнений в абстрактной алгебре: даются аксиомы поля и предлагается доказать несложные следствия из них. Только после этого рассматриваются примеры. Вероятно, самый важный из них — поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Построение $\mathbb{Q}$ — первый конкретный шаг к действительным числам — завершается в задаче 11.

Другой класс примеров — конечные поля остатков по простым модулям (они играют важную роль в теории чисел). Разницу между конечными полями и рациональными числами иллюстрируют задачи по арифметике остатков по простому модулю из последней части листка.

С точки зрения собственно теории полей наибольший интерес представляют задачи 8 и 18. Но стоит иметь в виду, что они (особенно первая) существенно сложнее большинства других задач листка.

Соглашение. В этом листке буква p обозначает простое число.

Определение 1. Пусть на множестве $\mathcal{F}$ заданы две бинарные операции: сложение «$+$» и умножение «$\cdot$», удовлетворяющие следующим аксиомам:

1) $\forall a, b \in \mathcal{F}\ \ a+b=b+a$ (*коммутативность сложения*);

2) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ \ (a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения*);

3) $\exists 0 \in \mathcal{F}\colon \forall a \in \mathcal{F}\ \ a+0=a$ (*существование нуля*);

4) $\forall a \in \mathcal{F}\ \ \exists b \in \mathcal{F}\colon a+b=0$ (*существование противоположного элемента*);

5) $\forall a, b \in \mathcal{F}\ \ ab=ba$ (*коммутативность умножения*);

6) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ \ (ab)c=a(bc)$ (*ассоциативность умножения*);

7) $\exists 1 \in \mathcal{F}\setminus\{0\}\colon \forall a \in \mathcal{F}\ \ a\cdot 1=a$ (*существование единицы*);

8) $\forall a \in \mathcal{F}\setminus\{0\}\ \exists b \in \mathcal{F}\colon ab=1$ (*существование обратного элемента*);

9) $\forall a, b, c \in \mathscr{F}\ a(b+c) = ab + ac$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Такое множество $\mathscr{F}$ с двумя бинарными операциями называется *полем*.

С примерами полей мы, на самом деле, уже неоднократно встречались — это разные *числа*: рациональные, вещественные, комплексные (формально все эти объекты пока не определены, но иметь в виду их стоит), а также остатки по простому модулю. А приведенные выше аксиомы — это просто систематизация некоторых из наиболее важных свойств, которым все такие числа удовлетворяют.

Такая систематизация позволяет не доказывать аналогичные утверждения отдельно для вещественных чисел, отдельно для комплексных чисел и т. д., а вывести их один раз из аксиом поля и потом просто проверять, что очередной построенный объект является полем.

Таким образом, аксиоматическое определение поля позволяет переносить доказанные утверждения и выработанную интуицию.

Определение 2. Элемент b из аксиомы 4 называется противоположным к a и обозначается $-a$; элемент b из акиомы 8 называется обратным к a и обозначается a^{-1}. Сумма $a+(-b)$ записывается в виде $a-b$ и называется *разностью* элементов a и b; произведение ab^{-1} записывается в виде $\frac{a}{b}$ и называется *частным* элементов a и b.

Единственность противоположного и единственность обратного доказываются ниже.

Задача 1. Докажите, что

а) $((a+b)+c)+d = a+(b+(c+d))$;

б) в $\mathscr{F}$ существует ровно один нуль;

в) для каждого x в $\mathscr{F}$ существует лишь один противоположный элемент;

г) элемент, противоположный сумме, есть сумма элементов, противоположных слагаемым;

д) $-(-a) = a$;

е) уравнение $a+x=b$ имеет в $\mathscr{F}$ единственное решение $x=b-a$.

Решение. а) $((a+b)+c)+d = (a+b)+(c+d) = a+(b+(c+d))$. Здесь мы два раза воспользовались аксиомой ассоциативности.

Из решения видно, что при сложении скобки можно писать в любом порядке, поскольку результат не зависит от их расстановки (формально это можно доказать по индукции).

б) Предположим, что существует два нуля 0_1 и 0_2. Тогда, по определению нуля (и пользуясь коммутативностью), $0_1+0_2=0_1$ и $0_1+0_2=0_2$, следовательно, $0_1=0_2$.

в) Предположим, что существуют различные b_1 и b_2 такие, что $a+b_1=0$ и $a+b_2=0$. Но тогда $b_1=b_1+(a+b_2)=(b_1+a)+b_2=b_2$.

г) Заметим, что для любых a_1 и a_2 выполняется $a_1+(-a_1)+a_2+ +(-a_2)=0$. Воспользовавшись коммутативностью, перепишем это равенство в виде $(a_1+a_2)+((-a_1)+(-a_2))=0$. Мы доказали, что элемент $(-a_1)+(-a_2)$ противоположен сумме a_1 и a_2. Осталось воспользоваться единственностью противоположного элемента.

д) Поскольку $-(-a)+(-a)=0$ и $a+(-a)=0$, утверждение задачи следует из единственности противоположного элемента.

е) Если $a+x=b$, то $(-a)+a+x=-a+b$, т. е. $x=b-a$.

Задача 2. Докажите, что:

а) $((ab)c)d=a(b(cd))$;

б) в $\mathscr{F}$ существует ровно одна единица;

в) для каждого $x\neq 0$ в $\mathscr{F}$ существует лишь один обратный элемент;

г) элемент, обратный произведению, есть произведение элементов, обратных сомножителям;

д) $(a^{-1})^{-1}=a$;

е) уравнение $ax=b$ $(a\neq 0)$ имеет в $\mathscr{F}$ единственное решение $x=ba^{-1}$.

Решение. Решения всех пунктов этой задачи полностью аналогичны решениям соответствующих пунктов задачи 1, надо лишь заменить операцию сложения на операцию умножения, слова «противоположный элемент» на слова «обратный элемент», а ноль — на единицу.

Задача 3. Докажите, что: а) $a\cdot 0=0$; б) $(-1)\cdot a=-a$; в) $a^2=(-a)^2$.

Решение. а) Заметим, что $a=a\cdot 1=a\cdot(0+1)=a\cdot 0+a\cdot 1=a\cdot 0+a$. Получаем, что $a=a\cdot 0+a$, из чего следует $a\cdot 0=0$.

б) $0=0\cdot a=(-1+1)\cdot a=(-1)\cdot a+a$, следовательно, $-a=(-1)\cdot a$.

в) Сначала покажем, что $(-1)\cdot(-1)=1$: в самом деле, $0=(-1)\cdot 0= =(-1)\cdot(-1+1)=(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1$. В общем же случае $(-a)^2= =(-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot a=(-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot a=1\cdot a\cdot a=a\cdot a$.

Задача 4. Существует ли элемент, обратный к нулю?

Решение. Нет, не существует. Если бы такой элемент существовал, то его произведение с нулем равнялось бы единице. Но, по задаче 3а), произведение любого элемента с нулем равно нулю.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 42

Задача 5*. Верно ли, что множество $\mathscr{F}$ с операциями «+» и «·» является полем тогда и только тогда, когда:

1) $(\mathscr{F}, +)$ — коммутативная группа;
2) $(\mathscr{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ — коммутативная группа;
3) $\forall a, b, c \in \mathscr{F} \ \ a(b+c) = ab + ac$?

Решение. Неверно: можно взять какое-нибудь поле и изменить умножение, положив $0 \cdot x = x$. Чтобы утверждение стало верным, достаточно потребовать коммутативности умножения (в условии коммутативность требуется только для ненулевых элементов).

Задача 6. Пусть $ab = 0$. Докажите, что $a = 0$ или $b = 0$.

Решение. Предположим, что $a \neq 0$. Тогда $0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}ab = 0 = 1 \cdot b$, следовательно, $b = 0$.

Эта задача дает удобный способ доказывать, что что-то полем не является. Например, если число n не является простым, то кольцо $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ остатков по модулю n полем не является (так как тогда $n = ab$ — т. е. $ab \equiv 0 \pmod{n}$ для ненулевых остатков a и b).

Задача 7. Докажите, что: а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Решение. а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) = \frac{ac}{bd}$.

б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) + (c \cdot d^{-1}) = (a \cdot d \cdot d^{-1} \cdot b^{-1}) + (c \cdot b \cdot b^{-1} \cdot d^{-1}) =$
$= (ad + bc) \cdot (b^{-1}d^{-1}) = \frac{ad+bc}{bd}$.

Задача 8. Существует ли поле из: а) одного элемента; б) двух элементов; в) трех элементов; г) пяти элементов; д) p элементов (p простое); е*) шести элементов; ж*) 4 элементов; з*) p^2 элементов (p простое)?

Решение. а) Нет, не существует. В поле должно быть как минимум два элемента — 0 и 1.

б) Да, это поле состоит из 0 и 1, таблица сложения и умножения такая же, как в остатках по модулю 2.

в) Да, существует. Рассмотрим множество остатков по модулю данного простого числа p. В листке «Сравнения» уже вводились операции сложения и умножения на этом множестве, и, кроме того, доказывались свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности этих операций. Нулем, очевидно, является нулевой остаток, а единицей — единичный. Заметим, что аксиома о существовании обратного элемента (тот факт, что $\forall a\ \exists b$: $ab \equiv 1 \pmod{p}$) верна в том и только том случае, когда p — простое. Остальные восемь аксиом поля верны для всех p (объекты, в которых выполнены эти восемь аксиом, называются *кольцами*).

Решение следующих трех пунктов естественно отложить до момента, когда появится чуть больше алгебраической техники, поэтому ограничимся набросками решений.

г) Нет, не существует. Можно показать, что в таком поле $2\cdot 3=6=0$. Случай $3=0$, $2\neq 0$ (пусть поле состоит из 0, 1, 2, a, $a+1$, $a+2$; чему может быть равно $2a$?). Но и случай $2=0$ невозможен (пусть поле состоит из 0, 1, a, $a+1$, b, $b+1$; чему может быть равно $a+b$?).

д) Да, существует. В качестве элементов можно взять выражения 0, 1, θ и $\theta+1$, а операции задать условиями $1+1=0$ и $\theta^2=\theta+1$ (например, $(1+\theta)^2=1+2\theta+\theta^2=1+0+\theta+1=\theta$).

е*) Да, существует. Пусть $\xi\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — элемент, не являющийся квадратом. Тогда в качестве элементов можно взять выражения вида $a+b\theta$ ($a, b\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, θ — формальный символ) с естественным сложением и умножением, заданным по правилу $\theta^2=\xi$ (ср. с комплексными числами — особенно при $p\equiv 3 \pmod 4$, когда можно взять $\xi=$ $=-1$).

Вообще, можно показать, что все конечные поля имеют $q=p^n$ элементов, где p — простое (а именно, *характеристика поля* из задачи 18), причем для каждого такого q существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) поле с данным числом элементов — см. листок «Многочлены» за 10 класс.

Задача 9. Является ли полем множество $M=\{(a, b)\mid a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}\}$ со следующими операциями:

а) $(p_1, q_1)+(p_2, q_2)=(p_1+p_2, q_1+q_2)$,
$(p_1, q_1)\cdot(p_2, q_2)=(p_1\cdot p_2, q_1\cdot q_2)$;

б) $(p_1, q_1)+(p_2, q_2)=(p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2, q_1\cdot q_2)$,
$(p_1, q_1)\cdot(p_2, q_2)=(p_1\cdot p_2, q_1\cdot q_2)$?

Решение. а) Относительно таких операций нулем мог бы быть только элемент $(0, 0)$, но он не лежит в нашем множестве (так как $0\notin\mathbb{N}$). Отметим, что даже если расширить множество, разрешив второму элементу пары быть нулем, полем оно не станет — например, из-за противоречащего задаче 6 равенства $(0, 1)\cdot(1, 0)=(0, 0)$.

б) Заметим, что у элемента $(2, 2)$ (вообще, почти ни у какого элемента) нет обратного. Действительно, $(1, 1)\cdot(2, 2)\cdot(a, b)=(2a, 2b)\neq$ $\neq(1, 1)$.

Задача 10. Пусть $M=\{(a, b)\mid a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}\}$. Рассмотрим на M следующее отношение:

$$(a, b)\sim(c, d)\Longleftrightarrow ad=bc.$$

Докажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности.

Решение. 1) $(a,b)\sim(a,b)$, поскольку $ab=ab$.

2) Если $(a,b)\sim(c,d)$, то $ad=bc$, $bc=ad$ и, очевидно, $(c,d)\sim(a,b)$.

3) Если $(a,b)\sim(c,d)$ и $(c,d)\sim(e,f)$, то $ad=bc$ и $cf=ed$. Значит, $acdf=bcde$, $af=be$ и $(a,b)\sim(e,f)$.

Определение 3. Множество классов эквивалентности относительно отношения эквивалентности, описанного в предыдущей задаче, называется *множеством рациональных чисел*. Обозначение: $\mathbb{Q}$.

Класс эквивалентности элемента (a,b) принято обозначать $\frac{a}{b}$. Вместо $\frac{a}{1}$ допускается краткая запись a.

Эта конструкция позволяет по любому коммутативному кольцу, для которого выполнено условие задачи 6, построить некоторое поле — «поле частных кольца». Так из $\mathbb{Z}$ получается $\mathbb{Q}$, а из кольца многочленов — поле рациональных функций.

Задача 11. Введите на $\mathbb{Q}$ операции сложения и умножения так, чтобы $\mathbb{Q}$ стало полем.

Решение. Если мы хотим, чтобы $\mathbb{Q}$ было полем, то операции над выражениями вида $\frac{a}{b}$ должны удовлетворять равенствам задачи 7. Возьмем теперь эти равенства за определение операций сложения и умножения: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. Проверка аксиом остается в качестве упражнения.

Задача 12. Вычислите:

а) $\frac{1}{3}$ в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; б) $\frac{2}{5}$ в $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; в) $\frac{5}{57}$ в $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; г) $\frac{2008}{57}$ в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Решение. а) Поскольку $3\cdot5=15\equiv1 \pmod 7$, то $\frac{1}{3}=5$ в $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

б) Поскольку $5\cdot3=15\equiv2 \pmod{13}$, то $\frac{2}{5}=3$ в $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

в) Заметим, что $57 \bmod 3=0$. Если бы существовал такой $x\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, что $x\cdot0\equiv5 \pmod 3$, это бы противоречило задаче 3а).

г) Заметим, что $2008\equiv3 \pmod 5$ и $57\equiv2 \pmod 5$. Так как $2\cdot4\equiv3 \pmod 5$, получаем, что $\frac{2008}{57}=4$ в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Задача 13. Сколько решений имеет уравнение $x^2+1=0$ в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Q}$; е) $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; ж*) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p — простое)?

Решение. Заметим, что если a — корень рассматриваемого уравнения, то $x^2+1=x^2-a^2=(x-a)(x+a)$. Поэтому a и $-a$ — все корни этого уравнения (при других x получается произведение ненулевых сомножителей).

Теперь перейдем непосредственно к задаче.

а) $1^2+1=1+1=0$ — одно решение.

б) $1^2+1=2$ и $(-1)^2+1=2$ — решений нет.

в) $3^2+1=0$ и $2^2+1=0$ — два решения.

г) Решений нет.

д) Для любого $x \in \mathbb{Q}$ имеем $x^2+1>0$, откуда следует, что решений нет.

е) $5^2+1 \equiv 0 \pmod{13}$ и $(-5)^2+1 \equiv 8^2+1 \equiv 0 \pmod{13}$ — два решения, других, следовательно, не существует.

ж) Ограничимся ответом: если $p=4k+1$, то решений ровно два, если же $p=4k+3$, то решений нет. Это следует из того, что ненулевые остатки по модулю p как группа по умножению изоморфна $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ (см. также комментарий к последней задаче листка «Целые числа 3» за 8 класс).

Вообще, можно показать, что уравнение $x^2=a$ имеет решения в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ (из этого следует и последний пункт).

Задача 14. Сколько решений имеет уравнение $x^2=2$ в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Q}$; е) $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; ж*) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Решение. а) В $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $2=0$, уравнение $x^2=0$ имеет одно решение $x=0$.

б) В $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $1^2=1$, $2^2=1$ — решений нет ни одного.

в) В $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ решений также ни одного: $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=4$, $4^2=1$.

г) В $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ опять нет решений: $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=5$, $5^2=3$, дальше остатки симметрично повторяются, поскольку $a^2=(-a)^2$.

д) В $\mathbb{Q}$ у этого уравнения нет ни одного решения. Действительно, если $(p/q)^2=2$, то $p^2=2q^2$; но в разложение левой части на простые двойка входит в четной степени, а в разложение левой — в нечетной.

е) В $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ решений нет: $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=3$, $5^2=12$, $6^2=10$, дальше остатки повторяются.

ж) Ограничимся ответом: у уравнения два решения при $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$, одно при $p=2$ и нет решений в остальных случаях.

Задача 15. Вычислите 2^2, 2^3, …, 2^{10} в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Q}$.

Решение. а) В $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, очевидно, все числа — нули.

б) В $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $2^2=1$, $2^3=2^1=2$, а дальше значения повторяются с периодом два.

в) В $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $2^2=4$, $2^3=1$, $2^4=2$, дальше значения повторяются с периодом три.

(Нетрудно видеть, что повторение начинается с того момента, когда мы получим единицу.)

г) В $\mathbb{Q}$ $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$.

Задача 16. Вычислите 57^{2008} в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$; д) $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$; е) $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$.

Ответ. а) 1; б) 1; в) 3; г) 0; д) 1; е) 0.

Решение. а) В $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $57=1$, а единица в любой степени равна единице.

б) В $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $57=2$. Заметим, что $2^4\equiv 1 \pmod 5$, а значит, $57^{2008}\equiv (2^4)^{502}\equiv 1 \pmod 5$.

в) В $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ $57=2$. Поскольку $2^{10}\equiv 1 \pmod{11}$, $2^{2008}\equiv (2^{10})^{200}\cdot 2^8\equiv 2^8\equiv 3 \pmod{11}$.

г) В $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ $57=0$, а любая степень нуля — ноль.

д) В $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ $57=-1$, а $(-1)^{2008}=((-1)^2)^{1004}=1^{1004}=1$.

е) $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$ полем не является (см. задачу 6 и комментарий к ней); 57^{2008} в этом *кольце* равняется нулю.

Задача 17. В какую степень надо возвести 2008, чтобы получить 57 в следующих полях: а) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$; г) $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?

Ответ. а) $3+4n$; б) $2n$; в) $9+10n$; г) такой степени не существует.

Решение. а) В $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $2008=3$, а $57=2$. Но $3^1=3$, $3^2=4$, $3^3=2$, $3^4=1$, дальше остатки повторяются по циклу.

б) В $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ $2008=-1$, а $57=1$, следовательно, $2008^{2n}\equiv 57 \pmod 7$.

в) В $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ $2008=6$, а $57=2$. Подсчетом остатков получаем, что $6^9\equiv 2 \pmod{11}$. По малой теореме Ферма $6^{10}\equiv 1 \pmod{11}$, поэтому $6^{9+10n}\equiv 57 \pmod{11}$. Можно показать, что других степеней нет.

г) В $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ $2008=2$, а $57=6$. Степени двойки по модулю 17 имеют вид $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=-1$, $2^5=-2$, $2^6=-4$, $2^7=-8$, $2^8=-16=1$, а дальше они повторяются по циклу. Значит, решений нет.

Задача 18*. Докажите, что любое поле либо содержит «копию» поля $\mathbb{Q}$, либо содержит «копию» одного из полей $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Набросок решения. Рассмотрим в нашем поле $\mathscr{F}$ все суммы $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ и так далее. Если никакая из них не равна нулю, то значит, и никакая из сумм $(-1)+\ldots+(-1)$ не равна нулю. Значит, в наше поле $\mathscr{F}$ вложены целые числа. Но поскольку в поле мы можем еще и делить, там находятся также и все рациональные числа.

Теперь предположим, что нашлось такое p, что $\underbrace{1+\ldots+1}_{p}=0$. Рассмотрим наименьшее из всех таких p. Тогда оно обязано быть простым: если $p=rs$, то $(\underbrace{1+\ldots+1}_{r})\cdot(\underbrace{1+\ldots+1}_{s})=0$, откуда $(\underbrace{1+\ldots+1}_{r})=$ $=0$ или $(\underbrace{1+\ldots+1}_{s})=0$. Это простое число p называется *характеристикой поля*. Нетрудно видеть, что мы можем теперь взаимно однозначно отобразить множество остатков по модулю p на множество 1, $1+1$, …, $\underbrace{1+\ldots+1}_{p}=0$.

Отношение порядка

листок 15 / сентябрь 2005

Для описания структуры, которой обладают действительные числа, в предыдущем листке было введено понятие поля. Но как мы видели, среди полей кроме объектов, явно связанных с действительными числами (например, рациональных чисел), встречаются и совершенно непохожие на них объекты (например, конечные поля). Чтобы избавиться от таких примеров, для определения действительных чисел нам понадобится еще одна структура — отношение порядка.

Отношение линейного порядка — это возможность определить на элементах абстрактного множества или поля «отношение больше-меньше», обладающее основными свойствами известного всем отношения больше-меньше на числах (поэтому интуиция, связанная с отношением порядка на числах, часто помогает при работе с произвольными линейными порядками).

Это листок тоже четко делится на две части: абстрактные упражнения в доказательстве простых следствий из аксиом в начале и конкретные задачи на неравенства в духе школьной алгебры в конце.

> **Определение 1.** Бинарное отношение $\leqslant$ на множестве M называется отношением *линейного порядка*, если выполнены следующие аксиомы:
> 1) $\forall a, b \in M$ $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$;
> 2) $\forall a \in M$ $a \leqslant a$ (рефлексивность);
> 3) $\forall a, b \in M$ $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность);
> 4) $\forall a, b, c \in M$ $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (транзитивность).

Хотя в определении не сказано, что означает запись $a \geqslant b$, нетрудно дать соответствующее определение: будем говорить, что $a \geqslant b$, если $b \leqslant a$. Вспомогательные определения такого типа можно просить школьников дать самостоятельно.

> **Задача 1.** Опишите все отношения линейного порядка на множестве из трех элементов.

Решение. Пусть в нашем множестве имеется три элемента. Назовем их a, b и c. По аксиоме 1, для любых двух различных элементов x и y имеется всего две возможности: либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$ (причем по аксиоме 3 обе возможности одновременно реализовываться не могут). Поэтому существует не более восьми отношений порядка на элементах a, b и c:

1) $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, $a \leqslant c$;
2) $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, $c \leqslant a$ (невозможно);

3) $a \leqslant b$, $c \leqslant b$, $a \leqslant c$;
4) $a \leqslant b$, $c \leqslant b$, $c \leqslant a$;
5) $b \leqslant a$, $b \leqslant c$, $a \leqslant c$;
6) $b \leqslant a$, $b \leqslant c$, $c \leqslant a$;
7) $b \leqslant a$, $c \leqslant b$, $a \leqslant c$ (невозможно);
8) $b \leqslant a$, $c \leqslant b$, $c \leqslant a$;

В случаях 2 и 7 нарушается четвертая аксиома, значит, они отпадают.

Видно, что все шесть оставшихся случаев укладываются в один и тот же шаблон: $x \leqslant y \leqslant z$. Поэтому введенное нами отношение порядка и называется линейным — все элементы «выстраиваются в линию»:

$$x \leqslant y \leqslant z$$

Это иллюстрирует следующий факт: число способов задать отношение линейного порядка на множестве из n элементов равно числу перестановок n элементов.

Задача 2. Все ли условия в определении 1 существенны?

Решение. Нет. Условие 2 можно вывести из условия 1, положив b равным a.

Формально на этом решение задачи можно закончить, но все же полезно разобраться, существенны ли остальные условия (например, можно ли придумать такое бинарное отношение $\lhd$, что оно удовлетворяет аксиомам 1 и 2, но не удовлетворяет аксиоме 3).

Пример отношения, для которого не выполнена только первая аксиома, (такие отношения называют *частичными порядками*) дает отношение равенства.

Пример отношения, для которого не выполнена только третья, — $a \lhd b$ для всех a и b.

Наконец, типичный пример отношения, для которого не выполнена только последняя аксиома, — «a не проиграл b в турнире в один круг» (если ничьих не было).

Определение 2. *Упорядоченным полем* называется поле, на котором введено отношение порядка, согласованное с операциями сложения и умножения, т. е. такое отношение линейного порядка, что

1) $\forall a, b, c\ a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$;
2) $\forall a, b, c\ a \leqslant b$ и $0 \leqslant c \Rightarrow ac \leqslant bc$.

Задача 3. Докажите, что:

а) если $a \leqslant b$, то $-b \leqslant -a$; б) если $a \leqslant b$ и $c \leqslant 0$, то $bc \leqslant ac$; в) $0 \leqslant 1$.

Решение. а) Прибавим к обеим частям неравенства $a \leqslant b$ выражение $(-b-a)$ (воспользовавшись первой аксиомой определения 2): $a + (-b-a) \leqslant b + (-b-a) \iff -b \leqslant -a$.

б) Прибавив к обеим частям неравенства $c \leqslant 0$ по $-c$ (аксиома 1), получаем, что $0 \leqslant -c$. Значит, по аксиоме 2, можно обе части неравенства $a \leqslant b$ умножить на $(-c)$: $-ac \leqslant -bc$. После этого прибавим к обеим частям неравенства выражение $(ac+bc)$ и получим требуемое.

в) От противного. Предположим, что $1 \leqslant 0$. Домножим обе части неравенства на единицу, которая, по нашему предположению, меньше нуля. Воспользовавшись предыдущим пунктом, заключаем, что $0 \cdot 1 \leqslant 1 \cdot 1 \iff 0 \leqslant 1$, а это противоречит предположению (так как в поле $0 \neq 1$).

Задача 4*. Докажите, что упорядоченное поле бесконечно.

Решение. Предположим, что мы нашли конечное упорядоченное поле $\mathscr{F}$. По индукции можно доказать, что в нем существует наибольший элемент (то есть такой элемент x, что $\forall a \in \mathscr{F}\ a \leqslant x$).

Так как x является элементом поля, то и $x+1$ является элементом поля. Но x — наибольший элемент. Значит, $x+1 \leqslant x$. Прибавив к обеим частям неравенства элемент $-x$, получим, что $1 \leqslant 0$, а это противоречит утверждению задачи 3.

Задача 5. Сформулируйте и докажите несколько известных вам свойств неравенств.

Решение. • Если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, то $a+c \leqslant b+d$.

Доказательство: по аксиоме 1 определения 2 имеем: $a \leqslant b$, $c \leqslant d \Rightarrow a+c \leqslant b+c \leqslant b+d$. Следовательно, по аксиоме 4 определения 1 $a+c \leqslant b+d$.

• Если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, то $a-d \leqslant b-c$.

Это утверждение следует из предыдущего пункта.

• Если $0 \leqslant a \leqslant b$ и $0 \leqslant c \leqslant d$, то $ac \leqslant bd$.

Доказательство: по аксиоме 2 определения 2 имеем: $0 \leqslant a \leqslant b$, $0 \leqslant c \leqslant d \Rightarrow ac \leqslant bc \leqslant bd$. Следовательно, по аксиоме 4 определения 1 $ac \leqslant bd$.

• Если $0 \leqslant a \leqslant b$, то $a^2 \leqslant b^2$.

Это утверждение тривиально следует из предыдущего пункта.

• Если $0 \leqslant a \leqslant b$ и $0 < c \leqslant d$, то $a/d \leqslant b/c$.

Доказательство следует из пункта б). Следует лишь заметить, что $0 < c \leqslant d \iff 0 < d^{-1} \leqslant c^{-1}$.

Определение 3. Пусть $\mathscr{F}$ — упорядоченное поле. *Множеством неотрицательных чисел* поля F называется множество $P = \{x \in \mathscr{F} \mid x \geqslant 0\}$.

Задача 6. а) Сформулируйте и докажите несколько свойств множества неотрицательных чисел.

б*) Придумайте равносильное определение упорядоченного поля следующего вида: «поле, в котором выделено множество, удовлетворяющее свойствам 1—…, называется упорядоченным полем».

Решение. а) *Сумма двух неотрицательных чисел является неотрицательным числом.*

Это утверждение является следствием первого свойства из предыдущей задачи.

Произведение двух неотрицательных чисел является неотрицательным числом.

Это утверждение является следствием второго пункта предыдущей задачи.

Квадрат любого числа есть неотрицательное число.

Действительно, если $a \geqslant 0$, то по задаче 5 $a^2 \geqslant 0 \cdot 0 = 0$. Если же $a \leqslant 0$, то $-a \geqslant 0$ и (опять-таки, по задаче 5) $(-a)(-a) = a^2 \geqslant 0$.

б) Ограничимся ответом. Упорядоченное поле — это поле, в котором выделено подмножество «положительных элементов» P, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) если $a, b \in P$, то $ab \in P$;

2) если $a, b \in P$, то $a + b \in P$;

3) $1 \in P$;

4) $P \cup (-P) \cup \{0\} = \mathscr{F}$, где $(-P)$ — множество всех элементов, противоположных к элементам множества P.

Определение 4. Пусть $a, b > 0$. Определим средние чисел a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2} && \text{— \textit{среднее арифметическое;}}\\ G &= \sqrt{ab} && \text{— \textit{среднее геометрическое;}}\\ S_2 &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} && \text{— \textit{среднее квадратичное;}}\\ H &= \frac{2}{1/a+1/b} && \text{— \textit{среднее гармоническое.}} \end{aligned}$$

Задача 7. Докажите, что если $a, b > 0$, то $\min(a, b) \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant S_2 \leqslant$ $\leqslant \max(a, b)$.

Решение. Пусть для определенности $a \leqslant b$. Тогда:

$$1.\ a \leqslant \frac{2}{1/a+1/b} \Leftarrow a \leqslant \frac{2ab}{a+b} \Leftarrow a^2 + ab \leqslant 2ab \Leftarrow a^2 - ab \leqslant 0 \Leftarrow$$
$$\Leftarrow a(a-b) \leqslant 0 \Leftarrow (a-b) \leqslant 0.$$

2. $\frac{2}{1/a+1/b}\leqslant\sqrt{ab} \Leftarrow \frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab} \Leftarrow 2ab\leqslant\sqrt{ab}(a+b) \Leftarrow$
$$\Leftarrow 4a^2b^2\leqslant ab(a+b)^2 \Leftarrow 4ab\leqslant a^2+2ab+b^2 \Leftarrow$$
$$\Leftarrow 0\leqslant a^2-2ab+b^2 \Leftarrow 0\leqslant(a-b)^2.$$

Последнее выполняется в силу задачи 6.

3. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2} \Leftarrow 2\sqrt{ab}\leqslant a+b \Leftarrow 4ab\leqslant a^2+2ab+b^2 \Leftarrow 0\leqslant(a-b)^2.$

Последнее выполняется в силу задачи 6.

4. $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2} \Leftarrow$
$$\Leftarrow a^2+2ab+b^2\leqslant 2a^2+2b^2 \Leftarrow 0\leqslant a^2+b^2-2ab \Leftarrow 0\leqslant(a-b)^2.$$

5. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b \Leftarrow \frac{a^2+b^2}{2}\leqslant b^2 \Leftarrow \frac{a^2}{2}\leqslant\frac{b^2}{2} \Leftarrow a^2\leqslant b^2 \Leftarrow a\leqslant b.$

Задача 8*. Сформулируйте определения «средних» для n чисел и докажите аналог предыдущей задачи.

Указание. См. решение задачи 5 листка «Неравенства».

Задача 9. Докажите, что:
а) $\exists k\in\mathbb{N}$: $1{,}000001^k>1000000$; б) $\exists k\in\mathbb{N}$: $0{,}999999^k<0{,}0000001$.

Решение. а) Возьмем, например, $k=10^{12}$ и раскроем $1{,}000001^k = (1+10^{-6})^{10^{12}}$ по биному Ньютона:

$$(1+10^{-6})^{10^{12}} = 1+C^1_{10^{12}}\cdot10^{-6}+C^2_{10^{12}}\cdot10^{-12}+\ldots = 1+10^6+C^2_{10^{12}}\cdot10^{-12}+\ldots>10^6.$$

б) Условие $0{,}999999^k<0{,}0000001$ можно переписать в виде

$$\left(\frac{999999}{1000000}\right)^k<\frac{1}{1000000} \iff 1000000<\left(\frac{1000000}{999999}\right)^k \iff 1000000<\left(1+\frac{1}{999999}\right)^k.$$

А это практически условие предыдущего пункта.

На самом деле, при решении этой задачи мы лишний раз доказали неравенство Бернулли, которым можно было воспользоваться и напрямую.

Задача 10. Докажите, что если произведение двух положительных чисел не меньше их суммы, то сумма не меньше четырех.

Решение. Если $ab \geqslant a+b$, то $\frac{ab}{a+b} \geqslant 1$, а $\frac{2ab}{a+b}$. Но $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{1/a+1/b}$ — это среднее гармоническое чисел a и b. По задаче 7 оно не превосходит среднего арифметического: $\frac{2}{1/a+1/b} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Следовательно, $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{1/a+1/b} \geqslant 2$, т. е. $a+b \geqslant 4$.

Задача 11. Докажите, что:
а) $x+1/x \geqslant 2$ при $x>0$; б) $a/b+b/c+c/a \geqslant 3$ при $a, b, c>0$.

Решение. а) Воспользуемся неравенством $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Положив $a=x$, $b=\frac{1}{x}$, получаем: $\frac{x+1/x}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \iff \frac{x+1/x}{2} \geqslant 1 \iff x+\frac{1}{x} \geqslant 2$.

б) Пусть для определенности элементы a, b и c упорядочены так: $a \geqslant b \geqslant c$. Вычтем и добавим в левую часть неравенства элемент $\frac{b}{a}$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3 \iff \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right) \geqslant 3.$$

Докажем, что первая скобка не меньше 2, а вторая не меньше 1. То, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, непосредственно следует из предыдущего пункта.

Теперь разберемся со второй скобкой:

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right) \geqslant 1 \Leftarrow a^2b+ac^2-abc \geqslant a^2c \Leftarrow$$
$$\Leftarrow a^2b+ac^2-abc-a^2c \geqslant 0 \Leftarrow a(a-c)(b-c) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство выполняется в силу нашего предположения об упорядоченности a, b и c.

Действительные числа

листок 16 / октябрь 2005

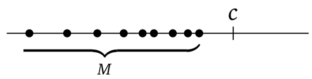
В предыдущем листке были определены упорядоченные поля — некоторые модели для арифметики (в частности, рациональные числа являются упорядоченным полем). Однако для определения действительных чисел этого недостаточно — дело в том, что в упорядоченном поле «могут быть дырки» — например, в рациональных числах не всегда возможно извлечь корень из числа и т. п.

Аксиоматический подход к борьбе с этим дефектом заключается в рассмотрении *полных* упорядоченных полей — такое определение действительных чисел и дается в этом листке. Для этого в листке развивается техника (точных) верхних граней. Такой подход восходит к Дедекинду, а также Кантору и Вейерштрассу, которые в девятнадцатом веке завершили построение системы действительных чисел.

Кратко обсуждаются другие вариации аксиоматического определения действительных чисел — принцип вложенных отрезков (важный и сам по себе), дедекиндовы сечения и аксиома Архимеда.

Основная цель листка — научиться работать с точными гранями и последовательностями вложенных отрезков, привыкнуть к этим понятиям. Попутно отрабатываются технические навыки формальных доказательств, работы с кванторами.

Определение 1. Пусть $\mathscr{F}$ — упорядоченное поле, $M\subset\mathscr{F}$. Число $c\in\mathscr{F}$ называется *верхней гранью* множества M, если $\forall m\in M\ m\leqslant c$.



Множество $M\subset\mathscr{F}$ называется *ограниченным сверху*, если оно имеет верхнюю грань.

Задача 1. Дайте определение нижней грани множества; множества, ограниченного снизу; множества, неограниченного снизу; множества, неограниченного сверху.

Решение. Число $c\in\mathscr{F}$ называется *нижней гранью* множества M, если $\forall m\in M\ m\geqslant c$.

Множество $M\subset\mathscr{F}$ называется *ограниченным снизу*, если оно имеет нижнюю грань.

Множество $M\subset\mathscr{F}$ называется *неограниченным снизу*, если оно не имеет ни одной нижней грани, т. е. $\forall c\ \exists m\in M\colon m\leqslant c$.

Множество $M\subset\mathscr{F}$ называется *неограниченным сверху*, если оно не имеет ни одной верхней грани, т. е. $\forall c\ \exists m\in M\colon m\geqslant c$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 55

Определение 2. Множество M называется *ограниченным*, если $\exists c\in \in\mathcal{F}\colon \forall m\in M\ |m|\leqslant c$.

Задача 2. Докажите, что M ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено сверху и снизу.

Решение. Предположим сначала, что M ограничено. Тогда, по определению, $\exists c\colon \forall m\in M\ |m|<c$. Поэтому $\forall m\in M\ -c<m$, откуда следует, что M ограничено снизу, и $\forall m\in M\ m<c$, откуда следует, что M ограничено сверху.

Докажем в обратную сторону. Пусть $\forall m\in M\ a<m$ и $\forall m\in M\ m<b$. Тогда рассмотрим $c=\max(|a|,|b|)$. Для числа c верно, что $\forall m\in M$ $|m|<c$, откуда заключаем, что M ограничено.

Задача 3. Верно ли, что каждая нижняя грань множества $M\subset\mathcal{F}$ строго меньше каждой верхней грани этого множества?

Верно ли, что каждая нижняя грань множества $M\subset\mathcal{F}$ не больше каждой верхней грани этого множества?

Решение. Для пустого множества оба предположения неверны, поскольку множество верхних и множество нижних граней совпадают с самим полем $\mathcal{F}$. Действительно, предположим, что какой-то элемент $x\in\mathcal{F}$ не является верхней гранью $\varnothing$ (для нижней доказательство аналогично). Тогда, по определению, существует элемент $m\in\varnothing$ такой, что $m>x$. Но множество $\varnothing$ пустое, и такой элемент существовать не может. Получаем противоречие.

Рассмотрим теперь случай одноэлементного множества $M=\{m\}$. Заметим, что m является как верхней, так и нижней гранью M. Поэтому в этом случае первое условие неверно, а второе верно, так как из того, что $x\leqslant m$ и $m\leqslant y$, следует $x\leqslant y$ для любых $x, y\in\mathcal{F}$.

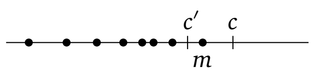
Если же во множестве M лежат как минимум два элемента, то второе (а значит, и первое) утверждение верно. Действительно, если $m_1\in M$, $m_2\in M$ и $m_1<m_2$, то для любой нижней грани x множества M имеем $x\leqslant m_1$, а для любой верхней грани y — что $m_2\leqslant y$. Значит, $x<y$, что и требовалось доказать.

Определение 3. Число c называется *точной верхней гранью* множества $M\subset\mathcal{F}$, если

1) $\forall m\in M\ m\leqslant c$;

2) $\forall c'\in\mathcal{F}\ c'<c \Rightarrow \exists m\in M\colon c'<m$.

Обозначение: $\sup M$.



v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 56

Первое условие означает, что c является верхней гранью M. А второе — что никакое число, меньшее c, верхней гранью не является.

Задача 4. а) Дайте определение точной нижней грани. Обозначение: $\inf M$.

б) Напишите отрицание определения 3.

Решение. а) Число d называется *точной нижней гранью* множества $M \subset \mathcal{F}$, если

1) $\forall m \in M \ m \geqslant c$;

2) $\forall c' \in \mathcal{F} \ c' > c \Rightarrow \exists m \in M\colon c' > m$.

б) По определению, если c *является* точной верхней гранью множества M, то должны одновременно выполняться два условия: что c — верхняя грань и что никакое число, меньшее c, верхней гранью не является. Тогда отрицание этого определения означает, что *хотя бы одно* из этих условий не выполняется. Теперь можно переписать то же самое с использованием кванторов.

Число c не является точной верхней гранью множества M, если выполнено хотя бы одно из условий:

1) $\exists m \in M\colon m > c$,

2) $\exists c' \in \mathcal{F}\colon \forall m \in M \ m < c' < c$.

Задача 5. а) Пусть M — непустое подмножество поля $\mathcal{F}$. Пусть M_s — множество верхних граней M; M_i — множество нижних граней M. Докажите, что если $M_s \neq \varnothing$ и $M_i \neq \varnothing$, то $\sup M_i = \inf M$; $\inf M_s = \sup M$.

б) Докажите, что любое множество имеет не более одной точной верхней (нижней) грани.

Решение. а) Докажем первое из этих утверждений (доказательство второго утверждения аналогично). Пусть $x = \sup M_i$. Если x — не нижняя грань M, то $\exists m \in M\colon m < x$. Следовательно, второе условие определения $\sup M_i$ не выполняется — противоречие. Значит, x — нижняя грань множества M.

Покажем, что она точная. Пусть y — какая-то другая нижняя грань множества M. Но тогда $y < x$, поскольку x — верхняя грань множества M_i. Это означает, что второе условие в определении точной нижней грани множества M также выполнено, и $\sup M_i = \inf M$.

б) Докажем, что точная верхняя грань единственна (для точной нижней грани доказательство аналогично). Если у множества есть две различные точные верхние грани p и q, то из того, что p — точная, получаем, что $p \geqslant q$, а из того, что q точная, получаем, что $q \geqslant p$. Следовательно, $p = q$.

Задача 6. Укажите, для каких из следующих подмножеств $\mathbb{Q}$ существуют (в $\mathbb{Q}$) inf и sup и найдите их:

а) $M = \left\{ m_k \mid m_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N} \right\}$;
б) $M = \left\{ m_k \mid m_k = \frac{(-1)^k}{k},\ k \in \mathbb{N} \right\}$;
в) $M = \{ m_k \mid m_k = k^{(-1)^k},\ k \in \mathbb{N} \}$;
г) $M = \{ a + b \mid -1 \leqslant a < 3;\ -4 < b \leqslant 2 \}$;
д) $M = \{ ab \mid -1 \leqslant a < 3;\ -4 < b \leqslant 2 \}$.

Ответ. а) $\inf M = 0$, $\sup M = 1$; б) $\inf M = -1$, $\sup M = 1/2$;
в) $\inf M = 0$, $\sup M$ не существует; г) $\inf M = -5$, $\sup M = 5$;
д) $\inf M = -12$, $\sup M = 6$.

Указание. Возможно, основной метод доказательства того, что какая-то верхняя грань a множества M является точной верхней, — это взять произвольное положительное ε, после чего рассмотреть число $a - \varepsilon$ и доказать, что между a и $a - \varepsilon$ непременно найдется элемент множества M. Соответственно, для того чтобы нижняя грань b была точной нижней, нужно доказать, что между b и $b + \varepsilon$ найдется хотя бы один элемент множества M.

Решение. а) В множестве M существует максимальный элемент — число 1, а максимальный элемент (если он существует) всегда является точной верхней гранью.

Докажем теперь, что 0 является точной нижней гранью. Так как $\forall x \in M\ x > 0$, это нижняя грань множества M. Теперь фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Тогда число $a = 1/(q+1) \in M$ меньше ε и, значит, ε не является нижней гранью, что и требовалось доказать.

б) Заметим, что у множества имеются максимальный и минимальный элементы.

в) Наше множество можно разбить на два: если k четно, то $m_k = k$, а если нечетно, то $m_k = 1/k$. Поэтому верхних граней — в частности, точной верхней грани — у него нет (так как нет верхней грани у множества четных натуральных чисел), а доказательство того, что $\inf M = 0$, аналогично пункту а).

г) Для любого $m \in M$ верно, что $-5 < m < 5$, значит, -5 и 5 — нижняя и верхняя грань соответственно. Докажем, что 5 — точная верхняя грань (то, что -5 — точная нижняя, доказывается аналогично). Но действительно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $a < 3$ и $b \leqslant 2$, такие что $5 - \varepsilon < a + b < 5$ — например, $a = 3 - \varepsilon/2$, $b = 2$. Значит, никакое число, меньшее 5, не может быть верхней гранью множества M.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 58

д) Для любого $m \in M$ верно, что $-12 < m < 6$, значит, -12 и 6 являются соответственно нижней и верхней гранью множества M. Докажем, что -12 — точная нижняя грань (то, что 6 — точная верхняя, доказывается аналогично). Нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in M$: $-12 < m < -12 + \varepsilon$. Возьмем числа $a = 3 - \varepsilon/7$, $b = -4 + \varepsilon/7$. Тогда $ab \in M$ и $ab = -12 + \varepsilon - (\varepsilon^2)/49$, что меньше $-12 + \varepsilon$.

Задача 7. Пусть $A, B \subset \mathscr{F}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ и существуют $\inf A$, $\sup A$, $\inf B$, $\sup B$. Обозначим $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

Найдите: а) $\inf(A + B)$; б) $\sup(A \cdot B)$;

в) Докажите, что если $A \cap B \neq \varnothing$, то $\min(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cup B) \leqslant \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.

Ответ. а) $\inf A + \inf B$.

б) Ответ существенно зависит от того, какие именно элементы — положительные, отрицательные или те и другие сразу — могут содержаться в A и B. В общем случае он выглядит так: $\max(\inf A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \sup A \cdot \sup B)$.

Указание. Первые два пункта этой задачи — обобщение предыдущей, и решаются они аналогично — с помощью метода «отступим на ε».

Решение. а) Решение аналогично решению предпоследнего пункта предыдущей задачи.

б) Докажем, что если $S_1 = \{\inf A, \sup A\}$ и $S_2 = \{\inf B, \sup B\}$, то $\max S_1 \cdot S_2 = \sup A \cdot B$. Ограничимся случаем, в котором все элементы S_1 и S_2 неотрицательны (остальные случаи оставляются читателю в качестве упражнения).

Пусть $P = \sup A$, $Q = \sup B$, тогда PQ является верхней гранью множества AB. Докажем, что PQ — точная верхняя грань, а именно рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что $PQ - \varepsilon$ верхней гранью не является. Поскольку A и B — точные верхние грани, существуют такие $a \in A$ и $b \in B$, что $a > P - \varepsilon/(P + Q)$, $b > Q - \varepsilon/(P + Q)$. Тогда $a \cdot b > PQ - \varepsilon + \varepsilon^2/(P + Q)^2 > PQ - \varepsilon$, т. е. $PQ - \varepsilon$ не является точной верхней гранью.

в) Первое неравенство следует из того, что $\min(\inf A, \inf B)$ является также и нижней гранью множества $A \cup B$, второе — из того, что если $C \subset D$, то $\inf C \leqslant \inf D$. Остальные им аналогичны.

Нетрудно показать, что на самом деле $\min(\inf A \cup \inf B) = \inf(A \cup B)$ и $\max(\sup A \cup \sup B) = \sup(A \cup B)$

Задача 8. Докажите, что множество рациональных чисел, квадрат которых меньше 2, не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней грани.

vo8-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 59

В этой задаче мы нигде не говорим о числе $\sqrt{2}$ — пока у нас нет никаких других чисел, кроме рациональных.

Указание. Если бы такая грань существовала, то ее квадрат был бы равен двум, что невозможно.

Решение. Докажем, что a^2 не может быть меньше 2 (то, что a^2 не может быть больше 2, доказывается аналогично). Предположим, что все же $a^2 = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим число $a + \delta$. Так как a — точная верхняя грань множества чисел, квадрат которых меньше 2, $(a+\delta)^2 > 2$. С другой стороны, $(a+\delta)^2 = a^2 + 2\delta a + \delta^2$, поэтому если нам удастся выбрать такое δ, что $2\delta a + \delta^2 < \varepsilon$, то $(a+\delta)^2$ окажется меньше 2, и мы получим противоречие. Для этого достаточно выбрать такое δ, что и $2\delta a$, и δ^2 меньше $\varepsilon/2$; поэтому подойдет, например, $\delta = \min(\varepsilon/4a, 1)$.

Но квадрат рационального числа не может быть равен $\sqrt{2}$ (см. задачу 14 листка «Поля»).

Определение 4. Упорядоченное множество называется *полным*, если у любого его ограниченного сверху непустого подмножества есть точная верхняя грань.

Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*.

Утверждение (без доказательства). Поле действительных чисел единственно. Обозначение: $\mathbb{R}$.

Вообще говоря, после такого определения остается вопрос, почему полные упорядоченные поля существуют. Ответом на него может являться явная конструкция действительных чисел. Действительные числа можно получить тем или иным способом *пополнив* рациональные. Самая явная из конструкций такого рода — бесконечные десятичные дроби — подробно обсуждается в одноименном листке.

Задача 9*. Объясните, что означает написанное выше утверждение про единственность поля действительных чисел.

Набросок решения. Полные упорядоченные поля можно строить поразному. При этом получаются совокупности совершенно разных объектов — действительными числами могут называться, например, бесконечные десятичные дроби, или классы эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел, или пары подмножеств рациональных чисел со специальными свойствами («дедекиндовы сечения»). Тем не менее, все *модели* поля действительных чисел «устроены одинаково», а точнее, *изоморфны*.

Изоморфизмом объектов с некоторой структурой часто называют взаимно однозначное отображение этих объектов, сохраняющее эту структуру. Например, изоморфизм групп — взаимно однозначное отображение, переводящее произведение элементов в произведение их образов, а единицу — в единицу.

Соответственно, изоморфизмом двух упорядоченных полей $\mathbb{R}_1$ и $\mathbb{R}_2$ называется взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2$, сохраняющее арифметические операции и упорядоченность. То есть $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$, и если $a < b$, то $f(a) < f(b)$. Отметим, что из последнего свойства следует, что изоморфизм сохраняет и точные верхние грани: $f(\sup A) = \sup f[A]$.

Задача 10. Докажите, что любое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.

Решение. Рассмотрим подмножество $\mathbb{R}$, состоящее из элементов исходного подмножества, взятых с противоположным знаком. Тогда, по определению поля действительных чисел, у него есть точная верхняя грань. Эта точная верхняя грань, взятая с противоположным знаком, и будет точной нижней исходного множества.

Определение 5. Подмножество $M \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если $1 \in M$ и $m \in M \;\Rightarrow\; m+1 \in M$.

Определение 6. Наименьшее (содержащееся в любом другом) индуктивное подмножество $\mathbb{R}$ называется *множеством натуральных чисел*. Обозначение: $\mathbb{N}$.

Определение натуральных чисел через действительные выглядит, конечно, неестественным. Обычно, наоборот, исходя из натуральных чисел, строят целые (замыкая относительно операции вычитания), исходя из целых — рациональные (замыкая относительно операции деления), а уже исходя из рациональных — действительные (пополняя).

В данном случае предполагается, что изначально есть лишь такой объект, как полное упорядоченное поле — и уже на его основе мы (пере)определяем привычные нам натуральные числа.

Цель следующего цикла задач не в том, чтобы дать экзотическое определение натуральных чисел, а в том, чтобы научиться работать с множествами типа «наименьшее множество с данными свойствами» (которые часто можно также описать как пересечение всех множеств с данными свойствами).

Задача 11. Докажите, что (для данного множества действительных чисел) множество натуральных чисел существует и единственно.

Решение. Единственность очевидна: если есть два наименьших индуктивных множества A и B, то $A \subset B$ и $B \subset A$, откуда $A = B$.

Существование доказывается явной конструкцией: пусть $\mathbb{N}$ — пересечение всех индуктивных подмножеств в $\mathbb{R}$. По своему определению $\mathbb{N}$ содержится в любом индуктивном подмножестве. Осталось проверить, что $\mathbb{N}$ является индуктивным. Но, действительно, единица лежит во всех индуктивных множествах, а значит, лежит и в их пересечении; если $x \in \mathbb{N}$, то x лежит во всех индуктивных множествах, а значит, и $x+1$ лежит во всех индуктивных множествах, т. е. и $x+1$ содержится в $\mathbb{N}$.

Задача 12. Докажите, что в любом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.

Это утверждение равносильно принципу математической индукции: стандартное доказательство последнего принципа опирается как раз на эту задачу.

Решение. Поскольку $\mathbb{N}$ — наименьшее индуктивное подмножество, то все числа от 1 до $1+1$ в нем не содержатся. Действительно, в противном случае мы могли бы выкинуть из $\mathbb{N}$ все числа, меньшие 2, кроме единицы, а индуктивность бы сохранилась. Отсюда следует, что и вообще, все числа от $x \in \mathbb{N}$ до $x+1$ в $\mathbb{N}$ также не содержатся.

Пусть теперь $A \subset \mathbb{N}$. Рассмотрим точную нижнюю грань a множества A (она существует, так как A ограничено снизу). Тогда если a не лежит в A, то $\exists b \in A$ такое, что $a < b < a+1$. Противоречие.

Задача 13. Докажите, что $-1 \notin \mathbb{N}$, $1/2 \notin \mathbb{N}$.

Решение. Заметим, что множество $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$ индуктивно. Следовательно, $\mathbb{N} \subset X$, откуда заключаем, что $-1 \notin \mathbb{N}$ и $1/2 \notin \mathbb{N}$ (поскольку $-1 < 1$ и $1/2 < 1$).

Определение 7. $2 = 1+1$.

Задача 14. $2 \in \mathbb{N}$.

Решение. По определению индуктивного множества, $x = 1 \in \mathbb{N}$, а также $x+1 = 1+1 = 2 \in \mathbb{N}$.

Задача 15 (аксиома Архимеда). Докажите, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$: $n > x$.

Отметим, что при данном определении действительных чисел «аксиома Архимеда» является теоремой, а не аксиомой.

Решение. Предположим, что это не так, т. е. $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда у него есть точная верхняя грань a. С одной стороны, из определения точной верхней грани следует, что в промежутке $(a-1/2, a)$ есть хотя бы одно натуральное число m. Но с другой стороны, тогда натуральное число $m+1$ будет больше a — получаем противоречие.

Важное следствие аксиомы Архимеда — существование рационального числа на любом интервале («плотность рациональных чисел в вещественных»).

Определение 8. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Отрезком* с концами a и b называется множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Определение 9. Последовательность $[a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$, такая что $[a_i, b_i] \supset \supset [a_{i+1}, b_{i+1}]$, называется *последовательностью вложенных отрезков*.

Задача 16. а) (*Принцип вложенных отрезков.*) Докажите, что каждая последовательность вложенных отрезков имеет (хотя бы один) общий элемент.

б) Докажите, что общий элемент единственен, если и только если $\forall \varepsilon > 0\ \exists i \in \mathbb{N}$: $b_i - a_i < \varepsilon$ (длины отрезков стремятся к нулю).

Принцип вложенных отрезков можно также рассматривать как аксиому — возможную замену аксиоме полноты действительных чисел. Но аксиома полноты сильнее: как показывает пункт а), принцип вложенных отрезков следует из полноты; но чтобы вывести полноту из принципа вложенных отрезков, необходима еще аксиома Архимеда (которая из принципа вложенных отрезков никак не следует).

Решение. а) Рассмотрим множество левых концов вложенных отрезков. Это множество ограничено сверху любым правым концом одного из вложенных отрезков, значит, у него есть точная верхняя грань a. Покажем, что a лежит в пересечении всех отрезков. Если бы это было не так, то правый конец b_n одного из отрезков был бы строго меньше a. Но поскольку $\forall i \in \mathbb{N}$ имеем $a_i \leqslant b_n$, получаем, что $a > b_n$ не может в этом случае быть точной верхней гранью множества $\{a_n\}$.

б) (*Набросок.*) Действуя как в предыдущем пункте, нетрудно доказать, что $b = \inf\{b_n\}$ также лежит в пересечении всех вложенных отрезков. Далее, из утверждения задачи 5 следует, что множество общих точек всех вложенных отрезков само является отрезком $[a, b]$. Осталось показать, что условие задачи равносильно тому, что $a = b$.

Задача 17. Докажите, что:

а*) не существует взаимно однозначного отображения между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$;

б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$.

Решение. а) Докажем, что каким бы ни было отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, найдется точка, не лежащая в его образе. Будем строить эту точку последовательно. Обозначим через I_0 какой-нибудь отрезок — например, $[0; 1]$. Пусть теперь I_n — это та половина отрезка I_{n-1}, которая

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 63

не содержит числа $f(n)$. Тогда пересечение всех отрезков I_k не пусто по принципу вложенных отрезков и не пересекается с образом отображения f по построению.

б) Фактически мы уже построили в задаче 8 число, которое не может существовать в $\mathbb{Q}$, но при этом обязано существовать в $\mathbb{R}$ — число a, в квадрате дающее 2.

Другое доказательство следует из предыдущего пункта (нужно только вывести из счетности $\mathbb{N}$ счетность $\mathbb{Q}$ — по этому поводу см. листок «Счетные и несчетные множества»).

Из доказательства пункта а) видно, что точки, не лежащие в образе отображения f, существуют *на любом* отрезке I_0; в терминах пункта б) это означает, что иррациональная точка есть на любом отрезке («иррациональные числа плотны в действительных»).

Другое решение. а) Можно показать (например, пользуясь двоичной записью; см. тж. листок «Бесконечные десятичные дроби»), что существует биекция между $\mathbb{R}$ и множеством D произвольных бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Теперь предположим, что существует взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{N}\to D$. Тогда построим новую последовательность K из нулей и единиц по следующему правилу: на k-м месте у нее будет стоять символ, противоположный тому, который стоит на k-м месте у последовательности $f(k)$. Прямо из построения следует, что у нее не может быть прообраза в натуральных числах (если бы это было так, то пусть $f(n)=K$, где $n\in\mathbb{N}$, и тогда на n-м месте в последовательности K должен стоять элемент, обратный сам себе — противоречие). Получаем, что между D и $\mathbb{N}$, а следовательно, и между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ не существует биекции.

Приведенное рассуждение имеет название: канторовский диагональный процесс. Автором его является немецкий математик XIX века Георг Кантор; его рассуждение явилось первым в науке доказательством неравномощности двух бесконечных множеств. Оно послужило для многих ученых отправной точкой в дальнейших исследованиях теории множеств и логических основ математики, а сам Кантор спустя некоторое время занялся богословием.

Задача 18* (Дедекиндовы сечения). Пусть $A, B\subset\mathbb{R}$, причем $\forall a\in A$, $b\in B$ $a\leqslant b$. Докажите, что $\exists c\in\mathbb{R}$: $\forall a\in A$, $b\in B$ $a\leqslant c\leqslant b$. Верно ли это утверждение для $\mathbb{Q}$?

Решение. Если $A, B\subset\mathbb{R}$, то по аксиоме полноты $\sup A$ и $\inf B$, очевидно, существуют, причем $\sup A\leqslant\inf B$. В качестве искомого c можно теперь взять любое число из отрезка $[\sup A, \inf B]$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 64

Для $\mathbb{Q}$ это утверждение неверно, достаточно рассмотреть множества $A=\{a\in\mathbb{Q}\mid a^2<2 \text{ или } a<0\}$ и $B=\{b\in\mathbb{Q}\mid b>0,\ b^2>2\}$. Тогда, как было доказано в задаче 8, любое число $q\in\mathbb{Q}$ лежит либо в A, либо в B. Поскольку у A нет точной верхней грани и у B нет точной нижней грани, никакое $c\in\mathbb{Q}$ не может быть одновременно нижней гранью B и верхней гранью A.

Утверждение этой задачи можно рассматривать как еще одну аксиому, на которую (вместе с аксиомой Архимеда) можно заменить аксиому полноты.

Задача 19*. Докажите утверждение о единственности действительных чисел.

Набросок решения. См. предпоследнюю задачу листка «Бесконечные десятичные дроби».

Задача 20* (игра Банаха—Мазура на $\mathbb{Q}$). Рассмотрим следующую игру. Двое по очереди выбирают отрезки так, что каждый следующий отрезок вложен в предыдущий. Таким образом они строят последовательность вложенных отрезков. Если пересечение состоит из одного числа и оно рационально, то выигрывает первый. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает второй.

Решение. Приведем выигрышную стратегию для второго игрока. Занумеруем как-нибудь все рациональные числа натуральными (как это сделать, можно узнать из листка «Счетные и несчетные множества»); пусть q_k — k-е рациональное число. Пусть теперь на k-м ходу второй игрок выбирает отрезок так, чтобы он не содержал числа q_k. Тогда в пересечении всех отрезков не останется ни одного рационального числа (действительно, рациональное число с каким номером могло бы там остаться?), то есть второй игрок выиграет.

Отметим, что первый игрок не может применить аналогичную стратегию, так как множество иррациональных чисел несчетно — он «не успеет» (даже за бесконечное число ходов) выкинуть все иррациональные числа.

Аналогичная стратегия для второго игрока работает, например, для (несчетного!) множества действительных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 5.

Множество $M\subset\mathbb{R}$, для которого один из игроков имеет выигрышную стратегию, называется *детерминированным*. Утверждение о том, что любое подмножество прямой детерминированно («аксиома детерминированности», AD), противоречит аксиоме выбора.

Задача 21*. Дайте определение вещественной степени положительного вещественного числа так, чтобы сохранялись все известные свойства степени.

Соглашение. В следующих листках этой задачей можно пользоваться без доказательства.

Ответ. Положим

$$a^b = \begin{cases} \inf\{x^y \mid 0 < x < a,\ \ y < b;\ \ x, y \in \mathbb{Q}\}, & 0 < a < 1; \\ 1, & a = 1; \\ \sup\{x^y \mid 1 < x < a,\ \ y < b;\ \ x, y \in \mathbb{Q}\}, & a > 1. \end{cases}$$

Так как рациональные числа *всюду плотны* в действительных (т. е. любое действительное число сколь угодно близко приближается рациональными), любая функция на $\mathbb{Q}$ продолжается до *непрерывной* на $\mathbb{R}$ функции не более чем одним способом. Один из способов более-менее явно задать это продолжение для функции степени и приведен в ответе.

Более тонким является вопрос о *возможности* такого продолжения. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x^3 < 2; \\ 1, & x^3 > 2 \end{cases}$$

непрерывна на $\mathbb{Q}$, но при ее продолжении на $\mathbb{R}$ в точке $x = \sqrt[3]{2}$ с неизбежностью будет разрыв.

Можно показать, что непрерывную функцию можно продолжить с рациональных точек отрезка до непрерывной функции на всем отрезке тогда и только тогда, когда она *равномерно непрерывна*.

Счетные и несчетные множества

листок 5д / октябрь 2005

Действительные числа дают первый пример несчетного множества; таким образом, оказывается, что бесконечные множества могут иметь «разное количество элементов». Изучению этого явления (лежащего несколько в стороне от основной темы 9 класса — построения действительных чисел и начал анализа) и посвящен листок.

При этом обнаруживаются неожиданные эффекты: оказывается, «число элементов» в бесконечном множестве может не меняться при операциях, которые это множество явно увеличивают (например, $|A|=|A|+1$). Начинать работать с контринтуитивной ситуацией всегда непросто, поэтому необходимо потратить довольно много времени на базовые задачи и не спешить переходить к сложным теоремам. Зато в результате решения листка появляется теоретико-множественная интуиция. А умение вырабатывать новую интуицию в ситуации, когда не работает обычная, житейская, довольно важно.

При этом помогает правильный выбор терминологии — тогда правильные утверждения подсказывает сам язык: так одна из самых сложных задач листка — теорема Кантора—Бернштейна на первый взгляд может показаться тавтологией.

Из приемов, полезных и вне этого листка, отметим диагональный метод Кантора (который применяется не только для доказательства неравномощности множеств, но и, например, в математической логике).

Определение 1. Два множества A и B называются *равномощными*, если между ними существует биекция. Обозначение: $|A|=|B|$.

Говорят также, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($|A|\leqslant|B|$), если существует инъекция (вложение) из A в B.

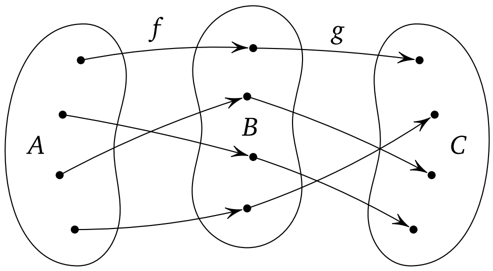
Другими словами, $|A|\leqslant|B|$, если множество A равномощно подмножеству множества B.

При помощи трансфинитной индукции можно показать, что любые два множества A и B сравнимы по мощности (т. е. либо $|A|\geqslant|B|$, либо $|B|\geqslant|A|$).

Задача 1. Докажите, что «отношение» равномощности является «отношением» эквивалентности.

Замечание. Слово «отношение» в условии задачи взято в кавычки, так как обычно рассматривают отношения, заданные на каком-то *множестве* (а множества всех множеств не существует). Если по каким-то причинам игнорировать эту трудность не получается, то можно рассматривать отношение равномощности на каком-либо множестве множеств (например, на множестве всех подмножеств какого-нибудь множества).

Решение. Тождественное отображение задает биекцию любого множества с собой, поэтому отношение равномощности рефлексивно. Вспомним, что отображение биективно тогда и только тогда, когда оно обратимо. Значит, отношение равномощности симметрично. Если f и g — биекции из A в B и из B в C соответственно, то $g \circ f$ — биекция (обратное к нему — $f^{-1} \circ g^{-1}$) из A в C, поэтому отношение равномощности транзитивно.



Задача 2. Какие из следующих множеств равномощны:
а) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \setminus \{1\}$; б) два отрезка разной длины;
в) интервал и полуокружность без концов; г) интервал и прямая;
д) $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$; е) интервал и отрезок?

Ответ. В каждой из упомянутых пар множества равномощны.

Указание. Для «дискретных» множеств (таких, как $\mathbb{N}$) удобно строить биекцию, последовательно задавая образ каждого следующего элемента.

Задавать отображение явной формулой необязательно, достаточно просто указать некоторое правило, в соответствии с которым отображаются элементы.

При этом следует внимательно следить за тем, задает ли правило отображение *всего* множества, а также за сюръективностью получившегося отображения.

Напомним, что для проверки биективности отображения достаточно построить для него обратное.

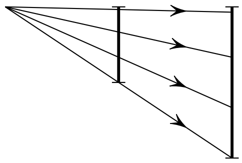
Решение. а) Отображение $n \mapsto n+1$ дает (так как оно имеет обратное — $n \mapsto n-1$) биекцию.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 68

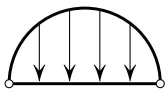
б) Растяжение в нужное число раз дает биекцию (см. рисунок).

в) Проекция на рисунке дает биекцию.

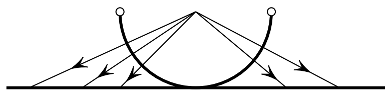
г) Изображенная на рисунке проекция из центра задает биекцию между полуокружностью без концов (равномощной, по пункту в), интервалу) и прямой. Как можно узнать из тригонометрии, это тангенс.



К пункту б)



К пункту в)



К пункту г)

д) Отобразим $2n$ в n, а $2n+1$ в $-n$.

е) Интервал равномощен прямой, следовательно, отрезок равномощен объединению прямой с двумя точками. Но прямая с двумя добавленными точками равномощна прямой: переведем эти две точки в 0 и 1, точку на прямой с натуральной координатой n переведем в точку с координатой $n+2$, остальные точки оставим на месте.

Отметим, что последняя из биекций не является непрерывной (переводящей близкие точки в близкие). Это не случайно — можно показать (см. листки за 10 класс), что *непрерывных* биекций между отрезком и интервалом не бывает.

Определение 2. Множество A называется *бесконечным*, если при добавлении нового элемента мощность A не меняется. В противном случае множество A называется *конечным*.

Так как никакое множество не содержит себя в качестве элемента (в аксиоматической теории множеств это следствие «аксиомы фундированности»), это условие можно записать как $|A|=|A\cup\{A\}|$.

Ясно, что если к множеству из n элементов добавить новый элемент, то получится множество из $n+1$ элемента, неравномощное исходному. С другой стороны, в предыдущей задаче мы видели, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ равномощны.

Определение 3. Бесконечное множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел. В противном случае оно называется *несчетным*.

Задача 3. Докажите, что непустое множество конечно, если и только если оно равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n.

Можно было бы, наоборот, определить конечное множество как множество, равномощное начальному отрезку натурального ряда, а потом доказать, что бесконечное множество равномощно объединению себя с новым элементом.

Решение. Возьмем какой-нибудь элемент нашего множества A и обозначим его a_1; потом возьмем какой-нибудь элемент $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$ и так далее. Возможны ровно две ситуации: либо процесс оборвется на n-м шаге — тогда мы увидим, что $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, что и задает биекцию множества $\{1, \ldots, n\}$ на A, либо процесс никогда не закончится — тогда (по принципу математической индукции, если угодно) мы получим вложение $\mathbb{N}$ в A.

Осталось заметить, что множество, содержащее бесконечное, само бесконечно (докажите!).

Задача 4. Докажите, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Решение. Естественное решение выглядит следующим образом. Будем строить отображение из $\mathbb{N}$ в наше множество A последовательно: отобразим 1 в какой-нибудь элемент a_1, 2 в какой-нибудь (другой) элемента a_2 и так далее. Так как A — бесконечное подмножество счетного множества, на все элементы A «хватит» натуральных чисел, поэтому построенное отображение — биекция.

К сожалению, приведенное выше рассуждение неверно: пускай, например, $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и оказалось случайно, что $a_i = 100i$; тогда мы получили *вложение* натуральных чисел в A, вне образа которого остается, тем не менее, бесконечное (счетное) множество.

Суть проблемы в том, что (из-за того, что у бесконечного множества бывают равносильные ему собственные подмножества) мы можем пропустить какой-то элемент и никогда к нему не вернуться. Для борьбы с этим нужно перечислять элементы «по очереди» (пользуясь порядком и принципом математической индукции).

Приведем теперь верное решение. Пусть $A \subset X$, причем X счетно. Отождествим (при помощи некоторой биекции) X с натуральными числами, Теперь осталось доказать, что бесконечное подмножество A натуральных чисел счетно.

Будем последовательно строить биекцию $f\colon \mathbb{N} \to A$. В любом непустом подмножестве натуральных чисел X найдется наименьший элемент $\min(X)$ (при аксиоматическом определении натуральных чисел это обычно одна из аксиом). Положим $f(0) = \min(A)$, $f(n+1) = \min(\{a \in A \mid a > f(n)\})$.

По индукции нетрудно показать, что это определенное на всех натуральных числах инъективное отображение в A. Осталось проверить его сюръективность. Предположим, что множество $A \setminus f(\mathbb{N})$ непусто; тогда в нем содержится наименьший элемент a. Заметим, что, по определению a, наибольший элемент из A, меньший чем a, имеет вид $f(n)$ (для какого-то $n \in N$). Но тогда a есть $f(n+1)$. Полученное противоречие завершает доказательство биективности отображения f.

Эта задача позволяет при доказательстве счетности бесконечного множества ограничиваться построением вложения этого множества в $\mathbb{N}$.

> **Задача 5.** Пусть A — счетно, B — счетно (конечно). Что можно сказать про объединение, пересечение и разность A и B?

Решение. Если B конечно, а A бесконечно, то $|A \cup B| = |A|$ — это несложно доказать индукцией по числу элементов в B; равномощна A в этом случае и разность $A \setminus B$ (это следует из предыдущего, так как $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$).

Про пересечение и разность двух счетных множеств можно сказать только, что это всегда счетное или конечное (как подмножество счетного) множество (то, что возможны оба случая, видно из рассмотрения совпадающих/непересекающихся счетных множеств).

Наконец, объединение двух счетных множеств снова счетно. Действительно, заметим, что $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Множество $B \setminus A$, как уже обсуждалось, либо конечно — тогда все уже доказано, либо счетно. Итак, осталось показать, что объединение двух непересекающихся счетных множеств счетно. Это уже фактически делалось в задаче 2д: построим биекцию четных чисел с A, нечетных с B и получим биекцию между $\mathbb{N}$ и $A \cup B$.

> **Задача 6.** Докажите, что объединение а) конечного, б) счетного числа счетных множеств счетно.

Решение. а) Получается из предыдущей задачи индукцией по числу множеств.

б) Докажем, что $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ счетно, если счетно каждое из множеств A_i.

Заменяя при необходимости A_i на $A_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} A_j$, приходим к счетному числу *непересекающихся* не более чем счетных множеств. В силу утверждения задачи 4 достаточно доказать, что их объединение вкладывается в $\mathbb{N}$. Уже было доказано, что $\mathbb{N}$ можно разбить на два счетных

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 71

множества (четные и нечетные числа, например), поэтому в $\mathbb{N}$ легко вложить объединение двух не более чем счетных множеств; аналогично можно вложить в $\mathbb{N}$ любое (конечное) число счетных множеств (четные числа можно разделить на делящиеся и не делящиеся на 4 и так далее). Идея состоит в том, что ничто не мешает повторить это процедуру и счетное число раз. А именно, зафиксируем вложение f_i каждого A_i в $\mathbb{N}$, после чего вложим все $\bigcup A_i$ в $\mathbb{N}$ при помощи отображения $A_i \ni a \mapsto 2^i(2f_i(a)+1)$.

На последнем шаге можно воспользоваться и другим вложением $\bigcup A_i$ в $\mathbb{N}$. Например, $A_i \ni a \mapsto p_i^{f_i(a)}$, где p_i — i-е простое число.

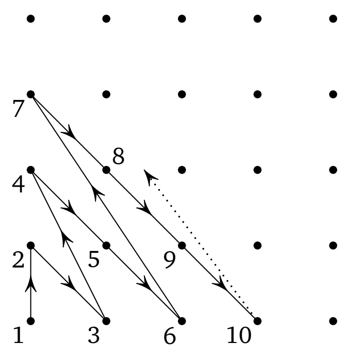
Это рассуждение доказывает даже, что если множество B равномощно двум своим копиям (а можно показать, что этим свойством обладает любое бесконечное множество), то из $|A_i| \leqslant |B|$ следует $\Bigl|\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i\Bigr| \leqslant |B|$.

Другое решение. Другой способ заключается в применении конструкции из следующей задачи.

> **Задача 7.** Пусть множество A — счетно, B — не более чем счетно и непусто. Что можно сказать про их (декартово) произведение $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$?

Ответ. Оно счетно.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда B состоит из n элементов. Тогда $|A \times B| = |\mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}|$. Но отображение $(d, r) \mapsto nd + r$ задает биекцию последнего множества на натуральные числа.



Пусть теперь B счетно. Тогда $|A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. Но все пары чисел можно занумеровать способом, показанным на рисунке, что задает биекцию из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ (ее можно задать и формулой $(m,n)\mapsto$ $\mapsto \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+n$).

Другое решение. Можно и просто сослаться на предыдущую задачу: $A\times B$ есть $\bigcup\limits_{b\in B} A\times\{b\}$ — не более чем счетное объединение счетных множеств.

Вообще, для любого бесконечного множества A можно показать, что $|A\times\mathbb{N}|=|A|$ (это задача несложная) и даже $|A\times A|=|A|$ (это задача непростая; интересно уже понять, почему равномощны отрезок и квадрат).

> **Задача 8.** Докажите, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел несчетно.

Указание. Множества «всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента» не существует (почему?).

Решение. Предположим обратное. Тогда существует биекция f: $P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ из множества всех подмножеств натуральных чисел в натуральные числа. Рассмотрим множество $A_f=\{n\in\mathbb{N}\mid n\notin f^{-1}(n)\}$ и попытаемся понять, принадлежит ли число $f(A_f)$ множеству A_f. Нетрудно видеть, что любое предположение на этот счет ведет к противоречию (ср. с брадобреем, который бреет всех, кто не бреет себя сам).

То же рассуждение доказывает, что вообще никакое множество не может быть равномощно множеству своих подмножеств. Отсюда видно, в частности, что для любого множества можно предъявить большее по мощности множество.

> **Задача 9.** Докажите, что множество рациональных чисел счетно.

Решение. Сопоставление каждому рациональному числу его несократимой дроби задает вложение рациональных чисел в счетное множество — (декартов) квадрат множества целых чисел. Значит (так как оно заведомо бесконечно), множество рациональных чисел счетно.

Другое решение. Заметим, что $\mathbb{Q}=\bigcup\limits_{q} A_q$, где $A_q=\left\{\frac{n}{q}\right\}$; значит, $\mathbb{Q}$ счетно как счетное объединение счетных множеств.

> **Задача 10.** Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся интервалов на прямой, не более чем счетно[4].

[4] То есть счетно или конечно.

Указание. Каждый интервал содержит рациональное число.

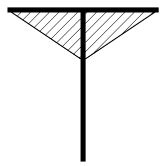
Решение. В каждом из интервалов содержатся элементы $\mathbb{Q}$. Выбирая в каждом из попарно непересекающихся интервалов по элементу из $\mathbb{Q}$, получаем биекцию из нашего множества на некоторое подмножество счетного множества рациональных чисел.

Задача 11. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся кругов на плоскости, не более чем счетно.

Решение. Рассмотрим какое-нибудь множество A попарно непересекающихся кругов. Каждый из них содержит (докажите) точку, обе координаты которой рациональны. Значит, имеется биекция из A в некоторое подмножество счетного множества $\mathbb{Q}^2$ пар рациональных чисел.

Задача 12. Докажите, что произвольное множество, состоящее из попарно непересекающихся букв Т на плоскости, не более чем счетно.

Набросок решения. Рассмотрим для каждой буквы Т два «уха». В каждом из них можно выбрать по рациональной точке (т. е. точке, обе координаты которой рациональны). Координаты этих точек задают отображение нашего множества в счетное множество $\mathbb{Q}^4$. Так как две буквы Т не могут пересекаться по обоим «ушам», это отображение является вложением. Значит, исходное множество счетно.



Задача 13. Докажите, что множество конечных последовательностей нулей и единиц счетно.

Решение. Добавим к началу каждой последовательности единицу и рассмотрим получившуюся последовательность как двоичную запись некоторого числа. Это биекция между нашим множеством и $\mathbb{N}$ (при этом в единицу перейдет пустая последовательность — единственная последовательность длины 0).

Задача 14. Докажите, что следующие множества несчетны:

а) множество всех подмножеств натуральных чисел;

б) множество бесконечных последовательностей нулей и единиц;

в) множество всех биекций из множества натуральных чисел в себя.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 74

Решение. а) См. задачу 8.

б) Заметим, что это множество равномощно предыдущему. Действительно, чтобы задать подмножество множества $\mathbb{N}$, нужно для каждого элемента $\mathbb{N}$ указать, принадлежит ли он этому подмножеству; т. е. $P(\mathbb{N}) = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0, 1\})$ (где $\mathrm{Map}(A, B)$ — множество отображений из множества A в множество B). Но множество отображений из натуральных чисел в $\{0, 1\}$ и есть множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

в) Сопоставляя каждой биекции множество точек, которые она переводит в себя, получаем сюръективное отображение этого множества на множество из пункта а).

Другое решение. б) Пусть f — какое-либо отображение из $\mathbb{N}$ в множество бесконечных последовательностей нулей и единиц. Рассмотрим (бесконечную) таблицу, в i-й строке которой стоит последовательность $f(i)$.

Пусть (a_n) — последовательность, получающаяся из диагонали этой таблицы заменой 0 на 1, а 1 на 0. Заметим, что последовательность (a_n) не совпадает ни с одной из строк нашей таблицы — по построению она отличается от i-й строки i-м символом.

Таким образом, мы построили последовательность (a_n) — элемент, не лежащий в образе f. В частности, f не является биекцией.

> **Задача 15*.** Докажите, что все множества предыдущей задачи равномощны между собой и равномощны множеству действительных чисел.

В приведенном ниже доказательстве используется теорема Кантора—Бернштейна. Решить эту задачу, не пользуясь теоремой Кантора—Бернштейна, непросто. Скорее всего при этом появятся все основные идеи доказательства этой теоремы.

Решение. Начнем с равномощности множеств из предыдущей задачи. При ее решении уже было показано, что множества из пунктов а) и б) равномощны и не превосходят по мощности множество из пункта в). Осталось (ввиду теоремы Кантора—Бернштейна) показать, что мощность множества $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ биекций $\mathbb{N}$ в себя не больше мощности множества $P(\mathbb{N})$ всех подмножеств $\mathbb{N}$. Но каждый элемент $\mathrm{Aut}(\mathbb{N})$ задается своим графиком — некоторым подмножеством $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, то есть $\mathrm{Aut}(\mathbb{N}) \subset P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Осталось вспомнить, что $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, а потому и $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| \geqslant |\mathrm{Aut}\,\mathbb{N}|$.

Покажем теперь, что и множество действительных чисел имеет такую же мощность. Двоичная запись задает биекцию множества действительных чисел с множеством бесконечных двоичных последовательностей без (бесконечного) хвоста из единиц. Значит, множество всех двоичных последовательностей равномощно множеству действительных чисел, объединенному с некоторым счетным множеством (множеством последовательностей с хвостом из единиц, которое очевидно равномощно множеству конечных двоичных последовательностей).

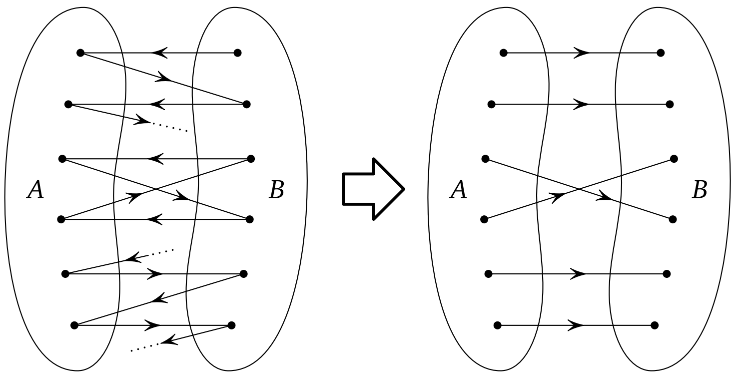
Осталось заметить, что объединение со счетным множеством не меняет мощность бесконечного множества. Действительно, у любого бесконечного множества есть счетное подмножество — а его мощность от объединения с новым счетным множеством не меняется по задаче 5.

> **Задача 16* (теорема Кантора—Бернштейна).** Докажите, что из $|A| \leqslant |B|$ и $|A| \geqslant |B|$ следует $|A| = |B|$.

Набросок решения. Без ограничения общности можно считать, что множества A и B не пересекаются.

Пусть i — вложение A в B, а j — вложение B в A. Возьмем какой-либо элемент $a \in A$ и построим по нему цепочку a, $i(a)$, $j(i(a))$, $i(j(i(a)))$, … Имеются две возможности: либо в некоторый момент какой-либо элемент встретится в цепочке второй раз («замкнутая цепочка»), либо она будет продолжаться бесконечно («открытая цепочка»). Таким образом, A и B разобьются на непересекающиеся (так как i, j — вложения) цепочки (открытые цепочки могут при этом начинаться как с элементов A, так и с элементов B).

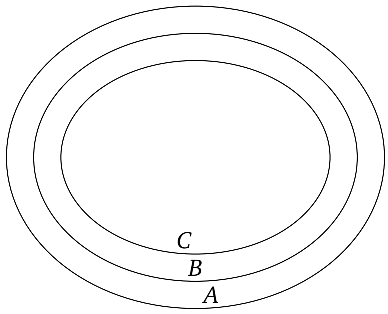
Определим теперь отображение $f\colon A \to B$ как j^{-1} для элементов открытых цепочек с началом в B, i для элементов остальных цепочек (замкнутых, а также открытых с началом в A или без начала).



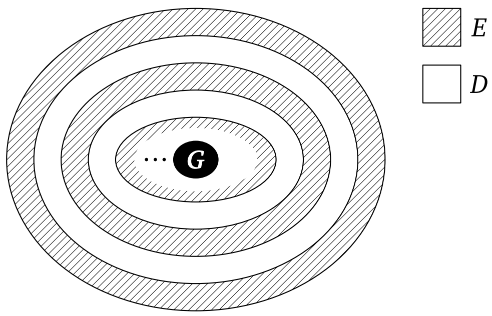
Нетрудно проверить, что f — искомая биекция.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 76

Другое решение. Будем доказывать теорему Кантора—Бернштейна в следующей (эквивалентной исходной) формулировке: пусть $A \supset B \supset C$, $f\colon A \to C$ — биекция; тогда существует биекция между A и B.



Обозначим результат n-кратного применения f к множеству A как A_n, а к B — как B_n (в частности, $A_0 = A$, $B_0 = B$, $A_1 = C$). Заметим, что все множество A разбивается на следующие (непересекающиеся) части: $E_i = A_i \setminus B_i$, $D_i = B_i \setminus A_{i+1}$ и $G = \bigcap A_i = \bigcap B_i$ (контрольный вопрос: почему верно последнее равенство?).



Наконец, определим отображения $\varphi\colon A \to B$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in G; \\ f(x), & x \in E = \bigcup E_i; \\ x, & x \in D = \bigcup D_i. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что φ — искомая биекция.

Теорема Кантора—Бернштейна является мощным средством доказательства равномощности несчетных множеств, обойтись без которого часто не представляется возможным.

Бесконечные десятичные дроби

листок 17 / декабрь 2005

В этом листке тяжелых задач больше, чем интересных. Бесконечные десятичные дроби не относятся к числу тем, любимых всеми, но обойти их мы не можем по ряду причин.

В предыдущих листках действительные числа определялись аксиоматически — как полное упорядоченное поле. Но из того, что объект задан некоторыми аксиомами, еще не следует его существование. Приходится либо принимать существование на веру, либо предъявлять модель — строить объект, удовлетворяющий данным аксиомам.

В курсе мы не всегда строим модели объектов явно, иногда предпочитая первый путь. Но факт существования действительных чисел — центрального объекта изучения классического математического анализа — нельзя принимать на веру просто так. Данный листок посвящен конкретной модели действительных чисел — бесконечным десятичным дробям.

Построение действительных чисел через десятичные дроби — путь довольно естественный, но утомительный. Чтобы сделать определения и доказательства менее громоздкими, в некоторых местах мы ограничиваемся неотрицательными бесконечными дробями.

Второе важное понятие, неявно фигурирующее в листке, — это лексикографический порядок на последовательностях. Суть его в следующем: если задано отношение порядка на некоторых символах $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, то на конечных и бесконечных последовательностях из этих символов также можно ввести отношение порядка. По определению, если последовательности $b_1b_2\ldots$ и $c_1c_2\ldots$ совпадают до номера n включительно и $b_{n+1} > c_{n+1}$, то $b_1b_2\ldots > c_1c_2\ldots$ В нашем листке отношение порядка на цифрах $(0 < 1 < \ldots < 9)$ порождает отношение порядка на конечных и бесконечных десятичных дробях, приводя нас в итоге к определению полного упорядоченного поля.

Лексикографический порядок на последовательностях встречается очень часто не только в математике, но и в программировании: он лежит в основе почти всех алгоритмов перечисления тех или иных объектов.

Определение 1. $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, $5 = 4 + 1$, $6 = 5 + 1$, $7 = 6 + 1$, $8 = 7 + 1$, $9 = 8 + 1$, $10 = 9 + 1$.

Определение 2. Запись вида $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$, где каждое из a_i является цифрой (т. е. одним из десяти знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и $a_n \neq 0$, называется *десятичной записью натурального числа*.

Задача 1. Дайте определение *значения* десятичной записи натурального числа.

Решение. Значением десятичной записи $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ натурального числа называют число $a_1 + 10 \cdot a_2 + \ldots + 10^{n-1} a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 10^{k-1} a_k$.

Задача 2. Дайте определения *десятичной записи целого числа* и ее *значения*.

Решение. Запись вида 0 или $\pm A$, где A — десятичная запись натурального числа, называется *десятичной записью натурального числа*. Если десятичная запись целого числа начинается со знака плюс, то при написании его часто опускают. *Значением* этой записи называют значение записи A, взятое с соответствующим знаком.

Определение 3. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где A — десятичная запись натурального числа либо 0, а α_i — цифры, называется *конечной десятичной дробью*. Если запись начинается со знака плюс, то при написании его часто опускают.

Задача 3. Дайте определение *значения* конечной десятичной дроби.

Решение. *Значением* конечной десятичной дроби $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ называется рациональное число

$$\pm(A + 10^{-1} \cdot \alpha_1 + \ldots + 10^{-n}\alpha_n) = \pm\left(A + \sum_{k=1}^{n} 10^{-k}\alpha_k\right).$$

Задача 4. а) Запишите в виде конечной десятичной дроби числа $\frac{42}{125}$, $-\frac{57}{1250}$, $\frac{13}{25}$.

б) Запишите в виде обыкновенной дроби числа $-7{,}23$; $4{,}165$; $-3{,}6489$.

Ответ. а) $0{,}336$; $-0{,}0456$; $0{,}52$; б) $-\frac{723}{100}$; $\frac{833}{200}$; $-\frac{36489}{10000}$.

Определение 4. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, где A — десятичная запись натурального числа либо 0, а α_i — цифры, называется *бесконечной десятичной дробью* (БДД).

Определение 5. *Значением* бесконечной десятичной дроби $\pm A{,}\alpha_1\ldots$ называется число $\pm\sup\{A{,}\alpha_1\ldots\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. БДД с равными значениями называются *близнецами*.

Задача 5. Докажите корректность определения 5.

Решение. Так как точная верхняя грань ограниченного множества существует и единственна, достаточно доказать, что множество $\{A{,}\alpha_1\ldots\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ограничено.

Заменим все цифры α_i на девятки. Тогда каждое число $\sum\limits_{k=1}^{n} 10^{-k}\alpha_k$, соответствующее конечной дроби, заменится на большее либо равное число $\sum\limits_{k=1}^{n} 9\cdot 10^{-k}$. Это число, в свою очередь, равно $\frac{9}{10}\cdot\frac{1-(1/10)^{n+1}}{1-1/10}=$ $=1-(1/10)^{n+1}$, что меньше единицы.

Значит, множество $\{A{,}\alpha_1\ldots\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ограничено сверху числом $A+1$.

> **Задача 6.** Запишите в виде БДД: $-\frac{1}{3}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{19}{33}$.

Для записи периодических дробей используют следующую сокращенную запись: дробь вида 0,12121212... или 9,4444444... записывают как 0,(12) или 9,(4) соответственно.

Решение. Ответ: $-\frac{1}{3}=-0{,}(3)$, $\frac{22}{7}=3{,}(142857)$, $\frac{19}{33}=0{,}(57)$.

Число $\frac{22}{7}$ может служить хорошим приближением для числа π в расчетах, не требующих высокой точности.

> **Задача 7.** Запишите в виде обыкновенной дроби: 15,(2); $-2{,}(08)$; 3,(9).

Ответ. $\frac{137}{9}$; $-\frac{206}{99}$; 4.

Набросок решения. По определению значение БДД является точной верхней гранью некоторого множества. Но для периодической БДД нахождение этой точной верхней грани сводится к суммированию бесконечной геометрической прогрессии.

Например, значение дроби $15{,}(2)=15{,}22222\ldots$ равно $15+\frac{2}{10}+$ $+\frac{2}{100}+\ldots$, что равно $15\frac{2}{9}=\frac{137}{9}$.

См. также задачу 5е) листка «Предел последовательности».

> **Задача 8.** Докажите, что для любого действительного числа x существует хотя бы одна БДД, значение которой равно x.

Набросок решения. Если число x целое, то утверждение очевидно. Если же x — дробное, то будем строить искомую десятичную дробь методом бесконечных приближений. Пусть x положительно (если это не так, будем строить бесконечную дробь для числа $-x$). Тогда его бесконечная дробь начинается с числа $[x]$, поскольку $[x] < x < [x] + 1$. Далее, пусть a_1 — цифра с тем свойством, что $[x] + \frac{a_1}{10} \leqslant x < [x] + \frac{a_1+1}{10}$. Тогда запись числа будет иметь вид $[x],a_1\ldots$ Если $[x] + \frac{a_1}{10}$ в точности равно x, то построение десятичной дроби нами закончено (она оказалась конечной). Если же нет, то припишем к дроби цифру a_2 такую, что $[x] + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \leqslant x < [x] + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{100}$. Далее, если $[x] + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} = x$, то построение дроби закончено, если же нет, то найдем следующую цифру a_3, и так далее.

По построению, значение получившейся дроби равно самому числу x (формальное доказательство с точными верхними гранями оставляется читателю в качестве упражнения).

Таким образом, (конечные) десятичные дроби *плотны* в действительных числах: любое действительное число сколь угодно хорошо ими приближается.

> **Определение 6.** БДД $A,\alpha_1\ldots$ называется *периодической*, если существуют такие натуральные k и n, что для всех $l \geqslant k$ выполнено $\alpha_{l+n} = \alpha_l$. Наименьшее возможное n называется *периодом* БДД.

> **Задача 9.** Докажите, что БДД периодична тогда и только тогда, когда ее значение рационально.

Решение. Если БДД периодична, то ее значение рационально. Действительно, значение периодической БДД $\pm A,a_1\ldots a_k(b_1\ldots b_n)$ может быть вычислено по формуле

$$\pm\left(A + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{b_1}{10^{k+ln+1}} + \ldots + \frac{b_n}{10^{k+ln+n}}\right)\right) = \\ = \pm\left(A + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{b_1}{10^{k-n+1}\cdot(10^n-1)} + \ldots + \frac{b_n}{10^k\cdot(10^n-1)}\right),$$

т. е. является суммой нескольких рациональных чисел.

Если же число рационально, т. е. имеет вид p/q (p, q — целые), то соответствующую ему бесконечную десятичную дробь можно построить с помощью деления в столбик числа p на число q. Поскольку множество остатков от деления на q конечно, рано или поздно они при этом делении начнут повторяться — иными словами, последовательность остатков периодична. Значит, и последовательность частных при делении в столбик периодична, а частные — это и есть цифры бесконечной десятичной записи числа p/q.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 81

Задача 10. Докажите, что множество периодических БДД счетно.

Решение. Как мы показали в предыдущей задаче, бесконечная десятичная дробь периодична, если и только если ее значение рационально. Множество рациональных чисел счетно, но при этом может случиться, что одному рациональному числу соответствует несколько периодических дробей. Как будет показано в следующей задаче, одному значению может соответствовать не более двух дробей. Следовательно, множество дробей равномощно объединению множества рациональных чисел и некоторого его подмножества. Подмножество счетного множества всегда счетно (см. задачу 4 листка «Счетные и несчетные множества»), поэтому и множество периодических БДД счетно (как объединение двух счетных множеств — см. задачу 6 того же листка).

Другое решение. Заметим, что периодическая БДД полностью определяется своим периодом и предпериодом. Множества возможных периодов и возможных предпериодов счетны. Значит, и множество БДД счетно (как произведение двух счетных множеств — см. задачу 7 листка «Счетные и несчетные множества»).

Задача 11. Докажите, что две БДД являются близнецами тогда и только тогда, когда до некоторой позиции они совпадают, а дальше имеют вид $a99\ldots$ и $(a+1)00\ldots$

Набросок решения. Если две дроби имеют вид $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n99\ldots$ и $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)00\ldots$, то их значения равны соответственно

$$\pm\left(A+10^{-1}\alpha_1+\ldots+10^{-n}\alpha_n+10^{-n}\left(\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)\right)$$

и

$$\pm(A+10^{-1}\alpha_1+\ldots+10^{-n}(\alpha_n+1).$$

Нетрудно видеть, что последние два числа равны, поскольку

$$\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots=1.$$

Если же две дроби вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ и $\pm B{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\ldots$ не имеют такого вида, то это может означать одну из нескольких вещей:

1. Дроби имеют разный знак. Тогда и их значения имеют разный знак (есть, правда, случай дробей $0{,}000\ldots$ и $-0{,}000\ldots$, но будем считать, что в этом случае знак «минус» перед нулем не ставится).

2. Знаки совпадают (далее будем считать, что перед дробями стоит знак плюс), но числа A и B различны — скажем, $A<B$. Тогда значения

дробей разделены целым числом $A+1$, так как значение первой не больше, чем значение дроби $A,9999\ldots$, а значение второй не меньше, чем $B,0000\ldots$ (причем одно из неравенств строгое).

3. Знаки совпадают, $A=B$, и цифры α_i и β_i совпадают вплоть до $i=n$, но $\alpha_{n+1}<\beta_{n+1}$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, значения дробей разделены числом $A,\alpha_1\ldots(\alpha_n+1)$.

Задача 12. Докажите, что периоды дробей $\frac{37}{2005}$ и $\frac{1968}{2005}$ равны.

Решение. Пусть $0,a_1a_2\ldots$ — бесконечная десятичная запись числа $\frac{37}{2005}$. Рассмотрим запись вида $0,(9-a_1)(9-a_2)\ldots$, которой соответствует некоторое значение A. Тогда сумма чисел $\frac{37}{2005}$ и A равна единице (напомним, что $0,99\ldots=1$, а следовательно, $A=\frac{1968}{2005}$.

Заметим, что так как числа 1968 и 2005 взаимно просты, $2005=5\cdot 401$ и 401 — простое число, $\frac{1968}{2005}$ нельзя представить в виде дроби со знаменателем 10^n, т. е. десятичная запись этого числа не может иметь вида $B,\beta_1\ldots\beta_n00\ldots$

Поэтому (см. предыдущую задачу) десятичная запись числа $\frac{1968}{2005}$ единственна. Значит, эта запись совпадает с уже найденной нами ранее — с записью $0,(9-a_1)(9-a_2)\ldots$ Осталось заметить, что периоды бесконечных десятичных дробей $0,a_1a_2$ и $0,(9-a_1)(9-a_2)\ldots$ совпадают.

Определение 7. БДД $A,\alpha_1\ldots$ *не меньше* БДД $B,\beta_1\ldots$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $A>B$;
2) $A=B$ и существует такое $n\in\mathbb{N}$, что $\alpha_k=\beta_k$ при $k<n$ и $A\cdot\alpha_n>A\cdot\beta_n$;
3) $A,\alpha_1\ldots$ и $B,\beta_1\ldots$ — близнецы.

Выше определение дается для неотрицательных БДД, но несложно теперь задать отношение порядка на всех БДД.

Задача 13. Докажите, что одна неотрицательная БДД не меньше другой тогда и только тогда, когда значение первой не меньше значения второй.

Решение. Покажем, что если выполнено хотя бы одно из трех приведенных условий, то значение дроби $A,\alpha_1\ldots$ больше либо равно значения дроби $B,\beta_1\ldots$

По определению, две дроби являются близнецами, если и только если их значения совпадают. Поэтому третье условие подходит. Если $A>B$, то число $[A]$ (целая часть A) должно разделять значения дробей

$A{,}\alpha_1\ldots$ и $B{,}\beta_1\ldots$, что нетрудно проверяется. Наконец, если $A=B$ и существует такое $n\in\mathbb{N}$, что $\alpha_k=\beta_k$ при $k<n$ и $A\cdot\alpha_n>A\cdot\beta_n$, то дробь $A{,}\alpha_1\ldots\alpha_n$ разделяет значения двух бесконечных десятичных дробей, что также проверяется.

Теперь предположим, что значение первой БДД не меньше, чем значение второй. Нужно доказать, что в этом случае выполняется одно из условий, приведенное в формулировке задачи. Если значения двух БДД равны, то, следовательно, они являются близнецами и выполнено третье условие.

Осталось доказать, что если значение первой БДД больше значения второй и $A\geqslant B$, то выполняется второе условие. Заметим, что A не может быть больше B, так как иначе значение дроби $B{,}\beta_1\ldots$ было бы не меньше значения дроби $A{,}\alpha_1\ldots$, что противоречит предположению. Следовательно, $A=B$. Сравним теперь цифры α_1 и β_1: $A\cdot\alpha_1$ не может быть меньше $A\cdot\beta_1$, так как иначе значение второй дроби опять-таки было бы больше значения первой... Все цифры в двух десятичных записях не могут тождественно совпадать, так как иначе дроби были бы равны. Значит, в некотором знаке появится разница, что и будет означать, что второе условие выполнено.

Задача 14. Дайте определения суммы и произведения конечных десятичных дробей.

Набросок решения. Ограничимся случаем неотрицательных десятичных дробей $A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ и $B{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$. Обозначим за N_A целое число, равное $10^n\cdot A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, а за N_B — целое число, равное, соответственно, $10^m\cdot B{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$. Пусть, для определенности, $m\geqslant n$. Тогда суммой дробей $A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ и $B{,}\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ мы назовем дробь, полученную из десятичной записи целого числа $10^{m-n}\cdot N_A+N_B$ сдвигом запятой на m позиций влево (если число цифр в записи числа $10^{m-n}\cdot N_A+N_B$ меньше m, то запись нужно дополнить слева нулями так, чтобы при сдвиге на m получилась корректная десятичная дробь).

Аналогично, произведение десятичных дробей определяется как сдвиг на $m+n$ влево десятичной записи целого числа $N_A\cdot N_B$ (опять же, если число цифр в записи $N_A\cdot N_B$ меньше, чем $m+n$, нужно дополнить ее слева нулями).

Задача 15*. Сформулируйте определение действительных чисел в терминах БДД. Докажите равносильность этого определения определению из листка «Действительные числа».

Набросок решения. Назовем множеством действительных чисел фактор множества бесконечных десятичных дробей по отношению эквивалентности «быть близнецами».

Из задач выше следует, что любому действительному числу соответствует либо одна БДД, либо пара близнецов. Поэтому соответствие БДД $\mapsto$ значение задает изоморфизм бесконечных десятичных дробей с точностью до эквивалентности (со сложением и умножением «в столбик») и действительных чисел.

Это рассуждение доказывает и единственность действительных чисел: поле бесконечных десятичных дробей оказывается изоморфно *произвольному* полному упорядоченному полю.

Предупредим, что, хотя такое определение действительных чисел выглядит довольно простым и естественным, аккуратное определение операций и проверка всех аксиом поля — предприятие довольно тяжелое (особенно если не жульничать и не ограничиваться — как это делали мы выше — неотрицательными БДД).

Задача 16*. Докажите, что в любой БДД можно так переставить цифры, чтобы она стала периодической.

Решение. Пусть $A{,}a_1a_2\ldots$ — некоторая БДД, нам нужно доказать, что ее можно сделать периодической путем перестановки цифр.

Рассмотрим подмножества $S_0, \ldots, S_9$ множества натуральных чисел, определяемые следующим образом: число k лежит в S_i, если на k-м месте после запятой в дроби $A, a_1a_2\ldots$ стоит цифра i. Ясно, что множества S_i не пересекаются и в объединении дают всё $\mathbb{N}$. Выберем все цифры $i_1, i_2, \ldots, i_m$, для которых множества $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_m}$ конечны, и переставим эти цифры в начало дроби (сразу после запятой). Оставшиеся множества $S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_n}$ счетны (либо их множество пусто, но тогда дробь конечна). Расположим теперь эти цифры в дроби сразу за цифрами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ по правилу $j_1j_2\ldots j_nj_1j_2\ldots j_nj_1\ldots$ Получившаяся дробь является периодической.

Предел последовательности

листок 18 / декабрь 2005

Отсюда начинается курс собственно математического анализа: возникают понятия предела и предельной точки. В этом листке мы в основном занимаемся не техникой вычисления пределов (за исключением простейших примеров, это отложено до следующего листка), а скорее *топологическими* идеями, лежащими в основании анализа.

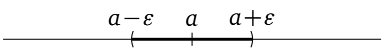
При этом приходится работать с «актуально бесконечными» объектами, что требует новых методов: ключевой для всего анализа техники «эпсилон-дельта» (которая, впрочем, уже немного встречалась при вычислении точных верхних граней) и работы с утверждениями про «почти все» числа.

Формально эта техника не слишком сложна, хотя и требует определенной логической культуры (например, умения строить отрицание к утверждениям с кванторами): чтобы решить многие из задач листка, более-менее достаточно формально записать то, что дано, и сравнить с тем, что требуется доказать.

Однако содержательно это принципиально новая (как в математическом, так и в философском плане) тема, поэтому рекомендуется не забегая вперед не торопясь поработать с определениями и простыми задачами.

Определение 1. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью* точки (числа) a и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Другими словами, ε-окрестность числа a состоит из чисел, удаленных от a менее чем на ε.



Определение 2. Говорят, что *почти все* элементы бесконечного множества удовлетворяют некоторому свойству, если этому свойству не удовлетворяет лишь конечное число элементов данного множества.

Задача 1. Какие из следующих утверждений верны для почти всех натуральных n?

а) n — составное. б) $n^4-1000n^3-10000>0$.

в) Найдутся такие $l, k \in \mathbb{N}$, что $n = 3k+4l$.

г) Сумму в n рублей можно разменять купюрами по a и b рублей.

Ответ. б), в) и г) при взаимно простых a и b.

Решение. а) Утверждение неверно для простых чисел, а их бесконечно много (см. листок «Целые числа 1»).

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 86

б) При больших n (достаточно потребовать, например, $n > 10000$) выполнено неравенство $n^4 > 10000n^3 > 1000n^3 + 10000$, поэтому утверждение верно почти для всех n (для всех n, кроме, возможно, первых 10000).

в) Ясно, что если в виде $3k+4l$ можно представить n, то можно представить и $n+3$ (увеличив k на 1). Нетрудно представить в таком виде $6=3\cdot 2$, $7=3+4$ и $8=4\cdot 2$ — значит, утверждение заведомо верно для $n \geqslant 6$, т. е. для почти всех n.

г) С одной стороны, ясно, что если НОД$(a, b) > 1$, то утверждение неверно для бесконечного множества натуральных чисел — по крайней мере для чисел, не делящихся на этот НОД.

С другой стороны, пусть числа a и b взаимно просты. Тогда по алгоритму Евклида существуют такие *целые* k и l, что $ak+bl=1$. Пусть $N=aK+bL$, причем $K > a|k|$, $L > a|l|$. Тогда все числа от N до $N+a$ рублей можно разменять купюрами по a и b рублей (действительно, $N=aK+bL$, $N+1=a(K+k)+b(L+l)$, и т. д., а K и L выбраны так, чтобы коэффициенты при a и b оставались неотрицательны). Значит, купюрами по a и b рублей можно разменять любую сумму большую N рублей.

Определение 3. *Бесконечной числовой последовательностью* называется отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Обозначение: (x_n).

Подпоследовательностью последовательности (x_n) называется последовательность $(x_{\varphi(n)})$, где $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — строго возрастающее отображение.

Проще говоря, последовательность — это занумерованные (или выписанные в ряд) действительные числа (причем элементы последовательности могут повторяться).

Хотя последовательности суть отображения, их редко изображают графиком; вместо этого их обычно выписывают или изображают, нумеруя точки на прямой (см., например, комментарий к задаче 5).

Более естественно было бы называть подпоследовательностью последовательности (x_n) последовательность ее элементов, номера которых принадлежат некоторому бесконечному подмножеству A натуральных чисел (т. е. $(x_n \mid n \in A)$). Но по данному выше определению последовательности номера членов должны пробегать *все* натуральные числа. Поэтому нужно перенумеровать множество A с помощью строго возрастающего отображения φ (переводящего 1 в минимальный элемент множества A, 2 в следующий элемент множества A и т. д.).

Определение 4. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит почти все члены этой последовательности.

Определение 5. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \forall n > k\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначения и терминология: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$, последовательность (x_n) сходится (стремится) к a.

Задача 2. Докажите равносильность этих определений.

Решение. Прочитаем второе из определений: число a называется пределом последовательности (x_n), если в каждой ε-окрестности точки a содержатся все члены последовательности начиная с некоторого номера (своего для каждой окрестности).

Это практически то же самое, что написано в первом определении: разница лишь в том, что в первом определении в окрестность должны попасть *почти все* члены последовательности, а во втором — все начиная с некоторого номера.

Но это одно и то же. Действительно, множество, содержащее все натуральные числа начиная с некоторого, содержит почти все натуральные числа. Но и наоборот, если какое-то множество A содержит почти все натуральные числа, то среди конечного числа натуральных чисел вне A есть наибольшее число — N; значит, A содержит все натуральные числа начиная с $N+1$.

Задача 3. Могут ли два разных числа быть пределами одной и той же последовательности?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Предположим, что два числа a_1 и a_2 являются пределами одной и той же последовательности (x_n). Пусть U_1 и U_2 — какие-то окрестности чисел a_1 и a_2 соответственно. По второму определению предела начиная с некоторого N_1 все члены последовательности лежат в U_1, а начиная с N_2 — в U_2. Значит, начиная с $\max(N_1, N_2)$ все члены последовательности лежат в $U_1 \cap U_2$.

Но окрестности U_1 и U_2 различных точек можно выбрать непересекающимися (например, взяв $|a_1 - a_2|/2$-окрестности). Полученное противоречие доказывает, что у последовательности не может быть двух пределов.

Задача 4. Запишите явно определение того, что последовательность (x_n) не имеет предела.

Ответ. Первый вариант: последовательность не имеет предела, если у любого числа существует окрестность, вне которой лежит бесконечное число членов этой последовательности.

Второй вариант: последовательность (x_n) не имеет предела, если

$$\forall a\ \exists \varepsilon > 0\colon \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n > k\colon\ |x_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

Объясним, как строить отрицание к утверждению с кванторами: заметим, что утверждение «не ($\forall x$ что-то)» равносильно утверждению «$\exists x$: не что-то», а утверждение «не ($\exists x$: что-то)» равносильно утверждению «$\forall x$ не что-то». Поэтому построение отрицания к утверждениям типа определения 5 превращается в совершенно механическое упражнение: нужно просто «обратить кванторы» — заменить $\forall$ на $\exists$ и наоборот, и заменить утверждение в конце на его отрицание (например, $|x_n - a| < \varepsilon$ на $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$).

Задача 5. Какие из следующих последовательностей имеют пределы? Найдите эти пределы:

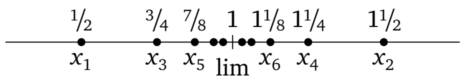
а) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$; б) $1, 2, 3, \ldots$; в) $-1, 1, -1, 1, \ldots$;

г) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$; д) $q, q+q^2, q+q^2+q^3, \ldots$;

е) $0{,}2, 0{,}22, 0{,}222, \ldots$; ж) $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, 1\frac{1}{8}, \ldots$

Ответ. а) 0; б) нет предела; в) нет предела; г) 0; д) $q/(1-q)$ при $|q|<1$, нет предела при $|q| \geqslant 1$; е) $0{,}(2) = 2/9$; ж) 1.

Полезно отметить члены последовательности на прямой, тогда будет видно, куда сходится последовательность.



К пункту ж)

Решение. а) Видно, что модули членов последовательности постоянно уменьшаются, причем становятся сколь угодно малыми (так как обратные им величины становятся сколь угодно большими). Значит, последовательность стремится к нулю.

Запишем это рассуждение более формально. Будем пользоваться вторым определением предела. Нужно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \forall n > k\ \ 1/n < \varepsilon,$$

т. е. что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon\ k > 1/\varepsilon.$$

Но по «аксиоме Архимеда» натуральные числа неограниченны, поэтому такое k действительно существует.

б) Видно, что последовательность неограниченно возрастает. Значит, у нее не может быть предела.

Чтобы это доказать, воспользуемся первым определением и заметим, что в $1/2$-окрестности любого числа лежит не более одного члена последовательности.

в) Заметим, что предел последовательности (если он есть) является пределом и для любой ее подпоследовательности (в самом деле, если вне какой-то окрестности лежит лишь конечное число членов последовательности, то и членов подпоследовательности вне нее лежит лишь конечное число).

Наша же последовательность состоит из двух подпоследовательностей, имеющих разные пределы (1 и -1). Значит, у нее не может быть предела. Действительно, с одной стороны, этот предел должен быть равен пределу последовательности из одних единиц, т. е. 1, а с другой — пределу последовательности из одних минус единиц, т. е. -1.

г) Видно, что последовательность состоит из двух подпоследовательностей, каждая из которых стремится к нулю. Значит, и сама последовательность стремится к нулю.

Пусть (y_n) и (z_n) сходятся к числу a. Докажем, что последовательность (x_n), получающаяся их чередованием ($x_{2n-1}=y_n$, $x_{2n}=z_n$), тоже сходится к a. Рассмотрим какую-нибудь ε-окрестность числа a. Вне нее лежит лишь конечное число членов последовательностей (y_n) и (z_n), а значит — конечное число членов последовательности (x_n).

д) Пусть предел существует и равен S. Заметим, что $a_{n+1}=q+qa_n$, поэтому ясно, что при переходе к пределу получается $q+qS=S$, откуда $S=\frac{q}{1-q}$, и остается только выяснить, когда последовательность сходится.

Заметим, что при $q>1$ все члены последовательности положительны, а S меньше нуля. Также заметим, что при $q<-1$ знаки x_n чередуются, а $S\neq 0$. Значит, при $|q|>1$ у последовательности нет предела.

Докажем теперь, что при $|q|<1$ последовательность сходится. По формуле для суммы геометрической прогрессии $x_{n-1}=q\frac{1-q^n}{1-q}=$ $=S(1-q^n)$. Проверим, что почти все члены последовательности попадают в ε-окрестность числа S. Для этого достаточно найти n, такое что $|S\cdot q^n|<\varepsilon$. Воспользуемся неравенством Бернулли: пусть $1/|q|=$ $=1+\alpha$, тогда $|q|^{-n}=(1+\alpha)^n>1+n\alpha$; в частности, для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать n так, чтобы $|q|^{-n}>S\varepsilon^{-1}$, т. е. $|S\cdot q^n|<\varepsilon$.

Случаи $q = \pm 1$ читателю предлагается рассмотреть самостоятельно.

е) Убедимся, что предел равен 0,(2). Нужно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > k\quad |0,(2) - 0,\underbrace{22\ldots2}_{n}| < \varepsilon.$$

Но $0,(2) - 0,\underbrace{22\ldots2}_{n} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{n}(2) = 0,(2) \cdot 10^{-n+1}$. Поэтому неравенство выполняется, если 10^{n-1} больше, чем $1/\varepsilon$. Для этого достаточно, чтобы 10^k было больше, чем $1/\varepsilon$. Такое k, конечно, существует для любого ε.

ж) Последовательность получается чередованием последовательностей $1 - 1/2^n$ и $1 + 1/2^n$, каждая из которых сходится к 1 (доказательство аналогично доказательству пункта а). Значит, предел равен 1.

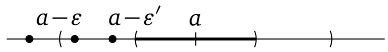
Определение 6. Последовательность (x_n) называется *монотонно убывающей* (*невозрастающей*, *возрастающей*, *неубывающей*), если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geqslant x_{n+1}$, $x_n < x_{n+1}$, $x_n \leqslant x_{n+1}$).

Определение 7. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если множество ее членов $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. В противном случае последовательность (x_n) называется *неограниченной*.

Задача 6. Докажите, что если (x_n) — монотонно неубывающая ограниченная последовательность, то (x_n) сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Решение. Предположим обратное — что $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не является пределом последовательности (x_n). Это означает, что в некоторой ε-окрестности числа a содержится лишь конечное число членов нашей последовательности. Если один из этих членов совпадает с a, то и все последующие члены совпадают с a (они не меньше a из монотонности и не больше, так как a — верхняя грань); в частности, a является пределом последовательности.



Если же ни один из конечного числа членов, попавших в ε-окрестность, с a не совпадает, то можно выбрать ε'-окрестность числа a, вообще не содержащую членов последовательности. Но тогда $a - \varepsilon'$

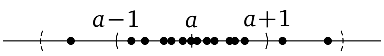
является верхней гранью множества членов последовательности (так как a — верхняя грань, а между a и $a-\varepsilon'$ нет элементов множества). Это противоречит тому, что a — *точная* верхняя грань.

Из доказательства видно, что можно отбросить условие ограниченности, заменив «сходится» на «сходится или стремится к $+\infty$» (необходимые определения см. далее).

Задача 7. Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограниченна. Верно ли обратное?

Ответ. Нет, не верно.

Решение. Пусть последовательность (x_n) имеет предел — число a. Тогда (по первому определению предела) все ее члены, кроме, быть может, конечного числа, лежат в промежутке $(a-1, a+1)$. Значит, всё множество членов последовательности лежит в ограниченном (как конечное объединение ограниченных множеств) множестве — объединении интервала и конечного множества точек.



Обратное утверждение неверно, как показывает задача 5в).

Определение 8. Говорят, что последовательность (x_n) *стремится к бесконечности*, если

$$\forall C > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \forall n > k \quad |x_n| > C.$$

Обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Задача 8. Дайте определение окрестности бесконечности так, чтобы предыдущее определение можно было переформулировать следующим образом: говорят, что последовательность *стремится к бесконечности*, если любая окрестность бесконечности содержит почти все члены этой последовательности.

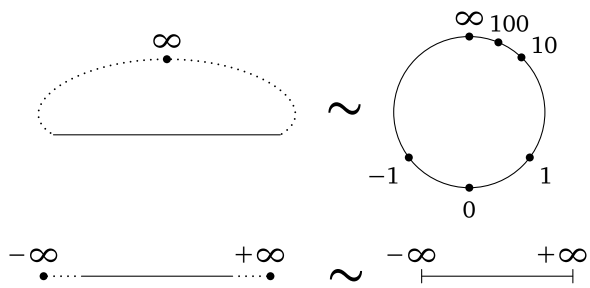
Ответ. Будем называть ε-окрестностью бесконечности множество $\{x \in \mathbb{R}\colon |x| > 1/\varepsilon\}$.

В определении используется «$|x| > 1/\varepsilon$» (а не просто «$|x| > \varepsilon$»), чтобы окрестность с меньшим ε была вложена в окрестность с бóльшим ε.

Задача 9. Определите следующие понятия: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Ответ. Первый вариант: назовем ε-окрестностью $+\infty$ (соответственно $-\infty$) множество $\{x \in \mathbb{R};\ x > 1/\varepsilon\}$ (соответственно $\{x \in \mathbb{R};\ x < -1/\varepsilon\}$). Теперь можно практически дословно использовать первое определение предела: «говорят, что последовательность стремится к $+\infty$, если любая ε-окрестность $+\infty$ содержит почти все члены этой последовательности».

Это можно рассматривать как описание *компактификации прямой* одной или двумя точками. При этом получается, соответственно, окружность или отрезок.



Второй вариант: будем говорить, что последовательность (x_n) стремится к $+\infty$, если

$$\forall C > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\colon \forall n > k\ \ x_n > C.$$

Задача 10. Какие из следующих последовательностей ограниченны? стремятся к бесконечности? неограниченны?

а) $x_n = n$; б) $x_n = (-1)^n n$; в) $x_n = n^{(-1)^n}$; г) $x_n = \frac{100n}{100+n^2}$;

д) $x_n = \begin{cases} n & \text{при четном } n; \\ \sqrt{n} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$

Ответ. а) Стремится к бесконечности (в частности, неограниченна); б) стремится к бесконечности; в) неограниченна (но к бесконечности не стремится); г) ограниченна; д) стремится к бесконечности.

Решение. а) Так как последовательность монотонна, по задаче 6 ее предел равен точной верхней грани множества ее членов. Но по «аксиоме Архимеда» натуральные числа неограниченны. Значит, последовательность стремится к бесконечности (точнее даже к $+\infty$).

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 93

Другое решение. Заметим, что $1/x_n$ лежит в ε-окрестности нуля тогда и только тогда, когда x_n лежит в ε-окрестности бесконечности. Поэтому последовательность (x_n) без нулевых членов стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда последовательность $(1/x_n)$ стремится к нулю. Но мы уже видели, что последовательность $(1/n)$ стремится к нулю.

б) Так как ε-окрестности бесконечности симметричны относительно нуля, последовательность (x_n) стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда стремится к бесконечности последовательность $(|x_n|)$. Это наблюдение показывает, что ответ здесь тот же, что и в предыдущем пункте.

в) Заметим, что для четных n последовательность совпадает со стремящейся к бесконечности последовательностью (n), а для нечетных — со стремящейся к нулю последовательностью $(1/n)$.

Значит, последовательность неограниченна (потому что уже множество ее четных членов неограниченно), но не стремится к бесконечности (потому что для произвольной окрестности бесконечности найдется бесконечно много нечетных членов, лежащих вне этой окрестности).

г) Видно, что числитель растет намного медленнее знаменателя (числитель растет линейно, а знаменатель — квадратично). Значит, последовательность ограниченна.

Для формального доказательства можно, например, воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $\frac{100+n^2}{2} \geqslant \sqrt{100n^2} = 10n$, следовательно, $x_n \leqslant \frac{100n}{20n} = 5$.

д) Видно, что последовательность состоит из двух подпоследовательностей, каждая из которых стремится к бесконечности. Значит, и сама последовательность стремится к бесконечности (см. решение задачи 5г).

Определение 9. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит бесконечное число членов этой последовательности.

Представить себе, что такое предел и предельная точка, может помочь следующее определение из книги А. Кириллова «Пределы». Пусть на прямой живут звери; будем называть ловушкой промежуток, на котором находятся почти все звери, а кормушкой — промежуток, на котором находится бесконечно много зверей. Тогда предел — это точка, любая окрестность которой является ловушкой, а предельная точка — точка, любая окрестность которой является кормушкой.

Определение 10. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n > k\colon\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Задача 11. Докажите равносильность последних двух определений.

Набросок решения. Аналогично решению задачи 2 достаточно показать, что подмножество натуральных чисел бесконечно тогда и только тогда, когда оно неограниченно.

Задача 12. а) Докажите, что предел является предельной точкой. Верно ли обратное утверждение?

б) Докажите, что у сходящейся последовательности ровно одна предельная точка.

в) Верно ли, что последовательность, имеющая ровно одну предельную точку, сходится?

Решение. а) Любая окрестность предела последовательности содержит почти все члены этой последовательности, т. е., в частности, бесконечное число членов. Значит, предел является предельной точкой.

Обратное утверждение неверно. Контрпример дает задача 5в).

б) Практически дословно проходит решение задачи 3: пусть у последовательности (x_n) есть предел a_1 и еще одна предельная точка a_2. Выберем у них непересекающиеся окрестности U_1 и U_2. Тогда в окрестности U_2 — а значит, вне окрестности U_1 — лежит бесконечно много членов нашей последовательности; т. е. в окрестности U_1 лежат не почти все члены последовательности, и a_1 не является пределом.

в) Нет, неверно. Контрпример дает задача 10в).

Задача 13. Найдите предельные точки последовательностей из задачи 5.

Ответ. а) 0; б) нет предельных точек; в) -1, 1; г) 0; д) $q/(1-q)$ при $|q|<1$, 0 и -1 при $q=-1$, нет предельных точек при других q; е) 2/9; ж) 1;

Решение. а), г), е), ж) Так как у последовательности есть предел, он и является единственной предельной точкой.

б) 1/2-окрестность произвольного числа содержит только одно натуральное число. Поэтому у последовательности неповторяющихся натуральных чисел нет предельных точек.

в) Ясно, что -1 и 1 являются предельными точками. Других предельных точек нет, так как у любого другого числа есть окрестность, не содержащая точек -1 и 1, т. е. не содержащая членов последовательности.

д) По формуле для суммы геометрической прогрессии (при $q \neq 1$), $x_n = q\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. При $|q|<1$ последовательность стремится к числу $\frac{q}{1-q}$, которое и будет ее единственной предельной точкой. При $|q|>1$ последовательность стремится к бесконечности и предельных точек у нее нет.

Осталось рассмотреть случаи $q=\pm 1$. При $q=1$ возникает последовательность из пункта б) (которая не имеет предельных точек), а при $q=-1$ — последовательность $-1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots$ (которая — аналогично пункту в) — имеет две предельные точки — 0 и -1).

Задача 14. Докажите, что a — предельная точка последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда у последовательности (x_n) есть подпоследовательность, сходящаяся к a.

Решение. Если у последовательности (x_n) есть подпоследовательность, сходящаяся к a, то в любой окрестности этой точки содержится бесконечно много членов подпоследовательности. Значит, a — предельная точка.

Пусть теперь, наоборот, a — предельная точка. Построим сходящуюся к ней подпоследовательность. Зафиксируем какую-нибудь сходящуюся к нулю последовательность (ε_n) (например, $\varepsilon_n = 1/2^n$). В каждой из ε_n-окрестностей числа a содержится бесконечно много членов нашей последовательности. Поэтому можно выбрать подпоследовательность, n-й член которой лежит в ε_n-окрестности числа a (в качестве первого члена подпоследовательности возьмем любой x_n из ε_1-окрестности, в качестве второго — какой-нибудь член из ε_2-окрестности с номером больше n и т. д.).

Задача 15*. Может ли множеством предельных точек последовательности быть: а) множество натуральных чисел; б) множество рациональных чисел?

Ответ. а) Да; б) нет.

Решение. а) Рассмотрим последовательность

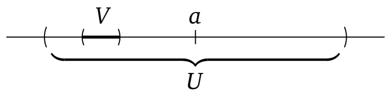
$$1,\ 1, 2,\ 1, 2, 3,\ 1, 2, 3, 4,\ 1, 2, 3, 4, 5,\ \ldots$$

Каждое натуральное число встречается в ней бесконечно много раз, поэтому все натуральные числа являются ее предельными точками. А никаких других предельных точек у нее нет, так как у любого ненатурального числа есть окрестность, не содержащая натуральных чисел.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 96

б) Докажем, что если все рациональные числа являются предельными точками некоторой последовательности (x_n), то и произвольное иррациональное число a является предельной точкой этой последовательности.

Действительно, рассмотрим произвольную окрестность U какого-нибудь числа a. В ней содержатся рациональные точки. Рассмотрим какую-нибудь окрестность V рационального числа из U, полностью содержащуюся в U. Внутри V лежит бесконечно много членов нашей последовательности. Значит, и внутри U лежит бесконечно много членов нашей последовательности, что и требовалось доказать.



Как мы увидим в листке «Топология прямой», проблема в *незамкнутости* множества рациональных чисел: можно показать, что множества предельных точек последовательностей — это в точности замкнутые множества.

Задача 16* (теорема Больцано—Вейерштрасса). а) Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

б) Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Указание. Все члены последовательности лежат внутри некоторого отрезка. Разделим его пополам. Потом еще раз пополам...

Решение. а) Так как последовательность ограниченна, все ее члены лежат внутри некоторого отрезка. Разделим его пополам; хотя бы в одной из половин содержится бесконечное число элементов последовательности; получившийся отрезок снова разделим пополам и т. д. Получаем последовательность вложенных отрезков, сходящуюся к некоторой точке. Эта точка будет предельной, так как в любой ее окрестности содержится один из выбранных нами отрезков.

б) По предыдущему пункту у любой ограниченной последовательности есть предельная точка, а по задаче 14 можно выделить сходящуюся к этой точке подпоследовательность.

Прогрессии

листок 19 / январь 2006

В этом листке мы снова отвлекаемся от курса анализа. На этот раз — ради устранения некоторых пробелов в образовании (заодно переводя дух после нескольких непростых листков). Соответственно, в целом листок довольно элементарен (хотя в него включены задачи 3в), г) — не для того, чтобы их решили, а просто чтобы зафиксировать утверждение).

Кроме того, что арифметические и геометрические прогрессии важны сами по себе, они дают первые (и самые простые) примеры последовательностей, заданных рекуррентными соотношениями ($a_{n+1}=a_n+d$ для арифметической и $a_{n+1}=da_n$ для геометрической прогрессии).

Определение 1. *Арифметической прогрессией* называется последовательность (конечная или бесконечная) вида

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots,$$

где $n\in\mathbb{N}$. Число d называется *разностью арифметической прогрессии*.

Конечный отрезок арифметической прогрессии называется конечной арифметической прогрессией.

Задача 1. Вычислите сумму первых n членов арифметической прогрессии.

Указание. Похожая задача уже была в листке «Индукция»: там доказывалось, что $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n^2-n}{2}$.

Ответ. $n\cdot a+d\cdot\frac{n^2-n}{2}$.

Решение. Если сгруппировать первое и последнее, затем второе и предпоследнее слагаемые, и так далее, то сумма чисел в каждой паре одна и та же для всех пар — это $2a+(n-1)d$. Всего пар $n/2$, если n четно, а если n нечетно, то единственный член, оставшийся без пары, — это $a+\frac{n-1}{2}d$. Поэтому формула $n\cdot a+d\cdot\frac{n^2-n}{2}$ верна и для четных, и для нечетных n.

Можно также доказать эту формулу с помощью математической индукции, так или иначе повторив решение задачи из листка «Индукция». Утверждение: S_n (сумма первых n членов) выражается формулой $na+d\frac{n^2-n}{2}$. База индукции очевидна, шаг индукции:

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=na+d\frac{n^2-n}{2}+a+nd=(n+1)a+d\frac{n^2+n}{2}.$$

Задача 2. Докажите, что каждый член (кроме первого) арифметической прогрессии равен среднему арифметическому равноотстоящих от него членов. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Решение. Обозначим i-й член прогрессии через a_i. По явной формуле для члена арифметической прогрессии

$$a_n = a + (n-1)d = \frac{1}{2}(a + (n-m-1)d + a + (n+m-1)d) = \\ = \frac{1}{2}(a_{n-m} + a_{n+m}).$$

Обратное утверждение: если любой член последовательности равен среднему арифметическому любых равноотстоящих членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия. Достаточно лишь условия, что любой член последовательности равен полусумме соседних с ним членов.

Доказательство легко провести индукцией по номеру члена последовательности. База: если всего чисел два, то их можно представить в виде a и $a+d$ для каких-то a и d. Шаг: если $a_{n-1} = a + (n-2)d$ и $a_n = a + (n-1)d$, то докажем, что $a_{n+1} = a + nd$. По условию, $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} = 2a + 2(n-1)d = a + (n-1)d + a_{n+1}$, откуда $a_{n+1} = a + nd$.

Задача 3. а) Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая лишь из простых чисел?

б*) Докажите, что найдется конечная арифметическая прогрессия длины 4, состоящая из простых чисел.

в**) Докажите, что найдется конечная арифметическая прогрессия сколь угодно большой длины, состоящая из простых чисел.

г**) Докажите, что в любой арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с разностью, бесконечно много простых чисел.

Решение. а) Ответ: не существует.

Для любого $D > 0$ существует конечный промежуток длины D, не содержащий простых чисел (см. задачу 10 листка «Целые числа 1» за 8 класс). Если арифметическая прогрессия из простых чисел существует и ее разность равна d, то достаточно рассмотреть промежуток длины $D > d$, чтобы получить противоречие.

б) Ответ: 7, 37, 67, 97. Идея решения: чтобы ни одно из чисел прогрессии не делилось на 2, 3 или 5, нужно взять разность прогрессии, равную $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Задачи 3в), г) — это примеры глубоких математических теорем, постановка которых понятна и естественна для школьников, а решение получено через много лет неэлементарными методами.

в**) Это утверждение было доказано Б. Грином и Т. Тао в 2004 году (доказательство можно найти в препринте `http://arxiv.org/abs/math.NT/0404188`).

г**) Доказательство этого утверждения (восходящее к Дирихле) обычно входит в стандартный университетский курс теории чисел.

Определение 2. *Геометрической прогрессией* называется последовательность вида

$$b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots,\ bq^n,\ \ldots,$$

где $b \neq 0$, $q \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Число q называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Задача 4. Вычислите сумму и произведение первых n членов геометрической прогрессии.

Ответ. $b \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (при $q \neq 1$); $b^n \cdot q^{(n^2-n)/2}$.

Решение. Докажем формулу для суммы геометрической прогрессии по индукции. База: при $n=1$ сумма $S_1 = b$ равна $b(1-q)/(1-q)$. Шаг индукции:

$$S_{n+1} = S_n + bq^n = b\left(\frac{1-q^n}{1-q} + q^n\right) = b\frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} = b\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Доказательство формулы для произведения членов геометрической прогрессии аналогично решению задачи 1 (с заменой сложения на умножение, а умножения — на возведение в степень).

Задача 5. Докажите, что квадрат каждого члена (кроме первого) геометрический прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Решение. Формулировка обратного к условию задачи утверждения: если любой член последовательности равен среднему геометрическому равноотстоящих членов, то эта последовательность — геометрическая прогрессия. Как и в задаче 2, достаточно лишь того, что каждый член последовательности равен среднему геометрическому соседних членов.

Доказательства аналогичны доказательствам задачи 2: нужно лишь заменить операцию сложения на умножение, а умножение — на возведение в степень.

Определение 3. Геометрическая прогрессия, у которой модуль знаменателя меньше 1, называется *бесконечно убывающей*.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — не обязательно убывающая последовательность: если $0 < q < 1$, а $b_1 < 0$, то она возрастает, а если $-1 < q < 0$, то знаки членов чередуются.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 100

Задача 6. Докажите, что бесконечно убывающая геометрическая прогрессия стремится к 0.

Решение. См. задачу 13а) листка «Арифметика пределов».

Определение 4. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия, (S_n) — последовательность ее частичных сумм. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то он называется *суммой геометрической прогрессии*

Задача 7. Докажите, что сумма бесконечной геометрической прогрессии существует, если и только если прогрессия бесконечно убывающая. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем q.

Ответ. $\frac{b}{1-q}$.

Решение. См. задачу 5д) листка «Предел последовательности».

Задача 8. Известно, что при любом натуральном n сумма первых n членов некоторой последовательности выражается формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Найдите 10-й член этой последовательности и докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

Решение. Пусть $a_n = S_n - S_{n-1}$ — n-й член последовательности. Тогда $a_n = 2(2n-1)+3 = 4n+1$ (здесь нумерация членов начинается с a_1). Поэтому 10-й член арифметической прогрессии равен 41.

Задача 9. Найдите произведение P первых n членов геометрической прогрессии, если известно, что их сумма равна S_1, а сумма чисел, обратных первым n членам прогрессии, равна S_2.

Ответ. $(S_1/S_2)^{n/2}$.

Решение. Поскольку последовательность чисел, обратных членам геометрической прогрессии, сама является геометрической прогрессией, по задаче 4 имеем

$$S_1 = b\frac{1-q^n}{1-q}, \quad S_2 = \frac{1}{b}\,\frac{1-1/q^n}{1-1/q},$$

откуда $\frac{S_1}{S_2} = b^2 q^{n-1}$.

По той же задаче, $P = b^n q^{n(n-1)/2} = (S_1/S_2)^{n/2}$.

Задача 10. Дана арифметическая прогрессия с общим членом a_n и геометрическая прогрессия с общим членом b_n, причем $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_1 \neq a_2$ и $a_n > 0$ для всех натуральных чисел. Докажите, что $a_n < b_n$ при $n > 2$.

Решение. Обозначим разность арифметической прогрессии за d, а знаменатель геометрической — за $1+q$. Тогда $q=(a_2-a_1)/a_1=d/a_1$. Таким образом, $a_{n+1}=a_1+nd=a_1(1+nq)$, а $b_{n+1}=a_1(1+q)^n$. Утверждение задачи теперь следует из неравенства Бернулли $1+nq<$ $<(1+q)^n$ (из условия задачи $q>0$).

Задача 11. Известно, что каждый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии отличается постоянным множителем K от суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, начинающейся со следующего номера. Какое значение может принимать K?

Решение. Если n-й член прогрессии равен bq^{n-1}, то

$$bq^{n-1}=Kbq^n\frac{1}{1-q}.$$

Так как $b\neq 0$, $q\neq 0$, имеем $K=\frac{1}{q}-1$. Если $0<|q|<1$, то, следовательно, $K>0$ или $K<-2$, причем все значения из этих промежутков реализуются.

Задача 12. Могут ли числа 10, 11, 12 быть членами одной геометрической прогрессии?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Для доказательства предположим обратное и запишем прогрессию в виде $b_n=bq^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $11/10=q^k$, $12/11=q^l$ для каких-то натуральных k и l. Следовательно, $(11/10)^l=(12/11)^k$, т. е. $11^{k+l}=12^k\cdot 10^l$. Из основной теоремы арифметики получаем, что $k+l=0$, т. е. $k=0$ и $l=0$, что невозможно.

Задача 13*. Докажите, что для того чтобы отличные от нуля числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ являлись n последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы при каждом целом $k\leqslant n$ выполнялось равенство

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}.$$

Решение. Докажем по индукции по n, что для членов арифметической прогрессии это равенство верно. База (для $n=2$) очевидна, докажем шаг. Шаг индукции эквивалентен равенству

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{k}{a_1a_{k+1}}-\frac{k-1}{a_1a_k}.$$

Домножим обе части на $a_1a_ka_{k+1}$. Получим, что утверждение шага индукции эквивалентно равенству $a_1=ka_k-(k-1)a_{k+1}$. Это равенство теперь следует из явной формулы $a_n=a+(n-1)d$.

Чтобы доказать обратное утверждение, нужно заметить, что все проведенные рассуждения обратимы.

Определение 5. Будем говорить, что несколько прогрессий *покрывают натуральный ряд*, если каждое натуральное число является членом хотя бы одной из этих прогрессий.

Задача 14. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть а) двумя; б) тремя; в*) четырьмя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными единице.

Решение. а) Рассмотрим числа 1, 2, 3, 4. Из условия задачи следует, что никакие три из них не могут лежать в одной прогрессии, значит, два находятся в одной, и два — в другой. Это противоречит тому, что разности прогрессий не равны единице и при этом различны между собой.

б) Если всего прогрессий три и они целиком покрывают натуральный ряд, то необходимое условие этого — сумма чисел, обратных к разностям, должна быть больше либо равна единицы. Действительно, рассмотрим произвольный участок натурального ряда длины N. Тогда число элементов на участке, покрываемых прогрессией с разностью d, не превосходит $[N/d]+1$.

Поэтому возможностей для разностей всего три — это 2, 3, 4, затем 2, 3, 5 и, наконец, 2, 3, 6.

Если разности — 2, 3, 4, то без ограничения общности можем считать, что прогрессии $a+2n$ и $b+4n$ не пересекаются (в противном случае вторая содержится в первой). Тогда они покрывают весь натуральный ряд, кроме некоторой прогрессии вида $c+4n$, которая не покрывается прогрессией вида $d+3n$.

Если разности — это 2, 3 и 6, то опять-таки мы можем считать, что прогрессии $a+3n$ и $b+6n$ не пересекаются. Поэтому они покрывают весь натуральный ряд, кроме трех прогрессий вида a_1+6n, a_2+6n и a_3+6n, причем можно заметить, что числа a_1, a_2, a_3 не являются одновременно четными или нечетными. Поэтому прогрессия вида $c+2n$ не может их покрывать.

Наконец, если разности — 2, 3 и 5, то числа от 1 до 8 покрываются не более чем четырьмя членами прогрессии $a+2n$, не более чем двумя членами прогрессии $b+3n$ и не более чем одним членом прогрессии $c+5n$ — поскольку хотя бы по одному члену прогрессий $b+3n$ и $c+5n$ на промежутке $[1, 8]$ попадет в прогрессию $a+2n$.

в*) С помощью перебора, аналогичного перебору в решении предыдущего пункта, можно получить решение и этой задачи.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 103

Задача 15*. Укажите пять арифметических прогрессий с различными целыми разностями, не равными единице, покрывающих натуральный ряд.

Ответ. $(1+2n)$, $(2+3n)$, $(4+4n)$, $(6+6n)$, $(10+12n)$.

Набросок решения. Возьмем пять различных целых разностей, наименьшее общее кратное которых равно какому-нибудь небольшому числу с большим количеством делителей — например, 12. В качестве искомых разностей у нас будут выступать 2, 3, 4, 6 и 12.

В таком случае нам достаточно замостить пятью арифметическими прогрессиями лишь числа от 1 до 12, так как остальные числа автоматически будут замощены.

Задача 16. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть конечным числом геометрических прогрессий.

Указание. Плотность геометрической прогрессии неограниченно падает при $n \to \infty$.

Решение. Пусть прогрессии имеют вид $b_i q_i^n$, K — их количество. Выберем такое число N, что условие $b_i q_i^n > N$ влечет неравенство $b_i(q_i^{m+1} - q_i^m) > K$ при всех $m > n$. Тогда хотя бы одно из чисел N, …, $N+K$ не покрыто нашими прогрессиями.

Задача 17. Докажите, что найдется n такое, что
а) $1+1/2+\ldots+1/n > 10$,
б) $1+1/2+\ldots+1/n$ больше любого наперед заданного числа.

Решение. См. листок «Ряды».

Задача 18. Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, … Существует ли арифметическая прогрессия а) длины 5; б) сколь угодно большой длины, составленная из членов этой последовательности?

Решение. а) Существует: это прогрессия вида $\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}\right\} = \left\{\frac{6}{60}, \frac{5}{60}, \frac{4}{60}, \frac{3}{60}, \frac{2}{60}\right\}$.

б) Существует. Из решения предыдущей задачи можно понять, как ее строить: $\left\{\frac{n}{n!}, \ldots, \frac{1}{n!}\right\}$.

Задача 19. Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых отсутствует ноль. Докажите, что сумма обратных величин любого количества из этих чисел (несовпадающих) не превосходит некоторого числа C.

Решение. Рассмотрим все числа, в записи которых отсутствует ноль, состоящие из k цифр. Тогда этих чисел всего 9^k. С другой стороны, любое из них больше 10^{k-1}. Таким образом, сумма обратных величин всех чисел, в записи которых не содержится ноль, заведомо меньше, чем

$$9\cdot\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right),$$

что равно 90.

Арифметика пределов

листок 20 / февраль 2006

Если листок «Предел последовательности» был посвящен *понятию* предела — определению и его фундаментальным свойствам, то в этом листке развивается техника *вычисления* (несложных) пределов.

Содержательно эта техника базируется на асимптотических неравенствах и оценках (и поэтому здесь полезно вспомнить разные неравенства, а особенно неравенство Бернулли): сравнении скорости роста разных функций (ключевая идея: экспоненциальная функция растет быстрее любого многочлена), выделении в выражении главного члена (соответственно, в отличие от идей предыдущего листка, во многом приложимых к метрическим пространствам вообще, эта техника специфична для $\mathbb{R}$). Говоря неформально, в этом листке мы учимся отбрасывать при вычислении пределов все лишнее. Воплощение этой идеи связано с удобным формализмом бесконечно малых последовательностей.

Кроме того, в этом листке возникает идея вычисления пределов при помощи составления уравнений, которая дальше активно используется при вычислении бесконечных сумм.

Задача 1. Пусть (x_n) и (y_n) — последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Какие из следующих утверждений верны?

а) Если для почти всех n выполнено $x_n = y_n$, то последовательность (y_n) сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

б) Если для почти всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$, то последовательность (y_n) сходится, причем $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

в) Если для почти всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$ и последовательность (y_n) сходится, то $A \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

г) Если для почти всех n выполнено $x_n < y_n$ и последовательность (y_n) сходится, то $A < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Ответ. Верны утверждения а) и в).

Решение. а) Да, верно. Действительно, есть только конечное число номеров k, таких что $x_k \neq y_k$. Значит, найдется такой номер K, что для всех $n > K$ верно, что $x_n = y_n$. Докажем, что y_n сходится к A. Для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое что $\forall n > N$ $|x_n - A| < \varepsilon$. Пусть $M = \max(K, N)$, тогда для любого $n > M$ выполнено равенство $x_n = y_n$ и, следовательно, $|y_n - A| < \varepsilon$.

Это утверждение означает, что изменение, добавление или удаление конечного числа членов последовательности не влияет на сходимость.

б) Нет, неверно. Пусть $x_n = 1$ для всех n, а $y_n = n$. Тогда для всех n выполнено $x_n \leqslant y_n$, при этом последовательность (y_n) не сходится.

В предложенном примере последовательность (y_n) стремится к бесконечности, но можно рассмотреть последовательность 99, 100, 99, 100, …, которая не имеет даже бесконечного предела.

в) Верно. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B < A$. Возьмем непересекающиеся ε-окрестности точек A и B, например, $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Тогда

$$\exists N_1\colon \forall n > N_1 \quad |x_n - A| < \varepsilon,$$
$$\exists N_2\colon \forall n > N_2 \quad |y_n - B| < \varepsilon.$$

Но тогда для всех $n > \max(N_1, N_2)$ выполнено $y_n < B + \varepsilon < A - \varepsilon < x_n$, что противоречит условию.

г) Нет, неверно. Рассмотрим, например, $x_n = 0$ и $y_n = \frac{1}{n}$, тогда $x_n < y_n$, но (см. решение задачи 2а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Определение 1. Последовательность (α_n) называется *бесконечно малой*, если ее предел равен 0. Обозначение: $(\alpha_n) = o(1)$.

Хотя в записи $(\alpha_n) = o(1)$ присутствует знак равенства, это просто обозначение утверждения «последовательность (α_n) — бесконечно малая», а не равенство каких-либо объектов. Различных бесконечно малых последовательностей, вообще говоря, много.

Задача 2. Какие из следующих последовательностей бесконечно малы:

а) $\left(\frac{1}{n}\right)$; б) $\left(\frac{n}{2^n}\right)$; в) $\left(\frac{n^5}{2^n}\right)$; г) $\left(\frac{n^2+2n+5}{n^3}\right)$; д) $\left(\frac{1{,}1^n}{n^{10}}\right)$?

Ответ. Все, кроме д).

Решение. а) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $N > \frac{1}{\varepsilon}$, тогда для любого $n > N$ выполнено $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

б) Нетрудно доказать по индукции, что при $n > 4$ выполнено неравенство $2^n > n^2$. По предыдущему пункту для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N > 4$, такое что $\forall n > N$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда для всех $n > N$ будет выполнено неравенство $\frac{n}{2^n} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. последовательность бесконечно малая.

Суть последнего решения в следующем. Если $|a_n| < |b_n|$ (при почти всех n) и последовательность (b_n) бесконечно мала, то бесконечно мала и последовательность (a_n) (задача 8). Поэтому для доказательства бесконечной малости достаточно оценить последовательность сверху, например, последовательностью $(1/n)$.

в) Аналогично предыдущему пункту доказывается, что с некоторого номера $2^n > n^6$, и поэтому $\frac{n^5}{2^n} < \frac{1}{n}$.

г) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Заметим, что $\frac{n^2+2n+5}{n^3} < \frac{8}{n}$. Пусть $N > \frac{8}{\varepsilon}$. Тогда для любого $n > N$ выполнено $\frac{n^2+2n+5}{n^3} < \frac{8}{n} < \varepsilon$ (так как $n^2+2n+5 < 8n^2$).

д) В числителе стоит экспонента, которая растет быстрее, чем любая степень числа n, поэтому последовательность не является бесконечно малой (и даже стремится к $+\infty$).

Действительно, по неравенству Бернулли

$$\frac{1{,}1^n}{n^{10}} = \left(\frac{(1+1/10)^{n/10}}{n}\right)^{10} \geqslant \left(\frac{1+n/100}{n}\right)^{10} = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{100}\right)^{10} > \frac{1}{100^{10}},$$

т. е. последовательность ограничена снизу положительным числом, а значит, не может быть бесконечно малой (так как при $\varepsilon = \frac{1}{100^{10}}$ нет ни одного члена последовательности в ε-окрестности нуля).

Задача 3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечно малая последовательность (α_n), что $x_n = a + \alpha_n$.

Эта несложная задача доказывает, что сходящуюся последовательность можно представить в виде «число + бесконечно малая». Такое представление очень помогает при решении задач (примерно так же, как запись нечетного числа в виде $2n+1$).

Решение. Пусть $\alpha_n = a - x_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ |\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$, что равносильно тому, что последовательность (α_n) бесконечно малая.

Задача 4. Какие из следующих утверждений верны:

а) сумма (разность) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

б) произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

в) частное бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 108

г) произведение бесконечно малой последовательности на произвольную есть бесконечно малая;

д) произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая?

Ответ. Верны утверждения а), б) и д).

Решение. а) Пусть (x_n) и (y_n) — бесконечно малые последовательности. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N_1\colon \forall n > N_1 \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$
$$\exists N_2\colon \forall n > N_2 \quad |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда

$$\forall n > N \quad |x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \varepsilon.$$

б) Заметим, что бесконечно малая последовательность (как и любая сходящаяся) ограниченна, поэтому см. доказательство пункта д).

в) Неверно. Достаточно рассмотреть две одинаковые бесконечно малые последовательности, тогда их частное будет тождественной единичной последовательностью.

г) Контрпример дают последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)$ и (n).

д) Пусть последовательность (x_n) бесконечно мала, а последовательность (y_n) ограниченна, т. е. $\exists C > 0\colon \forall n\ |y_n| < C$. Докажем, что их произведение будет бесконечно малой последовательностью. Действительно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{C}$, т. е. $\forall n > N\ |x_n y_n| < \varepsilon$.

Задача 5. Дайте определение бесконечно большой последовательности. Сформулируйте и докажите свойства бесконечно больших последовательностей, аналогичные свойствам бесконечно малых последовательностей.

Решение. Будем называть последовательность (x_n) бесконечно большой, если ее предел равен бесконечности.

Заметим, что сумма бесконечно больших последовательностей может не быть бесконечно большой. Например, если последовательность (x_n) бесконечно большая, то и последовательность $(-x_n)$ бесконечно большая, но их сумма представляет собой нулевую последовательность.

Свойства бесконечно больших последовательностей:

1) произведение бесконечно большой последовательности и ненулевой константы есть бесконечно большая последовательность;

2) произведение бесконечно больших последовательностей есть снова бесконечно большая последовательность;

3) сумма бесконечно большой и ограниченой последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

Задача 6. Докажите, что если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

а) последовательность $(x_n \pm y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

б) последовательность $(x_n \cdot y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

в) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Подумайте, что означает это утверждение в случае, когда $y_n = 0$ для некоторых n.

Указание. Воспользуйтесь задачей 3.

Решение. а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда последовательности $(x_n - a)$ и $(y_n - b)$ — бесконечно малые. Но тогда их сумма будет тоже бесконечно малой, а значит, $((x_n \pm y_n) - (a \pm b))$ — бесконечно малая и искомое равенство пределов доказано.

б) По задаче 3 $(x_n) = a + o(1)$ и $(y_n) = b + o(1)$. Значит,

$$(x_n \cdot y_n) = (a + o(1))(b + o(1)) = ab + a \cdot o(1) + b \cdot o(1) + o(1)o(1) = \\ = ab + o(1).$$

в) Заметим, что в последовательности (y_n) может быть только конечное число нулевых членов, поэтому их можно отбросить (см. задачу 1а).

Так как можно применить пункт б) к последовательностям (x_n) и $(1/y_n)$, достаточно доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, то последовательность $(1/y_n)$ сходится к $1/b$.

Заметим, что так как $b \neq 0$, то последовательность $(1/y_n)$ ограниченна. Действительно, все члены последовательности y_n, начиная с некоторого номера N, лежат в окрестности $\left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right)$, и мы считаем, что $y_n \neq 0$, поэтому найдется δ-окрестность нуля, в которой нет членов последовательности. Поэтому $|y_n| > \delta$, откуда $\frac{1}{|y_n|} < \frac{1}{\delta}$.

Осталось доказать, что последовательность $\left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right)$ — бесконечно малая. Но $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} = (b - y_n)\frac{1}{y_n}\frac{1}{b}$, причем последовательность $(b - y_n)$ — бесконечно малая, а последовательности $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ и $\left(\frac{1}{b}\right)$ — ограниченные.

Задача 7. Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — бесконечно большая последовательности без нулевых членов. Докажите, что $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ — бесконечно большая, а $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ — бесконечно малая.

Решение. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как последовательность (y_n) — бесконечно большая, то найдется число N, такое что $\forall n > N$ $|y_n| > \frac{1}{\varepsilon}$. Но тогда $\forall n > N$ $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \varepsilon$. Значит, последовательность $\left(\frac{1}{y_n}\right)$ — бесконечно малая.

Обратное утверждение доказывается аналогично. Важно только отметить, что утверждение имеет смысл, если в последовательности (x_n) есть лишь конечное число нулевых членов.

Задача 8. Если последовательность (α_n) бесконечно малая и $|x_n| \leqslant |\alpha_n|$ для почти всех n, то последовательность (x_n) — бесконечно малая.

Решение. Докажем, что последовательность (x_n) — бесконечно малая. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

1) Последовательность (α_n) бесконечно малая, поэтому $\exists N_1\colon \forall n > N_1$ $|\alpha_n| < \varepsilon$.

2) $|x_n| \leqslant |\alpha_n|$ для почти всех n, поэтому $\exists N_2\colon \forall n > N_2$ $|x_n| < |\alpha_n|$.

Рассмотрим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для любого $n > N$ верно $|x_n| < |\alpha_n| < \varepsilon$.

Задача 9 (принцип двух милиционеров). Докажите, что если последовательности (x_n) и (z_n) сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и для почти всех n выполнено неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, то последовательность (y_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Решение. Пусть неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ выполнено для всех $n > N_0$. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено:

$$\exists N_1\colon \forall n > N_1 \quad |x_n - A| < \varepsilon;$$
$$\exists N_2\colon \forall n > N_2 \quad |z_n - A| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Тогда для любого $n > N$:

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n;$$
$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon;$$
$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon.$$

Откуда $A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon$, и значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Другое решение. Начиная с некоторого номера N, для всех $n > N$ будет выполнено: $|z_n - y_n| \leqslant |z_n - x_n|$. Но последовательность $(z_n - x_n)$ — бесконечно малая, значит, по предыдущей задаче, последовательность $(z_n - y_n)$ — тоже бесконечно малая и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Задача 10. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$; б) $x_n = \frac{a_1n^2 + b_1n + c_1}{a_2n^2 + b_2n + c_2}$; в) $x_n = \frac{n^2 \sin n!}{n^3 + 1}$;

г) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; д) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; е*) $x_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Решение. а) Разделим числитель и знаменатель на n: $x_n = \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2 + 1/n}{3 + 2/n}$. Теперь заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$, так как последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ — бесконечно малая, аналогично получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

б) Рассмотрим 5 случаев.

1. Если $a_2 \neq 0$, то преобразуем последовательность:

$$x_n = \frac{a_1n^2 + b_1n + c_1}{a_2n^2 + b_2n + c_2} = \frac{a_1 + b_1\dfrac{1}{n} + c_1\dfrac{1}{n^2}}{a_2 + b_2\dfrac{1}{n} + c_2\dfrac{1}{n^2}}.$$

Так как последовательности $\left(\frac{1}{n}\right)$ и $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ — бесконечно малые, то предел $a_1 + b_1\frac{1}{n} + c_1\frac{1}{n^2}$ будет равен a_1, а предел $a_2 + b_2\frac{1}{n} + c_2\frac{1}{n^2}$ будет равен a_2, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_1}{a_2}$.

Точно таким же образом можно доказать, что предел частного двух многочленов одинаковых степеней равен отношению старших коэффициентов.

2. Если $a_2=0$, но $a_1\neq 0$, то последовательность $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ будет бесконечно малой (доказательство аналогично задаче 2г), а наша последовательность, по задаче 1, будет бесконечно большой.

3. Если $a_1=a_2=0$, но $b_2\neq 0$, то предел равен $\frac{b_1}{b_2}$. (Проведите доказательство самостоятельно, следуя п. 1.)

4. Если $a_1=a_2=b_2=0$, но $b_1\neq 0$, то, аналогично п. 2, последовательность будет бесконечно большой.

5. Если $a_1=a_2=b_1=b_2=0$, то последовательность тождественно равна $\frac{c_1}{c_2}$ и ее предел будет равен $\frac{c_1}{c_2}$.

в) Последовательность $y_n=\frac{n^2}{n^3+1}=\frac{1}{n+1/n^2}$ — бесконечно малая, а последовательность $z_n=\sin n!$ — ограниченная, поэтому $(x_n)=(y_n\cdot z_n)$ — тоже бесконечно малая и стремится к нулю.

г) Преобразуем последовательность: $x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}$. Заметим, что $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1+\frac{1}{n}$, поэтому, по принципу двух милиционеров, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}=1$.

д) Преобразуем последовательность, домножив и разделив на сопряженное, $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Тогда $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$, последовательность $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ стремится к нулю. Значит, по принципу двух милиционеров последовательность (x_n) тоже стремится к нулю.

е*) Заметим, что $\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{(2/3)^n+1}{2\cdot(2/3)^n+3}$. Последовательность $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ — бесконечно малая (см. задачу 13а), поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2/3)^n+1}{2\cdot(2/3)^n+3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}((2/3)^n+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2\cdot(2/3)^n+3)}=\frac{1}{3}.$$

Задача 11. Докажите, что монотонно возрастающая неограниченная последовательность стремится к $+\infty$.

Решение. Так как снизу последовательность (x_n) ограничена своим первым членом, то она неограниченна сверху. Поэтому $\forall C\ \exists N$: $x_N>C$, но тогда из монотонности следует, что $\forall n>N\ x_n\geqslant x_N>C$, что и означает, что последовательность стремится к $+\infty$.

Задача 12. Докажите, что при перестановке членов последовательности предел не меняется.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 113

Решение. Пусть последовательность (y_n) получается из последовательности (x_n) перестановкой членов, т. е. $x_n = y_{\sigma(n)}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ |x_n - A| < \varepsilon$. Пусть $N_0 = \max(\sigma(1), \ldots, \sigma(N))$, тогда для любого $n > N_0$, $y_n = x_k$, причем $k > N$, т. е. $\forall n > N_0\ |y_n - A| < \varepsilon$.

Задача 13. Докажите, что существуют пределы и найдите их для следующих последовательностей:

а) $x_n = c^n$ $(|c| < 1)$; б) $x_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}$;

в) $x_1 = 1/2$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$; г) $x_n = \dfrac{c^n}{n!}$; д) $x_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$.

В этой задаче демонстрируется следующий принцип. Пусть мы умеем рекурсивно выражать n-й член последовательности через несколько предыдущих. Тогда предел последовательности (если он существует) удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению. Этот способ не позволяет доказать, что последовательность сходится, но позволяет найти предел, если известно, что он есть. Так находили, куда стремятся последовательности, еще до формального определения предела.

Решение. а) Пусть $c > 0$, тогда последовательность монотонно убывает и ограничена снизу нулем, а значит, сходится к некоторому числу A. Но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, т. е. $A = cA$, а значит, $A = 0$.

Для случая $c < 0$ достаточно заметить, что $-|x_n| \leqslant x_n \leqslant |x_n|$. Поэтому из доказанного выше и принципа двух милиционеров следует, что предел также равен нулю.

Другое решение. Докажем, что предел этой последовательности равен нулю. Пусть $\dfrac{1}{|c|} = 1 + \lambda$ $(\lambda > 0)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Найдем такой номер N, что $1 + N\lambda > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда по неравенству Бернулли для любого $n > N$

$$\frac{1}{|c|^n} = (1+\lambda)^n > 1 + n\lambda > \frac{1}{\varepsilon},$$

т. е. $|c|^n < \varepsilon$.

б) Пусть ее предел равен A. Так как $A^2 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} 3x_n = 3A$, $A = 3$ или $A = 0$. Но последовательность положительна и монотонно возрастает, а значит, отделена от нуля (например, своим первым членом), поэтому $A = 3$.

Осталось доказать, что это последовательность сходится. Для этого докажем, что она монотонно возрастает и ограниченна сверху.

Докажем, что $x_n < 3$ по индукции. База: $x_1 = \sqrt{3} < 3$. Шаг: пусть $x_n < 3$. Тогда $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3$.

Теперь, пользуясь тем, что $x_n<3$, докажем, что $x_{n+1}>x_n$. Действительно, $x_{n+1}=\sqrt{3x_n}>\sqrt{x_n\cdot x_n}=x_n$.

Значит, последовательность сходится.

в) Последовательность (x_n) монотонно убывает. Также несложно доказать по индукции, что $0<x_n<1$ (действительно, если $0<t<1$, то и $0<t-t^2<1$). Значит, последовательность сходится. Обозначим ее предел через A. Значит, как и в предыдущей задаче, ее предел удовлетворяет соотношению: $A=A-A^2$, откуда получаем, что $A=0$.

г) Рассмотрим случай $c>0$ ($c<0$ разбирается аналогично). Тогда начиная с номера $N>[c]+1$ последовательность монотонно убывает и ограничена снизу нулем, а значит, сходится. Тогда

$$A=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\frac{c}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=A\cdot 0=0.$$

Другое решение. Пусть $N>2|c|$. Тогда для $n>N$ выполнено $|x_n|<$ $<\frac{1}{2^{n-N}}|x_N|$. Правая последовательность в силу пункта а) стремится к нулю, значит, по принципу двух милиционеров исходная последовательность также стремится к нулю.

д) Пусть $a>1$ (случай $0<a<1$ рассматривается аналогично). Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдется такое число N, что $(1+\varepsilon)^N>1+N\varepsilon>a$. Тогда для любого $n>N$ верно, что $(1+\varepsilon)^n>a$, то есть $1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$.

Задача 14. Докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$.

Решение. а) Докажем, что показательная функция растет быстрее любой степени, в том числе быстрее степени n. Пусть $a=1+\lambda$, тогда

$$a^n=\left((1+\lambda)^{n/(k+1)}\right)^{k+1}\geqslant\left(1+\frac{n\lambda}{k+1}\right)^{k+1}>\left(\frac{\lambda}{k+1}\right)^{k+1}n^{k+1}.$$

Поэтому $0\leqslant\frac{n^k}{a^n}\leqslant\mathrm{const}\cdot\frac{1}{n}$, а значит, наша последовательность будет бесконечно малой.

б) Возьмем любое $\varepsilon>0$. В предыдущем пункте мы доказали, в частности, что для любого $\varepsilon>0$ начиная с некоторого номера n выполнено $(1+\varepsilon)^n\geqslant Cn^2$ (для некоторого $C>0$). То есть для почти всех n верно $1<n<Cn^2\leqslant(1+\varepsilon)^n$, что означает $1<\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$.

в) Покажем, что обратная последовательность будет бесконечно большой. Для этого докажем, что для любого $C>0$ начиная с некоторого номера будет выполнено $\sqrt[n]{n!} > C$, то есть что $\frac{n!}{C^n} > 1$. Действительно, пусть $k > 100C$, тогда начиная с номера k числитель домножается на число, большее $100C$, а знаменатель на C, поэтому дробь с каждым номером увеличивается минимум в 100 раз, значит, станет большей 1.

г) Пусть $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}$. Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1}$. Тогда, с одной стороны, $y_n > x_n$, а с другой стороны, $x_n \cdot y_n = \frac{1}{2n+1}$. Значит, $x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Докажите самостоятельно, что последовательность $\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ — бесконечно малая.

Задача 15. Придумайте две последовательности, у каждой из которых существует единственная предельная точка 57, а у их суммы существует единственная предельная точка 0.

Решение. Рассмотрим две последовательности: 57, 1, −1, 57, 2, −2, 57, 3, −3, … и −1, −1, 57, −2, −2, 57, −3, −3, 57, … Тогда у каждой из последовательностей есть единственная предельная точка — 57 (так как значение 57 принимается бесконечное число раз, а в окрестности любой другой точки содержится лишь конечное число членов). При этом у суммы последовательностей каждый третий член будет нулевым, а остальные будут стремится к минус бесконечности, т. е. будет единственная предельная точка 0.

Задача 16*. а) Докажите, что последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходятся и их пределы равны.

б) Докажите, что последовательность $z_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ сходится к тому же пределу.

Этот предел обозначается буквой e.

Указание. в) Эти последовательности монотонны.

г) Воспользуйтесь биномом Ньютона и изучите поведение каждого из его членов.

Решение. а) Докажем, что последовательность (x_n) монотонно возрастает. Действительно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \iff \frac{n}{n+1} < \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-\frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}.$$

Аналогично доказывается, что последовательность (y_n) монотонно убывает. При этом $x_n < y_n$, поэтому обе эти последовательности сходятся. Заметим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, значит, пределы последовательностей (x_n) и (y_n) равны.

б) Раскроем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по биному Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}+\ldots+\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots$$

Посмотрим, что происходит с k-м членом при $n\to\infty$:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} = \\ = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to \frac{1}{k!}$$

(действительно, в последнем произведении *при фиксированном* k каждый из сомножителей, кроме первого, стремится к 1 при $n\to\infty$). Теперь уже не удивительно, что последовательности (x_n) и (z_n) имеют одинаковые пределы.

Докажем это формально в духе принципа двух милиционеров. С одной стороны, как мы видели, k-й член бинома Ньютона для x_n не превосходит $\frac{1}{k!}$, поэтому $x_n \leqslant z_n$, и $\lim x_n \leqslant \lim z_n$. С другой стороны, рассмотрим произвольное k; при $n\to\infty$ первые k членов бинома Ньютона для x_n стремятся к $\frac{1}{k!}$, а значит, $\lim x_n \geqslant z_k$, и (ввиду произвольности выбора k) $\lim x_n \geqslant \lim z_n$. Для завершения доказательства осталось вспомнить, что последовательность (z_n) монотонна, поэтому рассматриваемый предел существует.

Ряды. Часть 1

листок 21 / март 2006

Вычисление суммы бесконечного ряда обычно состоит из двух практически независимых частей — собственно нахождения суммы и доказательства сходимости. Мы сначала учимся считать суммы, и лишь затем обосновываем те приемы, которыми пользуемся — так же как в начальной школе следует сначала научиться считать, а потом формально изучать те законы, которые при этом применяются. Для того чтобы избежать лишних технических сложностей, мы ограничиваемся здесь рядами с положительными членами. В частности, это позволяет решать задачи листка и до введения понятия предела.

При решении задач этого листка можно (если не требуется обратное) пользоваться существованием рассматриваемых сумм без доказательства.

Определение 1. Пусть $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Точная верхняя грань S частичных сумм ряда с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется *суммой ряда*, т. е. $S = \sum a_n = \sup\{S_n \mid S_n = a_1 + \ldots + a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Обозначение: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, сокращенно $S = \sum a_n$. Если у ряда существует сумма, то он называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Задача 1. Докажите, что ряд a_n с положительными a_n сходится тогда и только тогда, когда существует такое B, что $a_1 + \ldots + a_n < B$ для любого n.

Решение. Достаточно вспомнить, что множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань тогда и только тогда, когда оно ограничено сверху.

Задача 2 (составление уравнений). Найдите:

а) $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{q^n}$ $(a > 0, q > 1)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; д*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Указание. а) $\frac{1}{2} + \frac{S}{2} = S$.

Ответ. а) 1; б) $\frac{a}{q-1}$; в) ряд расходится; г) 2; д) 6.

Решение. а) Заметим, что если каждый член суммы разделить на 2, то получится та же сумма, только без первого члена. Соответственно, прибавив $\frac{1}{2}$ мы получим исходную сумму:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=S,$$

откуда $S=1$.

б) Аналогично предыдущему пункту получаем уравнение $\frac{a}{q}+\frac{S}{q}=$ $=S$, откуда $S=\frac{a}{q-1}$.

в) Снова составляя уравнение, получаем, что $1+2S=S$, т. е. $S=$ $=-1$. Конечно же, ряд из положительных членов не может сходится к отрицательному числу. Возникшее противоречие показывает, что ряд расходится.

Ответ «$S=-1$» хотя и абсурден, но получен естественным способом. Как это нередко бывает в математике, такому ответу можно придать смысл в рамках некоторых более глубоких теорий (аналитическое продолжение; сходимость по 2-адической норме). Это, однако, выходит за рамки данного курса.

г) Попробуем выразить сумму членов начиная со второго через S — это даст нам уравнение на S. Заметим, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}(S+1).$$

Получаем уравнение $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(S+1)=S$, откуда $S=2$.

Осталось проверить, что ряд сходится, т. е. что его частичные суммы ограничены. Будем доказывать по индукции, что $S_n<S=2$. Заметим, что полученное выше уравнение можно записать и для частичных сумм:

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(S_n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(S_n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)=1+\frac{1}{2}S_n.$$

Поэтому если $S_n<2$, то и $S_{n+1}<2$.

д) Будем следовать тому же плану:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}+2\frac{n}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}S+\frac{5}{2},$$

откуда $S=3+\frac{1}{2}S$, и $S=6$. Доказательство сходимости оставляется читателям в качестве упражнения.

Действуя подобным образом, можно вычислить сумму $\sum\frac{n^k}{2^n}$ для любого заданного k.

Задача 3. Докажите, что $\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n$, $\sum \lambda a_n=\lambda\sum a_n$ (при $\lambda>0$) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+\ldots+a_k+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k+n}$.

Решение. Начнем с первого утверждения. Пусть A_n, B_n и S_n — частичные суммы рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$ и $\sum(a_n+b_n)$ соответственно. Тогда $S_n=A_n+B_n$, поэтому

$$\sup\{A_n\}+\sup\{B_n\}=\sup\{A_k+B_l\}\overset{(*)}{=}\sup\{A_n+B_n\}=\sup\{S_n\},$$

что и требовалось доказать. (Поясним равенство $(*)$: неравенство в одну сторону верно, так как правое множество содержится в левом; а в другую — так как частичные суммы монотонно возрастают, а потому $A_k+B_l\leqslant A_{\max\{k,l\}}+B_{\max\{k,l\}}$.)

Второе утверждение следует из того, что $\sup\{\lambda S_n\}=\lambda\sup\{S_n\}$ (при $\lambda\geqslant 0$).

Наконец, третье утверждение следует из того, что $\sup\{S_n\mid n\geqslant 1\}=$ $=\sup\{S_n\mid n\geqslant k+1\}=(a_1+\ldots+a_k)+\sup\{S'_n\mid n\geqslant 1\}$, где S'_n — частичные суммы ряда $\sum a_{k+n}$.

Как мы увидим в следующем листке, утверждения задачи верны и без условия положительности членов.

Задача 4 (перестановка слагаемых). Найдите:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

Указание. $\frac12+\frac14+\frac14+\frac18+\frac18+\frac18+\ldots=\left(\frac12+\frac14+\frac18+\ldots\right)+\left(\frac14+\frac18+\ldots\right)+$ $+\left(\frac18+\ldots\right)+\ldots$

Ответ. а) 2; б) $\frac{k+1}{2^{k-1}}$; в) 6.

Решение. а) Воспользуемся указанием:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}=2.$$

Основная цель этого листка — не нахождение сумм конкретных рядов, а освоение основных методов их подсчета. Именно поэтому одни и те же несложные суммы (в частности, эту, встречавшуюся уже в задаче 2) в разных задачах предлагается вычислить разными способами.

б) Задача легко сводится к предыдущей:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+k-1}{2^{n+k-1}}=\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}+\frac{k-1}{2^n}\right)=\frac{k+1}{2^{k-1}}.$$

в) Воспользуемся предыдущей задачей:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^{k-1}}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)=6.$$

Задача 5. а) Докажите, что если $a_n>0$ для $n\in\mathbb{N}$ и $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — биекция («перестановка»), то $\sum a_n=\sum a_{\sigma(n)}$.

б*) Придумайте ряд (с произвольными a_n) и такую перестановку $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что $\sum a_n\neq\sum a_{\sigma(n)}$.

Указание. Для каждой частичной суммы одного ряда найдите содержащую ее сумму другого.

Решение. а) Пусть S_n и S'_n — частичные суммы соответственно исходного и нового рядов. Докажем, что для каждого k найдется такое l, что $S_k\leqslant S'_l$: возьмем $l=\max\limits_{n\leqslant k}\sigma(n)$, тогда среди первых l членов нового ряда содержатся первые k членов старого; значит, $S_k\leqslant S'_l$.

Таким образом, доказано, что $S\leqslant S'$ для любой перестановки. Но, применяя то же утверждение для обратной перестановки, получаем, что $S'\leqslant S$. Значит, $S'=S$ (в частности, новый ряд сходится).

б) См. задачу 17 в следующем листке.

Задача 6 (умножение рядов). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2\cdot 2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

Указание. г) $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=1\cdot 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 1}+$ $+\frac{1}{4\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 4}+\ldots$

Ответ. а) 2; б) 4; в) 6.

Решение. а) Воспользуемся указанием:

$$4=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2^{n-k}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},$$

откуда искомая сумма равна 2.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 121

б) Число $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + \ldots + n$ в числителе (в сочетании с предыдущим пунктом) довольно прозрачно указывает на следующий способ:

$$4 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{n-k}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{2^n} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2 \cdot 2^n},$$

в) Сведем задачу к предыдущим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)-n}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2 \cdot 2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 6.$$

Задача 7. а) Докажите, что если $a_n, b_n > 0$, то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0).$$

б*) Верно ли это без условия $a_n, b_n > 0$?

Произведением двух рядов естественно считать квадратную таблицу

$$\begin{array}{ccccc} a_2b_0 & & a_2b_1 & & a_2b_2 \\ & + & & + & \\ a_1b_0 & & a_1b_1 & & a_1b_2 \\ & + & & + & \\ a_0b_0 & & a_0b_1 & & a_0b_2 \end{array} \qquad \sum_i a_i \sum_j b_j = \sum_{i,j} a_i b_j.$$

Остается как-то превратить эту сумму по двум индексам в сумму по одному индексу. В принципе делать это можно было бы разными способами. Например, сначала просуммировать таблицу по строкам, а потом — по столбцам: $\sum\limits_i \sum\limits_j a_i b_j$. В задаче же предлагается вычислить суммы на диагоналях и сложить их. Этот способ наиболее естественен с точки зрения градуировок — ср. с умножением многочленов $\sum\limits_i a_i x^i \sum\limits_j a_j x^j$.

Отметим, впрочем, что, так как в рядах без отрицательных слагаемых можно переставлять члены, в нашей ситуации все способы дают один и тот же ответ.

Решение. а) Обозначим частичные суммы рассматриваемых рядов за A_n, B_n и S_n. Тогда $S_n = A_n B_n$, поэтому

$$\sup\{A_n\} \cdot \sup\{B_n\} = \sup\{A_k B_l\} = \sup\{A_n B_n\} = \sup\{S_n\},$$

что и требовалось доказать (ср. с решением задачи 3).

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 122

б) Нет, не верно. При $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ левая часть сходится, а правая расходится, так как модуль члена ряда не стремится к нулю:

$$|a_n b_0 + \ldots + a_0 b_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$$

Задача 8. Найдите: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; в*) $\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{n^2}{2^n}$.

Указание. $1\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(3-2) + \frac{1}{8}(4-3) + \ldots$

Решение. а) При помощи указания мгновенно находим, что $S = 2$.

б) Применим тот же трюк:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} = \\ = 1 + 2 \cdot 2 + 1 = 6.$$

Вообще говоря, подобные преобразования могут привести и к результату вроде

$$0 = 0 + 0 + \ldots = (1-1) + (1-1) + \ldots = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1.$$

Ситуация, в которой такие преобразования все же законны, описана в следующей задаче.

в) То же решение в целом проходит и здесь:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{n=1}^{k} n^2 \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - \frac{k^2}{2^k} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{(n+1)^2 - n^2}{2^n} = \\ = 1 - \frac{k^2}{2^k} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2n+1}{2^n} = 1 - \frac{k^2}{2^k} + \sum_{n=1}^{k-1} (2n+1)\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \\ = 1 - \frac{k^2}{2^k} + 3 - \frac{2k-1}{2^{k-1}} + \sum_{n=1}^{k-2} \frac{2}{2^n} = 4 - \frac{k^2 + 4k - 2}{2^k} + 2\left(1 - \frac{1}{2^{k-2}}\right) = \\ = 6 - \frac{k^2 + 4k + 6}{2^k}.$$

Полезно убедиться, что ответ переходит в полученный ранее при $k \to \infty$, а также проверить его для небольших значений k.

Задача 9 (преобразование Абеля). Докажите, что

а) $\sum\limits_{n=1}^{m} b_n(a_{n-1}-a_n) = a_0b_0 - a_mb_m - \sum\limits_{n=1}^{m} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1}-a_n) = a_0b_0 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(b_{n-1}-b_n)$ (сформулируйте самостоятельно условия, при которых верна эта формула).

Формулы для преобразования Абеля на первый взгляд могут показаться довольно непонятными. Но на самом деле это просто общий случай преобразования, которое мы применяли при решении предыдущей задачи.

Решение. а) Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые при одинаковых a_n; для каждого n кроме первого и последнего их будет два: a_nb_n и $-a_nb_{n+1}$. Учитывая еще два «крайних» слагаемых, получаем требуемую формулу.

б) По предыдущему пункту n-е частичные суммы левой и правой частей отличаются на a_nb_n. Поэтому левая и правая суммы совпадают тогда и только тогда, когда $a_nb_n \to 0$.

Задача 10 (разложение на простейшие дроби). Найдите:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$;

е*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$.

Ответ. а) 1; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{5}{4}$; е) $\frac{1}{k\cdot k!}$.

Решение. а) Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \ldots = 1.$$

vo8-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 124

б) Так как $\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, сумма равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

(все остальные дроби сокращаются).

в) Аналогично $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$. При суммировании сокращаются все дроби, кроме первой, т. е. $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

г) Выразим дробь $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ через дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n+2}$: нетрудно найти (например, при помощи метода неопределенных коэффициентов), что $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{n+1}$. При суммировании почти все дроби сократятся и получится, что $S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

д) Решение аналогично предыдущему пункту:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n(n+1)(n+2)}+\frac{n+1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{n(n+2)}=$$
$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n+2};$$

так как сумма коэффициентов при трех дробях равна 0, в искомой сумме все слагаемые, кроме конечного числа, сократятся, а останутся только первые два члена из первой скобки и первый член из второй. Таким образом, $S=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$.

е) Заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k}\frac{(n+k)-n}{n(n+1)\ldots(n+k)}=$$
$$=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\right).$$

При суммировании (аналогично пункту а) остается только первая дробь из первой скобки, т. е. $\frac{1}{k\cdot k!}$.

Ряды. Часть 2

листок 22 / апрель 2006

Если в предыдущем листке мы в основном вычисляли пределы, не думая о сходимости, то этот листок, наоборот, посвящен почти исключительно проблеме сходимости. Основной метод здесь — оценка членов ряда (обычно довольно грубая). Особенно эффективным оказывается метод сравнения ряда с геометрической прогрессией, на котором основаны признаки Даламбера и Коши.

Также в этом листке появляются ряды с отрицательными членами. Возникающее для таких рядов явление абсолютной сходимости обсуждается в конце листка.

Определение 1. Ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *сходящимся*, если последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ его частичных сумм имеет конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число S называется *суммой ряда*. Обозначение: $S=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Определение 2. Ряд $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ называется *расходящимся*, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела (в частности, если $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$).

Задача 1. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Верно ли обратное утверждение?

Это первая из задач, в которой возникает связь между сходимостью ряда и скоростью убывания его членов.

Решение. Если $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=S_n$, то $0=\lim\limits_{n\to\infty} S_n-\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})= =\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Обратное утверждение неверно — как будет показано в следующей задаче, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Задача 2. Сходятся ли следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-100}{10000n+100000}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-100}{10000n+100000}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\alpha)$?

Ответ. Все эти ряды расходятся (кроме последнего при $\alpha=\pi k$).

Решение. а) Покажем, что для любого сколь угодно большого числа C найдется такое число N, что сумма $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ больше C, т. е. что частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ неограничены.

Идея решения: заменим ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots$$

на ряд вида

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

То есть каждое слагаемое $1/n$, где $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, заменяется на $1/2^{k+1}$.

Ясно, что так как каждый член второго ряда не превосходит соответствующего члена первого ряда и все они положительны, из расходимости второго будет следовать расходимость первого (см. задачу 6). Заметим, что если фиксировать какое-либо целое k, большее нуля, то во втором ряде число слагаемых $1/2^k$ в точности равно 2^{k-1}. То есть для данного k сумма всех слагаемых вида $1/2^k$ равна $1/2$. Отсюда уже легко заключить, что множество частичных сумм второго, а значит, и первого ряда неограничено, поскольку любая частичная сумма второго ряда, последний член которой равен $1/2^{k+1}$, больше либо равна $k/2$.

Задача о расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (называемого гармоническим), возможно, самая важная в этом листке. При этом, она далеко не простая, и для решения ее нужен трюк, состоящий в группировке слагаемых и оценке снизу другим рядом, более сложным на вид, но более простым для анализа.

На самом деле функция $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ растет почти так же, как функция $\ln N$. А именно, $f(N) := \ln N - \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ стремится при $N\to\infty$ к некоторому конечному пределу.

б) Необходимым условием того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, является условие $a_n \to 0$.

В нашем же случае $a_n = \frac{n-100}{10000n+100000}$, и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{100}{n}}{10000+\frac{100000}{n}} = \frac{1}{10000}.$$

Поэтому ряд сходиться не может.

в) Аналогично предыдущему пункту ряд расходится, так как его члены не стремятся к нулю. Действительно, если выбрать число $\varepsilon = 1/20000$, то начиная с некоторого N при всех $n > N$ выполняется $|a_n| > \varepsilon$.

г) И в этом пункте члены ряда не стремятся к нулю, если только число α/π не является целым. Если же $\alpha/\pi \in \mathbb{Z}$, то все члены ряда тождественно равны нулю.

Если $\alpha = \pi \cdot (p/q)$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 1$, p и q взаимно просты), то последовательность $\sin(n\alpha)$ является периодической. В частности, если l — решение сравнения $pl \equiv 1 \pmod q$, то для последовательности $b_n = l + nq$ имеем $\sin b_n\alpha = \sin \pi \frac{pl + 2pq}{q} = \sin(\pi/q) \neq 0$.

Пусть теперь число α/π иррационально. Покажем, что существует последовательность натуральных чисел (a_n), такая что расстояние от числа $\alpha_n = a_n\alpha$ до ближайшего числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, стремится к нулю. Пусть, для определенности, $0 < \alpha < \pi$. Тогда существует такое $a_1 \in \mathbb{N}$, что $a_1\alpha < 2\pi < (a_1 + 1)\alpha$. Пусть α_1 — то из чисел $a_1\alpha$ и $(a_1 + 1)\alpha$, которое ближе к 2π. Тогда $0 < |\alpha_1 - 2\pi| < |\alpha|/2$. Далее, существует число a_2 такое, что $a_2|\alpha_1| < 2\pi < (a_2 + 1)|\alpha_1| \ldots$ и т. д. Поскольку на каждом шаге расстояние от α_n до ближайшего числа вида $2\pi k$ уменьшается минимум в 2 раза, последовательность a_n удовлетворяет условию, сформулированному в начале. Осталось заметить, что $\sin(a_n + 1)\alpha \to \sin\alpha \neq 0$ при $n \to \infty$.

Задача 3. Определите, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

Решение. При $|x| \geqslant 1$ ряд не может сходиться, так как его члены по модулю всегда не меньше единицы и, следовательно, не могут стремиться к нулю. Если же $|x| < 1$, то из формулы для частичной суммы ряда $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, доказанной в листке «Прогрессии», и того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ при $|x| < 1$, следует, что ряд сходится.

Задача 4. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, также сходится, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Решение. Утверждение задачи следует из аналогичного утверждения про пределы последовательностей. В самом деле, если $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,

$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ и $C_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$, то из линейности пределов (см. соответствующую задачу из листка «Предел последовательности») следует, что $\alpha \lim_{k\to\infty} A_k + \beta \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$.

Определение 3. Последовательность (a_n) называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall m, n > N\quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Т. е. последовательность фундаментальная, если расстояние между ее членами стремится к нулю.

Задача 5 (критерий Коши). Докажите, что последовательность сходится, если и только если она фундаментальна.

Решение. Доказать, что сходящаяся последовательность фундаментальна, совсем просто: если последовательность (x_n) сходится к a, то $\forall \varepsilon\ \exists N\colon \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon/2$, откуда

$$\forall m, n > N\quad |x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n| < \varepsilon.$$

Пусть теперь наоборот последовательность (x_n) фундаментальна. Тогда она ограничена (докажите!), а значит, по теореме Больцано—Вейерштрасса (задача 16 листка «Предел последовательности»), имеет (хотя бы одну) предельную точку — обозначим ее через a. Так как a — предельная точка, в любой ее окрестности есть точки нашей последовательности; а так как последовательность фундаментальна, в любой окрестности точки a оказываются почти все члены последовательности. (Более формально: так как a — предельная,

$$\forall \varepsilon\ \forall N_1\ \exists n > N_1\colon\ |x_n - a| < \varepsilon;$$

так как (x_n) — фундаментальная,

$$\forall \varepsilon\ \exists N\colon \forall n, m > N_2\quad |x_n - x_m| < \varepsilon;$$

значит,

$$\forall \varepsilon\ \exists N = \max(N_1, N_2)\colon \forall n > N\quad |x_n - a| < 2\varepsilon.)$$

Отметим, что при доказательстве сходимости фундаментальной последовательности существенно используется полнота действительных чисел — в рациональных числах аналогичное утверждение неверно. Фундаментальность же сходящейся последовательности имеет место в любом метрическом пространстве.

Определение 4. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *мажорируется* рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n > N\ |b_n| \leqslant a_n$.

Задача 6 (признак сравнения). Докажите, что если мажорирующий ряд сходится, то мажорируемый тоже сходится, а если мажорируемый ряд расходится, то мажорирующий тоже расходится.

Решение. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда если (A_n) и (B_n) — соответствующие последовательности частичных сумм, то из сходимости последовательности (A_n) следует ее фундаментальность. Теперь заметим, что если $m > n$, то

$$|B_m - B_n| = |b_n + b_{n+1} + \ldots + b_m| \leqslant |b_n| + \ldots + |b_m| \leqslant \\ \leqslant a_n + \ldots + a_m = A_m - A_n = |A_m - A_n|.$$

Поэтому фундаментальность последовательности (A_n) влечет фундаментальность последовательности (B_n), после чего мы можем применить критерий Коши.

До сих пор у нас был лишь один нетривиальный пример сходящегося ряда — геометрическая прогрессия со знаменателем, по модулю меньшим единицы. Стандартный прием при доказательстве сходимости какого-либо ряда — показать, что этот ряд мажорируется геометрической прогрессией.

Задача 7. Определите, сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+n^2)}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ $(|x| < 1)$.

Ответ. а) Ряд сходится при $p > 1$; б) ряд сходится; в) ряд расходится; г) ряд сходится.

Решение. а) При $p = 1$ (а по признаку сравнения и при всех $p < 1$) мы уже показали выше, что ряд расходится. Покажем теперь, что при всех $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится.

Аналогично решению задачи 2а), заменим каждый член $\frac{1}{n^p}$ на больший или равный ему $\frac{1}{2^{kp}}$, где k — натуральное число такое, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Тогда сумма всех членов, равных $\frac{1}{2^{pk}}$, равна $\frac{2^k}{2^{pk}} =$

$=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right)^k$. Отсюда получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ может быть оценен сверху сходящейся геометрической прогрессией и, в силу признака сравнения, сходится сам.

б) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+n^2)}{n^2}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Последний, как только что было показано, сходится. Так как $|\cos(n+n^2)|\leqslant 1$ для любого n, можем применить признак сравнения.

в) Оценим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}}$ снизу рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$. Так как $\frac{1}{n+\sqrt{n}}<$ $<n$ и $\sqrt{n}<n$ при $n>1$, имеем $\frac{1}{n+\sqrt{n}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}}>\frac{1}{3n}$. А ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, как было показано выше, расходится.

г) Оценим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ сверху произвольным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y^n$, где $|x|<y<1$. Тогда из того, что $(n+1)<\left(\frac{y}{x}\right)^n$ при всех n, превосходящих некоторое достаточно большое число N (геометрическая прогрессия растет быстрее арифметической), следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ сходится в силу признака сравнения.

Задача 8 (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ с положительными членами. Тогда если $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$ $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}>1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда в случае $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$?

Указание. Оцените ряд геометрической прогрессией.

Решение. Если $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}>1$, то члены ряда не стремятся к нулю, поэтому он не может сходиться.

Если же $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=x<1$, то выберем положительное число ε, такое что $x+\varepsilon<1$. Так как существует N такое, что $\forall n>N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}<x+\varepsilon<1$, ряд a_k мажорируется сходящимся рядом $a_N(x+\varepsilon)^{k-N}$ начиная с $k=N$ и, следовательно, сходится по признаку сравнения.

В случае $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1$ ряд может как сходиться, так и расходиться, что можно видеть на примере рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Задача 9. Установите, сходятся или расходятся следующие ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n};\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!};\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n};\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};\ \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Ответ. Все ряды кроме первого сходятся.

Решение. а) Заметим, что так как $\frac{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)} > 1$, каждый член исходного ряда больше, чем $\frac{1}{2n}$, и, следовательно, расходится.

Далее будем применять признак Даламбера.

б) Поскольку $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e}{k+1}$, что стремится к нулю при $k \to \infty$, ряд сходится.

в) Поскольку $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(1+1/k)^3}{e}$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 = 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1/e < 1$, поэтому ряд сходится.

г) Аналогично предыдущему в этом пункте $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$, а предел последней величины при $k \to \infty$ равен $1/e$, что меньше 1, поэтому ряд сходится.

д) Аналогично в этом пункте $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)}$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{4} < 1$. Ряд сходится и в этом случае.

Задача 10 (признак Коши). Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$?

Решение. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, то члены ряда не стремятся к нулю и сходиться он не может.

Если же $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = x < 1$, то выберем число $\varepsilon > 0$, такое что $x + \varepsilon < 1$. Тогда, начиная с некоторого числа N, при всех $n > N$ верно $\sqrt[n]{a_n} < x + \varepsilon < 1$. Поэтому при $n > N$ $a_n < (x+\varepsilon)^n$ и ряд a_n мажорируется геометрической прогрессией.

В том случае, когда $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$, ряд может как сходиться, так и расходиться — см. примеры в доказательстве признака Даламбера.

Хотя и признак Даламбера, и признак Коши основан на сравнении ряда с геометрической прогрессией, признак Коши сильнее признака Даламбера: если ряд сходится по признаку Даламбера, то он сходится и по признаку Коши; но обратное неверно, как показывает пример

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 132

ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{[n/2]}}$. Кроме того, если предел, фигурирующий в признаке Даламбера, равен единице, то соответствующий предел в признаке Коши также равняется единице.

Доказывается это следующим образом. Рассмотрим последовательности $b_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ и $y_k = \ln b_k$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_k} = \exp\Bigl(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(y_1 + \ldots + y_k)\Bigr).$$

Тот факт, что $0 < \lim\limits_{k\to\infty} b_k < 1$, равносилен тому, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$ существует и отрицателен либо равен $-\infty$. Нетрудно доказать, что существование предела (конечного, $+\infty$ или $-\infty$) $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$ влечет существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}(y_1 + \ldots + y_k)$, причем последний равен пределу $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$. Из этого и следуют приведенные в предыдущем абзаце утверждения.

Существование предела $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k}(y_1 + \ldots + y_k)$ называется сходимостью последовательности (y_k) в среднем. Как уже было сказано, существование предела у последовательности влечет ее сходимость в среднем, но обратное, вообще говоря, не верно, как показывает пример последовательности $c_k = (-1)^k$.

Задача 11. Установите, сходятся или расходятся следующие ряды:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$.

Ответ. Сходится только первый ряд.

Решение. а) Применим признак Коши. Имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k-1} = \frac{1}{2} < 1$, поэтому ряд сходится.

б) Ряд расходится, так как может он быть оценен снизу рядом $\sum \frac{1}{n+1}$. Действительно, $n(n+1) < (n+1)^2$, поэтому $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$.

в) Ряд расходится, так как его члены даже не стремятся к нулю. Действительно, если сократить числитель и знаменатель каждого члена a_n на n^n, можно заметить, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$.

Определение 5. Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Задача 12. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Решение. Эта задача является следствием признака сравнения, так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|$ мажорирует ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$.

Определение 6. Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется *условно сходящимся*.

Задача 13. Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots > 0$ и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то *знакопеременный ряд* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ сходится. Существенно ли здесь условие монотонности (a_n)?

Решение. Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — частичная сумма ряда. Тогда последовательность $[S_{2n}, S_{2n+1}]$ является последовательностью вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, так как $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Следовательно, эта последовательность имеет общий элемент, который совпадает с $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = 0$.

Условие монотонности существенно — поскольку иначе система отрезков не будет вложенной. Пример расходящейся последовательности, не удовлетворяющей условию монотонности: $a_n = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{k}$, если $n = 2k-1$, и $a_n = \frac{1}{2k}$, $n = 2k$.

Задача 14. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2+1}{n^3+1}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$.

Решение. а) Ряд сходится абсолютно, так как всегда $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

б) Абсолютно ряд не сходится, так как $\frac{2n^2+1}{n^3+1} > \frac{1}{n}$. Но условно он сходится по предыдущей задаче ($\lim a_n = 0$, т. к. $\frac{2n^2+1}{n^3+1} < \frac{3}{n} \to 0$).

в) Ряд сходится абсолютно, так как из того, что $n^{3/2} = n\sqrt{n} < \sqrt{n^3+1}$, следует, что искомый ряд мажорируется абсолютно сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Задача 15. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится абсолютно. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, полученный из предыдущего ряда произвольной перестановкой его членов, также сходится, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Решение. Покажем, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится абсолютно. Действительно, множество частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ ограничено, так как он получен перестановкой членов из абсолютно сходящегося ряда.

Докажем теперь, что суммы рядов равны — т. е. что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно найти N, такое что

$$\forall n > N \quad \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right|}_{\delta_n} < \varepsilon.$$

Так как один ряд получен перестановкой из другого, для любого M можно выбрать N так, чтобы при $n > N$ в выражении δ_n сокращались первые M членов каждой суммы. Осталось воспользоваться абсолютной сходимостью и выбрать M так, чтобы сумма модулей оставшихся членов не привосходила ε (это можно сделать, так как $|\delta_n| \leqslant \sum\limits_{i>M} |a_i| + \sum\limits_{i>M} |b_i|$).

Задача 16. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Докажите, что ряд, составленный из положительных (отрицательных) членов этого ряда, стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Решение. Предположим, что ряд из положительных членов не сходится к $+\infty$ — это означает, что он ограничен. Тогда ряд из отрицательных членов не может быть ограничен, иначе весь ряд сходился бы абсолютно. Запишем тогда каждую частичную сумму S_n в виде $S_n^+ + S_n^-$, где S_n^+ и S_n^- — частичные суммы рядов, составленных из положительных и отрицательных членов соответственно. Поскольку $S_n^+ \to A$, а $S_n^- \to -\infty$ при $n \to \infty$, последовательность (S_n) стремится к бесконечности. Значит, ряд из положительных чисел должен сходиться к $+\infty$. Доказательство для отрицательных чисел аналогично.

Задача 17 (теорема Римана). а) Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Тогда его можно превратить перестановкой членов как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперед заданной суммой.

б*) Дайте определение сходящегося ряда из векторов на плоскости.

в**) Дан ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ из векторов на плоскости. Тогда множество сумм рядов, получающихся из данного перестановкой членов, либо пусто, либо одна точка, либо прямая, либо вся плоскость.

Решение. а) Используя решение предыдущей задачи, покажем, как превратить ряд в сходящийся к любому наперед заданному числу A. Идея решения: поскольку ряды, составленные отдельно из положительных и отрицательных членов, неограничены, будем чередовать частичные суммы из положительных и отрицательных членов так, чтобы общая сумма была то меньше, то больше заданного числа A.

Пусть (b_i) — упорядоченная последовательность положительных членов ряда, а (c_i) — отрицательных. Рассмотрим частичную сумму S_n^b членов b_i такую, что $S_{n-1}^b < A < S_n^b$. Затем рассмотрим частичную сумму S_k^c членов c_i такую, что $S_n^b + S_k^c < A < S_n^b + S_{k-1}^c$. Затем — снова частичную сумму ряда b_i, и так далее. Так как $b_i \to 0$ и $c_i \to 0$ при $i \to \infty$, полученная последовательность частичных сумм (исходного ряда с переставленными членами) сходится к числу A.

Аналогично показывается, что можно так сгруппировать члены рядов b_i и c_i, чтобы исходный ряд сходился к $+\infty$ или $-\infty$.

б) Определение: ряд векторов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k, y_k)$ на плоскости сходится к вектору (a, b), если $a = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k} x_i$ и $b = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k} y_i$.

в) Решение этой задачи можно найти, например, в статье «Ограничения конечных векторных сумм и теорема Леви—Штейница», Математическое просвещение, №7 (2003).

Задача 18. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$.

а) Докажите, что ряд условно сходится;

б*) переставьте члены ряда таким образом, чтобы полученный ряд расходился.

Решение. а) Ряд сходится по признаку, доказанному в задаче 13.

б) Ряд будет расходиться, если, например, его члены переставить так, чтобы за двумя положительными членами шел один отрицательный $(1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + 1/13 + \ldots)$.

Задача 19*. Постройте пример последовательности (a_i), для которой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^3$ расходится.

Решение. Ряд a_i должен состоять как из положительных, так и из отрицательных членов (иначе можно было бы применить признак сравнения). Идея решения: пусть каждый 10-й член последовательности является чем-то достаточно большим, но в то же время стремящимся к нулю, например, $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. А все члены с номерами от $10k$ до $10k + 9$

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 136

компенсируют член с номером $10k$: они все равны между собой и их сумма равна $-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Точное выражение для членов ряда: $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ при $n=10k$, $k\in\mathbb{Z}$, а при всех остальных значениях n $a_n=-\frac{1}{9\sqrt[3]{10[n/10]}}$. Этот ряд сходится, так как множество его частичных сумм мажорируется последовательностью $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$. С другой стороны, $a_n^3=\frac{1}{n}$ при $n=10k$ и $a_n\leqslant-\frac{1}{729n}$ при $n\neq 10k$, $k\in\mathbb{Z}$. Поэтому ряд расходится.

Задача 20*. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Вычисляя частичные суммы приведенных рядов, можно получить сколь угодно точное приближении для числа π.

Функция $\zeta(s)=\sum n^{-s}$ (ζ-функция Римана), значения которой в точках 2 и 4 вычисляются в пунктах б) и в), играет важную роль в теории чисел.

Последняя задача не относится к числу тех, которые можно решить прямо сейчас: напротив, к ней стоит вернуться тогда, когда в вашем распоряжении будут более мощные методы доказательства равенств подобного рода — в частности, разложение в ряд Тейлора. Поэтому мы не дадим строгих доказательств, но объясним при этом все существенные шаги.

Набросок решения. а) Разложение функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в ряд Тейлора с центром в нуле имеет вид $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$ Поэтому $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

б) Заметим, что функция $\sin\pi x$ имеет нули во всех целых точках. Идея (восходящая к Эйлеру) состоит в том, чтобы представить $\sin\pi x$ в виде «бесконечного многочлена» — произведения вида $Ax(1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\ldots$, которое сходится и обращается в ноль в тех же точках, что и $\sin\pi x$.

Поскольку разложение функции $\sin\pi x$ в ряд Тейлора имеет вид $\sin\pi x=\pi x-\frac{\pi^3x^3}{6}+\frac{\pi^5x^5}{120}\ldots$, находим, что $A=\pi$. Далее, коэффициент при x^3 в разложении $\sin\pi x$ равен, с одной стороны, $-\frac{\pi^3}{6}$, а с другой

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 137

(если рассмотреть бесконечное произведение) $-\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

в) Заметим, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{\substack{m=1,n=1\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{2}{m^2n^2}.$$

С другой стороны, коэффициент при x^5 в разложении $\sin\pi x$ в ряд Тейлора равен $\frac{\pi^5}{120}$, а при разложении в бесконечное произведение — $\pi\sum\limits_{\substack{m=1,n=1\\ m<n}}^{\infty}\frac{2}{m^2n^2}$. Поэтому

$$\frac{\pi^4}{36}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+2\frac{\pi^4}{120},$$

откуда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Неравенства

листок 6д / май 2006

Этот еще один листок, отклоняющийся от основного курса в сторону более элементарной математики.

Скажем пару слов о методах доказательства неравенств. Задачи листка отличаются от наиболее знакомых школьникам «задач на неравенства» вида $f(x) > 0$ (или $f(x) \geqslant 0$), для которых есть стандартный способ решения — метод интервалов. В этом листке он мало помогает: возникающие уравнения с несколькими переменными оказывается решить не проще, чем исходные неравенства.

Основное используемое «алгебраическое» соображение просто, но очень полезно: полный квадрат всегда неотрицателен (собственно, это можно было принять за определение неотрицательного числа). С другой стороны, имеется важное «аналитическое» соображение: скорость роста функции на бесконечности (например, функция 2^n растет быстрее любого многочлена). И вообще здесь полезны грубые оценки, при которых неравенство заменяется на заведомо более сильное так, чтобы выражение в одной из частей упростилось.

Наконец, как и всегда, перед тем как доказывать общее утверждение, бывает полезно разобраться с простыми частными случаями. Например, доказать аналогичное неравенство для меньшего количества неизвестных или для фиксированных значений (обычно в каком-нибудь смысле крайних) некоторых неизвестных. Иногда (как, например, для неравенства о средних) удается вывести из этих частных случаев и общее доказательство.

> **Соглашение.** В этом листке буквами a, b, c, d, a_i, b_i обозначены неотрицательные числа, а буквами x, y, z — произвольные действительные числа.

Одна из важных характеристик неравенства — является ли оно точным, то есть достигается ли в нем равенство при каких-то значениях входящих в него переменных. Также важно знать, при каких именно наборах значений неизвестных достигается равенство.

> **Задача 1.** Сравните числа:
> а) $1234567 \cdot 1234569$ и 1234568^2; б) 31^{11} и 17^{14};
> в) $\frac{1}{5001} + \frac{1}{5002} + \ldots + \frac{1}{5100}$ и $\frac{1}{49}$.

В этой задаче собраны числовые неравенства для разминки. При решении этих неравенств школьники могут на конкретных числовых примерах почувствовать некоторые простые идеи доказательства неравенств.

Указание. д) Оцените оба числа степенями двойки.

е) Оцените каждое из слагаемых самым большим из них.

Решение. а) Заметим, что

$$1234567\cdot 1234569 = (1234568-1)(1234568+1) = 1234568^2 - 1 < \\ < 1234568^2.$$

б) Заметим, что $31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$, а $17^{14} > 16^{14} = 2^{56}$. Следовательно, $31^{11} < 17^{14}$.

в) Заметим, что каждое из слагаемых в левой части меньше, чем $\frac{1}{5000}$. Следовательно, их сумма меньше, чем $100\cdot\frac{1}{5000} = \frac{1}{50} < \frac{1}{49}$.

Задача 2. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

Указание. Возьмите много достаточно маленьких чисел.

Решение. Например, можно взять 1000 чисел, каждое из которых равно 0,001. Действительно, сумма этих чисел равна 1, а сумма их квадратов равна $0{,}001 < 0{,}01$.

Задача 3. Докажите, что:

а) $x^2-6x+9\geqslant 0$; б) $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$; в) $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$;

г) $2a+b+c\geqslant 4\sqrt[4]{a^2bc}$; д) $2a+b\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b}$.

В этой задаче школьникам предлагается доказать несколько частных случаев неравенства Коши между средним арифметическим и средним геометрическим. Например, пункт б) — это неравенство Коши для двух чисел. В первых двух пунктах можно представить разность левой и правой части в виде квадрата, а квадрат любого числа неотрицателен.

Для решения последующих пунктов можно несколько раз воспользоваться пунктом б) для подходящих чисел. При решении пункта д) возникает одна из основных идей доказательства общего случая: сведение неравенства Коши для меньшего числа переменных к неравенству для большего добавлением их среднего.

Указание. е), ж) Представьте разность левой и правой части в виде квадрата некоторого выражения.

з) Умножьте неравенство на 2.

и), к) Воспользуйтесь несколько раз пунктом б).

Решение. а) $x^2-6x+9=(x-3)^2\geqslant 0$.

б) $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$.

в) $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$.

г) $2a+b+c\geqslant 2a+2\sqrt{bc}\geqslant 4\sqrt{a\sqrt{bc}}=4\sqrt[4]{a^2bc}$.

д) $2a+b+\sqrt[3]{a^2b}\geqslant 2a+2\sqrt{b\sqrt[3]{a^2b}}=2a+2\sqrt[6]{a^2b^4}=2a+2\sqrt[3]{ab^2}\geqslant$ $\geqslant 4\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}=4\sqrt[3]{a^2b}$. Осталось вычесть по $\sqrt[3]{a^2b}$ из обеих частей доказанного неравенства.

Задача 4. а) Докажите, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>1$.

б*) Докажите, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

Указание. а) Оцените слагаемые снизу дробями с общим знаменателем.

Решение. а) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$.

б) Сперва заметим, что неравенство достаточно доказать для таких неотрицательных a, b, c, что $a+b+c=1$. В таком случае оно имеет вид

$$\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\geqslant\frac{3}{2}$$

Используя формулу для геометрической прогрессии и неравенства о средних, заключаем, что наименьшее значение выражения в левой части достигается тогда и только тогда, когда $a=b=c$, т. е. равно $3/2$.

Определение 1. Определим средние набора чисел $a_1, \ldots, a_n$ следующим образом:

$$A=\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \quad \text{— \textit{среднее арифметическое},}$$
$$G=\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \quad \text{— \textit{среднее геометрическое},}$$
$$S_2=\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \quad \text{— \textit{среднее квадратичное},}$$
$$H=\frac{n}{1/a_1+\ldots+1/a_n} \quad \text{— \textit{среднее гармоническое}.}$$

Обозначения для средних происходят от их английских названий: S_2 — square mean, A — arithmetic mean, G — geometric mean, H — harmonic mean.

Вообще для чисел $a_1, \ldots, a_n$ можно определить *среднее степени* k следующим образом:

$$S_k=\sqrt[k]{\frac{a_1^k+\ldots+a_n^k}{n}}.$$

При этом $A=S_1$, $H=S_{-1}$. Неравенство о средних степенных утверждает, что $S_k \geqslant S_l$ при $k \geqslant l$. При этом считается, что $S_0=G$. Доказательство этого неравенства для произвольных степеней без привлечения производных достаточно громоздко, поэтому общее неравенство о средних в листок не включено. В листке «Производная 2» за 10 класс появится неравенство Йенсена, частным случаем которого является неравенство о средних степенных.

> **Задача 5 (неравенство о средних).** Докажите, что $S_2 \geqslant A \geqslant G \geqslant H$, причем равенство достигается только в случае $a_1=\ldots=a_n$ а) при $n=2^k$; б) для любых n. Неравенство $A \geqslant G$ называется также неравенством Коши.

Указание. б) Увеличьте число переменных до 2^k.

Частный случай этого неравенства для $n=2$ — это задача 7 листка «Отношение порядка».

Решение. Заметим сначала, что неравенство $G \geqslant H$ — это в точности неравенство $A \geqslant G$, примененное к числам $\frac{1}{a_1}$, …, $\frac{1}{a_n}$ (проверьте!). Следовательно, достаточно доказывать только неравенства $S_2 \geqslant A \geqslant G$.

а) Будем доказывать утверждение задачи индукцией по k. База индукции ($k=1$) для неравенства $A \geqslant G$ была доказана выше; докажем неравенство $S_2 \geqslant A$:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}} \geqslant \frac{a_1+a_2}{2} \iff \frac{a_1^2+a_2^2}{2} \geqslant \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2}{4} \iff (a_1-a_2)^2 \geqslant 0.$$

Видно, что равенство достигается только при $a_1=a_2$.

Шаг индукции. Пусть утверждение задачи доказано при $n=2^k$, докажем его при $n=2^{k+1}$. Например, докажем неравенство $S_2 \geqslant A$:

$$S_2=\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_{2^k}^2+a_{2^k+1}^2+\ldots+a_{2^{k+1}}^2}{2^{k+1}}}=\sqrt{\frac{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_{2^k}^2}{2^k}+\dfrac{a_{2^k+1}^2+\ldots+a_{2^{k+1}}^2}{2^k}}{2}} \overset{(!)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_{2^k}}{2^k}\right)^2+\left(\dfrac{a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^2}{2}} \overset{(!!)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \frac{\dfrac{a_1+\ldots+a_{2^k}}{2^k}+\dfrac{a_{2^k+1}+\ldots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}=A.$$

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 142

Итак, $S_2 \geqslant A$, и неравенство (!) обращается в равенство только при $a_1 = \ldots = a_{2^k}$, $a_{2^k+1} = \ldots = a_{2^{k+1}}$, а неравенство (!!) — только при $\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k} = \frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}$. Отсюда следует, что для равенства $S_2 = A$ необходимо равенство всех чисел $a_1, \ldots, a_{2^{k+1}}$ между собой.

Доказательство неравенства $A \geqslant G$ аналогично.

б) Теперь сведем случай произвольного n к случаю $n = 2^k$. Для каждого из доказываемых неравенств такое сведение выполняется аналогично, поэтому мы проведем рассуждение только для неравенства $A \geqslant G$. Выберем сначала число k так, что $n < 2^k$, и рассмотрим набор чисел из 2^k чисел, в котором первые n равны $a_1, \ldots, a_n$, а все остальные равны их среднему арифметическому A. Применяя для этого набора доказанное в предыдущем пункте неравенство, получаем

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \ldots + a_n + (2^k - n)A}{2^k} &\geqslant \sqrt[2^k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot A^{2^k - n}}, \\
\frac{nA + (2^k - n)A}{2^k} &\geqslant \sqrt[2^k]{G^n \cdot A^{2^k - n}}, \\
A &\geqslant \sqrt[2^k]{G^n \cdot A^{2^k - n}}, \\
A^{2^k} &\geqslant G^n \cdot A^{2^k - n}, \\
A^n &\geqslant G^n, \\
A &\geqslant G,
\end{aligned}$$

причем равенство достигается только при $a_1 = \ldots = a_n$.

Задача 6. Пусть $abcd = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$.

Указание. Примените неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Решение. Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ac, ad, bc, bd, cd$:

$$\frac{1}{10}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geqslant \sqrt[10]{(abcd)^5} = 1.$$

Осталось умножить обе части доказанного неравенства на 10. Равенство достигается только при $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = ab = ac = ad = bc = bd = cd$, откуда, учитывая $abcd = 1$, получаем $a = b = c = d = 1$.

Задача 7. Докажите, что:

а) $x^4 + y^4 + z^2 \geqslant 2\sqrt{2}xyz$; б) $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$;

в) $\sqrt[n+1]{ab^n} \leqslant \frac{a + nb}{n+1}$; г) $x^4 - x + 0{,}5 > 0$.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 143

Это подготовительная задача для неравенства Юнга и обобщенного неравенства Коши. При ее решении школьнику придется придумать идею доказательства неравенства Юнга, но на конкретных числах это может быть сделать проще, чем сразу в общем случае.

Указание. Примените неравенство Коши (см. задачу 5).

Решение. а) Применим неравенство Коши для четырех чисел $4x^4$, $4y^4$, $2z^2$ и $2z^2$:

$$x^4+y^4+z^2 \geqslant \sqrt[4]{4x^4\cdot 4y^4\cdot 2z^2\cdot 2z^2} = 2\sqrt{2}\,xyz.$$

Равенство достигается при $4x^4=4y^4=2z^2$, т. е. при $x=y$, $z=\sqrt{2}\,x^2$.

б) Достаточно применить неравенство Коши для набора из двух чисел $\sqrt{a}$ и трех чисел $\sqrt[3]{b}$. Равенство достигается при $a^3=b^2$.

в) Достаточно применить неравенство Коши для набора из одного числа a и n чисел b. Равенство достигается при $a=b$.

г) Мы приведем два решения этого пункта.

Первое решение. Заметим, что

$$x^4-x+0{,}5=(x^2-0{,}5)^2+(x-0{,}5)^2 \geqslant 0,$$

причем обе скобки не могут быть равны нулю одновременно.

Второе решение. Применим неравенство Коши для чисел x^4, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$. Получим $x^4+0{,}5\geqslant\frac{4}{\sqrt[4]{6^3}}|x|$. Осталось заметить, что $\frac{4}{\sqrt[4]{6^3}}>1$, а значит, при $x\neq 0$ выполнено $x^4+0{,}5>|x|$. Но при $x=0$ это неравенство тоже верно. Следовательно, $x^4+0{,}5>|x|$ и $x^4-x+0{,}5>0$.

Задача 8 (неравенство Юнга). Пусть $p, q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и а) $p, q\in\mathbb{Q}$; б) $p, q\in\mathbb{R}$. Докажите, что $ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ (напомним, что a и b — неотрицательные действительные числа).

Указание. Примените неравенство Коши для набора из n чисел a^p и m чисел b^q, где $\frac{m}{n}=p-1$.

Решение. а) Из условия следует, что $p>1$. Пусть теперь $p-1=\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные. Тогда $p=\frac{m+n}{n}$, $q=\frac{m+n}{m}$. Применим неравенство Коши для набора из n чисел a^p и m чисел b^q:

$$\frac{na^p+mb^q}{m+n} \geqslant \sqrt[m+n]{a^{np}b^{mq}} = \sqrt[m+n]{a^{m+n}b^{m+n}} = ab.$$

vo8-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 144

Осталось заметить, что левая часть полученного неравенства равна $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$. Из доказательства видно, что равенство достигается при $a^p=b^q$.

б) Утверждение этого пункта может быть получено из утверждения предыдущего пункта предельным переходом. Проделаем это аккуратно. Пусть p и q — произвольные действительные числа, для которых $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то есть $q=\frac{p}{p-1}$. Пусть (p_n) — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к числу p. Из арифметики пределов следует, что последовательность $q_n=\frac{p_n}{p_n-1}$ будет сходиться к q. Для каждой пары (p_n, q_n) неравенство Юнга доказано в предыдущем пункте. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем неравенство Юнга для p и q.

Другой способ доказывать это неравенство — применить неравенство Йенсена к экспоненте (см. листок «Производная 2» за 10 класс).

Задача 9 (обобщенное неравенство о средних). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ > 0, $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i \geqslant \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$.

Выражение в левой части доказываемого неравенство называется *средним взвешенным* набора чисел a_i с весами α_i. Например, обычное среднее арифметическое — это среднее взвешенное с весами $\frac{1}{n}$.

Решение. Будем доказывать неравенство индукцией по n. Для $n=2$ доказываемое неравенство совпадает с неравенством Юнга для $a=$ $=\sqrt[p]{a_1}$, $b=\sqrt[q]{a_2}$, $p=\frac{1}{\alpha_1}$, $q=\frac{1}{\alpha_2}$. Пусть теперь доказываемое неравенство верно для $n=k$. Докажем его для $n=k+1$.

$$\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i a_i=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i a_i+(\alpha_k a_k+\alpha_{k+1}a_{k+1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i a_i+(\alpha_k+\alpha_{k+1})\frac{\alpha_k a_k+\alpha_{k+1}a_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}\geqslant\prod_{i=1}^{k-1}a_i^{\alpha_i}\cdot\left(\frac{\alpha_k a_k+\alpha_{k+1}a_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}\right)^{\alpha_k+\alpha_{k+1}}.$$

Осталось заметить, что

$$\frac{\alpha_k a_k+\alpha_{k+1}a_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}=\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}a_k+\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}a_{k+1}\geqslant$$
$$\geqslant a_k^{\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}}a_{k+1}^{\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}}=\left(a_k^{\alpha_k}a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}}$$

vo8-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 145

в силу неравенства Юнга для $\frac{1}{p}=\frac{\alpha_k}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}$ и $\frac{1}{q}=\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}$, откуда

$$\prod_{i=1}^{k-1} a_i^{\alpha_i}\cdot\left(\frac{\alpha_k a_k+\alpha_{k+1}a_{k+1}}{\alpha_k+\alpha_{k+1}}\right)^{\alpha_k+\alpha_{k+1}} \geqslant \prod_{i=1}^{k+1} a_i^{\alpha_i}.$$

Задача 10*. Докажите, что при любых $a, b>0$, для которых $a+b=1$, верно неравенство $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant 12{,}5$.

Решение. Раскрыв скобки, получим эквивалентное неравенство: $a^2+b^2+a^{-2}+b^{-2}\geqslant 8{,}5$. Из неравенства $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$ следует, что $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2}$. Таким образом, достаточно доказать, что $a^{-2}+b^{-2}\geqslant 8$. Для этого воспользуемся неравенством $S_2\geqslant H$ для чисел a^{-1} и b^{-1}: $\sqrt{\frac{a^{-2}+b^{-2}}{2}}\geqslant\frac{2}{a+b}=2$, откуда $a^{-2}+b^{-2}\geqslant 8$. Утверждение задачи доказано.

Задача 11* (неравенство Коши—Буняковского—Шварца). Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Приведенный здесь вариант неравенства КБШ был доказан Коши, а Буняковский и Шварц независимо получили интегральное обобщение этого неравенства для функций.

Геометрический смысл неравенства КБШ состоит в том, что в многомерном пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение, заданное формулой $(x, y)=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$, не превосходит произведения модулей векторов x и y. Отсюда следует, что можно определить угол между векторами как $\arccos\frac{(x, y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную сумму

$$S(t)=\sum_{i=1}^n(a_i+tb_i)^2=\sum_{i=1}^n a_i^2+2t\sum_{i=1}^n a_ib_i+t^2\sum_{i=1}^n b_i^2,$$

где t — некоторое действительное число.

Поскольку $S(t)$ — сумма квадратов, $S(t)\geqslant 0$ при любом t. Рассмотрим теперь $S(t)$ как квадратный трехчлен от t. Поскольку он неотрицателен при любых значениях t, дискриминант этого трехчлена неположителен. Осталось заметить, что дискриминант ровно в четыре раза больше разности левой и правой частей неравенства КБШ, и неравенство доказано.

Заметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда для некоторого t все суммы a_i+tb_i равны нулю, то есть когда наборы a_i и b_i пропорциональны.

Другое решение. Обозначим $A=\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}$, $B=\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}$ и рассмотрим вспомогательные наборы чисел $a_i'=a_i/A$ и $b_i'=b_i/B$. Заметим, что неравенство КБШ для исходных чисел получается из неравенства КБШ для новых чисел умножением обеих частей на A^2B^2. Таким образом, достаточно доказать неравенство КБШ только для новых наборов. Эти наборы обладают следующими свойствами: $\sum\limits_{i=1}^n a_i'^2=\sum\limits_{i=1}^n b_i'^2=1$ (докажите!). Воспользуемся теперь неравенством Коши для каждого слагаемого в сумме $\sum\limits_{i=1}^n a_i'b_i'$:

$$\sum_{i=1}^n a_i'b_i' \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{a_i'^2+b_i'^2}{2}=1.$$

Таким образом, неравенство КБШ доказано для новых наборов чисел, а значит, и для старых.

Заметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_i'=b_i'$, т. е. когда наборы a_i и b_i пропорциональны.

Задача 12*. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^n b_i}.$$

Решение. Это неравенство получается применением неравенства КБШ к наборам чисел $x_i=\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ и $y_i=\sqrt{b_i}$.

Задача 13*. Докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i.$$

Решение. Это неравенство получается из предыдущего подстановкой $b_i=a_i+a_{i+1}$.

Задача 14* (неравенство Гёльдера). Докажите, что для любых $p, q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

При каких a_i, b_i достигается равенство?

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 147

Это неравенство — обобщение неравенства КБШ, только вместо обычной длины вектора $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ рассматриваются длины вида $\|(a_1, \ldots, a_n)\|_p = \sqrt[p]{|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p}$. При этом неравенство Гёльдера утверждает, что $(a, b) \leqslant \|a\|_p \cdot \|b\|_q$.

Указание. Доказательство аналогично второму доказательству неравенства КБШ.

Решение. См. листок «Производная 2» за 10 класс.

Задача 15*. В условиях предыдущей задачи докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} = \max_{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q = 1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Вообще, если есть некоторый способ измерять длины векторов, то можно определить *двойственный* способ по формуле

$$\|a\|' = \max_{\|b\|=1} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Фактически в этой задаче утверждается, что $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ — двойственные способы измерять длины векторов.

Решение. Во-первых, в силу неравенства Гёльдера

$$\left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \geqslant \max_{\sum b_i^q = 1} \sum a_i b_i.$$

Докажем неравенство в другую сторону. Для этого рассмотрим набор $b_i = \sqrt[q]{a_i^p / \sum a_i^p}$, для которого достигается равенство в неравенстве Гёльдера. Для этого набора $\sum b_i^q = 1$ и $\sum a_i b_i = \sum a_i^p$, откуда $\left(\sum a_i^p\right)^{1/p} \leqslant \max\limits_{\sum b_i^q = 1} \sum a_i b_i$.

Итак, каждая из частей доказываемого равенства не превосходит другой.

Задача 16* (неравенство Минковского). Докажите, что при $p > 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p}.$$

Это неравенство утверждает, что $\|\cdot\|_p$ — действительно хороший способ измерять длины векторов («является нормой»), а именно, для него выполнено неравенство треугольника $\|a\|_p + \|b\|_p \geqslant \|a + b\|_p$.

Чтобы понять, как такая норма устроена, полезно рассмотреть на плоскости единичные окружности (т. е. множества точек, для которых $\|(x, y)\|_p = 1$) в этой норме. Например, при $p = 1$ получается квадрат $|x| + |y| = 1$, при $p = 2$ — стандартная окружность $x^2 + y^2 = 1$, а при $p = \infty$ — квадрат $\max(|x|, |y|) = 1$.

Решение. Применим предыдущую задачу к каждому слагаемому:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} = \max_{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^q = 1} \sum_{i=1}^{n} a_i c_i;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} = \max_{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^q = 1} \sum_{i=1}^{n} b_i c_i;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} = \max_{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^q = 1} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) c_i;$$

Осталось воспользоваться тем, что максимум суммы двух функций не превосходит суммы максимумов этих функций.

Топология прямой. Открытые и замкнутые множества

листок 7д / апрель 2006

В этом листке продолжается изучение действительных чисел — на этот раз с топологической точки зрения: обсуждаются открытые и замкнутые подмножества прямой и связанные с этим понятия (такие как замыкание, всюду плотность и т. д.).

На этом конкретном примере закладывается фундамент для общего изучения непрерывности в топологических и метрических пространствах.

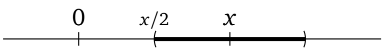
Задача 1. а) Докажите, что у любого положительного числа найдется окрестность, целиком состоящая из положительных чисел. Верно ли это утверждение для неотрицательных чисел?

б) Докажите, что в любой окрестности любого действительного числа найдется как рациональное так и иррациональное число.

в) Докажите, что у любого действительного числа найдется окрестность, содержащая не более одного натурального числа.

г) Докажите, что у любых двух различных действительных числе найдутся непересекающиеся окрестности.

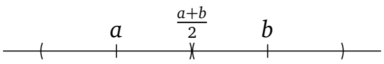
Решение. а) У числа x можно взять, например, $x/2$-окрестность. У (единственного не отрицательного, но и не положительного) числа 0 окрестности, полностью состоящей из неотрицательных чисел, очевидно, не существует (поэтому для неотрицательных чисел утверждение неверно).



б) Утверждение непосредственно следует из того, что между любыми двумя числами имеются как рациональные, так и иррациональные числа. Доказать это проще всего при помощи бесконечных десятичных дробей (см. одноименный листок).

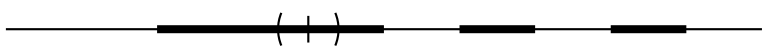
в) Так как расстояние между любыми двумя точками 1/2-окрестности меньше единицы, в $U_{1/2}(x)$ лежит не больше одного натурального числа.

г) У чисел a и b можно взять, например, $\frac{|a-b|}{2}$-окрестности.



Определение 1. Точка множества $A \subset \mathbb{R}$ называется *внутренней*, если в A целиком содержится некоторая окрестность этой точки. Под-

множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние.



Отметим, что все дальнейшие определения по сути используют только открытые множества. Таким образом, они имеют смысл для любого *топологического пространства* — множества с выделенным набором подмножеств (называемых открытыми), удовлетворяющем условиям задачи 3.

В частности, на $\mathbb{R}$ можно по-другому задавать структуру топологического пространства — в качестве набора подмножеств можно взять, например,

- $\varnothing$, $\mathbb{R}$ (антидискретная топология);
- дополнения к конечным множествам (кофинитная топология).

Хотя в данном листке рассматриваются исключительно подмножества прямой, стоит все же иметь в виду, что открытость (и замкнутость) суть свойства относительные (зависящие от выбора объемлющего пространства), а не абсолютные. Например, интервал является открытым подмножеством прямой, но не плоскости; полуинтервал $[0, 1)$ является открытым подмножеством отрезка $[0, 2]$, но не прямой.

Задача 2. а) Сформулируйте предыдущее определение на языке кванторов.

б) Сформулируйте отрицание предыдущего определения.

в) Приведите примеры открытых множеств и множеств, не являющихся открытыми.

Решение. а) Точка $x \in A$ называется внутренней, если $\exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \subset A$; множество A называется открытым, если $\forall x \in A \, \exists \varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(x) \subset A$.

б) Точка $x \in A$ не является внутренней, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in U_\varepsilon(x) \setminus A$; множество A не является открытым, если $\exists x \in A$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists y \in U_\varepsilon(x) \setminus A$.

в) Интервал, пустое множество, вся прямая, $\mathbb{R} \setminus 0$ открыты. Точка, отрезок, полуинтервал, множество натуральных чисел, множество рациональных чисел открытыми не являются.

Задача 3. а) Докажите, что пустое множество и всё $\mathbb{R}$ открыты.

б) Докажите, что объединение (любого числа) открытых множеств открыто.

в) Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

г) Верно ли, что пересечение любого числа открытых множеств открыто?

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 151

Указание. Можно начать с двух множеств.

Решение. а) Оба утверждения являются тавтологиями.

б) Пусть все множества A_i открыты, докажем что открыто и $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Требуется доказать, что любая точка $x\in\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ содержится в объединении вместе с некоторой окрестностью. Раз x лежит в объединении некоторого набора множеств, значит, x содержится (хотя бы) в одном из этих множеств — пусть это A_i. Так как A_i открыто, оно содержит[5] x вместе с некоторой окрестностью U. Тогда эту окрестность содержит и все объединение $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

в) Пусть все множества A_i $(i=1, \ldots, n)$ открыты, докажем, что открыто и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Рассмотрим произвольную точку $x\in\bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Требуется доказать, что она содержится в пересечении вместе с некоторой окрестностью. Так как все A_i открыты и содержат x, найдутся такие положительные ε_i, что $U_{\varepsilon_i}(x)\in A_i$. Значит,

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{\varepsilon_i}(x) = U_{\min(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

что и требовалось доказать.

г) Бесконечное пересечение открытых множеств может уже не быть открытым — достаточно рассмотреть, например, $\bigcap\limits_{n} U_{1/n}(0) = \{0\}$.

Определение 2. Множество $\dot{U}_\varepsilon(a)=U_\varepsilon(a)\setminus\{a\}$ называется *проколотой ε-окрестностью* точки a.

Определение 3. Число $a\in\mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A\subset\mathbb{R}$, если в любой его проколотой ε-окрестности есть точки множества A. Точка, не являющаяся предельной, называется *изолированной*.

Замечание. Другими словами, точка a называется предельной для множества A, если существуют отличные[6] от a элементы множества A, сколь угодно близкие к a.

Полезно сформулировать отрицание к этому определению.

[5]Обратите внимание на то, что здесь (и далее) одно и то же слово «содержит» используется в двух смыслах — A_i содержит *x как элемент* ($x\in A_i$), и A_i содержит *U как подмножество* ($U\subset A_i$).

[6]Именно для этого в определении используются *проколотые* окрестности — иначе любой элемент множества был бы его предельной точкой.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 152

Определение 4. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если в любой его ε-окрестности[7] содержится бесконечно много точек множества A.

Определение 5. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если существует последовательность, сходящаяся к a, все члены которой принадлежат $A \setminus \{a\}$.

Задача 4. Докажите эквивалентность трех последних определений.

Решение. $3 \Rightarrow 4$. Пусть точка a является предельной для множества A в смысле первого определения. Предположим, что в некоторой окрестности точки a содержится лишь конечное число элементов множества A. Тогда среди элементов $A \setminus \{a\}$ можно выбрать ближайший к a; пусть расстояние от этого элемента до a равно ε. Осталось заметить, что в проколотой ε-окрестности точки a отсутствуют элементы множества A, что противоречит исходному предположению.

$4 \Rightarrow 3$. Пусть точка a является предельной для множества A в смысле второго определения. Это означает, что любая окрестность точки a содержит бесконечно много элементов множества A. Но тогда и любая проколотая ε-окрестность точки a содержит элементы множества A.

$3 \Rightarrow 5$. Пусть точка a является предельной для множества A в смысле первого определения. Выберем в каждой проколотой $1/n$-окрестности точки a по элементу x_n множества A. Тогда последовательность (x_n) сходится к a (а все ее члены лежат в $A \setminus \{a\}$). Отметим, что в этой последовательности могут присутствовать совпадающие члены.

$5 \Rightarrow 3$. Пусть теперь, наоборот, точка a является предельной для множества A в смысле третьего определения, то есть существует последовательность (x_n) элементов $A \setminus \{a\}$, сходящаяся к a. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n, такое что $|x_n - a| < \varepsilon$ и $x_n \neq a$, то есть $x_n \in \dot{U}_\varepsilon(a)$.

Задача 5. Найдите все внутренние и все предельные точки следующих множеств:

а) $\mathbb{R}$, б) произвольное конечное подмножество $\mathbb{R}$, в) $\varnothing$, г) $\mathbb{Z}$,
д) $[0, 1]$, е) $(0, 1)$, ж) $\{1/n \mid n \in N\}$, з) положительные числа,
и) неотрицательные числа, к) рациональные числа,
л) иррациональные числа, м*) множество чисел, хотя бы в одном троичном разложении которых нет цифры 1.

Решение. а) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$; б) $\varnothing$, $\varnothing$; в) $\varnothing$, $\varnothing$; г) $\varnothing$, $\varnothing$; д) $(0, 1)$, $[0, 1]$;

[7] Обычной (а не проколотой).

е) $(0, 1)$, $[0, 1]$; ж) $\varnothing$, $\{0\}$; з) $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$; и) $(0, +\infty)$, $[0, +\infty)$.

Так как в любой окрестности любого числа есть как рациональные, так и иррациональные — к) $\varnothing$, $\mathbb{R}$; л) $\varnothing$, $\mathbb{R}$.

м) См. решение задачи 21.

Задача 6. а) Верно ли, что предельная точка последовательности является предельной точкой множества членов этой последовательности?

б) Верно ли, что предельная точка множества членов последовательности является предельной точкой этой последовательности?

Решение. а) Нет. Например постоянная последовательность $(x_n = a)$ имеет предельную точку, в то время как множество ее членов состоит из одного элемента и предельных точек не имеет.

б) Да. Если какая-либо точка является предельной для множества членов последовательности, то в любой ее проколотой окрестности есть члены последовательности; значит, эта точка является предельной и для последовательности.

Если все члены последовательности различны, то предельные точки последовательности совпадают с предельными точками множества точек этой последовательности.

Задача 7. Докажите, что любое бесконечное подмножество отрезка имеет предельную точку.

Замечание. На прямой аналогичное утверждение неверно — контрпример дает, например, множество целых чисел.

Решение. Возьмем какую-либо последовательность (попарно различных) элементов нашего множества. По теореме Больцано—Вейерштрасса (см. с. 96) эта последовательность (как последовательность точек отрезка) имеет предельную точку, которая и будет искомой предельной точкой.

Другое решение (набросок). Можно обойтись без ссылки на теорему Больцано—Вейерштрасса (фактически повторив ее доказательство): разделим отрезок пополам; в одной из половин содержится бесконечное число элементов нашего множества; итерируя процедуру, получаем последовательность вложенных отрезков, сходящуюся к предельной точке.

Определение 6. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 8. а) Какие из множеств задачи 5 открыты? А какие замкнуты?

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 154

б) Бывают ли подмножества $\mathbb{R}$, замкнутые и открытые одновременно?

в) Верно ли, что любое подмножество $\mathbb{R}$ либо замкнуто, либо открыто?

Решение. а) Так как все предельные и внутренние точки этих множеств найдены в задаче 5, нетрудно получить ответ: открытые — а), в), е), з); замкнутые — а)–д), и), м).

б) Да. Таковы пустое множество и все $\mathbb{R}$. Можно доказать, что других таких подмножеств в $\mathbb{R}$ нет («(топологическая) связность прямой», см. также задачу 12).

в) Нет. Пример подмножества прямой, не являющегося ни открытым, ни замкнутым, дает полуинтервал или множество рациональных чисел.

Задача 9. Докажите, что множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Решение. Пусть A открыто, докажем что $\mathbb{R}\setminus A$ замкнуто, т. е. что $x\notin \mathbb{R}\setminus A$ не может быть предельной точкой множества $\mathbb{R}\setminus A$. Действительно, раз $x\notin\mathbb{R}\setminus A$, значит, $x\in A$. Но множество A открыто, поэтому точка x содержится в нем вместе с некоторой окрестностью U. Таким образом, мы нашли окрестность точки x, не содержащую элементов множества $\mathbb{R}\setminus A$.

Пусть теперь A замкнуто, докажем что $\mathbb{R}\setminus A$ открыто, т. е. что $x\in\mathbb{R}\setminus A$ обязательно является внутренней точкой последнего множества. Действительно, $x\in\mathbb{R}\setminus A$, значит, $x\notin A$. Но множество A замкнуто, поэтому точка x не может быть его предельной точкой. Значит, у точки x есть целая проколотая окрестность U, не содержащая точек из A. Таким образом, мы нашли окрестность точки x, целиком лежащую в $\mathbb{R}\setminus A$ — это $U\cup\{x\}$.

Задача 10. а) Докажите, что пересечение (любого числа) замкнутых множеств замкнуто. б) Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Решение. Проще всего воспользоваться предыдущей задачей: если обозначить $\mathbb{R}\setminus A$ за $A^\vee$, то $(A\cup B)^\vee = A^\vee\cap B^\vee$ и $(A\cap B)^\vee = A^\vee\cup B^\vee$; поэтому требуемые утверждения мгновенно следуют из задачи 3.

Другое решение. а) Пусть все множества A_i $(i\in I)$ замкнуты, а x — предельная точка множества $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Это значит, что в любой проколотой окрестности точки x имеются точки из $\bigcap\limits_i A_i$. В частности, для

vo8-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 155

любого $i \in I$ в каждой проколотой окрестности точки x есть элементы множества A_i, т. е. x — предельная точка множества A_i. Но ввиду замкнутости A_i отсюда следует, что $x \in A_i$ для произвольного $i \in I$, т. е. $x \in \bigcap_i A_i$.

Мы получили, что произвольная предельная точка множества $\bigcap_i A_i$ лежит в нем, что и требовалось доказать.

б) Пусть все множества A_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ замкнуты, а x — предельная точка множества $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$. Пусть она не является предельной точкой ни для какого множества A_i. Это означает, что существуют δ_i, такие что в $\dot{U}_{\delta_i}(x)$ нет элементов множества A_i. Но тогда в проколотой $\min(\delta_1, \ldots, \delta_n)$-окрестности нет точек ни одного из множеств A_i, что противоречит выбору x. Полученное противоречие доказывает, что x — предельная точка одного из множеств A_i, следовательно, $x \in A_i \subset \bigcup A_i$.

Объединение бесконечного числа замкнутых множеств может уже не быть замкнутым. Например, множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} [1/i, 1] = (0, 1]$ не замкнуто. Также любое счетное множество является счетным объединением замкнутых множеств — своих точек; однако не все счетные множество замкнуты (не замкнуто, например, множество рациональных чисел).

Определение 7. Объединение множества A и множества его предельных точек A' называется *замыканием* множества A. Обозначение: $\bar{A}$.

Задача 11. Докажите, что замыкание любого множества замкнуто.

Решение. Пусть a — предельная точка множества $\bar{A}$. Докажем, что $a \in A'$, — рассмотрим произвольный $\varepsilon > 0$ и докажем, что в ε-окрестности точки a найдется точка из A. Заметим, что в $\varepsilon/2$-окрестности точки a содержится точка $x \in \bar{A}$. Если $x \in A$, то это искомая точка. Если же $x \in A'$, то в $\varepsilon/2$-окрестности уже точки x найдется точка $y \in A$. Очевидно, что $y \in U_\varepsilon(a)$.

Задача 12*. Докажите, что любое открытое множество является объединением не более чем счетного числа интервалов.

Указание. Подмножество прямой называется (линейно) *связным*, если вместе с любыми двумя своими элементами оно содержит отрезок, их соединяющий.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 156

1) Докажите, что любое связное открытое множество A представляет собой интервал $(\inf A, \sup A)$ (возможно, бесконечный — т. е. открытый луч или прямую, если A неограниченно).

2) Докажите, что любое открытое множество представляет собой объединение непересекающихся связных открытых множеств.

3) Докажите, что этих подмножеств не более чем счетное число.

Определение 8. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *всюду плотным*, если $\bar{A} = \mathbb{R}$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *нигде не плотным*, если $\bar{A}$ не имеет внутренних точек.

Другими словами, множество $A \subset \mathbb{R}$ называется всюду плотным, если любой интервал содержит элемент A, и нигде не плотным, если любой интервал можно уменьшить так, чтобы он не содержал элементов A.

Задача 13. Какие из множеств задачи 5 всюду плотны? Нигде не плотны?

Ответ. Всюду плотны множества а), к), л); нигде не плотны множества б), в), г), ж) и м).

Задача 14. а) Верно ли, что дополнение до всюду плотного множества нигде не плотно?

б) Верно ли, что дополнение до нигде не плотного множества всюду плотно?

Решение. а) Нет. Например, множества рациональных и иррациональных чисел являются дополнениями друг к другу, но оба (как обсуждалось в предыдущей задаче) всюду плотны.

б) Да. Действительно, пусть A — нигде не плотное подмножество прямой, а x — точка прямой. Рассмотрим произвольную проколотую окрестность точки x. Вся эта окрестность не может лежать в A, так как A не имеет внутренних точек. Значит, произвольная точка прямой является предельной для $\mathbb{R} \setminus A$, что и требовалось доказать.

Задача 15*. На окружности расположена ловушка длины ε, а в некоторой точке вне ловушки сидит точечный заяц. Заяц прыгает по окружности, каждый раз на одно и тоже расстояние $x\pi$. При каких x заяц рано или поздно попадет в ловушку, независимо от ее размера и начального расположения?

Указание. Среди 100 точек на окружности всегда найдется две на расстоянии не больше $\pi/50$.

Ответ. При иррациональных x. Решение этой и следующей задач см. в листке «Вращаем окружность» за 10 класс.

Задача 16*. В каждой точке целочисленной решетки на плоскости посажена кукуруза фиксированного диаметра. Охотник стреляет из начала координат в некотором направлении. Докажите, что он никогда не промахнется.

Задача 17* (теорема Бэра). Докажите, что отрезок $[0, 1]$ нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Набросок решения. Предположим, что отрезок покрыт набором A_1, $A_2, \ldots$ нигде не плотных множеств. Выберем отрезок $I_1 \subset [0, 1]$, не содержащий элементов A_1; потом отрезок $I_2 \subset I_1$, не содержащий элементов A_2, …

Пересекая все эти отрезки получим точку отрезка $[0, 1]$, не лежащую ни в одном из множеств A_i, что противоречит предположению.

Это (возможно, довольно искусственное на вид) утверждение дает мощный способ (неконструктивного) доказательства существования объектов, имеющих некоторые свойства (например, нигде не дифференцируемых функций).

Задача 18* (компактность отрезка). Пусть отрезок $[0, 1]$ содержится в объединении а) счетного; б) произвольного множества интервалов. Докажите, что из этих интервалов можно выбрать конечное подмножество, объединение которых содержит отрезок $[0, 1]$.

Указание. Можно предположить противное, воспользоваться методом деления пополам (см. задачу 7) и получить противоречие.

Другое решение. Пусть X — множество $x \in [0, 1]$, таких что из нашего покрытия можно выделить конечное подпокрытия отрезка $[0, x]$. Ясно, что X непусто — $0 \in X$. Мы хотим доказать, что $X = [0, 1]$. Посмотрим на $s = \sup X$.

Заметим, что $s \in X$. Действительно, если I интервал из покрытия, содержащий x, а C — конечное подпокрытие множества $[0, \inf I]$, то $C \cup \{I\}$ — конечное подпокрытие множества $[0, s]$. Но тогда $s = 1$ — иначе подпокрытие, содержащее s, содержит интервал, больший чем $[0, s]$, что противоречит тому, что s — точная верхняя грань.

Последнее решение демонстрирует топологическую версию метода минимального контрпримера, другими словами, «индукции по отрезку».

Задача 19*. Решите аналог предыдущей задачи, заменив интервалы на произвольные открытые множества.

v08-09 11 ноября 2010 г. 17:49 С. 158

Набросок решения. Решение предыдущей задачи (с незначительными вариациями) проходит и здесь.

Другое решение. Пусть отрезок содержится в объединении открытых множеств U_s. Для каждой пары $(s, x \in U_s)$ выберем интервал I_s^x, содержащий точку x и содержащийся в U_s. Объединение интервалов I_s^x покрывает отрезок, значит, из него можно выбрать конечное подпокрытие $I_{s_1}^{x_1}, \ldots, I_{s_n}^{x_n}$. Тогда $U_{s_1}, \ldots, U_{s_n}$ является подпокрытием исходного покрытия.

Задача 20*. Множество $X \subset \mathbb{R}$ содержится в объединении некоторого множества интервалов. Докажите, что можно выбрать счетное подмножество интервалов, объединение которых содержит X.

Указание. Удобно сначала вместо того, чтобы выбирать счетное подмножество интервалов, *вписать* в исходное покрытие счетное.

Решение. Пусть X покрыто множеством S интервалов. Для каждой точки $x \in X$ выберем содержащий ее интервал $I_x \in S$. Заметим, что в каждом I_x можно выбрать также содержащий x подынтервал J_x с рациональными концами. Отметим, что $\{J_x\}$ снова покрытие множества X.

Вспомним теперь, что множество всех интервалов с рациональными концами счетно (так как $\mathbb{Q}^2$ счетно — см. листок «Счетные и несчетные множества»), поэтому среди множеств J_x не более чем счетное число различных, то есть $\{J_x \mid x \in X\} = \{J_x \mid x \in X'\}$, где X' — некоторое счетное подмножество X. Множество $\{I_x \mid x \in X'\}$ и есть искомое счетное покрытие множества X.

Определение 9. Множество называется *совершенным*, если оно совпадает со множеством своих предельных точек.

Другими словами, совершенное множество — это замкнутое множество без изолированных точек.

Задача 21*. Приведите пример нигде не плотного совершенного множества.

Ответ. Таким свойством обладает Канторово множество — множество из задачи 5м.

Задача 22*. а) Докажите, что совершенное множество имеет мощность континуум.

б) Докажите, что любое замкнутое подмножество прямой есть объединение совершенного и не более чем счетного множеств.

в) (*Континуум-гипотеза для замкнутых множеств.*) Докажите, что замкнутое подмножество прямой либо не более чем счетно, либо равномощно отрезку.

Указание. г) Используйте метод деления пополам.

д) Множество *точек конденсации* — точек, в любой окрестности которых содержится несчетное число элементов множества, — совершенно.

Решение. а) Построим инъективное отображение из множества бесконечных последовательностей нулей и единиц в совершенное множество M. Пусть x_0 и x_1 — два различных элемента множества M. Рассмотрим окрестности U_0 и U_1 этих точек, такие что $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \varnothing$ (например, можно взять $|x_0 - x_1|/3$-окрестности). Так как точка x_i — предельная точка множества M, в ее окрестности U_i найдутся еще две различные точки x_{i0} и x_{i1}. Причем, так как $U_0 \cap U_1 = \varnothing$, все 4 точки x_{ij} различны. Выберем теперь у каждой из этих точек по окрестности $U_{ij} \subset U_i$ с непересекающимися замыканиями и т. д. Наконец, каждой последовательности (α_i) нулей и единиц поставим в соответствие (какую нибудь) точку из $\bar{U}_{\alpha_1} \cup \bar{U}_{\alpha_1\alpha_2} \cup \ldots$ (последнее множество непусто по принципу вложенных отрезков). Так как все эти точки попарно различны, утверждение доказано.

В книге использованы шрифты
гарнитуры ITC Charter.

Татьяна Игоревна Голенищева-Кутузова
Александр Дмитриевич Казанцев
Андрей Александрович Кустарёв
Юрий Георгиевич Кудряшов
Григорий Александрович Мерзон
Иван Валериевич Ященко

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ
(с решениями и комментариями)
Часть 2

Технический редактор *В. Ю. Радионов*

Тираж 2000 экз. Заказ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер., 6