Глава 1.

Первое занятие и мысли вокруг

Как это происходило

В приведенном здесь рассказе использованы материалы моей статьи «Малыши и математика, непохожая на математику» (журнал «Знание—Сила», № 8 за 1985 год).

Участников нашего кружка четверо: мой сын Дима и трое его друзей — Женя, Петя и Андрюша. Дима — самый младший, ему 3 года и 10 месяцев; самый старший — Андрюша, ему скоро должно исполниться пять.

Мы рассаживаемся вокруг журнального столика. Я, конечно, волнуюсь: как я тут с ними со всеми управлюсь? Для начала говорю детям, что мы будем заниматься математикой, и для поддержания авторитета добавляю, что математика — это самая интересная в мире наука. Тут же получаю вопрос: «А что такое наука?» Приходится объяснять: наука — это когда много думают. «А я думал, что фокусы будут», — несколько разочарованно произносит Андрюша. Его дома предупредили, что дядя Саша будет с ними сегодня заниматься, и будут фокусы. «Фокусы тоже будут», — говорю я и, сворачивая вступление, перехожу к делу.

Вот первая задача. Я кладу на стол 8 пуговиц. Не дожидаясь моих указаний, мальчики вместе кидаются их считать. Видимо, несмотря на юный возраст, некоторое представление о том, что такое математика, у них уже есть: математика — это когда считают. Когда шум утих, я могу сформулировать собственно задачу: «А теперь положите на стол столько же монет». Теперь на столе оказывается еще 8 монет. Мы кладем монеты и пуговицы в два одинаковых ряда, друг напротив друга. «Чего больше, монет или пуговиц?», — спрашиваю я. Дети смотрят на меня несколько недоуменно; им не сразу удается сформулировать ответ: «Никого не больше». — «Значит, поровну, — говорю я. — А теперь смотрите, что я сделаю». И я раздвигаю ряд монет так, чтобы он стал длиннее. «А теперь чего больше?» — «Монет, монет больше!», — хором кричат ребята. Я предлагаю Пете сосчитать пуговицы. Хоть мы их уже считали четыре раза, Петя ничуть не удивляется моему заданию и подсчитывает количество пуговиц в пятый раз: «Восемь». Предлагаю Диме сосчитать монеты. Дима считает и говорит: «Тоже восемь». «*Тоже* восемь? — подчеркиваю я голосом. — Значит, их поровну?» — «Нет, монет больше!», — решительно заявляют мальчики.

По правде говоря, я заранее знал, что ответ будет именно таким. Эта задача — только одна из бесчисленных серий задач, которые давал в своих экспериментах детям-испытуемым великий швейцарский психолог Жан Пиаже (о «феноменах Пиаже» немного рассказывается в следующем разделе). В своих опытах он установил: маленькие дети не понимают того, что нам с вами кажется самоочевидным — если несколько предметов как-нибудь переставить или переместить, то их количество от этого не изменится. Итак, я знал заранее, что скажут дети. Знал, но почему-то не приготовил никакой разумной реакции. А как поступили бы вы, читатель? Что бы вы сказали детям?

К сожалению, самый распространенный прием, которым пользуются в такой ситуации почти все взрослые, состоит в том, чтобы начать детям изо всех сил что-то втолковывать. «Ну как же так! — с наигранным удивлением говорит взрослый. — Откуда же их могло стать больше? Ведь мы же никаких новых монет не добавляли! Ведь мы их только раздвинули — и всё. Ведь раньше же их было поровну — вы же сами говорили! Значит, их никак не могло стать больше. *Конечно же* (выделяем голосом), монет и пуговиц осталось поровну!»

Старания напрасны — такая педагогика никуда не ведет. Точнее, ведет в тупик. Во-первых, не надейтесь, что ваша логика в чём-нибудь убедит ребенка. Логические структуры он усвоит еще позже, чем закон сохранения количества предметов. Пока этого не произойдет, логические рассуждения не покажутся ему убедительными. Убедительной является только интонация вашего голоса. А она покажет ребенку лишь то, что он опять оказался не на высоте и что-то сделал не так. Дети сдаются не сразу, их здравый смысл не так-то легко сломить. Но если насесть как следует, можно добиться того, что они перестанут опираться на собственный ум и наблюдательность, а будут пытаться угадать, чего желает от них взрослый. Взрослые вообще предъявляют детям множество необъяснимых требований: почему-то нельзя рисовать на стене; почему-то надо идти ложиться спать, когда игра в самом разгаре; почему-то нельзя спрашивать: «А когда этот дядя уйдет?». Вот и сейчас происходит что-то аналогичное: хотя я прекрасно вижу, что монет больше, чем пуговиц, но почему-то полагается отвечать, что их поровну. Отношение к математике как к некоему ритуалу, в котором нужно произносить определенные заклинания в определенном порядке, зарождается в школе и прекрасно доживает до университета, где его можно встретить даже у студентов-математиков.

Так что же всё-таки делать? Вообще не задавать подобных вопросов, что ли, если уж нельзя прокомментировать ответ?

Напротив, задавать вопросы как раз нужно. Очень полезно также обменяться мнениями: «А ты, Женя, как думаешь? А ты, Петя? А почему? А *насколько* монет стало больше?» Можно даже наравне с остальными высказать и свою точку зрения, но очень осторожно и ненавязчиво, снабдив всяческими оговорками типа «мне кажется» и «может быть». Иными словами, весь свой авторитет взрослого нужно употребить не на то, чтобы закрепить за этим авторитетом абсолютную власть единственно правильного суждения, а на то, чтобы убедить ребенка в важности и ценности его собственных поисков и усилий. Но еще интереснее натолкнуть его на противоречия в его собственной точке зрения. «А сколько монет надо забрать, чтобы снова стало поровну?» — «Две монеты надо забрать». Забираем две монеты; считаем: пуговиц восемь, а монет шесть. «А теперь чего больше?» — «Теперь поровну». Очень хорошо. Я снова раздвигаю монеты пошире и задаю тот же вопрос. Теперь уже оказывается, что шесть монет — это больше, чем восемь пуговиц. «А почему их стало больше?» — «Потому что вы их раздвинули». Мы опять отбираем две монеты; потом еще раз. Наконец, картинка становится такой, как показано на рисунке 1.1.

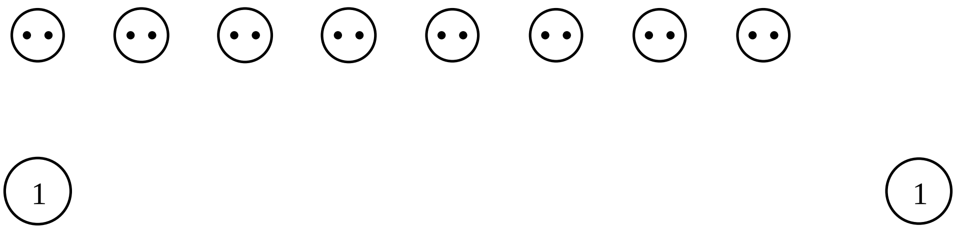

Рис. 1.1. В верхнем ряду лежат 8 пуговиц, в нижнем — 2 монеты. Чего больше, монет или пуговиц?

В этот момент вдруг завязывается яростный спор. Одни мальчики попрежнему считают, что монет больше, другие вдруг «увидели», что больше пуговиц. Пожалуй, самое время прерваться и перейти к другой задаче; пусть дальше думают сами.

◁ Я был среди тех, кто говорил, что монет всё равно больше. В первый раз я просто согласился со всеми остальными, а потом просто говорил не думая. Все предыдущие разы так было правильно (т. е. папа с этим соглашался), поэтому у меня не было причины менять мнение и в последний раз. — Дима ▷

Все эти мысли и идеи пришли ко мне далеко не сразу, так что в своем рассказе я забежал вперед — и в будущие свои размышления, и в будущие занятия. Эта задача еще многократно возникала у нас в разных обличьях. Было у нас, например, две армии, которые никак не могли победить друг друга, потому что у них было поровну солдат. Тогда одна из них раздвинулась, солдат у нее стало больше, и она начала побеждать. Увидев это, вторая армия раздвинулась еще шире и т. д. (Закончить историю можно в соответствии с собственной фантазией.) Еще был Буратино, которого Лиса Алиса и Кот Базилио пытались обмануть, раздвигая пять золотых монет и утверждая, что их стало больше. Я научился не ждать легких побед. Всё равно раньше чем через два-три года дети не усвоят закон сохранения количества предметов, как бы вы их ни учили. Да самое главное, это вовсе и не нужно! Я уверен: от этих скороспелых знаний пользы ровно столько же, сколько от преждевременных родов. Всему свое время, и не следует опережать события, в том числе и в области воспитания интеллекта. (Признаю, что эта точка зрения высказана здесь в несколько демагогической форме. Но аргументы в ее пользу — а их немало — будут обильно рассыпаны по дальнейшему тексту.) Однако, повторяю, все эти мысли были потом. А тогда, на первом занятии, какое-то интуитивное озарение удержало меня от «объяснений», и я просто перешел к следующей задаче.

На столе шесть спичек. Складываю из них различные фигурки и прошу ребят по очереди сосчитать, сколько здесь спичек. Каждый раз их оказывается шесть штук... Нет, я слишком увлекся схоластическими рассуждениями и стал писать как-то по-канцелярски. Давайте вернемся в живую детскую аудиторию, давайте увидим, как это происходит в жизни.

Каждый новый результат подсчета встречается настоящим взрывом восторга и хохота. Вот уже Андрюша и Женя кричат, что всегда получится шесть. Вот уже Дима довольно невежливо рвет у меня из рук спички, чтобы самому сложить какую-то вычурную фигурку, а Петя, напротив, очень вежливо спрашивает, не могу ли я ему дать еще спичек. Еще чуть-чуть — и их веселье перерастет в неуправляемое детское буйство. Надо их как-то удержать, и внимательно выслушать Андрюшу с Женей («Почему вы думаете, что всегда будет шесть?»), и к тому же не упускать новые повороты мысли: ведь тут как раз Дима сложил трехмерную фигурку — колодец. Я привлекаю к ней всеобщее внимание. На этот раз даже Андрюша с Женей уже не так твердо уверены, что снова получится шесть. Считать спички очень трудно — колодец всё время разваливается. Мы его восстанавливаем, считаем снова, он опять разваливается... Наконец у Димы получается семь! Все в легком недоумении, но особенно сильного удивления никто не проявляет: семь так семь, хоть и немного странновато. Ну что ж, я, наверное, повторяюсь — ну так и повторюсь, не суть важно: моя педагогическая задача состоит не в том, чтобы сообщать детям окончательно установленные истины, а в том, чтобы разбудить их любознательность. Самый замечательный результат, на который я хотел бы рассчитывать, о котором, можно сказать, мечтаю — это чтобы кто-нибудь из мальчиков через несколько дней (или месяцев) вдруг по собственной инициативе сам сложил спички колодцем и пересчитал их — просто потому что стало интересно, потому что захотелось узнать, как же обстоят дела на самом деле. Ведь это было бы маленькое самостоятельное исследование! Ну, а если этого не случится, то, будем надеяться, произойдет в другой раз, с другой задачей. (В будущем я имел немало подтверждений, что так оно и бывало неоднократно.) Так или иначе, я ограничиваюсь лишь замечаниями типа «как интересно!» и «замечательно!» — в надежде, что эта ситуация покрепче застрянет у них в памяти.

Детская память — это совершенно поразительная вещь. Не могу удержаться, чтобы не вставить здесь одну историю из более позднего времени.

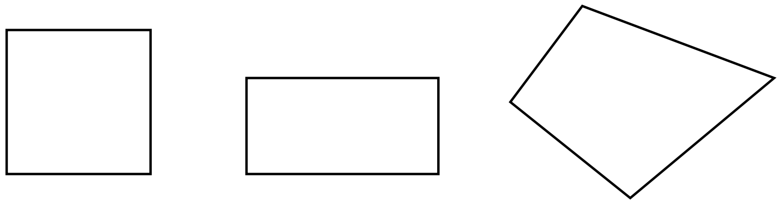

Рис. 1.2. Сколько на этом рисунке квадратов? Сколько прямоугольников? Сколько четырехугольников? Даже взрослые часто ошибаются в ответах на эти вопросы.

Одно из занятий: перед нами на столе — три фигурки из картона (рис. 1.2). Мы детально и обстоятельно обсуждаем их свойства. Прежде всего, у всех фигурок — по четыре угла. Значит, каждую из них мы можем назвать четырехугольником. Итого: у нас три четырехугольника. При этом два из них отличаются тем, что у них все углы прямые. За это их называют прямоугольниками. Один из двух прямоугольников особый: у него все стороны одинакового размера. Его называют квадратом. У квадрата как бы три имени: его можно назвать и квадратом, и прямоугольником, и четырехугольником — и всё будет правильно. Моя информация встречается не без сопротивления. Дети упорно стремятся мыслить в понятиях непересекающихся классов. А характер их объяснений внушает подозрение в том, что они еще не осознали по-настоящему великий закон «целое больше своей части». Десять минут назад они спорили о том, являются ли папы и дедушки мужчинами, а мужчины — людьми. А сейчас они никак не соглашаются называть квадрат прямоугольником: уж или одно, или другое. Я провожу настоящую агиткампанию за равноправие квадрата среди всех прямоугольников. Постепенно моя пропаганда начинает действовать. Мы еще раз подводим итог: сколько у нас квадратов? — Один. — А прямоугольников? — Два. — А четырехугольников? — Три.

Казалось бы, всё хорошо. И я задаю последний вопрос — я его уже упоминал во введении: «А чего вообще на свете больше — квадратов или четырехугольников?» — «Квадратов!» — дружно и без тени сомнения отвечают дети. «Потому что их легче вырезать», — объясняет Дима. «Потому что их много в домах, на крыше, на трубе», — объясняет Женя.

Такова завязка этой истории. А развязка произошла через полтора года, без всякой подготовки и даже без всякого внешнего повода. Летом на прогулке в лесу Дима неожиданно сказал мне: «Папа, помнишь, ты давал нам задачу про квадраты и четырехугольники — чего больше. Так мне кажется, мы тогда тебе неправильно ответили. На самом деле больше четырехугольников». И дальше довольно толково объяснил, почему. С тех пор я и исповедую принцип: вопросы важнее ответов.

... Психологи проводили и продолжают проводить множество экспериментов, пытаясь научить детей некоторым первоначальным математическим закономерностям. Например, делают так. Сначала группу ребят проверяют, понимают ли они такую простую вещь: если кусок пластилина помять, раскатать и вообще придать ему другую форму, то количество пластилина от этого не изменится. Тех, кто этого не понимает, делят на две части. Одну оставляют «свободной» — это так называемая контрольная группа. А другую начинают обучать закону сохранения количества вещества: показывают, объясняют, взвешивают, сравнивают. Недели через две опять проверяют участников обеих групп, смотрят, кто чему научился. Чаще всего в результате оказывается, что прогресс в обеих группах весьма незначительный и при этом совершенно одинаковый. Обычно психологи недоумевают: почему же дети, которых так старательно обучали, так ничему и не научились. Я, читая отчеты об этих экспериментах, заинтересовался противоположным явлением: почему дети, которых ничему не учили (контрольная группа), тоже чуть-чуть продвинулись вперед. Моя гипотеза после нескольких лет занятий с малышами такова: это происходит потому, что им тоже задавали вопросы.

Однако вернемся на наше занятие. Следующая задача — еще одна вариация всё на ту же тему закона сохранения количества предметов. Те самые шесть спичек, которые еще остались на столе после предыдущей задачи, раскладываются в рядок. Я прошу к каждой спичке приложить пуговицу (рис. 1.3).

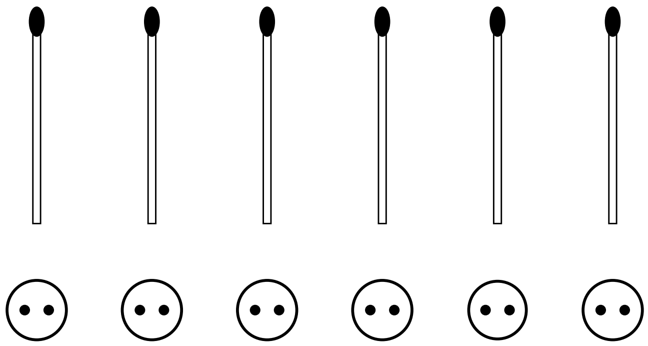

Рис. 1.3. Спичек и пуговиц поровну.

Стандартный вопрос: «Чего больше — спичек или пуговиц?» — «Поровну». — «Значит, пуговиц столько же, сколько спичек», — резюмирую я. Забираю все пуговицы в кулак и прошу сказать, сколько у меня в кулаке спрятано пуговиц. Характерно, что никто не делает ни малейшей попытки подсчитать спички. Да и зачем, собственно? Ведь спрашивают про пуговицы — значит, и считать нужно пуговицы. Дима как человек со мной на самой короткой ноге пытается разжать мой кулак, другие удивленно спрашивают: «Как же мы можем их сосчитать?» Я смеюсь: «Сосчитать, конечно, нельзя — пуговицы спрятаны. Но попробуйте как-нибудь угадать». Тогда на меня обрушивается настоящий шквал отгадок, чаще всего ни на чём не основанных. Каждый кричит что-то свое; при этом один лишь Женя кричит правильный ответ. Я пытаюсь его выслушать, спросить, почему, но он ретируется. Жене вообще часто мешает робость. Пока все кричат хором, перебивая друг друга, он, пожалуй, чаще других кричит правильный ответ. Но стоит всех утихомирить и обратиться лично к нему, как он смущается и уходит в себя. С Андрюшей — другая проблема. Он мальчик очень целеустремленный, и на наших занятиях ему явно не хватает мотивации. Когда я в следующий раз предложил ту же задачу в другой аранжировке — уже были не пуговицы со спичками, а солдаты с ружьями, потом они ушли, а ружья остались, и теперь разведчику нужно узнать, сколько было солдат — вот тогда он первым догадался, что можно сосчитать ружья. И еще он любит игры, в которых кто-то должен выйти победителем. Но у меня не всегда хватает фантазии представить задачу в подходящей форме. Тем более что для остальных детей этот аспект безразличен. Зато Дима вообще не любит решать чужие задачи, а любит придумывать свои. С трудом я подобрал к нему ключик — стал говорить примерно так: «Придумай задачу, в которой было бы. . . » — и дальше излагаю свое условие. К тому же его решения часто отличаются какой-то странной вычурностью (особенно это будет видно в следующей задаче); его довольно трудно ввести в колею здравого смысла. И с Петей, конечно, свои сложности. . . Как же мне поспеть-то — одному на всех? Боже мой, у меня всего четыре ученика, а я не могу обеспечить им индивидуальный подход! Что же может сделать учитель, у которого сорок человек в классе? Учи́теля часто любят сравнивать с дирижером. Я сам себе кажусь похожим скорее на жонглера, у которого вот-вот всё рассыпется по арене. Так и сейчас: пока я пытаюсь беседовать с Женей — что да почему — Дима уже вытащил карточки для следующего задания («четвертый — лишний») и спрашивает: «Папа, а это что, следующая задача?» Остальные двое уже рвут у него карточки из рук и безжалостно мнут их при этом, не щадя вечернего родительского труда. Женя уже тоже косится в их сторону и слушает меня вполуха. Я разжимаю кулак, мы бегло проверяем, сколько пуговиц, и переходим к следующей задаче.

Правила игры «четвертый — лишний» общеизвестны. Детям дают четыре карточки, на которых изображены, например, заяц, ежик, белка и чемодан. Нужно сказать, какой из этих рисунков лишний. Забавно наблюдать, как дети почти всегда дают правильный ответ, хотя далеко не всегда могут его объяснить. «Лишний — чемодан». — «Почему?» — «Потому что он не заяц, не ежик и не белка». — «Ах, вот как! А по-моему, лишний заяц. Потому что он не ежик, не белка и не чемодан!» Мальчики смотрят на меня в недоумении и заявляют настойчиво: «Нет, лишний чемодан!» Я пытаюсь узнать, нельзя ли все три нелишних предмета — зайца, ежика и белку — назвать одним общим словом. Наконец, Петя, который по словарному запасу опережает остальных, первый находит нужное слово — «животные». И в дальнейшем он часто выручал нас в подобных ситуациях.

(А как-то раз меня пригласили провести занятие в группе незнакомых детей, тоже лет четырех—пяти. Я выложил на стол свои любимые карточки с зайцем, ежиком, белкой и чемоданом и спросил, кто здесь лишний. Дети смотрели на меня с выражением полной затравленности и ужаса во взоре. Наконец один из них набрался храбрости и выдавил: «Поровну...» — Ага, понял я, с ними уже до меня как следует «позанимались».)

Между прочим, я даю также и задачи с неоднозначным ответом. Например: воробей, пчела, улитка и самолет. Можно лишним считать самолет (неживой), а можно улитку (не летает). На рис. 1.4 показан пример, когда каждый из предметов может быть объявлен лишним, так что суть задачи меняется. В таких задачах я сам по очереди назначал лишних, а мальчики должны были давать объяснения. Так я пытался внушить им эту важную для математики идею, что нужны не только и даже не столько правильные ответы, сколько правильные объяснения; или, на более научном языке, не только правильные утверждения, но и их доказательства.

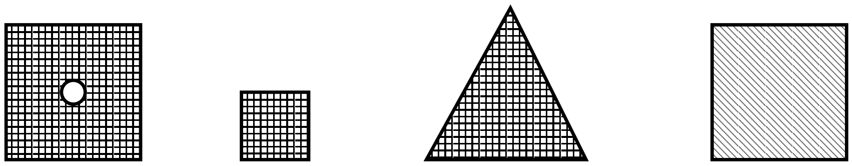

Рис. 1.4. Вместо того, чтобы искать, какой предмет здесь лишний, нужно по очереди самим «назначать» лишнего и потом объяснять, почему он лишний.

Схема «четвертый — лишний» и ее разновидности учень удобны для того, чтобы учить детей угадывать закономерности (эта грань математического мышления полностью игнорируется школьной педагогикой). Иногда удобнее брать восемь картинок, которые должны разделиться по выделенным признакам на две равные группы; именно такой схемой пользовался М. М. Бонгард в своей классической книге «Проблемы узнавания». К сожалению, и читатель с этим легко согласится, восемь картинок — это вдвое больше, чем четыре. А где их взять-то? За редкими исключениями, картинки для нашего кружка рисовала Алла; я сам рисовать совсем не умею, а она в свое время окончила художественную спецшколу.

И уж совсем трудные логические задачи получаются с пересекающимися классами. Например, пять картинок нужно разбить на две равные группы, по три картинки в каждой; при этом одна из картинок общая — она принадлежит обеим группам. Вот, например: мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, пальто, шапка. Здесь три предмета из резины (мяч, шина, сапоги) и три предмета одежды (сапоги, пальто, шапка); общий элемент — сапоги. Отдельный вопрос: как чисто физически поделить пять картинок на две группы по три — не рвать же одну карточку пополам. Мы пользовались стандартным приемом: двумя веревочными кругами, в пересечении которых помещали общий предмет (на рис. 1.5 показан еще один пример аналогичной ситуации).

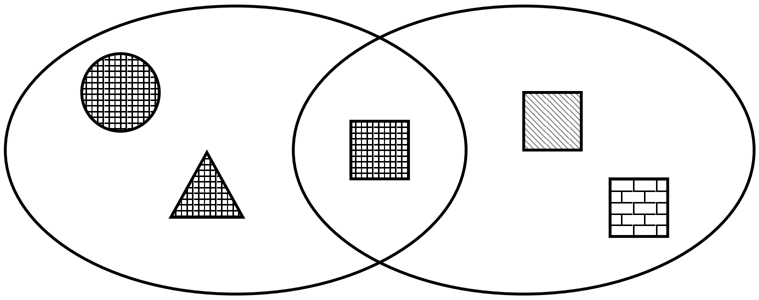

Рис. 1.5. Здесь изображены два множества по три предмета в каждом: одно состоит из трех красных предметов, другое — из трех квадратов. Красный квадрат является для них «общим»; математики говорят — «лежит в *пересечении*» этих множеств.

Для Димы этот класс задач явно представлял собой проблему (или это сам Дима представлял собой проблему?). «Это хоть и дядя, но похож на тетю», — говорил он про старика с бородой-лопатой и помещал его в общество женщин. Про автомобильную шину он долго доказывал нам всем, что это тоже одежда, так как ее можно носить на поясе. Когда же с ним никто не согласился, он сказал: «Всё равно это одежда, потому что ее надевают на автомобиль». Кто-нибудь скажет: вот, ребенок умеет мыслить творчески, нестандартно. Насчет «нестандартно» согласен, но вот творчески... Человек по-настоящему творческий умеет предложить неожиданное, нестандартное решение и при этом остаться в рамках задачи. Сложить шесть спичек колодцем — тут я согласен, это решение творческое. Счесть же бородатого старика тетей или автомобильную шину одеждой — нет. Очень часто у Димы присутствует первый компонент — нестандартность, а вот остаться в рамках задачи или хотя бы вблизи от них он пока не умеет. Надо как-то суметь, не подавив одно, развить другое. А как?

Наша следующая (и последняя на этот раз) задача — из области геометрии. Я извлекаю цветную детскую мозаику, купленную когда-то в магазине «Лейпциг» (увы, всего в одном экземпляре: в момент покупки мы еще не помышляли о кружке). Мозаика представляет собой прямоугольное поле с отверстиями. В них вставляются одинаковые по форме фишечки пяти разных цветов (рис. 1.6). Цвет фишек очень яркий, насыщенный, приятный для глаз. Наша задача — про симметрию. Сначала я выкладываю ось — одноцветную вертикальную линию, проходящую посередине поля. Я называю эту линию «зеркалом»; в это зеркало сейчас будут смотреться разные фигурки. Я строю с одной стороны от оси разнообразные небольшие фигурки, а мальчики должны построить симметричные им фигурки с другой стороны. Я варьирую всё, что можно: цвет, размер, расположение фигур. На следующих занятиях будет меняться также и расположение оси: сначала она станет горизонтальной, потом пойдет по диагонали. С помощью настоящего зеркала мы проверяем наши решения: оказывается ли за зеркалом то же самое, что мы видим в зеркале?

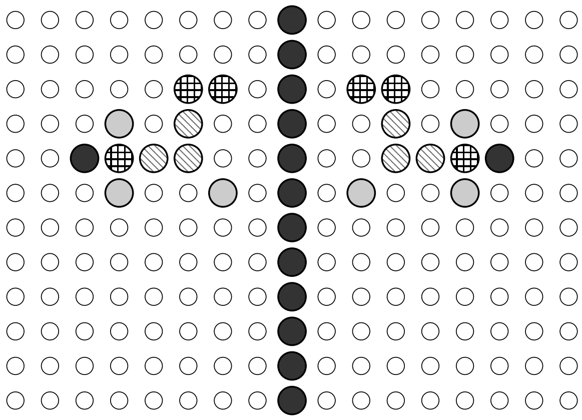

Рис. 1.6. Мозаика. Вертикальный ряд фишек посередине представляет собой «зеркало», или ось симметрии. Фигурку слева строит преподаватель; симметричную ей фигурку справа должен построить ученик.

Мальчики справляются с задачей на удивление легко, почти не допускают ошибок. Не могу понять, почему эта тема (осевая симметрия) вызывает трудности в шестом классе! Мы впоследствии посвятили ей много занятий. Симметрия в самом деле очень богатая тема, и к тому же красивая. Мы рассматривали картинки с симметричными узорами из книг по популярной математике. Мы рисовали симметричные фигуры разноцветными фломастерами на клетчатой бумаге; делали симметричные кляксы, складывая лист бумаги пополам; вырезали новогодние снежинки; находили ошибки в симметричных рисунках, в которых были специально сделаны кое-где нарушения, отклонения от точной симметрии; среди восьми карточек находили четыре симметричные и четыре несимметричные фигуры; у одной фигуры находили все возможные оси симметрии и т. д. Другие виды изометрий — центральная симметрия, поворот, параллельный перенос — оказываются для детей несколько более сложными, а вот осевая симметрия буквально идет «на ура».

А мозаика вскоре стала моим любимейшим инструментом. Это не игра, а настоящий клад всевозможных задач по геометрии, комбинаторике, логике, угадыванию закономерностей. А однажды она мне преподала незабываемый урок на тему о том, «что́ для детей важнее». Дело было так. Мальчики с удовольствием ходили на занятия, а иногда даже бывало так, что в ответ на мои слова «урок окончен» просили позаниматься еще. Я гордился собой — пока вдруг не заметил, что их просьбы продолжить занятие следуют только тогда, когда мы занимаемся с мозаикой. Я решил проверить свою догадку. Следующее занятие было без мозаики. Так оно и есть: говорю «урок окончен» — дети спокойно встают и расходятся. Меня охватили глубочайшие сомнения. Мозаика в самом деле очень красива, нет ничего удивительного в том, что ребятам нравится с нею играть. А моя математика, думал я, здесь ни при чём; я протаскиваю ее как обузу, как никому не нужный довесок, как нагрузку к интересной игрушке! На следующий раз я решил устроить решающий эксперимент. Мы опять занимаемся с мозаикой; опять мальчики не хотят заканчивать занятие; и тогда я говорю: «Нет, давайте мы урок всё-таки закончим, а с мозаикой я вам разрешаю поиграть просто так». В ответ следует единодушный вопль возмущения, и Петя резюмирует общую точку зрения в решительных словах: «Э, не-ет! Мы хотим задачку!!»

Вот так я понял, где лежит истина. Детям нужно полноценное интеллектуально-эстетическое удовольствие. Если одна из половин отсутствует, полноценность теряется, а с ней и ощущение праздника. Новогодняя елка без игрушек имеет в глазах детей так же мало притягательности, как игрушки без елки. Только когда они соединяются вместе, наступает праздник. Я надеюсь, что в будущем, через годы, когда мои ребята будут заниматься более абстрактной, «умственной» математикой, они будут получать от этого больше удовольствия, чем их сверстники. Ведь возникающие у них в уме абстрактные образы и понятия будут где-то на дне сознания эмоционально сливаться с «елкой», окрашиваться воспоминаниями о разноцветных задачах их детства.

Вот и сейчас — мы уже прошли два круга, т. е. каждый из ребят решил по две задачи на симметрию, пора бы уже кончать, но мальчики не унимаются, хотят еще. Мне кажется, что они уже устали. И я нахожу неожиданный выход: «Давайте теперь *вы* будете мне задавать задачи, а я буду их решать». Дети в восторге! С новым пылом они строят фигурки, а я — им симметричные. Работаю старательно. Вдруг в голову приходит еще одна идея: я начинаю нарочно делать ошибки. Петя первый это замечает; счастью детей нет конца. К ним как-будто пришло второе дыхание. Теперь они с горящими глазами, не отрываясь, следят за моей рукой, встречая каждую новую ошибку воинственными дикарскими кличами.

Но пора и в самом деле закругляться. Я отодвигаю мозаику, благодарю всех и объявляю занятие оконченным. «А когда же фокусы будут?», — вдруг вспоминает Андрюша. «Ну как же, Андрюша! Ведь ты сам и показывал фокусы! Пуговиц было не видно, они были спрятаны у меня в кулаке, а ты сумел их сосчитать». Сумел, правда, не он, а Женя, но Андрюша, видимо, об этом позабыл, потому что выглядит вполне удовлетворенным. Мы встаем. Я смотрю на часы: неужели прошло всего 25 минут? Сейчас дети разойдутся, а я останусь приводить в порядок свои мысли, придумывать новые задачи, новые подходы, приемы. И еще — клеить, вырезать, раскрашивать. Одним словом, готовить то, что в педагогике зовется скучным словом «дидактический материал». Ведь до следующего занятия — всего одна неделя.

Феномены Пиаже: реальность или обман зрения?

В этой книге я многократно возвращаюсь к так называемым феноменам Пиаже. Поэтому, думаю, надо сказать о них несколько вводных слов.

Великий швейцарский психолог Жан Пиаже (Jean Piaget) — безусловно одна из наиболее монументальных фигур в психологии XX века. За свою долгую жизнь (1896–1980) он написал около 50 книг и около 500 статей (точное их количество вряд ли знал даже он сам). В 1976 году отмечался весьма своеобразный юбилей: восьмидесятилетие со дня рождения Пиаже и семидесятилетие его научной деятельности. Именно так! Свою первую статью он опубликовал в возрасте 11 лет: он наблюдал в парке воробья-альбиноса и описал его в каком-то журнале.

В школьные годы Пиаже увлекается «малакологией» — наукой о моллюсках — и вскоре становится общепризнанным специалистом в этой области. Заочно, «по совокупности работ», ему предлагают весьма престижную должность смотрителя коллекции моллюсков в Женевском музее Натуральной истории. Мальчику приходится признаться, что он всего лишь школьник. К 20 годам он уже малаколог с мировым именем.

В этот момент он резко меняет направление своих занятий и переключается на детскую психологию. И уже к 30 годам становится признанным классиком детской психологии и автором пяти всемирно известных монографий. Дальше наступает весьма своеобразный этап. Эти пять монографий надолго заслонили дальнейшую деятельность Пиаже. При слове «Пиаже» у специалистов возникал своего рода автоматический рефлекс: «А-а, Пиаже, как же, как же, знаем! Знаменитые пять книг...». А между тем он продолжал двигаться вперед, и притом с не меньшим напором и всё с той же легендарной продуктивностью. Впрочем, и миру вскоре становится не до детской психологии. Фашизм, война, потом послевоенное восстановление... А в тихой нейтральной Швейцарии Пиаже продолжает свою работу. Где-то, по-видимому, в 50-е годы происходит осознание реального масштаба его вклада в науку.

Некоторое количество трудов Пиаже переведено на русский язык. Например, имеется сборник: Жан Пиаже «Избранные психологические труды» (М.: Просвещение, 1969). В нём можно найти и абсолютно нечитаемую теоретическую работу «Психология интеллекта», и книгу, от которой трудно оторваться: «Генезис числа у ребенка». Вообще, чтобы получить общее представление о его теории, лучше всего, по-моему, читать книгу Джона Флейвелла «Генетическая психология Жана Пиаже» (М.: Просвещение, 1967).

Характерно, что сам Пиаже считал себя не психологом, а *эпистемологом*, т. е. специалистом по теории познания. Эта наука призвана ответить на вопрос, каким образом мы можем вообще что-то *знать*. Если в поисках ответа мы хотим не просто переливать друг в друга пустые слова, а заниматься конкретными исследованиями, то у нас есть два пути: либо изучать историю познания — каким образом люди постепенно познавали мир; либо изучать, каким образом это происходит у маленьких детей. Пиаже пошел по второму пути.

Из всех многочисленных грандиозных конструкций, теоретических построений и экспериментальных исследований Пиаже наиболее широкую известность приобрели так называемые *феномены Пиаже*[1]. Я уже упоминал их выше. Маленький ребенок не понимает, что если переложить несколько предметов (камешков, кубиков, ...) иначе, то их число при этом не изменится. Тем самым и само понятие числа остается для него недоступным, хотя он, быть может, и умеет «считать до ста». Потом ребенок подрастает, и вместе с этим приходит осознание вышеуказанного закона сохранения. Но всё равно приходится ждать еще года полтора—два, пока он не осознает аналогичный закон для непрерывных количеств: если раскатать шарик пластилина в колбаску, то количество пластилина останется тем же; если перелить воду из стакана в миску, то количество воды тоже не изменится. А также и многочисленные «смежные» закономерности — типа того, что если есть два одинаковых количества, и от одного из них забрали больше, а от

[1] Вот (неполный) список других сюжетов, которые он изучал: логика, время, движение и скорость, пространство, геометрия, случайность, восприятие, рассуждения подростков, воображение, речь, нравственные суждения ребенка, причинность, классификация и многое другое.

другого меньше, то *там, где забрали больше, осталось меньше*. Во всё это трудно поверить, настолько указанные принципы кажутся нам самоочевидными.

В этом замечательном открытии самым поразительным мне представляется то, что для него не нужны были ни космические ракеты, ни синхрофазотроны, ни лазеры. Оно в буквальном смысле «вертелось у всех под ногами». Не обязательно было дожидаться XX века: Платону и Евклиду оно было так же доступно, как и нам. Но — не пришло в голову. Потребовался интерес к познавательной функции человека, правильная постановка вопроса, недюжинная наблюдательность, ну и, разумеется, обширный эксперимент. Интересно, однако, что феномены Пиаже встретили также и мощнейшее сопротивление ученого сообщества. До сих пор, по прошествии многих десятилетий, вы встретите людей, которые при их упоминании только рукой махнут: мол, глупости всё это. Ведь мы же задаем ребенку вопрос посредством *слов*, не так ли? Мы спрашиваем, где *больше*, где *меньше*, где *поровну*. А кто и когда объяснял ему смысл этих слов, их, если угодно, семантику? Просто он их не так понимает, как мы, вот и всё. Лучше всего эту идею выразил один мой знакомый математический логик: «Ведь ты же не дал им *определения* слова "больше". Вот они и понимают его по-своему. Они считают, что "больше" — это значит, что ряд длиннее». Что тут можно возразить? В самом деле, определения не давал. А что же я должен был сказать? Что существует биекция между одним множеством и собственным подмножеством другого множества? Никаких вопросов это не снимает: откуда же знать, что если такая биекция нашлась один раз, то найдется и в другой раз? Видимо, надо было доказать такую лемму... Я спорю, но сам чувствую, что вяло. Вот, мол, в опытах вместе с детьми взвешивали куски пластилина до и после раскатывания в колбаску... Ну и что, что взвешивали! Ребенок же не знает, как устроены весы и что означают их показания.

Этот спор можно вести до бесконечности: выхода из заколдованного круга не существует. Как бы мы ни общались с ребенком, в какой бы форме ни ставили ему вопрос, всегда будет существовать некое промежуточное звено, некоторый «носитель сигналов», будь то слова, весы или арифметический подсчет. И всегда можно свалить всю вину на то, что этот «интерфейс», этот «протокол обмена» недостаточно формализован: мы толкуем его одним образом, а ребенок другим. Можно, правда, спросить у наших оппонентов, почему в семь лет ребенок уже правильно отвечает на все вопросы, хотя никаких определений ему по-прежнему никто не давал. Но в серьезном научном споре такой прием — «а как вы тогда объясните, что...?» — недопустим. Критик не обязан что-либо доказывать или объяснять — эта обязанность целиком возлагается на автора теории. Разумеется, в той мере, в какой в психологии вообще возможны доказательства.

Не вдаваясь в философские глубины этого спора, хочу сообщить мое собственное мнение на этот счет. После многих лет работы с детьми никакие доказательства мне больше не нужны. Я *знаю*, что Пиаже прав. Я наблюдал его феномены столько раз и в таких разных обстоятельствах, порой спровоцированных мною, порой совершенно спонтанных, что убеждать меня больше не надо. Помню, например, как собрались гости и не хватило одного стула. Дима — тогда трехлетний — стал предлагать разные способы, как их можно было бы пересадить. И каждый раз оказывалось, что снова не хватает одного стула. Достаточно было видеть его озадаченную физиономию, чтобы признать: дело тут вовсе не в семантике слова "больше". (Но я бы, разумеется, не обратил на это внимания, если бы Пиаже не подсказал.)

Психологи потратили немало сил и изобретательности, пытаясь научить детей законам сохранения (или, с точки зрения наших оппонентов, объяснить им точный смысл задаваемых вопросов). Результат, как правило, был нулевой. (Об одном — весьма относительном — успехе я расскажу чуть ниже.) Но больше всего мне понравилась вот какая история. Из большой группы испытуемых всё же удалось выделить некоторое количество детей, которые, судя по всему, «всё поняли». По крайней мере, на все вопросы экзаменаторов они отвечали правильно: «Пластилина осталось столько же, потому что мы к нему ничего не прибавили и не убавили. Мы только изменили его форму, и всё». И тогда исследователи сделали еще один шаг. Они попытались детей *разучить*. Ответит ребенок правильно, взвесят они вместе со взрослым пластилиновую колбаску — ан нет: она стала легче! Это зловредный экспериментатор незаметно для ребенка отщипнул от нее кусочек. И вот оказалось, что те дети, которые легко научились, так же легко и разучились. Они стали отвечать, что, мол, пластилина стало меньше, потому что мы раскатали шарик в колбаску. А вот тех детей, которые знали закон сохранения еще до эксперимента, знали сами по себе, разучить почему-то не удавалось. В тех же обстоятельствах они говорили: «Наверно кусочек упал на пол, а мы не заметили».

Ну, хорошо: если так трудно, а то и вовсе невозможно научить ребенка понятию числа, то чего я, собственно, добиваюсь? В чём цель и смысл моих занятий? Я уже говорил об этом, и буду повторять не раз: смысл занятий — в самих занятиях. В том, чтобы было интересно. В том, что ставить перед собой вопросы и искать на них ответы. В общем, это такой *образ жизни*.

*　*　*

Чтобы закончить этот раздел, расскажу еще пару историй. Первая из них относится к моему собственному детству. Не знаю, сколько мне было лет; видимо, что-то около пяти. Мы жили в Витебске. Во дворе нашего дома жил один старик, который любил время от времени поговорить с детьми. Я был «умненький мальчик», и про меня было известно, что я умею считать. Вот однажды он и предложил мне умножить 3 на 5. Я уже знал, что умножить — это значит сложить с собой нужное количество раз. И я пустился в это опасное и полное приключений плавание. Сначала $3+3$; это будет 6, и это пока легко. Идем дальше: $6+3=9$; это лишь незначительно сложнее, но главное — не сама операция; главное — это не забывать, сколько раз я уже сделал сложение. Теперь начинается самый трудный момент: $9+3$. Это, во-первых, переход через десяток, а во-вторых и снова — как бы не упустить, сколько раз я уже сложил... И уже почти приходя в отчаяние, на последнем пределе своих умственных возможностей, я сложил 12 и 3 и сказал: «Пятнадцать». — «Правильно! — ответил старик. — А как ты считал?» Я объяснил. «Зачем же так сложно? — удивился он. — Можно было просто сложить $5+5+5$». — Я был совершенно сражен и одновременно сбит с толку. Сложить $5+5+5$ — это проще простого: $5+5=10$ (тривиально), и $10+5=15$ (тоже тривиально). И, что самое удивительное, в результате в самом деле получается 15. Но почему!!?

Эта событие надолго запало мне в память. Я искал объяснения — и не находил. В школе я узнал, что в шестом классе начнется алгебра, и там будут *формулы*. Детям редко приходит в голову мысль, что можно заглянуть в учебник за будущие классы. И я терпеливо ждал шестого класса, надеясь, что тогда-то и придет долгожданное просветление. В шестом классе я написал формулу $ab=ba$, долго и тупо смотрел на нее, но никакого просветления так и не произошло. В девятом классе я попал в знаменитый Колмогоровский физико-математический интернат при Московском университете. Программа там была продвинутой; мы довольно быстро перешли к изучению групп, полей и колец. «Господи, какой же я был глупый, — решил я. — Ведь это же просто-напросто *аксиома*, и называется она *коммутативностью*. А аксиомы не доказывают». Время шло, и я еще слегка поумнел. Я понял, что аксиома-то она аксиома, но ввели ее не потому, что кто-то так распорядился, не по чьему-либо капризу, а потому что это свойство реально выполняется при умножении натуральных чисел.

(Заметим здесь в скобках, что, например, возведение в степень — т. е. «повторяющееся умножение» — вовсе не коммутативно. Умножьте 5 само на себя 3 раза, а потом умножьте 3 само на себя 5 раз, и результаты получатся совершенно различные. А вот для «повторяющегося сложения» почему-то получается одно и то же.)

И уж не помню сейчас, когда и почему я осознал, что речь идет просто о том, чтобы по-разному сосчитать одно и то же множество предметов. Мы берем «сколько-то» камешков и выкладываем их в три ряда по пять штук; а это то же самое, что выложить их в пять рядов по три штуки — смотря что считать рядом (рис. 1.7). Так значит, всё дело в том, что если одни и те же предметы считать в разном порядке, то результат должен получиться один и тот же! И, значит, не так-то уж это свойство и очевидно, если его осознание потребовало стольких лет и стольких умственных усилий.

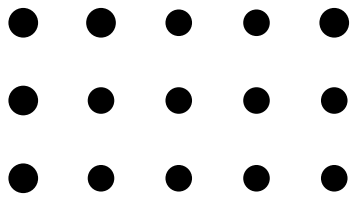

Рис. 1.7. Здесь 3 горизонтальных ряда по 5 кружков в каждом, т. е. всего $5 \cdot 3$. Но можно также и сказать, что здесь 5 вертикальных рядов по 3 кружка в каждом, т. е. всего $3 \cdot 5$. Если верить в то, что как ни считай, получишь одно и то же, то следует заключить, что $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

И в заключение — еще одна сценка. Точнее, подслушанный диалог. Участников двое — муж и жена; оба пенсионеры, обоим около 80 лет. Поэтому речь и движения персонажей происходят в замедленном темпе. Жена собирается готовить на ужин яичницу. Неожиданное препятствие: сковородка, в которой она обычно это делает, осталась непомытой после обеда. «Митя, большая сковородка грязная». Муж — с оттенком раздражения, так как его оторвали от его занятий: «Сделай в маленькой». — «Так я боюсь, что мало будет. . .» Муж — слегка поразмыслив над этим обстоятельством и пожимая плечами: «Тогда помой большую».

А как же закон сохранения количества вещества?!

Очень легко себе представить иные обстоятельства. Тем же самым двум старичкам дается формальный «тест на интеллект». Вопрос: если разбитые яйца перелить из одной сковородки в другую, то содержимого станет (а) больше; (б) меньше; (в) останется столько же; (г) результат операции зависит от размера сковородок. Я нисколько не сомневаюсь, что в этом случае ответ был бы правильным. И это наводит на разные вопросы, которые я даже затрудняюсь отчетливо сформулировать. Вопросы, во-первых, о соотношении между формально выученным и реально усвоенным. И, во-вторых, о том, в какой степени мы в нашем повседневном поведении руководствуемся «правильными рассуждениями», и в какой — некой наглядной «видимостью», тем, что «кажется глазу». (Видите, как много здесь кавычек (а также и скобок)? Это всё оттого, что не получается у меня выразить свою мысль «коротко и ясно».)

О пользе чтения книг по психологии

Математиков не всегда легко убедить в том, что книги по психологии представляют хоть какой-нибудь интерес. Их там смущает всё: и терминология, и уровень доказательности, и сами постановки задач. Я помню один диалог, оборвавшийся в самом начале. Я стал рассказывать молодому студенту об одной серии экспериментов. «Вот, например, — сказал я — такой вопрос: способен ли двухмесячный младенец обучаться?» В ответ мой собеседник только хмыкнул. «А что, разве это не очевидно? Спросили бы у меня, я бы им сразу сказал».

Что тут можно возразить? Ну конечно же может, это и в самом деле всем очевидно. Аналогичным образом отреагировал один мой знакомый француз на известие о том, за что была присуждена очередная Нобелевская премия по экономике. Ее получатель доказал, что экономическое поведение людей не является рациональным, логичным. «Мог бы спросить у моей консьержки», — пожал плечами француз.

Я чувствовал, что мой студент неправ, но возражение сумел придумать только много позже. Давайте зададим себе вопрос из другой области: одинаковы ли законы физики в разные моменты времени и в разных точках пространства? Ответ, пожалуй, столь же очевиден, как и в предыдущем случае. Любой философ скажет вам, что да, одинаковы, ибо иначе их просто не следует считать законами физики. И он, конечно, прав. Ну, а что скажет не философ, а физик?

Положение физика более сложно: он обязан иметь дело не с общими словами, а с конкретными законами — скажем, с какими-нибудь там уравнениями Максвелла. Расплывчатую фразу про разные моменты времени и разные точки пространства тоже следует конкретизировать, объяснив, что и как меняется при переходе от одной системы координат к другой. Доведите эту идею до конца — и вы откроете сначала преобразования Лоренца, а потом и теорию относительности Эйнштейна. А ведь это только первый шаг: уравнения Максвелла описывают электромагнитные взаимодействия, а существуют и иные: слабые, сильные, гравитационные. Уже в течение нескольких веков, начиная с Галилея, физики пытаются придать конкретную форму «очевидному» философскому принципу об одинаковости законов в пространстве и во времени, и путь еще далеко не закончен. Где-то на горизонте маячит «единая теория поля».

Итак, корень проблемы в том, чтобы задавать вопросы не в общефилософских терминах, а говорить о конкретных наблюдаемых и проверяемых в опыте явлениях. Конечно, до формул и уравнений психологии далеко. Тем не менее — давайте вместо вопроса о том, «может ли ребенок обучаться», спросим о чём-нибудь более конкретном. Ну, например, так: может ли он в возрасте двух месяцев запомнить последовательность из четырех битов? Скажем, такую: 0011? По сравнению с исходным глобальным вопросом звучит несколько убого, но ведь даже и на такой примитивный вопрос дать *экспериментальный* ответ не так уж просто.

Первая трудность: каким образом мы можем узнать, что ребенок в самом деле усвоил переданную ему информацию «0011»? Это пока еще не очень сложно. В рамках доступных ему действий можно, скажем, проверить, может ли он повернуть голову два раза влево и затем два раза вправо для того, чтобы добиться какой-нибудь цели.

Вторая трудность, на этот раз гораздо более существенная: какую цель можно ему предложить, и как сделать так, чтобы он захотел ее добиться? Чем можно его заинтересовать? В опытах над животными поступают просто: их, извините, морят голодом. Доводят вес подопытного животного до 80% нормального, и тогда в поисках пищи оно демонстрирует чудеса интеллекта. С детьми, слава Богу, так никто не поступает. А тогда что?

В психологии часто так случается, что главное открытие совершается не на дороге от вопроса к ответу, а где-то сбоку. Так и здесь: именно ответ на последний вопрос открывает нам глаза на какие-то новые истины. Исследователи испробовали множество разных «привлекательностей»: яркие погремушки, музыкальные перезвоны, порою целые фейерверки. Оказалось, что вполне достаточно обыкновенной лампочки. Единственным же настоящим стимулом для ребенка является сама *возможность обучаться*!

Дело происходит примерно так. Малыш случайно обнаруживает, что когда он поворачивает голову влево, загорается лампочка. Несколько раз он «подтверждает» свое наблюдение; потом успокаивается, и лишь время от времени, через сравнительно долгие промежутки, проверяет, всё ли в порядке. В какой-то момент вдруг оказывается, что нет, не всё в порядке: лампочка больше не загорается. Он начинает активно искать причину — до тех пор, пока не обнаруживает, что чтобы ее зажечь, нужно повернуть голову один раз направо и один раз налево. Наступает очередная серия подтверждений и очередной период успокоения. И снова вдруг выясняется, что лампочка не реагирует на «приказ». Опять следует активный поиск — и очередное решение. И так далее, вплоть до 0011. (Описание этого эксперимента заимствовано из книги Т. Бауэра «Психическое развитие младенца», М.: Прогресс, 1985.)

Вот ведь оно, оказывается, как обстоит дело. Главным стимулом для учебы является не награда, не «обобщенная конфета» после урока, а сама учеба, сама возможность узнавать новое. От нас требуется только не растоптать, не подавить эту устремленность к новому знанию, а также, наверное, создать ребенку достаточно разнообразную среду, чтобы его интерес к окружающему миру не ослабевал. И здесь психология тоже может дать нам в руки совершенно неожиданные ключи. Цитирую из книги В. С. Ротенберга и В. В. Аршавского «Поисковая активность и адаптация» (М.: Наука, 1984):

> Американские ученые Джонс, Нейшн и Массад исследовали четыре группы испытуемых. На начальном этапе исследования первая группа получала задачи, ни с одной из которых не могла справиться (0% успеха). Вторая группа получала задачи, каждую из которых удавалось решить (100% успеха); испытуемые третьей группы справлялись с каждой второй из предъявленных задач (50% успеха). После этого испытуемым всех трех групп и четвертой контрольной предъявляли серию принципиально нерешаемых задач, т. е. пытались выработать у них обученную беспомощность. На завершающем этапе исследования всем испытуемым предлагались средние по трудности, но решаемые задачи и выяснялась эффективность предшествующей серии. Оказалось, что иммунизация к обученной беспомощности создавалась только у испытуемых третьей группы. Именно они лучше всего решали задачи на завершающем этапе. Первая, вторая и контрольная группы существенно между собой не различались. Наиболее интересно в этих результатах то, что и стопроцентный успех и стопроцентная неудача в одинаковой степени не повышали устойчивость испытуемых к последующей неудаче.

Очень сходные результаты получаются в опытах и над детьми, и над щенками, и над крысятами. Наводит на размышления, не правда ли? До сих пор расстраиваюсь, что мне так и не удалось рассказать обо всём этом студенту.

Мы хотим, чтобы наши дети выросли умными и развитыми, не так ли? Что мы должны для этого делать?

В книге Ури Бронфенбреннера «Два мира детства. Дети в США и СССР» (М.: Прогресс, 1976) автор рассказывает об одном проекте, получившем впоследствии название «тридцатилетний эксперимент». Речь в нём шла о том, чтобы «вывести в люди» умственно отсталых детей, содержащихся в специальном приюте, добиться того, чтобы они могли жить самостоятельно.

Эксперимент состоял из многих этапов, но наиболее трогательным, если не душераздирающим, был самый первый из них. Каждого ребенка прикрепили к своего рода подставной суррогатной «маме»; такими мамами служили умственно отсталые женщины, содержащиеся в том же приюте. Через два года специальные измерения показали, что уровень интеллекта у детей вырос в среднем на 20–30 пунктов; в то же время уровень интеллекта у детей контрольной группы снизился. На меня сильнейшее впечатление произвел тот факт, что эти мамы явно не могли вести со своими детьми какие бы то ни было развивающие занятия. Никаких математических кружков, никаких головоломок, никаких интеллектуальных игр. Всё, что они могли — это обнимать детей, целовать, пеленать и вообще всячески с ними тетешкаться. И вот, оказывается, что по крайней мере в определенном возрасте эмоциональное тепло, родительская ласка гораздо важнее для развития ребенка, и в том числе — особо это подчеркиваю — для развития его *интеллекта*, чем любые другие формы деятельности и обучения. Родители, не забывайте об этом!

Не следует превращать эту книгу в психологическое попурри (к тому же не очень квалифицированное). Но я всё же вернусь еще раз к феноменам Пиаже и перескажу один опыт, который — единственный — привел к частичному успеху и к усвоению закона сохранения. Речь идет о «познавательных конфликтах» Яна Смедслунда (они описаны, в частности, в упоминавшейся выше книге Джона Флейвелла). Цитирую:

> Если, например, данный испытуемый был склонен полагать, что удлинение шарика увеличивает количество пластилина, а убавление кусочка уменьшает его количество, экспериментатор производил сразу и ту, и другую операцию [. . .] Подобная процедура была выбрана для того, чтобы *заставить испытуемого приостановиться, заставить его колебаться между взаимно конфликтующими стратегиями* [выделено мной — А. З.]; автор ожидал, что в результате ребенок будет медленно склоняться к более простой и последовательной схеме убавления-прибавления [. . .]

Весьма характерно, что в этих опытах ребенку ничего не объясняли и ничего не проверяли на весах. «Научить» удалось четырех детей из тринадцати, и «разучить» их обратно потом не удалось.

Я знаю за собой такое свойство — делать далеко идущие выводы при недостаточных основаниях; а также и порой противоречить самому себе (совсем недавно твердил, что нет у нас такой цели — научить ребенка законам сохранения, и вдруг вроде бы пытаюсь объяснить, как это можно было бы сделать). Неважно! Я хочу возвести в принцип, в основу моей педагогики вот эти слова: *заставить приостановиться, заставить колебаться между взаимно конфликтующими стратегиями*. Этот подход я противопоставляю другому, который исходит из того, что интеллект — это умение быстро решать головоломки. Рискуя уже в который раз впасть в возвышенный тон, я бы сказал: наша цель — воспитание такой породы людей, которую можно было бы назвать *человек задумывающийся*.

Конкретные примеры будут дальше.

Как относиться к теориям

Передо мной увлекательнейшая книжка со скучным названием «Математическое моделирование в экологии: историко-методологический анализ». Авторов пятеро: В. Н. Тутубалин, Ю. М. Барабашева, А. А. Григорян, Г. Н. Девяткова, Е. Г. Угер; лидером команды несомненно является Валерий Николаевич Тутубалин, известный математик, а также и известный критик применений математики в других науках. Вроде бы тема не имеет отношения к тому, что мы здесь обсуждаем. Но именно в этой книге я впервые нашел четкую формулировку того, что долго и безуспешно пытался высказать сам — того, как следует относиться к теоретическим построениям. По отношению к психологии это, мне кажется, еще более верно (и важно), чем по отношению к экологии.

Среди прочего в книге рассматриваются также классические уравнения Лотки—Вольтерра. Исходная идея достаточно проста. Имеются, скажем, лисы и кролики, причем лисы поедают кроликов. Последних становится всё меньше, и у лис возникает дефицит еды. Теперь уменьшается численность лис; жизнь у кроликов становится менее опасной, и теперь уже их численность возрастает. У лис изобилье еды, и их количество начинает расти; число кроликов опять падает, и всё начинается сначала. Эта модель довольно легко переводится на язык дифференциальных уравнений. Удача: уравнения решаются в явном виде (редкий в этой теории случай), и получаются аккуратные циклы на фазовой плоскости и аккуратные колебания, если рассматривать обе численности как функцию времени.

Теория готова; теперь надо ее проверять экспериментально. Натурные эксперименты, т. е. измерения численностей видов (не обязательно лис и кроликов, но любых двух видов, один из которых поедает другой, например, щук и карасей) в живой природе, прямо скажем, ни к чему разумному не приводят. Это и понятно: слишком много вмешивается посторонних факторов. Попытки как-то выделить и учесть влияние этих факторов оказываются слишком сложными и в итоге неубедительными. Есть еще возможность проведения лабораторного эксперимента, где все факторы строго контролируются, да и виды выбираются такие — вроде дрожжей — с которыми гораздо легче иметь дело, чем со зверями. Но даже и в этом случае статистическая обработка данных проведена не очень квалифицированно (это 30-е годы, математическая статистика только создавалась), и придти к определенным выводам трудно. В районе Гудзонова залива даже было обнаружили колебания численности зайцев и рысей. Но вот беда: циклы на фазовой плоскости крутились в другую сторону — как если бы хищниками были зайцы, а жертвами — рыси. Статья на эту тему саркастически называлась «Едят ли зайцы рысей?»

Одним словом, подтвердить теорию на опыте не удается. Каков же вывод? Выбросить ее в корзину? Некоторые философы — критики науки — считают именно так. Но авторы книги — не философы, а работающие ученые, и они приходят к совершенно противоположным выводам. Ничего подобного, говорят они. В процессе попыток подтвердить (опровергнуть, уточнить, развить, видоизменить) теорию Лотки—Вольтерра специалисты произвели множество весьма полезных измерений и приобрели совершенно бесценный опыт. Он, быть может, и не выражается в виде простых уравнений; но всё же сегодня экологи знают гораздо больше, чем в 20-х годах прошлого века. Без этого исходного толчка они просто не знали бы, с какого конца приниматься за дело, что и зачем измерять. Они так до сих пор и оставались бы на уровне общих деклараций типа «всё в природе взаимосвязано».

Следует только иметь в виду, что каждый автор концепции вкладывает в свое детище так много души, что потом уже верит в нее как в Священное Писание. Хорошо мне, дилетанту: я могу жонглировать разными, в том числе и противоречащими друг другу теориями, могу сам изобретать новые на пустом месте (или почти) и назавтра отрекаться от них. Среди психологических теорий есть такие, которым я стопроцентно доверяю: примером являются феномены Пиаже. Есть такие, в которые я не верю ни на грош; к ним относится, в частности, распространенная в нашей стране «теория поэтапного формирования умственных действий», а также то, как тот же Пиаже объяснял освоение ребенком родного языка (читайте на эту тему превосходную книжку: Steven Pinker «The Language Instinct: How the Mind Creates Language»). Но если относиться к теориям без прозелитизма, то интересны они все, так как все дают пищу для ума — и материал для задач!

Авторы книги об экологии рассказывают нам такую историю-притчу. Небольшая группа путешествует по берегам и островам Белого моря. Знающие люди сказали, что на некотором острове имеется пресноводное озеро, в котором окунь прекрасно клюет на макароны. А может, мы как раз на этом острове? Как же пройти к озеру? Идти напролом по карельской тайге, перемежаемой горами и болотами — небольшое удовольствие. Идея («теория»)! Вода из озера должна куда-то деваться; наверное, из него выпадает ручей; а вдоль ручья может идти тропа. Идем вдоль берега моря; и в самом деле, вскоре обнаруживается ручей, а вдоль него — тропа. Всё прекрасно! Поднимаемся по тропе вдоль ручья. Вскоре, однако, ручей исчезает вовсе, тропа вместе с ним, «и лезем мы куда-то на высокую гору, с которой ничего, кроме леса, не видно. Некоторое время бродим без цели и смысла, вдруг каким-то образом попадаем на тропу, которая и выводит к озеру». И окуни там в самом деле великолепные! Мораль: *теория нужна не для того, чтобы правильно отражать реальность, а для того, чтобы начать что-то делать — а дальше видно будет.* (Хотя, как отмечают авторы в другом месте, правильная теория всё же лучше, чем неправильная.)

Так что пора и мне «начать что-то делать» и от болтовни на общие темы вернуться к нашему кружку.